1 Differential- og integralregning i én variabel

Meningen med dette kapitel er at give et overblik over nogle af de vigtigste begreber og metoder i forbindelse med differentiation og integration af en funktion af en variabel.

1.1 Grænseværdi

Vi skal arbejde med funktioner af én reel variabel. Så den en er en forskrift, der til et reelt tal x knytter et andet reelt tal $f(x)$. F.eks. funktionen $f(x) = x^2$, der til tallet x knytter tallet x^2. Men vi skal også arbejde med funktioner, der ikke er defineret for alle reelle tal. Som funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

der kun er defineret når $x \neq 0$. De tal, hvor funktionen f er defineret, udgør *definitionsmængden* for f. Definitionsmængden består altså af en del af de reelle tal − en såkaldt *delmængde* af de reelle tal R. For funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

er den naturlige definitionsmængde I alle ikke-negative reelle tal; altså

$$I = \{x \in \mathrm{R} \, : \, x \geq 0\}.$$

Lad I være en delmængde af de reelle tal, og lad

$$f : I \to \mathrm{R}$$

være en funktion. Det kan f.eks. være funktionen defineret ved, at

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x}, \qquad \textbf{(1.1)}$$

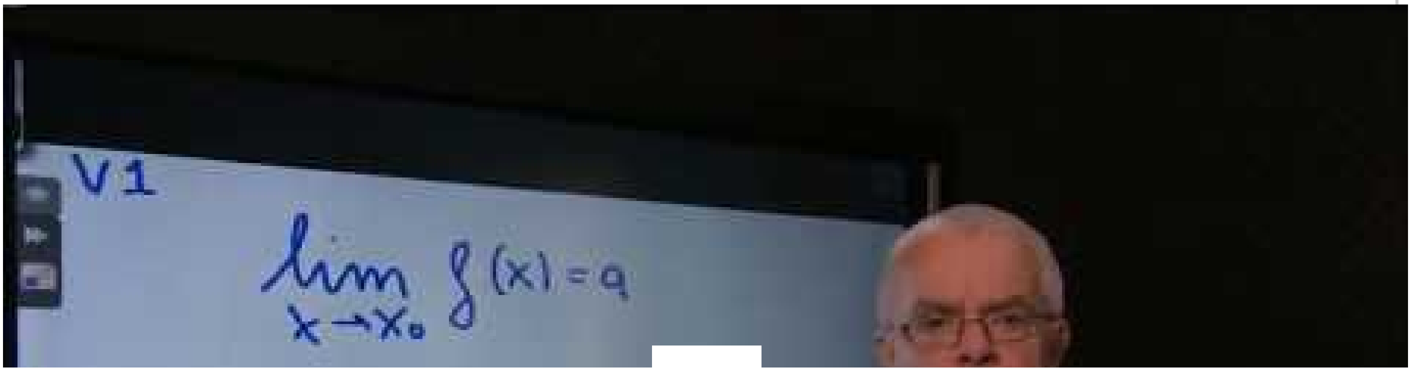
hvor vi tager mængden I til at være mængden af reelle tal forskellig fra 1. Altså

$$I = \{x \in \mathrm{R} \, : \, x \neq 1\}.$$

Når x_0 og a er reelle tal, siger vi, at *f har grænseværdien a for x gående mod x_0* når afstanden mellem $f(x)$ og a kan gøres vilkårligt lille ved at vælge x i I meget tæt på, men ikke lig med x_0.Når det er opfyldt skriver vi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

(Om grænseværdi-begrebet).



Om definitionen af grænseværdi

Grænseværdibegrebet er ikke let, og det har voldt menneskeheden store kvaler og problemer at nå frem til en generelt accepteret præcisering. Formuleringen i Definition 1.1 er ikke den eneste der bruges, og blandt matematikere bliver den betragtet som værende meget uformel. En mere formel formulering er følgende: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ betyder at for ethvert positivt tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$ så

$$|f(x) - a| \le \varepsilon$$

når

$$0 < |x - x_0| \le \delta.$$

Eller med endnu flere matematiske symboler, kaldet *kvantorer*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \le \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| \le \varepsilon.$$

Afstanden mellem $f(x)$ og a er jo tallet

$$|f(x) - a|,$$

så f vil have grænseværdi a for x gående mod x_0 netop når $|f(x) - a|$ kan gøres vilkårligt lille ved at vælge $x \in I$ tilstrækkeligt tæt på, men ikke lig med x_0.

For funktionen (1.1) gælder, at

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2. \tag{1.2}$$

Dette kan indses ved at udnytte, at $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Ved at bruge dette kan vi skrive

$$f(x) = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x}.$$

Når x er et tal i definitionsmængden I er $1 - x$ ikke 0, og vi kan derfor forkorte udtrykket:

$$f(x) = 1 + x.$$

Afstanden mellem $f(x)$ og 2 er den numeriske værdi af $f(x) - 2$; i symboler

$$|f(x) - 2|,$$

og når $x \neq 1$ er dette

$$|f(x) - 2| = |1 + x - 2| = |x - 1|.$$

Da $|x - 1|$ er afstanden mellem x og 1, ser vi at afstanden mellem $f(x)$ og 2, der jo er tallet $|f(x) - 2|$, kan gøres ligeså lille som vi ønsker ved at vælge $x \neq 1$ tæt nok på 1. Dermed har vi vist, at grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 1 i dette tilfælde er 2. Altså at (1.2) er rigtig.

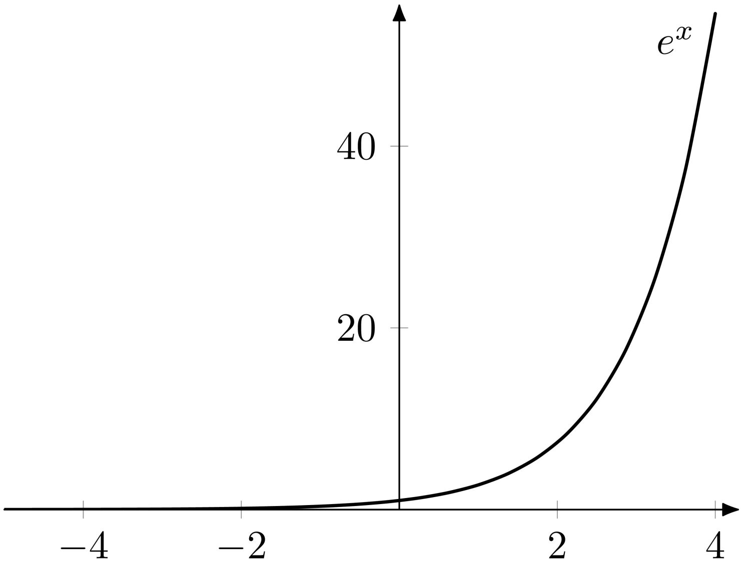
Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, som er givet ved forskriften

$$f(x) = e^{-1/x^2} = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

har som definitionsmængde I alle tal som ikke er 0. I symboler

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Denne funktion f har grænseværdien 0 for x gående mod 0. Thi når x nærmer sig 0 vil $-\frac{1}{x^2}$ numerisk blive meget stor, men negativ, og exponential-funktionen af sådanne ('meget negative') tal kommer vilkårligt tæt på 0. Se grafen på Figur 1.5.



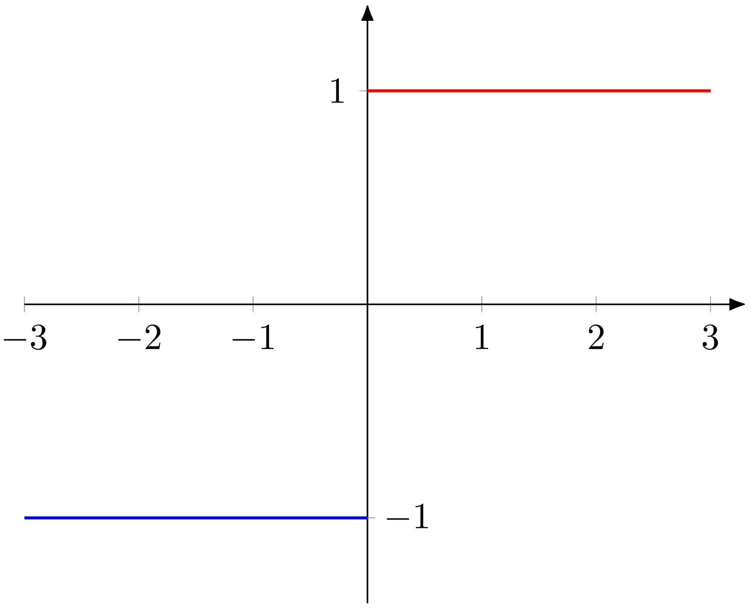
Grafen for eksponential funktionen $f(x) = e^x$.

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{når } x \neq 0, \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

har ikke nogen grænseværdi for x gående mod 0. Thi for $x > 0$ er $f(x) = 1$ og for $x < 0$ er $f(x) = -1$. Så uanset hvilket reelt tal t vi forsøger med, vil det *ikke* gælde at t er grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 0. F.eks. er -1 ikke en grænseværdi af $f(x)$ for x gående mod 0 for vi kan vælge x ligeså tæt på 0 som vi vil, uden at afstanden fra $f(x)$ til -1 bliver mindre end 2.

Grafen for funktionen er vist i Figur 1.7.



Grafen for funktionen $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Udtrykket

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} \tag{1.3}$$

giver ikke umiddelbart mening når $x = -2$, fordi nævneren $x^2 + 5x + 6$ er 0 når $x = -2$. Grænseværdien

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

findes til gengæld. Thi tæller og nævner i brøken kan skrives

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

og

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3),$$

henholdsvis. Så når $x \neq -2$ og $x \neq -3$ er

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}.$$

Når x kommer tæt nok på -2, vil tælleren $x - 1$ komme ligeså tæt på -3, som vi måtte ønske, og tilsvarende vil nævneren $x + 3$ komme ligeså tæt på 1 som vi måtte ønske. Brøken

$$\frac{x - 1}{x + 3}$$

vil således komme ligeså tæt på $\frac{-3}{1} = -3$ som vi måtte ønske. Dermed har vi indset, at

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x - 1}{x + 3} = -3.$$

Nævneren i udtrykket (1.3) er også 0 når $x = -3$. Men udtrykket har ingen grænseværdi for x gående mod -3. For når x er meget tæt på -3, men ikke lig med -3, er den numeriske værdi af

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

meget stor. (Fortegnet afhænger af, om x er mindre end -3 eller større end -3.) Og jo tættere x kommer på -3, jo større bliver

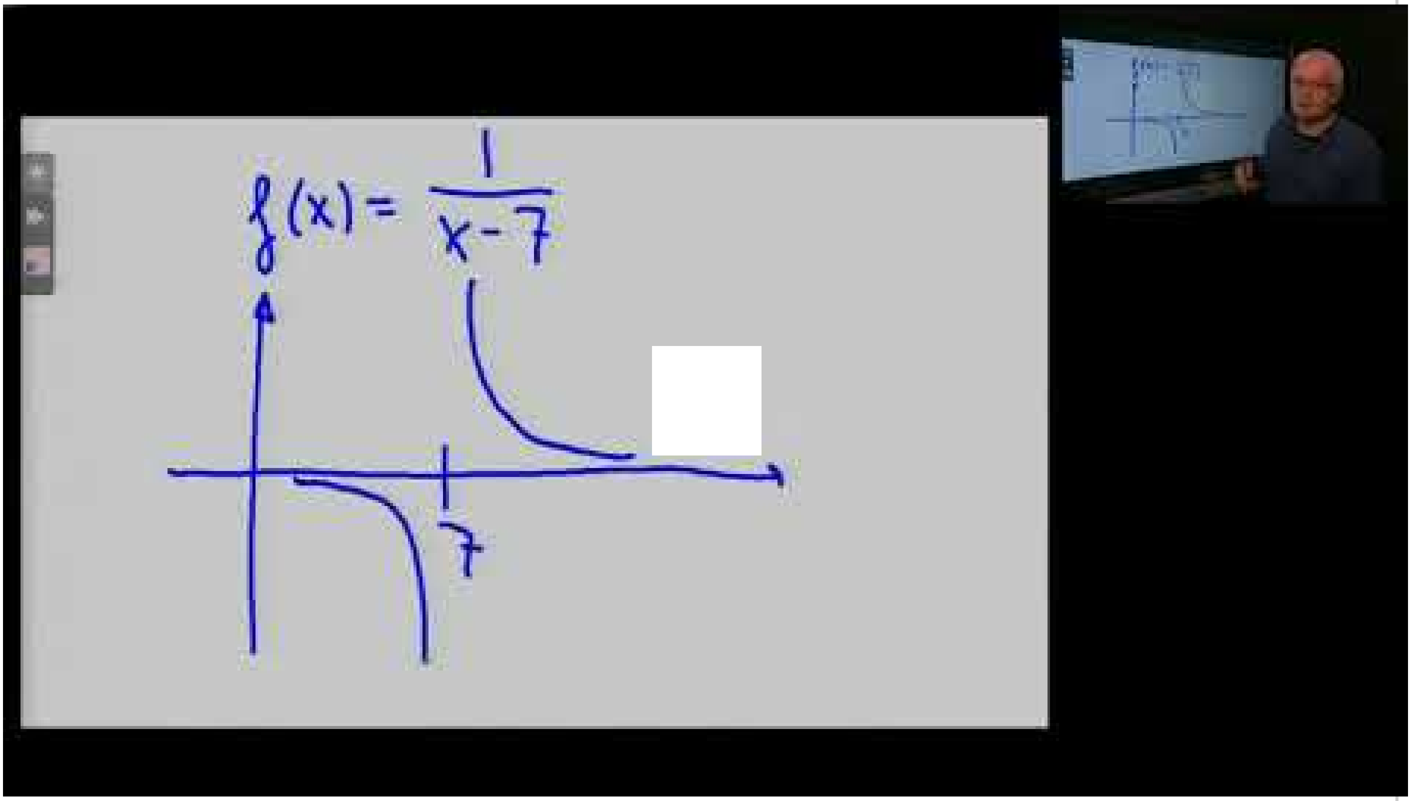
$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6},$$

numerisk. Dermed kan der ikke findes noget tal a, som brøken kan komme vilkårligt tæt på, når x nærmer sig -3; grænseværdien

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

findes altså ikke.

