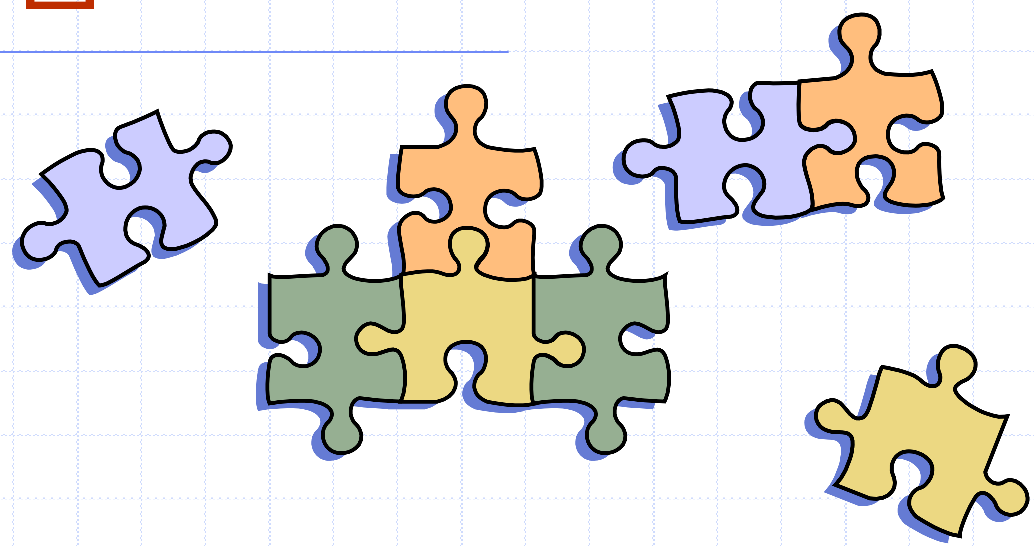
분리집합

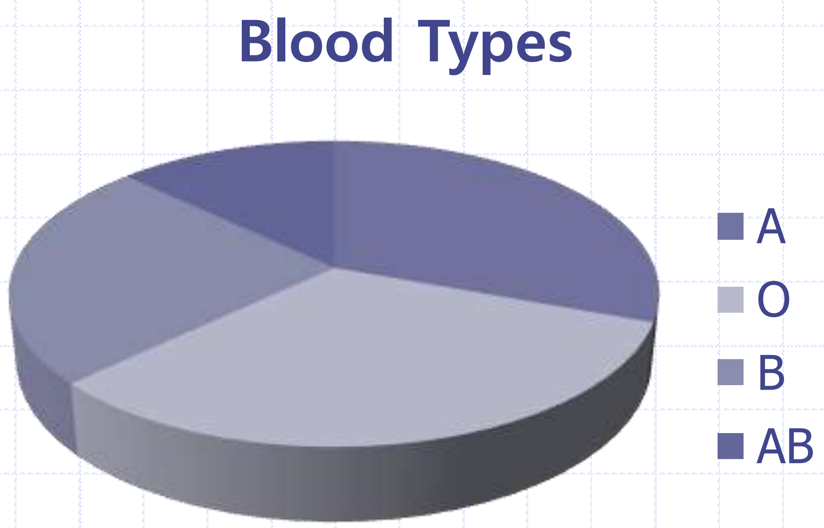


Outline

- 9.1 분리집합 ADT
- 9.2 분리집합 ADT 메쏘드
- 9.3 분리집합 응용
- 9.4 분리집합 ADT 구현
- 9.5 응용문제

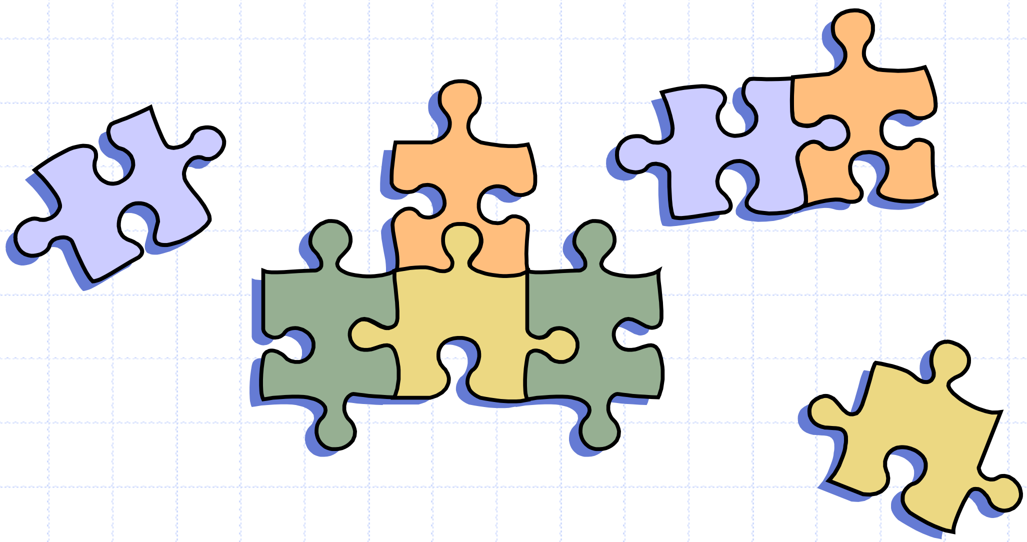
분리집합 ADT

- 분리집합 ADT는 **분할**, 즉, 상호배타적인 집합들을 모델링
- 집합 ADT의 특별한 버전
- 분리집합 간의 교집합이나 차집합 연산은 무의미



