El BichiGol

UTN FRSF - El Rejunte

2017



${\bf \acute{I}ndice}$

1.	C/C++	3
	1.1. I/O	3
	1.1.1. scanf Format Strings	3
	1.1.2. printf Format Strings	3
2.	Template del Rejunte	5
3.	Estructuras de datos	5
	3.1. Set Mejorado	5
	3.2. Union Find	5
	3.3. Hash Table	6
	3.4. RMQ	6
	3.4.1. RMQ (static)	6
	3.4.2. RMQ (dynamic)	6
	3.4.3. RMQ (lazy)	6
	3.4.4. RMQ (persistente)	7
	3.5. BIGInt	7

4. Algoritmos	8
4.1. Longest Increasing Subsecuence	8
4.2. Mo's	,
5. Strings	9
5.1. KMP	Ç
5.2. Z function	Ç
5.3. Trie	10
5.4. Manacher	1
5.5. Aho Corasick	10
6. Geometría	1
6.1. Punto	1
6.2. Orden Radial de Puntos	1
6.3. Linea	1
6.4. Segmento	1
6.5. Rectangulo	1:
6.6. Circulo	1:
6.7. Area de poligono	13
6.8. Punto en poligono	13
6.9. Punto en Poligono Convexo	1
6.10. Chequeo de Convex	1
6.11. Convex Hull	1
6.12. Cortar poligono	1
6.13. Intersección de Circulos	1
6.14. Rotar Matriz	
7. Matemática	1
7.1. Identidades	1
7.2. Ec. Caracteristica	
7.3. Teorema Chino del Resto	
7.4. GCD & LCM	1.

UΊ	'N FRSF - El Rejunte			HCE
	7.5. Euclides Extendido	15	10.Juegos	28
	7.6. Combinatoria	15	10.1. Nim Game	28
	7.7. Exponenciación de Matrices y Fibonacci	16	10.1.1. Misere Game	28
	7.8. Operaciones Modulares	16	10.2. Ajedrez	29
	7.9. Funciones de Primos	17	10.2.1. Non-Attacking N Queen	29
	7.10. Phollard's Rho	18	11.Utils	29
	7.11. Inversos	18	11.1. Convertir string a num e viceversa	29
	7.12. Fracciones	18	11.2. Truquitos para entradas/salidas	29
	7.13. Simpson	19	11.3. Comparación de Double	29
	7.14. Tablas y cotas (Primos, Divisores, Factoriales, etc)	19	11.4. Iterar subconjuntos	29
	7.15. Números Catalanes	19	11.5. Limites	29
	7.15.1. Primeros 25 Catalanes	20	11.6. Mejorar Lectura de Enteros	29
			11.7. Tablita de relacion de Complejidades	30
8.	Grafos	20	11.8. Compilar C++11 con g++	30
	8.1. Dijkstra	20	11.9. Build de C++11 para Sublime Text	30
	8.2. Bellman-Ford	20	11.10Funciones Utiles	30
	8.3. Floyd-Warshall	21		
	8.4. Kruskal	21		
	8.5. Prim	21		
	8.6. 2 -SAT + Tarjan SCC	21		
	8.7. Puntos de Articulación	22		
	8.8. Least Common Ancestor + Climb	22		
	8.9. Heavy Light Decomposition	22		
	8.10. Centroid Decomposition	23		
	8.11. Ciclo Euleriano	23		
	8.12. Diametro Árbol	23		
	8.13. Componentes Biconexas y Puentes	23		
	8.14. Hungarian	24		
	8.15. Dynamic Connectivity	25		
9	Flow	26		
υ.	9.1. Edmond Karp	26		
	9.2. Min Cut	26		
	9.3. Push Relabel	26		
	9.4. Dinic	$\frac{20}{27}$		
	9.5. Min cost - Max flow	28		
	U.U. 171111 UUUU 171000 171000 110 17			

UTN FRSF - El Rejunte 1 C/C++

1. C/C++

1.1. I/O

1.1.1. scanf Format Strings

%[*][width][length]specifier

spec	Tipo	Descripción	
i	int	Dígitos dec. [0-9], oct. (0) [0-7], hexa	
	THE	(0x 0X)[0-9a-fA-F]. Con signo.	
d, u	int, unsigned	Dígitos dec. [+-0-9].	
0	unsigned	Dígitos oct. [+-0-7].	
Х	unsigned	Dígitos hex. [+-0-9a-fA-F]. Prefijo 0x, 0X opcional.	
f 0 0	float.	Dígitos dec. c/punto flotante [+0-9]. Prefijo 0x, 0X y	
f, e, g	lloat	sufijo e, E opcionales.	
C,	char,	Siguiente carácter. Lee width chars y los almacena	
[width]c	char*	contiguamente. No agrega $\setminus 0$.	
S	char*	Secuencia de chars hasta primer espacio. Agrega \0.	
р	void*	Secuencia de chars que representa un puntero.	
[-11	Scanset,	Caracteres especificados entre corchetes.] debe ser primero	
[chars]	char*	en la lista, – primero o último. Agrega $\backslash 0$	
	!Scanset,	Caracteres no especificados entre corchetes.	
[^chars]	char*	Caracteres no especificados entre corchetes.	
n	int	No consume entrada. Almacena el número de chars leídos	
11	TIIC	hasta el momento.	
ે		% % consume un %	

sub-specifier	Descripción		
*	Indica que se leerá el dato pero se ignorará. No necesita argumento.		
width	Cantidad máxima de caracteres a leer.		
lenght	Uno de hh, h, l, ll, j, z, t, L. Ver tabla siguiente.		

length	d i	иох	
(none) int*		unsigned int*	
hh signed char*		unsigned char*	
h short int*		unsigned short int*	
1	long int*	unsigned long int*	
11	long long int*	unsigned long long int*	

Continuación		
length	d i	u o x
j	intmax_t*	uintmax_t*
z	size_t*	size_t*
t	ptrdiff_t*	ptrdiff_t*
L		

length	fega	c s [] [^]	p	n
(none)	float*	char*	void**	int*
hh				signed char*
h				short int*
1	double*	wchar_t*		long int*
11				long long int*
j				intmax_t*
Z				size_t*
t				ptrdiff_t*
Т.	long			
. L	double*			

1.1.2. printf Format Strings

%[flags][width][.precision][length]specifier

specifier	Descripción	Ejemplo
d or i	Entero decimal con signo	392
u	Entero decimal sin signo	7235
0	Entero octal sin signo	610
X	Entero hexadecimal sin signo	7fa
X	Entero hexadecimal sin signo (mayúsculas)	7FA
f	Decimal punto flotante (minúsculas)	392.65
F	Decimal punto flotante (mayúsculas)	392.65
е	Notación científica (mantisa/exponente), (minúsculas)	3.9265e+2
E	Notación científica (mantisa/exponente), (mayúsculas)	3.9265E+2
g	Utilizar la representaciíon más corta: %e ó %f	392.65
G	Utilizar la representaciíon más corta: %E ó %F	392.65
a	Hexadecimal punto flotante (minúsculas)	-0xc.90fep-2
A	Hexadecimal punto flotante (mayúsculas)	-0XC.90FEP-2
С	Caracter	a
S	String de caracteres	sample

	Continuación			
specifier	Descripción	Ejemplo		
р	Dirección de puntero	b8000000		
	No imprime nada. El argumento debe ser int*,			
n	almacena el número de caracteres imprimidos hasta el			
	momento.			
%	$\mathrm{Un}\%$ seguido de otro $\%$ imprime un solo $\%$	%		

flag	Descripción
_	Justificación a la izquierda dentro del campo width (ver width
	sub-specifier).
+	Forza a preceder el resultado de texttt+ o texttt
(espacio)	Si no se va a escribir un signo, se inserta un espacio antes del valor.
#	Usado con o, x, X specifiers el valor es precedido por 0, 0x, 0X
π	respectivamente para valores distintos de 0.
0	Rellena el número con texttt0 a la izquierda en lugar de espacios
	cuando se especifica width.

width	Descripción		
Número mínimo de caracteres a imprimir. Si el valor es menor qu			
(número)	número, el resultado es rellando con espacios. Si el valor es mayor,		
	no es truncado.		
	No se especifica width, pero se agrega un argumento entero		
*	precediendo al argumento a ser formateado. Ej.		
	printf("%*d\n", 3, 2); \Rightarrow " 5".		

