3 Retningsafledte og ekstremumsværdier for funktioner af to og flere variable

3.1 Gradient og retningsafledte

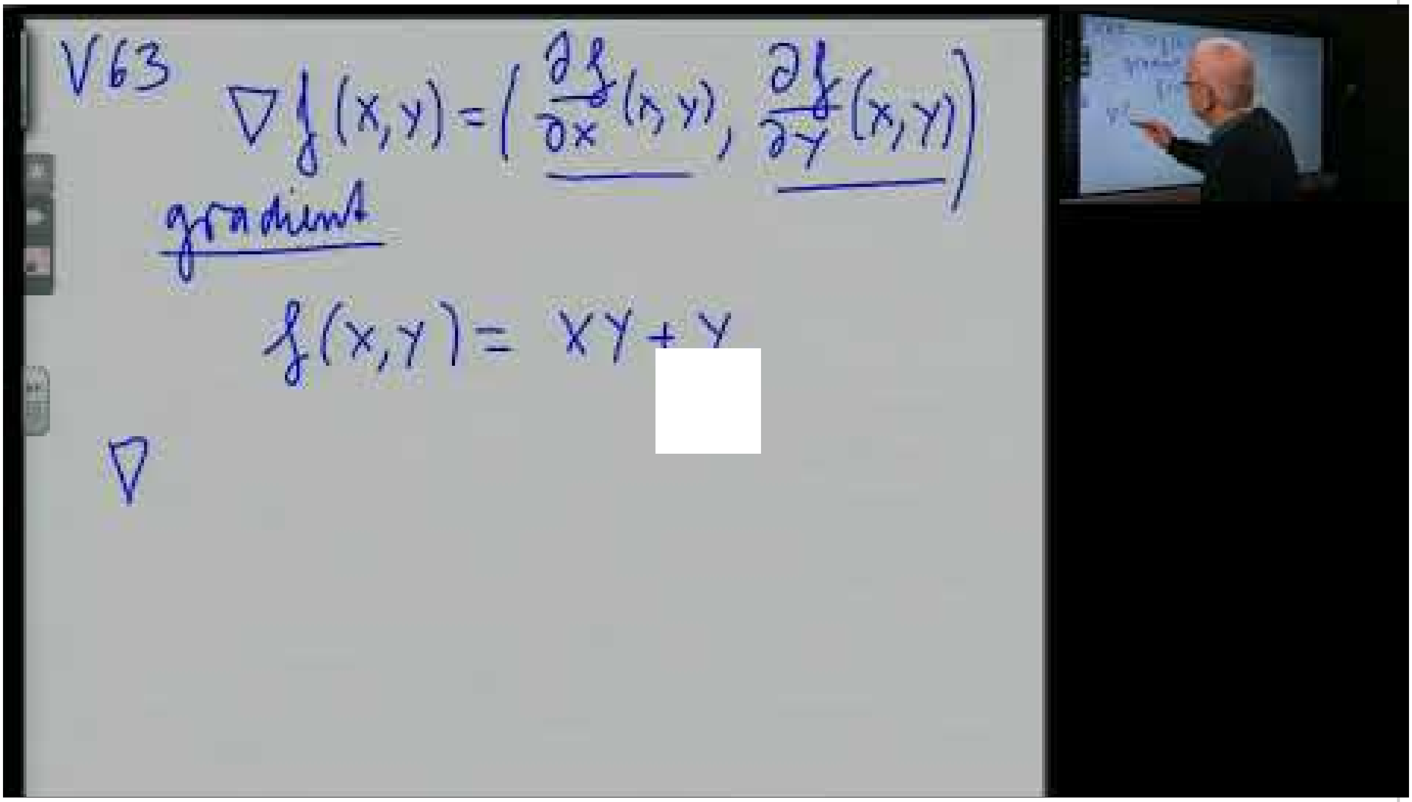
Lad $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ være en funktion af to variable. Når de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ eksisterer i et punkt $(x, y) \in \mathrm{D}(f)$, samler man ofte de to tal i en vektor

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

med $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ som 1. koordinat og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ som 2. koordinat. Denne vektor er *gradienten af* f i (x, y).

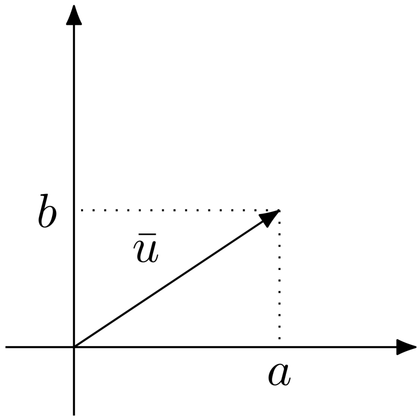
Mens de partielt afledede registrerer hastigheden, hvormed funktionen ændrer sig i et givet punkt, når man varierer x, hhv. y, indeholder gradienten $\nabla f(x, y)$ information om denne hastighed, når (x, y) varierer langs enhver lige linie gennem det pågældende punkt. Det er dette forhold der nu skal forklares og præciseres.

(Om gradienten).



Sci2u opgave

En vektor $\bar{u} = (a, b)$ i R^2 med længde 1 fastlægger en retning i planen:

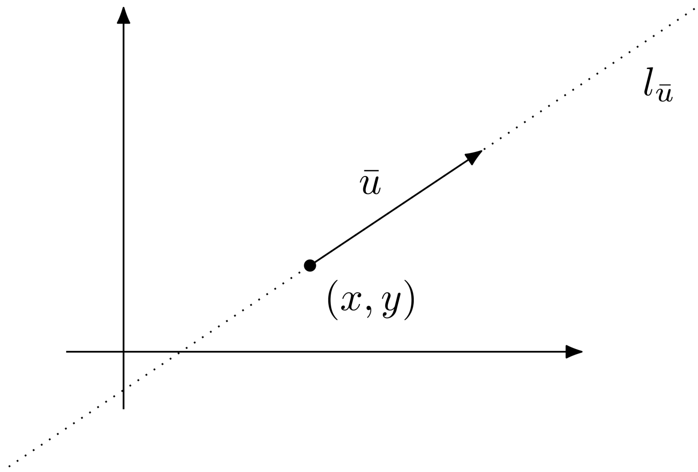


En enhedsvektor $\bar{u}$ i R^2.

Ved at lade $\bar{u}$ stritte ud fra et punkt (x, y) får vi fastlagt en linie $l_{\bar{u}}$ gennem punktet (x, y). Punkterne på denne linie er punkterne i planen med koordinaterne

$$(x + ta,\ y + tb) = (x, y) + t\bar{u},$$

når t løber over alle de reelle tal t.



Linien $l_{\bar{u}}$ gennem (x, y) i retningen bestemt af $\bar{u}$.

Hvis vi forudsætter, at f er defineret i en omegn af (x, y), kan vi definere en funktion $g(t)$ ved, at

$$g(t) = f((x, y) + t\bar{u}) = f(x + ta, y + tb),$$

ihvertfald for små værdier af t. Denne funktion g fremkommer ved kun at bruge f på linien $l_{\bar{u}}$. Bemærk at

$$g(0) = f(x, y).$$

Den afledede af g i $t = 0$ er derfor et mål for den hastighed, hvormed f ændrer sig i punktet (x, y), når man ændrer de variable i retningen udfra (x, y) fastlagt ved vektoren $\bar{u}$. Bemærk at

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t\bar{u}) - f(x, y)}{t}.$$

Dette forklarer − forhåbenligt − følgende definition.

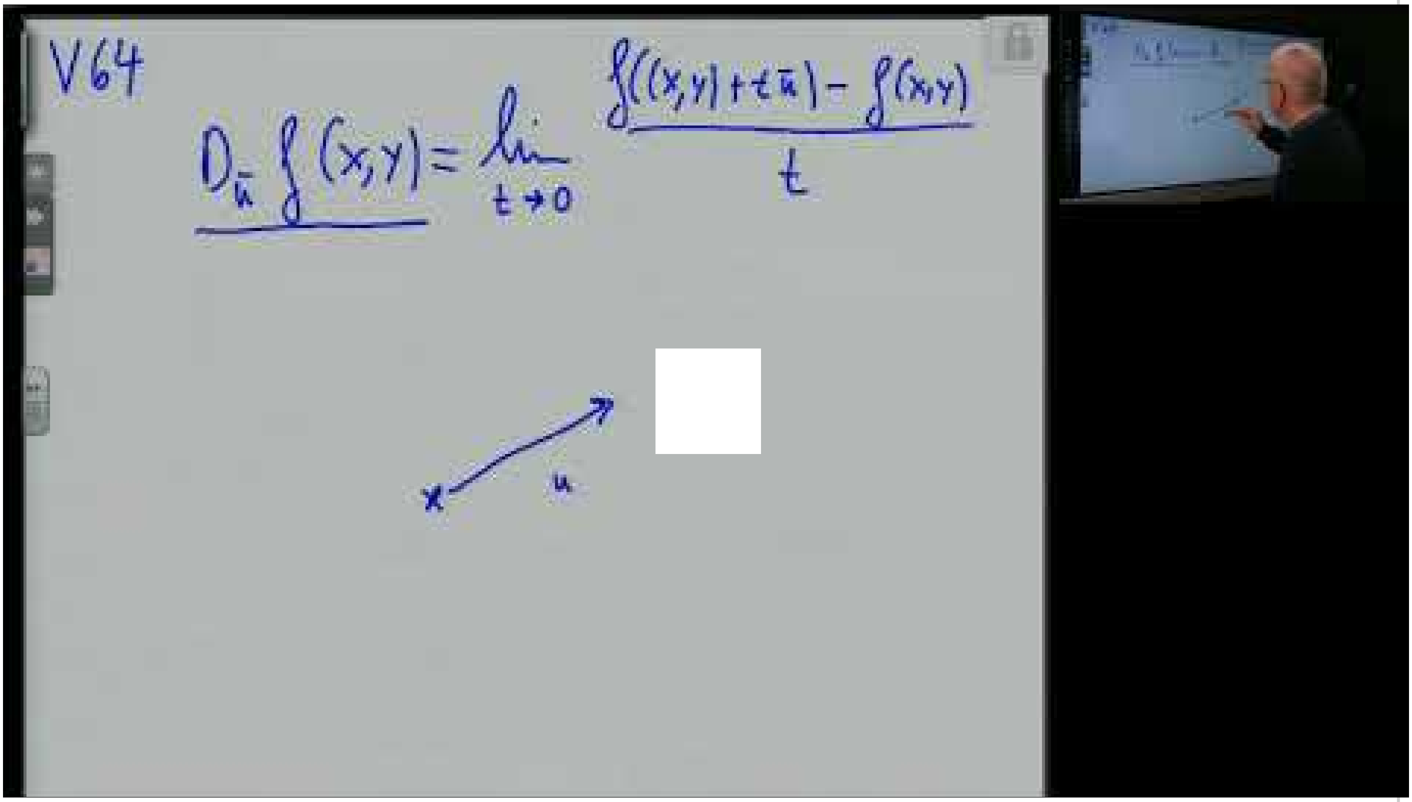
Når $(x, y) \in D(f)$ og $\bar{u}$ er en enhedsvektor (altså en vektor af længde 1), definerer vi *den retningsafledte af f i punktet* $\boldsymbol{(x, y)}$ *og retningen $\bar{u}$* som grænseværdien

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t\bar{u}) - f(x, y)}{t}.$$

Den retningsafledte betegnes $D_{\bar{u}}f(x, y)$; altså,

$$D_{\bar{u}}f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t\bar{u}) - f(x, y)}{t}.$$

(Om den retningsafledte).



Hvis vi bruger enhedsvektoren $e_1 = (1, 0)$ som $\bar{u}$, finder vi, at

$$D_{e_1}f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + te_1) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x + t, y)) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Så den partielt afledede mht. x er altså den retningsafledte, svarende til retningen bestemt ved e_1. Den tilsvarende linie l_{e_1} er jo også netop linien gennem (x, y), der er parallel med x-aksen. På samme måde finder vi, at når vi bruger enhedsvektoren $e_2 = (0, 1)$ som $\bar{u}$, bliver den retningsafledte

$$D_{e_2}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En vilkårlig vektor $\bar{v} = (a, b)$, som ikke er nulvektoren, peger også i en bestemt retning og fastlægger derfor også en retning i planen. Det er den samme retning som fastlægges af den tilsvarende enhedsvektor

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) = (\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}).$$

Vi vil derfor nogle gange tale om retningen fastlagt ved en vektor, selv om den ikke er en enhedsvektor. Derved mener vi den retning, som den tilhørende enhedsvektor fastlægger.

I dette eksempel udregner vi den retningsafledte af funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y$$

i retningen fastlagt ved vektoren

$$\bar{v} = (1, 1).$$

Til det formål normerer vi først $\bar{v}$, dvs. vi finder den enhedsvektor $\bar{u}$, som peger i samme retning som $\bar{v}$, jvf. Bemærkning 3.7. Vi finder, at

$$\bar{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ifølge definitionen er $D_{\bar{u}}f(x,y)$ grænseværdien

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\bar{u})-f(x,y)}{t}.$$

Vi finder, at

$$\begin{aligned} f((x,y)+t\bar{u}) &= f\left(x+\frac{t}{\sqrt{2}}, y+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(x+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + y + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= x^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{2tx}{\sqrt{2}} + y + \frac{t}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Så bliver differenskvotienten

$$\begin{aligned} \frac{f((x,y)+t\bar{u})-f(x,y)}{t} &= \frac{\frac{t^2}{2}+\frac{2tx}{\sqrt{2}}+\frac{t}{\sqrt{2}}}{t} \\ &= \frac{t}{2}+\frac{2x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t}{2}+\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

og dermed

$$D_{\bar{u}}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\bar{u})-f(x,y)}{t} = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Opgave

Udregn den retningsafledte af funktionen $f(x,y) = x^2 + y$ i punktet $(1,1)$ og retningen $\bar{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Den følgende sætning viser, hvorledes de retningsafledte kan bestemmes ud fra gradienten $\nabla f(x,y)$:

Antag at de partielt afledede af funktionen $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ eksisterer og er kontinuerte i en omegn af punktet $(x,y) \in \mathrm{D}(f)$. Hvis $\bar{u} = (a,b)$ er en enhedsvektor gælder, at

$$D_{\bar{u}}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b. \tag{3.1}$$

Bevis

Ifølge definitionen er den retningsafledte $D_{\bar{u}}f(x,y)$ det samme som differentialkvotienten i $t = 0$ for funktionen

$$\psi(t) = f((x,y)+t(a,b)) = f(x+ta, y+tb).$$

Hvis vi sætter $g(t) = x + ta$, $h(t) = y + tb$, er

$$f(x+ta, y+tb) = f(g(t), h(t)).$$

Ved brug af kædereglen finder vi, at

$$\psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(0),h(0))g'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(0),h(0))h'(0). \tag{3.2}$$

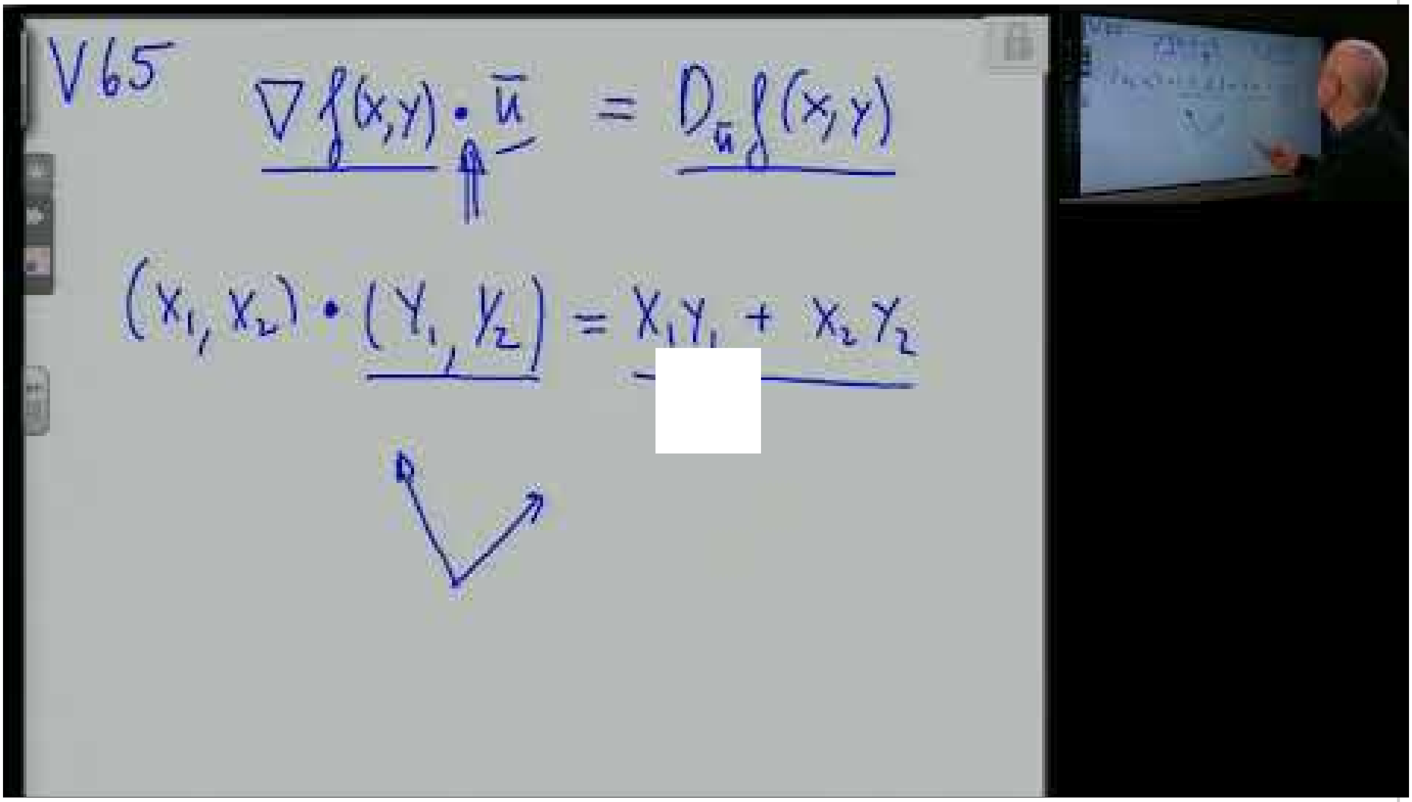
Da $g'(0) = a$, $h'(0) = b$, $g(0) = x$ og $h(0) = y$, ser vi, at (3.2) netop er formlen (3.1) for den retningsafledte $D_{\bar{u}}f(x,y)$.