분리집합 ADT 메쏘드

- 주요 메쏘드
  - set find(e): 원소 ***e***가 속한 집합을 반환
  - union(x, y): 집합 ***x***, ***y***를 통합
- 보조 메쏘드
  - integer size(S): 집합 ***S***의 원소 수를 반환

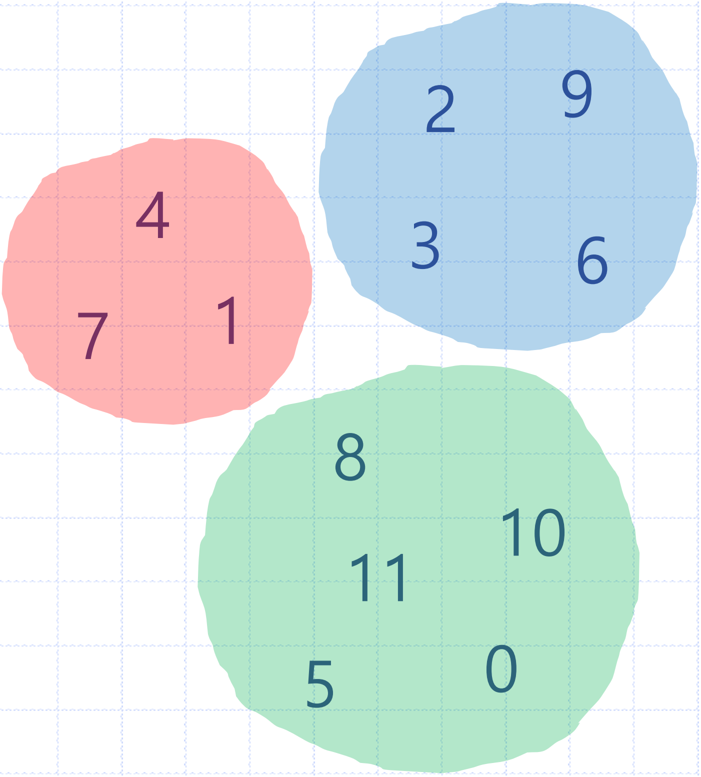


분리집합 응용

- 직접 응용
  - 동치관계(equivalence relation) (**예:** 그래프)
  - 최소신장트리(minimum spanning tree)
- 간접 응용
  - 알고리즘을 위한 보조 데이터구조
  - 다른 데이터구조를 구성하는 요소

