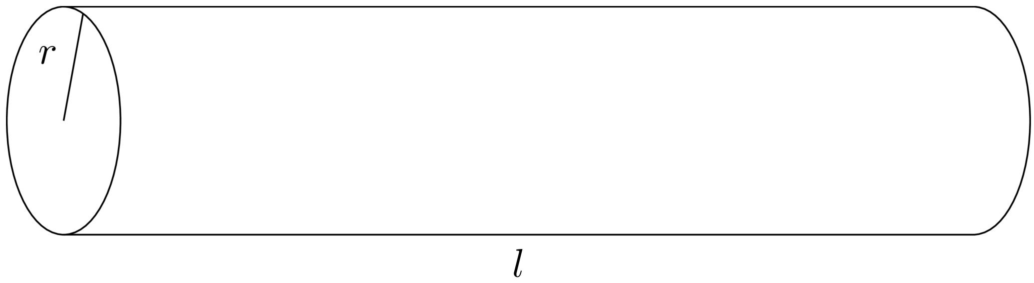
2 Differentiation med to og flere variable

2.1 Terminologi og notation

Meget få ting i denne verden afhænger kun af én ting. Så når funktioner bruges til at beskrive fænomener af forskellig slags, er det nødvendigt at tillade, at funktionerne kan afhænge af flere variable. F.eks. er rumfanget af en cylinder en funktion af både radius og længden af cylinderen.



En cylinder med længde l or radius r.

Hvis r betegner radius af cylinderen, og l længden af den, er rumfanget V givet ved formlen

$$V = \pi r^2 l. \tag{2.1}$$

Det forhold, at V afhænger af både r og l kan udtrykkes i notationen ved, at rumfanget V skrives

$$V(r, l).$$

For at kunne generalisere opfatter vi (2.1) som en forskrift, der fastlægger værdien af $V(r, l)$ ud fra r og l.

> En funktion $f(x, y)$ af to variable x og y er en forskrift, der fastlægger værdien $f(x, y)$, når tal-parret (x, y) er kendt.

Rumfanget af en cylinder definerer funktionen $f(x, y)$ af to variable ved forskriften

$$f(x, y) = \pi x^2 y,$$

når vi lader x spille rollen som radius, og y rollen som længde.

Hvis vi er interesserede i rumfanget af en kasse i stedet for en cylinder, er formlen for rumfanget V givet ved formlen

$$V = hlb$$

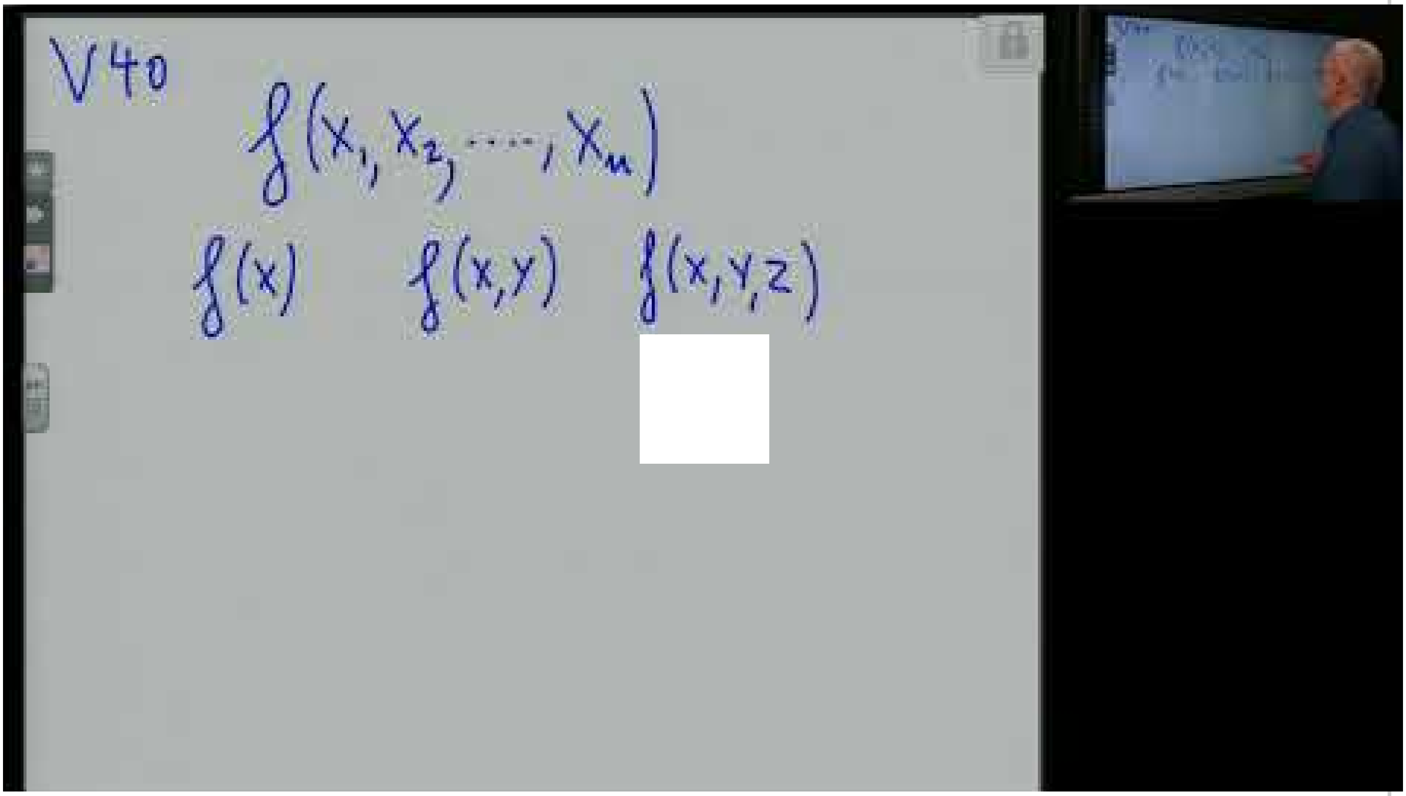
hvor h, l og b betegner højde, længde og bredde af kassen, henholdsvis. I dette tilfælde får vi brug for en funktion $f(x, y, z)$, der afhænger af de tre tal x, y, z. Forskriften for funktionen bliver nu

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Som læseren utvivlsomt kan forestille sig, er der andre størrelser og fænomener som det kræver kendskab til 4, 5 eller flere tal for at få fastlagt. Dette leder til flg. udvidelse af Definition 2.1:

> Lad $n \in \mathrm{N}$ være et naturligt tal. En funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ af $n$variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en forskrift, der fastlægger værdien $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ud fra de $n$tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(Om notationen for funktioner af flere variable).



Rumfanget af en kasse er altså en funktion af 3 variable, mens rumfanget af en cylinder er en funktion af (kun) 2 variable.

Ligesom med funktioner af én variabel, er det ikke sikkert at funktionen er defineret for alle værdier af de variable. F.eks. giver udtrykket

$$f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$$

kun mening når $x^2 + y^2 < 1$. Og selvom et matematisk udtryk som for eksempel

$$f(x, y) = \pi x^2 y$$

giver mening for alle talpar (x, y), kan der være god grund til kun at ville tillade bestemte værdier af x og y. F.eks. når $\pi x^2 y$ repræsenterer rumfanget af en cylinder, hvor x er radius og y er længden, er det naturligt kun at tillade positive værdier af x og y; altså $x > 0$ og $y > 0$.

De talpar (x, y) for hvilke vi kan og vil definere funktionen $f(x, y)$, kalder vi for *definitionsmængden* for funktionen f, og vi betegner den ved $\mathrm{D}(f)$. Og mere generelt er definitionsmængden for en funktion $f(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ af n variable den mængde af n-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hvor vi kan og vil betragte de tilhørende funktionsværdier $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Udtrykket

$$f(x, y, z) = xyz \tag{2.2}$$

fastlægger en funktion f af de tre variable x, y, z. Fra et matematisk synspunkt er der ikke spor i vejen for, at vi som definitionsmængde bruger R^3; rummet at alle tripler (x, y, z), hvor x, y, z er reelle tal. Men hvis $f(x, y, z)$ skal repræsentere rumfanget af en kasse med højde, bredde og længde givet ved x, y og z, hhv., er det mest naturlige at forlange, at x, y og z alle er positive, og så lade definitionsmængden $\mathrm{D}(f)$ være mængden

$$\mathrm{D}(f) = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \ : \ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

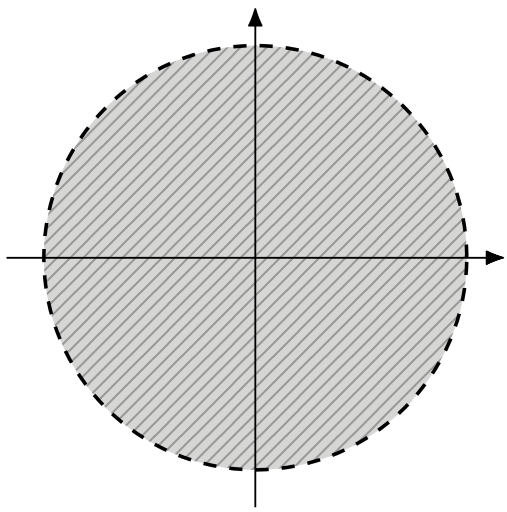
For funktionen

$$f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2), \tag{2.3}$$

har vi ikke tilbudt nogen praktisk fortolkning, og det er derfor naturligt at vælge definitionsmængden så stor som mulig. Og (2.3) giver mening når $1 - x^2 - y^2 > 0$, så vi får definitionsmængden

$$\mathrm{D}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

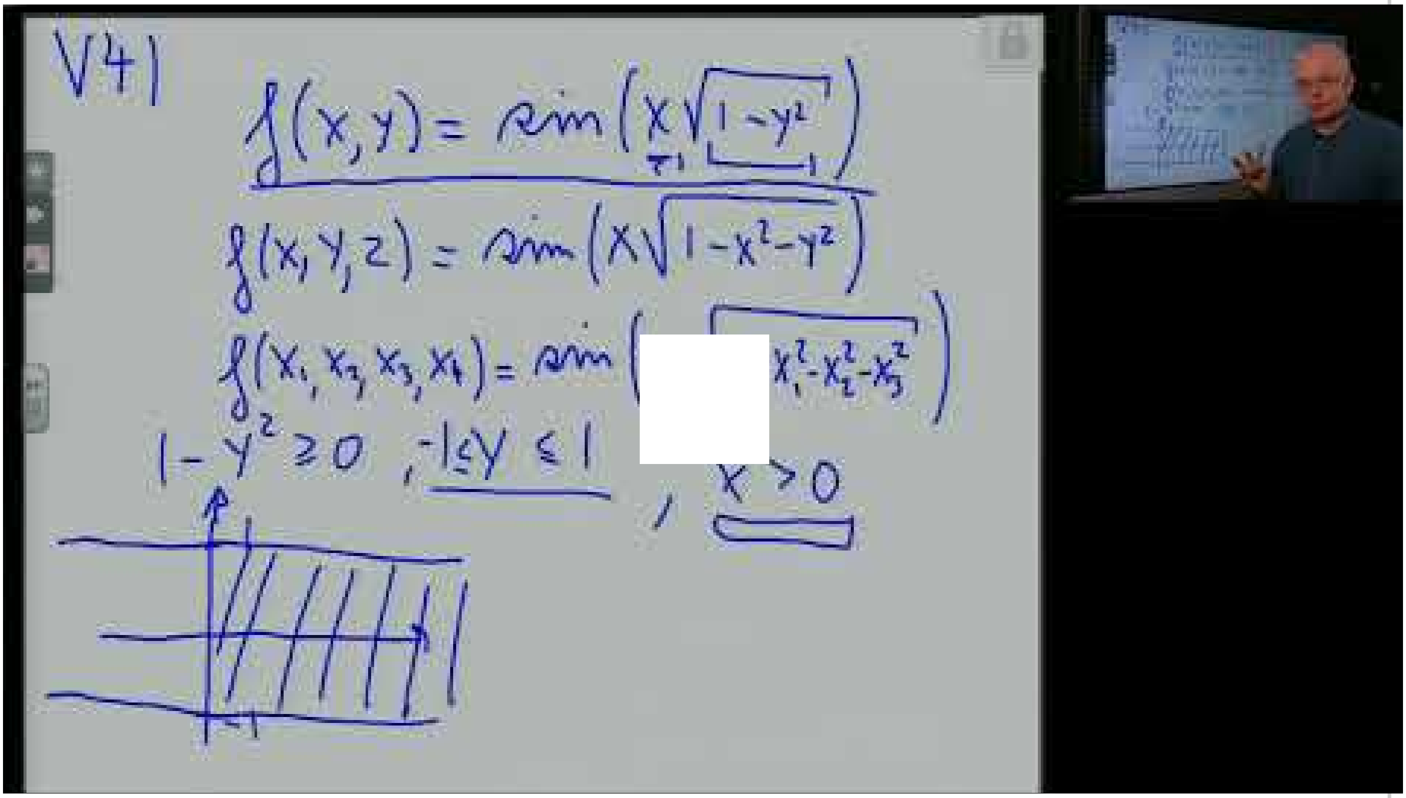
Det er mængden af koordinater (x, y) for punkterne i den åbne cirkelskive med centrum i $(0, 0)$ og radius 1. Se Figur 2.6.