(Om konvergens mod uendelig).



Opgave

Formuler hvad det betyder at grænseværdien

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)$$

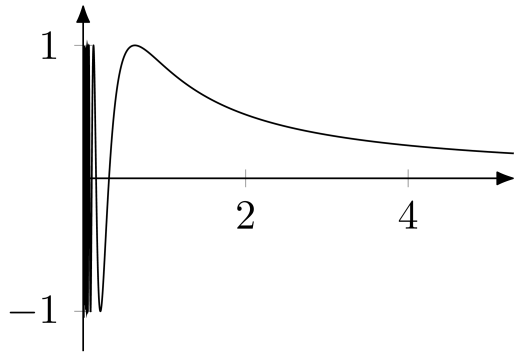
findes.

Opgave

I figuren nedenfor er grafen for funktionen $g\ :\ ]0,\infty[\ \to\ \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Eksisterer grænseværdien $\lim_{x\to 0} g(x)$? Hvad med $\lim_{x\to\infty} g(x)$?



Grafen for funktionen $\sin(\frac{1}{x})$.

Opgave

Det er fristende at sige, at $\frac{1}{x^2}$ går mod uendelig for x gående mod 0. Formuler hvad det skal betyde, og brug det til at afgøre, om $\frac{1}{x}$ går mod uendelig for x gående mod 0.

Opgave

I hvert af tilfældene (a.), (b.) og (c.) er det kun den ene af de to grænseværdier der eksisterer. Hvilken?

a. $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{|x|}}$ eller $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

b. $\lim_{x \to 0} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ eller $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{x^2}$.

c. $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ eller $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$.

1.2 Kontinuerte og differentiable funktioner

1.2.1 Kontinuitet

Kontinuitet er en egenskab ved en funktion, der betyder noget i retning af, at den er 'sammenhængende'. I dette afsnit bruger vi grænseværdibegrebet til at give en formel definition af kontinuitet. Dette vil gøre det muligt at arbejde analytisk med begrebet − uafhængigt af en evt. visualisering af grafen − og åbne op for senere at kunne definere kontinuitet for funktioner af flere variable.

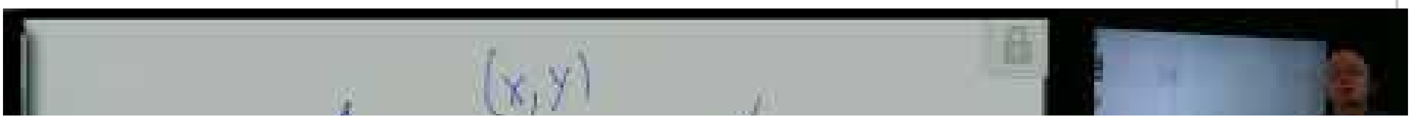
(Kontinuitet). En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ defineret på en delmængde I af de reelle tal er*kontinuert* i et punkt x_0 i I når grænseværdien

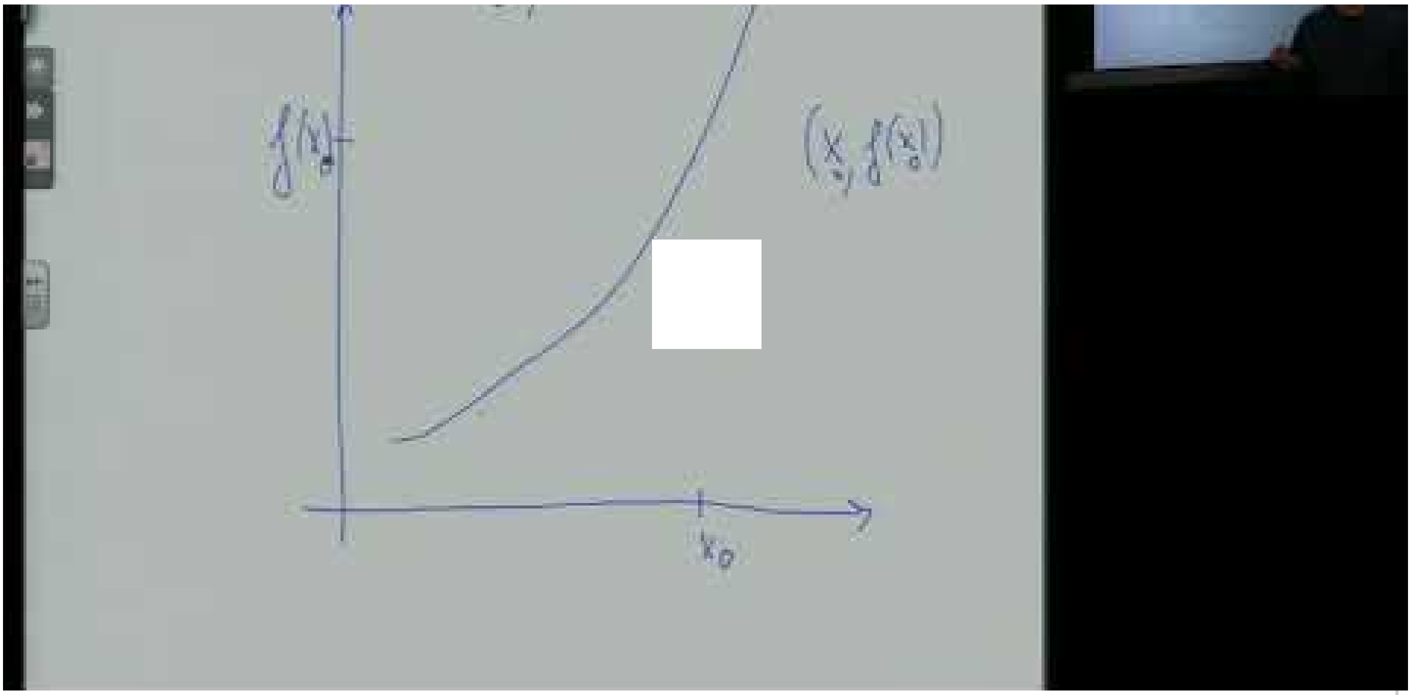
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

eksisterer og er lig med $f(x_0)$. Altså når der gælder, at

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(Om kontinuitet).





Når $f : I \to \mathrm{R}$ er kontinuert i alle punkter i I siger vi, at f er *kontinuert*. De mest almindelige funktioner er alle kontinuerte, men det er på den anden side ikke svært at lave sig en funktion, der ikke er kontinuert. For eksempel er funktionen, hvis graf er vist på Figur 1.7, ikke kontinuert i 0.

Der gælder følgende sætninger.

Når $f : I \to \mathrm{R}$ og $g : I \to \mathrm{R}$ er kontinuerte funktioner gælder:

a. $f + g$ er kontinuert.

b. fg er kontinuert.

c. $\frac{f}{g}$ er kontinuert i et ethvert punkt x_0 i I, hvor $g(x_0) \neq 0$.

Vi giver her 3 beviser for punkt (b.) i Sætning 1.16, der kun adskiller sig ved detaljegrad, notation og sprogbrug. Meningen er, at illustrere forskellige niveauer af det, der kaldes 'matematisk stringens'.

Bevis 1

Når x nærmer sig x_0, vil $f(x)$ nærme sig $f(x_0)$, fordi f er kontinuert i x_0 pr. antagelse. Tilsvarende vil $g(x)$ nærme sig $g(x_0)$. Så når x nærmer sig x_0 vil $fg(x) = f(x)g(x)$ nærme sig $f(x_0)g(x_0) = fg(x_0)$.Det betyder jo, at fg er kontinuert i x_0.

Bevis 2

Afstanden mellem $fg(x)$ og $fg(x_0)$ er $|fg(x) - fg(x_0)|$, som vi omskriver

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &= |f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x_0)|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Når x går mod x_0 vil $f(x)(g(x) - g(x_0))$ gå mod $f(x_0) \cdot 0 = 0$ og $(f(x) - f(x_0))g(x_0)$ vil gå mod $0 \cdot g(x_0) = 0$. Så vi ser fra (1.4), at $fg(x) - fg(x_0)$ vil gå mod nul når x går mod x_0. Dvs. at $fg(x)$ går mod $fg(x_0)$, når x går mod x_0. Altså er fg kontinuert i x_0.

Bevis 3

Beviset bruger flg. uligheder, der gælder for alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$|s+t| \leq |s| + |t|, \tag{1.5}$$

og

$$|s| - |t| \leq |s-t|. \tag{1.6}$$

Vi bemærker, at

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &= \left| f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x_0) \right| \\ &\leq \left| f(x)(g(x) - g(x_0)) \right| + \left| (f(x) - f(x_0))g(x_0) \right| \end{aligned} \tag{1.7}$$

hvor vi har brugt (1.5) i det sidste trin. For alle $s, t \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$|st| = |s||t|, \tag{1.8}$$

og når det bruges i (1.7) finder vi, at

$$|fg(x) - fg(x_0)| \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |f(x) - f(x_0)||g(x_0)|. \tag{1.9}$$

Da $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, findes et $\delta_1 > 0$ så $|f(x) - f(x_0)| \leq 1$ når $0 < |x - x_0| \leq \delta_1$. Ved brug af (1.6) finder vi, at

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1$$

når $0 < |x - x_0| \leq \delta_1$. Så får vi fra (1.9) at

$$|fg(x) - fg(x_0)| \leq (|f(x_0)| + 1)|g(x) - g(x_0)| + |f(x) - f(x_0)||g(x_0)|, \tag{1.10}$$

når $0 < |x - x_0| \leq \delta_1$. Lad så $\varepsilon > 0$ være givet. Da $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ og $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, kan vi finde $\delta_2 > 0$ så

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + 1)} \tag{1.11}$$

og

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)| + 1)} \tag{1.12}$$

når $0 < |x - x_0| \leq \delta_2$. Sæt

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Når $0 < |x - x_0| \leq \delta$ har vi alle vurderingerne (1.10), (1.11) og (1.12) til rådighed. Det giver os vurderingen

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(x_0)| &\leq (|f(x_0)| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + 1)}|g(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

når $0 < |x - x_0| \leq \delta$.

Lidt groft sagt følger det fra Sætning 1.16, at algebraiske manipulationer med kontinuerte funktioner altid resulterer i kontinuerte funktioner. F.eks. følger det, at

$$\frac{f(x) - 7g(x)}{f(x)^4 + g(x)^2 + 5}$$

er en kontinuert funktion når f og g begge er det.

1.2.2 Differentiabilitet

Kontinuerte funktioner er ganske vist 'sammenhængende', men de er ikke 'glatte'. Selvom der ikke er huller i grafen for en kontinuert funktion, behøver grafen ikke være glat; den kan have knæk. Differentiabilitet, som vi nu skal indføre, er et krav om en vis 'glathed' af funktionen. Samtidigt er det et fundamentalt redskab til at måle hvor meget og hvor hurtigt funktionen varierer.

