**Mouvement guidée par une surface**

Lucas DIETRICH (www.ldietrich.fr)

**Glossaire et symboles :**

| Symbol | Name | Expression |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{\omega}$ | Parametric position *DIM (2)* | $\boldsymbol{\omega}(t) = [u(t) \quad v(t)]$ |
| $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ | Parametric speed *DIM (2)* | $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ |
| $\boldsymbol{S}$ | Position *DIM (3)* | $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\omega) = \begin{bmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \\ z(\omega) \end{bmatrix}$ |
| $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$ | Speed *DIM (3)* | $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} v_x(\omega) \\ v_x(\omega) \\ v_x(\omega) \end{bmatrix}$ |
| $\boldsymbol{F}$ | Force *DIM (3)* | $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$ |
| $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J_S}$ | Jacobian *DIM* $(3, 2)$ | $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}$ |
| $H_{S_X}, H_X$ | Hessian$[X]$ $X \in (x, y, z)$ *DIM = (2, 2)* | $H_{S_X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \end{bmatrix}$ |
| $U, V$ | $U$-space $V$-space *DIM (n)* | $U = [u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{n-1}]$ $V = [v_0 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_{m-1}]$ |
| $\mathcal{M}$ | Mesh *DIM (2, n)* | $\mathcal{M} = (U, V)$ |
| $\mathcal{M}_S$ | Surface Mesh *DIM (n, 3)* | $\mathcal{M}_S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_k \end{bmatrix}$ |

**A vérifier :**

- Si un objet n'est pas soumis à aucune force, le solide suit des géodésiques.
- Caractériser les géodésiques
  - Associer les géodésiques à du, dv et à la Hessienne
  - Trouver une paramétrisation qui est constante sur une géodésique

Contexte et hypothèse :

- On se passe dans un contexte théorique de mécanique classique, les objets étudiées sont des surfaces au sens physiques (continue, $C_2$, jacobienne et Hessienne, indéformables) et des masses ponctuelles (on ne considère donc pas l'inertie de rotation).
- La résolution numérique est basée sur le théorème fondamental de la dynamique (Loi de Newton) qui admet comme éléments centraux la force et la quantité de mouvement.

**

**Introduction et notations :**

Dans ce document on étudie le mouvement en fonction du temps $\omega(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ (trajectoire et vitesse) d'un solide ponctuel se déplaçant sur une surface $\boldsymbol{S}$ (guide) et soumis à différentes forces : $\vec{F}$.

On considère une surface paramétrique :

$$\boldsymbol{S}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

$u$ et $v$ sont des paramètres qui dépendent du temps $t$ :

$$u: t \longmapsto u(t)$$
$$v: t \longmapsto v(t)$$

On notera :

$$\boldsymbol{\omega}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

On a ainsi, un objet $A$ paramétré par $\omega_A$ au temps $t_1$ est repéré par sa positon :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega_A}(t_1))$$

**Autres notations :**

- On notera en gras les vecteurs $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}$ et sans style les scalaires $t, u(t), v(t)$.
- On omettra souvent les paramètres des fonctions
  - $u(t)$ devient $u$
  - $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$ devient $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$ ou simplement $\boldsymbol{S}$
- La dérivée partielle d'un scalaire $\frac{\partial f}{\partial u}$ se condensera avec l'écriture $\partial_u f$
- Double dérivation $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \partial^2_{u,v} f$
- On note $V = V_X\rfloor^X_{x,y,z} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$ le vecteur à 3 coordonnées $(x, y, z)$
  - On peut aussi appliquer cette notation aux matrices, par exemple la jacobienne s'exprime :

$$J_S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial X}{\partial u} \quad \frac{\partial X}{\partial v}\right\rfloor^X_{x,y,z}$$

  - Ainsi si on veut exprimer la somme des éléments du vecteur $V$ on écrira :
    - $S = V_X\rfloor^X_{\sum x,y,z} = V_x + V_y + V_z$
- La dérivation par rapport au temps de la grandeur $m$ se note avec un point : $\frac{dm}{dt} = \dot{m}$

**Vitesse :**

La variation de position par rapport au temps peut se calculer :