$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$$

Definitionsmængden for funktionen (2.3).

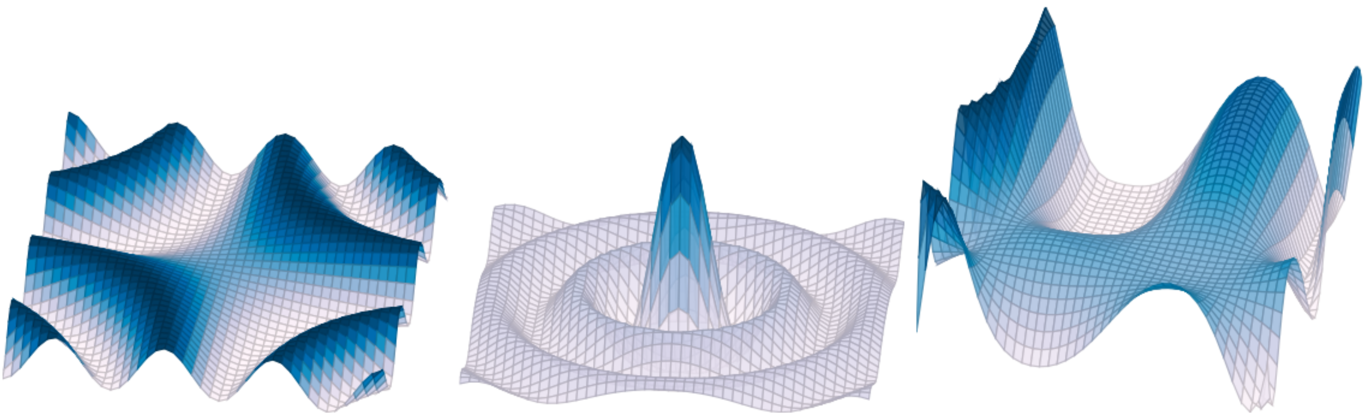
(Om definitionsmængder).



Ligesom for funktioner af én variabel, kan man indføre *grafen* $G(f)$ for en funktion af to eller flere variable. Husk at grafen for en funktionen $f(x)$ af én reel variabel x består af talparrene $(x, f(x))$ − omend de fleste ved grafen for f forstår den tegning, der fremkommer, når disse punkter puttes ind i et retvinklet koordinat-system. For en funktion $f(x, y)$ af to variable med definitionsmængden $D(f)$ er grafen $G(f)$ for f de tripler af tal (x, y, z) hvor $(x, y) \in D(f)$ og $z = f(x, y)$. I matematisk notation,

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D(f)\}.$$

Ligesom for funktioner af én variabel er grafen for en funktion af to variable noget, man kan tegne, omend det er sværere, fordi grafen er en delmængde af rummet $\mathbb{R}^3$. Men med et tilpas talent for at tegne, eller ved brug af et passende computerprogram, kan man mange gange fremskaffe sig et billede af grafen, eller ihvertfald dele af grafen.



Nogle eksempler på grafer af funktioner af to variable.

For funktioner af tre eller flere variable kan man stadigt definere grafen: For en funktion af de n variable, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, defineres grafen til at være

$$\mathrm{G}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots x_n)) \in \mathrm{R}^{n+1} \ : \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{D}(f)\}.$$

Her betegner R^{n+1} rummet af $n+1$-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ af tal, og $\mathrm{G}(f)$ er mængden af elementer i R^{n+1}, hvor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ligger i f's definitionsmængde $\mathrm{D}(f)$ og $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Man kan arbejde symbolskt med grafen, mere eller mindre som man kan med funktioner af én eller to variable, men når $n \geq 3$ kan man ikke visualisere grafen, da den ligger i et rum med 4 eller flere dimensioner. Figur 2.8 viser eksempler på hvordan (dele af) grafen for en funktion af to variable kan se ud.

Selv for funktioner af to variable, hvor man i princippet (og ved brug af computer) kan skaffe sig et billede af grafen for funktionen man er interesseret i, er det ofte vanskeligt at skaffe sig tilstrækkelig detaljeret information alene ved at kikke på grafen. Nogle gange er det bedre at bruge andre redskaber til at visualisere funktionen. Et sådant redskab er *niveau kurver*. Lad

$$f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$$

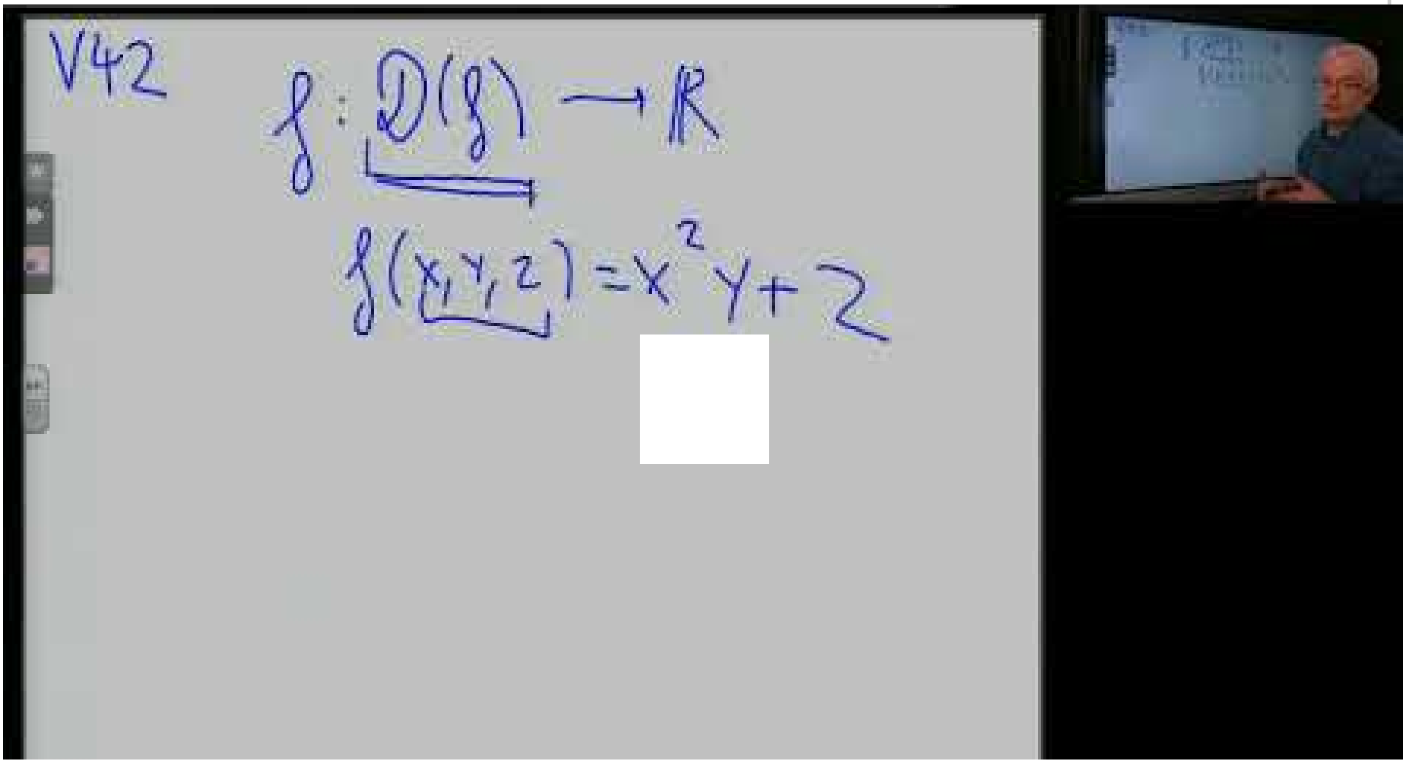
være en funktion af de to variable x og y. Det kan f.eks. være funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\ , \tag{2.4}$$

som vi kan definere når $x^2 + y^2 \leq 9$. Altså

$$\mathrm{D}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

(Om matematisk notation i forbindelse med generelle funktioner).



For et tal $C \in \mathrm{R}$ er den tilsvarende *niveau kurve* for funktionen f de elementer i f's definitionsmængde, $\mathrm{D}(f)$, hvor f tager værdien C. I symboler er det mængden

$$\{(x,y) \in \mathrm{D}(f) \,:\, f(x,y) = C\}.$$

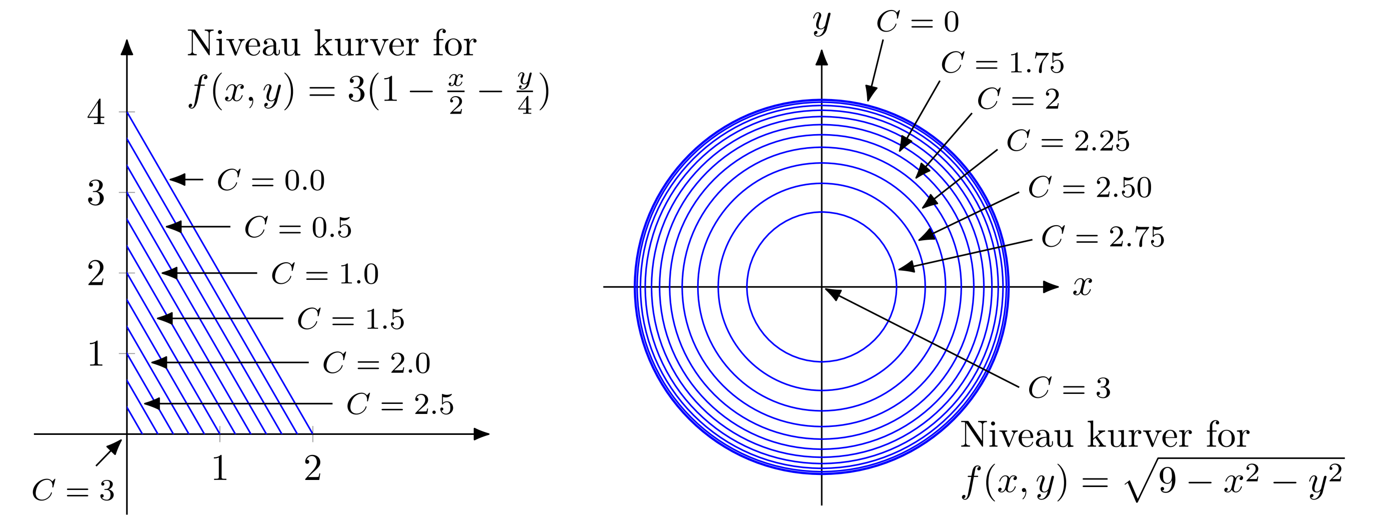
Så for funktionen (2.4) er det mængden

$$\{(x,y) \in \mathrm{D}(f) \,:\, \sqrt{9 - x^2 - y^2} = C\}.$$

Når $C = 2$ er det mængden

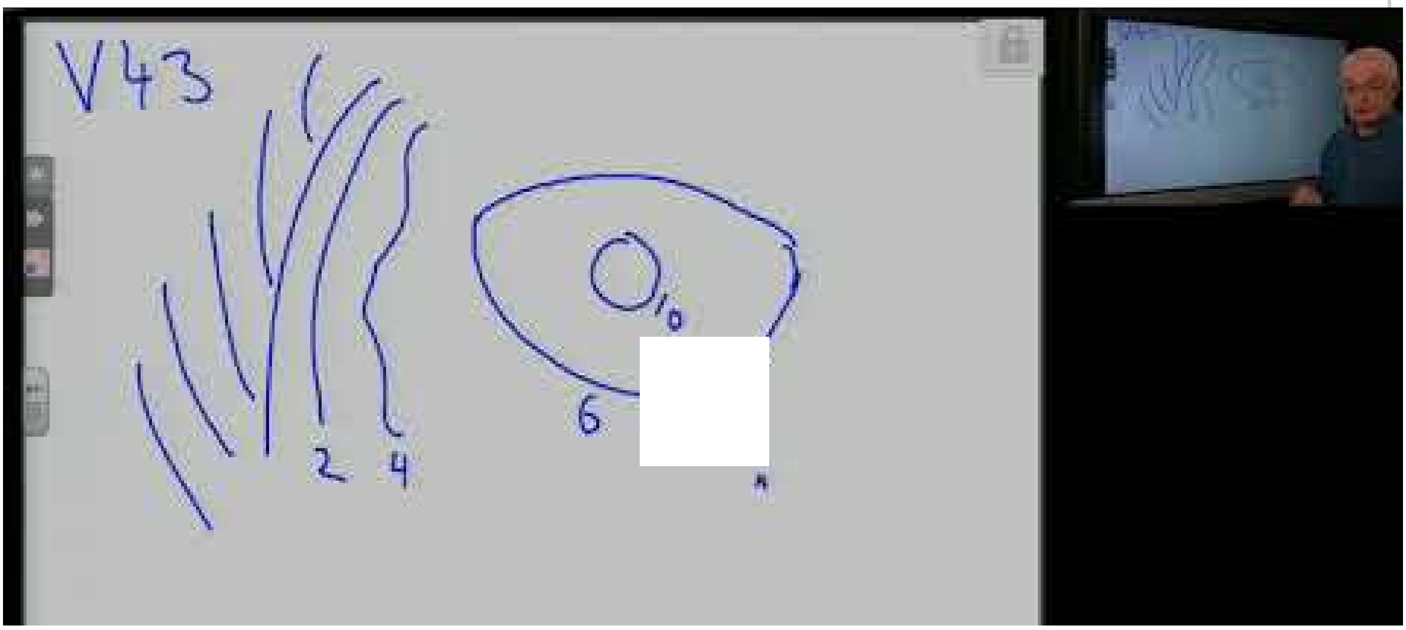
$$\{(x,y) \in \mathrm{D}(f) \,:\, \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2\}.$$

Da $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2$ hvis og kun hvis $x^2 + y^2 = 5$, består niveau kurven i dette tilfælde af punkterne på cirklen i planen med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$.



