Tema 1. Problemas de Programación Lineal.

Introducción

Metodología

Formalización de Modelos

Terminología Básica

Resolución Gráfica

Introducción

La Programación Lineal es básica en Optimización. Se ocupa del estudio y resolución de problemas en los que se maximiza o minimiza una función lineal en un contexto definido por inecuaciones/ecuaciones lineales.

El Método del Simplex, introducido por **G. B. Dantzig en 1947**, resuelve cualquier problema de Programación Lineal. Está considerado como uno de los 10 algoritmos más importantes del siglo XX.

La Programación Lineal tiene gran importancia en Ingeniería (comunicaciones, transporte, localización,..), Gestión y Organización (planificación, optimización de recursos,…), Economía, Gobierno (políticas de inversiones, de repartos,…), etc.

Nuestro estudio de la Programación Lineal contiene los elementos necesarios para aplicar el **Método del Simplex** con los complementos imprescindibles para facilitar la resolución de distintos casos prácticos.

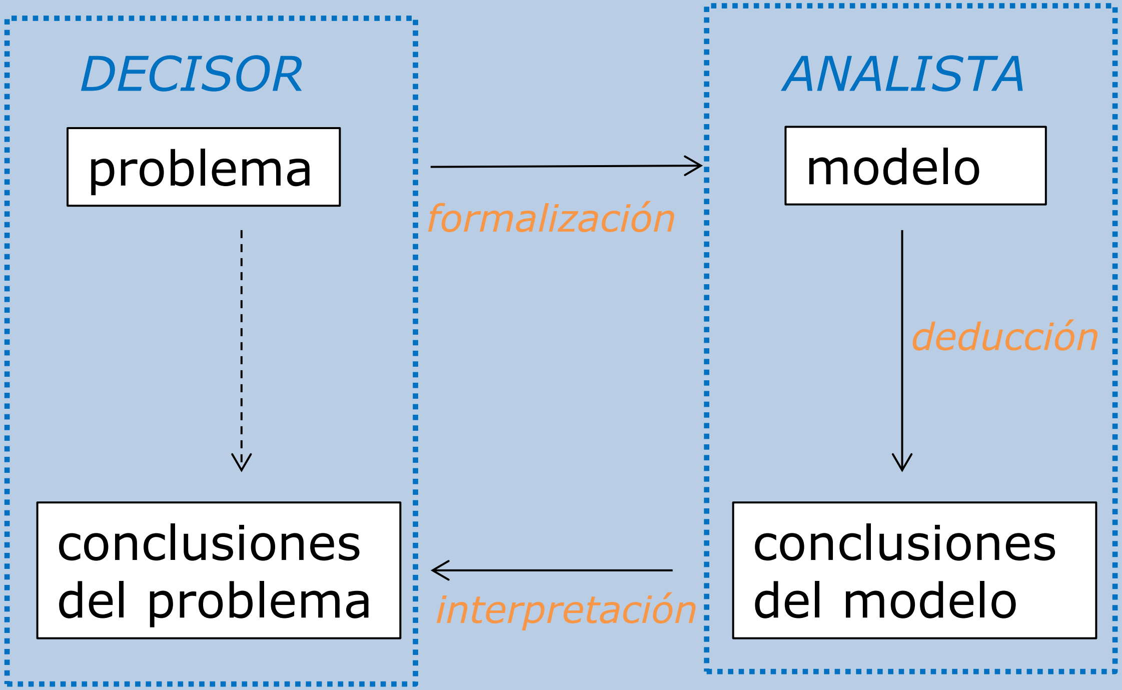
Se inicia con la formalización de distintos problemas de Programación Lineal. Se introduce la terminología básica y se aplica la resolución gráfica.

En el siguiente tema se estudia el Método del Simplex. Se introducen el concepto fundamental de solución básica y las técnicas para encontrar una solución básica factible inicial. Luego se estudia la dualidad como una herramienta que posibilita la introducción de métodos alternativos como el **Método Simplex Dual**.

Acaba el estudio con los problemas de **Análisis de Sensitividad**.