precision	Descripción
	Para d, i, o, u, x, X: número mínimo de dígitos a imprimir. Si
.(número)	el valor es más chico que número se rellena con 0.
	Para a, A, e, E, f, F: número de dígitos a imprimir después de
	la coma (default 6).
	Para g, G: Número máximo de cifras significativas a imprimir.
	Para s: Número máximo de caracteres a imprimir. Trunca.
.1.	No se especifica precision pero se agrega un argumento entero
• *	precediendo al argumento a ser formateado.

length	d i	u o x X	
(none)	int	unsigned int	
hh	signed char	unsigned char	
h	short int	unsigned short int	
1	long int unsigned long int		
11	long long int	unsigned long long int	

Continuación				
length	d i	иох Х		
j	intmax_t	uintmax_t		
Z	size_t	size_t		
t	ptrdiff_t	ptrdiff_t		
L				

length	f F e E g G a A	С	S	p	n
(none)	double	int	char*	void*	int*
hh					signed char*
h					short int*
1		wint_t	wchar_t*		long int*
11					long long int*
j					intmax_t*
Z					size_t*
t					ptrdiff_t*
\mathbf{L}	long double				

UTN FRSF - El Rejunte 3 ESTRUCTURAS DE DATOS

2. Template del Rejunte

```
#include <bits/stdc++.h>
   #define sgr(a) ((a)*(a))
   #define rsz resize
   #define forr(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);i++)
  #define forn(i,n) forr(i,0,n)
   #define dforn(i,n) for(int i=n-1;i>=0;i--)
   #define forall(it,v) for(auto it=v.beqin();it!=v.end();it++)
   #define sz(c) ((int)c.size())
   #define zero(v) memset(v, 0, sizeof(v))
10 #define pb push_back
11 #define mp make_pair
  #define lb lower bound
13 #define ub upper_bound
  #define fst first
  #define snd second
  #define PT 3.1415926535897932384626
  using namespace std;
19
  typedef long long 11;
21 typedef pair<int, int> ii;
22 typedef vector<int> vi;
23 typedef vector<ii> vii;
24
25 int main()
27
    //freopen("input", "r", stdin);
    //freopen("output", "w", stdout);
   ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(NULL);
    cout.tie(NULL);
32
    return 0;
33 }
```

3. Estructuras de datos

3.1. Set Mejorado

Esto solo compila en C++11.

3.2. Union Find

```
struct UnionFind{
    vector<int> f, setSize; //the array f contains the parent of each node
    int cantSets;
    void init(int n)
      f.clear(); setSize.clear();
      cantSets=n;
      f.rsz(n,-1);
 9
      setSize.rsz(n,1);
10
    int comp(int x){return (f[x]=-1?x:f[x]=comp(f[x]));}//0(1)
    bool join(int i,int j) //devuelve true si ya estaban juntos
13
      bool con=comp(i) ==comp(j);
14
15
      if(!con)
16
17
        cantSets--;
18
         setSize[comp(j)]+=setSize[comp(i)];
         setSize[comp(i)]=setSize[comp(j)]; //no suma, solo asigna
         f[comp(i)]=comp(j);
22
      return con;
23
24 };
```

UTN FRSF - El Rejunte 3 ESTRUCTURAS DE DATOS

3.3. Hash Table

```
//Compilar: g++ --std=c++11
struct Hash{
    size_t operator() (const ii &a) const
    {
        size_t s=hash<int>() (a.fst);
        return hash<int>() (a.snd)+0x9e3779b9+(s<<6)+(s>>2);
    }
    size_t operator() (const vector<int> &v) const
    {
        size_t s=0;
        for (auto &e : v) s^=hash<int>() (e)+0x9e3779b9+(s<<6)+(s>>2);
        return s;
    }
}

// In the constant of th
```

3.4. RMQ

3.4.1. RMQ (static)

Dado un arreglo y una operacion asociativa *idempotente*, get(i, j) opera sobre el rango [i, j). Restriccion: LVL \geq ceil(logn); Usar [] para llenar arreglo y luego build().

```
struct RMQ{
    #define LVL 10

tipo vec[LVL][1<<(LVL+1)];

tipo &operator[](int p){return vec[0][p];}

tipo get(int i, int j) {//intervalo [i, j)
    int p = 31-__builtin_clz(j-i);
    return min(vec[p][i], vec[p][j-(1<<p)]);

}

void build(int n) {//O(nlogn)
    int mp = 31-__builtin_clz(n);
    forn(p, mp) forn(x, n-(1<<p))
    vec[p+1][x] = min(vec[p][x], vec[p][x+(1<<p)]);

}};</pre>
```

3.4.2. RMQ (dynamic)

```
const int neutro=0;
 5 struct RMO{
     int sz;
     tipo t[4*MAXN];
     tipo &operator[](int p) {return t[sz+p];}
     void init(int n){//O(nlgn)
      sz = 1 \ll (32-\underline{builtin_clz(n)});
11
       forn(i, 2*sz) t[i]=neutro;
12
13
    void updall(){//0(n)
       dforn(i, sz) t[i] = operacion(t[2*i], t[2*i+1]);
     tipo get(int i, int j) {return get(i, j, 1, 0, sz);}
     tipo get (int i, int j, int n, int a, int b) {//0(lgn)
       if(j<=a || i>=b) return neutro;
18
       if(i<=a && b<=j) return t[n];</pre>
       int c=(a+b)/2;
19
20
       return operacion(get(i, j, 2*n, a, c), get(i, j, 2*n+1, c, b));
21
     void set(int p, tipo val){//0(lqn)
       for(p+=sz; p>0 && t[p]!=val;){
24
         t[p]=val;
         p/=2;
         val=operacion(t[p*2], t[p*2+1]);
27
28
29 } rmq;
30 //Usage:
31 cin >> n; rmq.init(n); forn(i, n) cin >> rmq[i]; rmq.updall();
```

3.4.3. RMQ (lazy)

```
1 //Dado un arreglo y una operacion asociativa con neutro, get(i, j) opera
       sobre el rango [i, j).
  typedef int Elem; //Elem de los elementos del arreglo
   typedef int Alt;//Elem de la alteracion
   #define operacion(x,y) x+y
   const Elem neutro=0; const Alt neutro2=0;
   #define MAXN 100000//Cambiar segun el N del problema
   struct RMO{
    int sz;
    Elem t[4*MAXN];
    Alt dirty[4*MAXN];//las alteraciones pueden ser de distinto Elem
    Elem &operator[](int p) {return t[sz+p];}
    void init(int n){//O(nlgn)
      sz = 1 \ll (32 - builtin clz(n));
14
      forn(i, 2*sz) t[i]=neutro;
15
       forn(i, 2*sz) dirty[i]=neutro2;
16
    void push(int n, int a, int b) {//propaga el dirty a sus hijos
18
       if(dirtv[n]!=0){
        t[n]+=dirty[n] * (b-a); //altera el nodo
```

UTN FRSF - El Rejunte 3 ESTRUCTURAS DE DATOS

```
if(n<sz){
21
          dirty[2*n]+=dirty[n];
22
          dirty[2*n+1] += dirty[n];
23
        dirty[n]=0;
24
25
      }
26
27
    Elem get(int i, int j, int n, int a, int b){//0(lgn)
      if(j<=a || i>=b) return neutro;
28
29
      push(n, a, b);//corrige el valor antes de usarlo
      if(i<=a && b<=j) return t[n];</pre>
30
      int c = (a+b)/2;
31
32
      return operacion(get(i, j, 2*n, a, c), get(i, j, 2*n+1, c, b));
33
    Elem get(int i, int j) {return get(i, j, 1, 0, sz);}
34
    //altera los valores en [i, j) con una alteracion de val
35
    void alterar(Alt val, int i, int j, int n, int a, int b){//0(lgn)
      push(n, a, b);
      if(j<=a || i>=b) return;
38
39
      if(i<=a && b<=j){
40
        dirtv[n]+=val:
41
        push(n, a, b);
        return;
43
44
      int c=(a+b)/2;
      alterar(val, i, j, 2*n, a, c), alterar(val, i, j, 2*n+1, c, b);
      t[n]=operacion(t[2*n], t[2*n+1]);//por esto es el push de arriba
46
47
    void alterar(Alt val, int i, int j) {alterar(val,i,j,1,0,sz);}
48
  }rmq;
```