Eksempler på niveaukurver.

(Om højde- og dybde kurver).



Et billede af niveau kurverne for en funktion kaldes nogle gange for et *kontur plot*.

For en funktion $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ består f's *værdimængde* eller *billedmængde* af de tal som f rammer. Mere præcist ligger et reelt tal t i værdimængden for f, når der findes et element $z \in \mathrm{D}(f)$ så $t = f(z)$. F.eks. er værdimængden for funktionen (2.4) det lukkede interval mellem 0og 3; i matematisk notation $[0, 3]$. Og for funktionen $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ givet ved

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

er værdimængden det halv-åbne interval

$$]0, 1] = \{t \in \mathrm{R} \,:\, 0 < t \leq 1\}.$$

Opgave

Find værdimængden for følgende funktioner:

a. $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ givet ved, at $f(x, y) = x - y$.

b. $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ givet ved, at $f(x, y) = x^2 + y^2$.

c. $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ givet ved, at $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, hvor $\mathrm{D}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \,:\, (x, y) \neq (0, 0)\}$.

d. $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ givet ved, at $f(x, y) = \frac{7}{x^2+y^2+1}$.

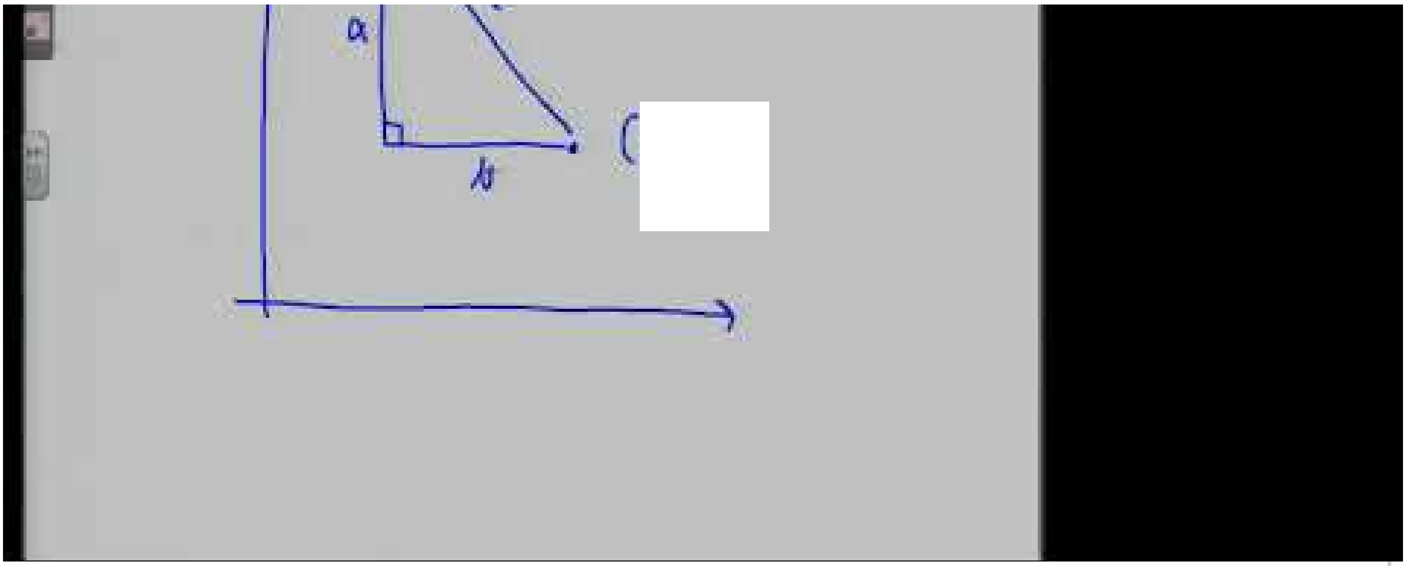
2.2 Grænseværdi og kontinuitet

2.2.1 Grænseværdier for funktioner af to variable

I planen, udstyret med et retvinklet koordinat-system, er punkter repæsenteret ved talpar (x, y),hvor x er første koordinaten, og y er anden koordinaten. Afstanden mellem to punkter (x, y) og (x', y') er tallet

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\ . \tag{2.5}$$

(Om afstanden mellem punkter i planen).



Ved hjælp af afstandsbegrebet kan vi overføre grænseværdi begrebet for funktioner af én variabel til funktioner af to variable:

Når (x_0, y_0) er et punkt i planen, og a er et reelt tal, siger vi, at *f har grænseværdien a for (x, y) gående mod* (x_0, y_0), når afstanden mellem $f(x, y)$ og a kan gøres vilkårligt lille ved at vælge (x, y) i $\mathrm{D}(f)$ meget tæt på, men ikke lig med (x_0, y_0).

Når det er opfyldt, skriver vi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a.$$

Om definitionen af grænseværdi

Ved brug af udtrykket (2.5) kan betingelsen i Definition 2.14 udtrykkes på følgende måde: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a$ betyder, at afstanden

$$|f(x, y) - a|$$

mellem $f(x, y)$ og a bliver ligeså lille man måtte ønske når blot punktet (x, y) i $\mathrm{D}(f)$ er tæt nok på (x_0, y_0).

Den helt præcise definition, som matematikere benytter, er: For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

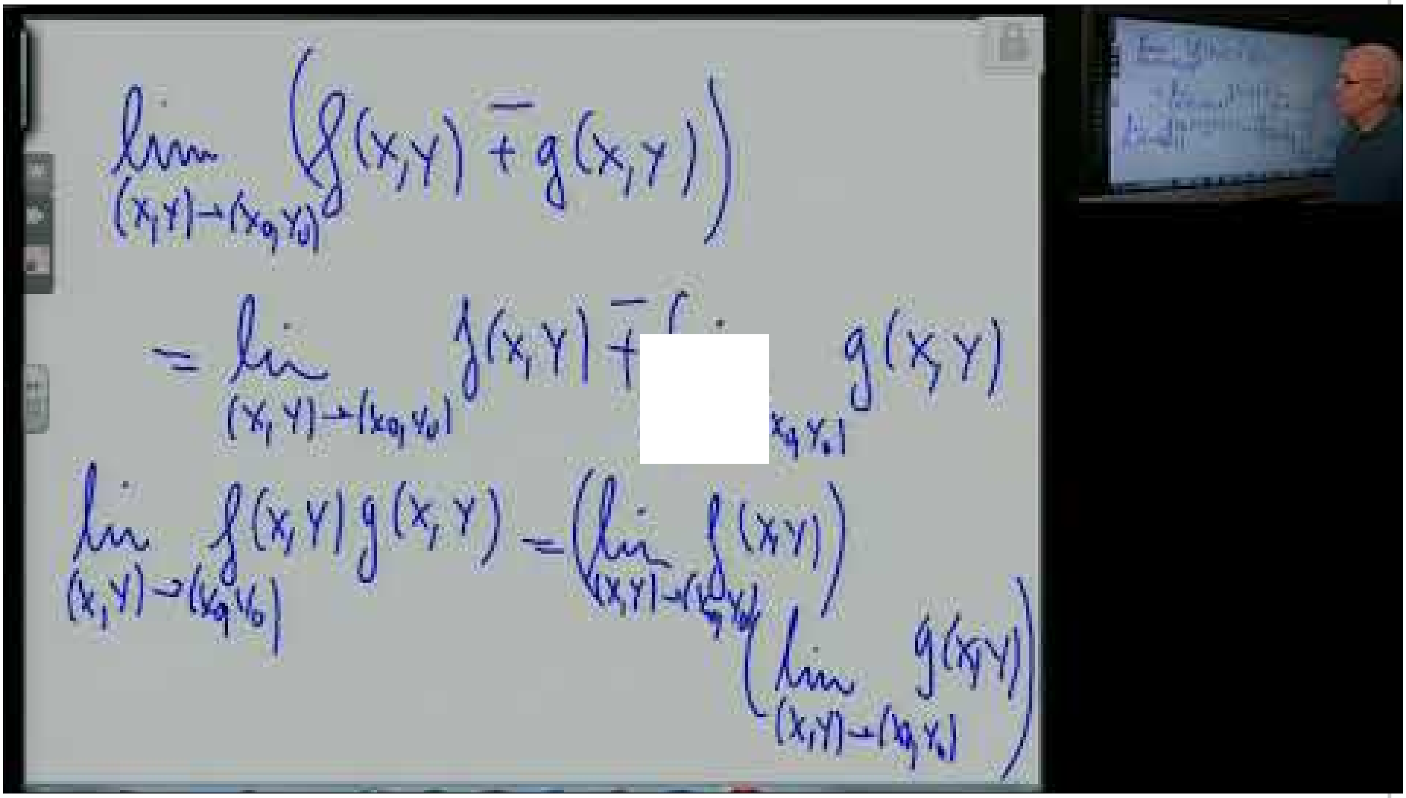
$$|f(x, y) - a| \leq \varepsilon$$

når $(x, y) \in \mathrm{D}(f)$ opfylder, at

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta.$$

Ligesom i forbindelse med funktioner af én variabel gælder der nogle regneregler for grænseværdier af funktioner af to variable, som iøvrigt ligner dem til forveksling.

(Grænseværdi og regneregler).



Opgave

Bestem følgende grænseværdier

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 2x - y^2.$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x^2 y.$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/3,2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right).$

Funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \tag{2.6}$$

kan vi definere for alle talpar $(x, y) \neq (0, 0)$. Så vi kan vælge

$$\mathrm{D}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ : \ (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Der gælder, at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

For at vise det skal vi vise, at $x^2y/(x^2+y^2)$ kommer ligeså tæt på 0, som vi måtte ønske, når blot (x,y) kommer tæt nok på $(0,0)$, men uden at blive lig med $(0,0)$. Til det formål konstaterer vi først, at

$$|x^2y| = x^2|y| \leq (x^2+y^2)|y|.$$

Dette medfører, at

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y|,$$

når $(x,y) \neq (0,0)$. Men $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, så vi finder, at

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \tag{2.7}$$

for alle $(x,y) \neq (0,0)$. Da $\sqrt{x^2+y^2}$ er afstanden fra (x,y) til $(0,0)$, ser vi fra (2.7), at $x^2y/(x^2+y^2)$ kommer vilkårligt tæt på 0, når (x,y) kommer tæt nok på $(0,0)$.

Som det næste eksempel viser, skal man ikke pille meget ved formlen (2.6), for at opførslen i nærheden af $(0,0)$ bliver helt anderledes.