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Où $J_S(\boldsymbol{\omega})$ est la jacobienne de $\boldsymbol{S}$ : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_jacobienne](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_jacobienne)

On a donc l'expression de la vitesse d'un point $A$:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A(t) = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}\big(\boldsymbol{\omega}_A(t)\big) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)}$$

Expression complète :

$$\boldsymbol{v}_A(t) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} \\ \vdots_y \\ \vdots_z \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right|_{x,y,z}^{X}$$

**Accélération :**

Dérivation naïve du vecteur vitesse :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{x,y,z} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{x,y,z}^{X}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{d}{dt}\frac{du}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{d}{dt}\frac{dv}{dt}\right|_{x,y,z}^{X}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial X}{\partial u}\ddot{u} + \frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\right|_{x,y,z}^{X}$$

Comme $\frac{\partial X}{\partial u}(\omega)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(\omega)$ dépendent de $u$ et $v$, on a :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}$$

Enfin on a :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = \left.\left[\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{v}\right]\dot{u} + \frac{\partial X}{\partial u}\ddot{u} + \left[\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}\right]\dot{v} + \frac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\right|_{x,y,z}^{X}$$

$$= \left.\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + \frac{\partial X}{\partial u}\ddot{u} + 2\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \frac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\right|_{x,y,z}^{X}$$

En prenant l'expression matricielle on a :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)]$$

En dérivant le produit $J_S(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ on obtient :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$$

On évalue la dérivée de la matrice jacobienne par rapport au temps :

$$\frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial u} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial v}\right]_{x,y,z}^{X}$$

Avec les calculs précédents on a donc immédiatement :

$$\frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt} = \left.\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{v} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\dot{u} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}\right]_{x,y,z}^{X}$$

On peut exprimer cette ligne à l'aide de la matrice Hessienne :

$$H_{S_X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt} = \left.\left(H_{S_X}\dot{\boldsymbol{\omega}}\right)^T\right|_{x,y,z} = \left.\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_X}^T\right]_{x,y,z}^{X}$$

Or comme $H_{S_X}$ est symétrique (Théorème de Schwarz) on a donc:

$$\frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt} = \left.\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_X}\right]_{x,y,z}^{X}$$

Où $H_S$ est la Hessienne « vectorielle » de $S$.

Expression complète de l'accélération :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{dJ_S(\boldsymbol{\omega})}{dt}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \left.\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_X}\right]_{x,y,z}^{X}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\omega})\ddot{\boldsymbol{\omega}}$$

On remarque que :

$$\left.\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_X}\right]_{x,y,z}^{X}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left.\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_X}\dot{\boldsymbol{\omega}}\right]_{x,y,z}^{X}$$

Ainsi on a la formulation finale :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \boldsymbol{H_S}\dot{\boldsymbol{\omega}}^2 + \boldsymbol{J_S}(\boldsymbol{\omega})\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{\boldsymbol{S_X}}\dot{\boldsymbol{\omega}}\Big]_{x,y,z}^{X} + \boldsymbol{J_S}(\boldsymbol{\omega})\ddot{\boldsymbol{\omega}}$$

Formulation explicite :

$$\boldsymbol{a}_A(t) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + \frac{\partial X}{\partial u}\ddot{u} + 2\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \frac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\Bigg]_{x,y,z}^{X}$$

**Théorème fondamental de la dynamique :**

Inventaire des actions mécaniques :

- $\vec{F}$ est une force quelconque s'appliquant sur le solide
- $\vec{R}$ est la réaction de la surface sur le solide, $\vec{R}$ est perpendiculaire à l'élément de surface.

$$m\,\boldsymbol{a}_A(t) = \vec{F} + \vec{R}$$

Avec la définition - Normale à une surface :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Normale_%C3%A0_une_surface#Vecteur_normal_en_un_point_r%C3%A9gulier

On a donc :

$$\vec{R}(u,v) = \lambda(u,v) \times \frac{\partial S}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u,v)$$

Le vecteur $\vec{R}$ est bien perpendiculaire à la surface sur deux directions :

