Tema 2. Método del Simplex.

Soluciones básicas y básicas factibles

Operaciones algebraicas

Método del Simplex

Tablas y aplicaciones del Método

No Acotación

Métodos para determinar soluciones básicas iniciales

- Método de las dos fases
- Método de Penalización

Soluciones básicas

Variable básica

En un sistema de *m* ecuaciones y *n* variables, $n \geq m$, una variable se denomina básica si su coeficiente es igual a uno en una de las ecuaciones y dicho coeficiente es igual a cero en el resto de las ecuaciones.

Ejemplo

En el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

la variable x_3 es básica en la primera ecuación.

Realizando operaciones que permiten pasar de un sistema a otro equivalente, podemos convertir cualquier variable en básica.

En el sistema anterior podemos hacer que la variable x_1 sea básica en la primera ecuación dividiendo esta por 2 y, luego, restando la ecuación resultante a la segunda ecuación; es decir:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 4 \\ -3x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Soluciones básicas

Se observa que la operación realizada hace que x_3 pierda la condición de variable básica.

También en el sistema inicial podemos hacer que x_2 sea básica en la segunda ecuación multiplicando esta por -1 y, luego, restando la ecuación resultante multiplicada por 4 a la primera:

$$\begin{aligned} 6x_1 \qquad\qquad + x_3 &= 16 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad &= -2 \end{aligned}$$

En este caso, tenemos una variable básica en cada una de las ecuaciones. Igual ocurre si, en el sistema inicial, hacemos básica la primera variable en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 6x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

A partir del sistema inicial, podríamos optar por hacer básicas la segunda variable en la primera ecuación y la tercera variable en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= -2 \\ 6x_1 \qquad + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Soluciones básicas

Definición: Cuando en un sistema de ecuaciones se dispone de una variable básica en cada una de las ecuaciones, tenemos una *solución básica*. Los valores de las variables básicas se calculan directamente al hacer igual a cero el correspondiente a cada *variable no básica*.

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad\quad\quad + x_3 &= 16 \\ -x_1 + \quad x_2 \quad\quad &= -2 \end{aligned}$$

la solución básica es $\boxed{x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 16}$

Por el contrario, en el sistema:

$$\begin{aligned} 6x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - \quad x_2 \quad\quad &= 2 \end{aligned}$$

la solución básica es $\boxed{x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 4}$

Las argumentaciones anteriores permiten afirmar que para un sistema de *m* ecuaciones y *n* variables, el número de soluciones básicas es finito ya que cada una de ellas es el resultado de elegir *m* variables en el conjunto de *n*. Por tanto, dicho número es menor o igual que $\binom{n}{m}$.

Soluciones básicas factibles

Solución básica factible

Dado un problema de Programación Lineal en la forma estándar, una solución básica factible es una solución básica para el conjunto de ecuaciones cuyas variables básicas toman **valores no negativos**.

Propiedad fundamental

Si existe, el valor óptimo de un problema de Programación Lineal se alcanza en una solución básica factible.

Esta propiedad es la base del *Método del Simplex* (G. B. Dantzig, 1947). Partiendo de una solución básica factible, dicho método recorre eficientemente un subconjunto de soluciones básicas factibles hasta obtener el óptimo o concluir que el problema es no acotado.

Ejemplo

Dado el siguiente problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a:} & \quad\;\; 6x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 - \;\; x_2 \qquad\;\; = 2 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Operaciones algebraicas

Para la solución básica: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 4$ el valor de la función objetivo es $\bar{z} = 16$.

Si se incrementa el valor actual de x_2 en una unidad, tenemos que para $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2$ el valor de la función objetivo ahora es $\bar{z}' = 6$.

Por tanto, $\bar{z}' - \bar{z} = -10$ representa el *crecimiento de la función objetivo, respecto de la solución básica factible actual, por unidad incrementada a* x_2 .
Dicho valor es el ***costo relativo*** asociado a la citada variable. El signo de este costo relativo indica que la solución básica factible actual no es óptima ya que cada unidad incrementada a x_2 implica un decrecimiento de 10 unidades en el valor objetivo.