Metodología

En Programación Lineal, como parte de la Investigación Operativa, se usa la metodología de ésta basada en el ***principio de modelización***. Un esquema de su aplicación es el siguiente.



Aunque las fases de formalización y de interpretación son esenciales, el trabajo en esta asignatura se centra más en la fase de deducción, desarrollando herramientas que posibiliten obtener conclusiones del modelo. Sin embargo, el trabajo desarrollado en esta fase puede resultar poco productivo si no se presta especial atención a las otras dos.

Por ello, nos dedicaremos en primer lugar a **formalizar** algunos problemas tipo.

Ejemplo 1: Problema de producción

Una empresa de ensamblaje de ordenadores comercializa tres tipos de aparatos. Portátiles (A), de sobremesa (B) y servidores (C). Antes de comercializar los productos deben ensamblarse en el departamento de producción y ser revisados en el departamento de control de calidad.
Los tiempos, en horas, empleados en ambas tareas (H1 y H2), los beneficios (en euros) de la venta de cada uno de los aparatos y las horas semanales disponibles, vienen especificados en la siguiente tabla:

	A	B	C	Horas disponibles
H1/aparato	10	16	22	200
H2/aparato	4	2	5	120
Beneficio/ aparato	275	325	675	

El problema que se plantea es el de determinar la cantidad de cada tipo de ordenadores que se deben ensamblar en una semana para maximizar los beneficios de las ventas de los productos finales (respetando las condiciones que se especifican).

Formalización de Modelos

Observamos que hay tres actividades (la producción de cada uno de los aparatos) cuyos niveles hay que determinar. Para llevarlas a cabo se utilizan dos recursos: tiempo de producción y tiempo de revisión. Sea x_j , j=1,2,3,la variable de decisión que está asociada al número de aparatos de cada tipo que se han de ensamblar.

Los beneficios (que hay que maximizar) serán iguales a

$$275x_1 + 325x_2 + 675x_3$$

Las condiciones de producción implican que:

- Las horas de producción empleadas no pueden superar 200

$$10x_1 + 16x_2 + 22x_3 \leq 200$$

- Las horas de revisión deben ser, a lo sumo, 120

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 120$$

El modelo matemático correspondiente es:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } 275x_1 + 325x_2 + 675x_3 \\ &\textit{sujeto a}\text{: } 10x_1 + 16x_2 + 22x_3 \leq 200 \\ &\qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ &\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

Formalización de Modelos

costos

$$\text{maximizar } 275x_1 + 325x_2 + 675x_3$$

$$\textit{sujeto a: } 10x_1 + 16x_2 + 22x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 120$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3$$

Función objetivo

Recursos

Restricciones

Coeficientes tecnológicos

Notación matricial

$$\max \; c^t x$$

$$s.a: \; Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Ejemplo 2: Problema de transporte

Tres almacenes ofertan un producto que se demanda en cinco mercados. Las cantidades ofertadas en origen, las demandas de los destinos (medidas ambas en cientos de kilogramos) y los costos de transporte (euros por unidad de producto) entre cada almacén y cada mercado, aparecen en la siguiente tabla:

	M1	M2	M3	M4	M5	Ofertas
Al1	3	5	2	4	6	38
Al2	5	2	7	6	3	44
Al3	4	6	8	9	5	69
Demandas	43	29	37	14	28	

Interesa diseñar una política de transporte, que minimice los costos globales, atendiendo las demandas de los mercados y respetando las ofertas de los almacenes

Las variables de decisión deben ser:

x_{ij}= cantidad de producto que se ha de transportar desde el almacén i al mercado j, para i=1,2,3, j=1,2,3,4,5