3.4.4. RMQ (persistente)

```
typedef int tipo;
  tipo oper (const tipo &a, const tipo &b) {
      return a+b:
5 struct node {
    tipo v: node *1.*r;
    node(tipo v):v(v), l(NULL), r(NULL) {}
     node(node *1, node *r) : 1(1), r(r) {
          if(!1) v=r->v;
          else if(!r) v=l->v;
          else v=oper(1->v, r->v);
11
12
13 };
14 node *build (tipo *a, int tl, int tr) {//modificar para que tome tipo a
   if (tl+1==tr) return new node(a[tl]);
    int tm=(tl + tr)>>1;
    return new node(build(a, tl, tm), build(a, tm, tr));
17
18
```

```
19    node *update(int pos, int new_val, node *t, int tl, int tr){
20         if (tl+1==tr) return new node(new_val);
21         int tm=(tl+tr)>>1;
22         if(pos < tm) return new node(update(pos, new_val, t->l, tl, tm), t->r);
23         else return new node(t->l, update(pos, new_val, t->r, tm, tr));
24    }
25    tipo get(int l, int r, node *t, int tl, int tr){
26         if(l==tl && tr==r) return t->v;
27         int tm=(tl + tr)>>1;
28         if(r<=tm) return get(l, r, t->l, tl, tm);
29         else if(l>=tm) return get(l, r, t->r, tm, tr);
30         return oper(get(l, tm, t->l, tl, tm), get(tm, r, t->r, tm, tr));
31    }
```

3.5. BIGInt

```
#define BASEXP 6
   #define BASE 1000000
   #define LMAX 1000
 4 struct bint {
       int 1;
      ll n[LMAX];
      bint(ll x=0){
           1=1;
           forn(i, LMAX) {
               if (x) l=i+1;
               n[i]=x %BASE;
12
               x/=BASE;
13
14
15
16
      bint(string x){
17
      l = (x.size()-1)/BASEXP+1;
           fill(n, n+LMAX, 0);
18
19
           11 r=1:
20
           forn(i, sz(x)){
21
               n[i / BASEXP] += r * (x[x.size()-1-i]-'0');
22
               r*=10: if (r==BASE) r=1:
23
24
25
      void out(){
26
       cout << n[1-1];
      dforn(i, 1-1) printf("%6.61lu", n[i]);//6=BASEXP!
27
28
29
    void invar() {
      fill(n+1, n+LMAX, 0);
31
      while(1>1 && !n[1-1]) 1--;
32
    }
33 };
34 bint operator+(const bint&a, const bint&b) {
    bint c;
```

UTN FRSF - El Rejunte 4 ALGORITMOS

```
c.1 = max(a.1, b.1);
      11 \ \alpha = 0;
37
38
      forn(i, c.l) q += a.n[i]+b.n[i], c.n[i]=q %BASE, q/=BASE;
      if(q) c.n[c.l++] = q;
      c.invar();
41
      return c;
42
43 pair < bint, bool > lresta (const bint a, const bint b) //c = a - b
44
45
   bint c;
     c.1 = max(a.1, b.1);
46
     11 q = 0;
47
     forn(i, c.1) q += a.n[i]-b.n[i], c.n[i]=(q+BASE) %BASE, q=(q+BASE)/BASE
48
           -1;
      c.invar();
49
50
       return make_pair(c, !q);
51
52 bint& operator-= (bint& a, const bint& b) {return a=lresta(a, b).first;}
53 bint operator- (const bint&a, const bint&b) {return lresta(a, b).first;}
54 bool operator< (const bint&a, const bint&b) {return !lresta(a, b).second;}
55 bool operator <= (const bint&a, const bint&b) {return lresta(b, a).second;}
56 bool operator == (const bint&a, const bint&b) {return a <= b && b <= a;}
57 bint operator* (const bint&a, ll b) {
58
      bint c;
59
      11 q = 0;
     forn(i, a.l) q += a.n[i]*b, c.n[i] = q %BASE, q/=BASE;
61
62
     while(q) c.n[c.l++] = q %BASE, q/=BASE;
63
     c.invar();
64
       return c;
65
66 bint operator* (const bint&a, const bint&b) {
      bint c;
67
      c.l = a.l+b.l;
      fill(c.n, c.n+b.1, 0);
69
      forn(i, a.l) {
70
71
          11 q = 0;
          forn(j, b.1) q += a.n[i]*b.n[j]+c.n[i+j], c.n[i+j] = q %BASE, q/=
72
               BASE:
          c.n[i+b.l] = q;
73
74
75
      c.invar();
76
       return c;
78 pair < bint, 11 > ldiv(const bint & a, 11 b) { // c = a / b; rm = a % b
   bint c;
   11 \text{ rm} = 0;
80
81
    dforn(i, a.l){
82
              rm = rm * BASE + a.n[i];
               c.n[i] = rm / b;
83
              rm %= b;
84
85
       c.1 = a.1;
```

```
c.invar();
88
       return make_pair(c, rm);
89 }
90 bint operator/(const bint&a, ll b) {return ldiv(a, b).first;}
| 91 | 11 operator % (const bint &a, ll b) { return ldiv(a, b) .second; }
| 92 | pair < bint, bint > ldiv (const bint & a, const bint & b) {
93 bint c:
       bint rm = 0;
95
       dforn(i, a.l) {
           if (rm.l==1 && !rm.n[0])
96
97
                rm.n[0] = a.n[i];
98
99
                dforn(j, rm.l) rm.n[j+1] = rm.n[j];
100
                rm.n[0] = a.n[i];
101
                rm.l++;
102
103
           ll q = rm.n[b.l] * BASE + rm.n[b.l-1];
           ll u = q / (b.n[b.l-1] + 1);
           11 v = q / b.n[b.l-1] + 1;
           while (u < v-1) \{
106
                11 m = (u+v)/2;
                if (b*m \le rm) u = m;
109
                else v = m;
110
111
           c.n[i]=u;
112
            rm-=b*u;
113
114
    c.l=a.l;
115
      c.invar();
       return make_pair(c, rm);
117 }
| 18 | bint operator/(const bint&a, const bint&b) {return ldiv(a, b).first;}
bint operator % (const bint &a, const bint &b) {return ldiv(a, b).second;}
```

4. Algoritmos

4.1. Longest Increasing Subsecuence

```
//Para non-increasing, cambiar comparaciones y revisar busq binaria
//Given an array, paint it in the least number of colors so that each color
    turns to a non-increasing subsequence.

//Solution:Min number of colors=Length of the longest increasing subsequence
int N, a[MAXN];//secuencia y su longitud
ii d[MAXN+1];//d[i]=ultimo valor de la subsecuencia de tamanio i
int p[MAXN];//padres
vector<int> R;//respuesta
void rec(int i) {
    if(i==-1) return;
        R.push_back(a[i]);
    rec(p[i]);
```

UTN FRSF - El Rejunte 5 STRINGS

```
13 int lis(){//O(nlogn)
    d[0] = ii(-INF, -1); forn(i, N) d[i+1]=ii(INF, -1);
    forn(i, N){
      int j = upper_bound(d, d+N+1, ii(a[i], INF))-d;
      if (d[j-1].first < a[i]&&a[i] < d[j].first){</pre>
17
1.8
      p[i]=d[j-1].second;
19
        d[i] = ii(a[i], i);
20
21
22
    R.clear();
    dforn(i, N+1) if(d[i].first!=INF) {
23
    rec(d[i].second);//reconstruir
      reverse(R.begin(), R.end());
25
26
      return i;//longitud
27
    return 0;
28
29
```

4.2. Mo's

$$O(q * \sqrt{n})$$

```
1 int n,sq;
 2 struct Qu{//queries [1, r]
       //intervalos cerrado abiertos !!! importante!!
      int 1, r, id;
   }qs[MAXN];
 6 int ans[MAXN], curans; //ans[i] = ans to ith query
 7 bool bymos (const Qu &a, const Qu &b) {
       if(a.l/sq!=b.l/sq) return a.l<b.l;</pre>
       return (a.1/sq) &1? a.r<b.r : a.r>b.r;
10
11 void mos() {
12
       forn(i, t) qs[i].id=i;
13
       sort(qs, qs+t, bymos);
      int cl=0, cr=0;
      sq=sqrt(n);
15
      curans=0;
16
      forn(i, t) { //intervalos cerrado abiertos !!! importante!!
17
18
           Qu &q=qs[i];
19
           while(cl>q.l) add(--cl);
           while(cr<q.r) add(cr++);</pre>
20
21
           while(cl<q.l) remove(cl++);</pre>
22
           while(cr>q.r) remove(--cr);
           ans[q.id]=curans;
23
24
```