(Differentialkvotient). En funktion $f : I \to \mathrm{R}$ defineret på en delmængde I af de reelle tal er *differentiabel* i et punkt $x_0 \in I$ når grænseværdien

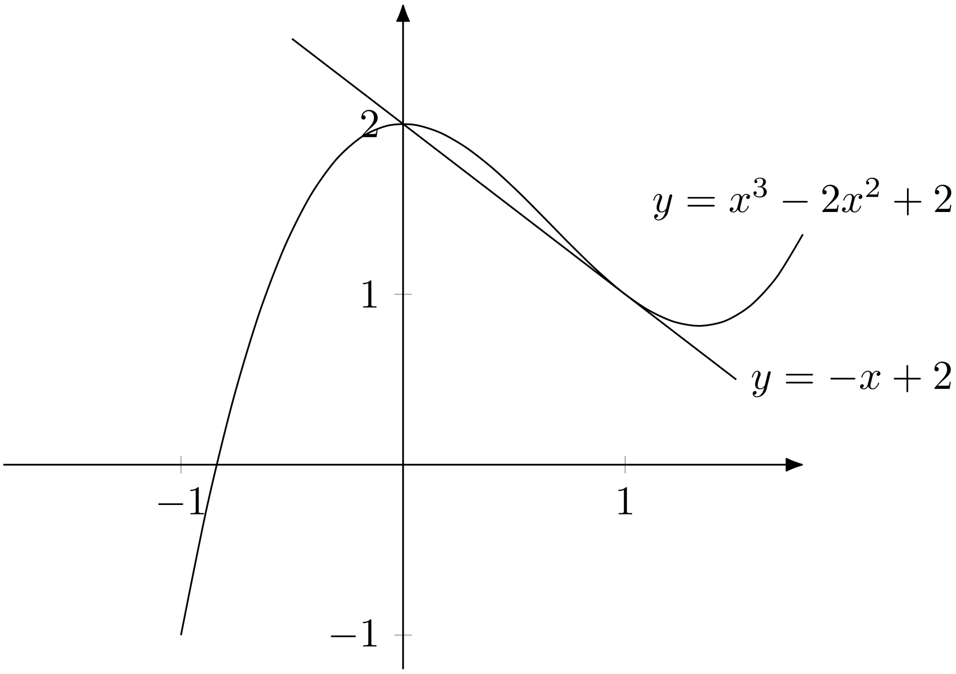
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer. Når denne grænseværdi findes, kaldes den for *differentialkvotienten* af f i x_0, og betegnes $f'(x_0)$.

Differentialkvotienten har en håndfast geometrisk fortolkning. Det er nemlig hældningskoefficienten for den linie, der er tangent til grafen for f i x_0. Tangenten selv er linien med ligning

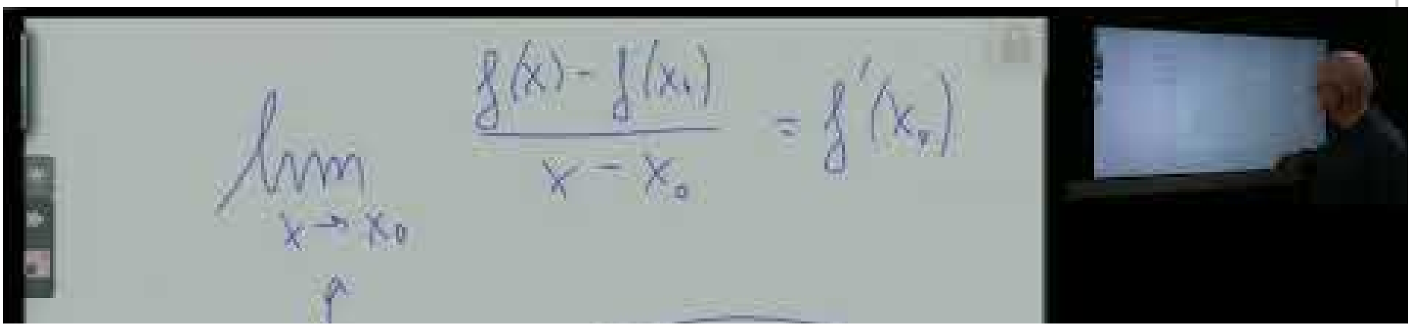
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \qquad \textbf{(1.13)}$$

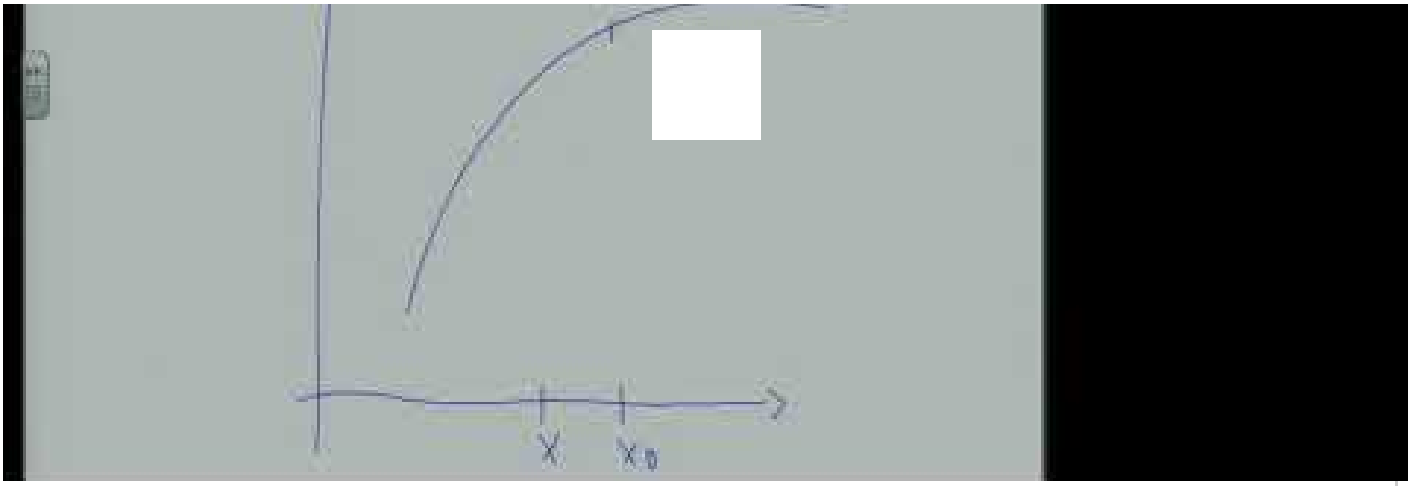
hvor $y_0 = f(x_0)$. Se Figur 1.18 for en illustration.



Grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ og tangenten til grafen i punktet $x_0 = 1$.

(Differentialkvotient og tangenthældning).





Den følgende sætning siger, at differentiabilitet er et stærkere krav end kontinuitet.

Hvis $f : I \to \mathrm{R}$ er differentiabel i $x_0 \in I$, så er f også kontinuert i x_0.

Bevis

Når x ligger i I og er forskellig fra x_0, er

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Da f er differentiabel i x_0 er

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Desuden er det klart at

$$\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0.$$

Ved brug af punkt (b.) i Sætning 1.16 følger så, at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) &= \Big(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\Big)\Big(\lim_{x \to x_0} x - x_0\Big) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Altså er $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, og derfor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Hvis funktionen $f : I \to \mathrm{R}$ er differentiabel i ethvert af punkterne i I, siger vi, at f er *differentiabel*. Når det er tilfældet har vi en ny funktion på I, nemlig funktionen der sender $x \in I$ over i differentialkvotienten for f i punktet x. I symboler

$$I \ni x \mapsto f'(x).$$

Denne funktion betegnes ofte f' og kaldes *den afledte* funktion af f. En anden notation for den afledte, som også ofte bruges, er

$$\frac{df}{dx}.$$

Differentialkvotienten $f'(x_0)$ kan derfor også betegnes ved symbolet $\frac{df}{dx}(x_0)$ − værdien af funktionen $\frac{df}{dx}$ i punktet x_0.

Det følger fra Sætning 1.20, at

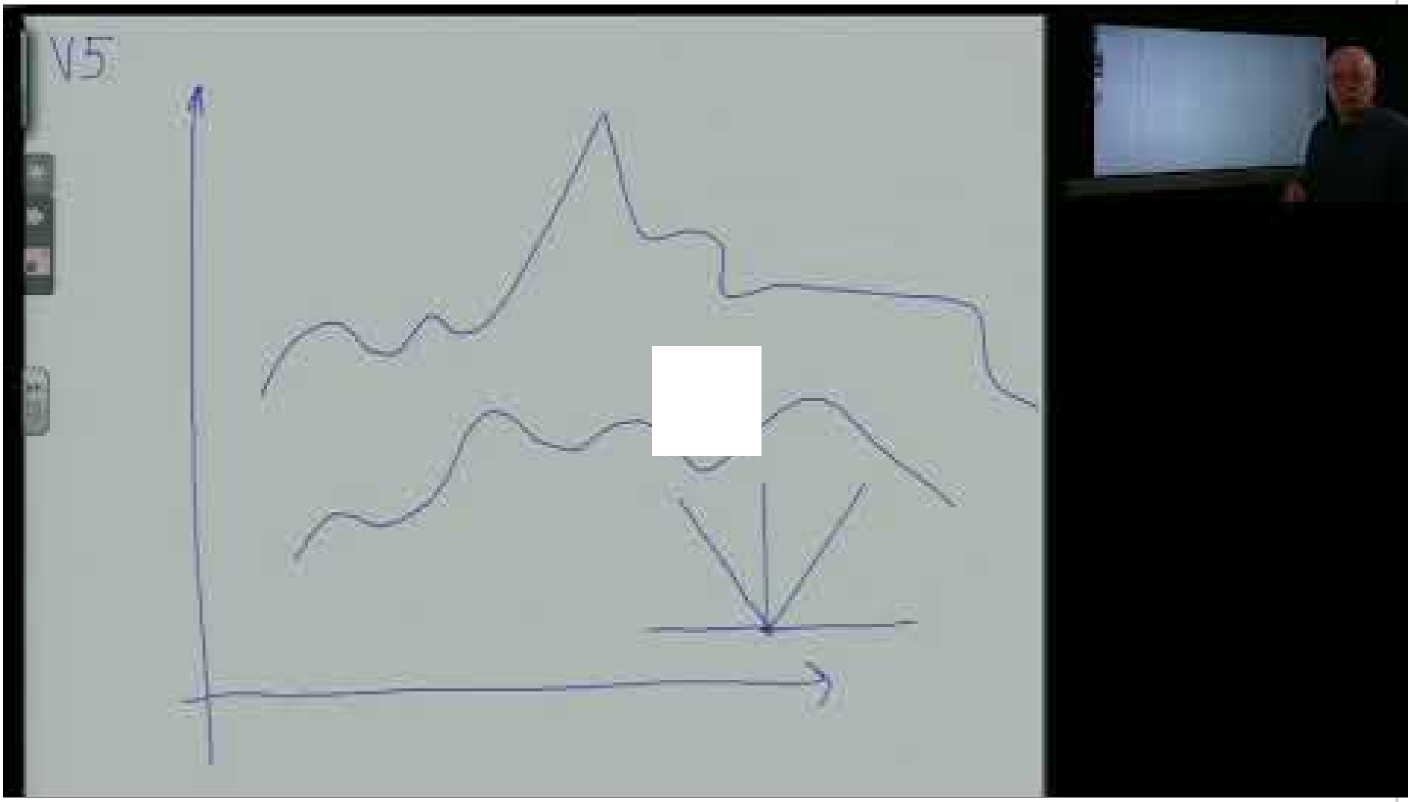
> *en differentiabel funktion er kontinuert.*

Det omvendte er ikke rigtigt, generelt. En kontinuert funktion er ikke nødvendigvis differentiabel. Et eksempel, der viser det, er funktionen

$$f(x) = |x|,$$

som er kontinuert på hele den reelle akse R, men ikke er differentibel i 0. Der findes også funktioner der er kontinuerte på hele den reelle akse, men som ikke er differentiable i noget punkt.

(Kontinuitet og differentiabilitet udtrykt ved brug af grafen).



Sci2u opgave

Det er et faktum, at alle de mest almindelige funktioner er differentiable. Det gælder f.eks.