Formalización de Modelos

$$
\begin{aligned}
&\min\ 2x_{11}+5x_{12}+2x_{13}+4x_{14}+6x_{15}+5x_{21}+2x_{22}+7x_{23}+6x_{24}+3x_{25}+4x_{31}+6x_{32}+8x_{33}+9x_{34}+5x_{35}\\
&s.a:\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=38\\
&\qquad x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=44\\
&\qquad x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=69\\
&\qquad x_{11}+x_{21}+x_{31}=43\\
&\qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}=29\\
&\qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}=37\\
&\qquad x_{14}+x_{24}+x_{34}=14\\
&\qquad x_{15}+x_{25}+x_{35}=28\\
&\qquad x_{ij}\geq 0, i=1,2,3, j=1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

Este modelo, que elimina stocks en origen y en destino, es un caso particular de:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\\
&s.a: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ldots,m\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\ldots,n\\
&x_{ij}\geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n
\end{aligned}
\longrightarrow
\boxed{\begin{aligned}&\min\ c^t x\\ &s.a:\ Ax=b\\ &\qquad x\geq 0\end{aligned}}
$$

Terminología Básica

Un problema de Programación Lineal queda determinado por:

$$\begin{aligned} &\min \; c^t x \\ &s.a: \; Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar

siendo c el vector de costos, b el vector de recursos y A la matriz (con *m* filas y *n* columnas) de coeficientes tecnológicos.
x es el vector de variables de decisión.
Se supone que e rango de A es máximo y que este coincide con el número de filas.

Cualquier problema de Programación Lineal se puede convertir a uno equivalente expresado en la forma estándar.

a) Si aparece una inecuación en las restricciones, se convierte en ecuación sumando o restando una *variable de holgura*

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 10 \longrightarrow 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 10$$

$$7x_1 - 6x_2 + 4x_3 \geq 8 \longrightarrow 7x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 = 8$$

Conversión a la forma estándar

b) Si aparece una variable no positiva, multiplicando por -1 se convierte en no negativa

$$x_j \leq 0 \longrightarrow \boxed{-x_j \geq 0}$$

c) Si una variable no tiene signo especificado (libre, sin restringir en signo), se puede sustituir por la diferencia de dos variables no negativas.

Se observa que si: $x = \begin{cases} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{cases}$ definimos $x^+ = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{cases}$ y $x^- = \begin{cases} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

Resulta que $x^+, x^- \geq 0$ y que $x = x^+ - x^-$

d) Maximizar la función objetivo es equivalente al negativo del mínimo de dicha función

$$\max c^t x \longrightarrow \boxed{-\min -c^t x}$$

Conversión a la forma estándar

Dado el problema:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } 25x_1 - 35x_2 + 75x_3 \\ &\textit{sujeto a}: \ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 \le 20 \\ &\qquad -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \ge 18 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ &\qquad x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{aligned}$$

El correspondiente problema en la forma estándar es:

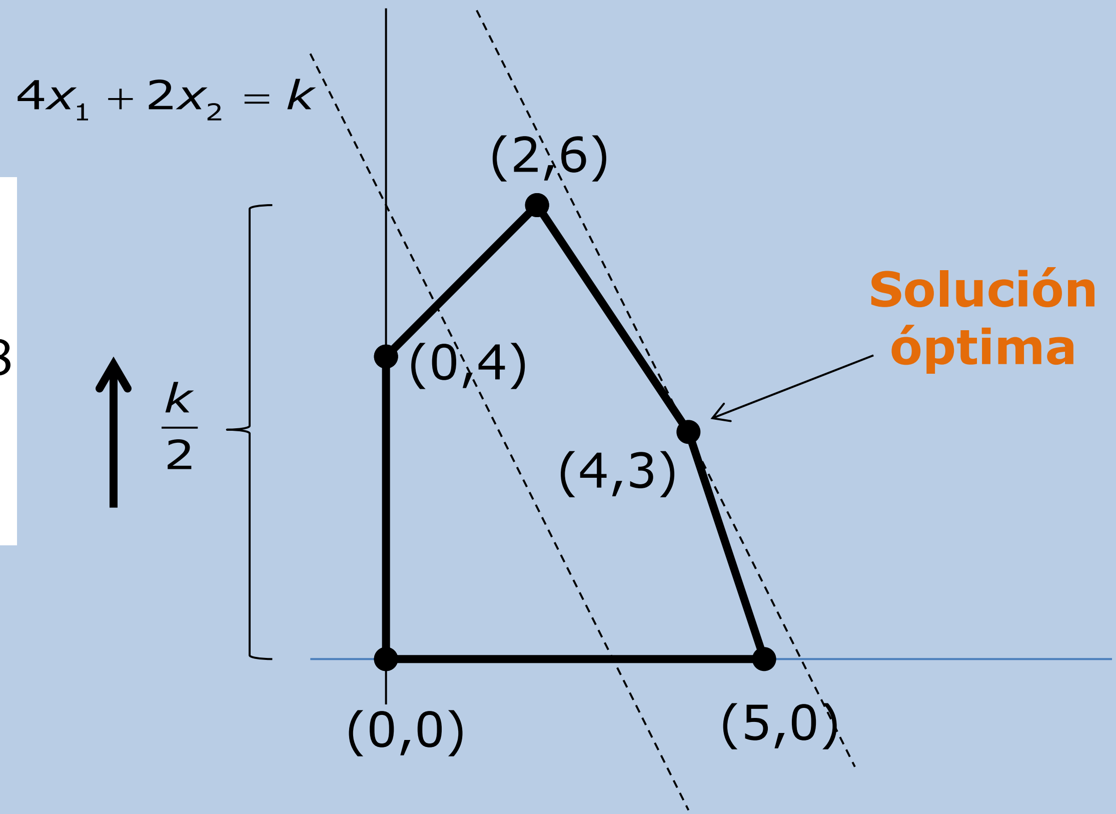
$$\begin{aligned} &-\text{minimizar } -25x_1 - 35x_2 - 75x_3 + 75x_4 \\ &\textit{sujeto a}: \ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_5 = 20 \\ &\qquad -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 6x_4 - x_6 = 18 \\ &\qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 10 \\ &\qquad x_j \ge 0, j = 1,\ldots,6 \end{aligned}$$

Resolución Gráfica

Un problema de Programación Lineal puede ser resuelto gráficamente siempre que se pueda dibujar. Obviamente, esto sería posible cuando el problema tenga dos variables o, más difícilmente, tres variables. Para la resolución gráfica no es necesario que las restricciones sean ecuaciones.

Ejemplo 1

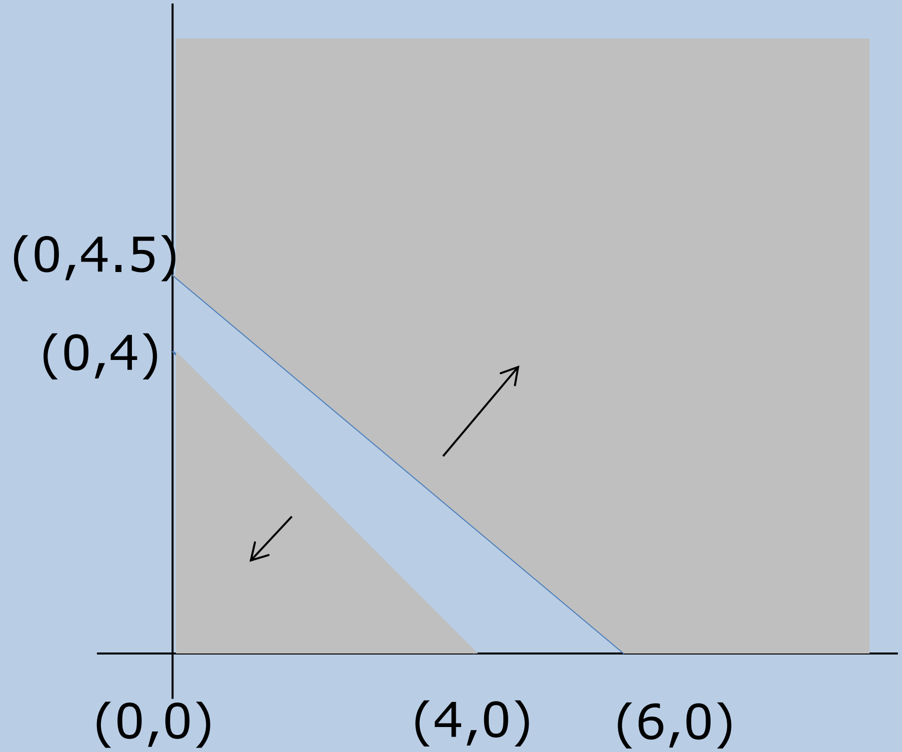
$$\begin{aligned} \text{maximizar } & 4x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeto a}: & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolución Gráfica