Puesto que, para conseguir el mayor decrecimiento en el valor objetivo, el incremento de x_2 debe ser máximo, tenemos :

$$x_1 - x_2 = 2, x_3 + 6x_2 = 4, x_2 \geq 0$$

Está claro que cuanto más crezca, mayor será el decrecimiento del valor objetivo. Tenemos que la solución factible siguiente alcanza un valor objetivo $\frac{28}{3}$.

$$x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 0$$

Operaciones algebraicas

Esta solución también es básica según se deduce del siguiente sistema equivalente al que define la región factible del problema inicial:

$$
\begin{aligned}
x_2 + \frac{1}{6}x_3 &= \frac{2}{3} \\
x_1 \qquad + \frac{1}{6}x_3 &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Por tanto, este proceso de hacer básica a la variable x_2 (la variable no básica con costo relativo negativo) en lugar de la x_3 (la variable básica que primero alcanza el valor cero cuando crece x_2), hace posible encontrar una solución básica factible mejor que la anterior. Se denomina *operación de pivotaje* o, simplemente, *pivotaje*. Obviamente, si x_3 puede crecer hasta el infinito, se concluirá que el problema que se está resolviendo es *no acotado*. Respecto a la nueva solución básica factible, el costo relativo de la variable no básica x_3 es igual a $\frac{5}{3}$.Como este costo relativo es no negativo y sólo existe una variable no básica, concluimos que la solución básica factible actual es óptima.

Propiedad: Para un problema de Programación Lineal de mínimo, una solución básica factible es óptima si los costos relativos de todas las variables no básicas son no negativos. En el caso de máximo, la condición de optimalidad se alcanza cuando sean no positivos los costos relativos de las variables no básicas.Los costos relativos de las variables básicas son siempre iguales a cero.

Método del Simplex

La búsqueda de una solución óptima de un problema de Programación Lineal se realiza en una región definida por ecuaciones/inecuaciones lineales. Dicha región se conoce en Geometría como *politopo*. La denominación de un tipo particular de politopo, *simplex*, da el nombre del método. Un esquema podría ser el siguiente:

Inicialización

Determinar una solución básica factible inicial.

Mientras

> *La solución básica factible actual no sea óptima, si no se detecta la no acotación del problema, realizar el correspondiente pivotaje para determinar una nueva solución básica factible mejor.*

Nota: La operación de pivotaje intercambia el estatus entre una variable básica y una variable no básica. Se dice que la primera *sale de la base* y que la segunda *entra en la base*.

Soluciones básicas adyacentes

Si una solución básica se obtiene a partir de otra realizando un pivotaje, se dice que ambas soluciones básicas son *adyacentes*. Por tanto, dos soluciones básicas adyacentes tienen, exactamente, una variable básica distinta. El método del simplex progresa generando en cada iteración una solución básica factible que es adyacente a la anterior.

Tablas y aplicación del método

Organización del trabajo

La identificación de una solución básica factible, el cálculo de los costos relativos, la detección de la optimalidad, y, cuando corresponda, la selección de una variable candidata a ser básica, la determinación de la no acotación y la realización del pertinente pivotaje, son tareas específicas de la aplicación del Método del Simplex. Para acometerlas es interesante disponerlas sobre una tabla en la que se produce la conversión de un problema de Programación Lineal a un sistema de ecuaciones.