5. Strings

5.1. KMP

```
vector<int> b; //back table b[i] maximo borde de [0..i)
 2 void kmppre(string &P) //by gabina with love
 3 {
 b.clear();
 5 b.rsz(P.size());
 int i =0, j=-1; b[0]=-1;
    while(i<sz(P))</pre>
      while(j>=0 && P[i] != P[j]) j=b[j];
10
      i++, j++;
11
      b[i] = j;
12
13 }
14 void kmp(string &T,string &P) //Text, Pattern -- O(|T|+|P|)
   kmppre(P);
17
    int i=0, j=0;
    while (i<sz(T))
18
19
20
      while(j>=0 && T[i]!=P[j]) j=b[j];
21
      i++, j++;
22
      if(j==sz(P))
23
24
        //P encontrado en T empezando en [i-j,i)
25
        j=b[j];
26
27
28 }
```

5.2. Z function

```
1 / z[i] = length of longest substring starting from s[i] that is prefix of s
 2 vector<int> z;
 3 void zFunction(string &s)
    int n=s.size();
     for (int i=1, l=0, r=0; i < n; i++)</pre>
       if(i<=r)
       z[i]=min(r-i+1,z[i-1]);
10
       while (i+z[i] < n \& \& s[z[i]] == s[i+z[i]])
11
       z[i]++;
12
       if(i+z[i]-1>r)
13
       l=i, r=i+z[i]-1;
14
```

UTN FRSF - El Rejunte 5 STRINGS

```
record match(string &T, string &P) //Text, Pattern -- O(|T|+|P|)
{
    string s=P;
    s+='$'; //here append a character that is not present in T
    s.append(T);
    z.clear();
    z.rsz(s.size(),0);
    zFunction(s);
    forr(i,P.size()+1,s.size())
        if(z[i]==P.size()) //match found, idx = i-P.size()-1
}
```

5.3. Trie

```
struct trie{
   map<char, trie> m;
   void add(const string &s, int p=0)

{
    if(s[p]) m[s[p]].add(s, p+1);
}

void dfs()

{
   //Do stuff
   forall(it, m)
   it->second.dfs();
}

};
```

5.4. Manacher

```
string s;
 2 int d1[MAXN]; //d1[i]=long del maximo palindromo impar con centro en i
 3 int d2[MAXN];//d2[i]=analogo pero para longitud par
 4 //0 1 2 3 4
 5 //a \ a \ b \ a \ a < --d1[2] = 3
  //a a a a <--d2[2]=2 (estan uno antes)
 7 | void manacher() // O(|S|) - find longest palindromic substring
    int l=0, r=-1, n=sz(s);
10
    forn(i, n)
11
12
      int k=(i>r? 1 : min(d1[l+r-i], r-i));
13
      while (i+k < n \& \& i-k > = 0 \& \& s[i+k] == s[i-k]) ++k;
14
      d1[i] = k--;
15
      if(i+k > r) l=i-k, r=i+k;
16
    1=0, r=-1;
17
    forn(i, n)
```

```
int k=(i>r? 0 : min(d2[l+r-i+1], r-i+1))+1;
while(i+k-1<n && i-k>=0 && s[i+k-1]==s[i-k]) k++;
d2[i] = --k;
if(i+k-1 > r) l=i-k, r=i+k-1;
}
```

5.5. Aho Corasick

```
struct Trie{
    map<char, Trie> next;
     Trie* tran[256]; //transiciones del automata
    int idhoja, szhoja;//id de la hoja o 0 si no lo es
    //link lleva al sufijo mas largo, nxthoja lleva al mas largo pero que es
   Trie *padre, *link, *nxthoja;
    char pch; //caracter que conecta con padre
    //Trie(): tran(), idhoja(), padre(), link() {}
    //coment linea de arriba porque me daba errores usarla.
    void insert(const string &s, int id=1, int p=0) //id>0!!!
11
12
      if(p<sz(s))
13
14
        Trie &ch=next[s[p]];
15
        tran[(int)s[p]]=&ch;
        ch.padre=this, ch.pch=s[p];
17
        ch.insert(s, id, p+1);
18
19
      else idhoja=id, szhoja=sz(s);
20
21
    Trie* get link()
22
23
      if(!link)
24
25
        if(!padre) link=this;//es la raiz
26
        else if(!padre->padre) link=padre;//hijo de la raiz
27
        else link=padre->get_link()->get_tran(pch);
28
29
      return link;
30
31
    Trie* get_tran(int c)
32
33
      if(!tran[c]) tran[c] = !padre? this : this->qet_link()->qet_tran(c);
34
      return tran[c];
35
36
    Trie *get_nxthoja()
37
38
      if(!nxthoja) nxthoja = qet_link()->idhoja? link : link->nxthoja;
39
       return nxthoja;
```

```
void print(int p)

if(idhoja) cout << "found " << idhoja << " at position " << p-szhoja << endl;

if(get_nxthoja()) get_nxthoja()->print(p);

void matching(const string &s, int p=0) //O(|s| + tamao palabras)

print(p); if(p<sz(s)) get_tran(s[p])->matching(s, p+1);

print(p); if(p<sz(s)) get_tran(s[p])->matching(s, p+1);
```

6. Geometría

6.1. Punto

```
struct pto{
    double x, v;
    pto (double x=0, double y=0): x(x), y(y) {}
    pto operator+(pto a) {return pto(x+a.x, y+a.y);}
    pto operator-(pto a) {return pto(x-a.x, y-a.y);}
    pto operator+(double a) {return pto(x+a, y+a);}
    pto operator*(double a) {return pto(x*a, y*a);}
    pto operator/(double a) {return pto(x/a, y/a);}
    //dot product, producto interno:
    double operator*(pto a) {return x*a.x*y*a.v;}
    //module of the cross product or vectorial product:
   //if a is less than 180 clockwise from b, a^b>0
    double operator^ (pto a) {return x*a.y-y*a.x; }
    //returns true if this is at the left side of line gr
    bool left(pto q, pto r) {return ((q-*this)^(r-*this))>0;}
    bool operator<(const pto &a) const{return x<a.x-EPS || (abs(x-a.x)<EPS &&
        v < a.v - EPS);
17 bool operator == (pto a) {return abs(x-a.x) < EPS && abs(y-a.y) < EPS;}
    double norm() {return sqrt(x*x+y*y);}
    double norm_sq() {return x*x+y*y;}
20 };
  double dist(pto a, pto b) {return (b-a).norm();}
  typedef pto vec;
24 double angle (pto a, pto o, pto b) {
   pto oa=a-o, ob=b-o;
2.5
    return atan2(oa^ob, oa*ob);}
28 //rotate p by theta rads CCW w.r.t. origin (0,0)
29 pto rotate(pto p, double theta) {
    return pto(p.x*cos(theta)-p.y*sin(theta),
       p.x*sin(theta)+p.v*cos(theta));
31
32
```

6.2. Orden Radial de Puntos

```
struct Cmp{//orden total de puntos alrededor de un punto r
 2
    pto r;
     Cmp(pto r):r(r) {}
     int cuad(const pto &a) const{
      if(a.x > 0 && a.y >= 0) return 0;
      if(a.x <= 0 && a.y > 0) return 1;
      if(a.x < 0 && a.v <= 0)return 2;
      if(a.x >= 0 && a.y < 0) return 3;
       assert(a.x ==0 && a.v==0);
      return -1:
11
12
    bool cmp(const pto&p1, const pto&p2)const{
      int c1 = cuad(p1), c2 = cuad(p2);
      if(c1==c2) return p1.y*p2.x<p1.x*p2.y;
15
           else return c1 < c2;</pre>
16
      bool operator()(const pto&p1, const pto&p2) const{
      return cmp (pto (p1.x-r.x,p1.y-r.y),pto (p2.x-r.x,p2.y-r.y));
18
19
20 };
```