α. Polynomier (f.eks. $3x^7 + \sqrt{2}x^5 - 2x^2 + 5$);

β. Eksponential funktionen $\exp(x) = e^x$;

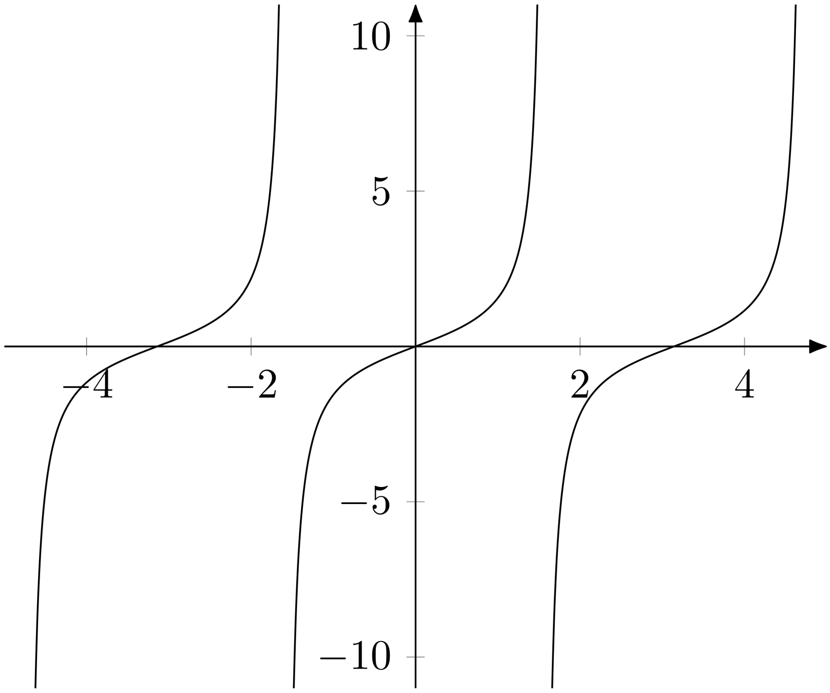
γ. De trigonometriske funktioner $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$;

δ. Logaritme funktionen $\ln x$.

Nogle af disse funktioner er ikke defineret for alle værdier af x. F.eks. er tangens funktionen,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

kun defineret når $\cos x \neq 0$, dvs. når x ikke er et af tallene $\frac{\pi}{2} + k\pi$, hvor k er et helt tal, se Figur 1.23. Men de anførte funktioner er alle differentiable i de punkter, hvor de er defineret.



En del af grafen for funktionen $\tan x$.

Der gælder en række regneregler for differentialkvotienter. De vigtigste er følgende:

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. For ethvert tal $r \in \mathbb{R}$ er funktionen $f + rg$ differentiabel i x_0 og

$$(f + rg)'(x_0) = f'(x_0) + rg'(x_0).$$

Sætning 1.24 kan formuleres på andre, mere kortfattede måder:

$$(f + rg)' = f' + rg',$$

eller

$$\frac{d}{dx}(f(x) + rg(x)) = \frac{df}{dx}(x) + r\frac{dg}{dx}(x),$$

eller

$$\frac{d}{dx}(f + rg) = \frac{df}{dx} + r\frac{dg}{dx}.$$

Lad f og g være funktioner der begge er differentiable i et punkt x_0. Så er fgdifferentiabel i x_0 og

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Sætning 1.25 kan også formuleres mere kortfattet:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

eller

$$\frac{d}{dx}fg = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. Antag at $g(x_0) \neq 0$.Så er $\frac{f}{g}$ differentiabel i x_0 og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

En kortfattet version af Sætning 1.26 er

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(Kædereglen). Lad f og g være funktioner og $x_0 \in \mathrm{R}$ et tal som opfylder at g er defineret og differentiabel i x_0, og at f er defineret og differentiabel i $g(x_0)$. Så er den sammensatte funktion

$$x \longmapsto f \circ g(x) = f(g(x))$$

differentiabel i x_0, og

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

En kortfattet version af Sætning 1.27 er

$$(f \circ g)' = g'f' \circ g.$$

Med udgangspunkt i disse tre sætninger kan man komme rigtigt langt med differentiation af diverse funktioner. Især når man tager udgangspunkt i en liste med de afledte funktioner f' for de almindeligste funktioner f. En meget kort liste er følgende

- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$;
- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$;
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$;
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$;

F.eks. kan man nu ved brug af Sætning 1.26 finde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\end{aligned}$$

hvor vi har brugt at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Når en funktion f er invertibel, altså har en invers funktion f^{-1} som opfylder at

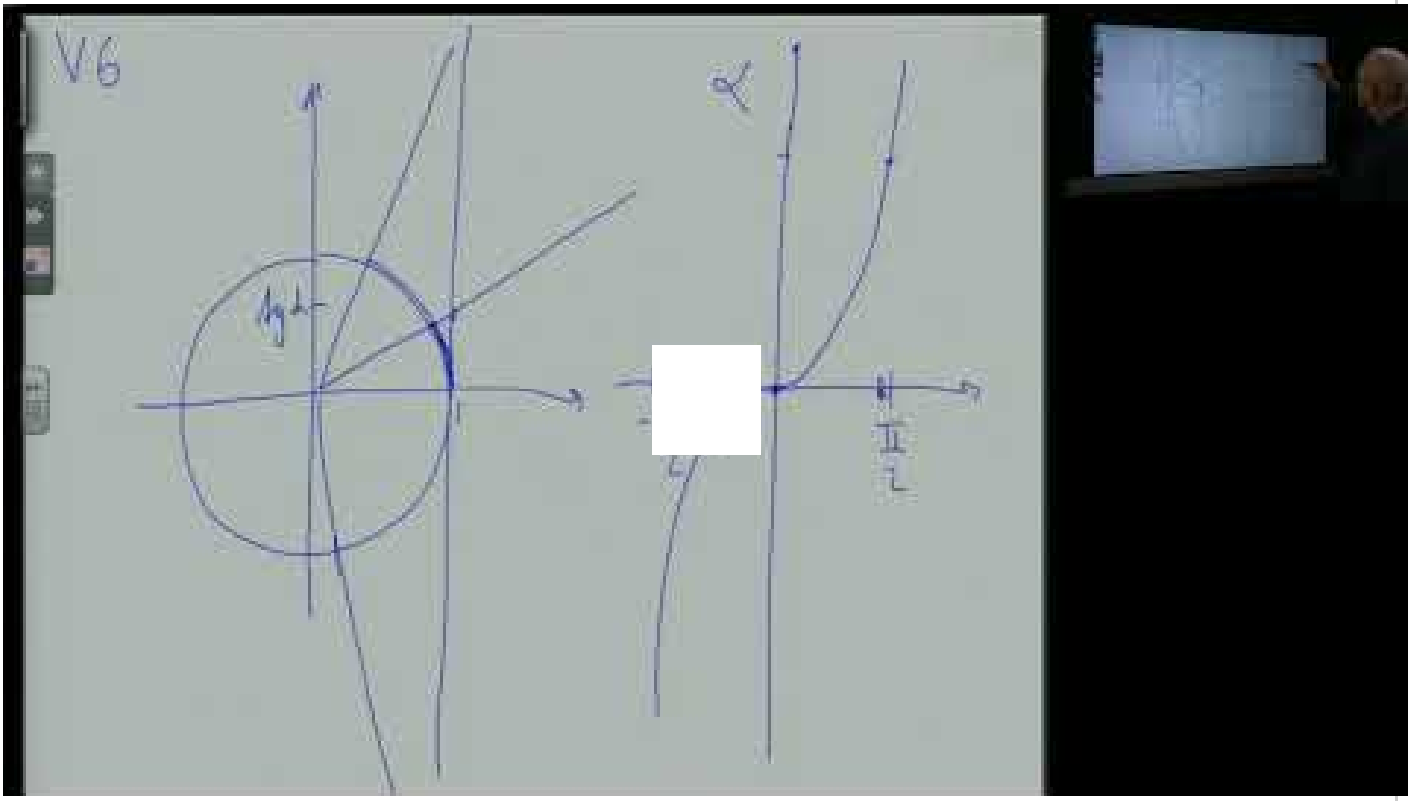
$$f^{-1} \circ f(x) = x,$$

så kan kan den afledte $(f^{-1})'$ af f^{-1} findes ved brug af kædereglen. Det vil blive vist og illustreret i de følgende videoer, hvor formlen

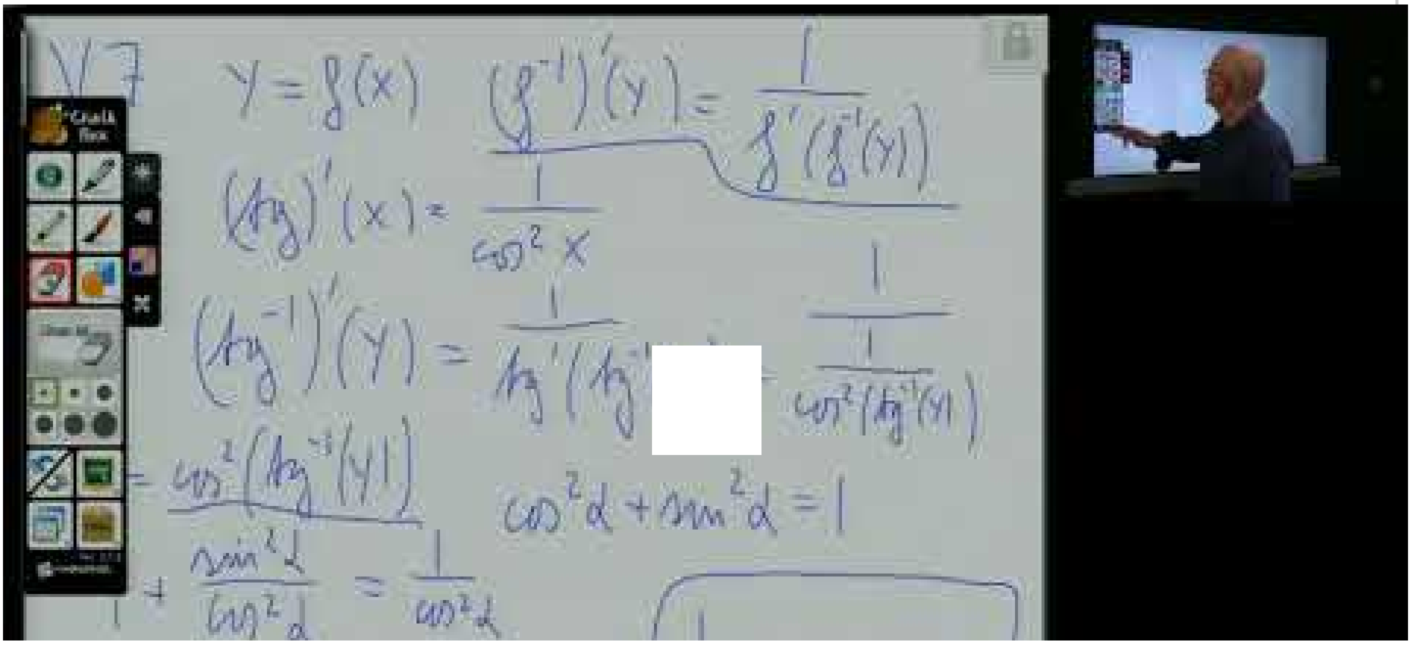
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

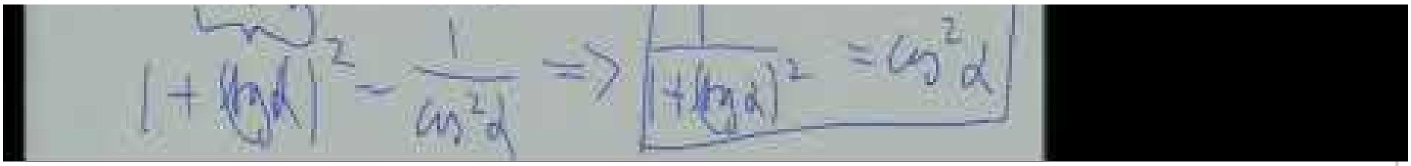
bliver udledt.

(Differentiation af invers funktion).



(Differentiation af invers tangens).





I mange anvendelser er det vigtigt at kunne afgøre om en funktion er voksende eller aftagende; for at afgøre om det $f(x)$ betyder i den konkrete anvendelse vil vokse, når x vokser, eller aftage, når x vokser. Differentialkvotienten af en funktion giver et nyttigt redskab til at afgøre om en funktion er aftagende eller voksende på hele eller en del af sit definitionsområde. Hvis man studerer en funktion ved at se på dens graf, er det som regel let at se, om funktionen vokser eller aftager, men når man ikke har er realisering af grafen, er differentialkvotienten et afgørende redskab til dette formål. Det er også vigtigt at have en definition af, hvad det vil sige, at en funktion vokser eller aftager, som ikke refererer til et billede af funktionens graf.

