

Controllo satellite in orbita intorno alla Terra

Progetto Tipologia b - Traccia 2

Controlli Automatici - T

A cura di : Giorgio Mastrotucci, Lorenzo Venerandi e Patrick Di Fazio

Sommario

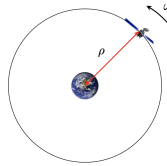


Figura 1: Schema illustrativo della dinamica del satellite

Descrizione del problema

Il progetto richiede di realizzare un sistema di controllo per un satellite in orbita attorno alla Terra.

Avendo già fornito il primo controllore, le equazioni del sistema risultano:

$$m\ddot{\rho} = \beta_1\dot{\rho} + m(k-1) + \left(\frac{k_G M}{\rho^2} + \rho\omega^2\right)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{2\omega\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\beta_2\omega}{m} + \frac{\tau}{m\rho},$$

con $\tau(t)$ ingresso libero e velocità angolare $\omega(t)$ misurabile.

Richieste:

1. Riportare il sistema nella forma di stato e linearizzazione.
2. Calcolare la funzione di trasferimento da δU a δY , ovvero la funzione $G(s)$ tale che

$$\delta Y(s) = G(s)\delta U(s)$$

3. Progettare il regolatore fisicamente realizzabile secondo determinate specifiche.

4. Testare il sistema di controllo linearizzato con :

$$\omega(t) = 8 \cdot 10^{-5} \cdot 1(t) , \quad d(t) = \sum_{k=1}^4 3 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(0.02 \cdot kt) , \quad n(t) = \sum_{k=1}^4 3 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(5 \cdot 10^4 \cdot kt)$$

5. Testare il sistema di controllo sul modello non lineare (ed in presenza di $d(t)$ ed $n(t)$).

β_1	0.3
β_2	0.1
m	1
m	1.5
ρ_e	$3 \cdot 10^7$

1 Sistema in forma di stato e linearizzazione

1.1 Forma di stato

Siano $x_1 = \rho$, $x_2 = \dot{\rho}$, $x_3 = \omega$ stati , $u = \tau$ ingresso e $y = x_3$ uscita del sistema.

Riscriviamo le equazioni come sistema in forma di stato

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta_1 x_2}{m} + (k-1)\left(\frac{kGM}{x_1^2} - x_1 x_3^2\right) \\ -2\frac{x_3 x_2}{x_1} - \frac{\beta_2 x_3}{m} + \frac{u}{mx_1} \end{bmatrix}$$

$y = x_3$

1.2 Coppia di equilibrio

Per rendere il sistema lineare è necessario calcolare i punti di equilibrio x_e e u_e .

Da specifica sappiamo che $x_{1e} = \rho_e$, quindi poniamo

$$\begin{bmatrix} f_1(x_e, u_e) \\ f_2(x_e, u_e) \\ f_3(x_e, u_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2e} \\ -\frac{\beta_1 x_{2e}}{m} + (k-1)\left(\frac{kGM}{x_{1e}^2} - x_{1e} x_{3e}^2\right) \\ -2\frac{x_{3e} x_{2e}}{x_{1e}} - \frac{\beta_2 x_{3e}}{m} + \frac{u}{mx_{1e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo quindi la coppia di equilibrio:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \\ x_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^7 \\ 0 \\ 1.215 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$u_e = 364.63$$

1.3 Linearizzazione

Occorre quindi passare dal modello non linearizzato

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

a quello linearizzato nell'intorno della coppia di equilibrio (x_e, u_e)

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u$$

Determiniamo quindi le matrici A, B, C, D:

$$A = \frac{\delta f(x, u)}{\delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \frac{\delta f_1}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \frac{\delta f_2}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x_1} & \frac{\delta f_3}{\delta x_2} & \frac{\delta f_3}{\delta x_3} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.3 & -3.646 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\delta f(x, u)}{\delta u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u} \\ \frac{\delta f_2}{\delta u} \\ \frac{\delta f_3}{\delta u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3333 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\delta g(x, u)}{\delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta g}{\delta x_3} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{\delta g(x, u)}{\delta u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo le matrici nel sistema iniziale otteniamo quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.3x_2 - 3.646 \cdot 10^3 x_3 \\ \dot{x}_3 = -0.1x_3 + 0.3333 \cdot 10^7 u \\ y = x_3 \end{cases}$$

2 Funzione di trasferimento

Dal sistema linearizzato, passiamo a trovare la funzione di trasferimento: $\delta G(s)$ t.c. $\delta Y(s) = G(s)\delta U(s)$ e per farlo utilizziamo la trasformata di Laplace.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \end{cases}$$

Ricaviamo quindi che

$$G(s) = 3.3333 \cdot 10^{-08} \frac{(s + 0.3)(s + 7.386 \cdot 10^{-08})}{(s + 0.3)(s + 0.1)(s + 2.462 \cdot 10^{-08})}$$