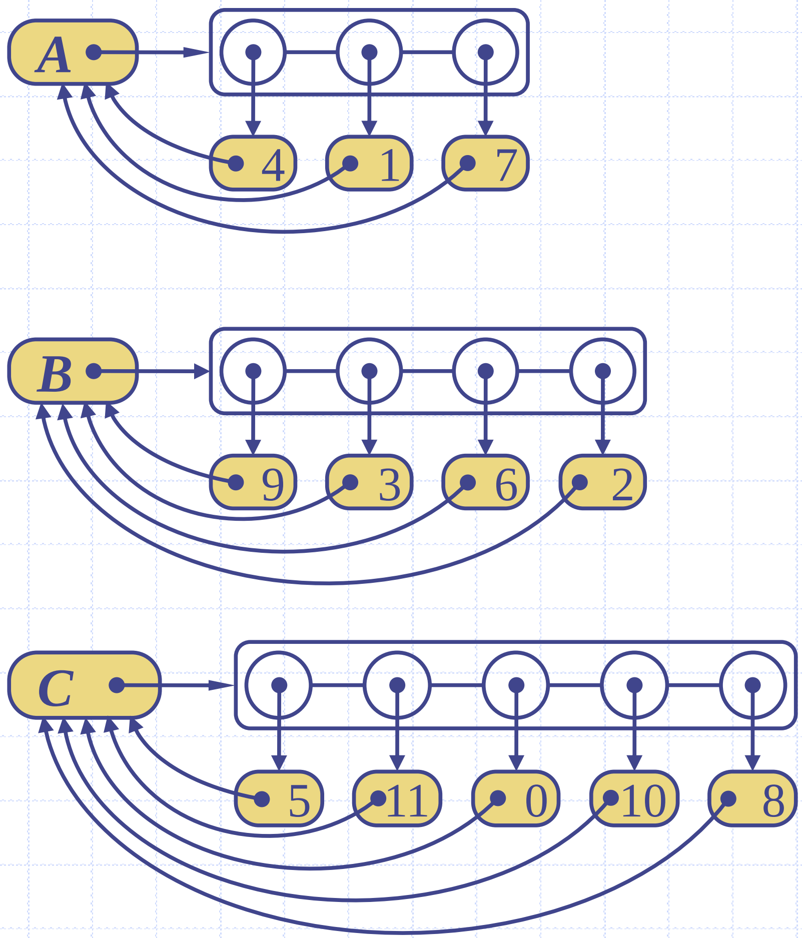
분리집합 구현

- **리스트**에 기초한 구현
  - find는 빠르고 union은 느리다
  - 배열 또는 연결리스트 사용
- **트리**에 기초한 구현
  - find는 느리고 union은 빠르다
  - find 성능 개선 가능



리스트에 기초한 구현

- 한 개의 분리집합에 대해 한 개의 **리스트**를 사용
- 각 원소는 소속집합으로 향하는 참조를 가진다
- **예**: 분리집합 A, B, C
  - $A = \{1, 4, 7\}$
  - $B = \{2, 3, 6, 9\}$
  - $C = \{0, 5, 8, 10, 11\}$
- find(e): e가 소속된 집합을 반환 – 실행시간은 **O**(1)
- union(x, y): x, y 중 작은 집합의 원소들을 큰 집합으로 이동 (즉, 소속집합을 변경) – 실행시간은 연결리스트를 사용할 경우 $\mathbf{O}(min(|A|, |B|))$



배열을 사용할 경우

- 소속집합을 원소값으로 하는 크기 n의 배열 S로 분리집합을 표현
- find(e): $S[e]$ 접근 – 실행시간: $O(1)$
- union(x, y): 집합 y 소속의 원소들을 모두 집합 x 소속으로 (혹은 반대로) 변경 – 실행시간은 배열 전체를 검사하므로 $\Theta(n)$
- **전제:** 원소와 배열첨자, 즉 $[0, n-1]$ 간의 대응관계 관리(**예:** index(e))
- **예:** 분리집합 A, B, C
  - $A = \{1, 4, 7\}$
  - $B = \{2, 3, 6, 9\}$
  - $C = \{0, 5, 8, 10, 11\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
S	C	A	B	B	A	C	B	A	C	B	C	C	

find와 union

Alg ***find***(*e*)
  input element ***e***
  output set

1. **return** $S[e]$
  {Total **O**(1)}

Alg ***union***(*x*, *y*)
  input set ***x***, ***y***
  output set $x \cup y$

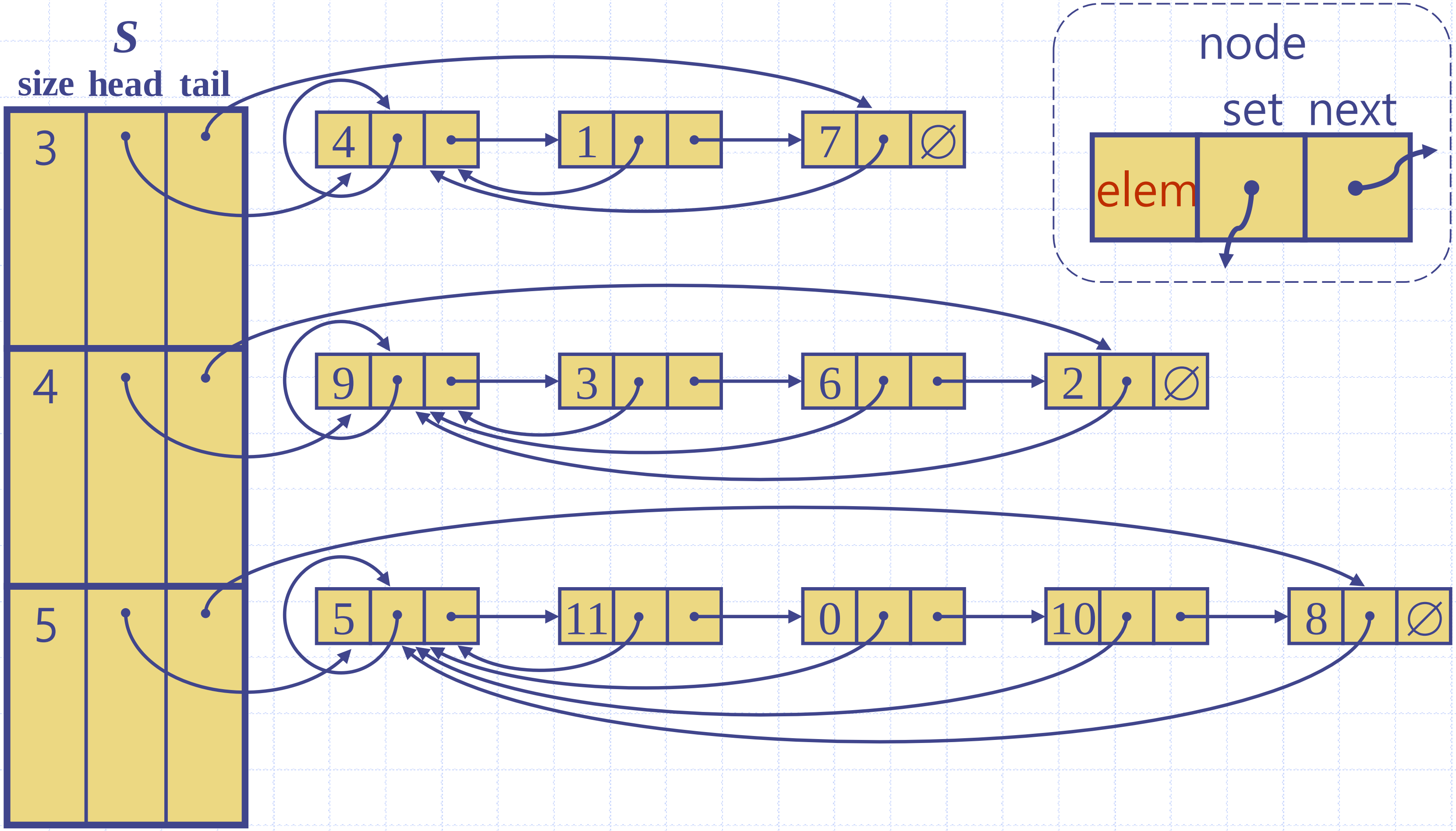
1. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$
  if $(S[i] = y)$
    $S[i] \leftarrow x$
2. **return**
  {Total **O**(n)}