Lad I være en delmængde af definitionsmængden for en funktion f. Vi siger, at f er *voksende*, hhv. *aftagende* på I, når der gælder

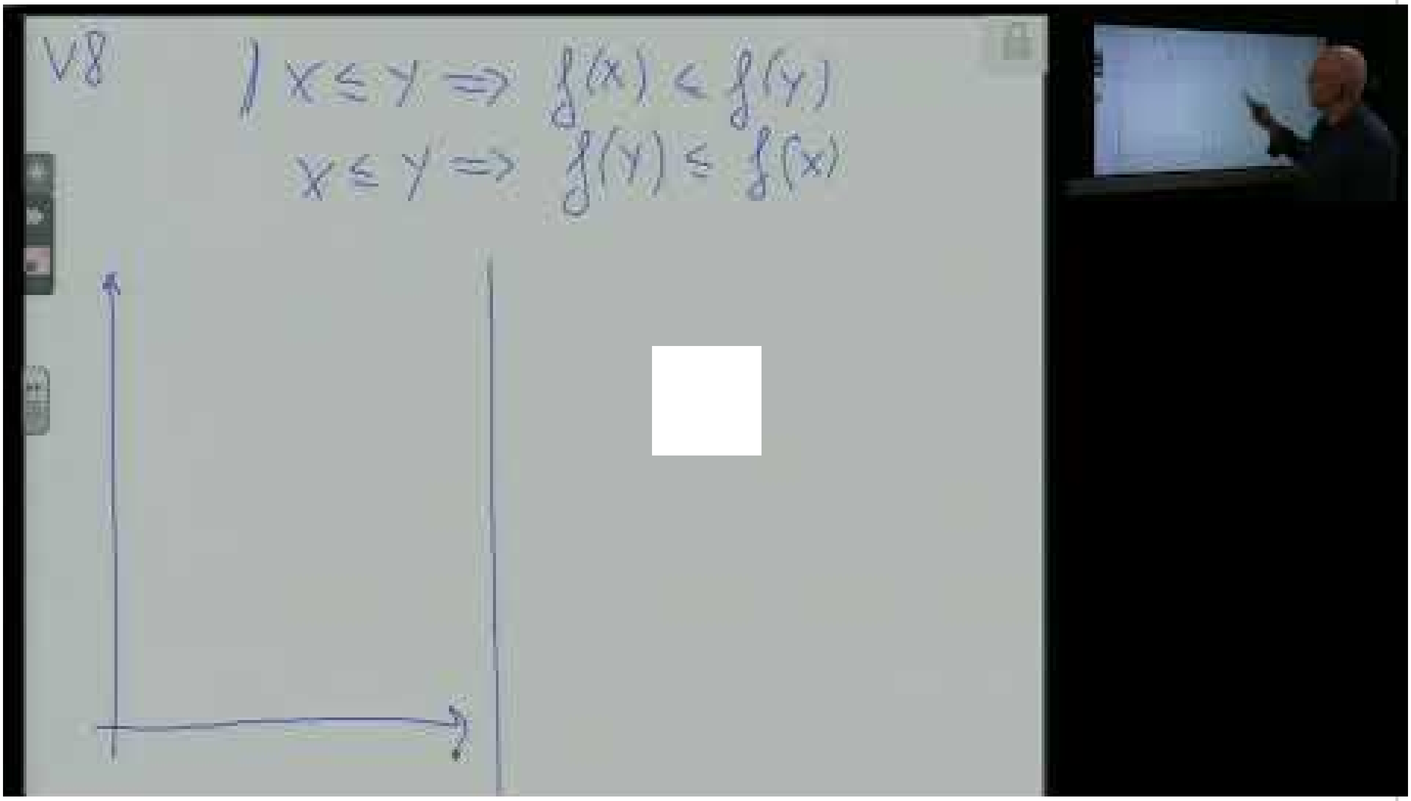
$$x, y \in I,\ x \le y \ \Rightarrow\ f(x) \le f(y),$$

hhv.

$$x, y \in I,\ x \le y \ \Rightarrow\ f(y) \le f(x).$$

Symbolet $\Rightarrow$, der er brugt her, betyder 'medfører'. f er altså voksende, når 'x mindre end eller lig med y medfører, at $f(x)$ er mindre end eller lig med $f(y)$'. Læseren bedes tegne lidt, hvis det er nødvendigt, for at overbevise sig selv om, at denne definition stemmer overens med den mere intuitive fornemmelse af, hvad det vil sige at en funktion vokser eller aftager.

(Voksende og aftagende funktioner).



Der gælder

Lad f være en funktion, som er defineret og differentiabel på et interval I.

a. f er voksende på I, hvis og kun hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$.

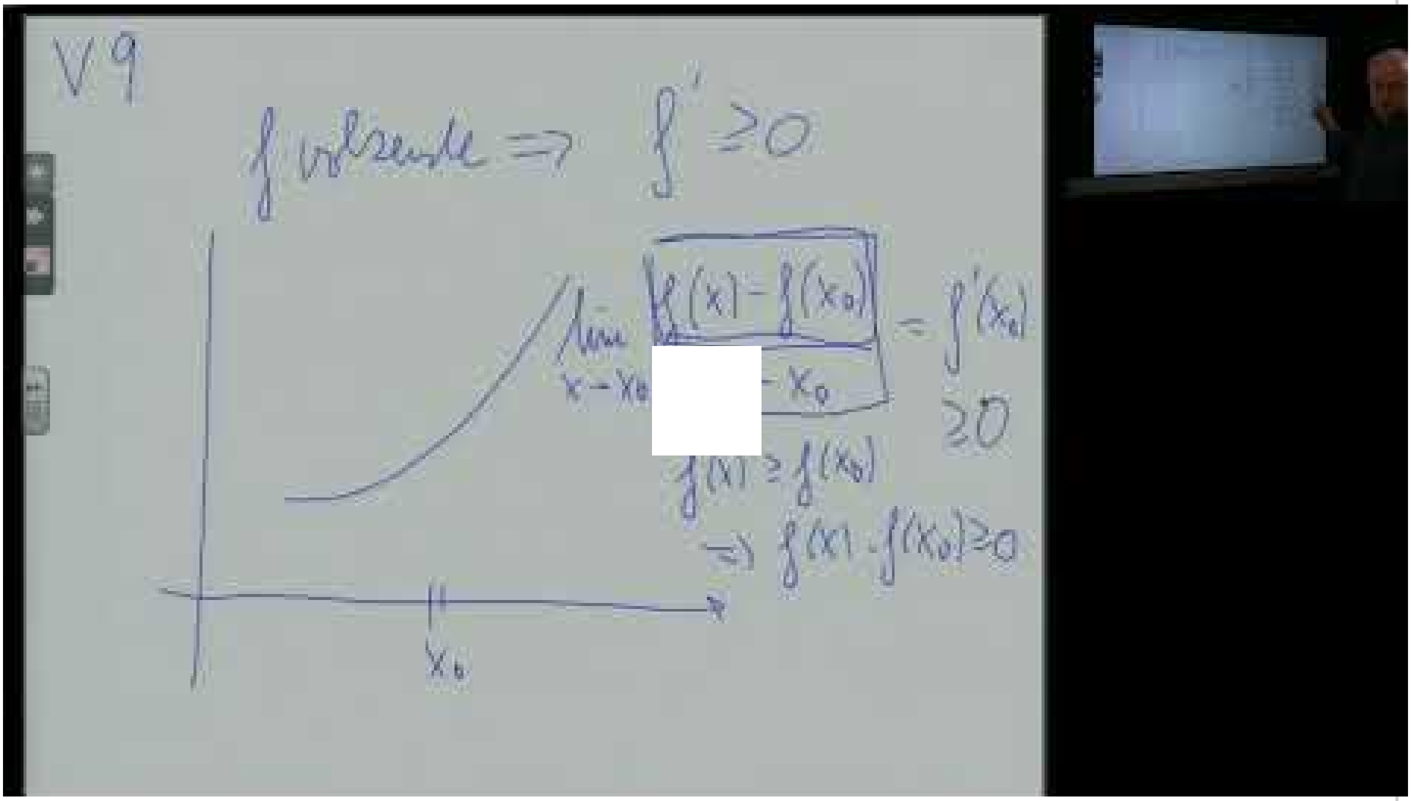
b. f er aftagende på I, hvis og kun hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in I$.

Opgave

a. Antag at f er differentiabel i et punkt x_0, og at x_0 er et lokalt maximumspunkt for f; altså at $f(x) \leq f(x_0)$ for alle x i en omegn af x_0. Vis at $f'(x_0) = 0$.

b. Antag at f er differentiabel i et punkt x_0, og at x_0 er et lokalt minimumspunkt for f; altså at $f(x) \geq f(x_0)$ for alle x i en omegn af x_0. Vis at $f'(x_0) = 0$.

(f' og lokale ekstremumspunkter).



Opgave

For hver af følgende funktioner f, find det største interval, hvor f er (defineret og) voksende.

a. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

d. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

Opgave

Lad $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ være en differentiabel funktion, hvor

$$f'(x) = (x+1)^2(x-3)^5(x-6)^4.$$

Find det største interval, hvor f er voksende.

Opgave

Find en kontinuert funktion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er differentiabel for alle $x \neq 7$, men ikke for $x = 7$.

1.3 Integration i én variabel

At integrere en funktion er på flere måder det modsatte, eller omvendte, af at differentiere, og alene af den grund er det en vigtig operation. Samtidigt giver metoden et vigtigt redskab til bestemmelse af arealer.

1.3.1 Det ubestemte integral: Stamfunktioner

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en funktion. I mange tilfælde kan man finde en funktion $g : I \to \mathbb{R}$, der opfylder at f er den afledte funktion af g. Altså en funktion g om hvilket det gælder, at

$$g' = f. \tag{1.14}$$

En sådan funktion g er en *stamfunktion* til f eller et *integral* af f. F.eks. er $g(x) = x^3$ en stamfunktion til $f(x) = 3x^2$. Da differentialkvotienten af en konstant er 0 vil $g(x) + 7$ også være en stamfunktion til $f(x)$ hvis $g(x)$ er det. En stamfunktion er altså kun fastlagt op til addition med en konstant − heraf den lidt nedsættende betegnelse 'ubestemt'.

En stamfunktion til $f(x)$ betegnes ofte ved

$$\int f(x)\, dx,$$

eller endnu kortere blot ved

$$\int f.$$

Sci2u opgave

Det er ikke altid så let at finde en stamfunktion, selv i tilfælde hvor man er sikker på, de findes. Der er to vigtige metoder som ofte anvendes til formålet. De beskrives kortfattet nedenfor i Sætning 1.39 og Sætning 1.42. Når disse to sætninger, og den metode der knytter sig til dem, kombineres med et reservoir af stamfunktioner til de mest almindelige funktioner, så kan man faktisk komme rigtigt langt mht. at finde stamfunktioner. Før i tiden fandt man lister over stamfunktioner i bøger eller integral-tabeller, men nu om dage kan mange findes på internettet. F.eks. kan man søge på *'lists of integrals'*. Selvom man ofte ikke finder præcist den stamfunktion, man søger, kan sådanne lister kombineres med de følgende to sætninger, og tilsammen udgør de et potent redskab til bestemmelse af stamfunktioner.

Den første af de to sætninger er en umiddelbar konsekvens af Sætning 1.25:

(Partiel integration).

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Partiel integration bruges med fordel når man skal finde en stamfunktion til et produkt af to funktioner (fg' i Sætning 1.39), hvor man kender en stamfunktion til den ene (g', der har stamfunktion g), og hvor den anden funktion (f) bliver simplere ved differentiation, på en sådan måde, at en stamfunktion til $f'g$ kan findes.