Para el problema:

$$\begin{aligned} &\min\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ &\text{s.a:} \quad 6x_2 + x_3 = 4 \\ &\quad x_1 - x_2 = 2 \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Construimos la siguiente **Tabla del simplex**:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_3	0	6	1	0	4
x_1	1	-1	0	0	2
$-z$	4	-2	2	1	0

Tablas y aplicación del método

La primera fila describe las columnas de variables básicas, coeficientes de las distintas variables y constantes.
Las filas segundas y terceras contienen los coeficientes de las dos ecuaciones de la región factible.
En la cuarta fila aparecen los coeficientes de la ecuación :

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - z = 0$$

Si, en la tabla anterior, restamos a la tercera fila la suma de la primera multiplicada por 2 más la segunda multiplicada por 4, obtenemos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_3	0	6	1	0	4
x_1	1	-1	0	0	2
$-z$	0	-10	0	1	-16

Nota:
Como regla general, cuando en una tabla equivalente a la inicial en la que aparece la descripción de una solución básica, los coeficientes de las variables básicas de la última ecuación son ceros, los que corresponden en esa fila a variables no básicas son los respectivos costos relativos. Además, la constante asociada a dicha última fila es igual al valor, cambiado de signo, que alcanza la función objetivo para la solución básica actual.

Tablas y aplicación del método

La variable no básica x_2, con costo relativo igual a -10, es candidata a convertirse en variable básica. Según argumentamos anteriormente, sustituye a x_3. Esto supone que la tabla anterior se debe transformar en otra equivalente en la que la columna asociada a x_2 sea exactamente la que ahora corresponde a x_3.Por tanto, la nueva tabla es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_2	0	1	1/6	0	2/3
x_1	1	0	1/6	0	8/3
$-z$	0	0	5/3	1	-28/3

Como los costos relativos de todas las variables no básicas son no negativos, la solución básica que aparece en la última tabla es óptima.

Ejemplo
Resolver el problema:

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ \text{s.a: } & 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 16 \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\dots,5\} \end{aligned}$$

Tablas y aplicación del método

La tabla inicial asociada es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_4	2	-2	4	1	0	0	10
x_5	-1	4	-2	0	1	0	16
-z	-4	-2	2	1	-1	1	0

En esta tabla el bloque central describe una solución básica (con x_4 y x_5 como variables básicas), pero en la última fila no aparecen los costos relativos. Si a la última fila restamos la segunda y, luego, sumamos la tercera, obtenemos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_4	2	-2	4	1	0	0	10
x_5	-1	4	-2	0	1	0	16
-z	-7	4	-4	0	0	1	6

En la última fila aparecen los costos relativos y el valor objetivo (cambiado de signo) asociados a la solución básica factible actual. Se observa que esta solución no es óptima. La conversión de x_1 o de x_3 en variables básicas haría decrecer el valor objetivo actual ya que ambas tienen costos relativos negativos. La regla de selección de la variable no básica con costo relativo mínimo (caso de mínimo) es conocida como *Regla de Dantzig*. Según esta regla, es x_1 la variable seleccionada para convertirse en básica. Operando como hemos indicado anteriormente, x_4 dejará de ser básica:

Tablas y aplicación del método

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_1	1	-1	2	1/2	0	0	5
x_5	0	3	0	1/2	1	0	21
$-z$	0	-3	10	7/2	0	1	41

Ahora la variable x_2 se convierte en básica sustituyendo a x_5 . Obtenemos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_1	1	0	2	2/3	1/3	0	12
x_2	0	1	0	1/6	1/3	0	7
$-z$	0	0	10	4	1	1	62

Esta última tabla contiene una solución óptima única ya que los costos relativos de las variables no básicas son positivos.

Nota:
Cuando para una solución básica factible óptima existen costos relativos de variables no básicas iguales a cero, existen soluciones óptimas alternativas.

No Acotación

Detección de la no acotación

Cuando una variable candidata a ser básica puede incrementar indefinidamente su valor, el problema es no acotado.

$$\begin{array}{ll} \min & -6x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.a:} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 = 6 \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\ldots,5\} \end{array}$$

Solución

La tabla asociada es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-*z*	Constantes
x_4	-2	-2	1	1	0	0	8
x_5	-1	2	3	0	1	0	6
-*z*	-6	4	1	0	0	1	0

La variable x_1 debe convertirse en básica. Si $x_1 = l \geq 0$, entonces :

$$x_4 = 8+2l \geq 0, \; x_5 = 6+l \geq 0$$

En este caso *l* puede crecer hacia el infinito.