연결리스트를 사용할 경우

- 분리집합 집단을 **레코드의 배열**로 표현
- 각 분리집합은 **단일연결리스트**로 구현
- 레코드 필드
  - **size:** 집합원소 수
  - **head:** 집합원소 노드들 중 첫 노드 주소
  - **tail:** 집합원소 노드들 중 마지막 노드 주소
- 집합원소 노드 저장내용
  - **elem:** 원소
  - **set:** 소속집합 노드 포인터
  - **next:** 다음 원소노드 포인터

- find(e): $\boldsymbol{e}$ 노드의 set 필드를 접근
  - 실행시간: $\mathbf{O}(1)$
- union(A, B): $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 중 작은 집합을 큰 집합에 병합
  - 실행시간: $\mathbf{O}(\boldsymbol{min}(|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{B}|))$
  - 상각실행시간: $\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$
- **전제**
  - 원소와 노드 주소 간의 대응관계 관리(**예:** node(e))
  - 각 집합의 헤드노드 원소와 집합식별자 간의 대응관계 관리(**예:** setid(e))

예



find와 union

Alg *find*(*e*)
  input element ***e***
  output set

1. **return** ***setid***(**(*node*(*e*).set).elem**)

Alg ***union*(*A*, *B*)**
  input set ***A***, ***B***
  output set $A \cup B$

1. **if** (***S***[*A*]**.size** < ***S***[*B*]**.size**)
    smallerSet, ***largerSet*** ← ***A***, ***B***
  else
    smallerSet, ***largerSet*** ← ***B***, ***A***
2. ***headS***, ***tailS*** ← ***S***[*smallerSet*]**.head**, ***S***[*smallerSet*]**.tail**
3. ***headL***, ***tailL*** ← ***S***[*largerSet*]**.head**, ***S***[*largerSet*]**.tail**
4. ***p*** ← ***headS***
5. **while** (***p*** $\neq \varnothing$) {**O**(*min*(|*A*|, |*B*|)}
    p*.set** ← ***headL
    p ← ***p*.next**
6. ***tailL*.next** ← ***headS***
7. ***S***[*largerSet*]**.tail** ← ***tailS***
8. ***S***[*largerSet*]**.size** ← ***S***[*A*]**.size** + ***S***[*B*]**.size**
9. ***S***[*smallerSet*]**.head**, ***S***[*smallerSet*]**.tail** ← $\varnothing$
10. ***S***[*smallerSet*]**.size** ← 0
11. **return**