- $\vec{R} \cdot \frac{\partial S}{\partial u}(u,v) = 0$
- $\vec{R} \cdot \frac{\partial S}{\partial v}(u,v) = 0$

En appliquant le produit scalaire à la relation fondamentale de la dynamique vers deux directions :

$$\begin{cases} m\,\boldsymbol{a}_A(t) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial u}(u,v) = \left(\vec{F} + \vec{R}\right) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial u}(u,v) \\ m\,\boldsymbol{a}_A(t) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial v}(u,v) = \left(\vec{F} + \vec{R}\right) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

On obtient ainsi deux équations : scalaires :

$$\begin{cases} m\,\boldsymbol{a}_A(t) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial u}(u,v) = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial S}{\partial u}(u,v) \\ m\,\boldsymbol{a}_A(t) \cdot \dfrac{\partial S}{\partial v}(u,v) = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial S}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

Les deux équations deviennent pour $\mu = u, v$ :

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + \frac{\partial X}{\partial u}\ddot{u} + 2\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \frac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\right) \times \left(\frac{\partial X}{\partial \mu}\right)\Bigg]_{\sum x,y,z}^{X} - \frac{1}{m}\vec{F} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mu} = 0$$

En explicitant et réarrangeant les termes :

$$\begin{cases} E_u : \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + \left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \ddot{u} + 2\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}\ddot{v}\Bigg]_{\sum x,y,z}^{X} - \dfrac{1}{m}\vec{F} \cdot \dfrac{\partial S}{\partial u} = 0 \\ E_v : \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \left(\dfrac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \ddot{v} + 2\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}\ddot{u}\Bigg]_{\sum x,y,z}^{X} - \dfrac{1}{m}\vec{F} \cdot \dfrac{\partial S}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

On synthétise ces équations $\begin{Bmatrix} E_u \\ E_v \end{Bmatrix}$, on pose :

$$\begin{cases} E_u: D_{uu}\ddot{u} + P_{uv}\ddot{v} + R_u = 0 \\ E_u: D_{vv}\ddot{v} + P_{uv}\ddot{u} + R_v = 0 \end{cases}$$

Avec :

- $\boxed{D_{uu} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \Big]_{\sum x,y,z}^{X}}$ et $\boxed{D_{vv} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \Big]_{\sum x,y,z}^{X}}$
- $\boxed{P_{uv} = \frac{\partial X}{\partial \mathrm{u}} \frac{\partial X}{\partial v}\Big]_{\sum x,y,z}^{X}}$
- $R_u = \frac{\partial X}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2\right)\Big]_{\sum x,y,z}^{X} - \frac{1}{m}\vec{F}\cdot\frac{\partial S}{\partial u} = 0$
  - $\Gamma = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\boldsymbol{T}} H_{S_{\boldsymbol{X}}}\dot{\boldsymbol{\omega}}\Big]_{x,y,z}^{X} - \frac{1}{m}\vec{F}$
  - $\boxed{R_u = \Gamma\cdot\frac{\partial S}{\partial u}}$
- $R_v = \frac{\partial X}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\dot{v}^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\dot{u}^2\right)\Big]_{\sum x,y,z}^{X} - \frac{1}{m}\vec{F}\cdot\frac{\partial S}{\partial v} = 0$
  - $\boxed{R_v = \Gamma\cdot\frac{\partial S}{\partial v}}$

Simplification,

On va transformer ce système en ODE de la forme :

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ODE:u}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) \\ f_{ODE:v}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) \end{bmatrix}$$

En reprenant le système plus haut on a :

$$\begin{cases} E_u: \ddot{u} = -\dfrac{P_{uv}\ddot{v} + R_u}{D_{uu}} \\ E_u: \ddot{v} = -\dfrac{P_{uv}\ddot{u} + R_v}{D_{vv}} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{u}$ et $\ddot{v}$ on a :

$$\begin{cases} E_u: D_{uu}\ddot{u} - P_{uv}\dfrac{P_{uv}\ddot{u} + R_v}{D_{vv}} + R_u = 0 \\ E_u: D_{vv}\ddot{v} - P_{uv}\dfrac{P_{uv}\ddot{v} + R_u}{D_{uu}} + R_v = 0 \end{cases}$$