6.3. Linea

```
int sgn(ll x){return x<0? -1 : !!x;}
struct line{
    line() {}

    double a,b,c;//Ax+By=C

    //pto MUST store float coordinates!
    line(double a, double b, double c):a(a),b(b),c(c){}

    line(pto p, pto q): a(q.y-p.y), b(p.x-q.x), c(a*p.x+b*p.y) {}

    int side(pto p){return sgn(ll(a) * p.x + ll(b) * p.y - c);}

};

bool parallels(line ll, line l2){return abs(ll.a*l2.b-l2.a*l1.b)<EPS;}

pto inter(line ll, line l2){//intersection
    double det=ll.a*l2.b-l2.a*l1.b;
    if(abs(det)<EPS) return pto(INF, INF);//parallels
    return pto(l2.b*l1.c-l1.b*l2.c, l1.a*l2.c-l2.a*l1.c)/det;
}</pre>
```

6.4. Segmento

```
struct segm{
  pto s, f;
  segm(pto s, pto f):s(s), f(f) {}
  pto closest(pto p) {//use for dist to point
    double 12 = dist_sq(s, f);
```

```
if(12==0.) return s;
        double t = ((p-s) * (f-s))/12;
       if (t<0.) return s;//not write if is a line</pre>
       else if(t>1.)return f://not write if is a line
       return s+((f-s)*t);
12
      bool inside(pto p) {return abs(dist(s, p)+dist(p, f)-dist(s, f)) < EPS;}</pre>
13
14
15 //NOTA: Si los segmentos son coolineales solo devuelve un punto de
       intersection
16 pto inter(segm s1, segm s2) {
      if(s1.inside(s2.s)) return s2.s: //Fix cuando son colineales
      if(s1.inside(s2.f)) return s2.f; //Fix cuando son colineales
18
19
   pto r=inter(line(s1.s, s1.f), line(s2.s, s2.f));
      if(s1.inside(r) && s2.inside(r)) return r;
20
   return pto(INF, INF);
21
22
```

6.5. Rectangulo

```
struct rect{
//lower-left and upper-right corners
pto lw, up;
};

//returns if there's an intersection and stores it in r

bool inter(rect a, rect b, rect &r) {
    r.lw=pto(max(a.lw.x, b.lw.x), max(a.lw.y, b.lw.y));
    r.up=pto(min(a.up.x, b.up.x), min(a.up.y, b.up.y));

//check case when only a edge is common
return r.lw.x<r.up.x && r.lw.y<r.up.y;

11
}</pre>
```

6.6. Circulo

```
vec perp(vec v) {return vec(-v.y, v.x);}
line bisector(pto x, pto y) {
    line l=line(x, y); pto m=(x+y)/2;
    return line(-l.b, l.a, -l.b*m.x+l.a*m.y);
}
struct Circle{
    pto o;
    double r;
    Circle(pto x, pto y, pto z) {
        o=inter(bisector(x, y), bisector(y, z));
        r=dist(o, x);
}
pair<ptopto</pre>
```

```
pto m=(p+o)/2;
15
               tipo d=dist(o, m);
16
               tipo a=r*r/(2*d);
17
               tipo h=sqrt(r*r-a*a);
               pto m2=o+(m-o)*a/d;
19
               vec per=perp(m-o)/d;
20
                return make_pair(m2-per*h, m2+per*h);
21
22 };
23 //finds the center of the circle containing p1 and p2 with radius r
24 //as there may be two solutions swap p1, p2 to get the other
bool circle2PtsRad(pto p1, pto p2, double r, pto &c) {
26
                         double d2=(p1-p2).norm_sq(), det=r*r/d2-0.25;
                         if(det<0) return false;</pre>
28
                         c = (p1+p2)/2+perp(p2-p1)*sqrt(det);
29
                         return true;
30 }
| 31 | #define sqr(a) ((a) * (a))
 32 #define feg(a,b) (fabs((a)-(b))<EPS)
 33 pair<tipo, tipo ecCuad(tipo a, tipo b, tipo c) {//a*x*x+b*x+c=0
 34 tipo dx = sqrt(b*b-4.0*a*c);
         return make_pair((-b + dx)/(2.0*a),(-b - dx)/(2.0*a));
 36 }
 | 37 | pair<pto, pto> interCL(Circle c, line l) {
 38 bool sw=false;
if((sw=feq(0,1.b))){
40 swap(l.a, l.b);
41 swap(c.o.x, c.o.y);
42 }
43
         pair<tipo, tipo> rc = ecCuad(
44 sgr(1.a) +sgr(1.b),
2.0*1.a*1.b*c.o.v-2.0*(sqr(1.b)*c.o.x+1.c*1.a)
          sqr(1.b) * (sqr(c.o.x) + sqr(c.o.y) - sqr(c.r)) + sqr(1.c) - 2.0 * 1.c * 1.b * c.o.y
 48
           pair<pto, pto> p( pto(rc.first, (l.c - l.a * rc.first) / l.b),
                                   pto(rc.second, (l.c - l.a * rc.second) / l.b) );
 49
50
           if(sw){
 51
           swap(p.first.x, p.first.y);
           swap(p.second.x, p.second.y);
 53
 54
         return p;
55 }
56 pair<pto, pto> interCC(Circle c1, Circle c2){
| 57 | line 1:
| (c) | (c
| 61 | -sgr(c2.o.v))/2.0;
fee return interCL(c1, 1);
63 }
```

6.7. Area de poligono

```
double area(vector<pto> &p){//O(sz(p))}

double area=0;
forn(i, sz(p)) area+=p[i]^p[(i+1) %sz(p)];
//if points are in clockwise order then area is negative
return abs(area)/2;
}
//Area ellipse = M_PI*a*b where a and b are the semi axis lengths
//Area triangle = sqrt(s*(s-a)(s-b)(s-c)) where s=(a+b+c)/2
```

6.8. Punto en poligono

```
//checks if v is inside of P, using ray casting
//works with convex and concave.
//excludes boundaries, handle it separately using segment.inside()
bool inPolygon(pto v, vector<pto>& P) {
    bool c = false;
    forn(i, sz(P)) {
        int j=(i+1) %sz(P);
        if((P[j].y>v.y) != (P[i].y > v.y) &&
        (v.x < (P[i].x - P[j].x) * (v.y-P[j].y) / (P[i].y - P[j].y) + P[j].x))
        c = !c;
}
return c;
}</pre>
```

6.9. Punto en Poligono Convexo

 $O(\log n)$

```
void normalize(vector<pto> &pt) //delete collinear points first!

//this makes it clockwise:
if(pt[2].left(pt[0], pt[1])) reverse(pt.begin(), pt.end());
int n=sz(pt), pi=0;
forn(i, n)
if(pt[i].x<pt[pi].x || (pt[i].x==pt[pi].x && pt[i].y<pt[pi].y))
    pi=i;
vector<pto> shift(n);//puts pi as first point
forn(i, n) shift[i]=pt[(pi+i) %n];
pt.swap(shift);

bool inPolygon(pto p, const vector<pto> &pt)

//call normalize first!
if(p.left(pt[0], pt[1]) || p.left(pt[sz(pt)-1], pt[0])) return false;
int a=1, b=sz(pt)-1;
while(b-a>1)
```

```
19
20
21
21
22
22
23
24
24
25
}

int c=(a+b)/2;
if(!p.left(pt[0], pt[c])) a=c;
else b=c;
23
24
25
}

return !p.left(pt[a], pt[a+1]);

25
}
```

6.10. Chequeo de Convex

```
bool isConvex(vector<int> &p){//O(N), delete collinear points!
   int N=sz(p);
   if(N<3) return false;
   bool isLeft=p[0].left(p[1], p[2]);
   forr(i, 1, N)
   if(p[i].left(p[(i+1) N], p[(i+2) N])!=isLeft)
    return false;
   return true; }</pre>
```

6.11. Convex Hull

```
1 //stores convex hull of P in S, CCW order
 2 //left must return >=0 to delete collinear points!
 3 void CH(vector<pto>& P, vector<pto> &S) {
 4 S.clear();
    sort(P.begin(), P.end());//first x, then y
    forn(i, sz(P)){//lower hull
      while (sz(S) \ge 2 \&\& S[sz(S)-1].left(S[sz(S)-2], P[i])) S.pop_back();
      S.pb(P[i]);
    }
10
   S.pop_back();
    int k=sz(S);
   dforn(i, sz(P)){//upper hull
13
      while (sz(S) \ge k+2 \&\& S[sz(S)-1].left(S[sz(S)-2], P[i])) S.pop_back();
14
      S.pb(P[i]);
15
16
    S.pop_back();
17 }
```