{Total **O**(*min*(|*A*|, |*B*|)}

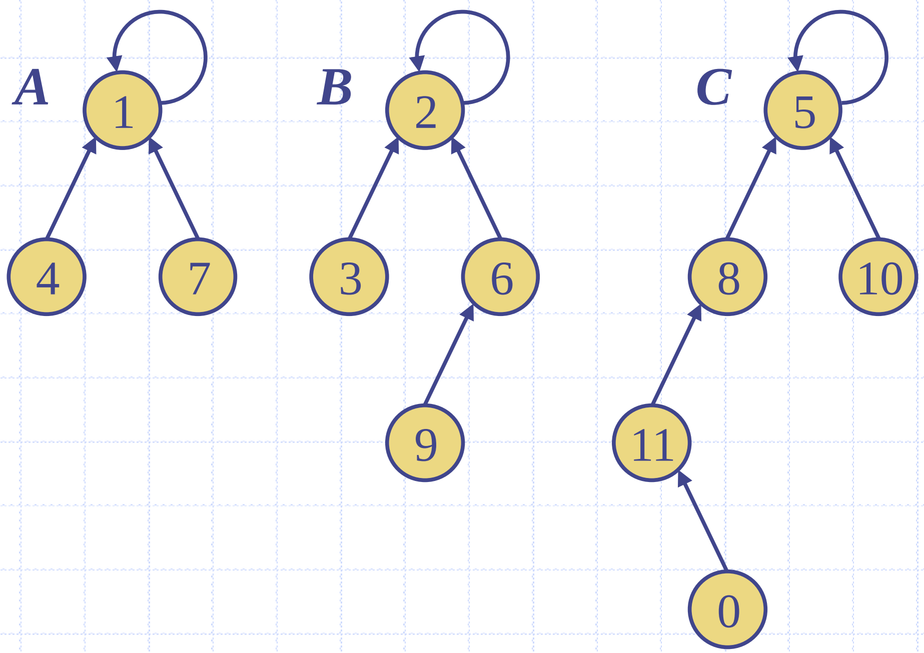
트리에 기초한 구현

- 한 개의 분리집합에 대해 한 개의 **트리**를 사용
- 각 집합은 각 트리의 **루트**로 식별

- **연결 및 가상트리로 구현**
  - **연결트리:** 각 노드는 원소 및 부모를 가리키는 포인터를 저장 – 단, 루트는 자신을 부모로 하는 포인터를 저장
  - **가상트리:** 자식을 가리키는 포인터가 불필요하므로, 트리 ADT 대신 **배열**에 의한 가상의 트리로 구현하면 충분 (**예:** ***Parent*** 배열)

트리에 기초한 구현 (conti.)

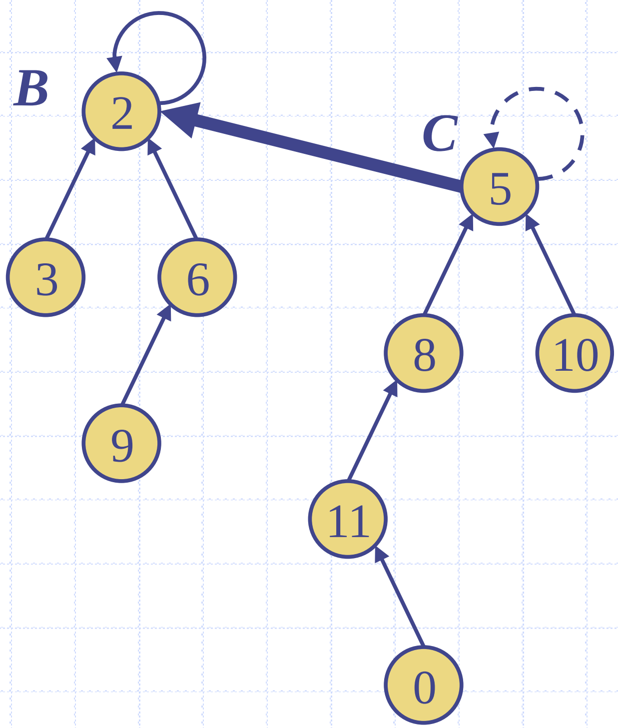
- **예:** 분리집합 ***A*, *B*, *C***
  - $A = \{1, 4, 7\}$
  - $B = \{2, 3, 6, 9\}$
  - $C = \{0, 5, 8, 10, 11\}$



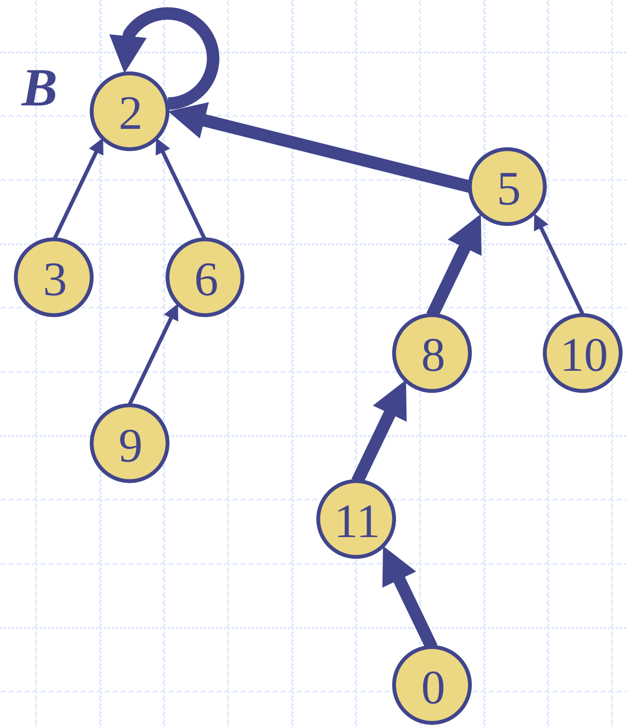
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*n*
Parent	11	1	2	2	1	5	2	1	5	6	5	8	

트리에 기초한 구현 (conti.)