Enfin on a :

$$\begin{cases} E_u: \left[D_{uu} - \dfrac{P_{uv}^2}{D_{vv}}\right]\ddot{u} + R_u - R_v\dfrac{P_{uv}}{D_{vv}} = 0 \\ E_u: \left[D_{vv} - \dfrac{P_{uv}^2}{D_{uu}}\right]\ddot{v} + R_v - R_u\dfrac{P_{uv}}{D_{uu}} = 0 \end{cases}$$

On a donc notre ODE :

$$\begin{cases} E_u : \ddot{u} = \dfrac{R_v P_{uv} - R_u D_{vv}}{D_{uu} D_{vv} - P_{uv}^2} \\ E_u : \ddot{v} = \dfrac{R_u P_{uv} - R_v D_{uu}}{D_{uu} D_{vv} - P_{uv}^2} \end{cases}$$

On pourra évaluer et interpréter les grandeurs plus tard ou en les exprimant :

- $D = D_{uu} D_{vv} - P_{uv}^2$
- $R_u P_{uv} - R_v D_{uu}$ et $R_v P_{uv} - R_u D_{vv}$

Méthode de résolution numérique

On Calcule les grandeurs principales:

| |
|---|
| $X(u, v)$ |
| $Y(u, v)$ |
| $Z(u, v)$ |
| $\partial_u X$ |
| $\partial_v X$ |
| $\partial_u Y$ |
| $\partial_v Y$ |
| $\partial_u Z$ |
| $\partial_v Z$ |
| $\partial_u^2 X$ |
| $\partial_{u,v}^2 X$ |
| $\partial_v^2 X$ |
| $\partial_u^2 Y$ |
| $\partial_{u,v}^2 Y$ |
| $\partial_v^2 Y$ |
| $\partial_u^2 Z$ |
| $\partial_{u,v}^2 Z$ |
| $\partial_v^2 Z$ |

On calcul les grandeurs intermédiaires :

- $D_{uu} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \Big]_{\sum x,y,z}^{X}$ et $D_{vv} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \Big]_{\sum x,y,z}^{X}$
- $P_{uv} = \frac{\partial X}{\partial \mathrm{u}} \frac{\partial X}{\partial v} \Big]_{\sum x,y,z}^{X}$
- $\Gamma = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \dot{v}^2 \Big]_{\sum x,y,z}^{X} - \frac{1}{m} \vec{F}$
- $R_u = \Gamma \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 0$
- $R_v = \Gamma \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0$
- $D = D_{uu} D_{vv} - P_{uv}^2$

Notre vecteur d'état est :

$$s = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

Dans notre résolution numérique, notre temps est discret et on note :

$$s_n = s(n\delta t)$$

On fait évoluer notre vecteur d'état $s$ de la manière suivante :

$$s_{n+1} = s_n + \delta t \frac{ds_n}{dt}$$

La dérivée de noter état au temps $t = n\delta t$ est :

$$\frac{ds(t)}{dt} = s_n = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dfrac{R_v P_{uv} - R_u D_{vv}}{D} \\ \dot{v} \\ \dfrac{R_u P_{uv} - R_v D_{uu}}{D} \end{bmatrix}$$

Si on considère une force de frottement en $-\mu \boldsymbol{v}_A$, où $\mu$ est une constante et $\boldsymbol{v}_A$ la vitesse du solide, on a donc :

$$\vec{F} = \overrightarrow{F'} - \mu \boldsymbol{v}_A$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} = \overrightarrow{F'} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} - \mu \boldsymbol{J_S}(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \vec{F} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} = \overrightarrow{F'} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} - \mu \boldsymbol{J_S}(\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

Il faut ainsi modifier les expressions de $R_u$ et $R_v$ pour prendre en compte le frottement