Antagelserne, der gøres i Sætning 3.10, er nødvendige, men de er til gengæld altid opfyldte for de funktioner, vi skal beskæftige os med i dette kursus.

Hvis vi bruger skalar produktet $\cdot$ for vektorer, kan formlen (3.1) skrives

$$D_{\bar{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \bar{u}. \tag{3.3}$$

(Om prik/skalar produktet i forbindelse med retnings afledede).



Lad $f(x,y) = xy^2 + x$. Så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 1,$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Så gradienten $\nabla f(x,y)$ er vektoren

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 1, 2xy).$$

Vi kan nu ved hjælp af Sætning 3.10 beregne alle retningsafledte for funktionen: Hvis $\bar{u} = (a,b)$ er en enhedsvektor, får vi formlen

$$D_{\bar{u}}f(x,y) = (y^2 + 1)a + 2bxy.$$

F.eks. bliver den retningsafledte af f i punktet $(1,2)$ og i retningen $\bar{u} = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$ lig med

$$(2^2+1)\frac{3}{4}+2\frac{\sqrt{7}}{4}2=\frac{15}{4}+\sqrt{7}\approx 6.39.$$

Vi ser altså, at ved brug af Sætning 3.10 giver gradienten ∇f af f mulighed for at beregne alle de retningsafledte.

Opgave

a. Beregn $D_{\bar{u}}f(x,y)$ når $f(x,y)=x+y$ og $\bar{u}$ er enhedsvektoren $\bar{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

b. Beregn $D_{\bar{u}}f(x,y)$ når $f(x,y)=x+y$ og $\bar{u}$ er enhedsvektoren $\bar{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

c. Beregn $D_{\bar{u}}f(x,y)$ når $f(x,y)=x+y$, og $\bar{u}$ er enhedsvektoren, der peger i samme retning som vektoren $(3,4)$.

d. Beregn med 3 decimalers nøjagtighed den retningsafledte $D_{\bar{u}}f(1,2)$, når $f(x,y)=2\cos xy$, og $\bar{u}$ er enhedsvektoren, der peger i samme retning som vektoren $(3,4)$.

Opgave

Lad $\bar{u}$ være en enhedsvektor. Lad $\bar{v}$ være enhedsvektoren der peger i samme retning som $-7\bar{u}$. Gør rede for, at

$$D_{\bar{v}}f(x,y)=-D_{\bar{u}}f(x,y).$$

Sci2u opgave

En af fordelene ved at udtrykke formel (3.1) ved brug af prik produktet, som det er gjort i (3.3), er, at vi får en vurdering på, hvor store de retningsafledte kan blive. Husk nemlig, at der gælder

$$\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}=\cos\theta$$

når vi lader $\|\bar{x}\|$ betegne længden (eller *normen*) af en vektor $\bar{x}$ og θ betegner vinklen mellem $\bar{x}$ og $\bar{y}$. Når vi sætter numerisk tegn på fåes identiteten

$$\frac{|\bar{x}\cdot\bar{y}|}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}=|\cos\theta|.$$

Da $|\cos\theta|\leq 1$ giver dette os uligheden

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}|\leq\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|, \tag{3.4}$$

som er rigtig for alle vektorer $\bar{x}$ og $\bar{y}$. Udnytter vi dette i (3.3), ser vi at

$$|D_{\bar{u}}f(x,y)|\leq\|\nabla f(x,y)\|, \tag{3.5}$$

fordi $\|\bar{u}\|=1$. Denne ulighed, (3.5), siger, at retningsafledte ikke kan blive større end længden af gradienten i det pågældende punkt. Hvis gradienten $\nabla f(x,y)$ ikke er 0-vektoren bestemmer den en retning givet ved enhedsvektoren

$$\bar{\nabla}=\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}.$$

Indsætter vi $\bar{\nabla}$ for $\bar{u}$ i (3.3), finder vi, at

$$D_{\bar{\nabla}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}=\frac{\nabla f(x,y)\cdot\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}. \tag{3.6}$$

For enhver vektor $\bar{x}$ gælder, at $\bar{x}\cdot\bar{x}=\|\bar{x}\|^2$, så specielt har vi, at

$$\nabla f(x,y)\cdot\nabla f(x,y)=\|\nabla f(x,y)\|^2.$$

Indsætter vi det i (3.6), får vi, at

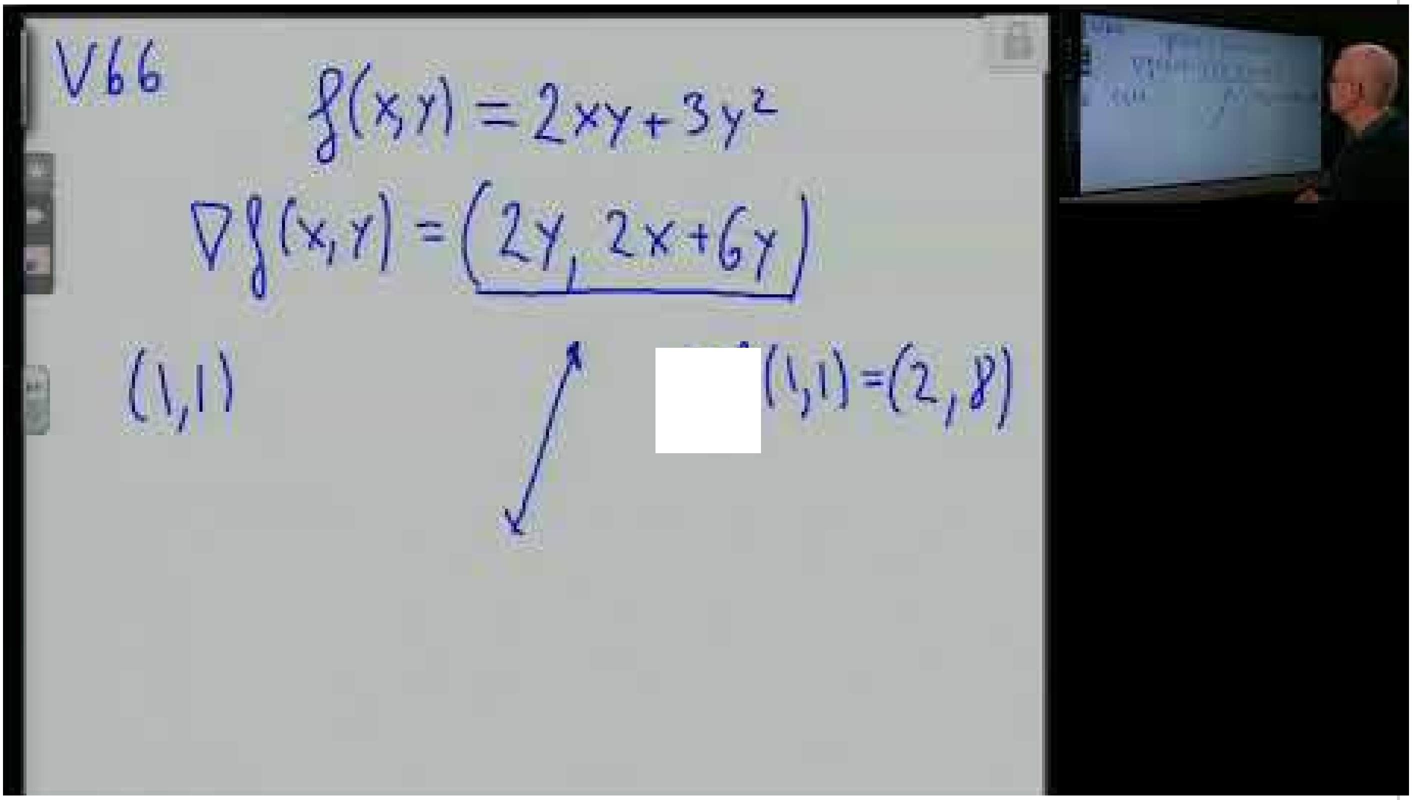
$$D_{\bar{\nabla}} f(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|. \tag{3.7}$$

Det vil altså sige, at i retningen $\bar{\nabla}$, som er den retning gradienten $\nabla f(x, y)$ peger i, er den retningsafledte netop lig med længden af gradienten − hvilket var den størst mulige.

Alle disse overvejelser kan nu opsummeres i følgende

Lad $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ være en funktion hvis partielt afledede eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at den maksimale værdi af den retningsafledte $D_{\bar{u}} f(x, y)$ er længden $\|\nabla f(x, y)\|$ af gradienten, og denne antages, når enhedsvektoren $\bar{u}$ har samme retning som gradienten $\nabla f(x, y)$.

(Lidt forklaring og et eksempel).



Opgave

Angiv for hver af de følgende funktioner den enhedsvektor $\bar{u}$, der giver den største retningsafledte $D_{\bar{u}} f(1, 0)$, og find dens værdi.

a. $f(x, y) = xy$,

b. $f(x, y) = x \cos y$,

c. $f(x, y) = 2x + y$.

Opgave

Find de to enhedsvektorer $\bar{u}$ hvor den retningsafledte $D_{\bar{u}} f(1, 0)$ af funktionen

$$f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$$

i punktet $(1, 0)$ er lig med 1.

Sci2u opgave

3.1.1 Tre og flere variable

For en funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ af n variable, hvor $n = 3, 4, 5, \ldots$, defineres gradienten

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

på en måde helt analog til tilfældet $n = 2$. Vi sætter de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ind som koordinater i en vektor:

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \right.$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right),$$

som altså nu er et element i R^n, da der er n koordinater.

Når der er 3 variable x, y, z, er gradienten altså en vektor i rummet R^3 :

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right).$$

F.eks. når $f(x, y, z) = x + xy + xyz$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 + y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy.$$

Så gradienten er vektoren

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

Den retningsafledte for en funktion af flere variable kan også defineres på ganske samme måde som for to variable: En enhedsvektor $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ er nu en vektor i R^n af længde 1 :

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2} = 1,$$

og vi definerer

$$D_{\bar{u}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + t\bar{u}) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}{t}.$$

Sammenhængen mellem de retningsafledte og gradienten er den samme som for funktioner af to variable:

$$D_{\bar{u}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \bar{u}, \tag{3.8}$$

hvor prik produktet (eller skalar produktet, eller det indre produkt) $\cdot$ mellem to vektorer $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er defineret ved, at

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Formlen (3.8) kan dermed også skrives

$$\begin{aligned} D_{\bar{u}} f&(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_j = \nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \bar{u}, \end{aligned}$$

når $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Og Sætning 3.16 gælder også for 3 eller flere variable:

Lad $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ være en funktion hvis partielt afledede eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at den maksimale værdi af den retningsafledte $D_{\bar{u}}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er længden $\|\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|$ af gradienten og denne antages, når enhedsvektoren $\bar{u}$ har samme retning som gradienten $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Gradienten af funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ er

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

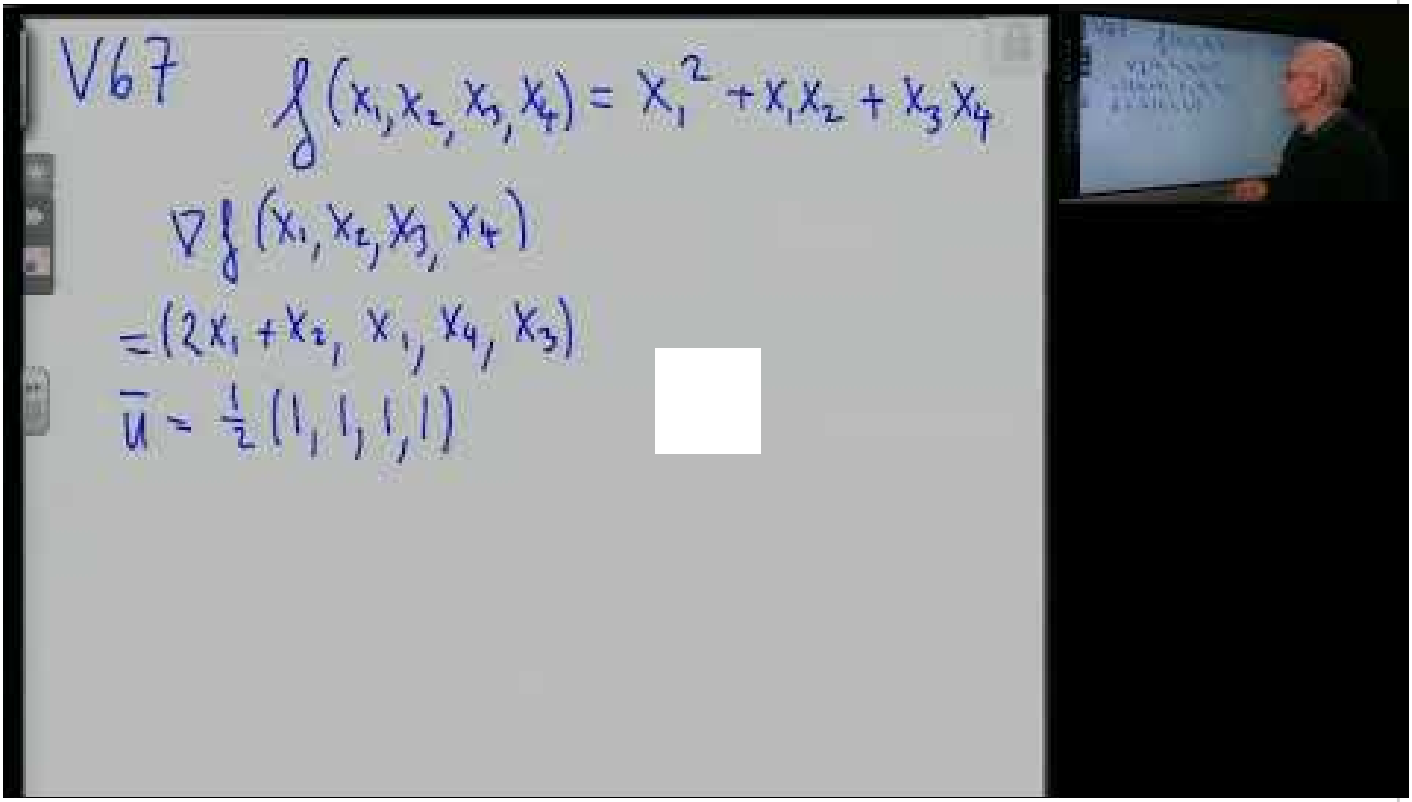
og den retningsafledte

$$D_{\bar{u}}f(x, y, z)$$

i punktet $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ mht. retningen givet ved enhedsvektoren $\bar{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ er

$$D_{\bar{u}}f(3, 2, 1) = (6, 4, 2) \cdot \bar{u} = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

(Opsummering om flere variable − med et eksempel).



Opgave

Find længden af gradienten $\nabla f(1, 2, 1)$ for hver af funktionerne

a. $f(x, y, z) = xyz$,

b. $f(x, y, z) = x + y + z$,

c. $f(x, y, z) = xy - z$.

Opgave

Angiv for hver af de følgende funktioner den enhedsvektor $\bar{u}$, der giver den største retningsafledte $D_{\bar{u}}f(1, 0, 1)$, og find dens værdi.

a. $f(x,y,z) = xyz$.