- union(x, y): 트리 ***x***, ***y*** 중 하나를 다른 트리의 부트리로 만든다
  - 실행시간: **O**(1)
- **예**: union(B, C)



- find(e): ***e***의 부모포인터를 따라 루트까지 올라간다
  - 실행시간: **O**(***n***)
- **예**: find(0)



find와 union

Alg ***find*****(*e*)**
  input element ***e***
  output set

1. **if** (***Parent***[***e***] = ***e***)
   return ***e***
  else
   return ***find***(***Parent***[***e***])
   {Total **O**(***n***)}

Alg ***union*****(*x*, *y*)**
  input set ***x***, ***y***
  output set ***x***∪***y***

1. ***Parent***[*y*] ← ***x***
2. **return**
   {Total **O**(1)}

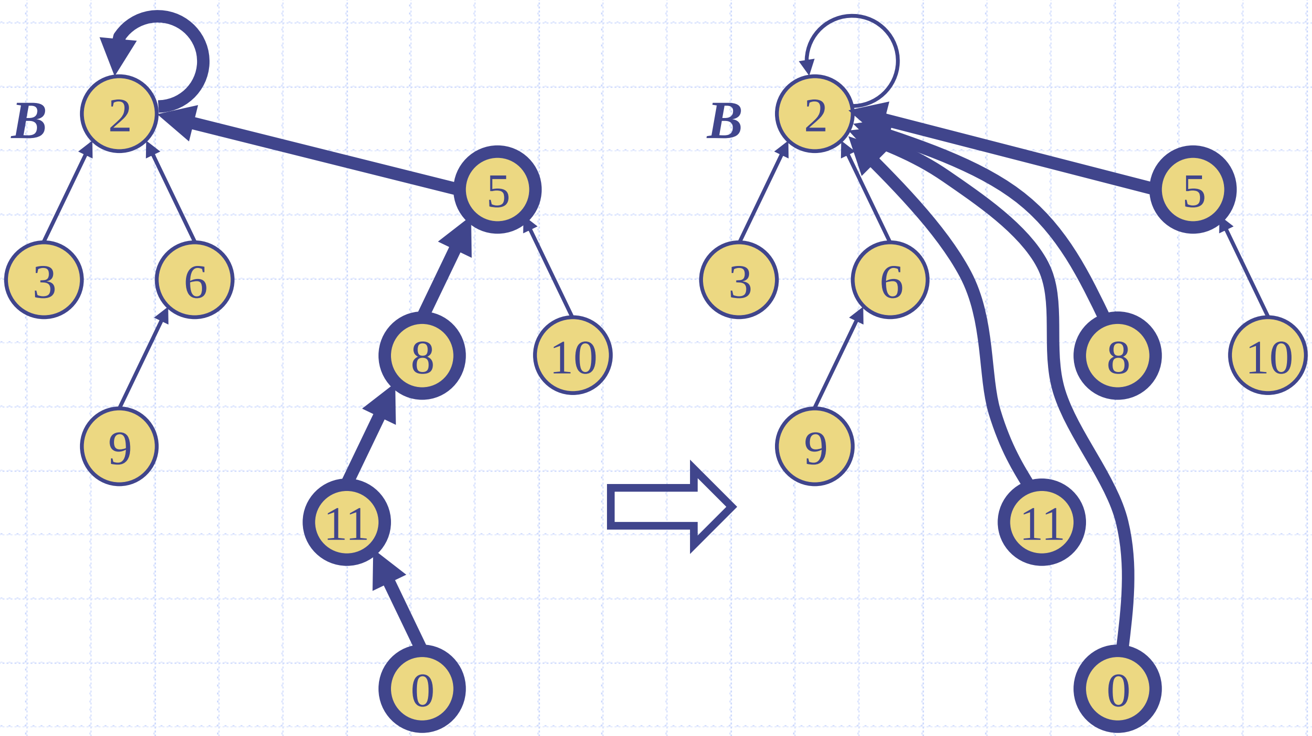
성능 개선을 위한 전략

- **크기**에 의한 union(union-by-size)
  - 각 노드의 크기 필드에 그 노드를 루트로 하는 부트리의 노드 수를 저장하여(**예:** ***Size*** 배열), ***Parent*** 배열과 병행 사용
  - union 작업 시에 두 개의 트리 중 작은 집합트리를 큰 집합트리의 부트리로 만들고 결과트리의 루트의 크기 필드 값을 갱신

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*n*
Parent	11	1	2	2	1	5	2	1	5	6	5	8	
Size	1	3	4	1	1	5	2	1	3	1	1	2	

성능 개선을 위한 전략 (conti.)