2.1 Rappresentazione $G(s)$ con diagramma di Bode

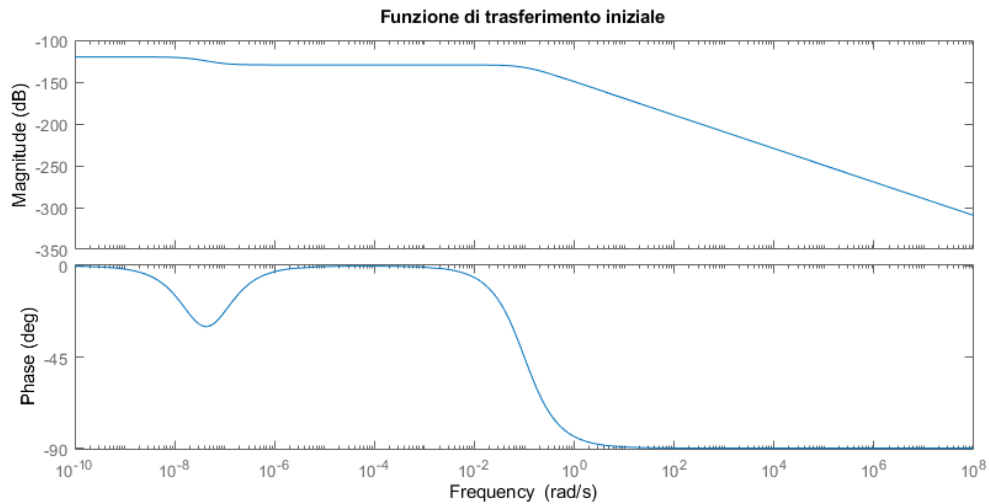


Figura 2: Diagramma di Bode di $G(j\omega)$

3 Il regolatore

La funzione di trasferimento in anello aperto è definita come:

$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$

verrà ricavata tramite il calcolo di $R(s)$, composto dal regolatore statico $R_s(s)$ e dal regolatore dinamico $R_d(s)$, il regolatore richiesto deve rispettare i vincoli imposti ed essere fisicamente realizzabile.

3.1 Regolatore Statico

Dato che $G(s)$ non ha un polo nell'origine, per far sì che l'errore a regime sia nullo(1), è necessario inserirne uno. Ponendo il guadagno del regolatore statico a $\mu_s = 10^9$ dB, otteniamo:

$$R_s = \frac{\mu_s}{s}$$

La funzione di trasferimento estesa al regolatore statico risulta quindi:

$$G_e(s) = R_s(s) \cdot G(s)$$

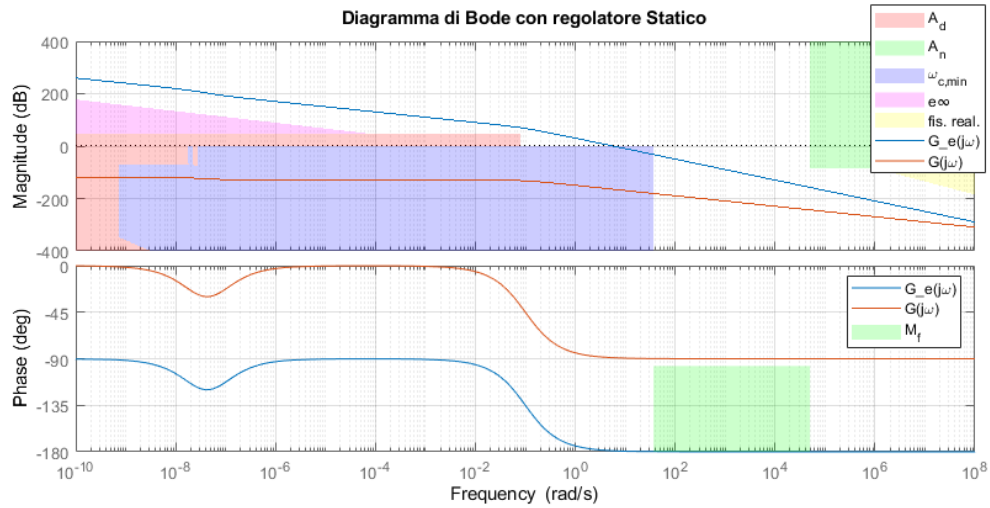


Figura 3: Diagramma di Bode di $G_e(jw)$ con vincoli

Si nota come non vengano rispettati i vincoli sul tempo di assestamento e sul margine di fase, che verranno fatte rispettare attraverso il regolatore dinamico.

3.2 Regolatore Dinamico

La parte dinamica del regolatore deve rispettare determinate specifiche: il margine di fase $Mf \geq 40^\circ$ (2) per garantire un certo livello di robustezza del sistema regolato. La sovraelongazione percentuale

massima che il sistema può accettare è $S \leq 1\%$ (3). Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore a $T_{a,\epsilon} = 0,15s$ (4).

Per soddisfare queste richieste utilizziamo una rete anticipatrice del tipo

$$R_d = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

È quindi necessario calcolare i parametri τ ed α utilizzando le formule di inversione

$$\tau = \frac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)}$$

$$\alpha \tau = \frac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)}$$

nelle quali $M^* > 1$ è l'amplificazione, φ^* lo sfasamento e ω_c^* la frequenza di taglio, cioè la frequenza tale che $|L(j\omega_c^*)| = 0$.

Per rispettare le specifiche è necessario che $\omega_c^* \geq \frac{460}{T^* M_f}$, con $M_f \geq 40^\circ$ margine di fase, $T^* = 0.02s$ tempo di assestamento e 460 una costante relativa al tempo di assestamento all'1%.

Nel nostro caso (due poli a parte reale negativa) vale $M_f = 100\xi$, quindi per ricavare ξ (costante di smorzamento) si utilizza la formula inversa della sovralongazione percentuale (con $S\% = 1\%$), cioè

$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \longrightarrow \xi \approx 0.83$$

Ricaviamo quindi $M_f = 83^\circ$ e $\omega_c^* \geq 36.94 \frac{rad}{s}$, sapendo inoltre che

$$M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \varphi$$

$$\varphi^* = M_f^* - 180 - \arg\{G_e(j\omega_c^*)\}$$

possiamo ricavare i parametri τ ed $\alpha\tau$

$$\tau = \frac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)} = 3.02217$$

$$\alpha \tau = \frac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)} = 0.0012$$

Avendo ricavato la rete anticipatrice riusciamo a calcolare la funzione di trasferimento d'anello aperto:

$$L(j\omega) = G_e(s)R_d(s) = \frac{83628(s + 0.3309)(s + 0.3)(s + 7.386e - 08)}{s(s + 830.3)(s + 0.3)(s + 0.1)(s + 2.462e - 08)}$$

