Calculus beta – Ugeseddel 1

Undervisningsmaterialet til 1. uge

Undervisningsmaterialet er en interaktiv bog med videoer og andet godt som kan købes via et link på kursets hjemmeside. Undervisningsmaterialet omtales i det følgende som 'I-bogen'.

Kursets første uge, 30/8-5/9, handler om differential- og integralregning for funktioner af én variabel. Det tilhørende undervisningsmateriale er afsnittene

- 1.1 Grænseværdi,
- 1.2 Kontinuerte og differentiable funktioner, og
- 1.3 Integration i én variabel

i I-bogen.

Om substitution i integraler

Det følgende er en uddybning af undervisningsmaterialets behandling af substitution i integraler.

I lærebogsmaterialet er det understreget hvordan metoden, hvor man integrerer ved substitution, fremkommer fra kædereglen. Den centrale formel er

$$\int (f' \circ g)g' \;=\; f \circ g \;,$$

som er en direkte konsekvens af kædereglen. Ovenstående identitet kan også skrives på følgende måde:

$$\int f'(g(x))g'(x)\;\mathrm{d}x \;=\; \int f'(u)\;\mathrm{d}u \;,$$

hvor $u = g(x)$. I ord siger den sidste formel at stamfunktionen til $f'(g(x))g'(x)$ netop er stamfunktionen mht. u af funktionen $u \to f'(u)$ når man efterfølgende erstatter u med $g(x)$. Hvis man nu kalder f' for h får man formlen

$$\int h(g(x))g'(x)\;\mathrm{d}x \;=\; \int h(u)\;\mathrm{d}u \;, \tag{1}$$

som mere ligner den mange kender. Igen er det en god ide at formulere i ord hvad formlen siger: Stamfunktionen til funktionen $x \mapsto h(g(x))g'(x)$ er stamfunktionen mht. u af funktionen $u \to h(u)$, når man efterfølgende erstatter u med $g(x)$. En populær måde at huske denne regel på er at regne med differentialerne som små (meget små) størrelser. Hvis man bruger notationen

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; g'(x)$$

kan venstresiden i (1) skrives

$$\int h(g(x))\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\;\mathrm{d}x \;.$$

Hvis man 'forkorter' $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ $\mathrm{d}x$ til $\mathrm{d}g(x)$ og erstatter $g(x)$ med u får man netop højresiden i (1). Ved at regne ganske uhæmmet med differentialerne bliver reglen for substition i integraler til et stærkt værktøj. Hvis man f.eks. skal finde en stamfunktion til $x\sin(x^2)$; altså finde

$$\int x\sin(x^2)\;\mathrm{d}x \;, \tag{2}$$

kan det gøres ved at lave substitutionen $u = x^2$. Ved differentiation får man, at

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \;=\; 2x \;.$$

Ved at opfatte dette udtryk som en brøk med differentialet du i tælleren og differentialet dx i nævneren får vi så udtrykket

$$\mathrm{d}u \;=\; 2x\;\mathrm{d}x \;,$$

eller

$$x\;\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\;\mathrm{d}u \;,$$

som kan sættes direkte ind i (2):

$$\begin{aligned} \int x\sin(x^2)\;\mathrm{d}x \;&=\; \int \sin(x^2)\frac{1}{2}\;\mathrm{d}u \\ = \int \frac{1}{2}\sin u\;\mathrm{d}u \;&=\; -\frac{1}{2}\cos u \end{aligned}$$

idet $-\cos u$ er en stamfunktion (mht. u) for $\sin u$. Afslutningsvis indsætter man så x^2 for u og finder, at

$$\int x\sin(x^2)\;\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{2}\cos(x^2)\;. \tag{3}$$

Læg mærke til, hvordan den matematiske notation (i dette tilfælde brugen af differentialerne dx og du) er medvirkende til at gøre et teoretisk resultat (kædereglen for differentiation) til et potent redskab i praktiske beregninger.

Opgaver til TØ og Matlab i 1.uge, 30/8-5/9,

- Fra I-bogen øvelserne (1.10), (1.12), (1.13).
- Opgaverne U1, U2, U3 og U4 nedenfor.
- Fra I-bogen øvelserne (1.36), (1.48).

$\boxed{\text{Øvelse U1.}}$ Find f' og f'' for funktionerne

$$f(x) = e^x \ln x$$

og

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$\boxed{\text{Øvelse U2.}}$ Find ligningen for den tangent til grafen for funktionen

$$f(x) = \ln(x^2 - 3),$$

der går igennem punktet $(2, 0)$.

$\boxed{\text{Øvelse U3.}}$ For hvilke reelle tal x er funktionen

$$f(x) = \frac{x}{1 - \ln(x - 1)}$$

defineret ? Find $f'(x)$.

$\boxed{\text{Øvelse U4.}}$ Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion som opfylder, at f' er positiv på hele den reelle akse. Bestemt det mindste reelle tal a som opfylder, at funktionen

$$g(x) = f(ax^3 + 3x)$$

er voksende på hele den reelle akse $\mathbb{R}$.

1. obligatoriske afleveringsopgave

Opgaven består af to dele. Den første halvdel er

Sci2u-opgaven 1a

som kan tilgåes senest torsdag d. 26/8, via kursets hjemmeside:

Ugesedler 0-7 → Uge 1 → sci2u-aflevering 1a.

Denne on-line opgave har deadline søndag d. 12/9 kl. 23.59; dvs. at den skal være løst og godkendt inden dette tidspunkt. Opgaven er først godkendt når man i opgaven ser

Status in BrightSpace: Passed

Jeg gør opmærksom på, at deadlinen bliver overholdt strengt, og at man ikke kan få godkendt 1. obligatoriske afleveringsopgave hvis ikke 1a bliver godkendt inden deadline.

Den anden del af den første obligatoriske afleveringsopgave af følgende opgave 1b:

1b = opgave (1.66) (e) + (f) + (g) + (h) i I-bogen.

Opgaven skal besvares skriftligt og afleveres til TØ-instruktoren som retter og godkender. Gør dig umage med at beskrive og forklare dine argumenter. De nærmere detaljer om hvor og hvordan den afleveres aftales med instruktoren i forbindelse med første TØ i uge 1.

Diskussionsfora

På kursets hjemmeside findes to fora til diskussion og kommunikation. Den ene er til intern brug mellem studerende på kurset, og den anden kan bruges til at sende meddelelser til undertegnede.

Den første oversigtsforelæsning

Den første forelæsning er en velkomst-forelæsning og finder sted mandag d. 30/8 kl. 13-14 i Auditorium E (bygning 1533, lokale 103). I starten af semestret vil der også være en ekstra forelæsning kl. 16-17 om mandagen, også i Aud. E.

24. august 2021; Institut for Matematik; Klaus Thomsen.