- **경로압축**(path-compression): find 수행시 작업 경로상의 모든 노드 *v*의 부모 포인터를 루트로 변경
- **예**: find(0)



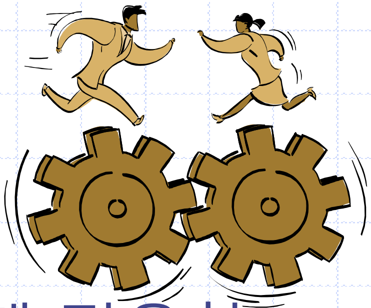
find와 union

```
Alg find(e)
    input element e
    output set

1. if (Parent[e] = e)
        return e
    else
        Parent[e] ← find(Parent[e])
        return Parent[e]
                        {Total O(log*n)}
```

```
Alg union(x, y)
    input set x, y
    output set x∪y

1. if (Size[x] < Size[y])
        Parent[x] ← y
        Size[y] ← Size[x] + Size[y]
    else
        Parent[y] ← x
        Size[x] ← Size[x] + Size[y]
3. return
                        {Total O(1)}
```

- $\log^* n$은 중첩 log n을 의미
  즉, $\log^* n = \log \log \log \ldots n \approx 1$

두 전략의 호환성



- **경로압축**을 **크기**에 의한 union 전략과 함께 적용할 경우,
- 경로압축을 하더라도 루트노드의 size 값은 불변이므로 차후 정확한 union 연산에 영향이 없다
- 다만, 루트를 제외한 경로상의 노드들의 size 값들은 **부정확**한 채로 남게 된다
- 경로압축 수행시 이들이 정확한 값을 갖도록 유지하는 것은 복잡한 계산만 수반할 뿐 차후 union이나 find 연산에서 사용되지도 않으므로 이 값들을 그대로 방치한다

전략 병행 시 성능

- **경로압축**을 **크기**에 의한 union 전략과 함께 적용할 경우,
- **종합분석:** 전체 n개의 원소로 구성된 임의의 분리집합 집단에 대해 n회의 union과 find 작업을 수행하는데 걸리는 총 실행시간: $\mathbf{O}(n \log^* n)$
- 따라서, find 작업의 **상각실행시간:** $\mathbf{O}(\log^* n)$
  - **참고:** $\log^* n$은 중첩 $\log n$을 의미, 즉

    $\log^* n = \log \log \log \ldots n \approx 1$
- union의 실행시간이 $\mathbf{O}(1)$이므로, union과 find 작업 모두 최선의 시간 성능으로 수행

응용문제: 높이에 의한 합집합

- **크기** 대신, **높이**(height)에 의한 union(x, y)은 트리로 구현된 분리집합 *x*, *y* 중 높이가 작은 트리를 다른 트리의 루트의 부트리로 만든다
- **선형시간**에 수행하는, **높이**에 의한 union(x, y) 알고리즘을 작성하라
- **전제:** 각 노드는 크기 대신 높이 값을 유지하여야 하므로 ***Size*** 배열 대신 ***Height*** 배열을 사용한다
- 최초에 모든 원소가 단독노드로 존재한다고 가정하고, 이후 처리에서 높이에 의한 union 전략을 적용할 경우 총 *n*개의 원소로 이루어진 분리집합 집단에서 임의의 노드가 가질 수 있는 높이의 **상한**은 얼마인가?

해결: 높이에 의한 합집합 알고리즘

Alg ***union***(x, y) {union by height}
  input set x, y
  output set $x \cup y$

1. **if** (***Height***[x] < ***Height***[y])
   Parent[x] $\leftarrow y$
  else
   Parent[y] $\leftarrow x$
2. **if** (***Height***[x] = ***Height***[y])
   Height[x] $\leftarrow$ ***Height***[x] + 1
3. **return**

{Total **O**(1)}

해결: 분석 (conti.)

- 높이가 h인 트리를 높이가 h보다 작은 트리와 합치는 경우에 높이는 여전히 h가 되면서 노드 수만 늘어난다
- 같은 높이 h인 두 개의 트리를 합치는 경우에만 높이가 $h + 1$로 증가한다
- 높이 k인 트리의 노드 수는 최소 2^k이다(**직관**에 의함)
- 이를 역으로 적용하면 노드 수가 n인 트리의 높이는 $\log n$를 넘지 않는다 – 즉 $\mathbf{O}(\log n)$이다

- **증명:** 높이 k인 트리의 노드 수는 최소 2^k임 (**수학적귀납법**에 의함)
  - $k = 0$인 경우 $2^0 = 1$이므로 만족
  - 높이가 h인 트리의 최소 노드 수가 2^h이라 전제하면, 같은 높이 h인 두 개의 트리가 합쳐진 높이 $h + 1$의 트리는 최소 $2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$개의 노드를 가지므로 전제를 만족

해결: 경로압축과 병용 (conti.)