Lad

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

når $(x,y) \neq (0,0)$. Vi søger at afgøre om grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \tag{2.8}$$

eksisterer. Vi lader først (x,y) gå mod $(0,0)$ 'langs x-aksen'. Hermed menes, at vi kigger på talpar $(x,0)$, hvor $x \neq 0$, og lader så x gå mod 0. Men for sådanne talpar $(x,0)$ er

$$f(x,0) = \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0,$$

så vi ser, at $\lim_{x\to 0} f(x,0)$ findes og er lig med 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Det samme sker når vi lader (x,y) gå mod $(0,0)$ langs med y-aksen:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0,$$

fordi $f(0,y) = 0$ for alle y. Alligevel er det ikke rigtigt, at $f(x,y)$ går mod 0 for (x,y) gående mod $(0,0)$. For hvis vi indsætter (x,x), finder vi, at

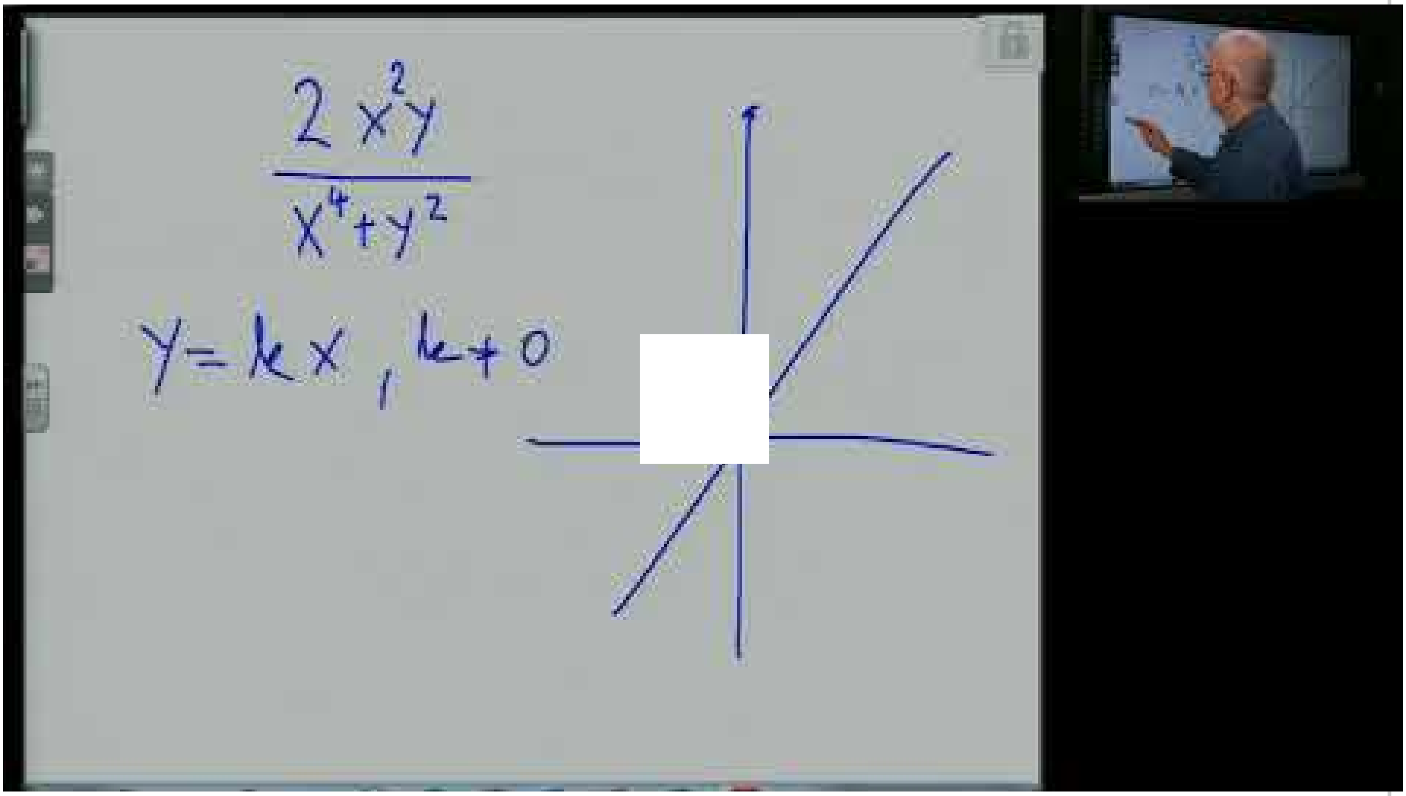
$$f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

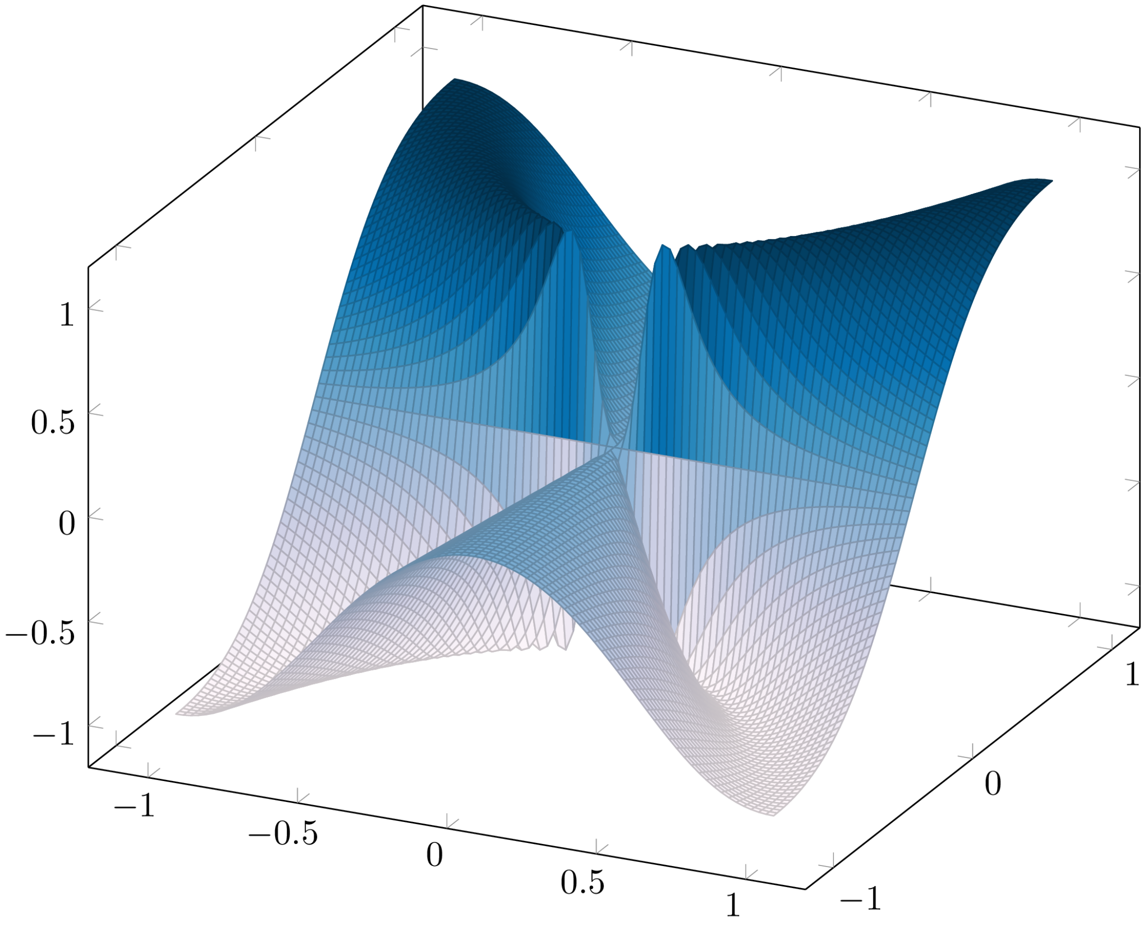
når $x \to 0$. Så

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = 1.$$

Det følger, at grænseværdien (2.8) *ikke* eksisterer. I sprogbrugen fra Definition 2.14 kan man sige, at der ikke findes noget tal a, som opfylder, at $f(x, y)$ kommer vilkårligt tæt på a, når blot (x, y) kommer tæt nok på $(0, 0)$. Og det er fordi, der vilkårligt tæt på $(0, 0)$ findes punkter, f.eks. $(x, 0)$ for små værdier af x, hvor $f(x, 0) = 0$, men også punkter, som $(x, x)$for små værdier af x, hvor $f(x, x) = 1$.

(Et funktion med en lidt eksotisk opførsel).





Grafen for $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ i en omegn af $(0,0)$.

2.2.2 Kontinuitet for funktioner af to variable

Når vi har indført grænseværdier for funktioner af to variable, er det blandt andet fordi, at vi nu hurtigt også kan indføre kontinuitet for sådanne funktioner:

(Kontinuitet). En funktion $f : \mathrm{D}(f) \to \mathrm{R}$ af to variable er *kontinuert*i et punkt (x_0, y_0) i $\mathrm{D}(f)$, når grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

eksisterer og er lig med $f(x_0, y_0)$. Altså når der gælder, at

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Funktionen $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ givet ved $f(x,y) = x^2 + y^2$ er kontinuert i alle punkter (x_0, y_0). For når (x,y) går mod (x_0,y_0), vil x gå mod x_0 og y mod y_0. Og når x går mod x_0, vil x^2 gå mod x_0^2, og tilsvarende vil y^2 gå mod y_0^2, fordi y går mod y_0. Heraf følger, at $x^2 + y^2$ går mod $x_0^2 + y_0^2$ når (x,y) går mod (x_0,y_0). I symboler,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

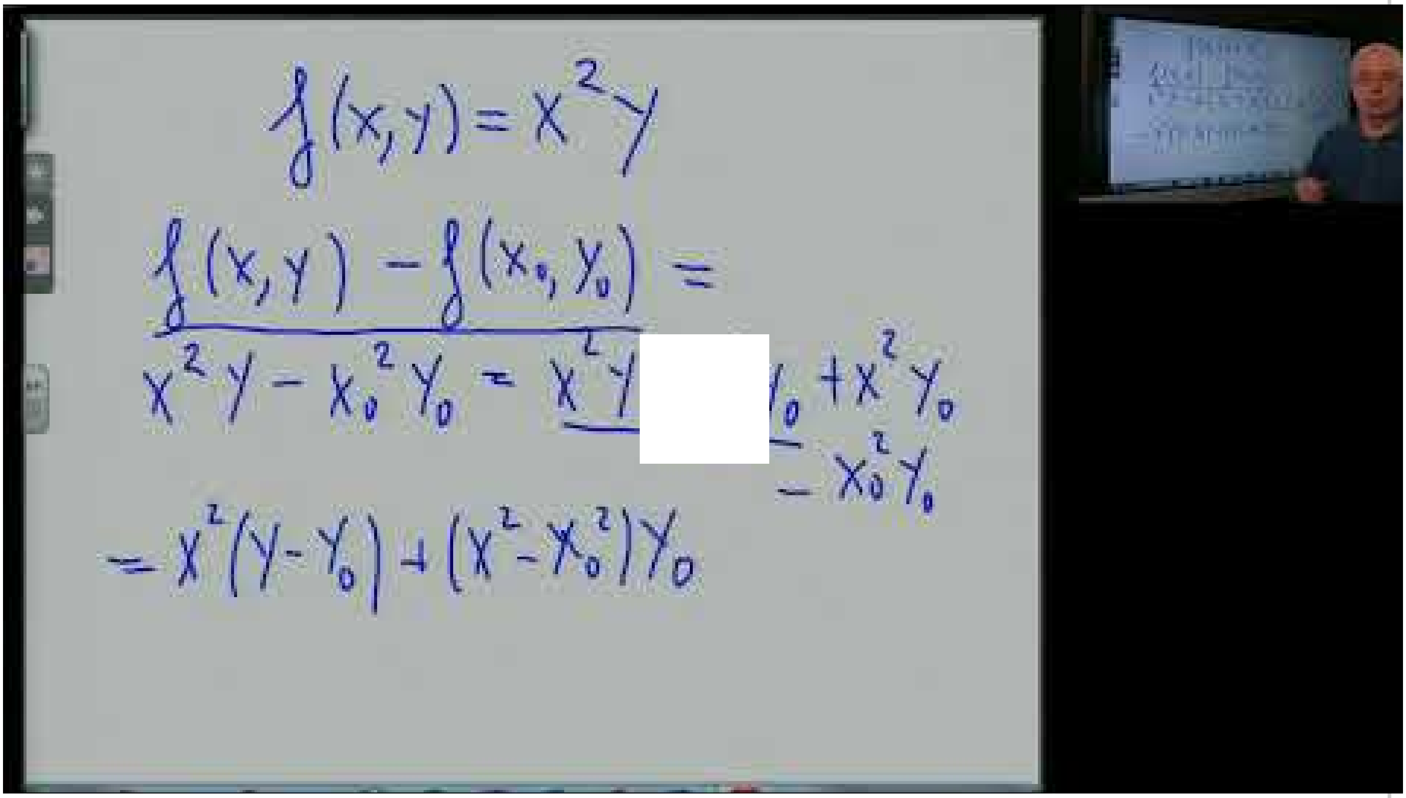
eller $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Funktionen $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ givet ved $f(x,y) = \sin(x-y)$ er kontinuert i alle punkter (x_0, y_0). For når (x,y) går mod (x_0,y_0) vil x gå mod x_0 og y mod y_0. Og så vil $x-y$ gå mod $x_0 - y_0$. Og da sinus er en kontinuert funktion vil $\sin(x-y)$ gå mod $\sin(x_0-y_0)$. I symboler har vi altså, at

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sin(x-y) = \sin(x_0-y_0),$$

eller $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

(Et eksempel på en kontinuert funktion).



