(13.10.2021)

Laborator 2 - reducere sist. de forțe

Forța - mărime vectorială ce reflectă interacțiunea dintre două corpuri
- $[F]_{SI} = 1N$ (Newton)

$$\bar{F} = \bar{F_x} + \bar{F_y} + \bar{F_z} = \boxed{F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}}$$

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$ - modulul forței

! Forțele sunt vectori alunecători, adică forța F poate fi deplasată pe propriul suport

!

Momentul unei forțe în raport cu punctul O

$$\boxed{\bar{M_0} = \bar{r} \times \bar{F}}$$

Vectorul $\bar{M_0}$ are:
- punctul de aplicație în O
- direcția perpendiculară pe planul format de forță și pct O
- sensul este dat de regula burghiului sau mâinii drepte
- modulul: $\boxed{M_0 = r \cdot F \cdot \sin(\bar{r}, \bar{F}) = F \cdot d}$, unde

d = brațul forței

- Dacă $\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$ cu pct de aplicație în $A(x, y, z)$ atunci mom. forței în raport cu pct. O este:

$$\bar{M_0} = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}$$

$= M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k}$

$$\boxed{M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}}$$ - modulul

• Momentul forței față de un alt pct. O_1 este diferit

$$\overline{M_{O1}} = \overline{O_1A} \times \bar{F} = (\bar{r} + \overline{O_1O}) \times \bar{F}$$

$$= \bar{r} \times \bar{F} + \overline{O_1O} \times \bar{F} = \overline{M_O} + \overline{O_1O} \times \bar{F}$$

$$\boxed{\overline{M_{O1}} = \overline{M_O} - \overline{OO_1} \times \bar{F}}$$

Reducerea sist. de forțe în rap. cu pct O

→ A reduce un sist. de forțe într-un pct presupune a găsi un sist echivalent de forțe care să producă același efect ca și sist. de forțe dat.

• Forța rezultantă:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F_i}$$

• cuplul rezultant prin momentul:

$$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r_i} \times \bar{F_i}$$

- se formează sist echivalent care se numește:

torsorul de reducere notat $\tau_O(\bar{R}, \overline{M_O})$

Obs: la schimbarea pct. de reducere, forța rezultantă $\bar{R}$ nu se schimbă dar mom

$$\overline{M_{O1}} = M_O$$

Scanned with CamScanner

Momentul minimal sau redus

$$\boxed{M_R = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M_0}}{R} = \frac{\overline{R}}{R}\cdot\overline{M_0}}$$

versorul rezultantei

- reprezintă proiecția momentului $\overline{M_0}$ pe rezultanta $\overline{R}$.

$$\overline{M_R} = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M_0}}{R^2}\cdot\overline{R}$$ (pt că M_R este coliniar cu $\overline{R}$)

- se obține torsorul minimal $T_0(\overline{R}, \overline{M_R})$

Ecuația axei centrale (intersecția a două plane)

$$\frac{M_{0x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

→ În cazul unor forțe coplanare ec. axei cent. este:

$$M_{0z} - (xR_y - yR_x) = 0$$

Cazurile de reducere

$\boxed{\text{I}}$ $\overline{R}\cdot\overline{M_0} \neq 0 \Rightarrow \overline{R} \neq 0$ și $\overline{M_0} \neq 0$ și se obține momentul minimal $\overline{M_R} \neq 0$. Deci sist. se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală

$\boxed{\text{II}}$ $\overline{R}\cdot\overline{M_0} = 0$, dar $\overline{R} \neq 0$ deci momentul min. $M_R = 0$

$\Rightarrow$ Sist. se reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală

Acest caz apare dacă:

$\left[\begin{array}{l} \overline{M_0} = 0 \rightarrow \text{deci pct de reducere } O \text{ se află pe axa cent.} \\ \overline{R} \perp \overline{M_0} \rightarrow \text{pct. nu se află pe axa cent. dar mom.} \end{array}\right.$

din pct. de reducere este egal cu momentul rezultantei pe axa centrală

$\boxed{III}$ $\overline{R} = 0$ și $M_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\overline{R} \cdot \overline{M_0} = 0$ - sist se reduce la cuplul $\overline{M} = \overline{M_0}$