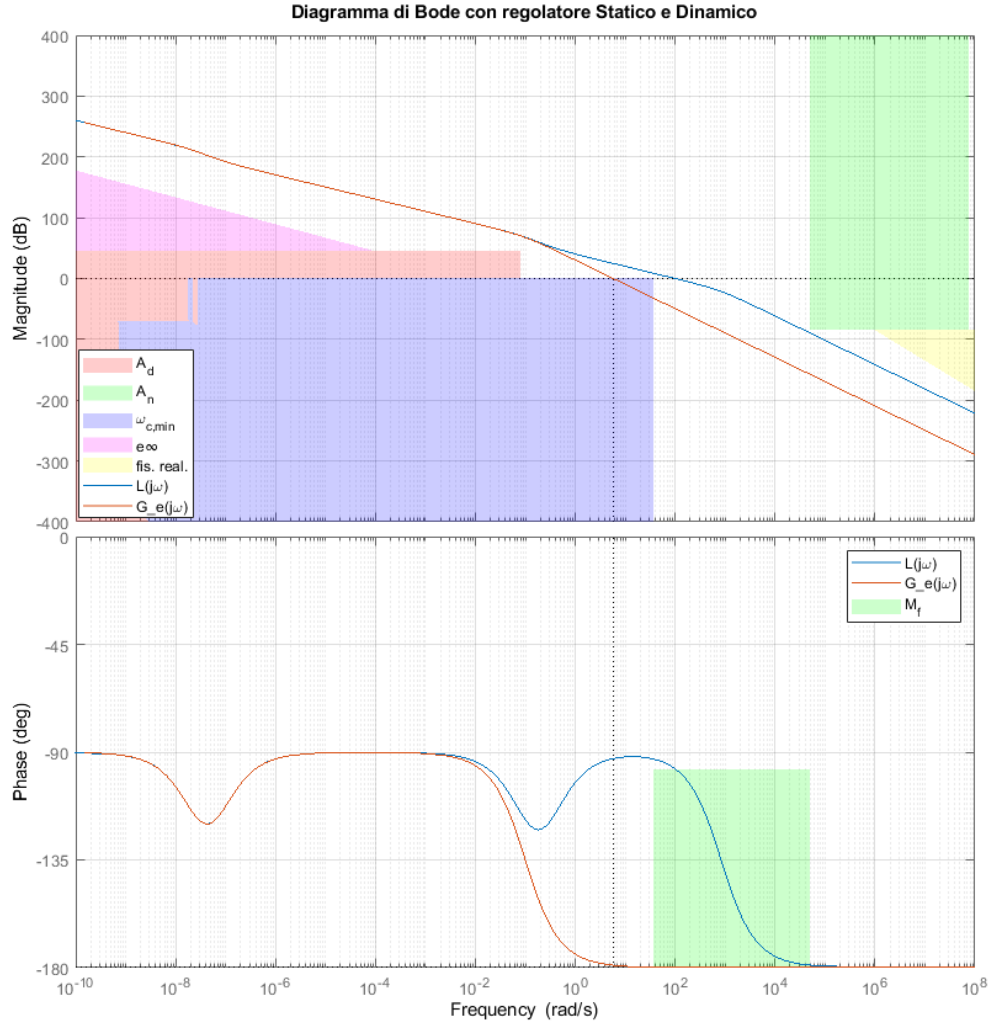


Figura 4: Diagramma di Bode di $L(j\omega)$ con vincoli

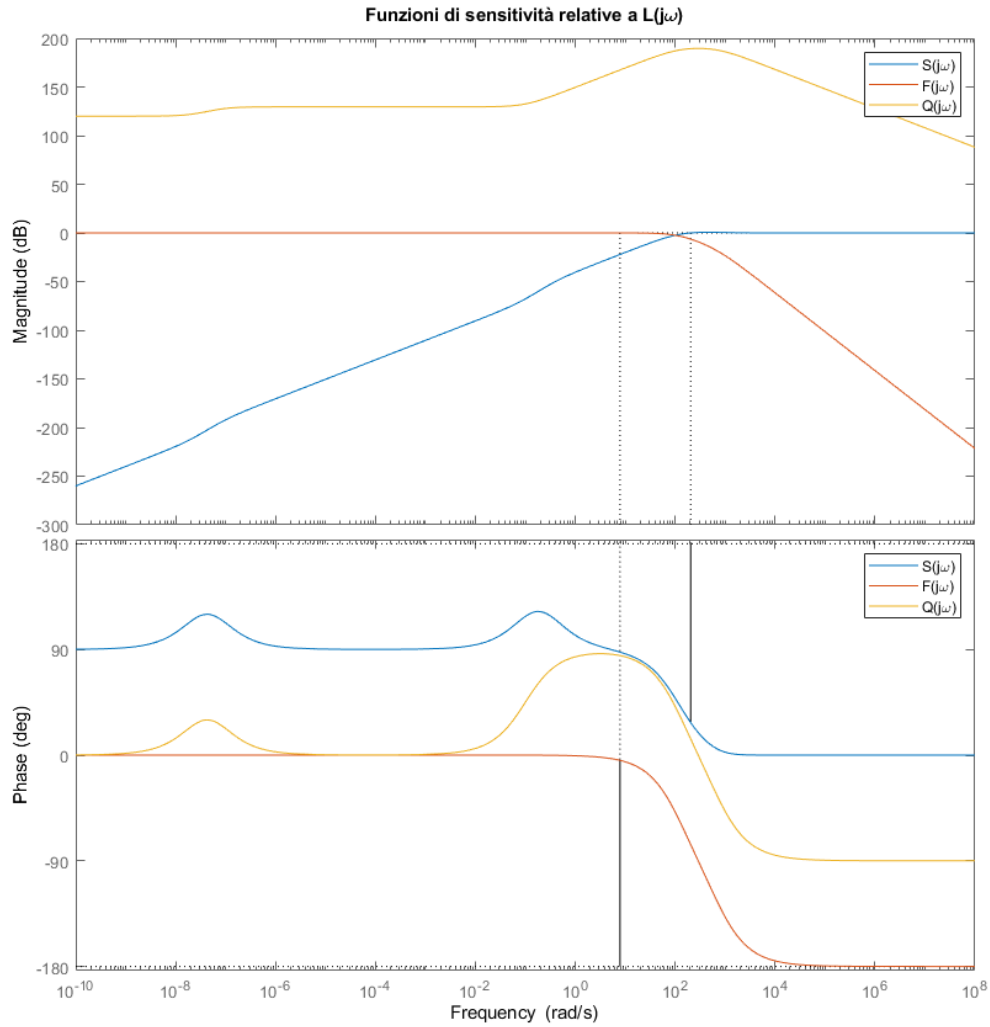
Come si può notare dal grafico soprastante sono stati rispettati tutti i vincoli relativi a tempo di assestamento e margine di fase.