Når f er kontinuert i alle punkter i $D(f)$ siger vi, at f er *kontinuert*. Helt i tråd med en tidligere sætning gælder følgende

Når $f : D(f) \to \mathrm{R}$ og $g : D(g) \to \mathrm{R}$ er kontinuerte funktioner gælder:

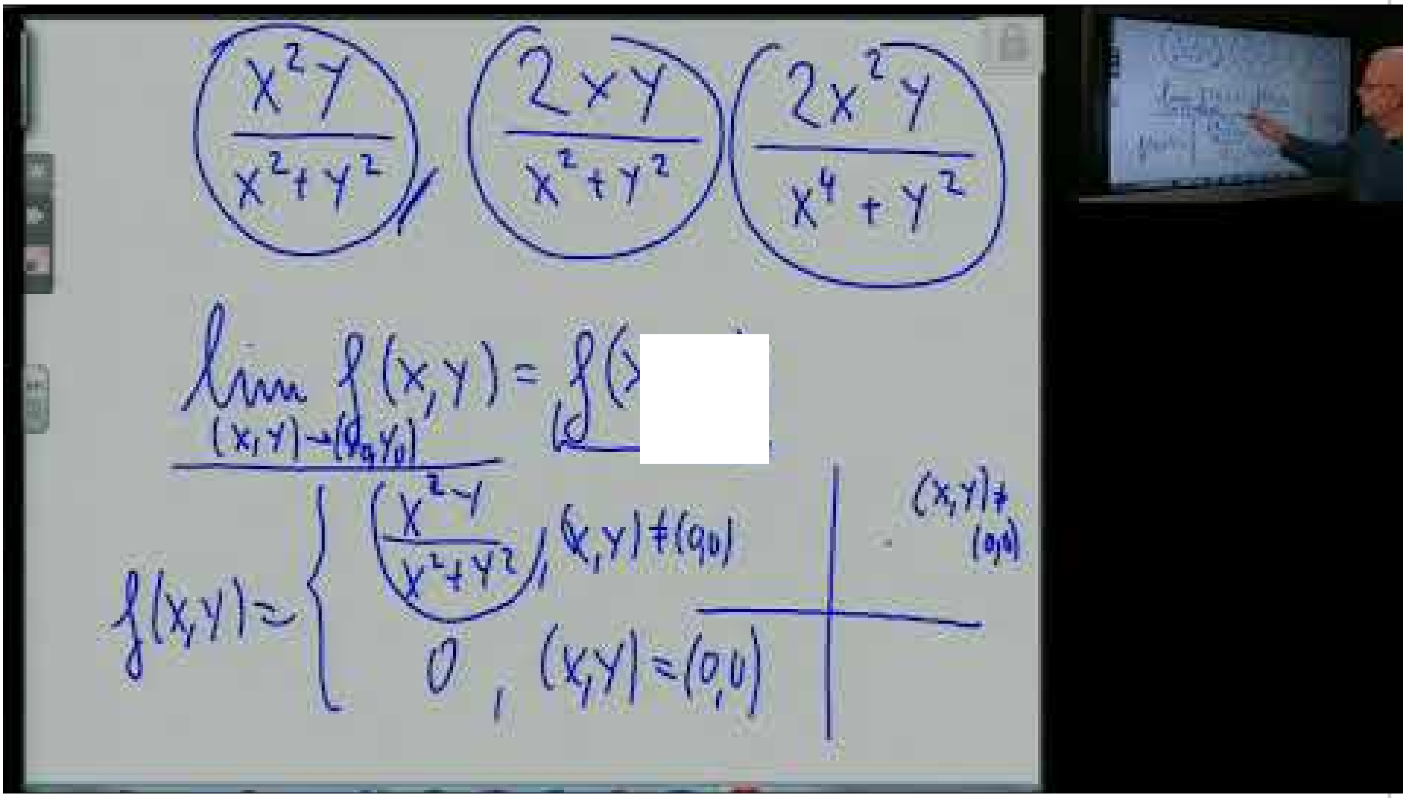
a. $f + g$ er kontinuert i ethvert punkt (x_0, y_0), som ligger i både $D(f)$ og $D(g)$.

b. fg er kontinuert i ethvert punkt (x_0, y_0), som ligger i både $D(f)$ og $D(g)$.

c. f/g er kontinuert i et ethvert punkt (x_0, y_0), som ligger både i $D(f)$ og $D(g)$, og som opfylder at $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Lidt groft sagt følger det fra den tidligere sætning, at algebraiske manipulationer med kontinuerte funktioner altid resulterer i kontinuerte funktioner.

(Kontinuert udvidelse).



Opgave

Følgende funktioner er alle definerede når (x, y) er tæt på, men ikke lig med $(0, 0)$. Afgør hvordan $f(0, 0)$ skal defineres, hvis den resulterende funktion, defineret for alle (x, y) i en omegn af $(0, 0)$, skal være kontinuert i $(0, 0)$.

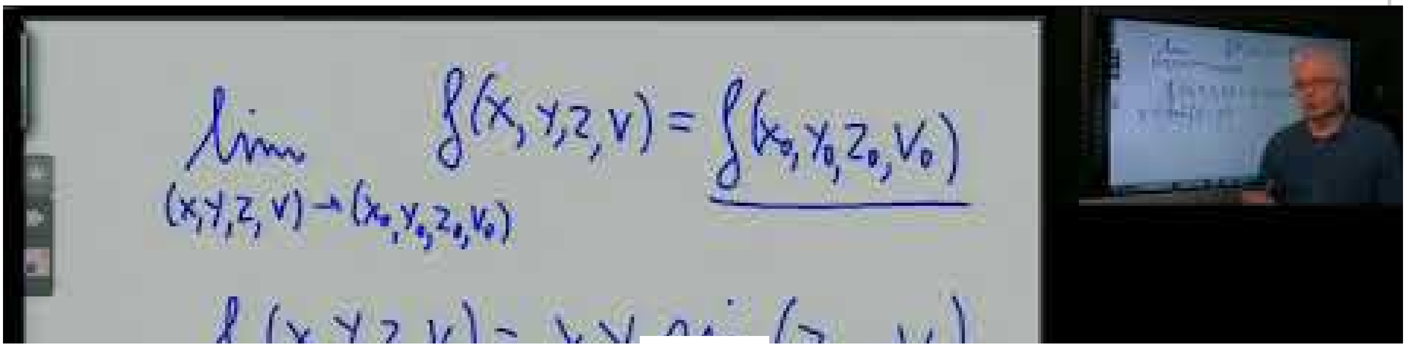
a. $f(x, y) = (x - 7)(y - 1)$.

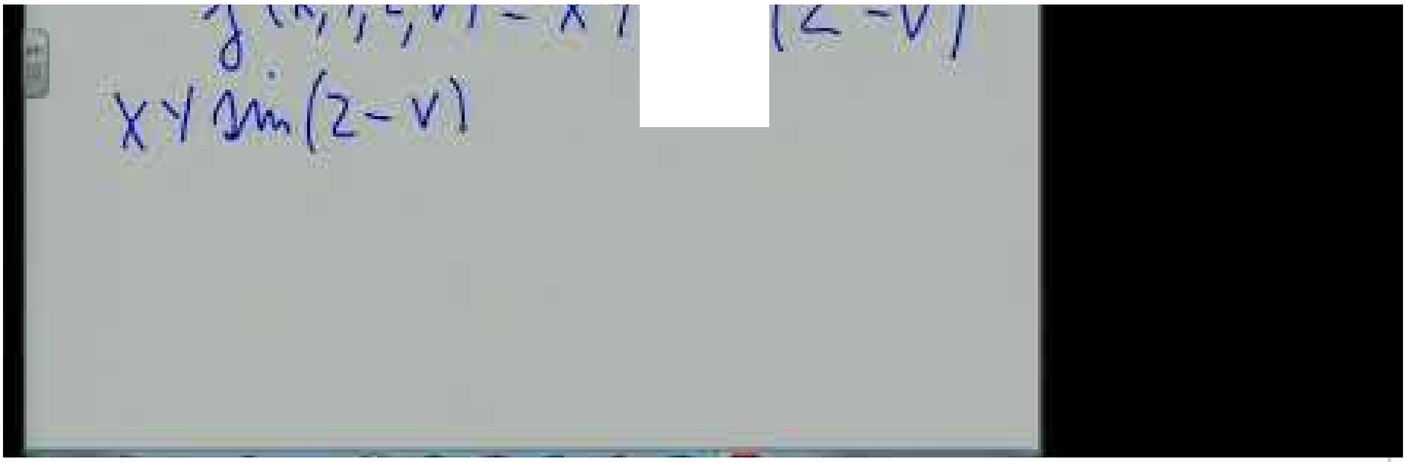
b. $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$.

c. $f(x, y) = \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$.

d. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)}$.

(Tre og flere variable).





2.3 Partielt afledede

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable. Hvis vi holder y-værdien fast, får vi en funktion

$$x \mapsto f(x,y),$$

som kun afhænger af x. Når denne funktion af x er differentiabel, kan vi indføre dens afledede. Denne funktions værdi i et punkt x på den reelle akse er grænseværdien

$$\lim_{x' \to x} \frac{f(x',y) - f(x,y)}{x' - x}.$$

Hvis f.eks. $f(x,y) = x^2 + y^2$ er det tallet

$$\lim_{x' \to x} \frac{x'^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{x' - x} = \lim_{x' \to x} \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = 2x.$$

Tilsvarende kan vi holde x fast og differentiere funktionen

$$y \mapsto f(x,y).$$

De to funktioner der fremkommer på denne måde er *de partielt afledede* funktioner af f. I lidt mere detalje:

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable. *Den partielt afledede af* $\boldsymbol{f}$ med hensyn til den første variabel x er funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$ defineret ved

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x',y) - f(x,y)}{x' - x},$$

under forudsætning af, at denne grænseværdi eksisterer. *Den partielt afledede af* $\boldsymbol{f}$ med hensyn til den anden variabel y er funktionen $\frac{\partial f}{\partial y}$ defineret ved

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{y' \to y} \frac{f(x,y') - f(x,y)}{y' - y},$$

under forudsætning af, at denne grænseværdi eksisterer.

Kort sagt er $\partial f/\partial x$ funktionen, der fremkommer ved at holde y fast og differentiere med hensyn til x, og $\partial f/\partial y$ funktionen, der fremkommer ved at holde x fast og differentiere med hensyn til y. For funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ giver dette netop funktionerne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vi finder de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ når

$$f(x,y) = x^2 \sin(x - y^2).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ finder vi ved at tænke på y som en konstant og så differentiere funktionen

$$x \mapsto x^2 \sin(x - y^2). \tag{2.9}$$

Dette gøres ved at betragte denne funktion som produktet af x^2 og $\sin(x-y^2)$. Differentialkvotienten af x^2 er $2x$ og differentialkvotienten af $\sin(x-y^2)$ mht. x er $\cos(x-y^2)$. Så fra produktreglen finder vi, at differentialkvotienten af funktionen (2.9) er

$$2x \sin(x-y^2) + x^2 \cos(x-y^2).$$

Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin(x-y^2) + x^2 \cos(x-y^2).$$

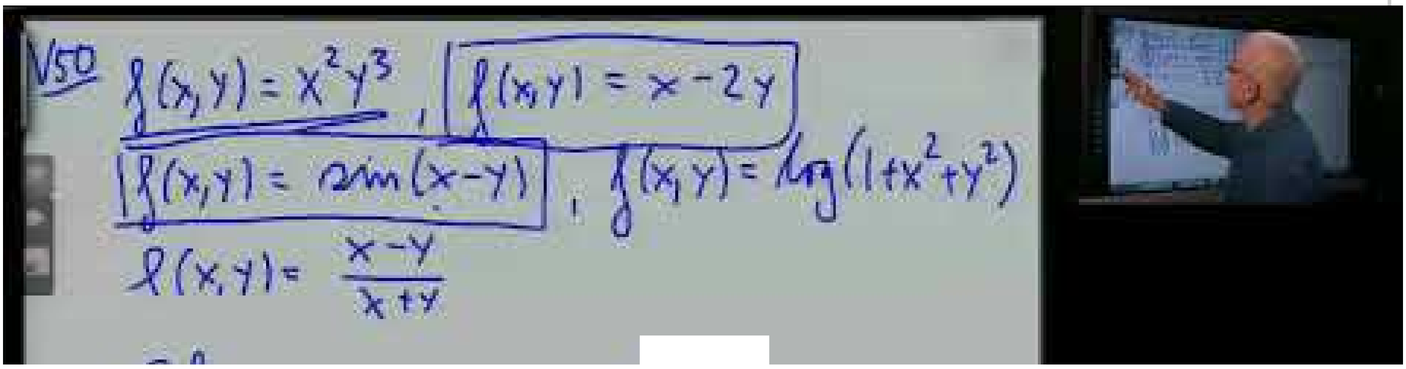
På samme måde finder vi $\frac{\partial f}{\partial y}$ som den afledede af funktionen

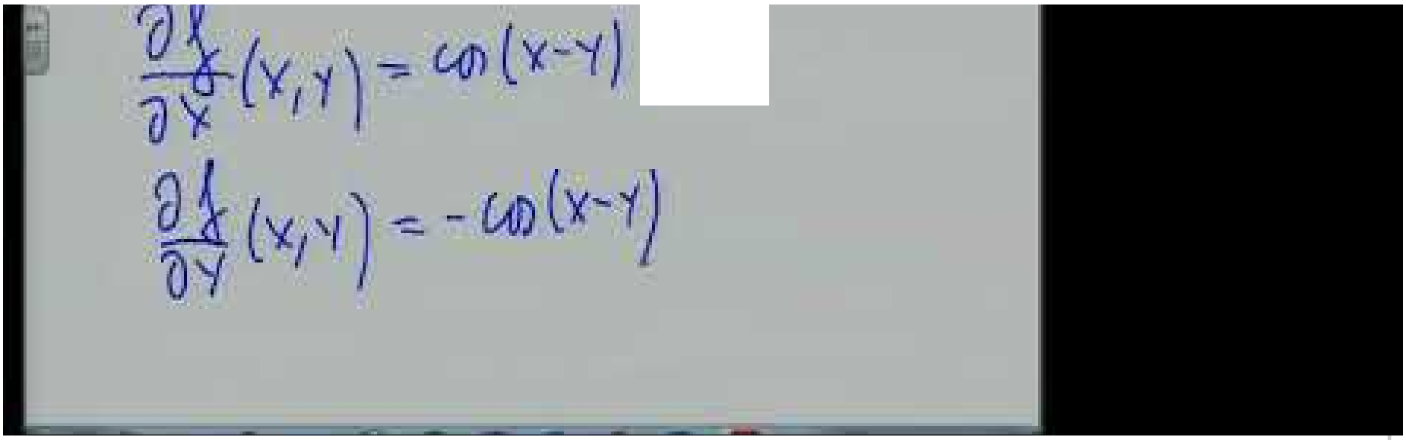
$$y \mapsto x^2 \sin(x - y^2), \tag{2.10}$$

hvor det nu er x, der betragtes som konstant. Når x er konstant, er x^2 det også, så differentialkvotienten af (2.10) mht. y er derfor x^2 ganget med differentialkvotienten af $\sin(x-y^2)$ mht. y. Det er en sammensat funktion; først anvendes funktionen $y \mapsto x - y^2$, hvis differentialkvotient mht. y er $-2y$, og dernæst funktionen $t \mapsto \sin t$ hvis differentialkvotient er $\cos t$. Ved brug af kædereglen finder vi så, at differentialkvotienten af (2.10) mht. y er $-2yx^2\cos(x-y^2)$. Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2yx^2 \cos(x-y^2).$$

(Eksempler på udregning af de partielt afledte).