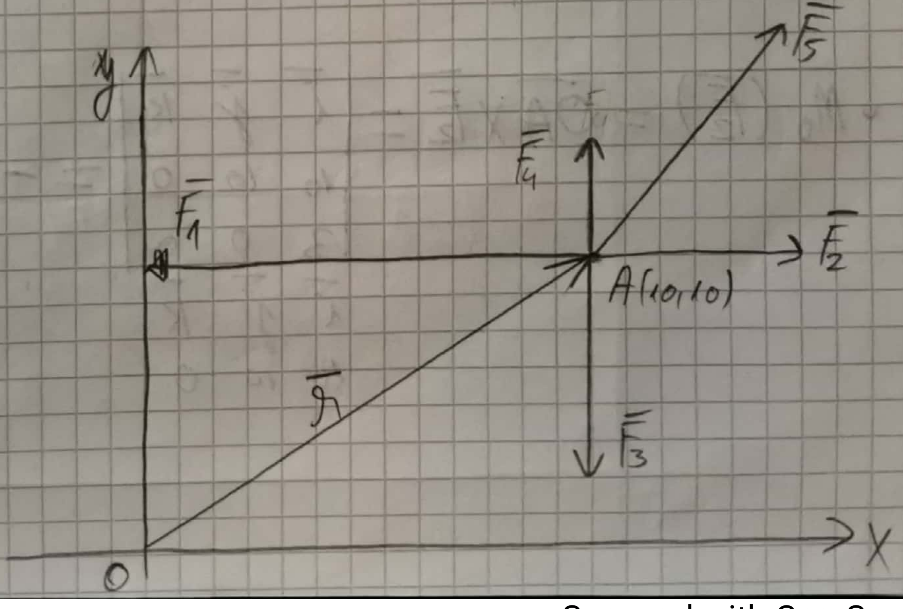
$\boxed{IV}$ $\overline{R} = 0$ și $\overline{M_0} = 0$ sistemul este în echilibru.

Probleme

① În pct. $A(\alpha, \beta)$ acționează sist. de 5 forțe având direcțiile ca în figură, iar mărimile lor sunt

$F_1 = 6N$ $F_2 = 3N$ $F_3 = 5N$ $F_4 = 2N$ $F_5 = 3\sqrt{2}N$

Să se găsească elementele torsorului de reducere în raport cu



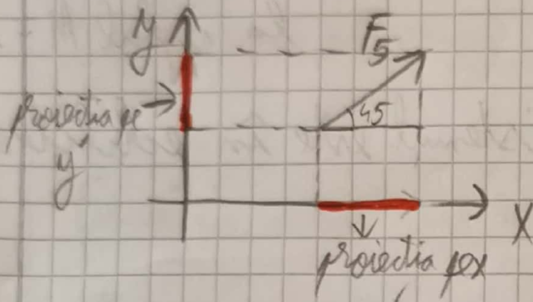
$\bar{F_1} = F_1(-\bar{i}) = -6\bar{i}$

$\bar{F_2} = F_2 \cdot \bar{i} = 3\bar{i}$

$\bar{F_3} = F_3(-\bar{j}) = -5\bar{j}$

$\bar{F_4} = F_4 \cdot \bar{j} = 2\bar{j}$

$\bar{F_5} = F_5 \cos 45 \cdot \bar{i} + F_5 \cdot \sin 45 \, \bar{j} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$



$\Rightarrow \bar{R} = \sum_{i=1}^{5} \bar{F_i} = \bar{F_1} + \bar{F_2} + \bar{F_3} + \bar{F_4} + \bar{F_5} = -6\bar{i} + 3\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{j} + 3\bar{i} + 3\bar{j}$

$\Rightarrow \bar{R} = 0$

- $\bar{M_0}(\bar{F_1}) = \bar{r} \times \bar{F_1} = \bar{OA} \times \bar{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$\bar{M_0}(\bar{F_1}) = 60\bar{k}$

- $\bar{M_0}(\bar{F_2}) = \bar{OA} \times \bar{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\bar{k}$

$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \end{matrix}$

$$\bullet\ \bar{M}_0(\bar{F}_3) = \overline{OA} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = +50\bar{k}$$

$$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \end{matrix}$$

$$\bullet\ M_0(\bar{F}_4) = \overline{OA} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20\bar{k}$$

$$\bullet\ M_0(\bar{F}_5) = \overline{OA} \times \bar{F}_5 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{3k} + 30\bar{k} - 30\bar{k} = 0$$

$$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \end{matrix}$$

Momentul rezultant:

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{5} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_0(\bar{F}_1) + \dots + \bar{M}_0(\bar{F}_5)$$

$$= 60\bar{k} - 30\bar{k} - 50\bar{k}$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{M}_0 = 0 \\ \bar{R} = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{sistemul este în echilibru}$$

Scanned with CamScanner

② Sist de 4 forte aplicate ca în figură

$F_1 = 5N$ cu pct de aplicație $A_1(2,\alpha)$

$F_2 = 3N$ — " — $A_2(18,\beta)$

$F_3 = 5N$ — " — $A_3(\gamma,17)$

$F_4 = 5N$ — " — $A_4(\theta,9)$

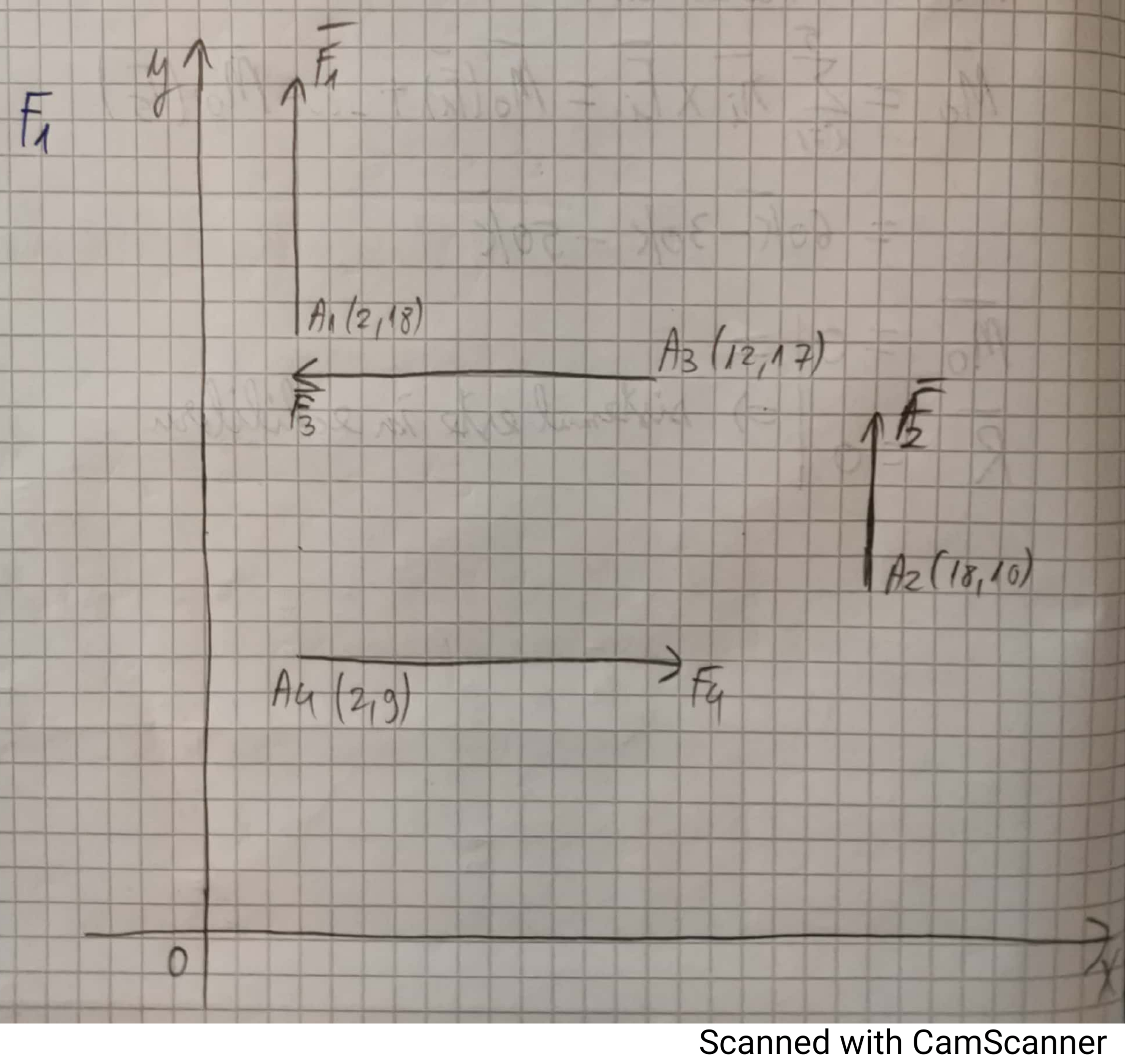
- Să se găsească torsorul de reducere

→ se exprimă analitic fiecare vector

→

→

→



$$\bar{F}_1 = F_1\bar{j} = 5\bar{j}$$
$$\bar{F}_2 = F_2\cdot\bar{j} = 3\bar{j}$$
$$\bar{F}_3 = F_3 \quad = -5\bar{i}$$
$$\bar{F}_4 = \quad = 5\bar{i}$$