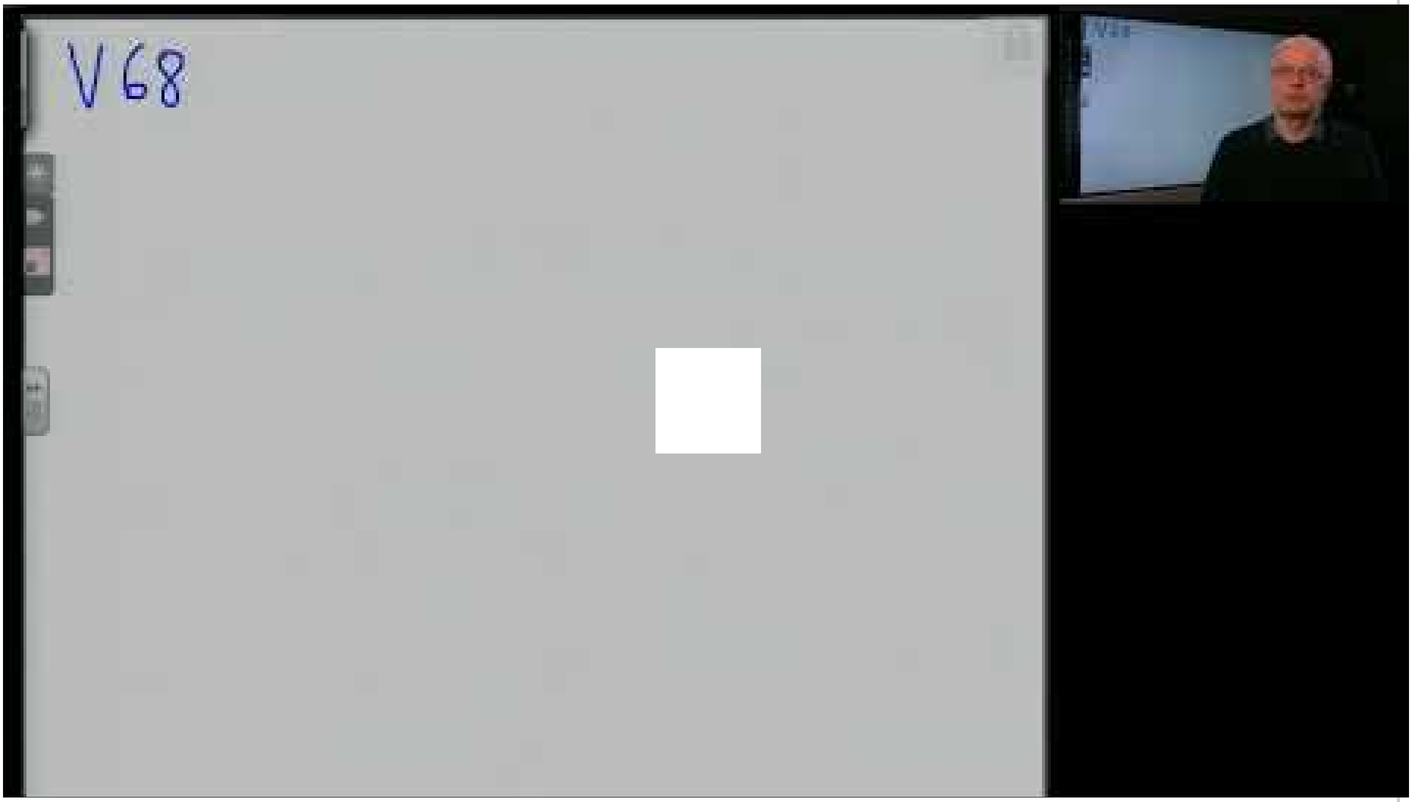
b. $f(x,y,z) = xz\cos y$.

c. $f(x,y,z) = 2x + y$.

3.2 Extremumsværdier for kontinuerte funktioner

Dette afsnit handler om metoder til at finde de største og mindste værdier for en funktion af 2 og flere variable, og om at finde de punkter i definitionsmængden for funktionen, hvor de største eller mindste værdier antages.

(Om matematik og matematisk metode).



For kontinuerte funktioner af en variabel gælder flg.

Lad $I = [a,b]$ være et lukket interval på den reelle akse og $f : I \longrightarrow \mathrm{R}$ en kontinuert funktion. Så findes der et punkt $x_0 \in I$, hvor f antager sin største værdi. Dvs. at

$$f(x) \leq f(x_0) \tag{3.9}$$

for alle $x \in I$. Dette punkt x_0 er enten

i. et af randpunkterne for intervallet, dvs. enten a eller b, eller

ii. et punkt x_0 i det indre af intervallet, dvs. $a < x_0 < b$, hvor f er differentiabel og hvor $f'(x_0) = 0$, eller

iii. et punkt $x_0 \in I$, hvor f ikke er differentiabel.

Her kommer et bevis for, at et globalt maksimumspunkt opfylder punkt (i.), (ii.) eller (iii.).

Bevis

Vi skal vise, at hvis x_0 er et punkt i I som opfylder (3.9), så er enten (i.), (ii.) eller (iii.) opfyldt. Vi behøver altså blot vise, at hvis hverken (i.) eller (iii.) er opfyldt, så er (ii.) opfyldt. Antag derfor at hverken (i.) eller (iii.)er opfyldt. Så er x_0 et indre punkt i intervallet (dvs. $a < x_0 < b$, og f er differentiabel i x_0. Desuden er $f(x) \leq f(x_0)$ i en omegn af x_0, så fra en tidligere opgave følger, at $f'(x_0) = 0$.

Bemærk at (3.9) udtrykker, at x_0 er et punkt, hvor f antager sin største værdi på intervallet I. Bemærk også at der sagtens kan være flere punkter x_0, hvor f antager sin største værdi. For funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $I = [-1, 1]$ er der to sådanne punkter; $x_0 = -1$ og $x_0 = 1$. Endnu mere ekstremt: Funktionen $f(x) = 7$ antager sin største (og mindste) værdi i alle punkter af I.

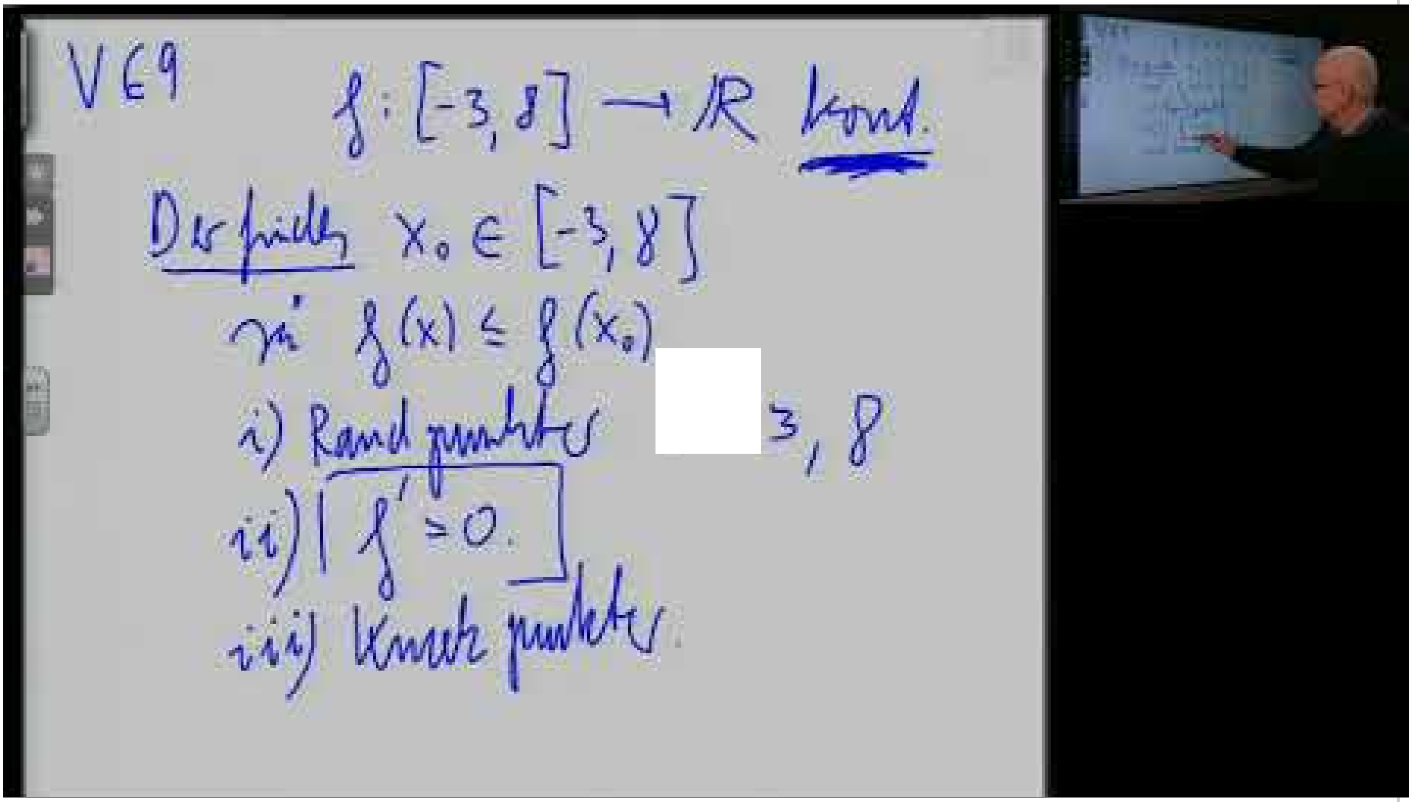
Sætning 3.27 fortæller os langt fra alt om, hvor f antager sin største værdi; kun hvor og hvordan vi skal lede efter sådanne punkter. I det følgende skal vi udvide metoden fra funktioner af én variabel til funktioner af vilkårligt mange variable.

Hvis $I = [0, 1]$ og $f(x) = x^2$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.9) er opfyldt for alle $x \in I$,og det er i punktet $x_0 = 1$. Altså et eksempel på situation punkt (i.) i Sætning 3.27.

Hvis $I = [-1, 1]$ og $f(x) = 1 - x^2$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.9) er opfyldt for alle $x \in I$, og det er i punktet $x_0 = 0$. Bemærk at $f'(0) = 0$, svarende til punkt (ii.) i Sætning 3.27.

Hvis $I = [-1, 1]$ og $f(x) = 1 - |x|$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.9) er opfyldt for alle $x \in I$, og det er i punktet $x_0 = 0$. Bemærk at f ikke er differentiabel i 0, svarende til punkt (iii.) i Sætning 3.27.

(Om største og mindste værdier for kontinuerte funktioner på et lukket interval).



Det nyttige ved informationen, at punktet x_0 må opfylde punkt (i.), (ii.) eller (iii.), består i, at meget ofte er der kun ganske få punkter, der opfylder en af de tre betingelser, og man kan så let finde x_0 simpelthen ved af checke alle de relevante punkter. Målet med resten af dette afsnit er, at indføre de begreber, der skal til, for opnå en tilsvarende forenkling, når man leder efter største værdier for funktioner af flere variable.

Eller mindste værdier: For en kontinuert funktion $f : I \to \mathbb{R}$ som ovenfor skal også de punkter, hvor f antager sin mindste værdi søges blandt punkter som opfylder punkt (i.), (ii.) eller (iii.). Det er jo trods alt præcist de punkter, hvor funktionen $-f$ antager sin største værdi. Der gælder derfor følgende sætning, som er helt analog til Sætning 3.27:

Lad $I = [a, b]$ være et lukket interval på den reelle akse og $f : I \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så findes der et punkt $x_0 \in I$, hvor f antager sin mindste værdi. Dvs. at

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{3.10}$$

for alle $x \in I$. Dette punkt x_0 er enten

i. et af randpunkterne for intervallet, dvs. enten a eller b, eller

ii. et punkt x_0 i det indre af intervallet, dvs. $a < x_0 < b$, hvor f er differentiabel og hvor $f'(x_0) = 0$, eller

iii. et punkt $x_0 \in I$, hvor f ikke er differentiabel.

På samme måde vil vi i det følgende håndtere mindste værdier helt analogt til største værdier.

3.2.1 Kritiske punkter og kritiske værdier

Lad $f : D(f) \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable. Et punkt $x \in D(f)$ er et *lokalt maksimumspunkt* for f når

$$f(y) \leq f(x)$$

for alle y i en omegn af x, og et punkt $x \in D(f)$ er et *lokalt minimumspunkt* for f når

$$f(y) \geq f(x)$$

for alle y i en omegn af x. Et punkt $x \in D(f)$ er et *globalt maksimumspunkt*, hhv. et *globalt minimumspunkt*, for f når

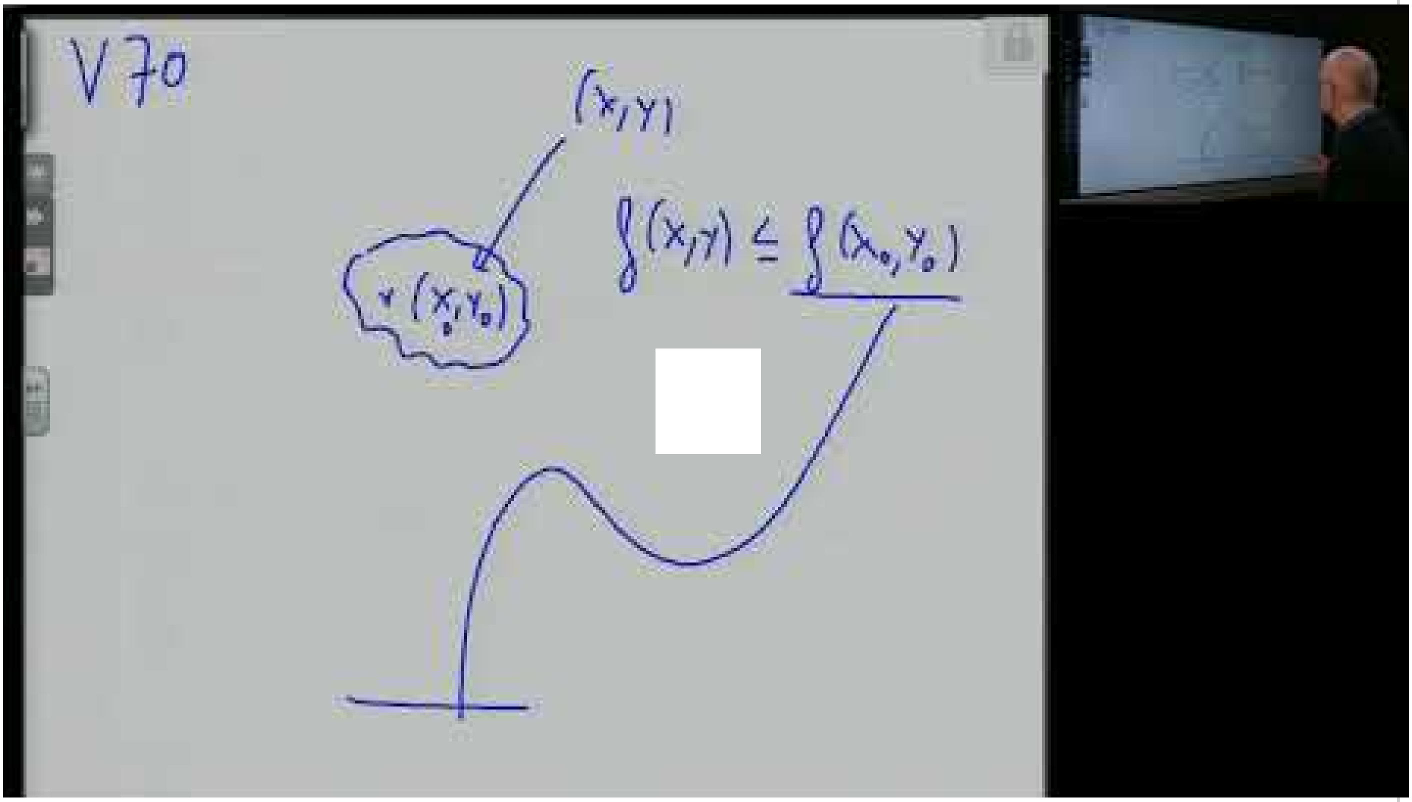
$$f(y) \leq f(x),$$

hhv.

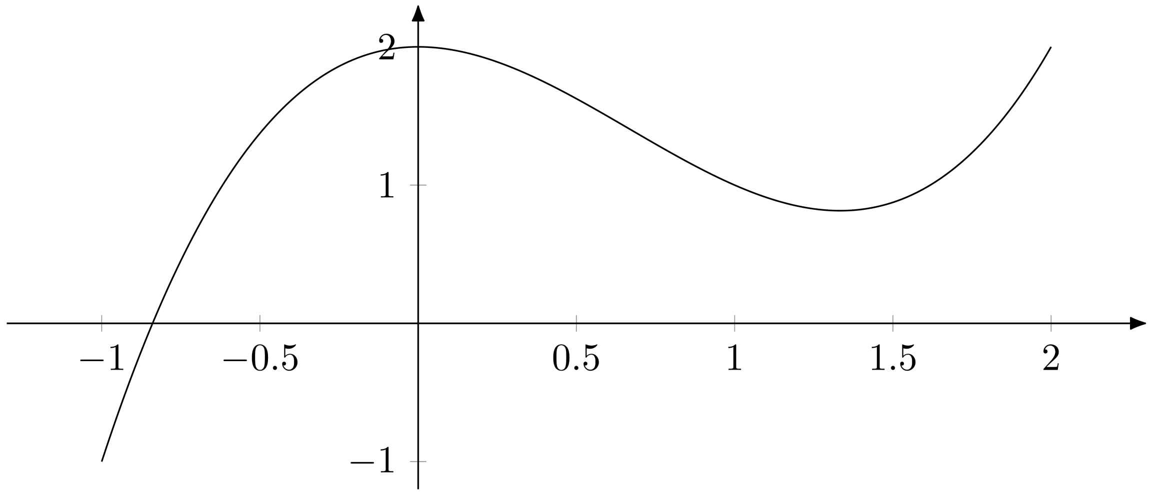
$$f(y) \geq f(x),$$

for alle y i $D(f)$.

(Om lokale ekstrema).



Lad $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Grafen for f kan ses på Figur 3.35. Punktet $x = 0$ er et lokalt maksimumspunkt for f, mens $x = \frac{4}{3}$ er et lokalt minimumspunkt. Ingen af punkterne er globale; 0 er ikke et globalt maksimumspunkt, fordi der masser af punkter 'til højre for' $\frac{4}{3}$, hvor f antager større værdier end i 0, og $\frac{4}{3}$er ikke et globalt minimumspunkt, fordi der er masser af punkter 'til venstre for' 0, hvor f antager mindre værdier end i $\frac{4}{3}$.