Sætning 1.39 kan f.eks. benyttes til at finde en stamfunktion til $x \sin x$. Sætter vi nemlig $g(x) = -\cos x$ og $f(x) = x$, får vi fra sætningen at

$$\int x \sin x \, dx = \int fg' = fg - \int f'g = f(x)g(x) - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Da $\int e^x \, dx = e^x$ finder vi ved gentagen anvendelse af partiel integration, at

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x \, dx &= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + \int 6x e^x \, dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - \int 6 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Den anden fundamentale metode til at finde stamfunktioner er følgende; en umiddelbar konsekvens af Sætning 1.27:

(Integration ved substitution).

$$\int (f' \circ g) g' = f \circ g.$$

Sætning 1.42 kan f.eks. bruges til at bestemme en stamfunktion til xe^{x^2}. Sætter vi $g(x) = x^2$ og $f(x) = e^x$ er $g'(x) = 2x$ og $f'(x) = e^x$. Så er

$$f' \circ g(x) = f'(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2}.$$

Vi har altså, at

$$\int xe^{x^2} \, dx = \tfrac{1}{2} \int (f' \circ g) g',$$

da $\frac{1}{2} g'(x) = x$. Ved brug af Sætning 1.42 får vi så, at

$$\tfrac{1}{2} \int (f' \circ g) g' = \tfrac{1}{2} f \circ g.$$

Altså er

$$\int xe^{x^2} \, dx = \tfrac{1}{2} e^{x^2}.$$

Sci2u opgave

Nogle gange skal man kæmpe lidt mere for at finde stamfunktionen ved brug af de to sætninger. F.eks. kan det ubestemte integral

$$\int x \sin(2x) \, dx$$

findes på følgende måde. Først skriver vi

$$x\sin(2x) = \frac{x}{2} 2\sin(2x).$$

Så finder vi en stamfunktion til $2\sin(2x)$ ved substitution: Sætter vi $g(x) = 2x$ og $f(x) = -\cos x$, får vi fra Sætning 1.42, at

$$\int 2\sin(2x)\,dx = \int (f' \circ g)g' = f \circ g = -\cos(2x).$$

Ved at bruge denne identitet finder vi ved partiel integration at

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\,dx &= \int \frac{x}{2} 2\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Vi bruger så substitution igen for at finde $\int \cos(2x)\,dx$:

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{2} 2\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (f' \circ g)g',$$

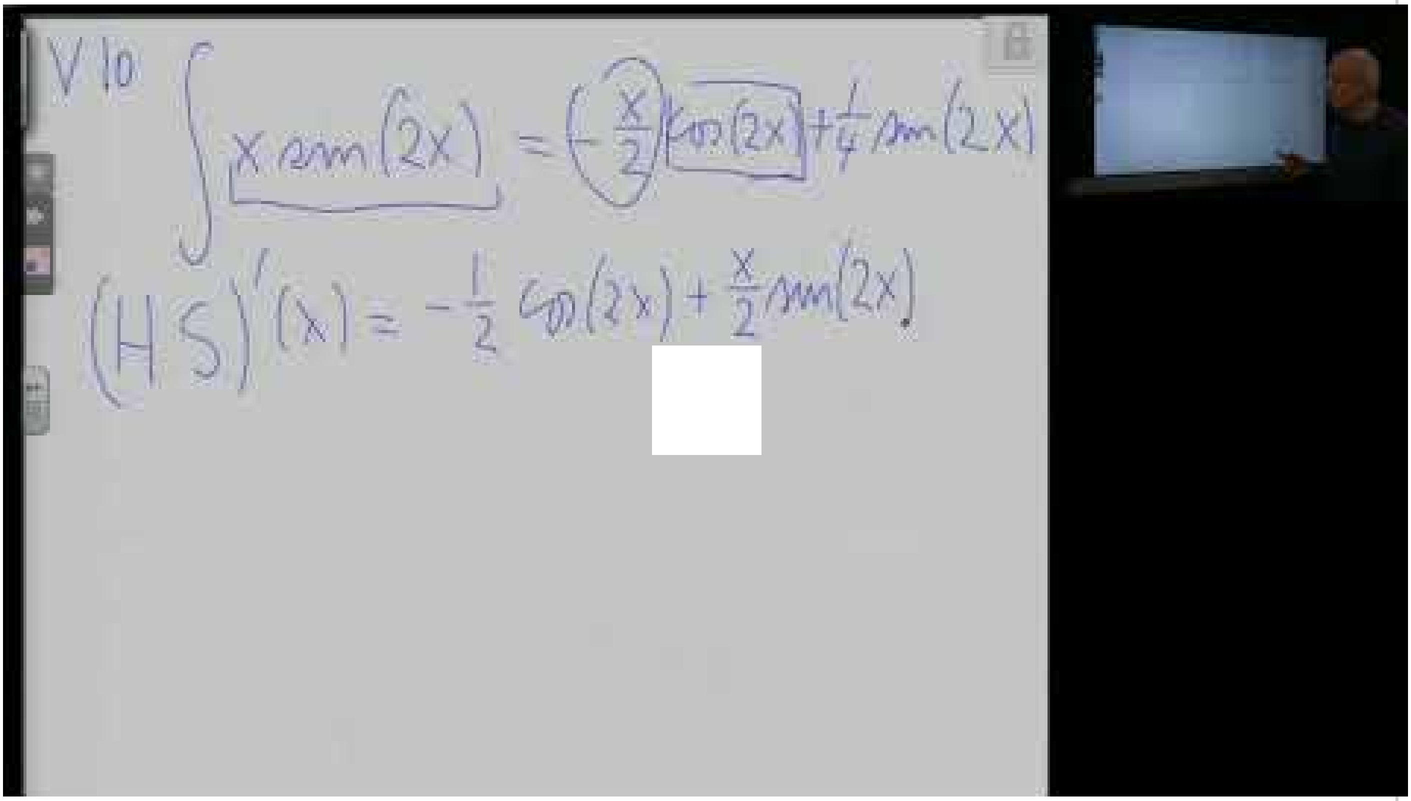
hvor vi nu har valgt $f(x) = \sin x$ og $g(x) = 2x$. Sætning 1.42 giver så at

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} f \circ g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Indsætter vi dette i (1.16) fåes, at

$$\int x\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

(Stamfunktion. Om at gøre prøve).



I dette eksempel bruger vi Sætning 1.39 og Sætning 1.42 til at udlede formlerne

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x), \qquad \textbf{(1.17)}$$

og

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x). \qquad \textbf{(1.18)}$$

Med $f(x) = \sin x$ og $g = -\cos x$ får vi, at

$$\int \sin^2 x\,dx = \int fg' = fg - \int f'g = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx.$$

Indsætter vi, at $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, får vi

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\ &= -\sin x \cos x - \int \sin^2 x\,dx + \int dx \\ &= -\sin x \cos x - \int \sin^2 x\,dx + x.\end{aligned}$$

Heraf følger, at

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x,$$

og dermed $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$. Og så er

$$\int \cos^2 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\,dx = x - \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$$

Dermed er vi nået frem til formlerne (1.17) og (1.18).

Ved brug af den trigonometriske identitet $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ kan (1.17) og (1.18) omskrives til

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x, \qquad \textbf{(1.19)}$$

og

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x. \qquad \textbf{(1.20)}$$

Opgave

Brug partiel integration og/eller integration ved substitution til at finde stamfunktionerne anført nedenfor:

a. $\int x\cos(x^2)\,dx$

b. $\int \sin x \cos(\cos x)\,dx$

c. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

d. $\int e^x \sin x\,dx$

e. $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$

f. $\int x^5 \cos(x^3)\,dx$

Opgave

Afgør om der er nogen fejl i følgende ræsonnement: Da

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x &= \cos^3 x \sin x + \int 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x - 3\int \cos^4 x,\end{aligned}$$

følger at,

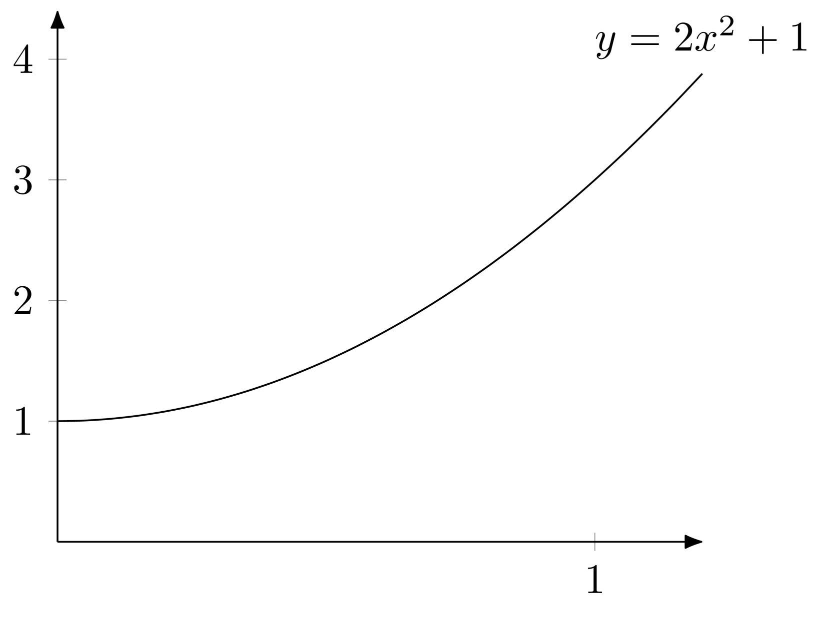
$$4\int \cos^4 x = \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x$$

og ved brug (1.18) følger det, at

$$\int \cos^4 x = \tfrac{3}{8}(x + \sin x \cos x) + \tfrac{1}{4}\cos^3 x \sin x.$$

1.3.2 Det bestemte integral: Arealer

Lad I være et interval på den reelle akse og $f : I \to \mathrm{R}$ en funktion. Det kan f.eks. være intervallet $I = [0, 1]$ mellem 0 og 1, og funktionen $f(x) = 2x^2 + 1$, hvis graf er vist på Figur 1.50.



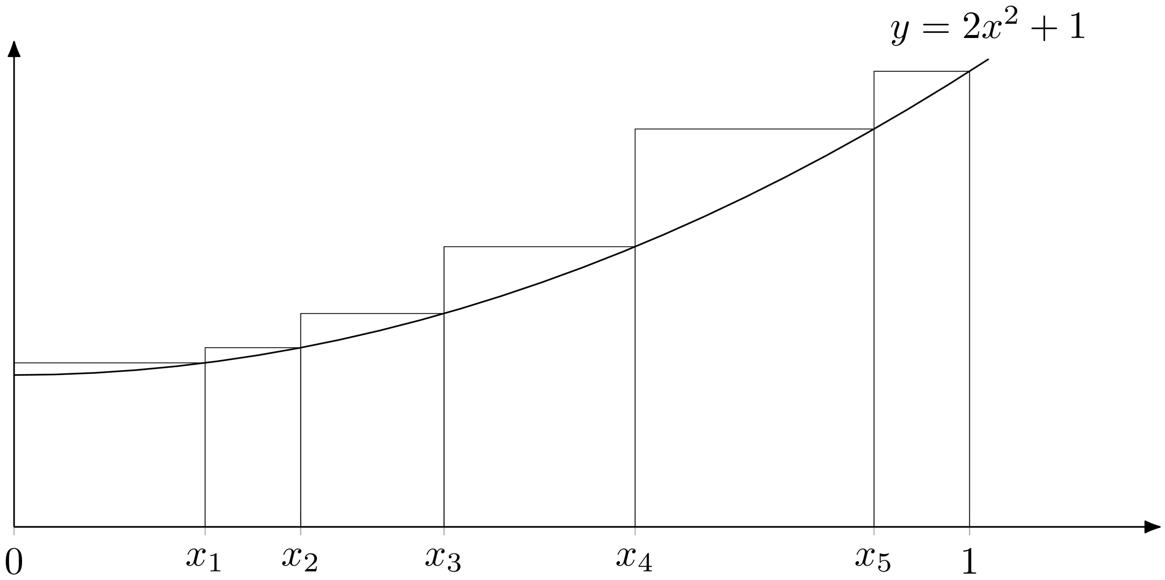
Men i det følgende kan I være et helt vilkårligt interval af typen $I = [a, b]$; altså

$$I = \{x \in \mathrm{R} \,:\, a \le x \le b\}.$$

Vælg nu en inddeling af I ved hjælp af delepunkter mellem a og b :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Se evt. Figur 1.51, hvor $n = 6$.



En oversum giver arealet af rektangler − tydeligvis større end arealet under grafen.

Intervallerne $[x_{i-1}, x_i]$ mellem x_{i-1} og x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, kalder vi for *deleintervallerne*. Vælger man så et punkt x_i' i deleintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ for hvert $i = 1, 2, \ldots, n$, bliver tallet

$$f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

lig med arealet af et rektangel, der går fra x-aksen op til grafen for f over punktet x_i' − ihvertfald når vi antager at f er en positiv funktion, så grafen ligger over x-aksen. Summen

$$f(x_1')(x_1 - x_0) + f(x_2')(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n')(x_n - x_{n-1})$$

kalder vi for en *middelsum*. Hvis x_i' vælges, således at $f(x_i')$ er den største værdi som f antager på deleintervallet $[x_{i-1}, x_i]$, siger vi, at summen er en *oversum*, og hvis x_i' vælges således at $f(x_i')$ er den mindste værdi som f antager på deleintervallet $[x_{i-1}, x_i]$, siger vi, at summen er en *undersum*.

