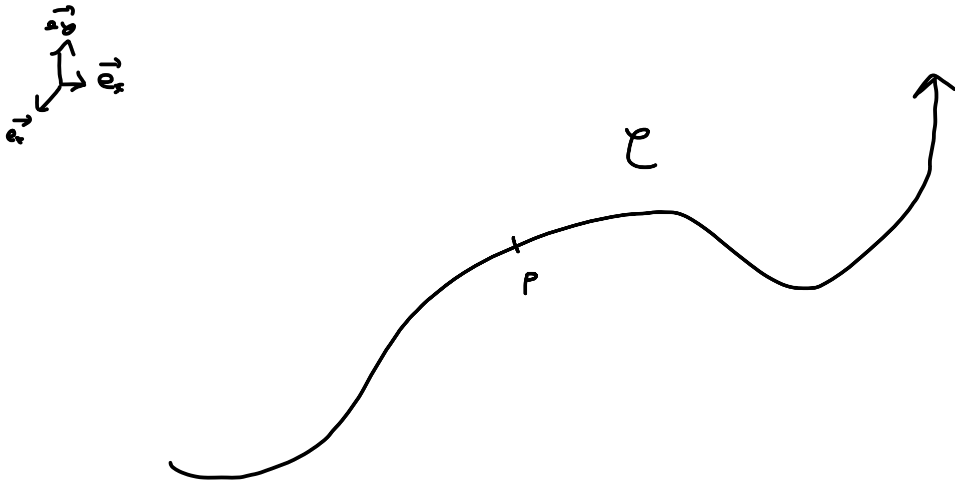
Y Soit une courbe paramétrique $\vec{C}(p) = \begin{pmatrix} \lambda(p) \\ \gamma(p) \\ \sigma(p) \end{pmatrix}$



Soit un solide M de masse m glissant sur la courbe paramétrée

$$\vec{C} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$p \to \vec{C}(p)$$

la position du solide M au temps t est $\vec{X}(t)$ ceci implique que $\forall t \exists! p \backslash \vec{X}(t) = \vec{C}(p)$ on note cette valeur de p : $p(t)$.

Bilan des forces, la force $\vec{F}(\vec{X}, t)$ s'exerce sur le solide M ainsi que la force de réaction du support $\vec{C}$ sur M on note cette force $\vec{R}(\vec{X}, t)$

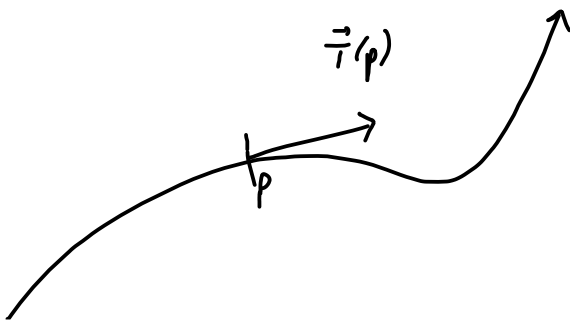
Principe fondamental de la dynamique appliqué au solide M :

$$m \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \vec{F} + \vec{R}$$

Développement :

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \vec{C}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \vec{C}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \vec{C}}{\partial p}\right]\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \vec{C}}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial \vec{C}}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

On note : $\frac{\partial p}{\partial t} = \dot{p}$ et $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \ddot{p}$ et $\frac{\partial \vec{C}}{\partial p} = \vec{T}$ et $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial p^2} = \overrightarrow{T'}$ où $\vec{T}$ représente la direction de la tangente à la courbe $\vec{C}$



$$\vec{C}(p + dp) = \vec{C}(p) + \vec{T}(p)dp$$

L'accélération de l'objet s'exprime donc ainsi :

$$\vec{a} = \vec{T}\ddot{p} + \overrightarrow{T'}\dot{p}^2$$

D'où l'équation différentielle :

$$m\left(\vec{T}\ddot{p} + \vec{T'}\dot{p}^2\right) = \vec{F} + \vec{R}$$

Il s'agit désormais de déterminer l'expression de $\vec{R}$ en fonction des autres paramètres de l'équation.