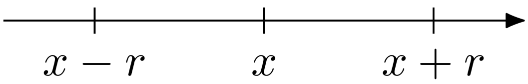
Et første skridt mod at kunne identificere de punkter, hvor f antager sin største eller mindste værdi, er at dele definitionsområdet $D(f)$ for f op i *indre punkter* og *rand punkter*. Det er noget man kan gøre for alle delmængder af R^n − og har ikke noget at gøre med funktionen f. Vi indfører derfor disse begreber for en vilkårlig delmængde D af R^n.

Vi siger, at et punkt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ er et *indre punkt* i D når der findes et $r > 0$så alle punkter (eller n-tupler) $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, der opfylder, at

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} < r, \tag{3.11}$$

ligger i D.

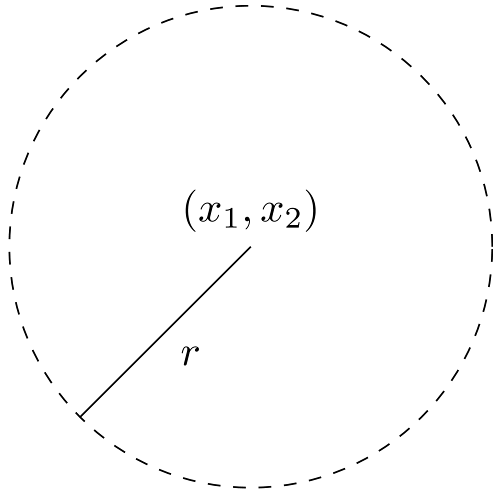
Uligheden (3.11) er opfyldt netop når punktet y har en afstand til x som er mindre end r. Så hvis $n = 1$, og der altså kun er en variabel, vil (3.11) være opfyldt når y ligger i intervallet mellem $x - r$ og $x + r$. Se Figur 3.37.



Intervallet fra $x - r$ til $x + r$.

Det betyder, at når $n = 1$ vil et punkt $x \in D$ være et indre punkt når der findes et åbent interval med centrum i x som er helt indeholdt i D.

Når $n = 2$ har x har to koordinater $x = (x_1, x_2)$, og $y = (y_1, y_2)$ vil opfylde (3.11) netop når y ligger i den åbne cirkelskive med centrum i x og radius r. Se Figur 3.38. Så for $n = 2$ vil et punkt $x \in D$ være et indre punkt i D netop når der der findes en cirkelskive med centrum i x som er indeholdt i D.



Den åbne cirkelskive med centrum i x og radius r.

Når $n = 3$ vil (3.11) være opfyldt netop når $y = (y_1, y_2, y_3)$ ligger i kuglen med centrum i $x = (x_1, x_2, x_3)$ og radius r. Så for $n = 3$ vil et punkt $x \in D$ være et indre punkt i D netop når der der findes en kugle med centrum i x som er indeholdt i D.

Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ kan vi definere for $x \geq 0$. Altså

$$D(f) = [0, \infty[\; = \{x \in R \; : \; x \geq 0\}.$$

Ehvert punkt $x > 0$ er et indre punkt i $D(f)$ fordi vi kan finde et interval med med centrum i x som er helt indeholdt i $D(f)$; vi kan f.eks. vælge $r = \frac{x}{2}$. Så er intervallet

$$]x - r, x + r[\; = \;]x - \frac{x}{2}, x + \frac{x}{2}[\; = \;]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[$$

indeholdt i $D(f)$.

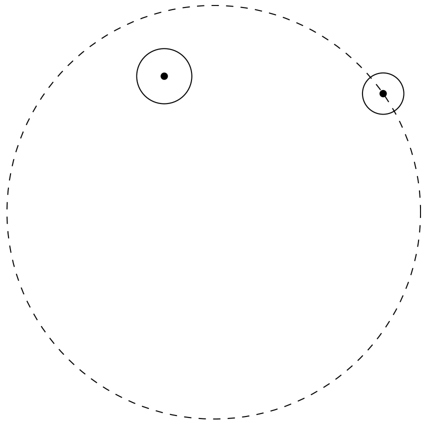
Punktet $x = 0$ er *ikke* et indre punkt i $D(f)$; uanset hvilket $r > 0$ vi bruger vil intervallet $]x - r, x + r[=] - r, r[$ ikke være indeholdt i $D(f)$; det vil indeholde punkter $(-\frac{r}{2}$, f.eks.), hvor (3.11) er opfyldt, men som ikke ligger i $D(f)$.

Funktionen $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ kan vi definere, når $x^2 + y^2 \leq 1$. Altså

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\},$$

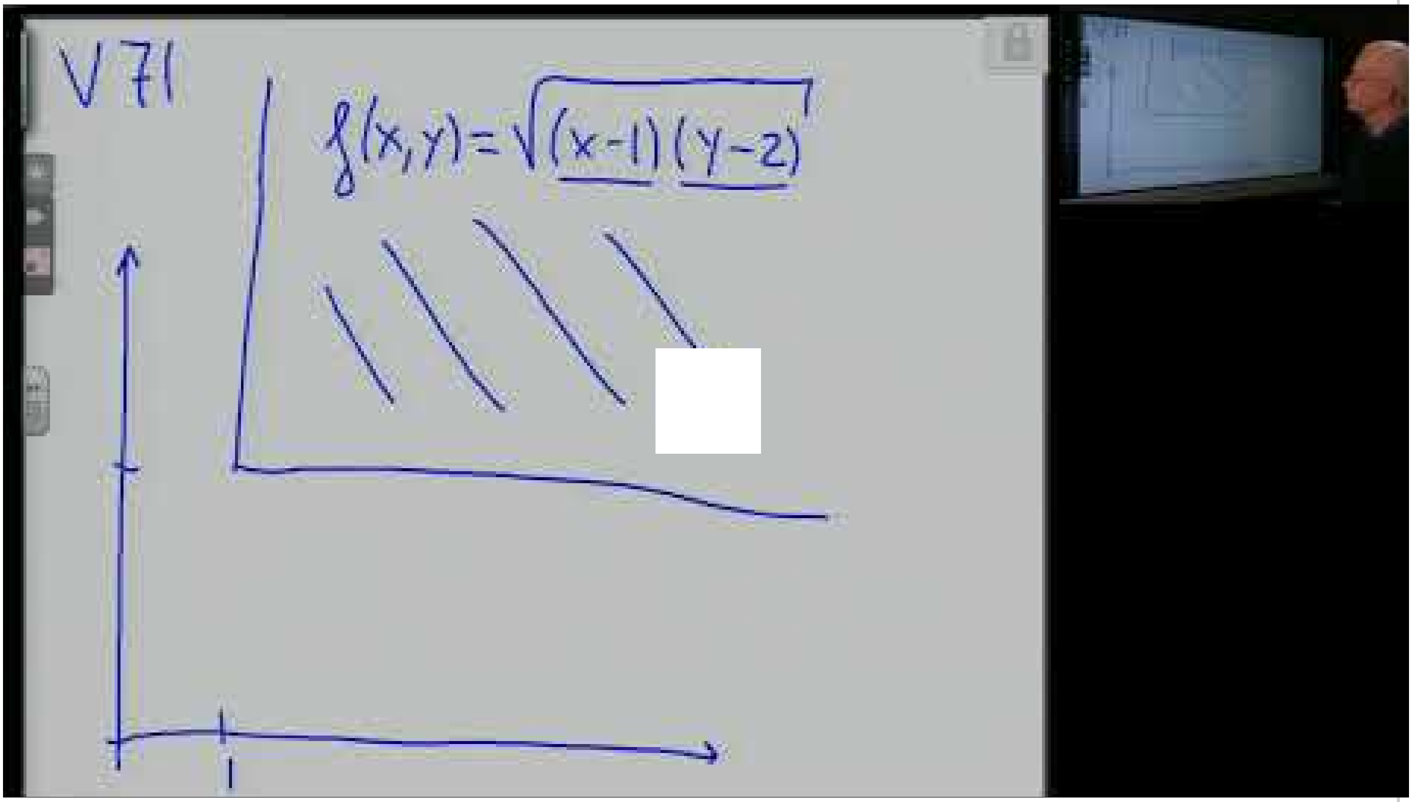
som er cirkel-skiven med centrum i $(0, 0)$. Alle punkter (x, y), som opfylder at $x^2 + y^2 < 1$, er indre punkter i $D(f)$ fordi vi for hver af disse punkter kan finde en (evt. meget lille) cirkelskive med centrum i (x, y) som er helt indeholdt i $D(f)$. For punkter (x, y) hvor $x^2 + y^2 = 1$, som altså ligger på enhedscirklen, kan dette ikke lade sig gøre; uanset hvilket $r > 0$ vi bruger, vil der være punkter med afstand til (x, y), som er mindre end r, men som ikke ligger i $D(f)$.

Et punkt x i R^n, som ikke er et indre punkt i D og som har den egenskab, at enhver omegn af x indeholder punkter fra D, kaldes for et *randpunkt* for D. I Eksempel 3.39 er $x = 0$ et randpunkt, og i Eksempel 3.40 er alle punkter (x, y), der ligger på enhedscirklen, og altså opfylder at $x^2 + y^2 = 1$, randpunkter i $D(f)$. Se Figur 3.41.



Et indre punkt og et randpunkt.

(Om indre punkter og rand punkter).



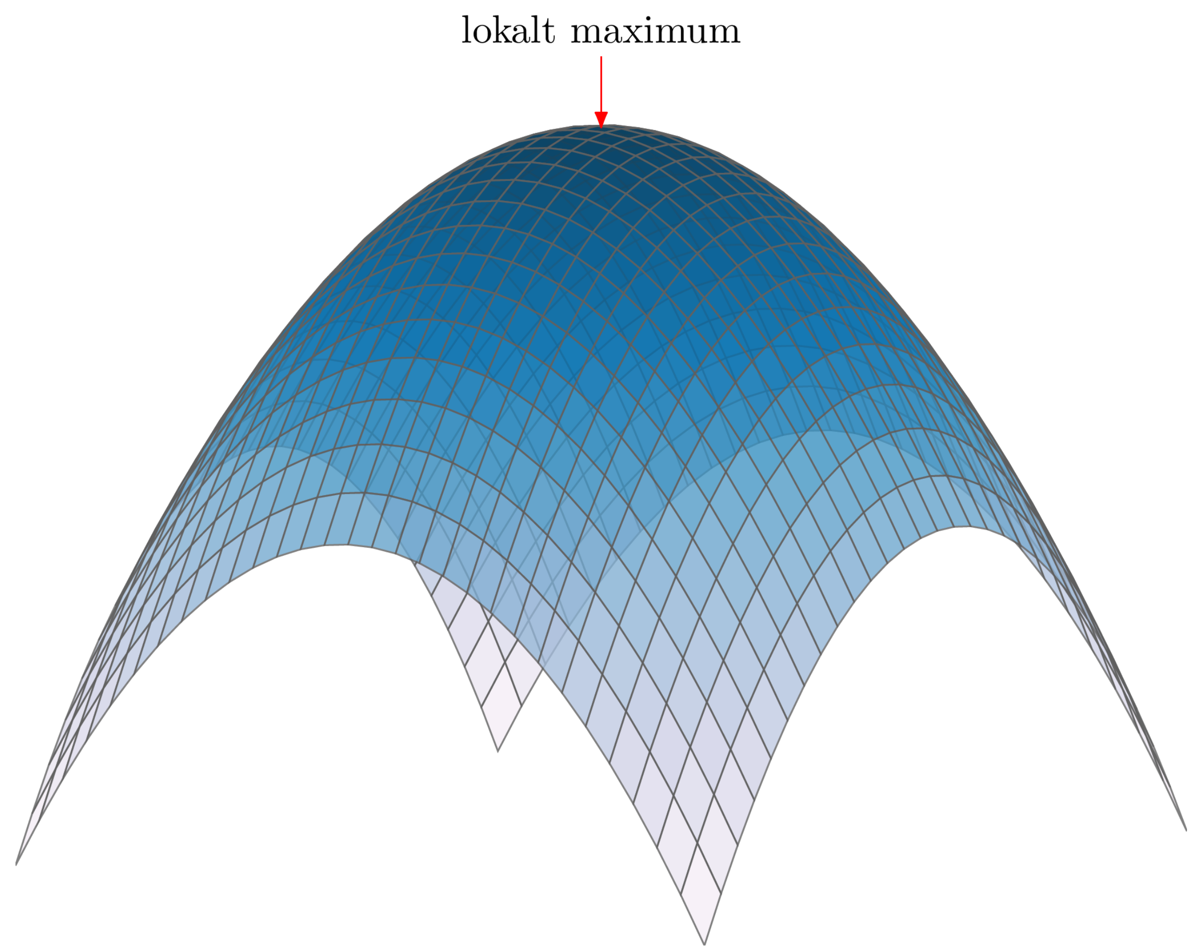
Et indre punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{D}(f)$ er et *kritisk punkt* for funktionen $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$, hvis $\nabla f(x) = 0$.

Udtrykt i ord er et kritisk punkt for funktionen f et indre punkt i definitionsmængden for f, hvor gradienten for f eksisterer og er lig med 0.

Et punkt $x \in \mathrm{D}(f)$ er et *lokalt maximumspunkt,* hvis

$$f(y) \leq f(x)$$

for alle y i en omegn af x.



Et eksempel på grafen over et lokalt maximumspunkt.

Et punkt $x \in \mathrm{D}(f)$ er et *lokalt minimumspunkt,* hvis

$$f(y) \geq f(x)$$

for alle y i en omegn af x.

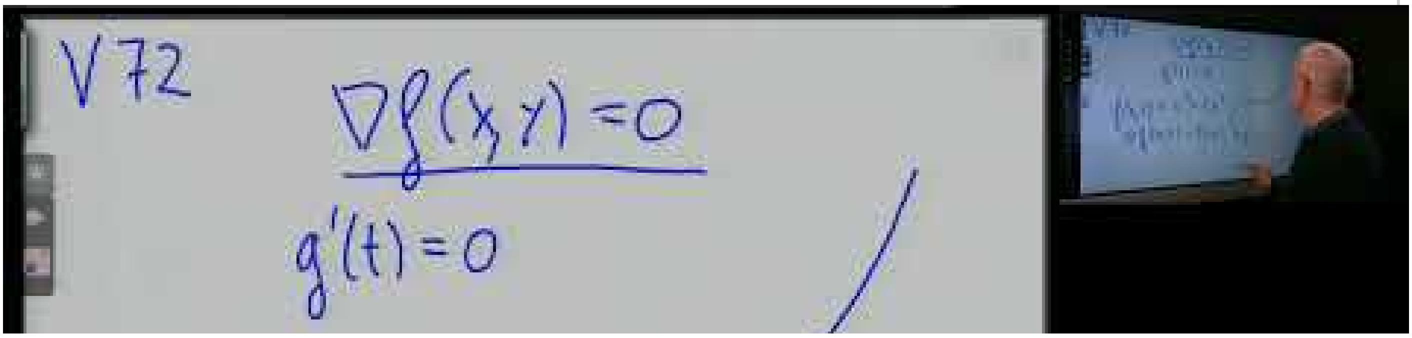
Et *lokalt ekstremumspunkt* for f er et punkt, som enten er et lokalt maximumspunkt eller et lokalt minimumspunkt. Sammenhængen mellem lokale ekstremumspunkter og kritiske punkter beskrives i følgende sætning, der er en analog til den tidligere opgave for funktioner af flere variable.

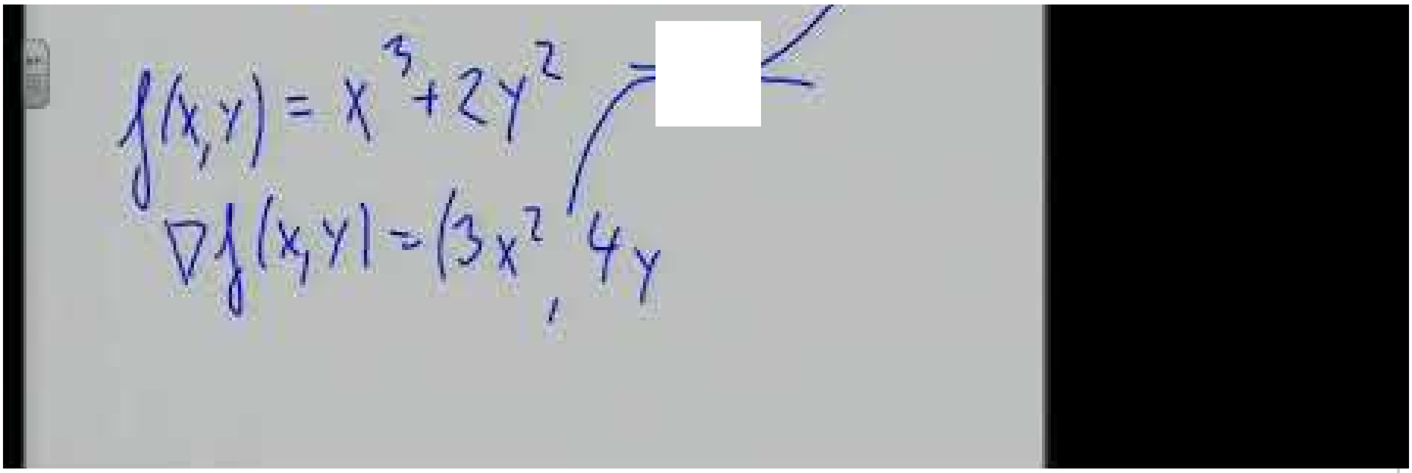
Lad $x \in \mathrm{D}(f)$ være et indre punkt i $\mathrm{D}(f)$ og antag at de partielt afledte af f eksisterer i x.Hvis x er et lokalt ekstremumspunkt for f er x et kritisk punkt for f, dvs.

$$\nabla f(x) = 0.$$

Når vi leder efter globale eller lokale ekstremumspunkter, er vi altså nødt til at kunne finde de kritiske punkter.