6.12. Cortar poligono

```
//cuts polygon Q along the line ab
//stores the left side (swap a, b for the right one) in P

void cutPolygon(pto a, pto b, vector<pto> Q, vector<pto> &P){
P.clear();
```

```
forn(i, sz(Q)) {
    double left1=(b-a)^(Q[i]-a), left2=(b-a)^(Q[(i+1) %z(Q)]-a);
    if(left1>=0) P.pb(Q[i]);
    if(left1*left2<0)
        P.pb(inter(line(Q[i], Q[(i+1) %z(Q)]), line(a, b)));
    }
}</pre>
```

6.13. Intersección de Circulos

```
struct event {
    double x; int t;
    event (double xx, int tt) : x(xx), t(tt) {}
    bool operator <(const event &o) const { return x < o.x; }</pre>
   typedef vector<Circle> VC;
  typedef vector<event> VE:
  double cuenta (VE &v, double A, double B)
10
   sort(v.begin(), v.end());
11
    double res = 0.0, lx = ((v.empty())?0.0:v[0].x);
    int contador = 0;
    forn(i,sz(v))
    { //interseccion de todos (contador == n), union de todos (contador > 0)
15
16
     //conjunto de puntos cubierto por exacta k Circulos (contador == k)
      if (contador == n) res += v[i].x - lx;
17
      contador += v[i].t, lx = v[i].x;
18
19
    return res;
20
21
22 // Primitiva de sgrt(r*r - x*x) como funcion double de una variable x.
23 inline double primitiva (double x, double r)
24
    if (x >= r) return r*r*M PT/4.0:
    if (x <= -r) return -r*r*M_PI/4.0;</pre>
    double raiz = sqrt(r*r-x*x);
    return 0.5 * (x * raiz + r*r*atan(x/raiz));
29
  double interCircle(VC &v)
31
32
    vector<double> p; p.reserve(v.size() * (v.size() + 2));
    forn(i,sz(v)) p.push_back(v[i].c.x + v[i].r), p.push_back(v[i].c.x - v[i
        1.r);
    forn(i,sz(v)) forn(j,i)
34
35
36
      Circle &a = v[i], b = v[j];
37
      double d = (a.c - b.c).norm();
      if (fabs(a.r - b.r) < d && d < a.r + b.r)
38
39
         double alfa = acos((sqr(a.r) + sqr(d) - sqr(b.r)) / (2.0 * d * a.r));
```

```
pto vec = (b.c - a.c) * (a.r / d);
42
         p.pb((a.c + rotate(vec, alfa)).x), p.pb((a.c + rotate(vec, -alfa)).x);
43
44
    sort(p.begin(), p.end());
45
     double res = 0.0;
46
47
     forn(i,sz(p)-1)
48
49
       const double A = p[i], B = p[i+1];
50
      VE ve; ve.reserve(2 * v.size());
       forn(j,sz(v))
52
53
         const Circle &c = v[i];
54
         double arco = primitiva(B-c.c.x,c.r) - primitiva(A-c.c.x,c.r);
55
         double base = c.c.y * (B-A);
56
         ve.push_back(event(base + arco,-1));
57
         ve.push back(event(base - arco, 1));
58
59
      res += cuenta(ve, A, B);
60
61
    return res;
62 }
```

6.14. Rotar Matriz

```
//rotates matrix t 90 degrees clockwise
//using auxiliary matrix t2(faster)

void rotate()
{
    forn(x, n) forn(y, n)
        t2[n-y-1][x]=t[x][y];
    memcpy(t, t2, sizeof(t));
}
```

7 MATEMÁTICA UTN FRSF - El Rejunte

Matemática

7.1. Identidades

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n * 2^{n-1}$$

$$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(n+1-m)(n+m)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^{3}}{3} + \frac{n^{2}}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \frac{8}{6} (\frac{n}{2})(\frac{n}{2}+1)(n+1) \text{ (doubles)} \rightarrow \text{Sino ver caso impar y par}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^{3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2} = \frac{n^{4}}{4} + \frac{n^{3}}{2} + \frac{n^{2}}{4} = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^{2}+3n-1)}{30} = \frac{n^{5}}{5} + \frac{n^{4}}{2} + \frac{n^{3}}{3} - \frac{n}{30}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^{p} = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{k}}{p-k+1} \binom{p}{k} (n+1)^{p-k+1}$$

$$r = e - v + k + 1$$

Teorema de Pick: (Area, puntos interiores y puntos en el borde) $A = I + \frac{B}{2} - 1$

7.2. Ec. Caracteristica

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + ... + a_kT(n-k) = 0$$

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k$$
Sean $r_1, r_2, ..., r_q$ las raíces distintas, de mult. $m_1, m_2, ..., m_q$

$$T(n) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}n^jr_i^n$$
Las constantes c_i se determinan por los casos base

Las constantes c_{ij} se determinan por los casos base.

7.3. Teorema Chino del Resto

$$y = \sum_{j=1}^{n} (x_j * (\prod_{i=1, i \neq j}^{n} m_i)_{m_j}^{-1} * \prod_{i=1, i \neq j}^{n} m_i)$$

```
//Chinese remainder theorem (special case): find z such that
 //z % m1 = r1, z % m2 = r2. Here, z is unique modulo M = 1cm(m1, m2).
 //Return (z, M). On failure, M = -1.
4 ii chinese remainder theorem(int m1, int r1, int m2, int r2)
 { //{xx,yy,d} son variables globales usadas en extendedEuclid
   extendedEuclid(m1, m2);
   if (r1 %d != r2 %d) return make_pair(0,-1);
```

```
return mp(sumMod(xx*r2*m1, yy*r1*m2, m1*m2) / d, m1*m2 / d);
10 //Chinese remainder theorem: find z such that z % m[i] = r[i] for all i.
11 //Note that the solution is unique modulo M = lcm \ i \ (m[il).
|12| //Return (z, M). On failure, M = -1.
13 //Note that we do not require the a[i]'s to be relatively prime.
14 ii chinese remainder theorem(const vector<int> &m, const vector<int> &r)
    ii ret=mp(r[0], m[0]);
    forr(i,1,m.size())
       ret=chinese_remainder_theorem(ret.snd, ret.fst, m[i], r[i]);
      if (ret.snd==-1) break;
22
    return ret;
```

7.4. GCD & LCM

```
int gcd(int a, int b) {return b? gcd(b,a%b) : a;}
int lcm(int a, int b) {return a*(b/qcd(a,b));}
```

7.5. Euclides Extendido

```
1 //ecuacin diofntica lineal
_{2} //sea d=qcd(a,b); la ecuacin a * x + b * y = c tiene soluciones enteras si
3 //d/c. La siguiente funcin nos sirve para esto. De forma general ser:
4 / / x = x0 + (b/d) n
                       x0 = xx*c/d
5 //y = y0 - (a/d)n
                       v0 = vv*c/d
6 11 xx, vv, d;
7 | void extendedEuclid(ll a, ll b) //a * xx + b * yy = d
   if (!b) {xx=1; vy=0; d=a; return; }
   extendedEuclid (b,a%);
  11 x1=yy;
  11 y1=xx-(a/b)*yy;
  xx=x1; yy=y1;
```

7.6. Combinatoria

```
void cargarComb()//O(MAXN^2)
   forn(i, MAXN+1) //comb[i][k]=i tomados de a k = i!/(k!*(i-k)!)
```

```
comb[i][0]=comb[i][i]=1;
forr(k, 1, i) comb[i][k]=(comb[i-1][k-1]+comb[i-1][k]) %MOD;

procedure for (k, 1, i) comb[i][k]=(comb[i-1][k]-comb[i-1][k]) %MOD;

procedure for (k, 1, i) comb[i][k]=(comb[i-1][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-comb[i][k]-
```