Nota:

Cuando, en una determinada tabla, una variable candidata a ser básica tiene una columna de términos no positivos, se detecta la *no acotación* del problema.

Determinación de una solución básica factible inicial

La aplicación del Método del Simplex necesita una solución básica factible inicial. Cuando en el problema que se va a resolver no existen tantas variables básicas como ecuaciones, añadimos artificialmente las variables básicas necesarias (*variables artificiales*) para disponer de una solución básica factible inicial y aplicar el algoritmo del Simplex. Como no hay que olvidar que el problema que interesa resolver es el inicial, deben usarse mecanismos que intenten eliminar las variables artificiales.

Ejemplo

Resolver el problema:

$$\begin{aligned} \min\ & -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a:}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Solución

Son necesarias dos variables básicas que añadimos de forma artificial:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\ldots,5\} & \end{aligned}$$

Método de las dos fases

El intento de eliminación de dichas variables(x_4 y x_5) se puede realizar, por ejemplo, planteando el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min\ & x_4 + x_5 \\ \text{s.a:}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\dots,5\} \end{aligned}$$

Se observa que en la función objetivo de este problema aparece la suma de las variables artificiales. Este problema es el que corresponde a la *Fase I* de un procedimiento denominado *Método de las dos Fases*. Es fácil comprobar que el problema de la Fase I siempre tiene solución óptima (es acotado). Intentemos resolver el problema anterior aplicando el Método del Simplex. La tabla asociada es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-w$	Constantes
x_4	2	1	-1	1	0	0	8
x_5	-2	2	1	0	1	0	6
$-w$	0	0	0	1	1	1	0

escribiendo en la última fila : $\boxed{x_4 + x_5 - w = 0}$

(w es el valor objetivo del problema de la Fase I).
Como en la tabla anterior no aparecen calculados los costos relativos, hemos de obtener:

Método de las dos fases

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_4	2	1	-1	1	0	0	8
x_5	-2	2	1	0	1	0	6
-w	0	-3	0	0	0	1	-14

La variable x_2 se convierte en básica en sustitución de x_5. Obtenemos la tabla:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_4	3	0	-3/2	1	-1/2	0	5
x_2	-1	1	1/2	0	1/2	0	3
-w	-3	0	3/2	0	3/2	1	-5

Ahora x_1 pasa a ser básica en lugar de x_4 . Se obtiene:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_1	1	0	-1/2	1/3	-1/6	0	5/3
x_2	0	1	0	1/3	1/3	0	14/3
-w	0	0	0	1	1	1	0

En esta tabla aparece una solución óptima para el problema de la Fase I. Como en dicha solución óptima las variables artificiales son iguales a cero, su eliminación de la tabla nos ofrece una solución básica para el problema inicial. La versión equivalente de este problema sería:

Método de las dos fases

$$\min \ -3x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\text{s.a:} \quad x_1 \quad -\frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{3}$$
$$x_2 = \frac{14}{3}$$
$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\}$$

Fase II

Resuelve el último problema partiendo de la solución básica factible calculada en la Fase I. La tabla correspondiente es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	-*z*	Constantes
x_1	1	0	-1/2	0	5/3
x_2	0	1	0	0	14/3
-*z*	-3	2	-1	1	0

Se observa que en la última tabla de la fase I se han borrado las columnas correspondientes a variables artificiales y que, luego, en la última fila se ha escrito la ecuación: $\boxed{-3x_1 + 2x_2 - x_3 - z = 0}$

que corresponde a la función objetivo del problema inicial. Sumando a la última fila la segunda multiplicada por 3 más la tercera multiplicada por -2, obtenemos:

Método de las dos fases

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_1	1	0	-1/2	0	5/3
x_2	0	1	0	0	14/3
$-z$	0	0	-5/2	1	-13/3

La variable x_3 pretende ser básica pero, al ser no positiva la columna actualizada de coeficientes tecnológicos, el problema inicial es no acotado.