(Om kritiske punkter og $f' = 0$).





Kritiske punkter for funktioner af flere variable er en generalisering af betingelsen $f'(x_0) = 0$ for en funktion af én variabel. Denne betingelse kan beskrives grafisk ved, at tangenten til f's graf i punktet x_0 er vandret. I et kritisk punkt (x_0, y_0) for en funktion $f(x, y)$ af to variable er tangentplanen til grafen for f givet ved ligningen

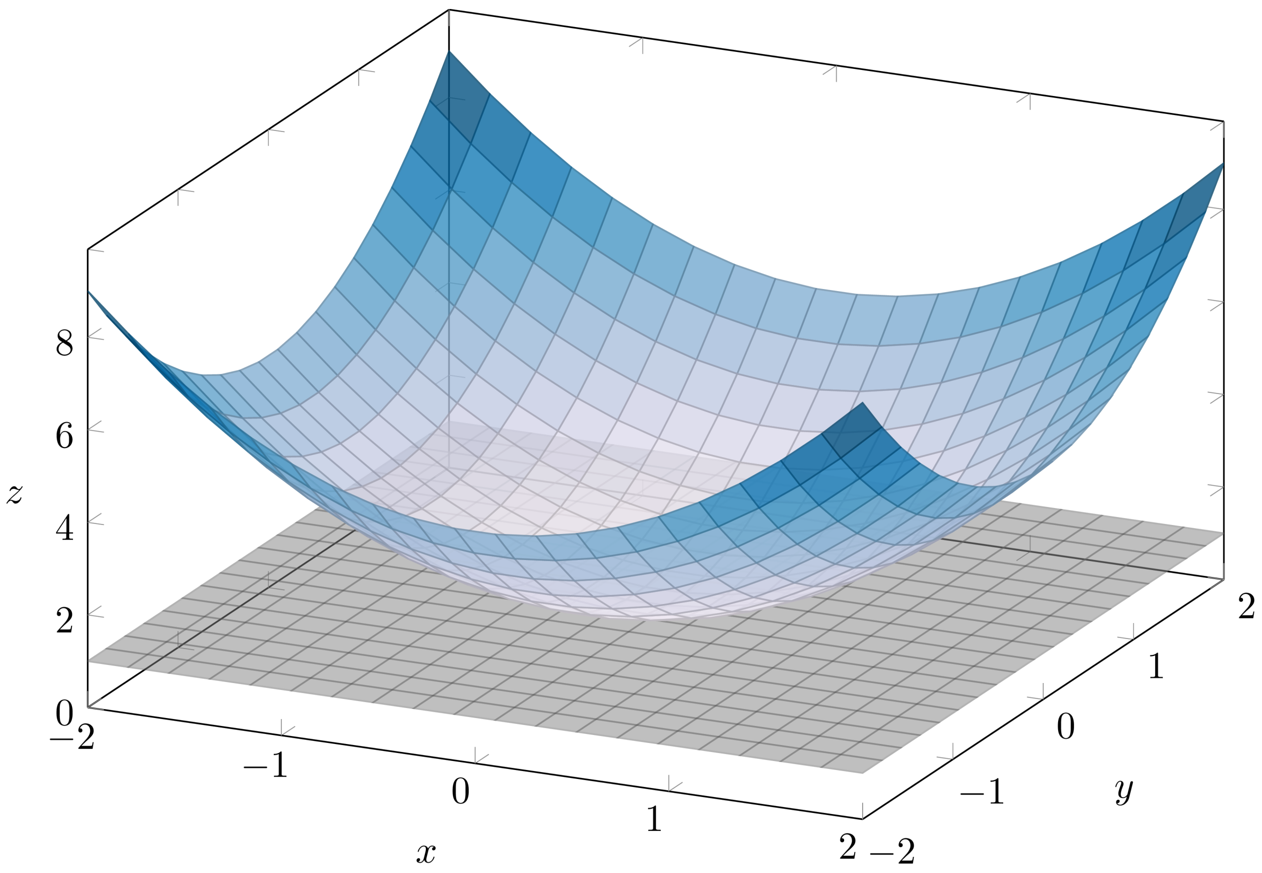
$$z = f(x_0, y_0),$$

fordi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, jvf. definitionen af tangent plan. Dvs. at planen består af punkter med samme z-værdi, nemlig $z = f(x_0, y_0)$, hvilket jo er en plan parallel med x, y-planen. Men i analogi med, hvad der er tilfældet for en funktion af én variabel, kan tangentplanen godt være parallel med x, y-planen, selvom punktet ikke er et lokalt ekstremumspunkt. At tangentplanen for grafen for f i (x_0, y_0) er parallel med x, y-planen er en *nødvendig*, men ikke en *tilstrækkelig* betingelse for, at punktet (x_0, y_0) er et lokalt ekstremumspunkt.

For funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ er der kun et kritisk punkt. Vi har jo, at

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y),$$

så $(x_0, y_0) = (0, 0)$ er det eneste kritiske punkt for f. Da $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \geq 1 = f(0, 0)$, ser vi at $(0, 0)$ *er* et ekstremumspunkt for f i dette tilfælde; faktisk et globalt minimumspunkt. Se Figur 3.50.

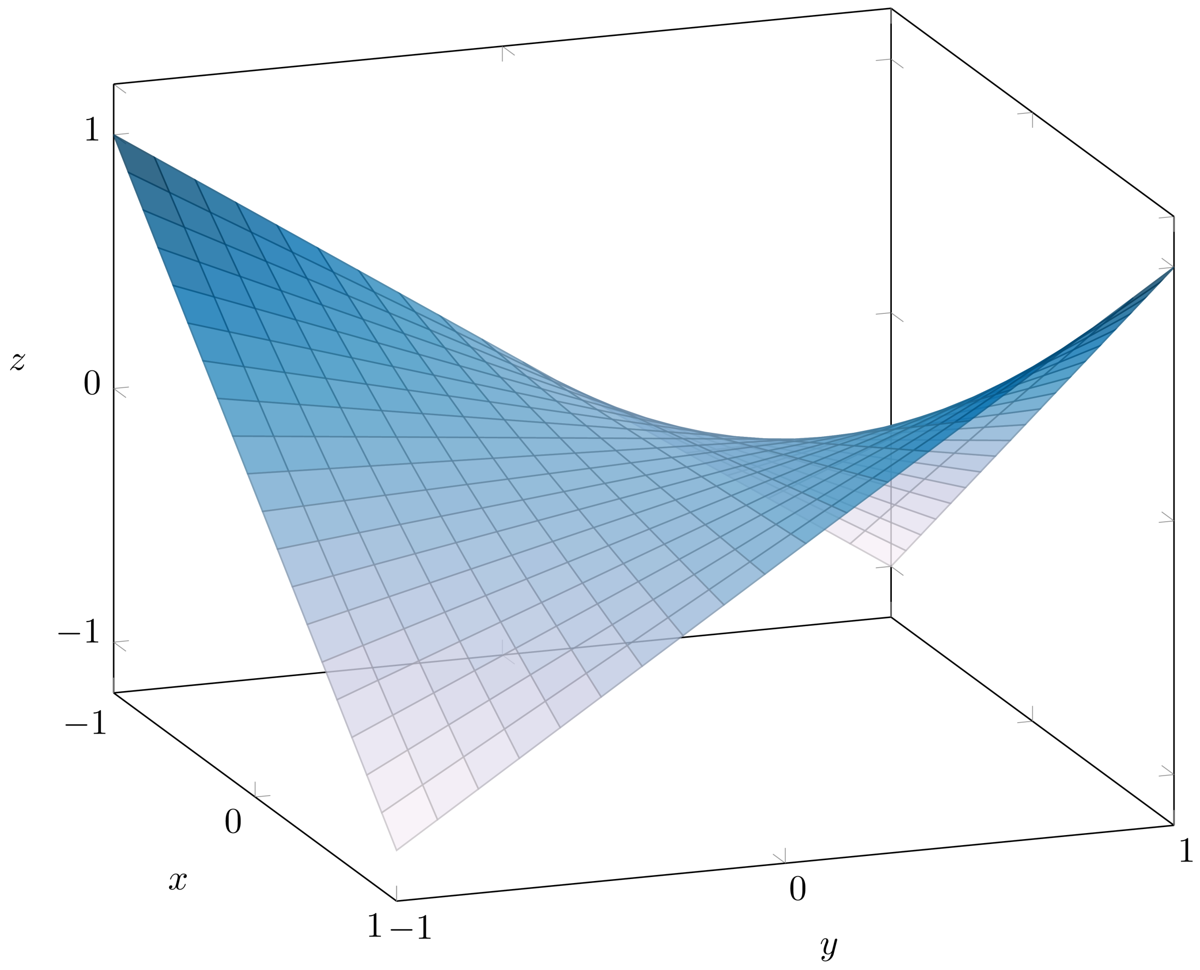


Grafen for $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

For funktionen $f(x,y) = xy$ er der kun et kritisk punkt. Vi har jo, at

$$\nabla f(x,y) = (y,x),$$

så $(x_0, y_0) = (0,0)$ er det eneste kritiske punkt for f. Bemærk at $f(0,0) = 0$, mens der er masser af punkter (x,y) vilkårligt tæt på $(0,0)$ hvor $f(x,y) > 0$ og masser af punkter (x,y) vilkårligt tæt på $(0,0)$, hvor $f(x,y) < 0$. F.eks. er $f(t,-t) < 0 = f(0,0)$ for alle $t > 0$, og punkter af denne form findes vilkårligt tæt på $(0,0)$. Så $(0,0)$ er hverken et lokalt maximumspunkt eller et lokalt minimumspunkt for f. Se Figur 3.52.

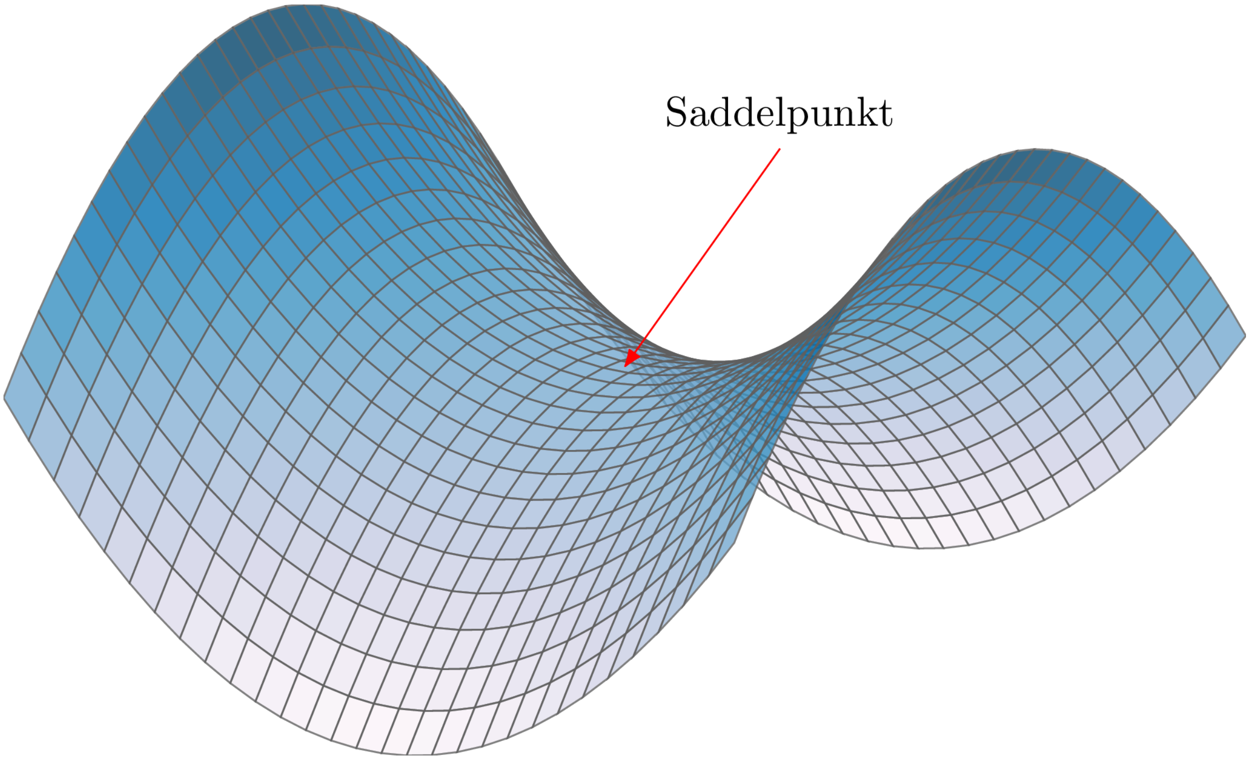


Grafen for $f(x,y) = xy$.

I Eksempel 3.51 er punktet $(0,0)$ kritisk, men ikke et lokalt ekstremumspunkt. Et sådant punkt kaldes for et *saddelpunkt*. Dvs. at et saddelpunkt er kritisk punkt, som ikke er et lokalt ekstemumspunkt. I lidt mere detalje: Et kritisk punkt (x_0, y_0) for f, hvorom det gælder, at der i enhver omegn af (x_0, y_0) findes punkter (x,y) og (x', y') så

$$f(x,y) < f(x_0, y_0) < f(x', y'),$$

kaldes for et *saddelpunkt* for f, se fx Figur 3.53.



Et saddelpunkt.

Funktionen $f(x, y) = x + y$ har ingen kritiske punkter, mens funktionen $g(x, y) = \cos(x - y)$ har uendeligt mange. Vi har nemlig, at

$$\nabla f(x, y) = (1, 1),$$

som ikke bliver nul for noget talpar (x, y). Derimod er

$$\nabla g(x, y) = (-\sin(x - y), \sin(x - y)),$$

som bliver nul for alle talpar (x, y), hvor $x - y$ er et helt multiplum af π. F.eks. er $\nabla g(x, y) = 0$ på linien $x = y$.

Opgave

Find de kritiske punkter for følgende funktioner af to variable $f(x, y)$.

a. $f(x, y) = x^3 + (y - 1)^2$.

b. $f(x, y) = x^3 + y$.

c. $f(x, y) = \sin(x + y)$.

d. $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$.

Sci2u opgave

3.2.2 Anden ordens kriteriet

For en differentiabel funktion $f(x)$ af én variabel kan et punkt x_0 kun være et lokalt ekstremumspunkt hvis $f'(x_0) = 0$, jvf. den tidligere opgave. Men betingelsen $f'(x_0) = 0$ er kun en nødvendig betingelse; ikke en tilstrækkelig: f' kan sagtens være nul i et punkt, som ikke er et lokalt ekstremumspunkt. Men der findes et kriterium, som i nogle tilfælde kan bruges til at afgøre, om et nulpunkt for f' er et ekstremums punkt; det såkaldte anden ordens kriterium:

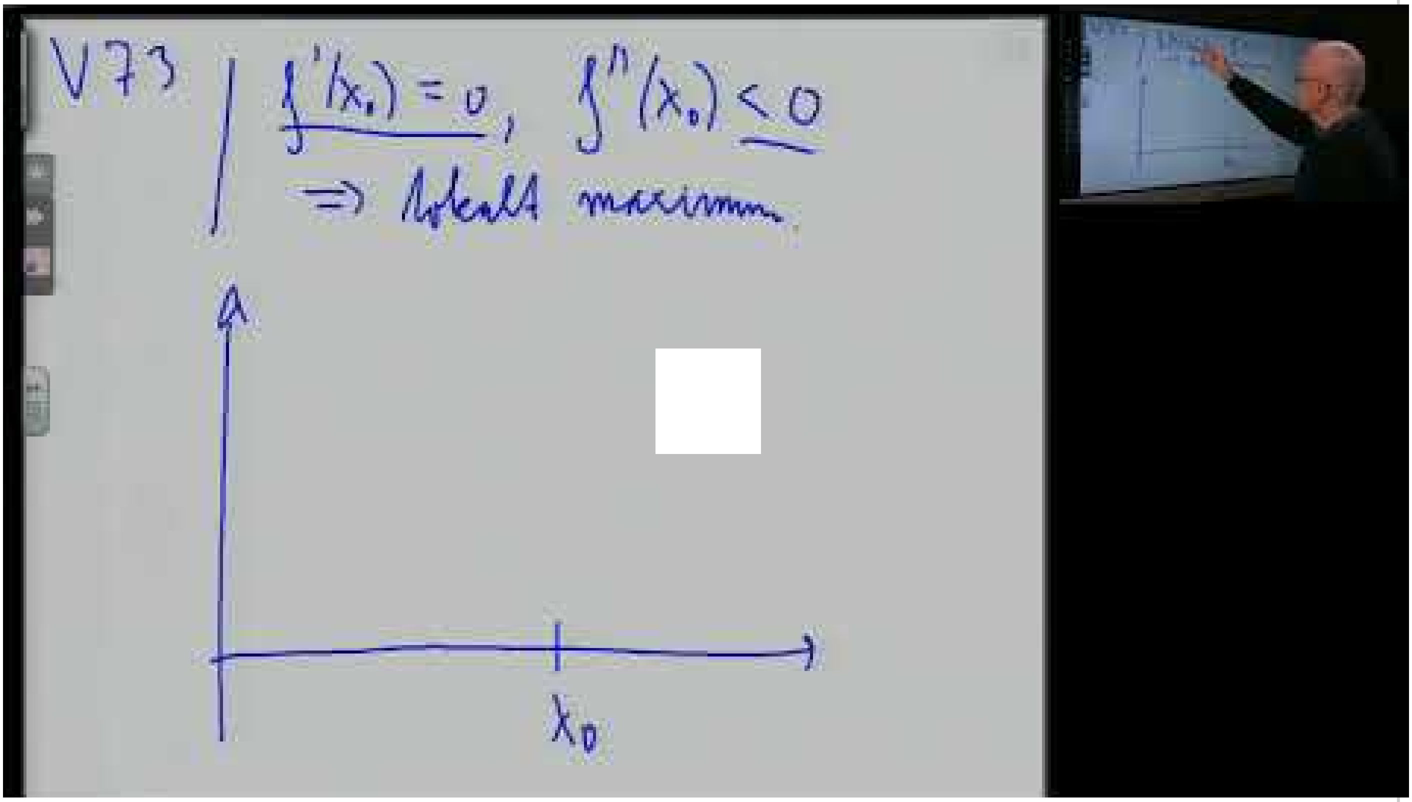
Lad $f(x)$ være en to gange differentiabel funktion af én variabel, og x_0 et punkt hvor $f'(x_0) = 0$.

a. Hvis $f''(x_0) < 0$ er x_0 et lokalt maximumspunkt for f.

b. Hvis $f''(x_0) > 0$ er x_0 et lokalt minimumspunkt for f.