**Todo :**

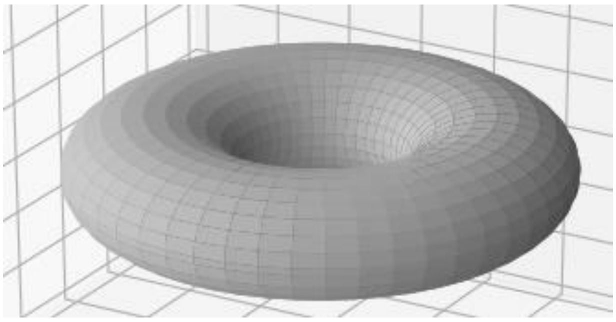
- Lorsque $X$ dépend de $u$ mais ne dépend pas de $v$ on retrouve l'équation du cas d'une courbe paramétrique

Expressions that will needed to evaluate the model :

| **Vectoral Symbol** | **Scalar Symbol** | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{S}(u,v)$ | $x(u,v)$ | |
| | $y(u,v)$ | |
| | $z(u,v)$ | |
| $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{S}}(u,v)$ | $\partial_u S_x$ | $\partial_v S_x$ |
| | $\partial_u S_y$ | $\partial_v S_y$ |
| | $\partial_u S_z$ | $\partial_v S_z$ |
| $H_{\boldsymbol{S}_x}(u,v)$ | $\partial_u^2 S_x$ | . |
| | $\partial_{u,v}^2 S_x$ | $\partial_v^2 S_x$ |
| $H_{\boldsymbol{S}_y}(u,v)$ | $\partial_u^2 S_y$ | . |
| | $\partial_{u,v}^2 S_y$ | $\partial_v^2 S_y$ |
| $H_{\boldsymbol{S}_z}(u,v)$ | $\partial_u^2 S_z$ | . |
| | $\partial_{u,v}^2 S_z$ | $\partial_v^2 S_z$ |

**Initialisation - Context : Tore $r = 0.25$ et $R = 1.0$**

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore



| Symbol | Domain Min | Domain Max | $n$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | $2\pi$ | 50 | |
| $v$ | 0 | $2\pi$ | 50 | |
| $x(u,v)$ | | | | |
| $y(u,v)$ | | | | |
| $z(u,v)$ | | | | |

**Expressions**

| Vectoral Symbol | Scalar Symbol | Expression | $u = 0$ $v = 0$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{S}(u,v)$ | $X$ | $(R + r\cos v)\cos u$ | $R + r$ |
| | $Y$ | $(R + r\cos v)\sin u$ | 0 |
| | $Z$ | $r\sin v$ | 0 |
| $\boldsymbol{J_S}(u,v)$ | $\partial_u X$ | $-Y$ | 0 |
| | $\partial_v X$ | $-r\sin v\cos u$ | 0 |
| | $\partial_u Y$ | $X$ | $R + r$ |
| | $\partial_v Y$ | $-r\sin v\sin u$ | 0 |
| | $\partial_u Z$ | 0 | 0 |
| | $\partial_v Z$ | $r\cos v$ | $r$ |
| $H_{S_x}(u,v)$ | $\partial_u^2 X$ | $-X$ | 0 |
| | $\partial_{u,v}^2 X$ | $r\sin v\sin u = -\partial_v Y$ | 0 |
| | $\partial_v^2 X$ | $-r\cos v\cos u = -\partial_v Z\cos u$ | $-r$ |
| $H_{S_y}(u,v)$ | $\partial_u^2 Y$ | $-Y$ | 0 |
| | $\partial_{u,v}^2 Y$ | $-r\sin v\cos u = -\partial_v X$ | 0 |
| | $\partial_v^2 Y$ | $-r\cos v\sin u = -\partial_v Z\sin u$ | 0 |
| $H_{S_z}(u,v)$ | $\partial_u^2 Z$ | 0 | 0 |
| | $\partial_{u,v}^2 Z$ | 0 | 0 |
| | $\partial_v^2 Z$ | $-Z$ | 0 |

**Intermediate symbols**

| Symbol | Expression | |
|---|---|---|
| $D_{uu}$ | $-(X+Y)$ | 0 |
| $D_{vv}$ | $-\partial_v Z(\cos u + \sin u) - Z$ | |
| $P_{uv}$ | $(Y\cos u - X\sin u)r\sin v$ | |
| $R_u(\dot{u},\dot{v})$ | … | |
| $R_v(\dot{u},\dot{v})$ | … | |