Opgave

Find de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ af følgende funktioner:

a. $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$.

b. $f(x, y) = xe^y - ye^x$.

c. $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$.

d. $f(x, y) = \dfrac{\log(xy)}{x + y}$.

Der bruges ikke sjældent andre notationer i forbindelse med de partielt afledede. F.eks. f_1 for $\partial f/\partial x$ og f_2 for $\partial f/\partial y$ hvis man tænker på x som den første variable, og y som den anden. Eller

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

for den partielt afledede mht. x og

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

for den partielt afledede mht. y.

Opgave

Find de partielt afledede f_x og f_y af følgende funktioner:

a. $f(x, y) = 6x^3y^2 + 6x$.

b. $f(x, y) = 6xe^y + ye^{x^2}$.

c. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + y^2}{xy + 1}$.

d. $f(x, y) = \cos(x - y)\sin(x + y)$.

Lad os definere en funktion $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ ved, at

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vi finder, at

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0,$$

for alle $x \neq 0$, og det følger, at

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0.$$

Dvs. at den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ eksisterer i $(0,0)$ og er lig med 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Så samme måde er

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

for alle $y \neq 0$, og det følger, at

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0.$$

Dvs. at den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0,0)$ og er lig med 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De partielt afledede af f eksisterer altså i $(0,0)$; ja, faktisk eksisterer de i alle punkter (x,y)i R^2. Alligevel er funktionen f ikke kontinuert i $(0,0)$; vi ved nemlig fra Eksempel 2.18, at grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer. Specielt gælder det *ikke*, at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Moralen er, at eksistensen af de partielt afledede ikke sikrer, at funktionen er kontinuert, når der er 2 (eller flere) variable.

Sci2u opgave

2.4 Tangent plan og differentialer

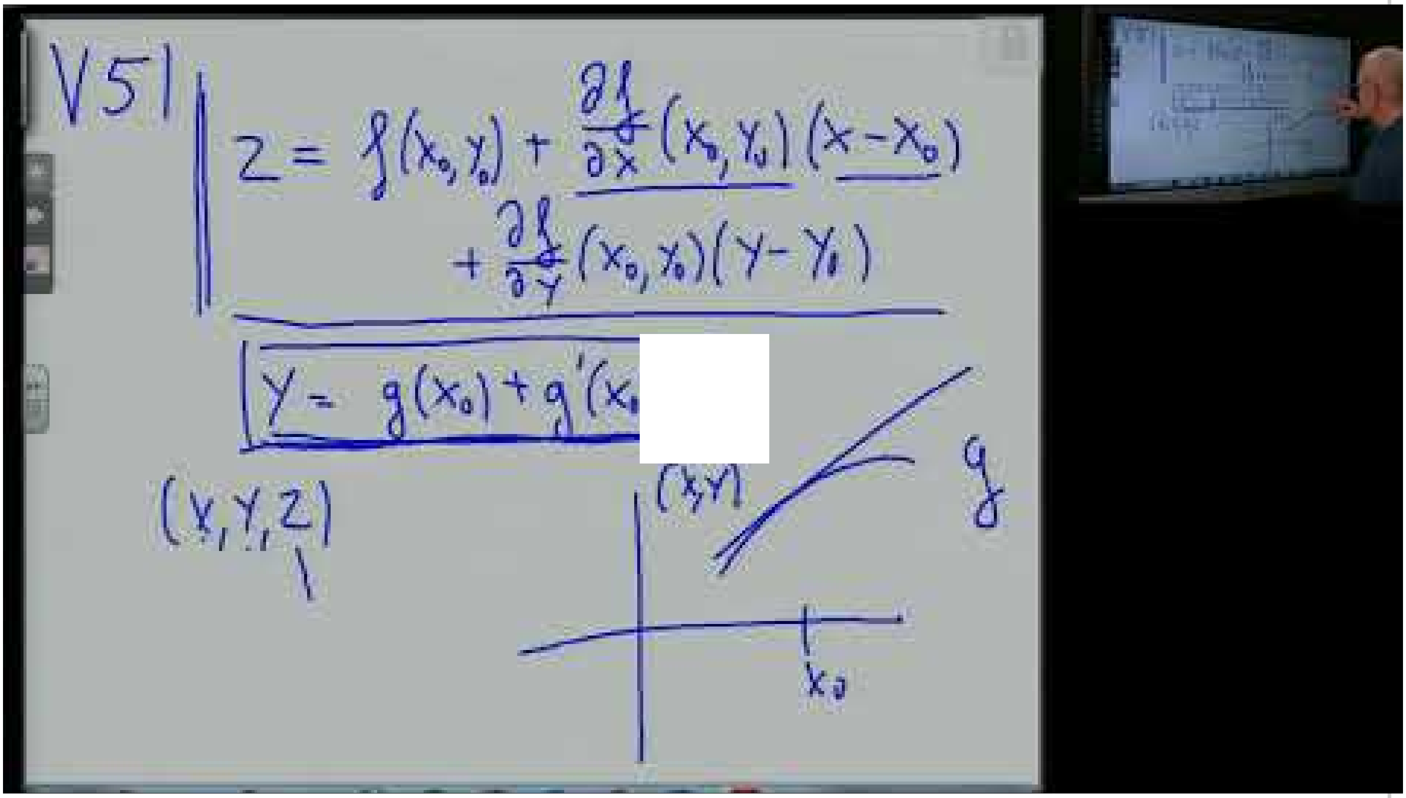
For en funktion $f(x)$ af én variabel angiver den afledede $f'(x)$ hældningskoefficienten for tangentlinien til grafen i punktet $(x, f(x))$. Noget tilsvarende gælder for de partielt afledede $\partial f / \partial x$ og $\partial f / \partial y$ af en funktion af to variable. For en sådan funktion er grafen en flade i rummet, og tangenten er en plan i rummet.

Mere præcist definerer vi *tangent planen* P til grafen for f i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (eller blot (x_0, y_0)) til at bestå af de punkter (x, y, z) i rummet R^3, som opfylder, at

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{2.11}$$

I analogi med tangentlinien til grafen for en funktion af én variabel, er P den plan i rummet der bedst approksimerer grafen for f omkring punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(Om tangent planen som graf for en (lineær) funktion).



Tangent planen P for grafen i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er selv graf for en funktion, nemlig funktionen

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{2.12}$$

og denne funktion z er en approksimation til f i en omegn af (x_0, y_0), i hvert fald når f er kontinuert i (x_0, y_0). Thi i såfald er

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} z(x,y) - f(x,y) \\
&\qquad = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x_0,y_0) - f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\qquad = 0+0+0=0,
\end{aligned}$$

hvilket jo netop betyder, at for (x,y) tæt på (x_0,y_0) vil $z(x,y)$ være tæt på $f(x,y)$. Funktionen (2.12) kaldes for *den lineære approksimation til f* i punktet (x_0,y_0). Bemærk at den lineære approksimation er fastlagt ved tallene $f(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Det sker ikke helt sjældent, at man kan bestemme disse tal uden at kende meget til f, og man kan så bruge z som en 'approksimativ erstatning' for f i nærheden af (x_0,y_0).

For funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3$ har vi de partielt afledede

$$f_x(x,y) = 2x \quad \text{og} \quad f_y(x,y) = 3y^2.$$

I punktet $(x_0,y_0) = (1,1)$ har vi altså at

$$f_x(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \quad \text{og} \quad f_y(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3.$$

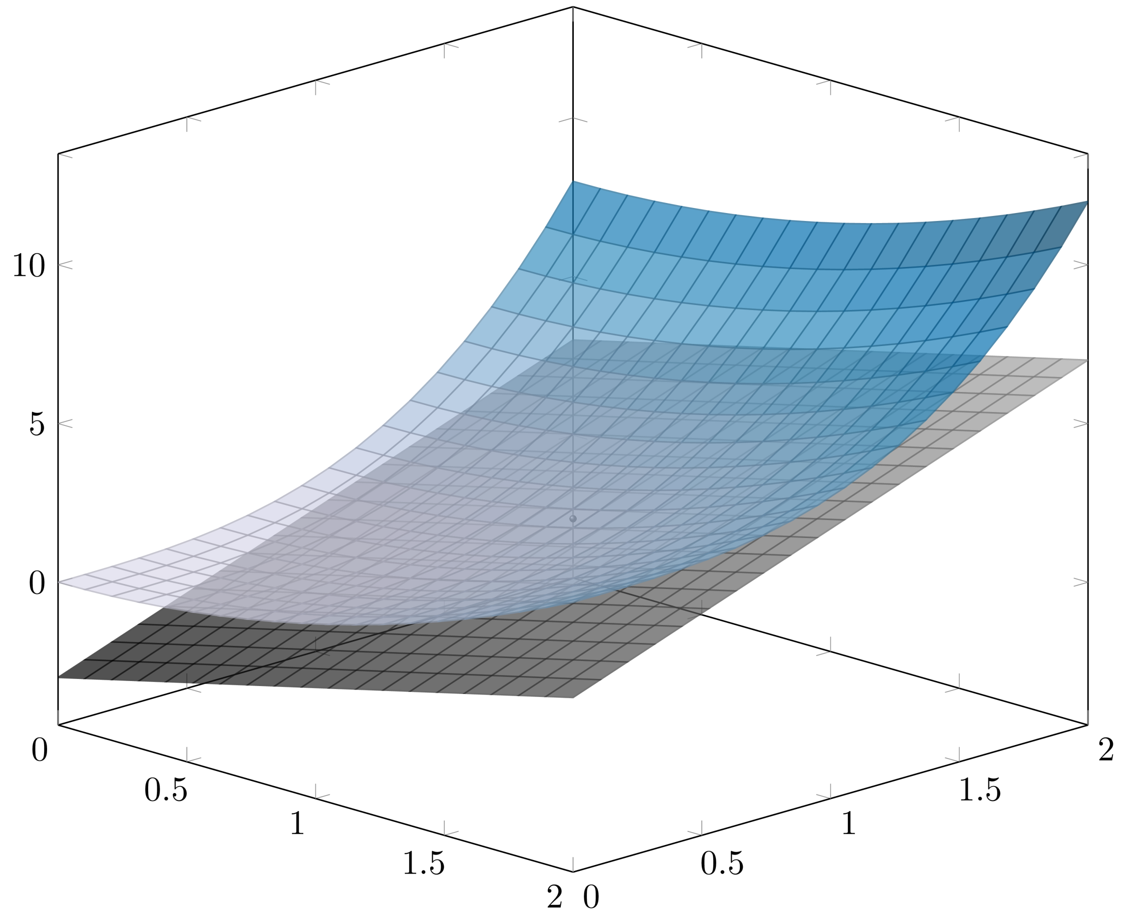
Da $f(1,1) = 2$ ser vi, at tangentplanen for grafen til f i punktet $(1,1)$ består af de tripler $(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, som opfylder, at

$$z = 2 + 2(x-1) + 3(y-1) = 2x + 3y - 3,$$

og den lineære approksimation til f i punktet $(1,1)$ er funktionen $z(x,y)$ givet ved

$$z(x,y) = 2x + 3y - 3.$$

Se Figur 2.38.



Grafen for funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3$, med tangentplanen gennem punktet $(1,1,2)$.