Dette kriterium er nyttigt, selvom det ikke altid afgør sagen; hvis $f''(x_0) = 0$ fortæller Sætning 3.57 os intet.

(Anden ordens kriteriet når der er en variabel).



For en differentiabel funktion f af flere variable har vi den analoge situation, at et punkt x kun kan være et lokalt ekstremumspunkt, hvis punktet er kritisk, ihvertfald hvis det er et indre punkt i definitionsmægden for f, men også at denne betingelse kun er nødvendig; ikke tilstrækkelig. Som for funktioner af én variable findes der en anden ordens test, der nogle gange kan afgøre, om et kritisk punkt er et lokalt maximumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt. For funktioner af to variable siger anden ordens testen følgende:

(Anden ordens testen). Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable og (x_0, y_0) et kritisk punkt for f. Antag at de partielt afledte af anden orden af f eksisterer og er kontinuerte i en omegn af (x_0, y_0).Sæt

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 .$$

a. Hvis $D > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ er (x_0, y_0) et lokalt minimumspunkt for f.

b. Hvis $D > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ er (x_0, y_0) et lokalt maximumspunkt for f.

c. Hvis $D < 0$ er (x_0, y_0) et saddelpunkt for f.

Lad os prøve at bruge anden ordens testen på funktionerne fra Eksempel 3.49 og Eksempel 3.51. For funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ fra Eksempel 3.49 med det kritiske punkt $(0, 0)$ finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

Så $D = 4 > 0$ og vi er i tilfælde (a.) fra Sætning 3.59. Anden ordens testen bekræfter her, hvad vi vidste i forvejen; $(0, 0)$ er et lokalt minimumspunkt.

For funktionen $f(x, y) = xy$ fra Eksempel 3.51 med det kritiske punkt $(0, 0)$ finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Så $D = -1$ og vi er i tilfælde (c.) fra Sætning 3.59. Anden ordens testen bekræfter igen, hvad vi vidste i forvejen; $(0, 0)$ er et saddelpunkt i dette tilfælde.

Hvis vi gik i detaljer med beviset for Sætning 3.59 ville det afsløres, at anden ordenstesten præsenterer en sammenhæng til lineær algbra og matricer. For en matrix

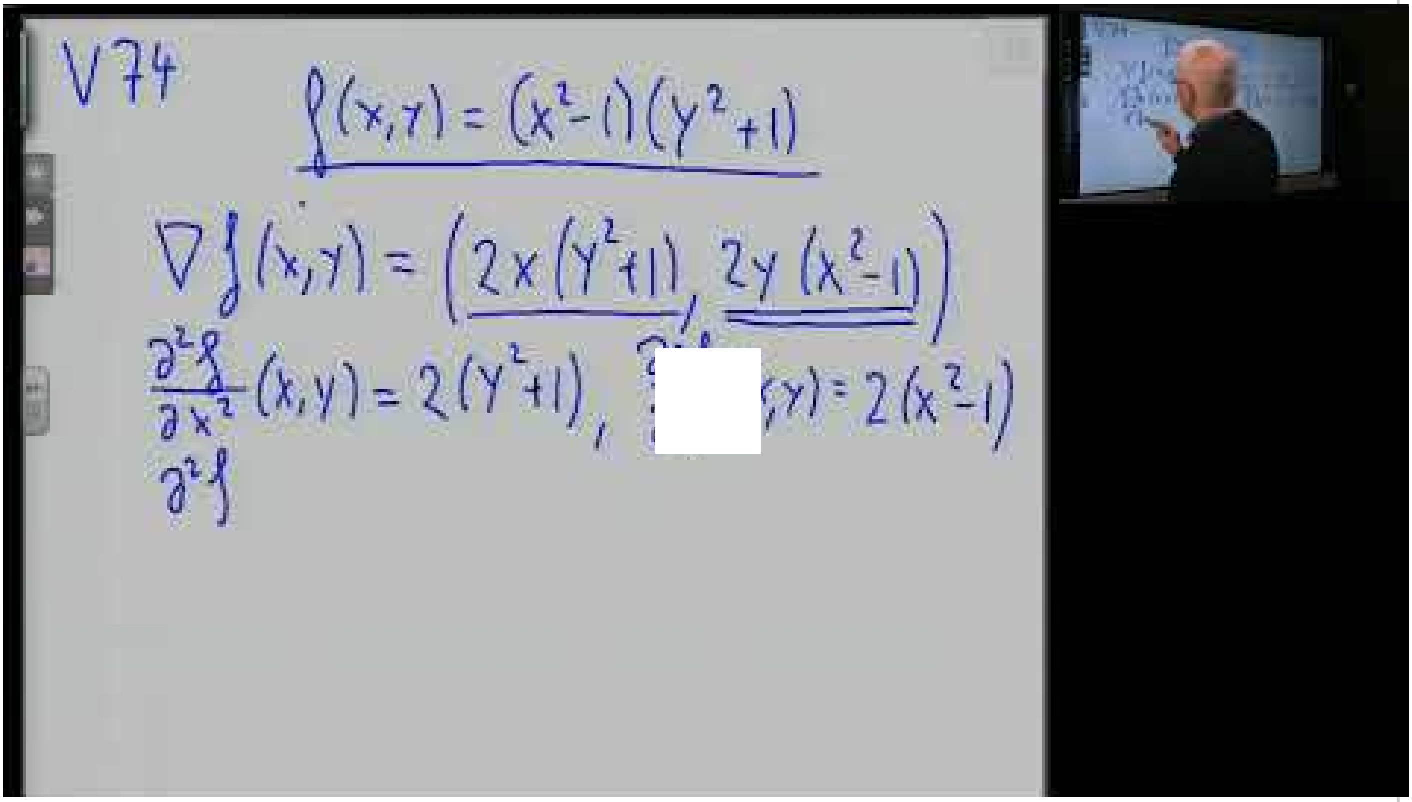
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kaldes tallet $ad - bc$ for *determinanten* af matricen. Tallet D, der er et afgørende input i Sætning 3.59, er derfor determinanten af matricen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Denne matrix kaldes for *Hesse matricen* for f i (x_0, y_0), og det er faktisk den, der erstatter f'' i anden ordens testen for en funktion af én variabel, Sætning 3.27.

(Et eksempel).



Sci2u opgave

3.2.3 Største og mindste værdier på lukkede og begrænsede mængder.

Når man leder efter største og mindste værdier af funktioner, kan man ikke altid være sikker på, at de findes. F.ex. har funktionen $f(x) = e^{-x}$, hverken nogen mindste eller største værdi på den reelle akse. Og funktionen

$$g(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

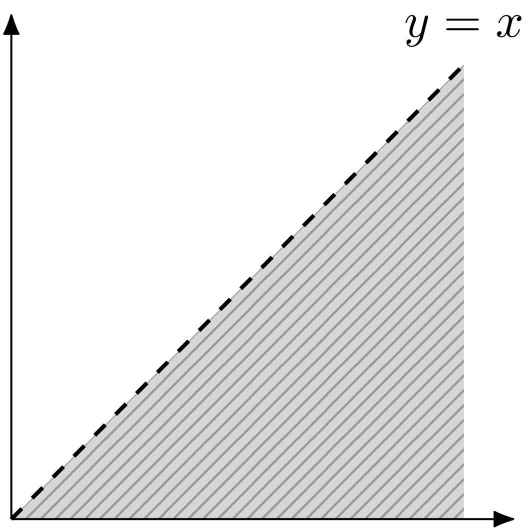
har godt nok en mindste værdi på intervallet $]0,1[= \{t \in \mathrm{R} \,:\, 0 < t < 1\}$, men ingen største værdi. Meningen med dette afsnit er at beskrive funktioner, der altid har en største værdi og en mindste værdi, og beskrive nogle fundamentale metoder til at finde dem.

En delmængde D af R^n er *lukket*, når den indeholder alle sine randpunkter. F.eks. er

$$[0,1] = \{t \in \mathrm{R} \,:\, 0 \le t \le 1\}$$

en lukket delmængde af R. Thi randpunkterne af $[0,1]$ er tallene 0 og 1, som jo er med i mængden $[0,1]$. Som kontrast er mængden $[0,1[$ *ikke* lukket i R, for 1 er et randpunkt, som ikke er med i mængden.

Mængden $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,:\, 0 \le x,\ 0 \le y < x\}$ er ikke lukket i R^2, men $\overline{\mathrm{D}} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,:\, 0 \le x, 0 \le y \le x\}$ er lukket. De to mængder har de samme randpunkter; nemlig alle punkter (x,y) i $\overline{\mathrm{D}}$ hvor $x = 0$, $y = 0$ eller $x = y$. Figuren nedenfor er en tegning af mængden D.



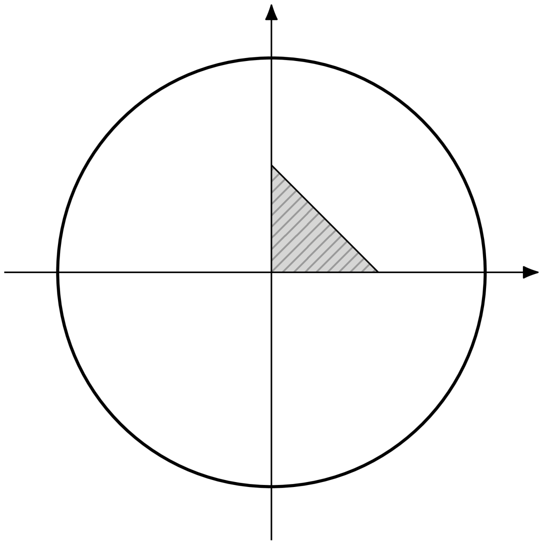
Mængden D.

En delmængde D af R^n er *begrænset,* når den er indeholdt i en (evt. meget stor) kugle. I matematiske symboler er Dbegrænset, når der findes et positivt tal $R > 0$ så

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2} \le R$$

for alle elementer $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i D. Det betyder nemlig at D er indeholdt i kuglen med centrum i $(0,0,\ldots,0)$ og radius R.

Mængden $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,:\, 0 \le x,\ 0 \le y,\ x + y \le 1\}$ er begrænset, men $\mathrm{D}' = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,:\, 0 \le x,\ 0 \le y\}$ er det ikke. Figuren nedenfor illustrerer at D er begrænset; den er indeholdt i en cirkelskive.



Mængden D lagt ind i en cirkelskive for at vise, at den er begrænset.

Vi har indført de to begreber, 'lukket' og 'begrænset', fordi de bruges til at beskrive de definitionsmængder for kontinuerte funktioner, hvor man kan være sikker på, at der findes største og mindste værdier for funktionen. Der gælder nemlig følgende vigtige

Lad $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ være en kontinuert funktion. Antag at $\mathrm{D}(f)$ er lukket og begrænset. Så antager f både en største og en mindste værdi på $\mathrm{D}(f)$. Dvs. der findes punkter M, m i $\mathrm{D}(f)$, der opfylder, at

$$f(m) \le f(x) \le f(M)$$

for alle $x \in \mathrm{D}(f)$.

Informationen i Sætning 3.64 er, at sålænge man holder sig til en kontinuert funktion på en lukket og begrænset mængde, kan man altid være sikker på, at der findes punkter, hvor den antager en største værdi, og punkter hvor den antager en mindste værdi. For en kontinuert funktion, hvis definitionsmængde ikke er både lukket og begrænset, behøver der ikke findes sådanne globale ekstremumspunkter.

Opgave

Afgør for hver af følgende delmængder af R^2 om den er lukket og/eller begrænset.

a. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

b. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

c. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y\}$.

d. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$.

e. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$.

f. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 \le y \le \sin x\}$.

Mht. at finde punkter hvor en kontinuert funktion på en lukket og begrænset mængde antager sin største og mindste værdi, benytter vi følgende sætning, som er en generalisering af Sætning 3.27 til funktioner af flere variable.

Lad $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ være en kontinuert funktion. Antag at $\mathrm{D}(f)$ er lukket og begrænset. Så antager f sin største og mindste værdi blandt følgende punkter:

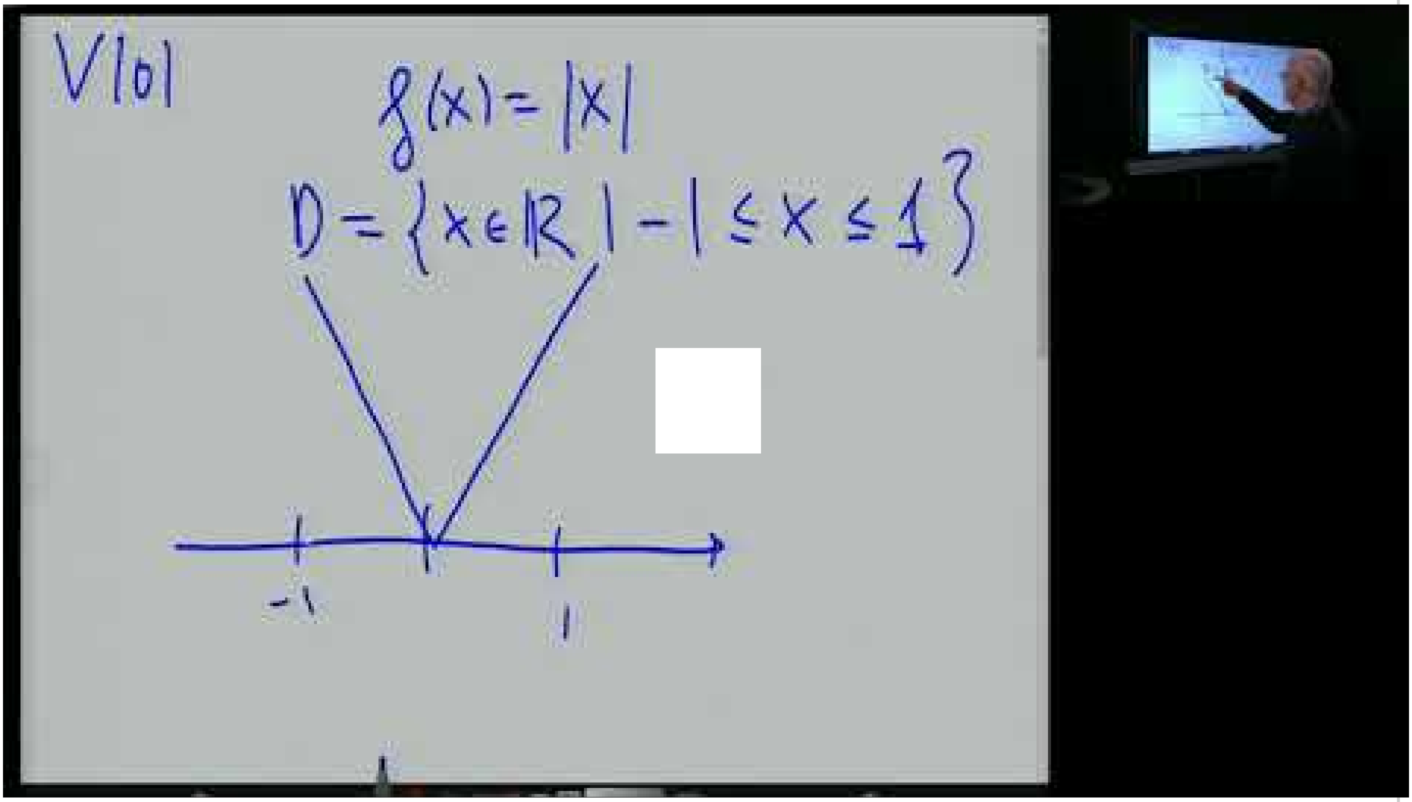
i. Randpunkter i $\mathrm{D}(f)$.

ii. Kritiske punkter, dvs. indre punkter x i $\mathrm{D}(f)$, hvor $\nabla f(x) = 0$.

iii. Punkter, hvor de partielt afledte af f ikke findes.

I mange tilfælde er ingen punkter af type (iii .) i Sætning 3.66, og så skal man altså lede efter de globale ekstremumspunkter for f blandt randpunkterne i D(f) og de kritiske punkter.

(Om at finde største og mindste værdier for kontinuerte funktioner på lukkede og begrænsede mængder).