On sait que $\vec{R}$ est une force de réaction de la courbe sur le solide, donc $\vec{R}$ est perpendiculaire à la courbe $\vec{C}$:

$$\vec{R} \cdot \vec{T} = 0$$

En réutilisant l'équation différentielle et en effectuant le produit scalaire avec $\vec{T}$

$$m\left(\vec{T}\ddot{p} + \vec{T'}\dot{p}^2\right) \cdot \vec{T} = \vec{F} \cdot \vec{T} + \vec{R} \cdot \vec{T}$$

Après simplification de l'équation

$$m\left(T^2\ddot{p} + \vec{T'} \cdot \vec{T}\dot{p}^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{T}$$

D'où l'équation différentielle du mouvement

$$\boxed{\ddot{p} + \frac{\vec{T'} \cdot \vec{T}}{T^2}\dot{p}^2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{T}}{mT^2}}$$

Or la relation vectorielle : $\vec{A}(p)$

$$\frac{\partial \vec{A}^2}{\partial p} = 2\vec{A} \cdot \vec{A'}$$

Ou

$$\boxed{\ddot{p} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^2}{\partial p}\frac{1}{T^2}\dot{p}^2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{T}}{mT^2}}$$

Prises en compte du frottement : on considère un frottement visqueux du guide sur la masse, on a désormais

$$\vec{R} \cdot \vec{T} = -\mu v T = -\mu\left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right| T = -\mu\frac{\partial p}{\partial t}T^2$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$m\left(T^2\ddot{p} + \vec{T'} \cdot \vec{T}\dot{p}^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{T} - \mu\frac{\partial p}{\partial t}T^2$$

$$\boxed{\ddot{p} + \frac{\mu}{m}\dot{p} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^2}{\partial p}\frac{1}{T^2}\dot{p}^2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{T}}{mT^2}}$$

Sources :

https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/node3.html

Synthèse :

Soit une courbe $\vec{C}(p)$ dont la dérivée s'écrit $\vec{T}$. Et une masse ponctuelle $M(m)$ se déplaçant sans frottement sur la courbe $\vec{C}$ et soumise à une force $\vec{F}$.

L'équation différentielle régissant le mouvement de M est :

$$\ddot{p} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^2}{\partial p}\frac{1}{T^2}\dot{p}^2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{T}}{mT^2}$$

Avec frottement visqueux sur le guide :

$$\ddot{p} + \frac{\mu}{m}\dot{p} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^2}{\partial p}\frac{1}{T^2}\dot{p}^2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{T}}{mT^2}$$

Formulation équivalente :

$$T^2\ddot{p} + T^2\frac{\mu}{m}\dot{p} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^2}{\partial p}\dot{p}^2 = \frac{1}{m}\vec{F} \cdot \vec{T}$$

Exemple : Rampe

On considère une rampe d'inclinaison α, sans frottement la courbe s'écrit en dimension 2 :

$$\vec{C}(p) = p \times \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(p) = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$T^2 = 1 \text{ et } \frac{\partial T^2}{\partial p} = 0$$

On considère l'unique force de gravité : $\vec{F} = \vec{P} = -mg\overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

L'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{p} + g\sin\alpha = 0$$

Comme $\vec{X}(t) = \vec{C}(p)$ on a $x(t) = p(t)\cos\alpha$ et $y(t) = p(t)\sin\alpha$

On a $\ddot{x} = -\frac{g}{2}\sin 2\alpha$ et $\ddot{y} = -g\sin^2\alpha$

Exemple : Isochrone de Leibniz

On considère la courbe de Leibniz d'équation : $\frac{9V_0^2}{8g}x^2 = y^3$ qui se traduit par la courbe paramétrique avec $y = p$:

$$\vec{C}(p) = \begin{pmatrix} p^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2g}}{V_0} \\ p \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2g}}{V_0}\sqrt{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}^2 = 1 + \frac{2g}{V_0^2}p = 1 + kp$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial p} = \frac{2g}{V_0^2} = k\ [L^{-1}]$$

D'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{p}(1 + kp) + \frac{1}{2}k\dot{p}^2 = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \vec{T}$$

D'où :

$$\ddot{p}(1 + kp) + \frac{1}{2}k\dot{p}^2 + g = 0$$

Si on considère $\dot{p} = v = cte$ on a $\ddot{p} = 0$ et $1 + kp = cte$ et on a donc :

$$\frac{1}{2}kv^2 + g = 0 \Leftrightarrow v^2 = -\frac{2g}{k}V_0^2$$

D'où enfin : $v = V_0$

Vitesse verticale constante