Tema 3. Dualidad y Método del Simplex.Dual

Dualidad

Resultados Básicos

Método del Simplex Dual

Aplicaciones

Dualidad

Definición Dado un problema estándar de Programación Lineal de mínimo:

$$\begin{aligned} &\min\ c^t x \\ &s.a:\ Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad (P)$$

en el que $c \in R^n$, A es una matriz de orden $m \times n$ y $b \in R^m$, se pueden encontrar cotas inferiores del valor óptimo eligiendo vectores $y \in R^m$ tales que $A^t y \leq c$ ya que, para cualquier solución factible de (P) se verifica:

$$y^t b = y^t A x \leq c^t x$$

La determinación de la mejor de estas cotas se obtiene del problema:

$$\begin{aligned} &\max\ b^t y \\ &s.a:\ A^t y \leq c \end{aligned} \qquad (D)$$

Este problema recibe la denominación de *dual*. De esta forma, (P) es denominado *problema primal*. Los problemas primal y dual están estrechamente relacionados y el conocimiento de uno de ellos determina totalmente el otro.

Dualidad

Ejemplo. Dado el problema:

$$\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
s.a:\ & 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 20 \\
& 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = 16 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5
\end{aligned} \qquad (P)$$

el problema dual es:

$$\begin{aligned}
\max\ & 20y_1 + 16y_2 \\
s.\ a:\ & 4y_1 + 2y_2 \leq 5 \\
& 6y_1 - 4y_2 \leq 12 \\
& -2y_1 + 4y_2 \leq 4 \\
& -y_1 \leq 0 \\
& -y_2 \leq 0
\end{aligned} \qquad (D)$$

Propiedad 1. El dual del dual es el primal

Demostración. El dual de un problema estándar es:

$$\begin{aligned} &\max\ b^t y \\ &s.a:\ A^t y \le c \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} &-\min\ \left(-b^t\left(y^1 - y^2\right)\right) \\ &s.a:\ A^t y^1 - A^t y^2 + y^3 = c \\ &\qquad y^1 \ge 0,\ y^2 \ge 0,\ y^3 \ge 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el dual de este será:

$$\begin{aligned} &-\min\ c^t x \\ &s.a: Ax \le -b \\ &\quad -Ax \le b \\ &\qquad x \le 0 \end{aligned}$$

Como $-x \ge 0$, cambiando x por $-x$, este último problema coincide con el primal.

Dualidad

Se observa que la anterior definición de dualidad es universal pues, con la oportuna transformación, puede aplicarse a cualquier problema de Programación Lineal. En cualquier caso, la relación de dualidad implica que:

- El número de variables del primal coincide con el número de restricciones del dual.
- El número de restricciones del primal es igual al número de variables del dual.
- Los coeficientes de las variables en la función objetivo del primal son las constantes en el dual.
- La matriz de coeficientes tecnológicos del dual es la traspuesta de la correspondiente del primal.
- Si el primal es un problema de mínimo, el dual es un problema de máximo. Si, por el contrario, el primal es de máximo, el dual es un problema de mínimo.

Dualidad

Además, existen determinadas relaciones entre el signo de las variables del primal y el tipo de restricciones del dual. Dichas relaciones se especifican en la siguiente tabla:

Primal	$\leftarrow\rightarrow$	**Dual**
minimizar	$\leftarrow\rightarrow$	maximizar
$x_j \geq 0$	$\leftarrow\rightarrow$	$\leq_j$
$x_j \leq 0$	$\leftarrow\rightarrow$	$\geq_j$
x_j sin signo (libre)	$\leftarrow\rightarrow$	$=_j$
$\geq_i$	$\leftarrow\rightarrow$	$y_i \geq 0$
$\leq_i$	$\leftarrow\rightarrow$	$y_i \leq 0$
$=_i$	$\leftarrow\rightarrow$	y_i sin signo (libre)

La aplicación de esta tabla será de izquierda a derecha cuando el problema primal sea de mínimo. Si el problema primal es de máximo, la aplicación será de derecha a izquierda.

Dualidad

Ejemplo. Dado el problema:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -7x_1 + 10x_2 - 8x_3 \\
s.a: \quad & 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 \geq 10 \\
& -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 12 \\
& 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -18 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0
\end{aligned} \qquad (P)$$

el problema dual es:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 10y_1 + 12y_2 - 18y_3 \\
s.\ a: \quad & 2y_1 - y_2 + 4y_3 \geq -7 \\
& -6y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 10 \\
& 4y_1 - 5y_2 + 8y_3 = -8 \\
& y_1 \leq 0, y_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (D)$$

Resultados básicos

Directamente a partir de la definición de dualidad se tiene:

Propiedad 2

1) Cualquier solución factible del problema dual define una cota inferior del valor óptimo del problema primal. Cualquier solución factible del problema primal define una cota superior del valor óptimo del problema dual.
2) Si (P) en no acotado, entonces (D) es no factible.
3) Si (D) es no acotado, entonces (P) es no factible.