$$\Rightarrow \bar{R} = 8\bar{j}$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = 8\bar{j}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1) = \overline{OA_1} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\bar{k}$$

$$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 18 & 0 \end{matrix}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2) = \overline{OA_2} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_3) = \overline{OA_3} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_4) = \overline{OA_4} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{10\bar{k}}\ -45\bar{k}$$

$$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 9 & 0 \end{matrix}$$

Momentul rezultant

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_0(\bar{F}_1) + \dots + \bar{M}_0(\bar{F}_4)$$

$$= 10k + 54k + 85k - 45k$$

$$\bar{M}_0 = 104k$$

Scanned with CamScanner

Elementele torsorului $\tau_0(\bar{F_i})$:

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F_i} = 8j \\ \bar{M_0} = \quad = 104k \end{cases}$$

Determinăm momentul minimal sau redus:

$$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M_0}}{R} = \frac{(8\bar{j}) \cdot (104\bar{k})}{\sqrt{8^2}} = 0 \quad (\text{pt că } \bar{j} \cdot \bar{k} = 0)$$

Deci ne aflăm în cazul 2:

$\bar{R} \cdot \bar{M_0} = 0$ dar $\bar{R} \neq 0$ se deduce mom. minimal $M_r = 0$. În consecință, torsorul minimal este format numai din rezultantă. Sist. de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală

Ecuația axei centrale:

$$M_{0z} = xR_y - yR_x$$

$$104 = x \cdot 8 - y \cdot 0$$

$$x = \frac{104}{8} = 13$$

Se obs. că axa cent. nu trece prin centrul de greutate al plăcii $C(10, 10)$ deci având:

- $\bar{R} = 8\bar{j}$ => sub acțiunea sist. de forțe apare o mișcare de translație după axa y și în același sens
- $\bar{M_0} = 104\bar{k}$ => sub acțiunea sist. de forțe apare o mișcare de rotație

(3) Asupra cubului acționează sist. de forțe din fig.

$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (direcția BO_1)

$F_2 = 2F$ (direcția D_1D)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (direcția AO_1)

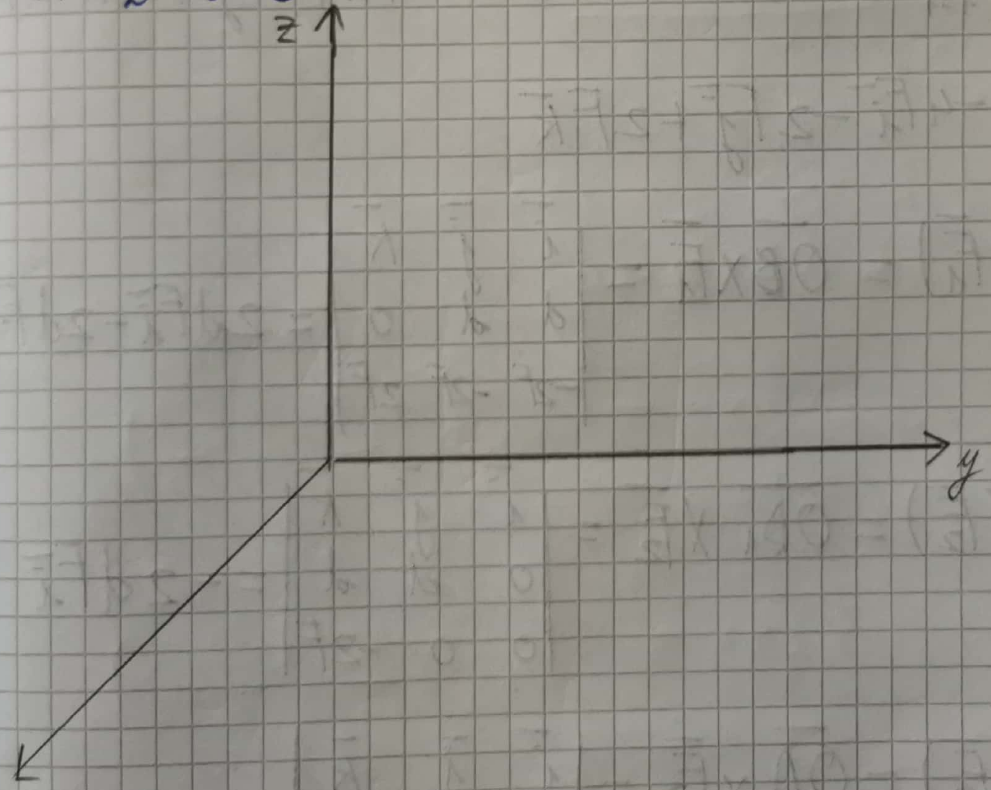
Să se det:

a) torsorul de reducere în pct O

b) torsorul în pct B

c) momentul minimal (redus)

d) axa centrală



$$\bullet\ \bar{F}_1 = F_1 \cdot \frac{\overline{BO_1}}{BO_1} = F_1 \cdot \frac{\overline{BA} + \overline{AO} + \overline{OO_1}}{BO_1}$$

$$\bar{F}_1 = 2\sqrt{3}F \frac{-d\bar{i} - d\bar{j} + d\bar{k}}{d\sqrt{3}}$$

$$\bar{F}_1 = -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

$$\bullet\ \bar{F}_2 = F_2 \cdot \frac{\overline{D_1D}}{D_1D} = 2F \cdot \frac{-d\bar{k}}{d} = -2F\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = -2F\bar{k}$$

$$\bullet\ \bar{F}_3 = F_3 \cdot \frac{\overline{AO_1}}{AO_1} = F_3 \cdot \frac{\overline{AO} + \overline{OO_1}}{AO_1} = 2\sqrt{2}F \cdot \frac{-d\bar{i} + d\bar{k}}{d\sqrt{2}}$$

$$\bar{F}_3 = -2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

$$\Rightarrow \bar{R} = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = -2F\bar{i} + 2F\bar{j} + 2F\bar{k} - 2F\bar{k} - 2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

$$\bar{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

$$\bullet\ \bar{M}_0(\bar{F}_1) = \overline{OB} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}$$

$$\bullet\ \bar{M}_0(\bar{F}_2) = \overline{OD_1} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{i}$$

$$\bullet\ \bar{M}_0(\bar{F}_3) = \overline{OA} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{j}$$

Scanned with CamScanner

Moment rezultant:

$$\overline{M_0} = \sum_{i=1}^{3} \overline{r_i} \times \overline{F_i} = 2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{i} - 2dF\overline{j}$$

$$\overline{M_0} = -4dF\overline{j}$$

Elementele torsorului $\tau_0(F_1)$:

$$\left\{ \right.$$

b) Elementeel torsorului în ~~raport~~ pct. B sunt:

Aceeași $\overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}$

$$\overline{M_B} = \overline{M_0} - \overline{OB} \times \overline{R} = -4dF\overline{j} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix} =$$

$$\overline{M_B} = -2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k}$$

$$\tau_B = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M_B} = -2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k} \end{cases}$$

c) Elem torsorului în pct O:

$$\tau_0 = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M_0} = -4dF\overline{j} \end{cases}$$

$$M_r = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_0}}{R} = \frac{(-4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}) \cdot (-4dF\overline{j})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}}$$

$M_r = \frac{8dF}{\sqrt{24}}$ (Există un singur moment minimal pt un sistem de forțe)

d) axa centrală

$\tau_0 = \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} \\ \bar{M}_0 = -4dF\bar{j} \end{cases}$

$\frac{M_{0x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} =$

$\frac{0 - (y(2F) - z(-2F))}{-4F} = \frac{-4dF - (z(-4F) - x(2F))}{-2F} =$

$= \frac{0 - (x(-2F) - y(-4F))}{2F}$

$\Rightarrow \begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4\cancel{z} - 4y = 0 \end{cases}$

Dacă $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{3} \\ z = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow P_1\left(\frac{d}{3}, 0, \frac{2d}{3}\right)$

Dacă $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5d}{3} \\ y = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow P_2\left(\frac{5d}{3}, \frac{2d}{3}, 0\right)$