7.7. Exponenciación de Matrices y Fibonacci

```
#define SIZE 350
  int NN;
  void mul(double a[SIZE][SIZE], double b[SIZE][SIZE])
    double res[SIZE][SIZE] = {{0}};
    forn(i, NN) forn(j, NN) forn(k, NN) res[i][j]+=a[i][k]*b[k][j];
    forn(i, NN) forn(j, NN) a[i][j]=res[i][j];
   void powmat(double a[SIZE][SIZE], int n, double res[SIZE][SIZE])
    forn(i, NN) forn(j, NN) res[i][j]=(i==j);
    while (n)
13
      if(n&1) mul(res, a), n--;
      else mul(a, a), n/=2;
16
17
18
19 struct M22{ // |a b|
    tipo a,b,c,d;// |c d| -- TIPO
    M22 operator*(const M22 &p) const {
    return (M22) {a*p.a+b*p.c, a*p.b+b*p.d, c*p.a+d*p.c,c*p.b+d*p.d};}
23 };
24 M22 operator (const M22 &p, int n)
25 {//VER COMO SE PUEDE PONER DENTRO DEL STRUCT
   if(!n) return (M22) {1, 0, 0, 1};//identidad
    M22 q=p^(n/2); q=q*q;
   return n %2? p * q : q;
29
30
31 11 fibo(11 n)//calcula el fibonacci enesimo en O(logN)
33
   M22 mat=(M22)\{0, 1, 1, 1\}^n;
    return mat.a*f0+mat.b*f1;//f0 y f1 son los valores iniciales
```

35 }

7.8. Operaciones Modulares

```
1 ll mulMod(ll a,ll b,ll m=MOD) //O(log b)
 2 { //returns (a*b) %c, and minimize overfloor
 3 11 x=0, y=a %m;
     while (b>0)
      if (b %2==1) x= (x+y) %m;
      y=(y*2) %m;
      b/=2;
     return x %m;
12 | 11 expMod(11 b, 11 e, 11 m=MOD) //O(log b)
13 {
    if(!e) return 1;
   11 q=expMod(b,e/2,m);
16 q=mulMod(q,q,m);
return e %2? mulMod(b,q,m) : q;
18 }
19 ll sumMod(ll a, ll b, ll m=MOD)
20 {
21 a %=m;
22 b %=m;
23 if(a<0) a+=m;
24 if (b<0) b+=m;
25 return (a+b) %m;
26 }
27 ll difMod(ll a, ll b, ll m=MOD)
28 {
29 a %=m;
30 b %=m;
31 if(a<0) a+=m;
32 if(b<0) b+=m;
33 ll ret=a-b;
34 if(ret<0) ret+=m;
35 return ret;
37 ll divMod(ll a, ll b, ll m=MOD)
38 {
   return mulMod(a,inverso(b),m);
40 }
```

7.9. Funciones de Primos

Sea $n = \prod p_i^{k_i}$, fact(n) genera un map donde a cada p_i le asocia su k_i

```
#define MAXP 100000 //no necesariamente primo
  int criba[MAXP+1];
  void crearCriba()
    int w[] = \{4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6\};
    for(int p=25;p<=MAXP;p+=10) criba[p]=5;</pre>
    for(int p=9;p<=MAXP;p+=6) criba[p]=3;</pre>
    for(int p=4;p<=MAXP;p+=2) criba[p]=2;
    for(int p=7, cur=0; p*p<=MAXP; p+=w[cur++&7]) if (!criba[p])</pre>
   for(int j=p*p; j<=MAXP; j+=(p<<1)) if(!criba[j]) criba[j]=p;</pre>
  vector<int> primos;
  void buscarPrimos()
14
    crearCriba():
    forr (i,2,MAXP+1) if (!criba[i]) primos.push_back(i);
17
18
  //factoriza bien numeros hasta MAXP^2
20 void fact(ll n,map<ll,ll> &f) //0 (cant primos)
21 { //llamar a buscarPrimos antes
   forall(p, primos){
      while(!(n %*p))
23
24
      f[*p]++;//divisor found
26
        n/=*p;
27
    if(n>1) f[n]++;
  //factoriza bien numeros hasta MAXP
33 void fact2(ll n, map<ll, ll> &f) //0 (lg n)
34 { //llamar a crearCriba antes
    while (criba[n])
      f[criba[n]]++;
      n/=criba[n];
   if(n>1) f[n]++;
41
  //Usar asi: divisores(fac, divs, fac.begin()); NO ESTA ORDENADO
44 void divisores (map<11,11> &f, vector<11> &divs, map<11,11>::iterator it,11 n
45
    if(it==f.begin()) divs.clear();
    if(it==f.end())
47
```

```
divs.pb(n);
50
      return:
51
    ll p=it->fst, k=it->snd; ++it;
    forn (\_, k+1) divisores (f, divs, it, n), n*=p;
54 }
| 55 | 11 cantDivs(map<11,11> &f)
56 {
| 57 | 11 ret=1;
   forall(it, f) ret *= (it->second+1);
59 return ret;
60 }
61 | 11 sumDivs(map<11,11> &f)
62 {
|63| 11 ret=1;
64 forall(it, f)
65 {
    ll pot=1, aux=0;
     forn(i, it->snd+1) aux+=pot, pot*=it->fst;
      ret *=aux;
69 }
   return ret;
71 }
73 ll eulerPhi(ll n) // con criba: O(lg n)
74 {
75 map<11,11> f;
76 fact (n, f);
77 ll ret=n;
forall(it, f) ret-=ret/it->first;
79 return ret;
80 }
81 ll eulerPhi2(ll n) // O (sqrt n)
82 {
|83| 11 r = n;
84 forr(i,2,n+1)
85 {
86
     if((ll)i*i>n) break;
      if(n%i==0)
      while(n%i==0) n/=i;
90
        r -= r/i;
91
    if (n != 1) r= r/n;
94
    return r;
95 }
```

7.10. Phollard's Rho

```
bool es_primo_prob(ll n, int a)
    if(n==a) return true;
    11 s=0.d=n-1;
    while (d \%2==0) s++, d/=2;
    ll x=expMod(a,d,n);
    if((x==1) || (x+1==n)) return true;
    forn(i,s-1)
     x=mulMod(x, x, n);
      if(x==1) return false;
11
      if(x+1==n) return true;
13
    return false;
15
16 bool rabin (ll n) //devuelve true si n es primo
17
    if(n==1) return false;
18
    const int ar[]={2,3,5,7,11,13,17,19,23};
19
    forn(j,9) if(!es_primo_prob(n,ar[j])) return false;
    return true;
22
23 ll rho(ll n)
24 {
   if((n&1)==0) return 2;
   11 x=2, y=2, d=1;
    ll c=rand() %n+1;
    while (d==1)
28
29
     x = (mulMod(x,x,n)+c) %n;
     y = (mulMod(y, y, n) + c) %n;
31
32
     y = (mulMod(y, y, n) + c) %n;
     if(x-y>=0) d=gcd(n,x-y);
      else d=\gcd(n,y-x);
34
35
    return d==n? rho(n):d;
36
37
38 void factRho (11 n,map<11,11> &f) //0 (1q n)^3 un solo numero
39
    if (n == 1) return;
    if (rabin(n))
     f[n]++;
      return;
44
45
   ll factor = rho(n):
    factRho(factor,f);
   factRho(n/factor,f);
48
```

7.11. Inversos

```
#define MAXMOD 15485867
1l inv[MAXMOD]; //inv[i] *i=1 mod MOD

void calc(int p) //O(p)

{
   inv[1]=1;
   forr(i,2,p) inv[i]=p-((p/i)*inv[p%i]) %p;
}

int inverso(int x) //O(log x)

{
   return expMod(x, eulerPhi(MOD)-2); //si mod no es primo(sacar a mano)
   return expMod(x, MOD-2); //si mod es primo
}
```

7.12. Fracciones

```
1 struct frac{
     int p,q;
    frac(int p=0,int q=1):p(p),q(q) {norm();}
     void norm()
 5
      int a=gcd(g,p);
       if(a) p/=a, q/=a;
       else q=1;
 9
       if (q<0) q=-q, p=-p;
10
    frac operator+(const frac& o)
111
12
13
      int a=gcd(o.q,q);
       return frac(p*(o.q/a)+o.p*(q/a),q*(o.q/a));
14
15
    frac operator-(const frac& o)
16
17
18
       int a=gcd(o.q,q);
       return frac(p*(o.q/a)-o.p*(q/a),q*(o.q/a));
19
20
21
    frac operator*(frac o)
22
23
       int a=gcd(o.p,q), b=gcd(p,o.q);
24
       return frac((p/b) * (o.p/a), (q/a) * (o.q/b));
25
26
    frac operator/(frac o)
27
28
       int a=gcd(o.q,q), b=gcd(p,o.p);
29
       return frac((p/b) * (o.q/a), (q/a) * (o.p/b));
30
    bool operator<(const frac &o) const{return p*o.q < o.p*q;}</pre>
31
    bool operator==(frac o) {return p==0.p&&q==0.q;}
33 };
```