Propiedad 3 (Condición de equilibrio)

Sean $\bar{x}$ una solución factible de (P) e $\bar{y}$ una solución factible de (D). Si $c^t\bar{x} = b^t\bar{y}$, entonces $\bar{x}$ es solución óptima de (P) e $\bar{y}$ es solución óptima de (D).

Ejemplo. Dado el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \\ s.a:\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 16 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned}$$

El problema dual es

$$\begin{aligned} \min\ & 16y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ & -y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 - 2y_2 \geq 4 \\ & -y_1 + 2y_2 \geq -4 \end{aligned}$$

Para $\bar{x}^t = (26,21,0)$ e $\bar{y}^t = (6,4)$ se cumple la propiedad anterior.

Resultados básicos

Propiedad 4 (Teorema fuerte de dualidad)

a) Si (P) tiene solución óptima, entonces (D) tiene solución óptima y los valores óptimos de ambos problemas coinciden.

b) Si (D) tiene solución óptima, entonces (P) tiene solución óptima y los valores óptimos de ambos problemas coinciden.

Demostración

Demostremos a). Si (P) tiene solución óptima, sea B la base óptima. Entonces $\bar{y} = c_B{}^t B^{-1}$ es:

- Solución factible del problema dual ya que $\bar{y}^t A = c_B^t B^{-1} A = \left(c_B^t, c_B^t B^{-1} N\right) \leq \left(c_B^t, c_N^t\right)$ al ser $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$ (por ser B base óptima).
- Solución óptima del dual ya que $\bar{y}^t b = c_B^t B^{-1} b$ (por la condición de equilibrio)

La demostración de b) se realiza de manera similar.

En otras palabras:

Si B es una base optima del primal (P) entonces, tenemos una solución óptima del dual (D) dada por la expresión:

$$\bar{y} = c_B^t B^{-1}$$

Resultados básicos

Ejemplo. Dado el siguiente problema de Programación Lineal

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ s.a:\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10 \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6 \\ & x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned}$$

su problema dual es:

$$\begin{aligned} \max\ & 10y_1 + 6y_2 \\ s.a:\ & -y_1 + 2y_2 \le 5 \\ & 2y_1 + y_2 \le -2 \\ & -y_1 - 2y_2 \le 1 \\ & y_1 \le 0, y_2 \le 0 \end{aligned}$$

En este caso, la base inversa de la tabla óptima del problema de mínimo es:

$B^{-1} = \begin{matrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{matrix}$ para x= (0,5,0) siendo x_2 y h_2 el orden de las variables básicas.

Entonces $\bar{y} = c_B{}^t B^{-1}$ =(-2,0) B^{-1}=(-1,0) es la solución óptima del Dual

Método del Simplex Dual

La introducción de la dualidad permite modificar la definición de solución básica factible. Si recordamos que una solución básica tiene asociada una base B de A, diremos que una de estas soluciones es *factible primal* si $B^{-1}b \geq 0$. Una solución básica es *factible dual* cuando $c^t - c_B{}^t B^{-1} A \geq 0$ (para el problema estándar de mínimo). Como consecuencia, una solución básica es óptima cuando es, a la vez, factible primal y factible dual.

En la versión del método del simplex desarrollada hasta ahora, se generan soluciones básicas factibles primales hasta encontrar una solución básica que sea a la vez factible primal y factible dual. Una búsqueda alternativa consiste en generar soluciones básicas factibles duales hasta encontrar una en la que, además, se dé la condición de solución básica factible primal. Esta última forma de actuar es la del Método Simplex Dual. El paralelismo con actuaciones previas otorgaría la denominación de Método Simplex Primal al que hemos desarrollado anteriormente.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
s.a:\ & -4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = -20 \\
& -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_5 = -16 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

Método del Simplex Dual

Se observa que es fácil identificar una solución básica inicial que tiene a x_4 y x_5 como variables básicas. Los costos relativos de las variables no básicas coinciden con los costos iniciales. A ser estos no negativos, la solución básica inicial es factible dual. La tabla inicial es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_4	-4	-6	2	1	0	0	-20
x_5	-2	4	-4	0	1	0	-16
$-z$	5	12	4	0	0	1	0