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } 2x_1 + 3x_2 \\ &\textit{sujeto a}: \quad x_1 + x_2 \leq 4 \\ &\qquad\qquad 3x_1 + 4x_2 \geq 18 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

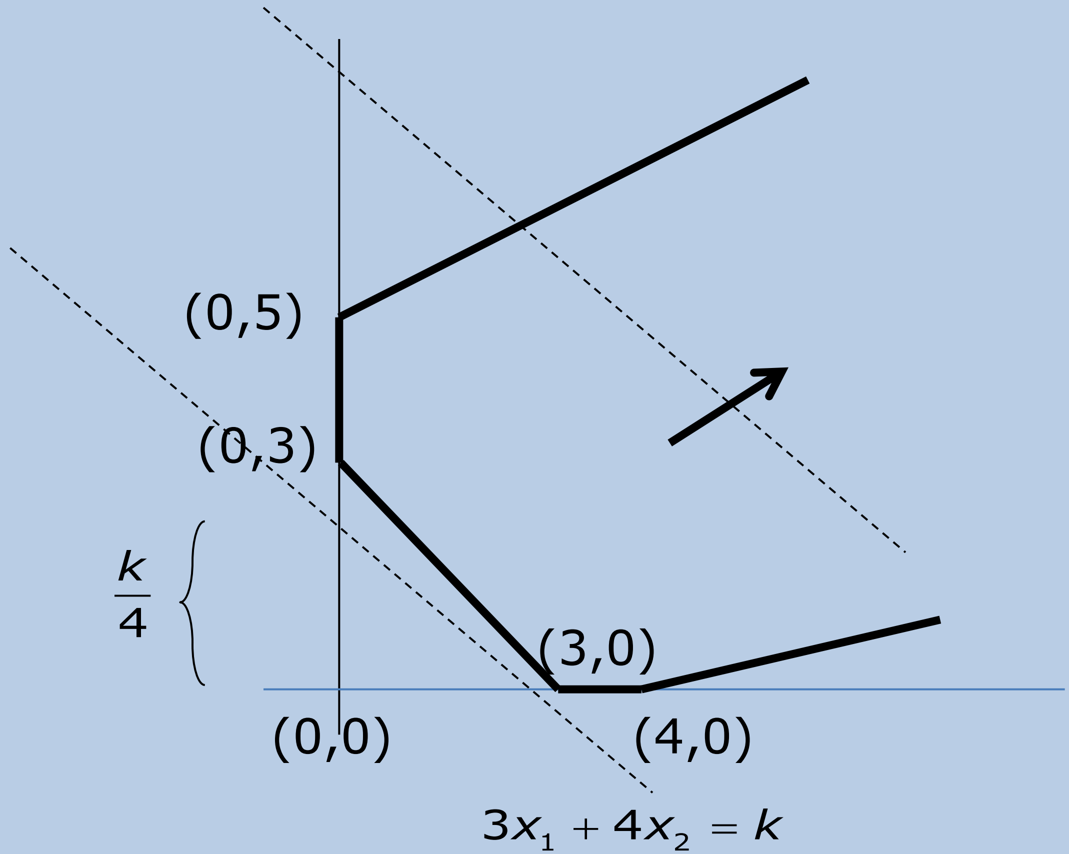


Problema no factible

Resolución Gráfica

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & 3x_1 + 4x_2 \\ \textit{sujeto a}: \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 - 4x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Problema no acotado