Det er et faktum, at under passende betingelser, som alle er opfyldt, hvis $f : I \to \mathrm{R}$ er kontinuert, findes der et tal, som betegnes ved

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad \textbf{(1.21)}$$

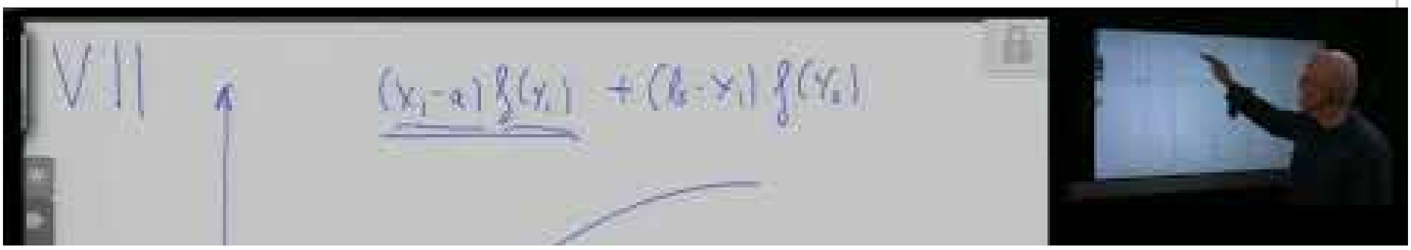
der har følgende egenskab: Når længderne af deleintervallerne $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, alle er tilstrækkeligt små, vil enhver oversum hørende til en sådan inddeling være ligeså tæt på tallet

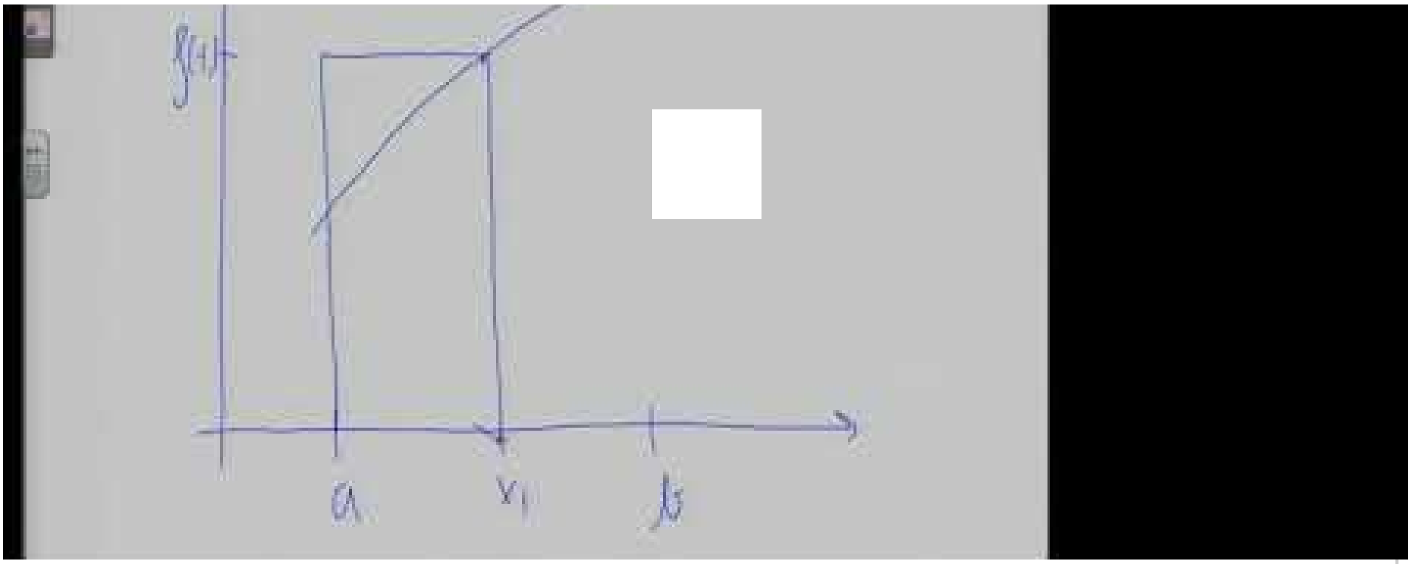
$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

som vi måtte ønske. Tallet (1.21) kalder vi for *integralet* af f på intervallet I.

Det er ikke kun oversummerne, der nærmer sig integralet, når længden af deleintervallerne bliver meget små. Der gælder også, at når længden af deleintervallerne alle er tilstrækkeligt små, vil enhver undersum og enhver middelsum være ligeså tæt på intergralet $\int_a^b f(x)\, dx$ som vi måtte ønske.

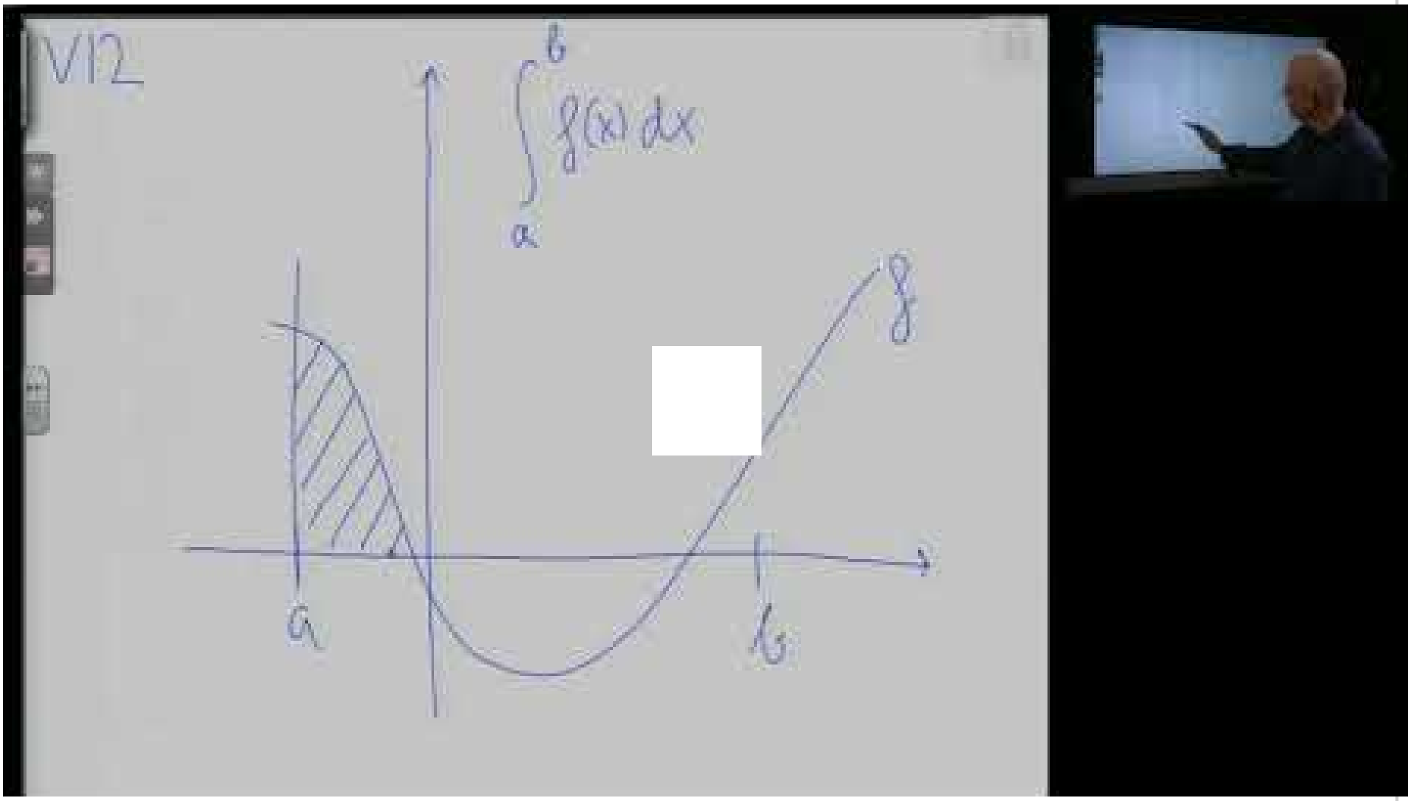
(Det bestemte integral).





Når funktionen f er positiv, så grafen for f ligger over x-aksen, vil integralet (1.21) være arealet af området mellem grafen for f og x-aksen. Hvis derimod f er negativ vil integralet være minus arealet af området mellem grafen for f og x-aksen.

(Arealer over og under grafen).

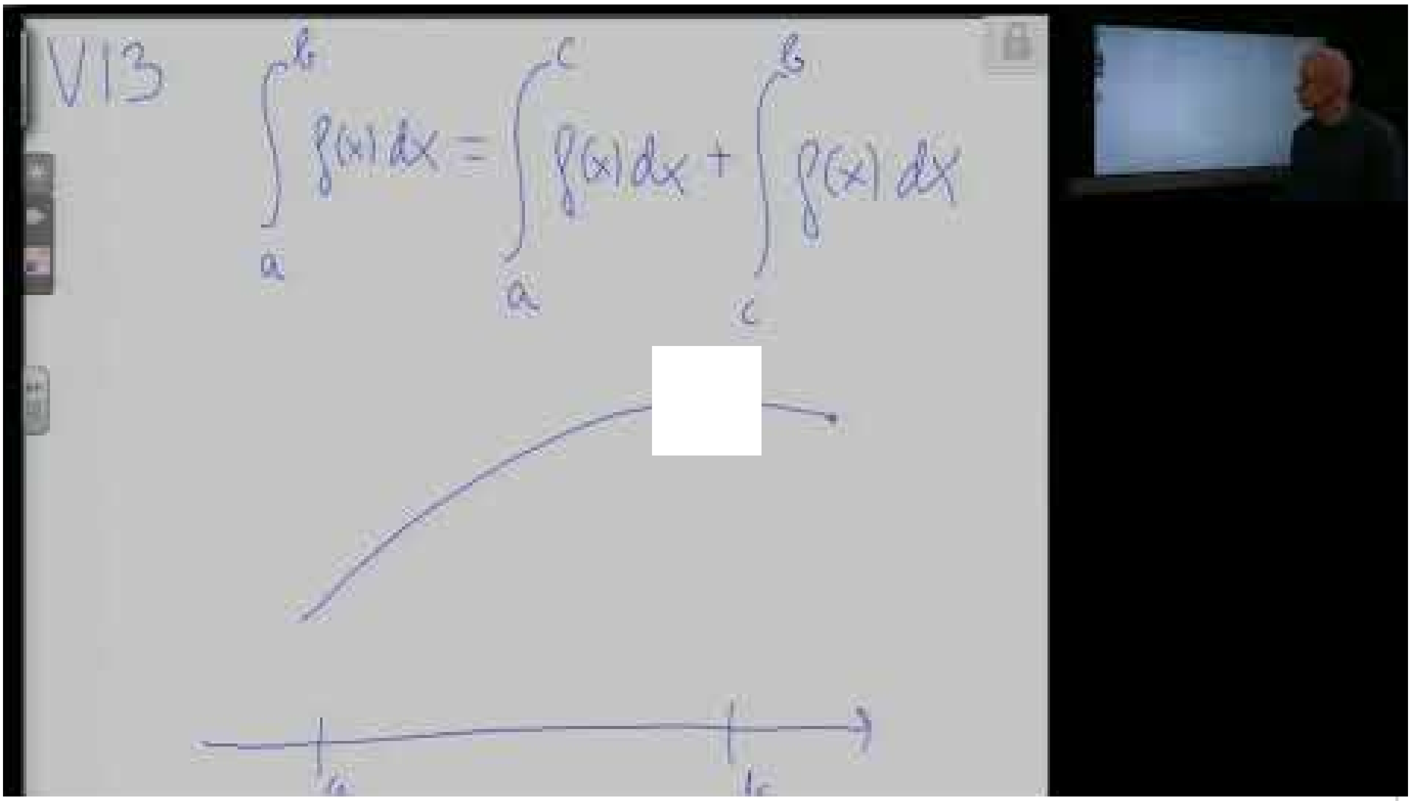


Følgende indskudsregel er ofte nyttig ved beregning, og som vi skal se i næste afsnit, også ved mere teoretiske argumenter.