**Initialisation – Context**

| Symbol | Domain Min | Domain Max | $\boldsymbol{n}$ | $\boldsymbol{\Delta}$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | | | | |
| $v$ | | | | |
| $x(u,v)$ | | | | |
| $y(u,v)$ | | | | |
| $z(u,v)$ | | | | |

**Expressions**

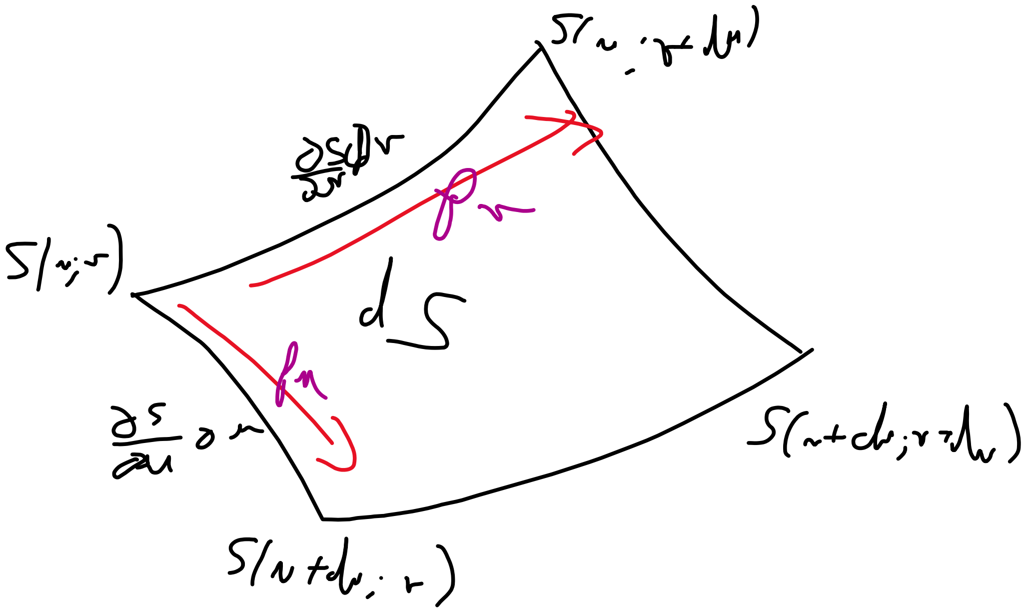
| Vectoral Symbol | Scalar Symbol | Expression | $\boldsymbol{u} =$ <br> $\boldsymbol{v} =$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{S}(u,v)$ | $X$ | | |
| | $Y$ | | |
| | $Z$ | | |
| $\boldsymbol{J_S}(u,v)$ | $\partial_u X$ | | |
| | $\partial_v X$ | | |
| | $\partial_u Y$ | | |
| | $\partial_v Y$ | | |
| | $\partial_u Z$ | | |
| | $\partial_v Z$ | | |
| $H_{\boldsymbol{S}_x}(u,v)$ | $\partial_u^2 X$ | | |
| | $\partial_{u,v}^2 X$ | | |
| | $\partial_v^2 X$ | | |
| $H_{\boldsymbol{S}_y}(u,v)$ | $\partial_u^2 Y$ | | |
| | $\partial_{u,v}^2 Y$ | | |
| | $\partial_v^2 Y$ | | |
| $H_{\boldsymbol{S}_z}(u,v)$ | $\partial_u^2 Z$ | | |
| | $\partial_{u,v}^2 Z$ | | |
| | $\partial_v^2 Z$ | | |

**Intermediate symbols**

| Symbol | Expression | |
|---|---|---|
| $D_{uu}$ | | |
| $D_{vv}$ | | |
| $P_{uv}$ | | |
| $R_u(\dot{u},\dot{v})$ | | |
| $R_v(\dot{u},\dot{v})$ | | |

**Calcul de surface :**

Soit $S$ la surface définie et paramétrisée par $u, v \in U \times V$ où $U$ et $V$ sont des intervalles de $R$.