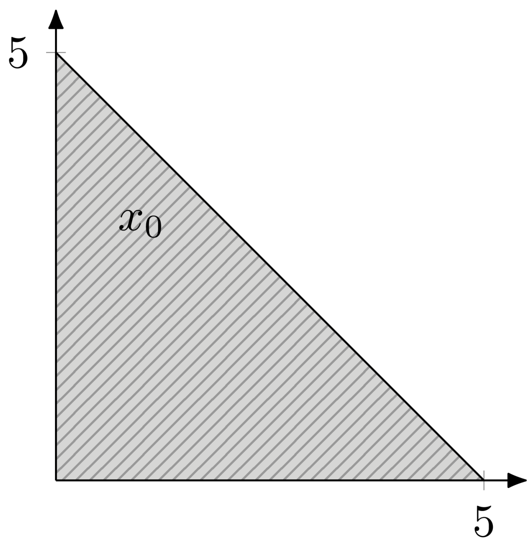
Det følger fra Sætning 3.64, at funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

har en største og mindste værdi på mængden

$$D = \{(x, y) \in R^2 \ : \ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 5\}.$$

Se Figur 3.69.



Mængden D med det kritiske punkt for f.

For at finde den største og den mindste værdi, f antager på D, og de punkter, hvor de antages, undersøger vi punkterne af type (i.), (ii.) og (iii.) i Sætning 3.66.

Type (ii.): For at bestemme de kritiske punkter udregner vi gradienten:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 2y - 6).$$

Så der er ét kritisk punkt $x_0 = (1, 3)$. Vi noterer os at

$$f(1, 3) = 4.$$

Type (iii.): Da de partielt afledede af f eksisterer for alle (x, y) er der ingen punkter af denne type.

Type (i.): Fra Figur 3.69 ser vi, at mængden af randpunkter i D kan deles op i tre stykker:

1. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0, \ 0 \leq y \leq 5\}$,
2. $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0, \ 0 \leq x \leq 5\}$,
3. $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ x + y = 5\}$.

Vi tager dem en af gangen:

(1.):

Når $(x, y) \in D_1$ er

$$f(x, y) = y^2 - 6y + 14 \qquad \textbf{(3.12)}$$

og y ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 3.27 ser vi at funktionen $y^2 - 6y + 14$ antager sin største og mindste værdi på $[0, 5]$ når $y = 0$, $y = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dy}(y^2 - 6y + 14) = 2y - 6$ er nul; dvs. når $y = 3$.Da $f(0, 0) = 14$, $f(0, 5) = 9$ og $f(0, 3) = 5$, ser vi, at f antager sin største værdi på D_1 når $(x, y) = (0, 0)$ og sin mindste værdi på D_1 når $(x, y) = (0, 3)$.

(2.):

Når $(x, y) \in D_2$ er

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 14 \qquad \textbf{(3.13)}$$

og x ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 3.27 ser vi, at funktionen $x^2 - 2x + 14$ antager sin største og mindste værdi på $[0, 5]$ når $x = 0$, $x = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 14) = 2x - 2$ er nul; dvs. når $x = 1$.Da $f(0, 0) = 14$, $f(5, 0) = 29$ og $f(1, 0) = 13$, ser vi, at f antager sin største værdi på D_2 når $(x, y) = (5, 0)$ og sin mindste værdi på D_2 når $(x, y) = (1, 0)$.

(3.):

Når $(x, y) \in D_3$ er $y = 5 - x$ og vi finder, at

$$f(x, y) = 2x^2 - 6x + 9 \qquad \textbf{(3.14)}$$

og x ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 3.27 ser vi at funktionen $2x^2 - 6x + 9$ antager sin største og mindste værdi på $[0, 5]$ når $x = 0$, $x = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dx}(2x^2 - 6x + 9) = 4x - 6$ er nul; dvs. når $x = \frac{3}{2}$.Da $f(0, 5) = 9$, $f(5, 0) = 29$ og $f(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) = \frac{9}{2}$, ser vi at f antager sin største værdi på D_3 når $(x, y) = (5, 0)$ og sin mindste værdi på D_3 når $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

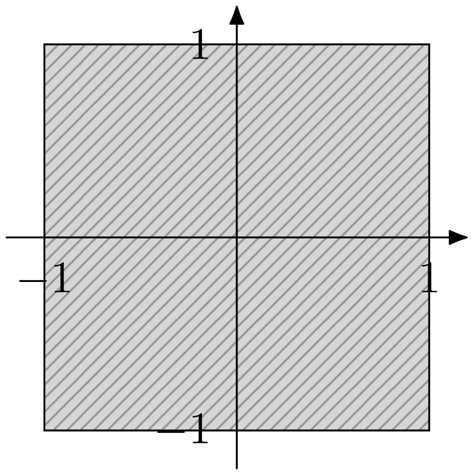
Vi har nu undersøgt alle punkter af de tre typer fra Sætning 3.66, og kan konkludere at den største værdi som f antager på D, er 29, som antages når $(x, y) = (5, 0)$, og den mindste værdi er 4, som antages når $(x, y) = (1, 3)$.

Det følger fra Sætning 3.64, at funktionen

$$f(x, y) = x^2y^2 + y^2$$

har en største og mindste værdi på mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1\}.$$



Mængden D.

For at finde den største og den mindste værdi f, antager på D, og de punkter hvor de antages, undersøger vi punkterne af type (i.), (ii.) og (iii.) i Sætning 3.66.

Type (ii.):

For at bestemme de kritiske punkter udregner vi gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (2xy^2, 2yx^2 + 2y).$$

Bemærk at $\nabla f(x,y) = 0$ når $y = 0$. Hvis $y \neq 0$ er $2yx^2 + 2y = 2y(x^2+1) \neq 0$, så vi ser, at de kritiske punkter for f er punkter hvor $y = 0$. Vi noterer os nu blot, at

α. $f(x,y) = 0$ når (x,y) er et kritisk punkt.

Type (iii.):

Da de partielt afledte af f eksisterer for alle (x,y), er der ingen punkter af denne type.

Type (i.):

Fra Figur 3.71 ser vi, at randen består af mængderne

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq x \leq 1, \; y = -1\}$,
2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq x \leq 1, \; y = 1\}$,
3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq y \leq 1, \; x = -1\}$,
4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq y \leq 1, \; x = 1\}$.

Vi tager dem en af gangen:

(1.):

Når $(x,y) \in D_1$ er

$$f(x,y) = x^2 + 1, \tag{3.15}$$

og x løber mellem -1 og 1. Den største værdi f antager på D_1 er i punkterne $(1,-1)$ og $(-1,-1)$, og

$$f(-1,-1) = f(1,-1) = 2.$$

Den mindste værdi, f antager på D_1, er i punktet $(0,-1)$, hvor

$$f(0,-1) = 1.$$

Dette indser man ved at lave en funktions undersøgelse af (3.15) for $-1 \leq x \leq 1$, f.eks. ved at bruge Sætning 3.27 på funktionen $[-1,1] \ni x \mapsto x^2 + 1$. Dette giver nemlig, at denne funktion antager sin største og mindste værdi for $x = -1$, $x = 1$, som er randpunkterne for $[-1, 1]$, eller hvor den afledte $\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$ er nul; altså for $x = 0$.

(2.):

Når $(x, y) \in D_2$ har vi også, at

$$f(x, y) = x^2 + 1, \qquad \textbf{(3.16)}$$

og vi finder på samme måde, at den største værdi, f antager på D_2, er i punkterne $(1, 1)$ og $(-1, 1)$, hvor

$$f(-1, 1) = f(1, 1) = 2.$$

Den mindste værdi, f antager på D_2, er i punktet $(0, 1)$, hvor

$$f(0, 1) = 1.$$

(3.):

Når $(x, y) \in D_3$ er

$$f(x, y) = 2y^2, \qquad \textbf{(3.17)}$$

og y løber mellem -1 og 1. (3.17) antager sin største værdi på $[-1, 1]$, når $y = 1$ eller $y = -1$, og sin mindste værdi når $y = 0$. På den måde konkluderer vi, at den største værdi f antager på D_3 er i punkterne $(-1, -1)$ og $(-1, 1)$, og

$$f(-1, -1) = f(-1, 1) = 2.$$

Den mindste værdi f antager på D_3 er i punktet $(-1, 0)$, hvor

$$f(-1, 0) = 0.$$

(4.):

Når $(x, y) \in D_4$ har vi også, at

$$f(x, y) = 2y^2, \qquad \textbf{(3.18)}$$

og vi finder derfor på samme måde som ovenfor, at den største værdi, f antager på D_4, er i punkterne $(1, -1)$ og $(1, 1)$, og

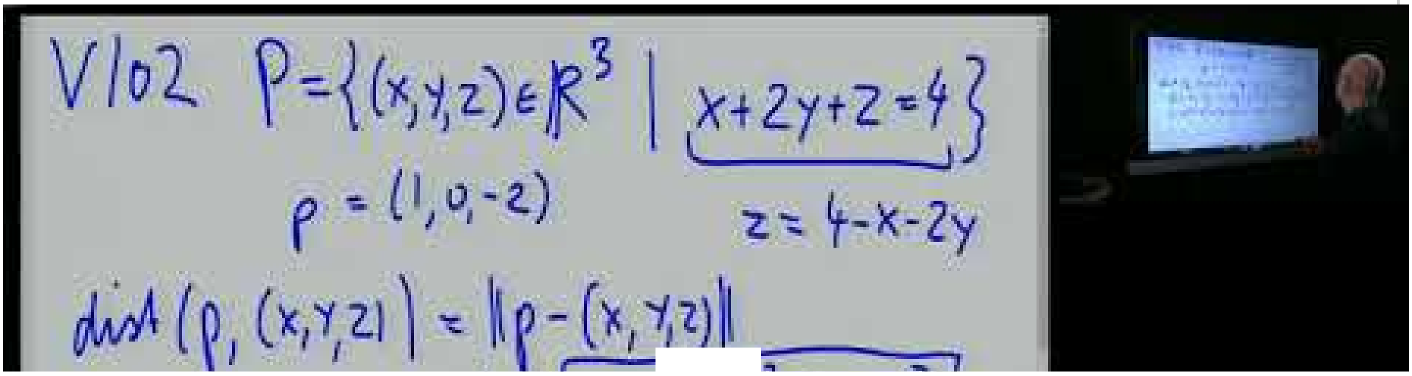
$$f(1, -1) = f(1, 1) = 2.$$

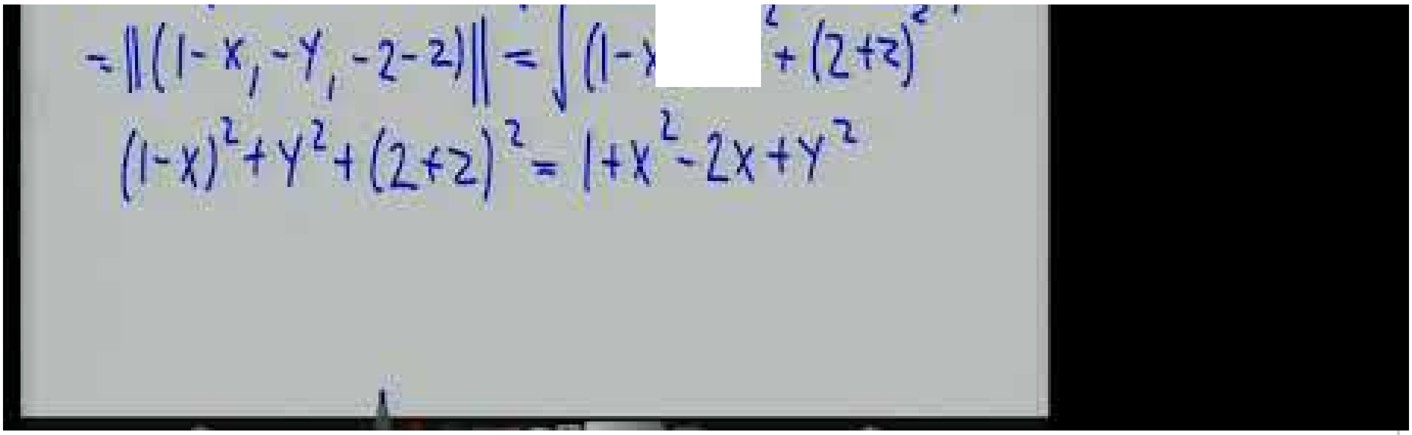
Den mindste værdi, f antager på D_4, er i punktet $(1, 0)$, hvor

$$f(1, 0) = 0.$$

Ved brug af Sætning 3.66 kan vi nu konkludere, at 2 er den største værdi f antager på D, og det sker i hjørnerne $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, og at den mindste værdi f antager på D, er 0, og at den værdi antages i punkterne $(t, 0)$, hvor $t \in [-1, 1]$.

(At finde afstanden til en plan).





Opgave

Find den største og mindste værdi som funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

antager på mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 2\}.$$

Opgave

Find den største og mindste værdi som funktionen

$$f(x, y) = 1 + 4x - 5y$$

antager på mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ 0 \le x, \ 0 \le y, \ 3x + 2y \le 6\}.$$

Opgave

Find den største og mindste værdi som funktionen

$$f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$$

antager på den lukkede mængde D i R^2, der begrænses af trekanten med hjørnerne $(1, 0)$, $(5, 0)$ og $(1, 4)$.

Opgave

i. Gør rede for at funktionen

$$f(x, y) = |x| + y^2$$

antager en største og en mindste værdi på mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

ii. Gør rede for, at den mindste værdi f antager på D, kun antages i punkter af type (iii.) fra Sætning 3.66; altså i punkter hvor gradienten ikke eksisterer.

Opgave

> Find største og mindste værdien af funktionen
>
> $$f(t) = t^4 - \cos t$$
>
> på intervallet $[-100, 100]$.

3.3 Lineær regression

Mange ting i denne verden afhænger lineært af hinanden − eller ihvertfald næsten. Vi nævner i flæng

α. tryk og temperatur i en ideal gas,

β. opløst mængde og temperatur i en ammoniumnitrat opløsning,

γ. hastighed og tid i et frit fald,

δ. uddannelseslængde og årsindtægt,

ε. blodtryk og alder,

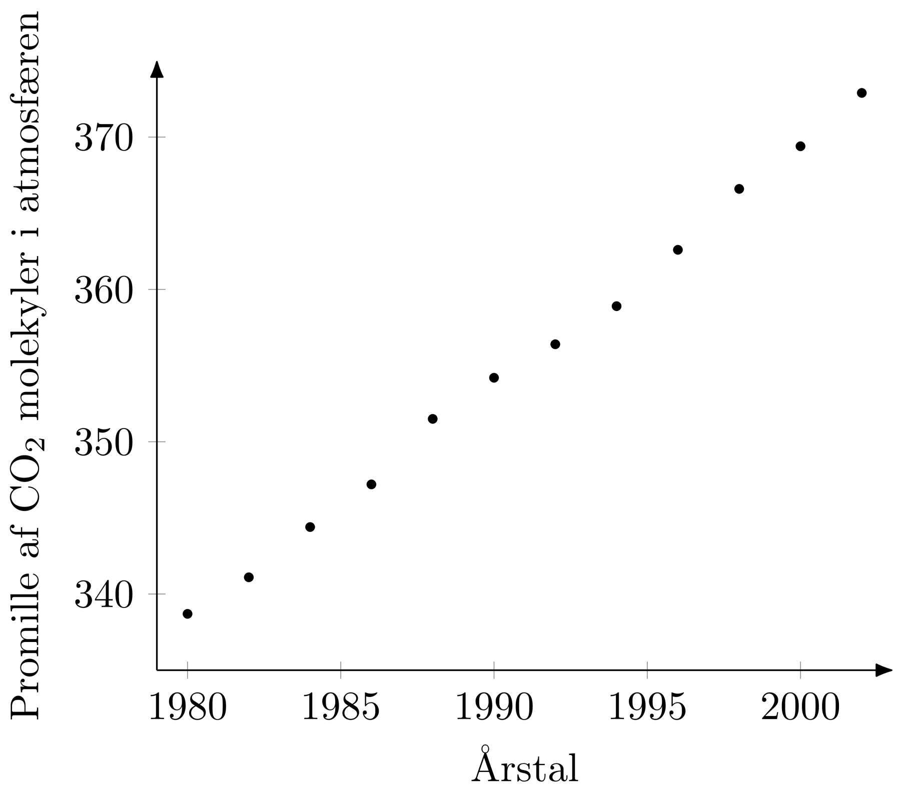
ζ. blodsukkerniveau og sammentrækningsevne for venstre hjertekammer hos diabetikere.

Eller indholdet af CO_2 i atmosfæren og tid. Ihvertfald har man målt de tal for andelen i promille af CO_2 molekyler i atmosfæren, der fremgår af tabellen i Figur 3.78.

1980	338.7
1982	341.1
1984	344.4
1986	347.2
1988	351.5
1990	354.2
1992	356.4
1994	358.9
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4
2002	372.9

Måle data - årstal og CO_2 koncentration i atmosfæren

Hvis man lægger data fra tabellen i Figur 3.78 ind i et koordinat system (Figur 3.79), f.eks. med årstallene på x-aksen, og CO_2 koncentrationen på y-aksen, får man straks en mistanke om en lineær sammenhæng. Men punkterne ligger ikke *præcist* på en ret linie, så det er passende at spørge, hvilken ret linie der er tættest på at matche de anførte data. Selvfølgelig er det ikke helt klart, hvad der menes med 'tættest på' og 'matche', men der er en meget udbredt og generelt accepteret metode til at afgøre dette, og den kaldes *mindste kvadraters metode.*



Plot af data fra tabellen i Figur 3.78.