(Indskudsreglen). Hvis $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ er kontinuert, og c et tal der ligger mellem a og b(dvs. at $c \in [a, b]$), gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(Indskudsreglen).



Integralet (1.21) bliver meget ofte beregnet ved brug af en stamfunktion. Der gælder nemlig følgende

Antag at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, og at F er en stamfunktion til f (dvs. at $F' = f$). Så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Denne uendeligt nyttige sætning er en konsekvens af differentialregningens fundamentalsætning, som er emnet for næste afsnit. En anden vigtig konsekvens er følgende: *Hvis f er en differentiabel funktion, så f' er konstant* 0, *er f en konstant funktion.*

Ved brug af Sætning 1.56 behøver vi ikke tegne området i planen, der ligger over intervallet $[1, 7]$ og under grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, for at kunne beregne dets areal. (Vi gør det nu alligevel, fordi vi kan. Se Figur 1.58)

Området over $[1, 7]$ og under grafen for $\frac{1}{x}$.

Da $\ln x$ er en stamfunktion er arealet

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7.$$

Opgave

Lad f være en differentiabel funktion, og antag at f' er nul-funktionen. Udled fra Sætning 1.56, at f er en konstant funktion.

Opgave

Udregn følgende bestemte integraler:

a. $\int_{-1}^{3} x^5\,dx.$

b. $\int_{1}^{2} (1 + 2x - 4x^3)\,dx.$

c. $\int_{-1}^{0} (u^5 - u^3 + u^2)\,du.$

d. $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,dx.$

e. $\int_{-1}^{1} e^{v+1}\,dv.$

f. $\int_{1}^{9} \frac{1}{2x}\,dx.$

g. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

h. $\int_0^1 (1+x^2)^3 \, dx.$

Opgave

Findes der en differentiabel funktion $f : [1,4] \to \mathrm{R}$ der opfylder, at $f'(x) > 3$ for alle $x \in [1,4]$ mens $f(1) = -1$ og $f(4) = 7$. Giv et eksempel i bekræftende fald.

Integration ved substitution for bestemte integraler:

Opgave

Lad $g : [a,b] \to \mathrm{R}$ være en differentiabel funktion med kontinuert afledt g'. Antag at $g(a) \le g(b)$, og at f er en kontinuert funktion defineret på intervallet $[g(a), g(b)]$. Vis at

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

1.3.3 Differentialregningens fundamentalsætning

Følgende sætning, der ofte kaldes differentialregningens fundamentalsætning, fortæller hvorledes det bestemte og det ubestemte integral er knyttet sammen. Den giver også en meget håndfast fortolkning af det forhold, at areal-bestemmelse ved brug af det bestemte integral er den inverse operation til differentiation.

Lad I være et interval og $c \in I$ et tal i I. Lad $f : I \to \mathrm{R}$ være en kontinuert funktion. Så er funktionen

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \tag{1.22}$$

en stamfunktion til f på intervallet $\{x \in I \ : \ x > c\}$.

En skitse af beviset

Ved hjælp af grænseværdier kan udsagnet i Sætning 1.63 præciseres til at

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_c^x f(t)\, dt - \int_c^{x_0} f(t)\, dt}{x - x_0} = f(x_0)$$

når $x_0 \in I$ og $x_0 > a$. Ved brug af indskudsreglen for integraler finder vi (når $x > x_0$) at

$$\int_c^x f(t)\, dt - \int_c^{x_0} f(t)\, dt = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

Når x er meget tæt på x_0, vil $f(t)$ være meget tæt på $f(x_0)$ for alle t mellem x_0 og x, fordi f er kontinuert. Derfor er integralet

$$\int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

meget tæt på $\int_{x_0}^x f(x_0)\, dt = f(x_0) \int_{x_0}^x \, dt = f(x_0)(x - x_0)$, når x er meget tæt på x_0. Og så er

$$\frac{\int_c^x f(t)\, dt - \int_c^{x_0} f(t)\, dt}{x - x_0}$$

meget tæt på $\frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, når x er meget tæt på x_0; hvilket var, hvad der skulle vises.

Der gælder altså, at funktionen (1.22) er differentiabel når $x \in I$ og $x > c$, med differentialkvotient $F'(x) = f(x)$.

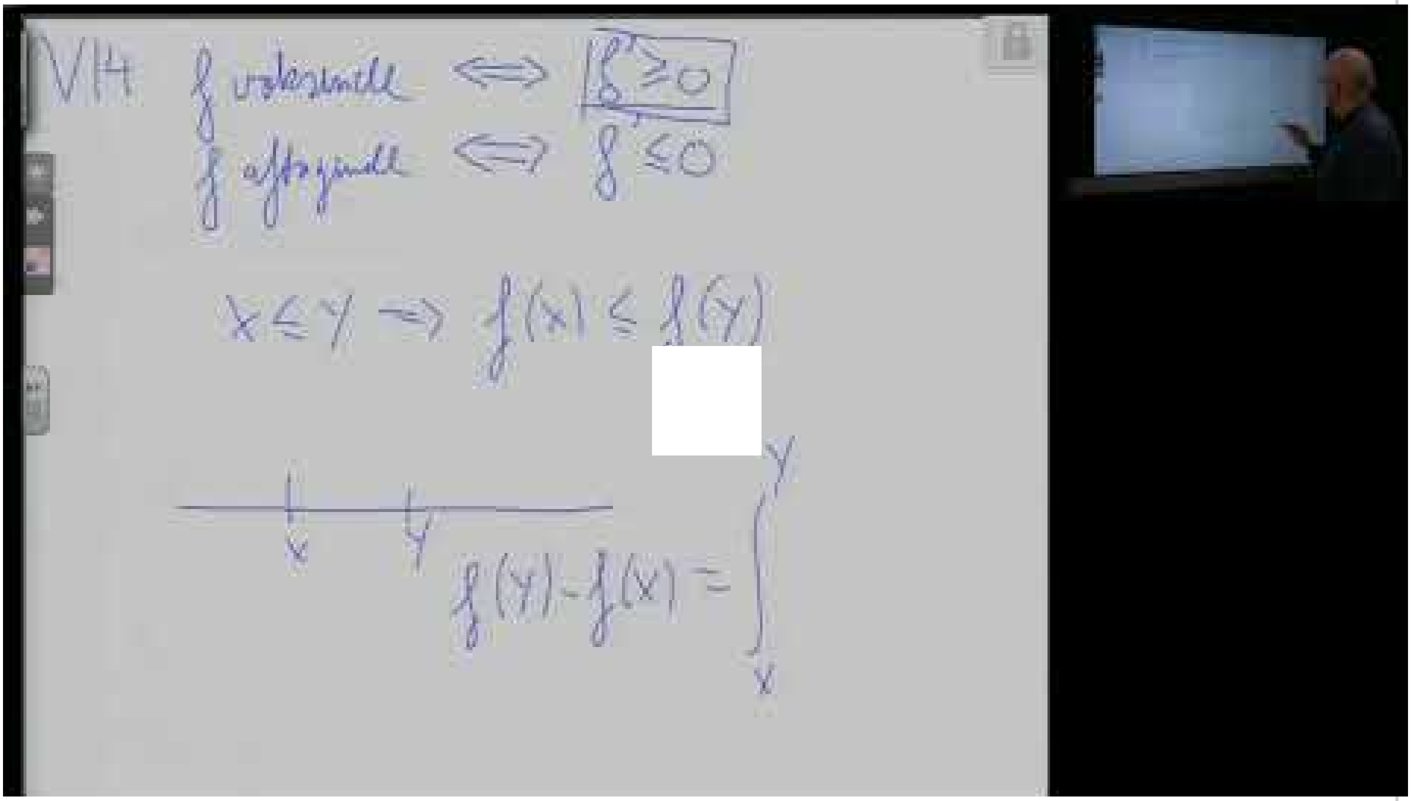
I ord siger sætningen − i kortfattet version − at *enhver kontinuert funktion har en stamfunktion*, og at en stamfunktion er givet ved integralet

$$\int_c^x f(t)\, dt.$$

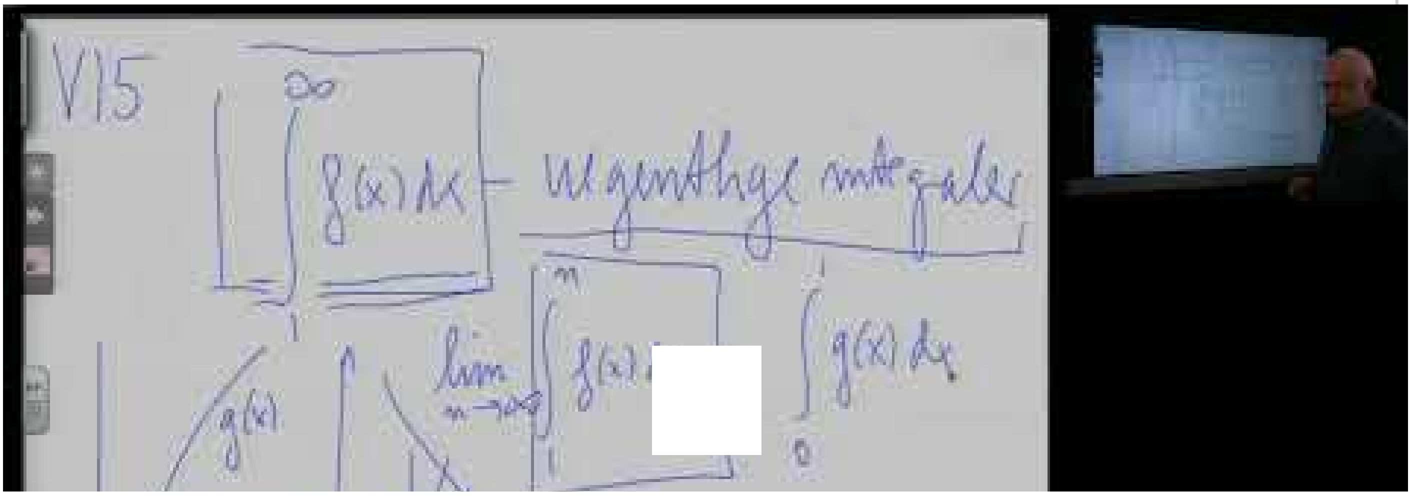
Sætning 1.56, som er den der oftest bruges til beregning af bestemte integraler, følger fra differentialregningens fundamentalsætning på følgende måde: Vælg c så $c < a$. Når F er en stamfunktion for f adskiller F sig fra $\int_c^x f(t)\, dt$ ved en konstant, da de jo begge er stamfunktioner til f. Derfor er

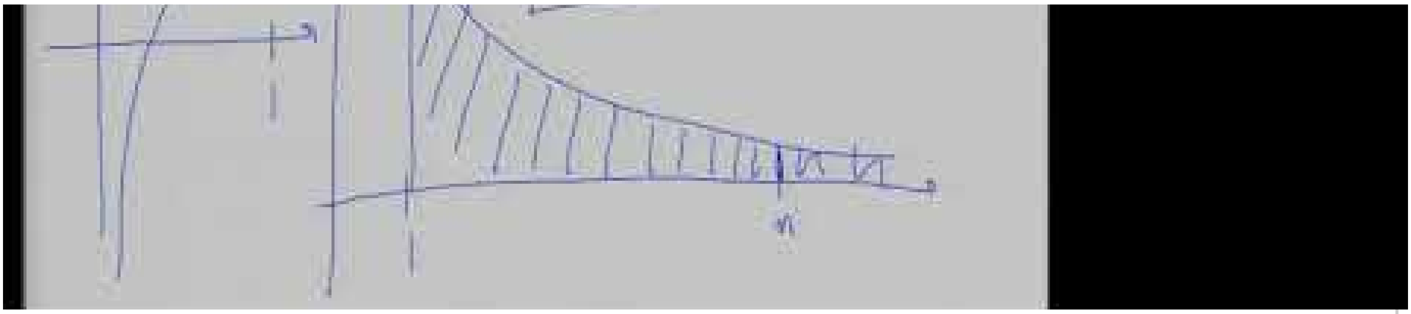
$$F(b) - F(a) = \int_c^b f(t)\, dt - \int_c^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

(En (teoretisk) anvendelse af differentialregningens fundamentalsætning).



(Uegentlige integraler).





Opgave

Afgør om flg. uegentlige integraler er konvergente og udregn dem, når de er.

a. $\int_1^\infty x^5 \, dx.$

b. $\int_0^\infty e^{-x} \, dx.$

c. $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx.$

d. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx.$

e. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx.$

f. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx.$

g. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx.$

h. $\int_7^8 \frac{1}{x-7} \, dx.$