Den ændring som den lineære approksimation til f i punktet (x_0, y_0)får når x og y ændres fra x_0 og y_0 med størrelserne dx og dy, henholdsvis, kaldes for*differentialet* for f i punktet (x_0, y_0). I symboler er

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, dy. \tag{2.13}$$

Ofte ser man formlen (2.13) opskrevet uden reference til punktet (x_0, y_0) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy, \tag{2.14}$$

og df omtales som differentialet af f uden nøjere angivelse af, hvilket punkt der refereres til.

Hvis $f(x,y) = x^2 y + xy$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x.$$

Differentialet af f er derfor

$$df = (2xy + y)\, dx + (x^2 + x)\, dy.$$

Udfra denne formel kan man så bestemme den ændring, som den lineære approksimation til f oplever, når x ændres med størrelsen dx og y med størrelsen dy for ethvert punkt (x_0, y_0), man måtte være interesseret i. Hvis det f.eks. er $(x_0, y_0) = (1, 1)$, finder man at det tilhørende differentiale af f er

$$df = 3\,dx + 2\,dy.$$

De partielt afledede af funktionen $f(x, y) = \sin(x - y^2)$ er

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x - y^2) \quad \text{og} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\cos(x - y^2).$$

Så det generelle differentiale af f er

$$df = \cos(x - y^2)\,dx - 2y\cos(x - y^2)\,dy.$$

Opgave

> Opskriv det generelle differentiale for de følgende funktioner og angiv differentialet i punktet $(1, 2)$:
>
> a. $f(x, y) = xy^2$.
>
> b. $f(x, y) = x^2 \sin(\pi y^2)$.

2.5 Partielt afledede af højere orden

Når man har differentieret en funktion $f(x, y)$ af to variable mht. til x, og står med den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$, er det igen en funktion af de to variable (x, y), og man kan (som oftest) tage de partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial x}$. Den partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial x}$ mht. x; altså

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x},$$

betegnes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

og kaldes *den partielt afledede af f af anden orden mht. x*. Men $\frac{\partial f}{\partial x}$ kan jo også differentieres partielt mht. y, hvilket giver os

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y},$$

som betegnes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

og kaldes *den blandede partielt afledede af f af anden orden*.

På ganske samme måde vil de partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial y}$ give to partielt afledede af anden orden af f; nemlig

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y},$$

der kaldes *den partielt afledede af f af anden orden mht. y*, og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x},$$

der også kaldes *den blandede partielt afledede af f af anden orden*.

Grunden til, at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ har samme navn er, at de meget ofte er ens. Det skyldes følgende sætning:

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable, og antag at alle afledede af anden orden af f eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Et argument

Det følgende giver ideen til et bevis for Sætning 2.43: Pr. definition er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \lim_{y' \to y} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{y' - y}.$$

Så hvis y' er tilstrækkeligt tæt på y er

$$(y' - y)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \tag{2.15}$$

hvor $\approx$ betyder 'næsten lig med'. Og fordi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y') = \lim_{x' \to x} \frac{f(x', y') - f(x, y')}{x' - x}$$

får vi på samme måde, at

$$(x' - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y') \approx f(x', y') - f(x, y'). \tag{2.16}$$

Tilsvarende er

$$(x' - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx f(x',y) - f(x,y). \tag{2.17}$$

Kombineres (2.15), (2.16) og (2.17) finder vi, at

$$\begin{aligned}(x' - x)(y' - y)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &\approx (x' - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y') - (x' - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ &\approx f(x',y') - f(x,y') - f(x',y) + f(x,y).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Og så gentager vi de samme regnerier med x og y byttet om: Pr. definition er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{x' \to x} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x',y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{x' - x}.$$

Så hvis x' er tilstrækkeligt tæt på x er

$$(x' - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial y}(x',y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{2.19}$$

Og fordi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x',y) = \lim_{y' \to y} \frac{f(x',y') - f(x',y)}{y' - y}$$

får vi på samme måde, at

$$(y' - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x',y) \approx f(x',y') - f(x',y). \tag{2.20}$$

Tilsvarende er

$$(y' - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx f(x,y') - f(x,y). \tag{2.21}$$

Kombineres (2.19), (2.20) og (2.21) finder vi, at

$$\begin{aligned}(x' - x)(y' - y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &\approx (y' - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x',y) - (y' - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &\approx f(x',y') - f(x',y) - f(x,y') + f(x,y).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Sammenligner vi (2.22) med (2.18) finder vi, at

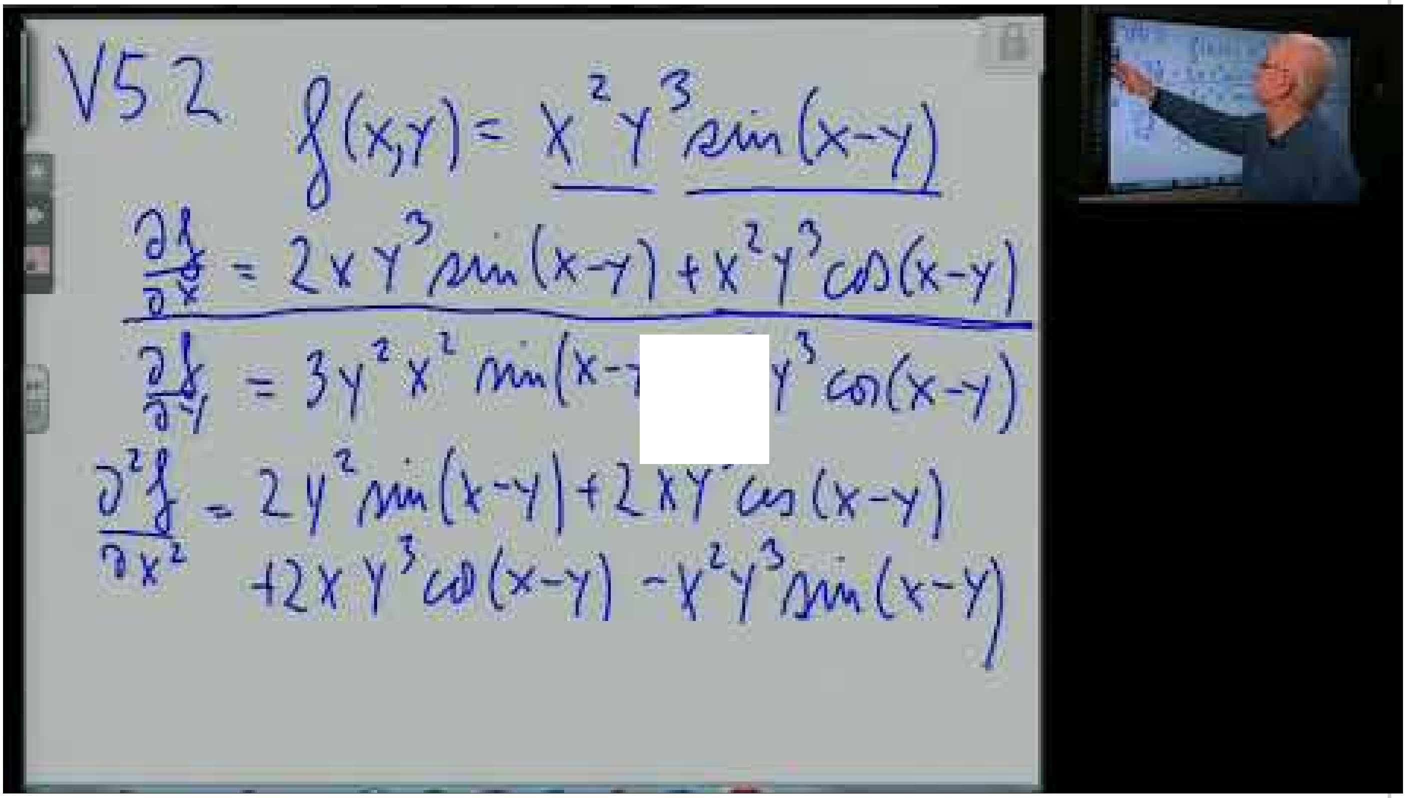
$$\begin{aligned}(x' - x)(y' - y)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &\approx f(x',y') - f(x',y) - f(x,y') + f(x,y) \\ &\approx (x' - x)(y' - y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Ved division med $(x' - x)(y' - y)$ finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y). \tag{2.23}$$

Går man ovenstående approksimationer efter i sømmene, og drejer argumenterne rigtigt, viser det sig, at (2.23) faktisk er en lighed under forudsætningerne i Sætning 2.43.

(Eksempler på partielt afledte af højere orden).



Opgave

Find de partielt afledede af anden orden af følgende funktioner.

a. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

b. $f(x,y) = x^3 - y^3$.

c. $f(x,y) = \cos(x^2 + y)$.

d. $f(x,y) = \cos^2 x \sin xy$.

Opgave

i. Giv mening til, og udregn funktionerne

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y},$$

når $f(x,y) = 3x^4y^2 + \sin(x-y)$.

ii. Er det en tilfældighed at funktionerne er ens?

Sci2u opgave

2.6 Partielt afledede med 3 eller flere variable

Partielt afledede af funktioner, der afhænger af mere end 2 variable, kan defineres på en måde, der er helt analog til tilfældet med 2 variable. Hvis der er tale om en funktion

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

af n reelle variable $x_1, x_2, \dots, x_n$, indføres de partielt afledede

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ f_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ &\vdots \\ f_n &= \frac{\partial f}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

ved at

$$\begin{aligned} & f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &\quad = \lim_{x_k' \to x_k} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{x_k' - x_k}. \end{aligned}$$

Hvis f.eks. $f(x, y, z)$ er en funktion, der afhænger af de tre variable x, y og z, sætter vi

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) = f_x(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x',y,z) - f(x,y,z)}{x' - x}, \\ f_2(x,y,z) = f_y(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{y' \to y} \frac{f(x,y',z) - f(x,y,z)}{y' - y}, \end{aligned}$$

og

$$f_3(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{z' \to z} \frac{f(x,y,z') - f(x,y,z)}{z' - z},$$

forudsat, selvfølgelig, at grænseværdierne eksisterer. Og de afledede af højere orden, som f.eks.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$$

bliver indført på samme måde som for funktioner af to variable.

Det er en konsekvens af Sætning 2.43, at sålænge de partielt afledede eksisterer og er kontinuerte, er rækkefølgen man differentierer i ligegyldig. F.eks. er

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x},$$

hvorimod, f.eks.,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$$

generelt er forskellige funktioner, fordi der her ikke er differentieret det samme antal gange mht. x og mht. z. De blandede partielt afledede af højere orden er generelt kun ens, når der er differentieret lige mange gange mht. hver af de variable.

Definer funktionen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ af de 4 variable x, y, z, v ved at

$$f(x, y, z, v) = xyv \cos(z^2 + y).$$

Vi finder ved at differentiere med hensyn til x, at

$$f_x(x, y, z, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, v) = yv \cos(z^2 + y),$$

og ved at differentiere med hensyn til y, at

$$f_y(x, y, z, v) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, v) = xv \cos(z^2 + y) - xyv \sin(z^2 + y).$$

På samme måde fåes, at

$$f_z(x, y, z, v) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z, v) = -2zxyv \sin(z^2 + y),$$

og

$$f_v(x, y, z, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z, v) = xy \cos(z^2 + y).$$

Vi finder også at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v}(x, y, z, v) = \frac{\partial}{\partial y} xy \cos(z^2 + y) = x \cos(z^2 + y) - xy \sin(z^2 + y),$$

og

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y}(x, y, z, v) &= \frac{\partial}{\partial v}(xv \cos(z^2 + y) - xyv \sin(z^2 + y)) \\ &= x \cos(z^2 + y) - xy \sin(z^2 + y).\end{aligned}$$

Ikke overraskende er $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v}$.