Método de las dos Fases

Al no disponer de una solución básica factible inicial, este método usa en la Fase I un problema auxiliar en el que se minimiza la suma de las variables artificiales añadidas para poder aplicar el método del Simplex. En el caso general, el problema de la Fase I será:

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.a: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n, x_{n+i} \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

Método de las dos fases

Es claro que $0 \leq w = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \leq \sum_{i=1}^{m} b_i$

Por tanto, el problema de la Fase I siempre tiene solución óptima para la que $\bar{w} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{n+i} \geq 0$

Si $\bar{w} > 0$, es imposible eliminar todas las variables artificiales y, por tanto, el problema inicial no tiene solución (Problema no factible). Si $\bar{w} = 0$, al disponer de una solución básica factible expresada en términos de las variables del problema inicial, se puede iniciar la Fase II eliminando de la última tabla de trabajo las variables artificiales y reescribiendo en su última fila la ecuación que corresponde a la función objetivo inicial.

Ejemplo
Resolver el problema:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a: }\ & 2x_1 - 6x_2 - x_3 = 10 \\ & -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Solución
Como no está disponible una solución básica factible inicial, añadimos dos variables artificiales y planteamos el siguiente problema auxiliar:

Método de las dos fases

$$\min\ x_4 + x_5$$
$$\text{s.a:}\quad 2x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 \qquad = 10$$
$$-4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 8$$
$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\ldots,5\}$$

La correspondiente tabla será:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-w$	Constantes
x_4	2	-6	-1	1	0	0	10
x_5	-4	2	1	0	1	0	8
$-w$	0	0	0	1	1	1	0

Si incorporamos a esta tabla los costos relativos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-w$	Constantes
x_4	2	-6	-1	1	0	0	10
x_5	-4	2	1	0	1	0	8
$-w$	2	4	0	0	0	1	-18

Esta tabla es óptima con valor objetivo igual a 18. Por tanto, es imposible eliminar las variables artificiales añadidas y, por ello, el problema planteado es no factible.

Obviamente, para el caso de un problema de máximo, en la fase I se resolverá un problema de mínimo.

Ejemplo

Resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\max\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ &\text{s.a:}\ \ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ &\qquad -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \\ &\qquad\quad x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Solución

Como no está disponible una solución básica factible inicial, añadimos dos variables artificiales y planteamos el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{aligned} &\min\ x_4 + x_5 \\ &\text{s.a:}\ \ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 10 \\ &\qquad -2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 = 12 \\ &\qquad\quad x_j \geq 0, \forall j \in \{1,\ldots,5\} \end{aligned}$$

La correspondiente tabla será:

Método de las dos fases

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_4	2	-4	2	1	0	0	10
x_5	-2	1	4	0	1	0	12
-w	0	0	0	1	1	1	0

Calculando los costos relativos obtenemos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_4	2	-4	2	1	0	0	10
x_5	-2	1	4	0	1	0	12
-w	0	3	-6	0	0	1	-22

La variable x_3 se convierte en básica sustituyendo a x_5. La nueva tabla es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_4	3	-9/2	0	1	-1/2	0	4
x_3	-1/2	1/4	1	0	1/4	0	3
-w	-3	9/2	0	0	3/2	1	-4

La variable x_1 se convierte en básica sustituyendo a x_4. La nueva tabla es:

Método de las dos fases

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w	Constantes
x_1	1	-3/2	0	1/3	-1/6	0	4/3
x_3	0	-1/2	1	1/6	1/6	0	11/3
-w	0	0	0	1	1	1	0

Como el problema de la fase I tiene solución óptima y las variables artificiales han dejado de ser básicas, podemos iniciar la fase II resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} \max\ & -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a:}\ & x_1 - \frac{3}{2}x_2 = \frac{4}{3} \\ & -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = \frac{11}{3} \\ & x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

La tabla asociada es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	-z	Constantes
x_1	1	-3/2	0	0	4/3
x_3	0	-1/2	1	0	11/3
-z	-2	4	-2	1	0

Método de las dos fases

Si calculamos los costos relativos, obtenemos:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_1	1	-3/2	0	0	4/3
x_3	0	-1/2	1	0	11/3
$-z$	0	0	0	1	10

Esta solución es óptima.