4 Test del sistema di controllo sul modello lineare

4.0 Funzioni di sensitività

Confrontando questo grafico con la funzione $L(j\omega)$ rappresentata nella *Figura 4* possiamo controllare la correttezza delle funzioni di sensitività scritte:

- $S(j\omega)$ è corretta poiché $|S(j\omega)| = 1$ per $\omega > \omega_c$ e $|S(j\omega)| = \frac{1}{|L(j\omega)|}$ per $\omega \leq \omega_c$
- $F(j\omega)$ è corretta poiché $|F(j\omega)| = 1$ per $\omega \ll \omega_c$ e $|F(j\omega)| = |L(j\omega)|$ per $\omega \gg \omega_c$
- $Q(j\omega)$ è corretta poiché $|Q(j\omega)| = \frac{1}{|G(j\omega)|}$ per $\omega \leq \omega_c$ e $|Q(j\omega)| = |R(j\omega)|$ per $\omega > \omega_c$ (Questo lo si osserva tramite la *Figura 2*)



4.1 Risposta al gradino

Data una funzione gradino $w(t) = 8 \cdot 10^{-5} \cdot 1(t)$ la risposta del sistema in anello chiuso rispetta i vincoli del tempo di assestamento e dell'errore a regime, come si può notare dalla figura.

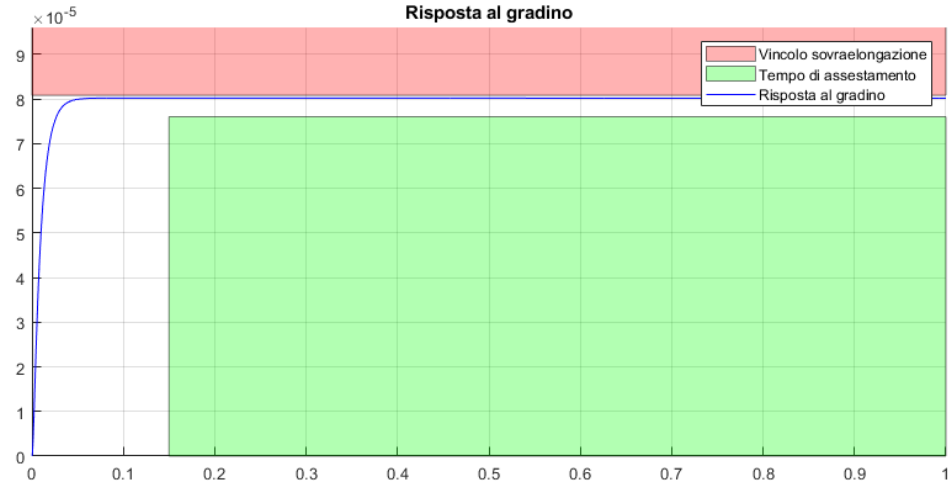


Figura 5: Risposta al gradino $w(t)$

4.2 Disturbo di uscita

Il sistema riesce inoltre ad attenuare il disturbo di uscita $d(t) = \sum_{k=1}^4 3 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(0.02kt)$ quasi completamente (specifica 45 dB).

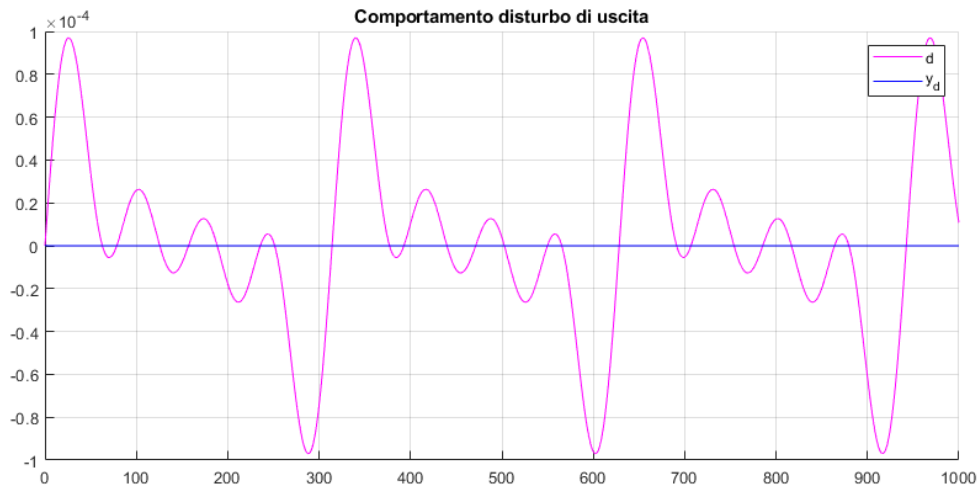


Figura 6: Attenuazione disturbo di uscita $d(t)$

4.3 Disturbo di misura

Da specifica dobbiamo attenuare il disturbo di misura $n(t) = \sum_{k=1}^4 2 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(5 \cdot 10^4 kt)$. Inizialmente abbiamo generato il grafico con una frequenza di campionamento di 20 Hz e il disturbo risulta poco attenuato, come si nota dal grafico.

