**Mouvement guidée par une surface**

Lucas DIETRICH ([www.ldietrich.fr](http://www.ldietrich.fr))

**Glossaire et symboles :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Name** | **Expression** |
|  | Parametric position *DIM (2)* |  |
|  | Parametric speed *DIM (2)* |  |
|  | Position  *DIM (3)* |  |
|  | Speed  *DIM (3)* |  |
|  | Force  *DIM (3)* |  |
|  | Jacobian  *DIM* |  |
|  | Hessian[  *DIM = (2, 2)* |  |
|  | -space  -space *DIM (n)* |  |
|  | Mesh *DIM (2, n)* |  |
|  | Surface Mesh  *DIM (n, 3)* |  |

**A vérifier :**

* Si un objet n’est pas soumis à aucune force, le solide suit des géodésiques.
* Caractériser les géodésiques
  + Associer les géodésiques à du, dv et à la Hessienne
  + Trouver une paramétrisation qui est constante sur une géodésique

Contexte et hypothèse :

* On se passe dans un contexte théorique de mécanique classique, les objets étudiées sont des [surfaces au sens physiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_(physique)) (continue, , jacobienne et Hessienne, indéformables) et des masses ponctuelles (on ne considère donc pas l’inertie de rotation).
* La résolution numérique est basée sur le théorème fondamental de la dynamique (Loi de Newton) qui admet comme éléments centraux la force et la quantité de mouvement.

\*\*

**Introduction et notations :**

Dans ce document on étudie le mouvement en fonction du temps (trajectoire et vitesse) d’un solide ponctuel se déplaçant sur une surface (guide) et soumis à différentes forces : .

On considère une surface paramétrique :

et sont des paramètres qui dépendent du temps :

On notera :

On a ainsi, un objet paramétré par au temps est repéré par sa positon :

**Autres notations :**

* On notera en gras les vecteurs et sans style les scalaires .
* On omettra souvent les paramètres des fonctions
  + devient
  + devient ou simplement
* La dérivée partielle d’un scalaire se condensera avec l’écriture
* Double dérivation
* On note le vecteur à 3 coordonnées ()
  + On peut aussi appliquer cette notation aux matrices, par exemple la jacobienne s’exprime :
  + Ainsi si on veut exprimer la somme des éléments du vecteur on écrira :
* La dérivation par rapport au temps de la grandeur se note avec un point :

**Vitesse :**

La variation de position par rapport au temps peut se calculer :

Où est la jacobienne de  : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_jacobienne>

On a donc l’expression de la vitesse d’un point :

Expression complète :

**Accélération :**

Dérivation naïve du vecteur vitesse :

Comme et dépendent de et , on a :

Enfin on a :

En prenant l’expression matricielle on a :

En dérivant le produit on obtient :

On évalue la dérivée de la matrice jacobienne par rapport au temps :

Avec les calculs précédents on a donc immédiatement :

On peut exprimer cette ligne à l’aide de la matrice Hessienne :

On a donc :

Or comme est symétrique ([Théorème de Schwarz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Schwarz#:~:text=Le%20th%C3%A9or%C3%A8me%20de%20Schwarz%2C%20de,alors%20Hermann%20Schwarz%20%C3%A0%20Berlin.)) on a donc:

Où est la Hessienne « vectorielle » de .

Expression complète de l’accélération :

On remarque que :

Ainsi on a la formulation finale :

Formulation explicite :

**Théorème fondamental de la dynamique :**

Inventaire des actions mécaniques :

* est une force quelconque s’appliquant sur le solide
* est la réaction de la surface sur le solide, est perpendiculaire à l’élément de surface.

Avec la définition - Normale à une surface :

* <https://fr.wikipedia.org/wiki/Normale_%C3%A0_une_surface#Vecteur_normal_en_un_point_r%C3%A9gulier>

On a donc :

Le vecteur est bien perpendiculaire à la surface sur deux directions :

En appliquant le produit scalaire à la relation fondamentale de la dynamique vers deux directions :

On obtient ainsi deux équations : scalaires :

Les deux équations deviennent pour  :

En explicitant et réarrangeant les termes :

On synthétise ces équations , on pose :

Avec :

* et

Simplification,

On va transformer ce système en ODE de la forme :

En reprenant le système plus haut on a :

En remplaçant et on a :

Enfin on a :

On a donc notre ODE :

On pourra évaluer et interpréter les grandeurs plus tard ou en les exprimant :

* et

Méthode de résolution numérique

On Calcule les grandeurs principales:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

On calcul les grandeurs intermédiaires :

* et

Notre vecteur d’état est :

Dans notre résolution numérique, notre temps est discret et on note :

On fait évoluer notre vecteur d’état de la manière suivante :

La dérivée de noter état au temps est :

Si on considère une force de frottement en , où est une constante et la vitesse du solide, on a donc :

Ce qui donne :

Il faut ainsi modifier les expressions de et pour prendre en compte le frottement

**Todo :**

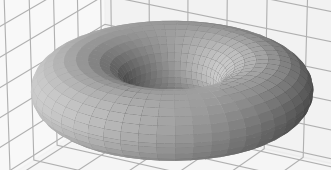
* Lorsque dépend de mais ne dépend pas de on retrouve l’équation du cas d’une courbe paramétrique

Expressions that will needed to evaluate the model :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Vectoral Symbol** | **Scalar Symbol** | |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Initialisation - Context : Tore et**

* <https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore>



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Domain Min** | **Domain Max** |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Expressions**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Vectoral Symbol** | **Scalar Symbol** | **Expression** |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Intermediate symbols**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Expression** |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  | … |  |
|  | … |  |

**Initialisation – Context**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Domain Min** | **Domain Max** |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Expressions**

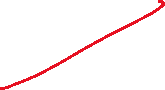
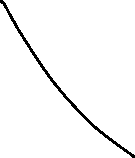
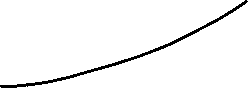
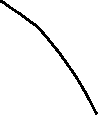
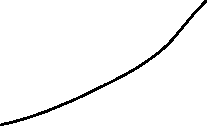
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Vectoral Symbol** | **Scalar Symbol** | **Expression** |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Intermediate symbols**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Expression** |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Calcul de surface :**

Soit la surface définie et paramétrisée par où et sont des intervalles de .



L’aire du parallélépipède infinitésimale est :

On a donc la surface totale de l’objet :

Or on a que :

Si on pose :

On a donc :

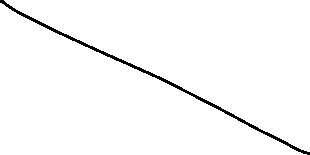
Exemple du cylindre :

On a :

Donc

Définition discrète :

**Calcul de distance :**



Or , on a donc :

Longueur totale :

To continue

Sur une surface : si deux géodésiques distinctes se croise deux fois exactement (qui se ferment ?), la surface paramétrée admet des singularité (ex sphère alors que tore non).

Caractérisations des surfaces par les géodésiques (cours de C Villani)