Las dos variables básicas toman valor negativo. La operación de pivotaje pretende mejorar el estatus asociado a una de las variables básicas.En el simplex dual se ha de efectuar sobre un elemento negativo. Concretamente, si x_4 es la variable elegida para salir de la base, x_1 o x_2 (pivotando sobre -4 y -6, respectivamente) serían candidatas a sustituirle. Si en la fila asociada a la variable básica que sale de la base no hay coeficientes negativos, el problema es no factible. Como interesa preservar la condición de factibilidad dual para la solución básica que resulte, es necesario calcular:

$$\max\left\{\frac{5}{-4}, \frac{12}{-6}\right\} = -\frac{5}{4}$$

Por ello, la variable x_1 debe entrar en la base. Obtenemos entonces:

Método del Simplex Dual

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_1	1	3/2	-1/2	-1/4	0	0	5
x_5	0	7	-5	-1/2	1	0	-6
-z	0	9/2	13/2	5/4	0	1	-25

Ahora la variable x_5 debe dejar de ser básica. Como:

$$\max\left\{\frac{13/2}{-5}, \frac{5/4}{-1/2}\right\} = -\frac{13}{10}$$

la variable que entra en la base es x_3. La nueva tabla es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_1	1	4/5	0	-1/5	-1/10	0	28/5
x_3	0	-7/5	1	1/10	-1/5	0	6/5
-z	0	68/5	0	3/5	13/10	1	-164/5

Esta tabla es óptima.

Método del Simplex Dual

Se observa que la progresión en la aplicación del Simplex Dual mantiene una relación de dualidad con lo realizado al aplicar el Simplex Primal.

- En el primal se selecciona en primer lugar la variable que entra en la base mientras que en el dual la primera etapa corresponde a la selección de la variable que sale.

- Si la fila actualizada asociada a la variable que sale de la base es de términos no negativos, el Simplex Dual concluye con la no factibilidad del problema. Por su parte, si en el Simplex Primal la columna actualizada de la variable que entra en la base es de términos no positivos, se detecta la no acotación del problema.

- Redundando en la relación de dualidad, el Simplex Primal preserva en cada iteración la condición de factibilidad primal (columna de constantes) mientras que el Simplex Dual preserva la condición de factibilidad dual (fila de costos relativos).

Método del Simplex Dual

Ejemplo. Resolver, aplicando el Método Simplex Dual, el problema:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -6x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\
s.a: \quad & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -12 \\
& -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = -10 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

Solución: La tabla inicial es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_4	-2	-3	4	1	0	0	-12
x_5	-2	2	-4	0	1	0	-10
$-z$	-6	-6	-2	0	0	1	0

Observamos que la variable x_4 debe dejar de ser básica. Para determinar la variable que debe entrar en la base, calculamos:

$$\min\left\{\frac{-6}{-2}, \frac{-6}{-3}\right\} = 2$$

Por tanto, x_2 debe entrar en la base. La nueva tabla es:

Método del Simplex Dual

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_2	2/3	1	-4/3	-1/3	0	0	4
x_5	-10/3	0	-4/3	2/3	1	0	-18
-z	-2	0	-10	-2	0	1	24

La variable x_5 debe dejar de ser básica. Al ser:

$$\min\left\{\frac{-2}{-10/3},\frac{-10}{-4/3}\right\}=\frac{3}{5}$$

entra en la base x_1. Obtenemos entonces la tabla:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_2	0	1	-8/5	-1/5	-1/5	0	2/5
x_1	1	0	2/5	-1/5	-3/10	0	27/5
-z	0	0	-46/5	-12/5	-3/5	1	174/5

Esta tabla es óptima.

Método del Simplex Dual

Resolver, aplicando el Método Simplex Dual, el problema:

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ &s.a:\ -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 = -10 \\ &\qquad 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_5 = -6 \\ &\qquad x_j \geq 0, j = 1,\ldots,5 \end{aligned}$$

Solución. La tabla inicial es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_4	-2	-4	6	1	0	0	-10
x_5	2	4	-4	0	1	0	-6
-z	2	6	2	0	0	1	0

La variable x_4 es candidata a salir de la base. Como:

$$\max\left\{\frac{2}{-2}, \frac{6}{-4}\right\} = -1$$

La variable x_1 debe entrar en la base. La nueva tabla es:

V. Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	Constantes
x_1	1	2	-3	-1/2	0	0	5
x_5	0	0	2	1	1	0	-16
-z	0	2	8	1	0	1	-10

Ejercicio

Resulta que la variable x_5 es candidata a salir de la base. Como la fila actualizada es de términos no negativos, se detecta la no factibilidad del problema.

Resolver, aplicando el Método Simplex Dual, el problema:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
s.a: \quad & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = -8 \\
& x_j \geq 0, j = 1,\ldots,5
\end{aligned}$$

Solución

Problema No factible