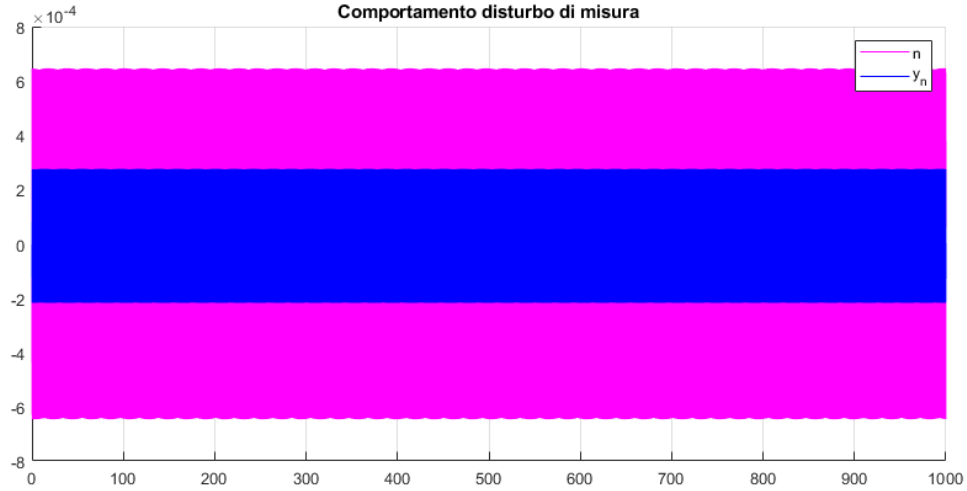


Figura 7: Attenuazione disturbo di uscita $d(t)$

Aumentando la frequenza di campionamento a 1 MHz , più che sufficiente per campionare il segnale (*Teorema di Shannon*) otteniamo un grafico che evidenzia come l'attenuazione sia avvenuta e rispetti le specifiche (85 dB).

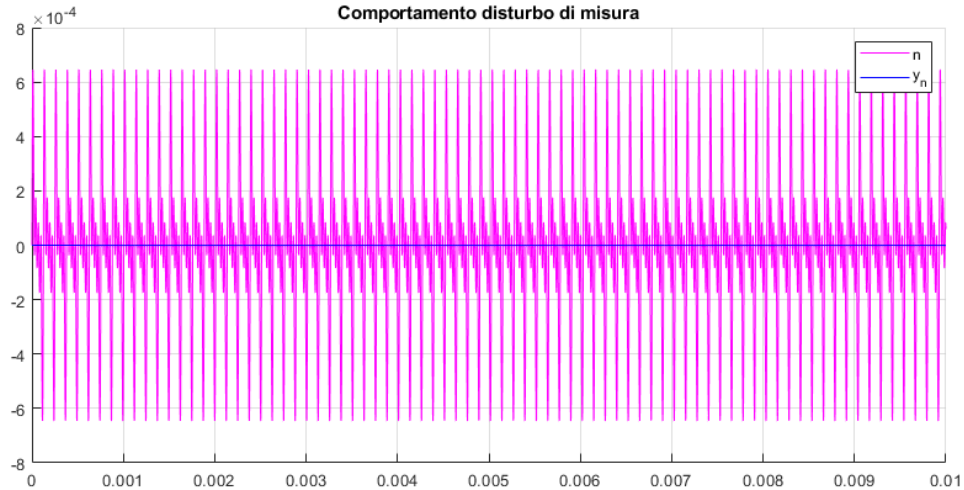
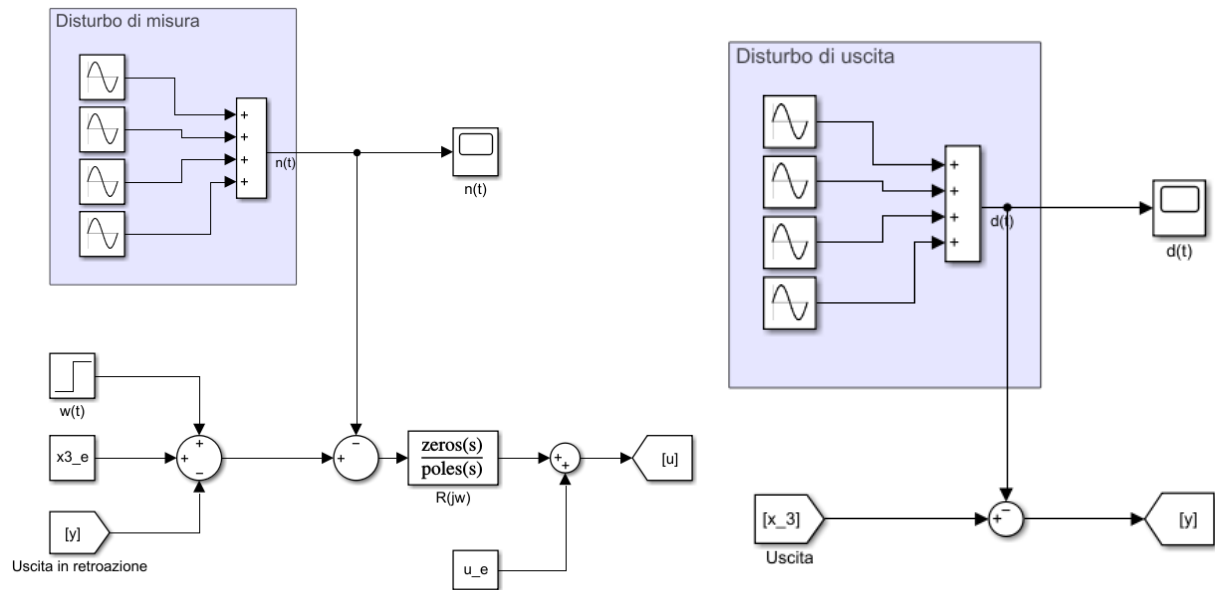


