Afleveringsopgave. Fald i tyngdefelt med og uden luftmodstand

(Dette er en redigeret udgave af en eksamensopgave fra 2019)

En sten med massen m = 1,0 kg ”slippes” fra hvile 100 km over jordens overflade. Jordens radius $R_E = 6{,}37 \cdot 10^6$ m og dens masse $m_E = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Tyngdekraften varierer med højden ifølge Newtons gravitationslov. Skriv et SymPy script, der afbilder stenens potentielle energi som funktion af dens højde, fra 100 km til 10 km over jorden.
b) Antage at stenen falder uden luftmodstand. Hvad er stenens fart 10 km over jordoverfladen?

I det følgende ses på faldet de sidste 10 km. Det antages nu, at tyngdekraften er konstant, men at der er luftmodstand i de nederste 10 km af atmosfæren, som giver en opadrettet kraft af størrelsen $D\,v^2$, hvor v er legemets fart og konstanten $D = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg/m.

c) Vis, at dv / dt = $A\,v^2 + C$. Hvordan er konstanterne A og C givet?

Differentialligningen i c) er svær at løse, da den ukendte funktion $v(t)$ indgår kvadratisk på højre side og ikke bare kan integreres over tid. I stedet kan man opfatte tiden t som funktion af v, og notere at forholdet mellem hastighedsændring og tidsskridt, dv og dt, kan byttes om, så man får en ligning for $dt\,/\,dv = 1/(A\,v^2 + C)$. På højre side står nu en eksplicit angivet funktion af v, som vi kan integrere på sædvanlig vis. Dette trick kaldes ”løsning af differentialligning ved kvadratur” og kan ofte benyttes i fysikproblemer.

d) Skriv et SymPy script, der integrerer $1/(A\,v^2 + C)$ og angiver t som funktion af v for den faldende sten. Skriv svaret, idet du sikrer dig at de rette startværdier er opfyldt. Overvej at det ikke er et matematisk problem at integrere over v fra en høj til en lavere værdi – hvad sker der med udtrykket med stamfunktionen?

Hvis du havde bedt SymPy om at løse differentialligningen ville den have gjort det samme og netop angivet t som funktion af v, i stedet for det du bad om. Nu ved du hvorfor.

e) Benyt SymPy til at lave et plot af $t(v)$ og til at angive til hvilke tidspunkter stenen har opnået en hastighed på 708 m/s og 374 m/s. Hvis b) ikke er løst, kan du antage en fart på 1300 m/s til $t = 0$. I besvarelsen skrives såvel de anvendte SymPy kommandoer som de numeriske resultater for tiderne.