Calculus beta - Ugeseddel 5

Undervisningsmaterialet til 5. uge

Kursets femte uge, 27/9-3/10, drejer sig om to lidt forskellige ting. Først noget om anvendelsen af differentialregning i 2 variable til lineær regression, hvorefter vi så småt begynder på at integrere funktioner af flere variable. Det tilhørende undervisningsmateriale er afsnittene

- 3.3 Lineær Regression
- 4.1 Itererede integraler

fra Kapitel 3 og Kapitel 4, hhv., i undervisningsmaterialet. Opgaverne, der knytter sig til disse afsnit, skal behandles i kursets 6. uge, og vil blive stillet på ugeseddel 6.

Fag-opgaver

Med tiden har vi fået opbygget et mindre reservoir af opgaver til pensum i Calculus alpha og beta, som er udformet af videnskabeligt personale ved andre institutter på ST, og som giver eksempler på anvendelserne af matematikken i det respektive fag. Jeg kalder dem Fag-opgaver. Den første var en biologisk opgave som indgik for nogle af studieindgangene på Ugeseddel 1, og der var også et par stykker på Ugeseddel 2. På denne ugeseddel, Ugeseddel 5, vil de studerende på Nano-indgangen blive tilbudt en opgave, der tager udgangspunkt i et Nano-problem. Begge disse opgaver, og de efterfølgende Fag-opgaver kan findes på kursushjemmesiden under fanen 'Fag-opgaver'. Selvom opgaverne et rettet mod specifikke studie-indgange, her altså Nano-linien, er det selvfølgelig ikke forbudt for andre at kikke på dem. Man kunne risikere at lære noget.

Opgaver til TØ og Matlab i 5.uge, 27/9-3/10

$\boxed{\text{Øvelse U13.}}$ Betragt funktionen f givet ved

$$f(x,y) = 6 - 3x - 3y + x^2 + xy + y^2 \ .$$

a) Beregn de partielle afledede af funktionen f, og angiv

$$f_y = -3 + x + \boxed{}\, y \ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

b) Beregn det kritiske punkt

$$(x,y) = (\boxed{}, 1) \ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

c) Beregn den værdi som f antager i punktet $(1,1)$:

$$= \boxed{} \ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

d) Beregn de dobbelt partielle afledede.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{} \ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

e) Udregn teststørrelsen D i andenordenskriteriet.

$$D = \boxed{}\ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

f) Bestem arten af det kritiske punkt:

$$\boxed{}\ .$$

Skriv nummeret på dit svar:

[1] Lokalt minimum,
[2] lokalt maksimum,
[3] saddelpunkt,
[4] ikke [1]–[3].

Øvelse U14 Find de lokale maxima, minima og saddelpunkterne for funktionen

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Øvelse U15 Bestem a så funktionen

$$f(x, y) = xy - 3x - ay + 3a$$

har et kritisk punkt i $(5, 3)$.

$$a = \boxed{}\ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Øvelse U16 Afgør for hver af de kritiske punkter for funktionen

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4,$$

om de er lokale ekstremer eller saddelpunkter.

(Hints: Gør rede for, at (x, y) er et kritisk punkt hvis og kun hvis x og y opfylder

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0 \tag{1}$$

og

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0. \tag{2}$$

(1) er opfyldt hvis og kun hvis $x = 0$ eller

$$10y - 5 - 2x^2 = 0\ . \tag{3}$$

Vis så, at $(x, y) = (0, 0)$ er det eneste kritiske punkt hvor første koordinaten er 0. Fra (3) følger at

$$x^2 = 5y - \frac{5}{2}\ .$$

Indsættes dette i (2) får man ligningen

$$4y^3 - 21y + 12.5 = 0\ .$$

Løs denne ligning approksimativt vha. isenkram eller computer programmer, og brug andens orden testen på de approksimative løsninger til afgøre om de ekstra kritiske punkter der dukker op, er lokale ekstremumspunkter eller ej (saddelpunkter).

- Fra undervisningsmaterialet øvelserne (3.9), (3.73), (3.74), (3.75) og (3.76).
- For studerende på Nano-linien: Fag-opgave 2, som findes på kursus-hjemmesiden under fanen 'Fag-opgaver'.

5. obligatoriske afleveringsopgave

Opgaven består af to dele. Den første halvdel er

Sci2u-opgaven 5a

som kan tilgåes fra kursets hjemmeside:

Ugesedler 0-7 → Uge 5 → sci2u-aflevering 5a.

Denne on-line opgave har deadline søndag d. 10/10 kl. 23.59; dvs. at den skal være løst og godkendt inden dette tidspunkt. Opgaven er først godkendt når man i opgaven ser

Status in BrightSpace: Passed

Jeg gør opmærksom på, at deadlinen bliver overholdt strengt, og at man ikke kan få godkendt 5. obligatoriske afleveringsopgave hvis ikke 5a bliver godkendt inden deadline.

Den anden halvdel af anden obligatoriske afleveringsopgave kaldes 5b og består af nedenstående

Opgave U17

Opgave 5b (= Opgave U17) skal besvares skriftligt og afleveres til TØ-instruktoren.

Opgave U17

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen,

$$f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 24x - 6y + 5 \ .$$

a) Beregn de partielle afledede af funktionen f.

b) Der er to kritiske punkter, (x_1, y_0) og (x_2, y_0) for f, og de har samme anden koordinat y_0. Find y_0.

c) Beregn den største kritiske værdi, dvs. den største af de værdier som f antager i de kritiske punkter.

d) Lad (x_1, y_0) være det kritiske punkt hvori den største kritiske værdi antages. Beregn de dobbelt partielle afledede af f i punktet (x_1, y_0).

e) Udregn teststørrelsen D i andenordenskriteriet for det kritiske punkt (x_1, y_0).

f) Om det kritiske punkt (x_1, y_0) gælder et af følgende alternativer. Hvilket ?

   [1] Det er et lokalt minimum.
   [2] Det er et lokalt maksimum.
   [3] Det er et saddelpunkt.
   [4] Det er ingen af de tre foregående, altså hverken ikke [1], [2] eller [3].

   Angiv det rigtige.

g) Bestem det positive tal a som opfylder, at gradienten $\nabla f\left(a, \frac{5}{2}\right)$ er en enhedsvektor.

$$a \ = \ \boxed{} \ .$$

   Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Oversigtsforelæsning

I uge 5 afholdes denne mandag d. 27/9, kl. 13.15-14 i Aud. E.

19. september 2021; Institut for Matematik; Klaus Thomsen.