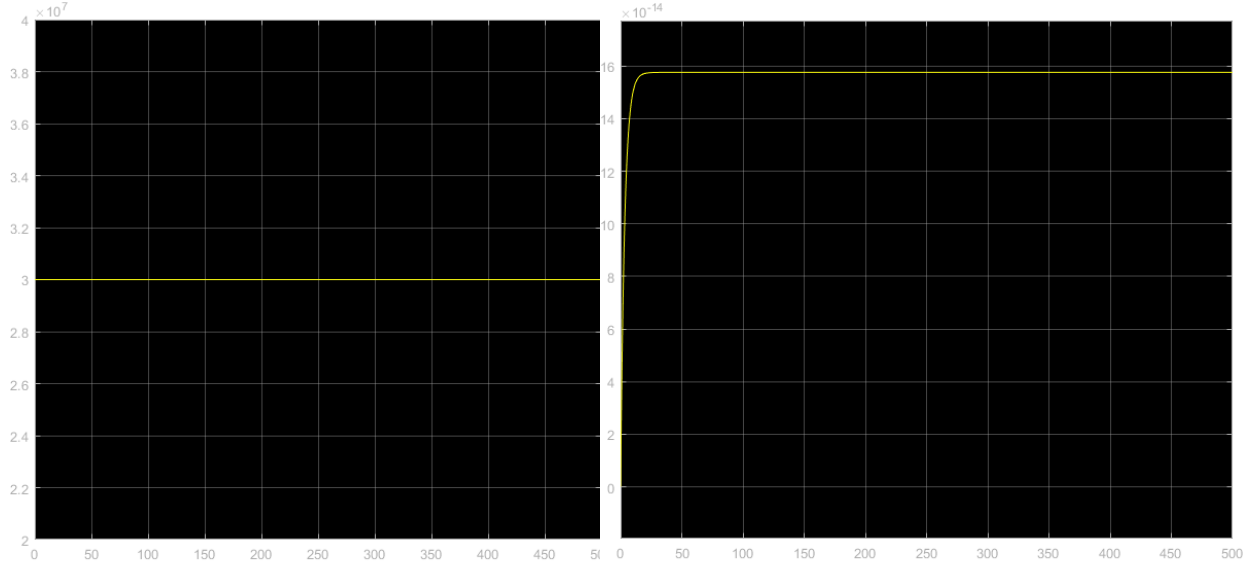
Figura 8: Attenuazione disturbo di uscita $d(t)$

Abbiamo inoltre aggiunto l'ingresso in retroazione y , il regolatore R , i disturbi di uscita $d(t)$ e di misura $n(t)$ e il gradino $w(t)$.



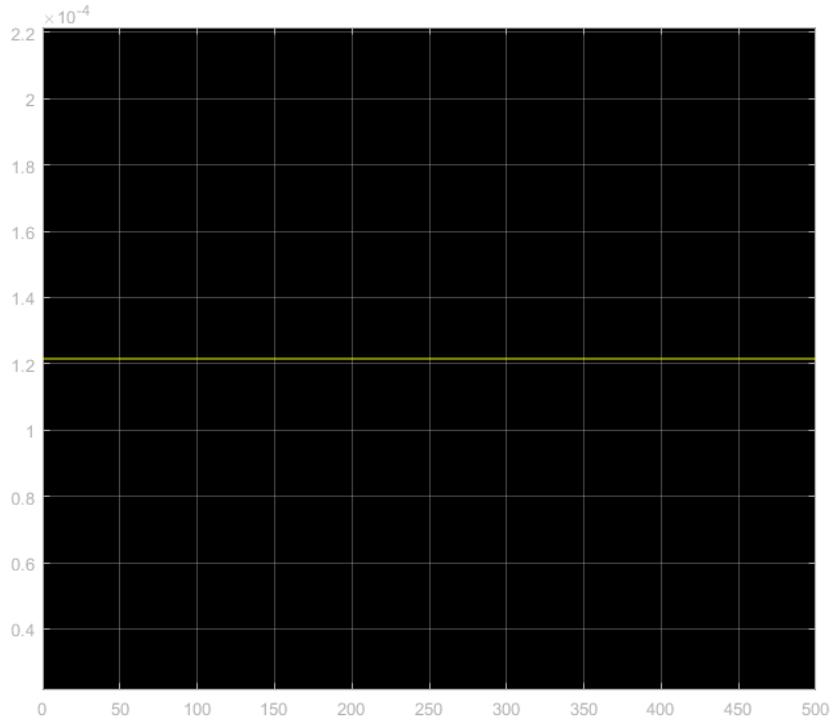
5.2 Simulazione sistema non perturbato

Simulando il sistema rimuovendo i disturbi di misura $n(t)$, di uscita $d(t)$ e l'ingresso a gradino $w(t)$ otteniamo dei grafici degli stati che tendono ai punti di equilibrio, in particolare:



$$x_1 \longrightarrow x_{1e} = 3 \cdot 10^7$$

$$x_2 \longrightarrow x_{2e} = 0$$

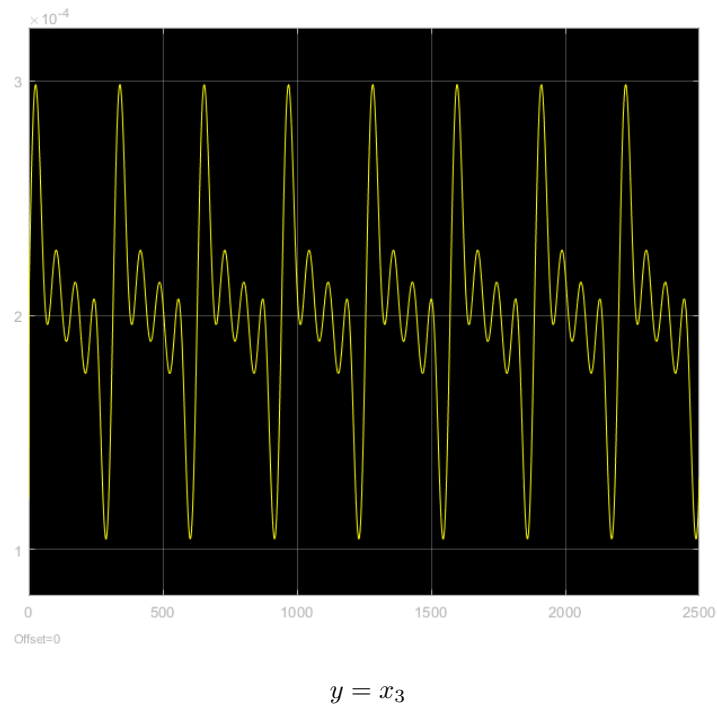
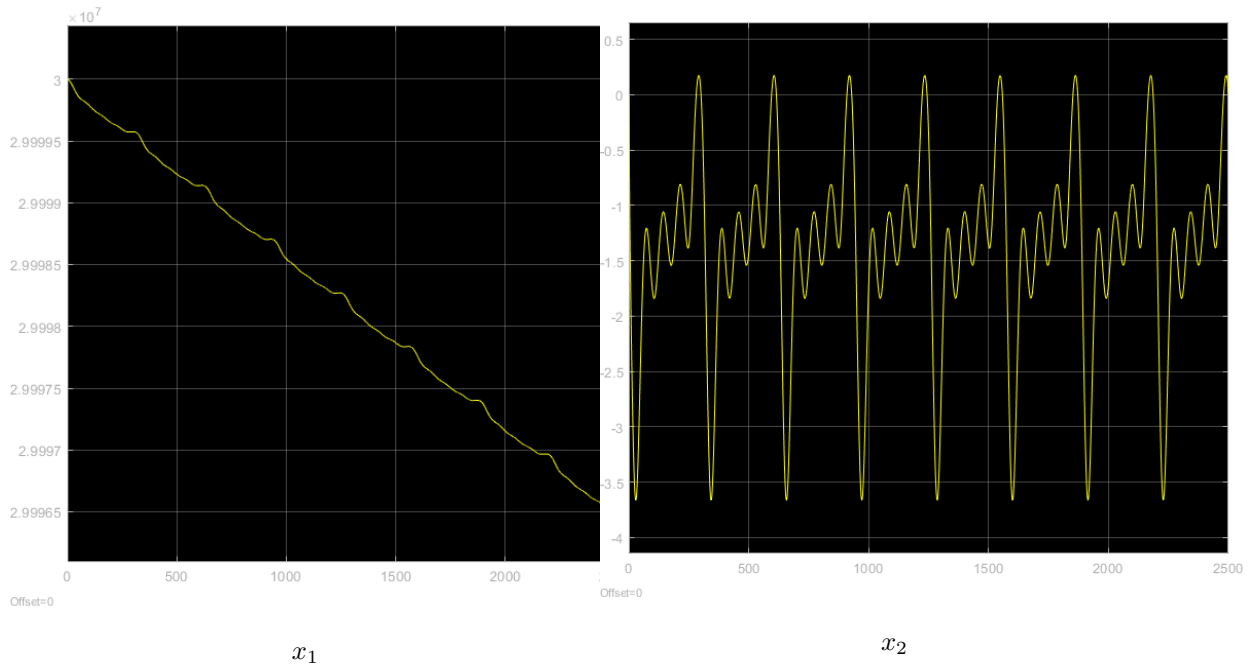


$$y = x_3 \longrightarrow x_{3e} = 1.215 \cdot 10^{-4}$$

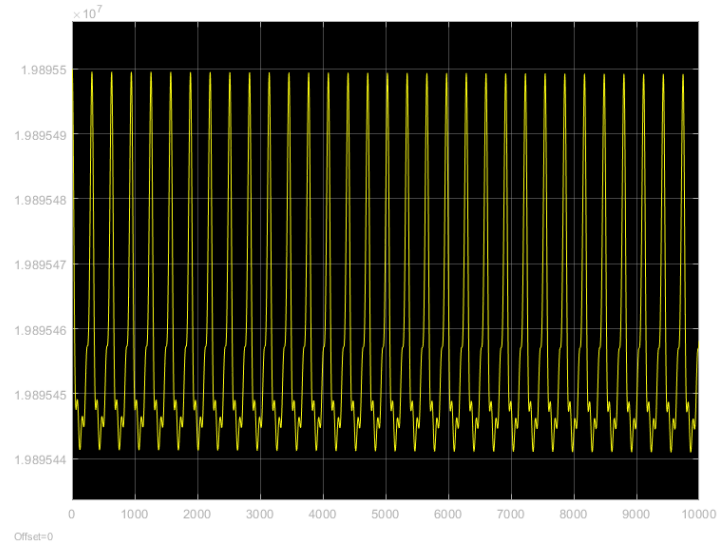
5.3 Simulazione con disturbi e gradino

Con l'introduzione dei disturbi si nota un notevole cambiamento nell'andamento dei grafici:

- x_1 tende a diminuire senza particolari oscillazioni.
- x_2 ed x_3 invece vengono notevolmente perturbati dai disturbi di uscita e misura, ma riescono comunque ad oscillare senza scostarsi dal loro punto di equilibrio.