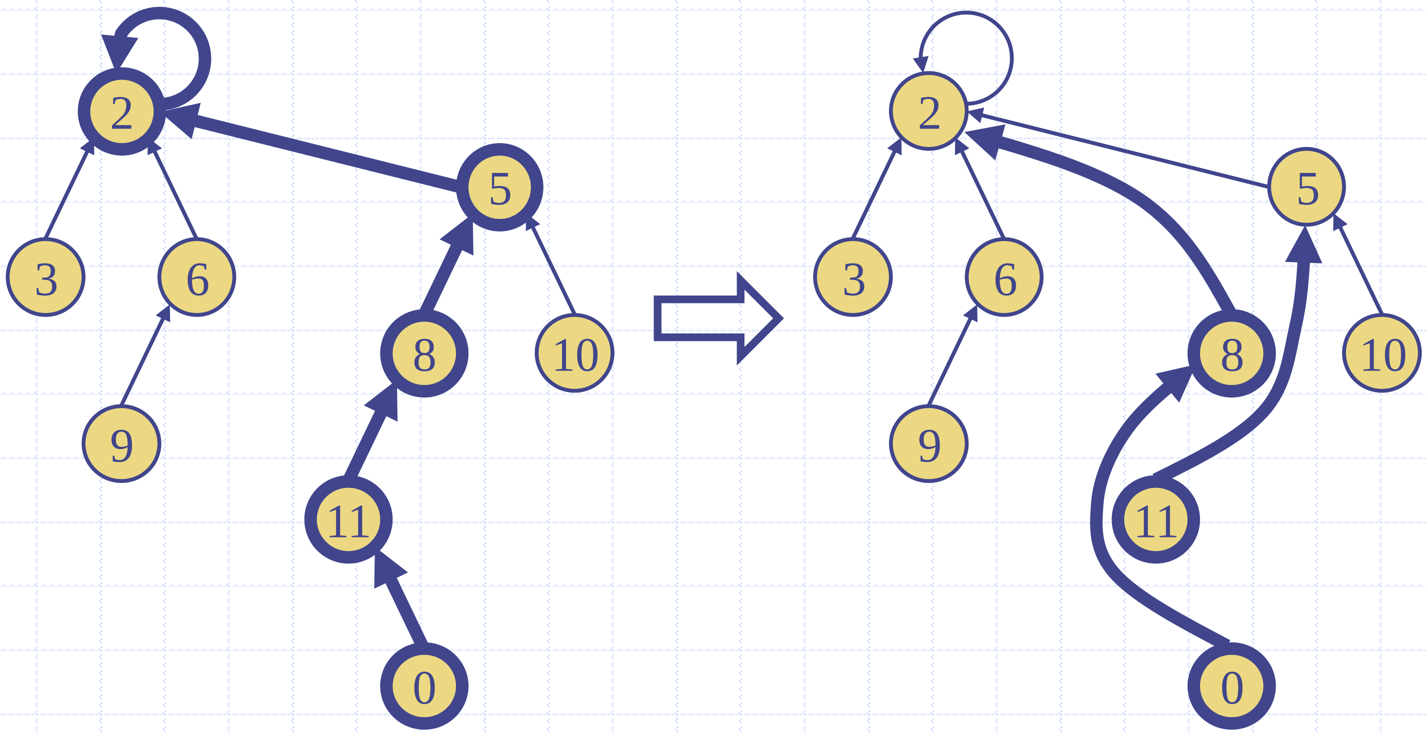
- **높이**에 의한 union 전략을 (전체적 또는 부분적) **경로압축**과 함께 적용하는데 관한 고려사항
  - 경로압축을 수행하면 루트노드의 size 값은 변치 않는 것과 달리 height 값은 낮아지는 쪽으로 변화
  - 하지만 루트노드가 정확한 height 값을 갖도록 유지하는 연산은 매우 복잡해서 실용성이 떨어지므로 수행하지 않는 것이 보통
  - 따라서 정확하지 않은 대략의 height이므로 이를 **rank**라고도 부르며, 그런 의미에서 이 전략을 "**랭크**에 의한 union"이라고도 부른다

응용문제: 부분적 경로압축

- 트리로 구현한 분리집합에 대한 find 작업 수행시 **부분적 경로압축**(partial path-compression) 전략을 적용하기로 한다
- **부분적 경로압축**이란 find 작업 수행시 find 경로상의 노드들의 부모포인터를 루트가 아닌, 그 노드의 **조부모노드**를 가리키도록 변경함을 말한다 – 다만 조부모가 없는 노드의 부모포인터는 변경 처리하지 않는다
- 이 방식의 find 전략이 **크기** 또는 **높이**에 의한 union 전략과 병행 적용되면, **종합분석**을 통해 find 작업의 **상각실행시간**은 $\mathbf{O}(\log^* \boldsymbol{n}) \approx \mathbf{O}(1)$
- 위의 전략을 수행하는 find(e) 알고리즘을 작성하라

응용문제: 부분적 경로압축 (conti.)

- 예: find(0)



해결

Alg ***find(e)*** {nonrecursive}
  input element ***e***
  output set

1. $p \leftarrow e$
2. **while** $(Parent[p] \neq p)$
   $par \leftarrow Parent[p]$
   if $(Parent[par] \neq par)$
     $Parent[p] \leftarrow Parent[par]$
   $p \leftarrow par$
3. **return** p