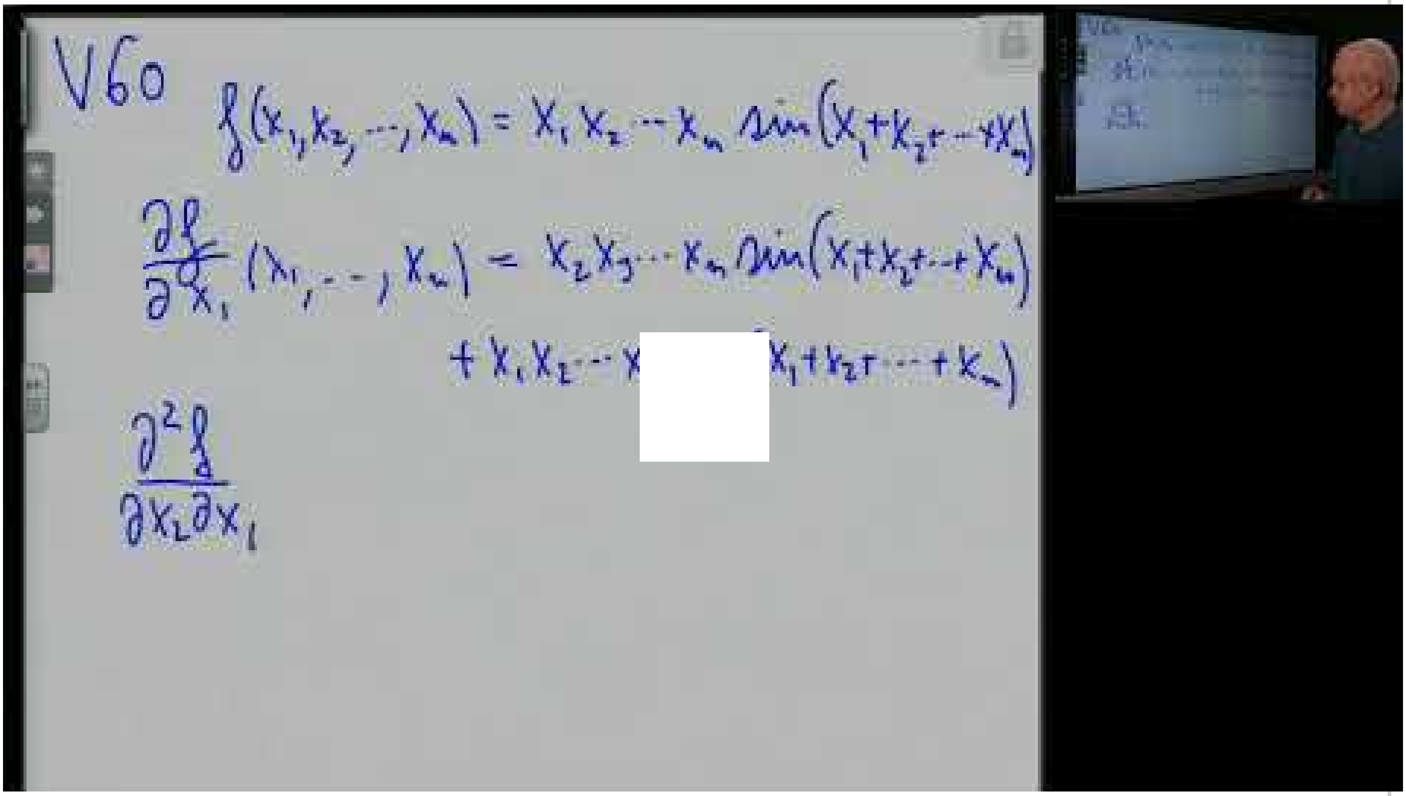
Opgave

> Definer en funktion f af n reelle variable ved at
>
> $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \dots + nx_n^2.$$
>
> Find den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ for alle $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Opgave

> Bestem funktionerne $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$ og $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$ når
>
> a. $f(x, y, z) = xyz^5$.
>
> b. $f(x, y, z) = \sin(xy - z)$.

(Højere ordens afledte for funktioner af mange variable).



2.7 Kædereglen

Kædereglen i differentialregning er et værktøj til at finde de afledede for samensatte funktioner. For funktioner af én variabel er kædereglen formuleret tidligere. Der er også en kæderegel for funktioner af flere variable; flere, faktisk.

Hvis $f(x, y)$ er en funktion af to variable, og $g(t), h(t)$ to funktioner af én variabel t, vil funktionen

$$\psi(t) = f(g(t), h(t)) \tag{2.24}$$

være en funktion af t. F.eks. kunne $f(x, y) = xy^2$, $g(t) = t^4$ og $h(t) = \cos t$, og funktionen (2.24) ville da være

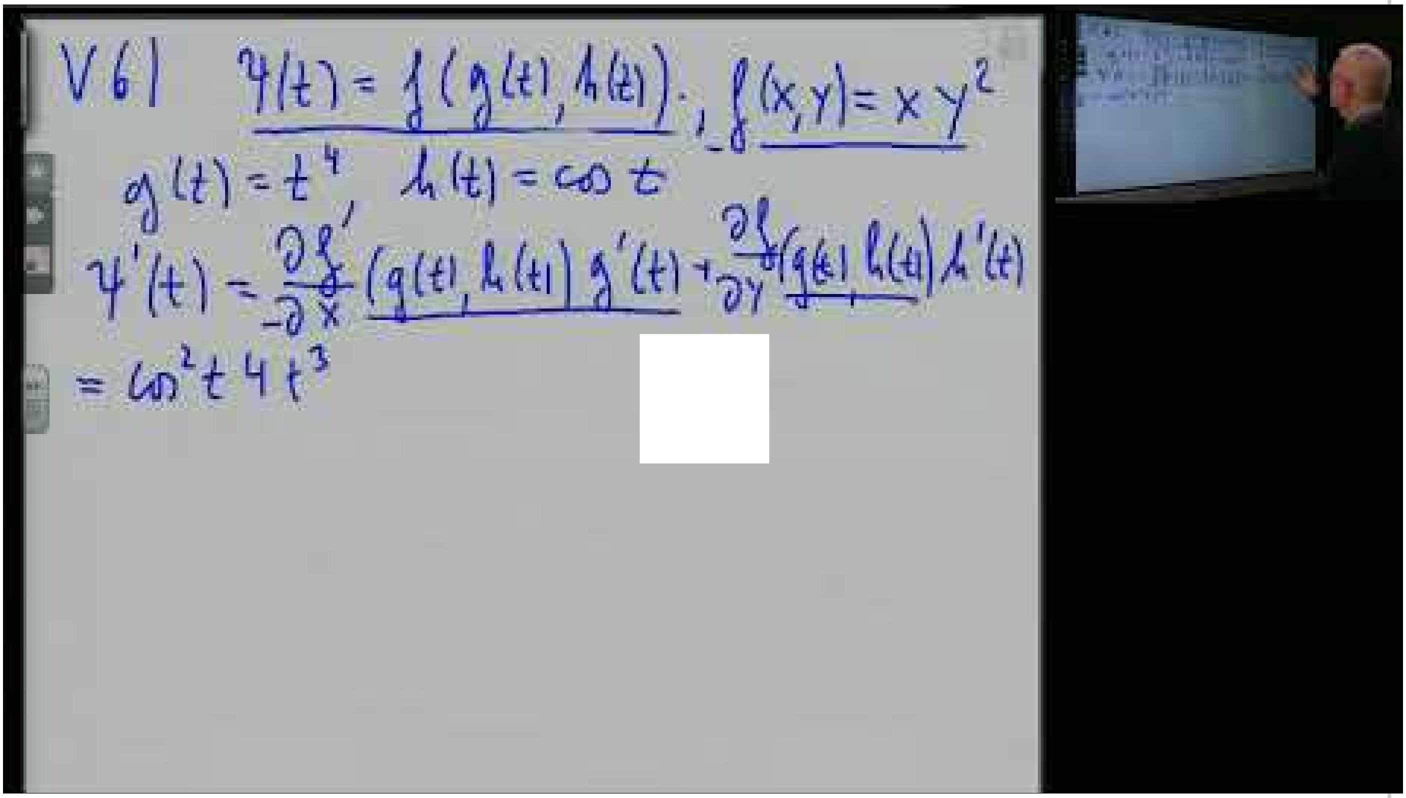
$$\psi(t) = t^4 \cos^2(t).$$

For funktionen (2.24) er kædereglen en formel, der udtrykker den afledede af ψ ved de partielt afledede af f og de afledede af g og h. Der gælder nemlig flg.

Når de partielt afledede af f eksisterer og er kontinuerte, og g og h er differentiable funktioner, er ψ en differentiabel funktion, og den afledede $\psi'(t)$ af ψ er givet ved formlen

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t))g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t))h'(t).$$

(Om kædereglen for funktioner af to variable).



Der også andre, mere komplicerede udgaver af kædereglen. Hvis

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{og} \quad v(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

er funktioner af de n variable $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kan vi definere en funktion H af $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ved, at

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(u(x_1, x_2, \dots, x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Kædereglen angiver i dette tilfælde, hvordan de partielt afledede af H kan bestemmes ud fra de partielt afledede for f, u og v :

> Når de partielt afledede af f, u og v eksisterer og er kontinuerte, er de partielt afledede af H givet ved formlerne
>
> $$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = &\frac{\partial f}{\partial x}(u(x_1, \ldots, x_n), v(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(u(x_1, \ldots, x_n), v(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$
>
> for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

F.eks. kan n være 3, så u og v er funktioner af tre variable, r, s, t. I det tilfælde er

$$H(r, s, t) = f(u(r, s, t), v(r, s, t)),$$

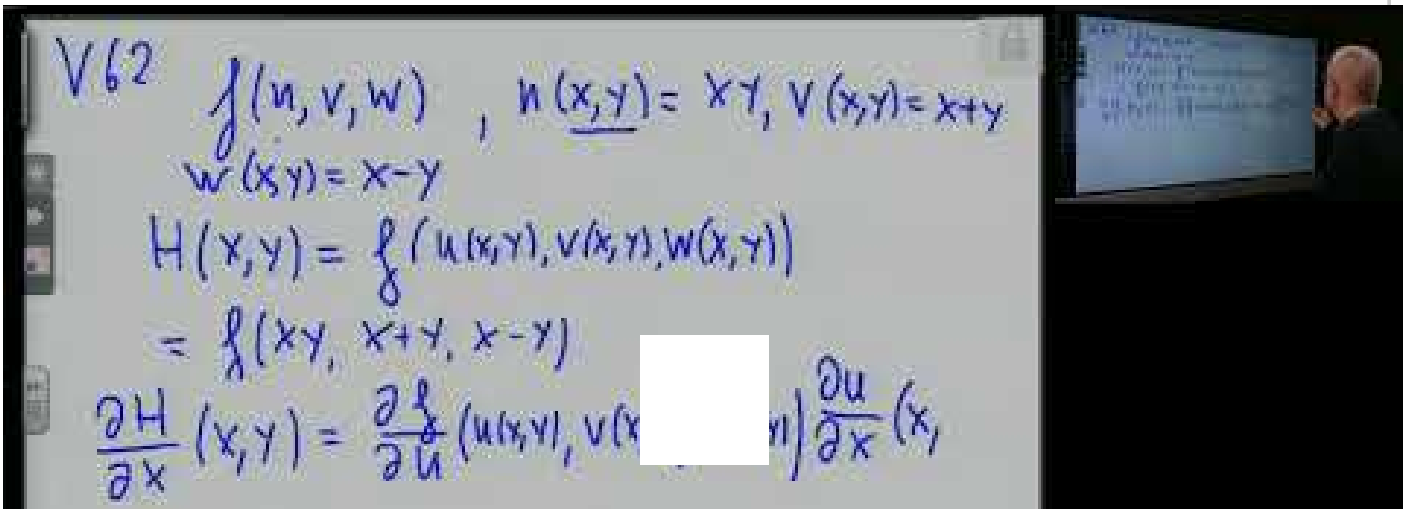
og Sætning 2.54 fortæller os, at

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial r}(r, s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial u}{\partial r}(r, s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial v}{\partial r}(r, s, t), \\ \frac{\partial H}{\partial s}(r, s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial u}{\partial s}(r, s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial v}{\partial s}(r, s, t),\end{aligned}$$

og

$$\frac{\partial H}{\partial t}(r, s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial u}{\partial t}(r, s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(r, s, t), v(r, s, t))\frac{\partial v}{\partial t}(r, s, t).$$

(Et eksempel på anvendelse af kædereglen for funktioner af flere variable).



Lad $f(x,y) = 3xy + x$ og $u(r,s,t) = rst,\ v(r,s,t) = r + s + t$. Så er

$$\begin{aligned} H(r,s,t) &= f(u(r,s,t), v(r,s,t)) = 3rst(r+s+t) + rst \\ &= 3r^2st + 3rs^2t + 3rst^2 + rst. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y + 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,s,t) = st, \quad \frac{\partial u}{\partial s}(r,s,t) = rt \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,s,t) = rs,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,s,t) = \frac{\partial v}{\partial s}(r,s,t) = \frac{\partial t}{\partial t}(r,s,t) = 1.$$

Ved brug af Sætning 2.54 finder vi så, at

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r}(r,s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s,t), v(r,s,t))\frac{\partial u}{\partial r}(r,s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s,t), v(r,s,t))\frac{\partial v}{\partial r}(r,s,t) \\ &= (3v(r,s,t) + 1)st + 3u(r,s,t) \\ &= (3(r+s+t)+1)st + 3rst = 6rst + 3s^2t + 3st^2 + st. \end{aligned}$$

På samme måde kan man finde de partielt afledede $\frac{\partial H}{\partial s}$ og $\frac{\partial H}{\partial t}$ ved brug af Sætning 2.54.

Bemærk at udregningen af $\frac{\partial H}{\partial r}(r,s,t)$ i Eksempel 2.56, som brugte Sætning 2.54, kan verificeres ved at differentiere (2.25) mht. r. Sådan vil det meget ofte være for konkrete funktioner; istedet for at bruge kædereglen er det hurtigere at differentiere direkte. Men kædereglen er et vigtigt redskab i mere abstrakte og generelle situationer, hvor man måske ikke kender funktionsudtrykket eksplicit. I forbindelse med en sætning i næste kapitel kan man se et eksempel på en teoretisk anvendelse af kædereglen.