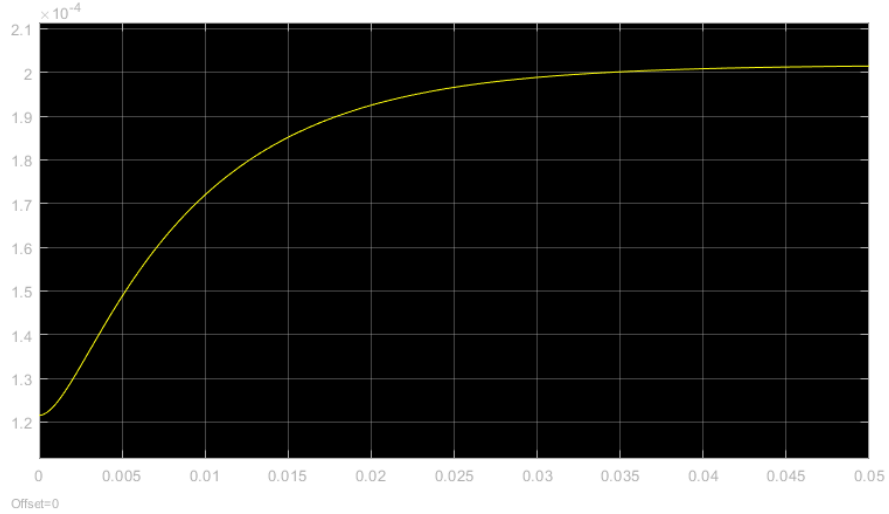
Simulando per un per un intervallo più lungo abbiamo notato che anche x_1 si assesta ad un nuovo punto di equilibrio $\overline{x_{1e}} \simeq 1.98955 \cdot 10^7$, evidenziando la robustezza del sistema anche se soggetto a disturbi.



$$\overline{x_{1e}}$$

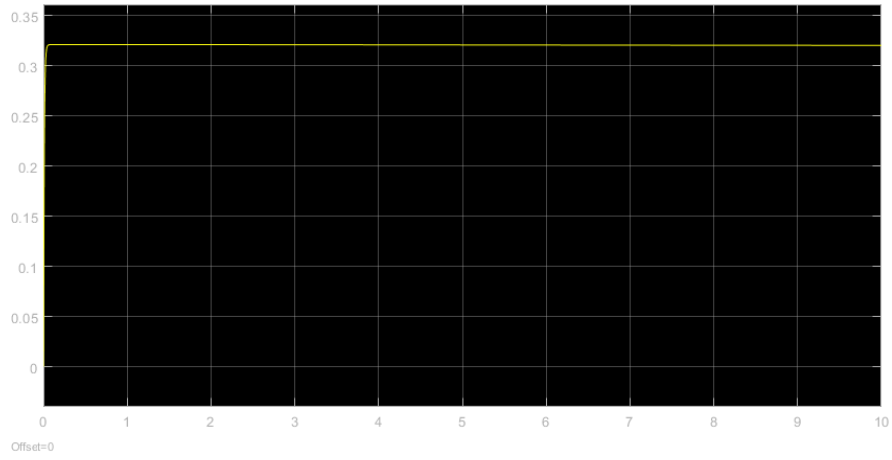
5.4 Test con diverse ampiezze di gradino

Nel primo grafico è rappresentata l'uscita in presenza del gradino dato da specifica $W = 8 \cdot 10^{-5}$, si nota come dopo poco tempo (0,05 s) il grafico si sia stabilizzato all'equilibrio.



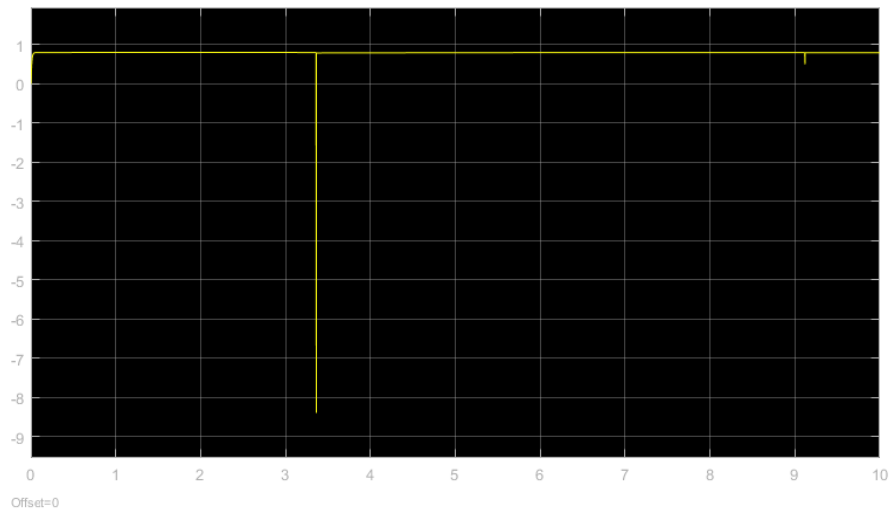
$$w(t) = W$$

Lo stesso comportamento viene evidenziato dal grafico sottostante, dove abbiamo preso un'ampiezza del gradino di 3 ordini di grandezza superiore ($w(t) = W \cdot 4 \cdot 10^3$), dimostrando la robustezza del sistema anche in seguito a grandi sollecitazioni.



$$w(t) = W \cdot 4 \cdot 10^3$$

Il comportamento cambia quando l'ampiezza raggiunge valori dell'ordine di $W \cdot 10^4$, infatti si notano dei picchi con $\dot{y} \rightarrow -\infty$, fisicamente impossibili.



$$w(t) = W \cdot 10^4$$