At y afhænger lineært af x betyder, at der findes tal $a, b \in \mathrm{R}$ så

$$y = ax + b. \tag{3.19}$$

Hvis tallene fra tabellen i Figur 3.78 skulle ligge på linien (3.19) skulle a og b opfylde, at

$$\begin{aligned} &338.7 = a \cdot 1980 + b; \quad 341.1 = a \cdot 1982 + b; \quad 344.4 = a \cdot 1984 + b; \\ &347.2 = a \cdot 1986 + b; \quad 351.5 = a \cdot 1988 + b; \quad 354.2 = a \cdot 1990 + b; \\ &356.4 = a \cdot 1992 + b; \quad 358.9 = a \cdot 1994 + b; \quad 362.6 = a \cdot 1996 + b; \\ &366.6 = a \cdot 1998 + b; \quad 369.4 = a \cdot 2000 + b; \quad 372.9 = a \cdot 2002 + b. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Det er der ingen tal a, b der opfylder. Så det bedste man kan gøre, er at forsøge at vælge a og b så afstanden bliver så lille som muligt mellem 338.7 og $a \cdot 1980 + b$; mellem 341.1 og $a \cdot 1982 + b$; mellem 344.4 og $a \cdot 1984 + b$ osv. Det er imidlertid ikke så ligetil; man kan godt vælge a og b så $338.7 = a \cdot 1980 + b$ og $341.1 = a \cdot 1982 + b$, men så bliver afstanden mellem (f.eks.) 362.6 og $a \cdot 1996 + b$ ikke den samme som hvis man vælger a og b så $338.7 = a \cdot 1980 + b$ og $372.9 = a \cdot 2002 + b$. Så hvad skal man gøre?

Ideen er, at man betragter de målte værdier af CO_2 koncentrationen som et element $\bar{x}$ i R^{12} :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 338.7 \\ 341.1 \\ 344.4 \\ 347.2 \\ 351.5 \\ 354.2 \\ 356.4 \\ 358.9 \\ 362.6 \\ 366.6 \\ 369.4 \\ 372.9 \end{pmatrix}$$

og sammenligner med den vektor $\bar{y}$ i R^{12}, der fremkommer fra højresiderne in (3.20):

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} a \cdot 1980 + b \\ a \cdot 1982 + b \\ a \cdot 1984 + b \\ a \cdot 1986 + b \\ a \cdot 1988 + b \\ a \cdot 1990 + b \\ a \cdot 1992 + b \\ a \cdot 1994 + b \\ a \cdot 1996 + b \\ a \cdot 1998 + b \\ a \cdot 2000 + b \\ a \cdot 2002 + b \end{pmatrix}.$$

Man vil så gerne vælge a og b så afstanden mellem $\bar{x}$ og $\bar{y}$ bliver så lille som muligt. På den måde tager man nemlig lige meget hensyn til alle data. Afstanden mellem de to vektorer er kvadratroden af summen

$$\begin{aligned} &(338.7 - a \cdot 1980 - b)^2 + (341.1 - a \cdot 1982 - b)^2 + (344.4 - a \cdot 1984 - b)^2 \\ &\quad + (347.2 - a \cdot 1986 - b)^2 + (351.5 - a \cdot 1988 - b)^2 + (354.2 - a \cdot 1990 - b)^2 \\ &\quad + (356.4 - a \cdot 1992 - b)^2 + (358.9 - a \cdot 1994 - b)^2 + (362.6 - a \cdot 1996 - b)^2 \\ &\quad + (366.6 - a \cdot 1998 - b)^2 + (369.4 - a \cdot 2000 - b)^2 + (372.9 - a \cdot 2002 - b)^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Vi søger derfor a og b, så (3.21) bliver så lille som muligt. Som vi skal gøre rede for, følger det fra matematikken i afsnit 3.2 at der findes et sådant par (a, b), og at dette par er entydigt bestemt. Dermed opnår vi altså, at der er præcist en linie (3.19), som er den, der bedst matcher dataene fra tabellen i Figur 3.78. Denne metode til at finde den rette linie, der bedst matcher nogle måle data, hedder *mindste kvadraters metode,* fordi leddene i (3.21) er kvadrater.

Selvom forfatteren faktisk er meget interesseret i (læs: bekymret over) koncentrationen af CO_2 i atmosfæren, vil vi nu beskrive mindste kvadraters metode, og den bagved liggende matematik i et mere generelt (og dermed abstrakt) setup. På den måde opnår vi netop en indsigt og en metode, der omfatter langt flere situationer, inkl. fx dem der er nævnt i starten af dette afsnit.

Lad (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), $\ldots$, (u_n, v_n) være n elementer i R^2, repræsenterende n punkter i et koordinatsystem. For at finde den linie, som kommer tættest på at være en linie, som punkterne ligger på, ønsker vi at bestemme et talpar $(a, b) \in \mathrm{R}^2$, som gør

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - au_i - b)^2$$

mindst mulig. Vi indfører til det formål funktionen $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ ved

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} (v_i - xu_i - y)^2 \\ &= (v_1 - xu_1 - y)^2 + (v_2 - xu_2 - y)^2 + \ldots + (v_n - xu_n - y)^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Vi søger at finde det punkt $(a, b) \in \mathrm{R}^2$, hvor $f(a, b)$ er mindst mulig. Til det formål finder vi de kritiske punkter for f : Da

$$\nabla f(x, y) = (-2 \sum_{i=1}^{n} (v_i - xu_i - y)u_i, -2 \sum_{i=1}^{n} (v_i - xu_i - y)),$$

ser vi, at de kritiske punkter er er de talpar (x, y) som opfylder, at

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (v_i - xu_i - y)u_i = (\sum_{i=1}^{n} v_i u_i) - x(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) - y(\sum_{i=1}^{n} u_i) \tag{3.23}$$

og

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (v_i - xu_i - y) = (\sum_{i=1}^{n} v_i) - x(\sum_{i=1}^{n} u_i) - ny. \tag{3.24}$$

Forudsætter man at

$$n(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) \neq (\sum_{i=1}^{n} u_i)^2, \tag{3.25}$$

finder man ved løsning af (3.23) og (3.24) at det eneste kritiske punkt er når $(x, y) = (a, b)$, hvor

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} v_i u_i - (\sum_{i=1}^{n} v_i)(\sum_{i=1}^{n} u_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} u_i)^2}, \tag{3.26}$$

og

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} v_i)(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} v_i u_i)(\sum_{i=1}^{n} u_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} u_i)^2}. \tag{3.27}$$

Ved brug af Sætning 3.66 kan man vise, at talparret (a, b) givet ved (3.26) og (3.27) er det punkt, hvor funktionen (3.22) antager sin mindste værdi på R^2. Ligningen for den linie, som kommer tættest på at være en linie gennem punkterne (u_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, har altså ligningen $y = ax + b$, hvor a er givet ved (3.26), og b er givet ved (3.27).

For at nå frem til (3.26) og (3.27) forudsatte vi, at $n(\sum_{i=1}^{n} u_i^2)$ ikke var lig med $(\sum_{i=1}^{n} u_i)^2$. Hvis disse to tal er ens giver de to formler ingen mening, da nævneren så er nul. Men man kan vise, at de to tal kun er ens når $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$, og så ligger punkterne $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ jo allerede på en ret linie. Betingelsen (3.25) repræsenterer altså ikke nogen virkelig indskrænkning.

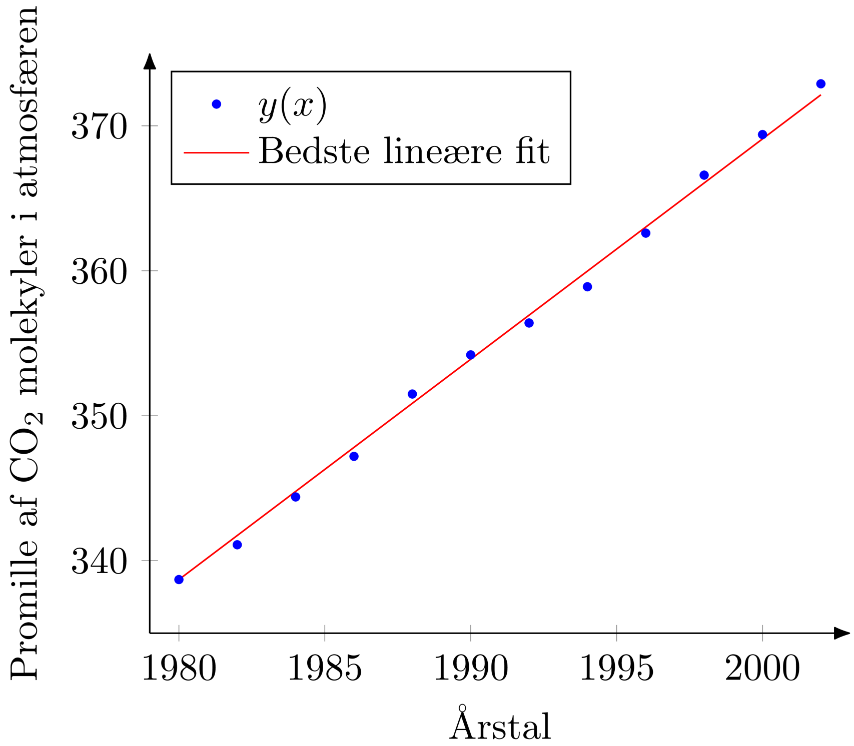
Opgave

Antag vi har måledataene nedenfor. Find ved mindste kvadraters metode den bedste rette linie $y = ax + b$, der passer til disse data, og giv et bud på hvad y er når $x = 5$.

x	y
0	2.10
1	1.92
2	1.84
3	1.71
4	1.64

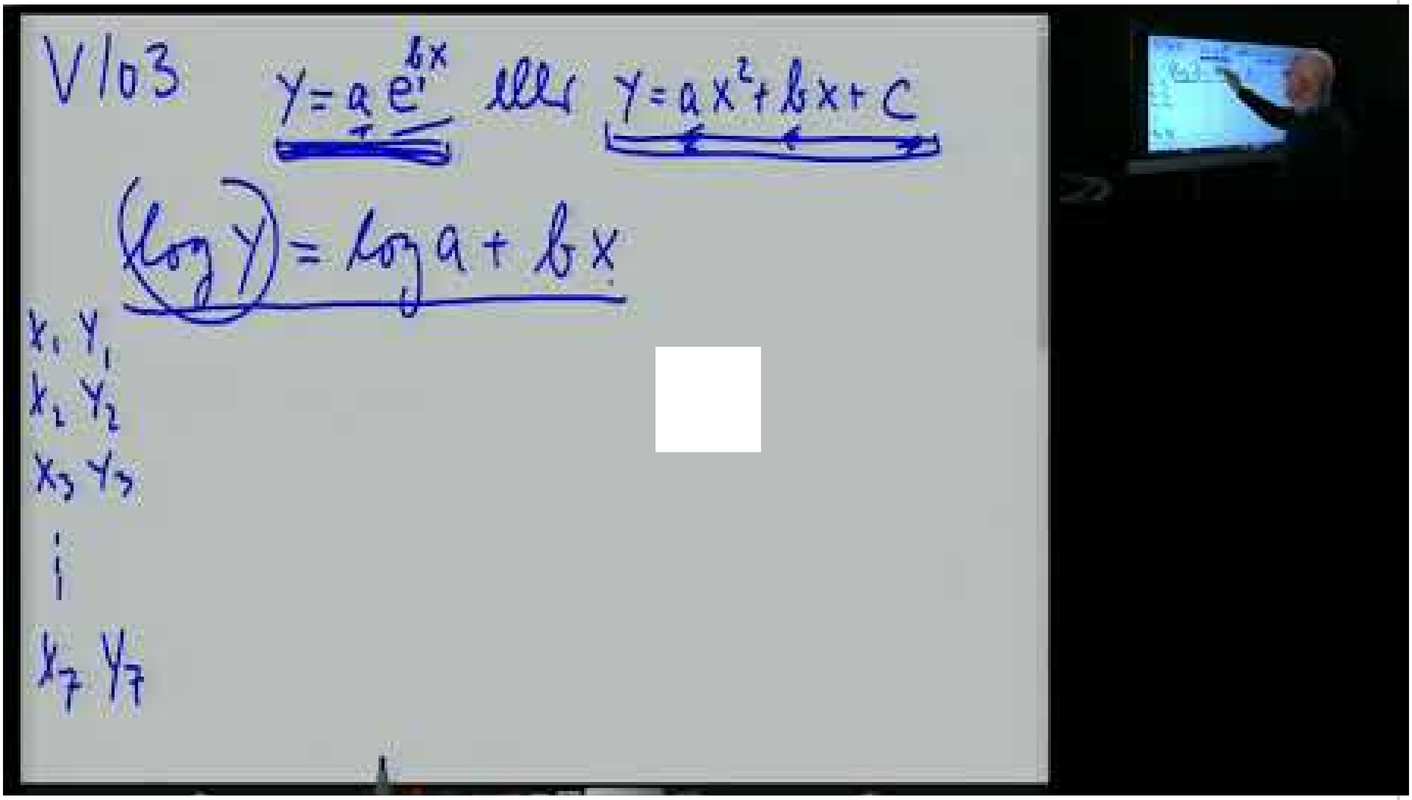
Opgave

Giv et bud på en lineær sammenhæng mellem tiden og koncentrationen af CO_2 i atmosfæren, jvf. tabellen i Figur 3.78, se figuren nedenfor.



Figur 3.79 med bedste lineære fit indtegnet.

(Mindste kvadraters metode for ikke-lineær afhængighed).

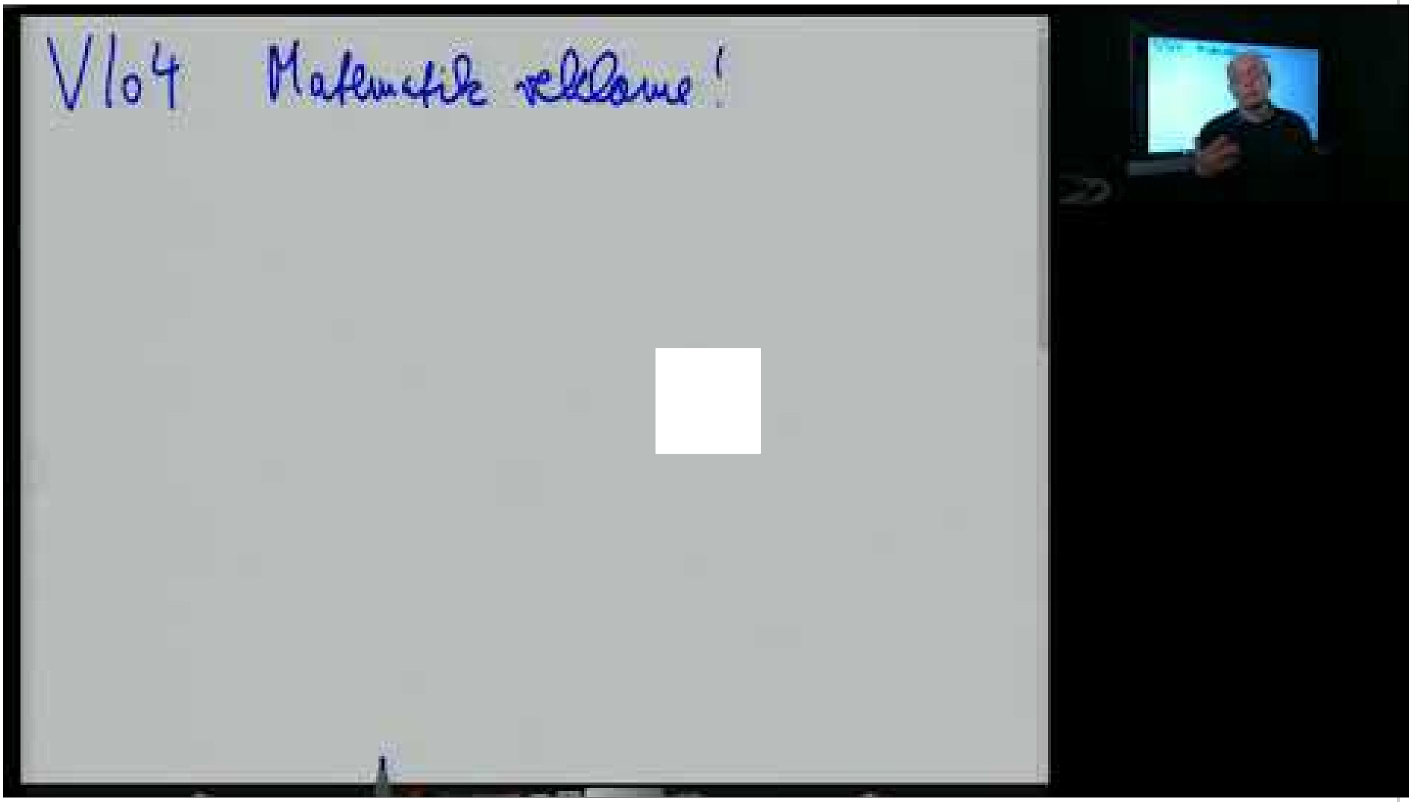


Opgave

Måledata i tabellen nedenfor giver mistanke om en sammenhæng mellem x og y af formen $y = ae^{bx}$. Brug mindste kvadraters metode til at bestemme de bedste bud på værdierne a og b.

x	y
-1	0.4
0	1.1
0.5	1.4
1	2.1
2	3.9

(Matematik reklame).



Opgave

Udled formlerne (3.26) og (3.27) fra (3.24) og (3.25).