Ejercicio. Resolver el siguiente problema de PL por el método de las dos fases.

$$\begin{aligned} &\max \ 4x_1 + 3x_2 \\ &s.a: \ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ &\qquad\ 6x_1 - x_2 \geq 4 \\ &\qquad\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Método de Penalización (M grande)

La necesaria eliminación de las variables artificiales introducidas para determinar una solución básica inicial, se puede acometer en una única fase resolviendo un problema en el que se penalizan los valores positivos de estas (*problema penalizado*). Esta penalización implicará la tendencia de las variables artificiales a ser no básicas.

En el caso general, el problema penalizado será:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.a: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n, x_{n+i} \geq 0, i = 1,\ldots,m$$

Método de Penalización (M grande)

Ejemplo. Resolver el problema:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1+3x_2-4x_3 \\ \text{s.a:}\ & 2x_1-x_2+x_3=12 \\ & 4x_1+2x_2-2x_3=8 \\ & x_j\ge 0, \forall j\in\{1,2,3\} \end{aligned}$$

Solución

Consideramos dos variables artificiales cuyos valores positivos se penalizan en la función objetivo multiplicando por $M>0$ suficientemente grande. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1+3x_2-4x_3+Mx_4+Mx_5 \\ \text{s.a:}\ & 2x_1-x_2+x_3+x_4=12 \\ & 4x_1+2x_2-2x_3+x_5=8 \\ & x_j\ge 0, \forall j\in\{1,2,3\} \end{aligned}$$

Aplicamos el Método del Simplex sobre la tabla:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_M$	Constantes
x_4	2	-1	1	1	0	0	12
x_5	4	2	-2	0	1	0	8
$-z_M$	-1	3	-4	M	M	1	0

En la última fila se escribe: $\boxed{-x_1+3x_2-4x_3+Mx_4+Mx_5-z_M=0}$

Método de Penalización (M grande)

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_M$	Constantes
x_4	2	-1	1	1	0	0	12
x_5	4	2	-2	0	1	0	8
$-z_M$	$-1-6M$	$3-M$	$-4+M$	0	0	1	$-20M$

Efectivamente, $-1-6M$ es el costo relativo más negativo. Por tanto, x_1 se convierte en básica en lugar de x_5. Obtenemos la tabla:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_M$	Constantes
x_4	0	-2	2	1	-1/2	0	8
x_1	1	1/2	-1/2	0	1/4	0	2
$-z_M$	0	$7/2+2M$	$-9/2-2M$	0	$1/4+3M/2$	1	$2-8M$

x_3 se convierte en básica en lugar de x_4. Obtenemos la tabla:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_M$	Constantes
x_3	0	-1	1	1/2	-1/4	0	4
x_1	1	0	0	1/4	1/8	0	4
$-z_M$	0	-1	0	$9/4+M$	$-7/8+M$	1	20

Al intentar hacer básica x_2 se detecta la no acotación del problema penalizado. Como en la última tabla las variables artificiales son iguales a cero, el problema inicial es no acotado.

Método de Penalización (M grande)

Reglas: Al aplicar el Método de Penalización puede suceder que:

a) El problema penalizado tenga solución óptima

a1) con todas las variables artificiales iguales a cero. En este caso, el problema inicial tiene solución óptima, obtenida de la anterior por la simple eliminación de las variables artificiales.

a2) con alguna (s) variable(s) artificial (es) no nula (s). En este caso, el problema inicial es no factible.

b) El problema penalizado es no acotado

b1) con todas las variables artificiales iguales a cero en la solución básica sobre la que se detecta la no acotación. En este caso, el problema inicial es no acotado.

b2) con alguna (s) variable(s) artificial (es) no nula (s) en la solución básica sobre la que se detecta la no acotación. En este caso, el problema inicial es no factible.

Ejercicio. Resolver el siguiente problema de PL por el método de penalización

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a:\ & 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ & 6x_1 - x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$