L'aire du parallélépipède infinitésimale est :

$$dS = \|f_u \wedge f_v\| \partial u \partial v$$

On a donc la surface totale de l'objet :

$$S = \int_{u,v \in U \times V} \|f_u \wedge f_v\| \partial u \partial v$$

Or on a que :

$$\|f_u \wedge f_v\|^2 = \|f_u\|^2 \|f_v\|^2 - (f_u \cdot f_v)^2$$

Si on pose :

$$E = \|f_u\|^2 = \left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|^2$$
$$F = \|f_v\|^2 = \left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|^2$$
$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\right)^2$$

On a donc :

$$S = \int_{u,v \in U \times V} \sqrt{EF - G^2} \partial u \partial v$$

Exemple du cylindre :

$$U = [0, 2\pi]$$
$$V = [0, 1]$$

$$S = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{bmatrix}$$

$$f_u = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a :

$$E = F = 1$$
$$G = 0$$

Donc

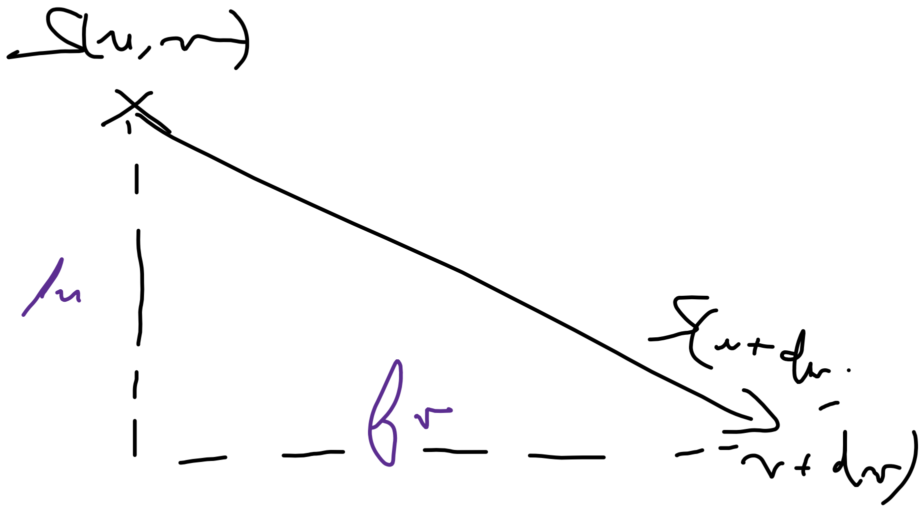
$$S = \int_{u,v \in U \times V} 1 \partial u \partial v = \boldsymbol{2\pi}$$

Définition discrète :

$$f_u(k,i) = \frac{\partial S}{\partial u}(k\Delta u, i\Delta v)$$
$$f_v(k,i) = \frac{\partial S}{\partial v}(k\Delta u, i\Delta v)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\|f_u\|^2 \|f_v\|^2 - (f_u \cdot f_v)^2}$$

**Calcul de distance :**




$$\overrightarrow{dl} = \boldsymbol{S}(u+du, v+dv) - \boldsymbol{S}(u,v)$$
$$\overrightarrow{dl} = \boldsymbol{S}(u+du, v+dv) - \boldsymbol{S}(u+du, v) + \boldsymbol{S}(u+du, v) - \boldsymbol{S}(u,v)$$
$$\overrightarrow{dl} = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\partial u + \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\partial v$$
$$dl = \left\|\overrightarrow{dl}\right\| = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\partial u + \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\partial v\right\| = \left\|\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\partial u\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\partial u\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\partial v\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\partial v\right)^2\right\|$$

Or $\frac{\partial S}{\partial u} \perp \frac{\partial S}{\partial v}$, on a donc :

$$dl = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial u}\partial u\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial v}\partial v\right)^2}$$

Longueur totale :

$$L = \int_{\omega_0}^{\omega_1} dl$$

To continue

Sur une surface : si deux géodésiques distinctes se croise deux fois exactement (qui se ferment ?), la surface paramétrée admet des singularité (ex sphère alors que tore non).

Caractérisations des surfaces par les géodésiques (cours de C Villani)