7.13. Simpson

```
double integral(double a, double b, int n=10000) //O(n), n=cantdiv

{
    double area=0, h=(b-a)/n, fa=f(a), fb;
    forn(i, n)
    {
        fb=f(a+h*(i+1));
        area+=fa+ 4*f(a+h*(i+0.5)) +fb, fa=fb;
    }
    return area*h/6.;
}
```

7.14. Tablas y cotas (Primos, Divisores, Factoriales, etc)

Factoriales 0! = 111! = 39.916.8001! = 1 $12! = 479.001.600 \ (\in int)$ 2! = 213! = 6.227.020.8003! = 614! = 87.178.291.20015! = 1.307.674.368.0004! = 2416! = 20.922.789.888.0005! = 1206! = 72017! = 355.687.428.096.0007! = 5.04018! = 6.402.373.705.728.0008! = 40.32019! = 121.645.100.408.832.0009! = 362.880 $20! = 2.432.902.008.176.640.000 (\in tint)$ $10! = 3.628.800 \mid 21! = 51.090.942.171.709.400.000$ $\max \text{ signed tint} = 9.223.372.036.854.775.807$ max unsigned tint = 18.446.744.073.709.551.615

Primos

 $\begin{array}{c} 1019\ 1021\ 1031\ 1033\ 1039\ 1049\ 1051\ 1061\ 1063\ 1069\ 1087\ 1091\ 1093\ 1097 \\ 1103\ 1109\ 1117\ 1123\ 1129\ 1151\ 1153\ 1163\ 1171\ 1181\ 1187\ 1193\ 1201\ 1213 \\ 1217\ 1223\ 1229\ 1231\ 1237\ 1249\ 1259\ 1277\ 1279\ 1283\ 1289\ 1291\ 1297\ 1301 \\ 1303\ 1307\ 1319\ 1321\ 1327\ 1361\ 1367\ 1373\ 1381\ 1399\ 1409\ 1423\ 1427\ 1429 \\ 1433\ 1439\ 1447\ 1451\ 1453\ 1459\ 1471\ 1481\ 1483\ 1487\ 1489\ 1493\ 1499\ 1511 \\ 1523\ 1531\ 1543\ 1549\ 1553\ 1559\ 1567\ 1571\ 1579\ 1583\ 1597\ 1601\ 1607\ 1609 \\ 1613\ 1619\ 1621\ 1627\ 1637\ 1657\ 1663\ 1667\ 1669\ 1693\ 1697\ 1699\ 1709\ 1721 \\ 1723\ 1733\ 1741\ 1747\ 1753\ 1759\ 1777\ 1783\ 1787\ 1789\ 1801\ 1811\ 1823\ 1831 \\ 1847\ 1861\ 1867\ 1871\ 1873\ 1877\ 1879\ 1889\ 1901\ 1907\ 1913\ 1931\ 1933\ 1949 \\ 1951\ 1973\ 1979\ 1987\ 1993\ 1997\ 1999\ 2003\ 2011\ 2017\ 2027\ 2029\ 2039\ 2053 \\ 2063\ 2069\ 2081 \\ \end{array}$

Primos cercanos a 10^n

9941 9949 9967 9973 10007 10009 10037 10039 10061 10067 10069 10079 99961 99971 99989 99991 100003 100019 100043 100049 100057 100069 999959 999961 999979 999983 1000003 1000033 1000037 1000039 9999943 9999971 9999991 10000019 10000079 10000103 10000121 99999941 9999959 9999971 99999989 100000007 100000037 100000039 100000049

999999893 99999999 999999937 1000000007 1000000009 1000000021 1000000033

Cantidad de primos menores que 10^n

$$\pi(10^1) = 4 \; ; \; \pi(10^2) = 25 \; ; \; \pi(10^3) = 168 \; ; \; \pi(10^4) = 1229 \; ; \; \pi(10^5) = 9592$$

$$\pi(10^6) = 78.498 \; ; \; \pi(10^7) = 664.579 \; ; \; \pi(10^8) = 5.761.455 \; ; \; \pi(10^9) = 50.847.534$$

$$\pi(10^{10}) = 455.052,511 \; ; \; \pi(10^{11}) = 4.118.054.813 \; ; \; \pi(10^{12}) = 37.607.912.018$$

7.15. Números Catalanes

Utiles para problemas de Combinatoria

$$Cat(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Con $Cat(0) = 1$.

Diferentes aplicaciones:

1. Contar la cantidad de diferentes arboles binarios con n nodos que se pueden armar.

UTN FRSF - El Rejunte

- 2. Contar las formas en que un polígono convexo de n+2 lados puede ser triangulado.
- 3. Contar la cantidad de caminos monotonos a lo largo de los lados de una grilla n * n, que no cruzan la diagonal.
- 4. Contar el número de expresiones que contienen n pares de paréntesis correctamente colocados

7.15.1. Primeros 25 Catalanes

Grafos

8.1. Dijkstra

```
#define INF 1e9
 2 int N;
  #define MAX V 250001
 4 vector<ii> G[MAX_V];
  //To add an edge use
  #define add(a, b, w) G[a].pb(make_pair(w, b))
 7 | 11 | dijkstra(int s, int t) {//0(|E| log |V|)
    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> > Q;
    vector<ll> dist(N, INF); vector<int> dad(N, -1);
    Q.push(make_pair(0, s)); dist[s] = 0;
    while(sz(0)){
12
      ii p = Q.top(); Q.pop();
13
      if(p.snd == t) break;
      forall(it, G[p.snd])
        if(dist[p.snd]+it->first < dist[it->snd]) {
           dist[it->snd] = dist[p.snd] + it->fst;
          dad[it->snd] = p.snd;
          O.push(make pair(dist[it->snd], it->snd)); }
    return dist[t];
    if(dist[t] < INF) //path generator</pre>
      for(int i=t; i!=-1; i=dad[i])
        printf("%d%c", i, (i==s?'\n':' '));}
```

8.2. Bellman-Ford

```
//Mas lento que Dijsktra, pero maneja arcos con peso negativo
vector<ii> G[MAX_N]; //ady. list with pairs (weight, dst)
int dist[MAX_N];

void bford(int src) {//O(VE)}
dist[src]=0;
forn(i, N-1) forn(j, N) if(dist[j]!=INF) forall(it, G[j])
dist[it->snd]=min(dist[it->snd], dist[j]+it->fst);

bool hasNegCycle() {
forn(j, N) if(dist[j]!=INF) forall(it, G[j])
if(dist[it->snd]>dist[j]+it->fst) return true;
//inside if: all points reachable from it->snd will have -INF distance(do bfs)
return false;
}
```

8.3. Floyd-Warshall

```
// Camino minimo en grafos dirigidos ponderados, en todas las parejas de
2 //G[i][j] contains weight of edge (i, j) or INF
  //G[i][i]=0
 4 int G[MAX_N][MAX_N];
  void floyd() { //O(N^3)
  forn(k, N) forn(i, N) if(G[i][k]!=INF) forn(j, N) if(G[k][j]!=INF)
   G[i][j]=min(G[i][j], G[i][k]+G[k][j]);
9 bool inNegCycle(int v) {
   return G[v][v]<0;}
11 //checks if there's a neg. cycle in path from a to b
12 bool hasNegCycle(int a, int b) {
   forn(i, N) if(G[a][i]!=INF && G[i][i]<0 && G[i][b]!=INF)
      return true;
15
   return false:
16
```

8.4. Kruskal

```
// Minimun Spanning Tree in O(e log e)
  bool operator<(const Ar& a, const Ar &b) {return a.w<b.w;}</pre>
3 vector<Ar> E:
  ll kruskal(){
      ll cost=0;
      sort(E.begin(), E.end());//ordenar aristas de menor a mayor
      uf.init(n);
      forall(it, E){
          if(uf.comp(it->a)!=uf.comp(it->b)){//si no estan conectados
               uf.unir(it->a, it->b);//conectar
               cost+=it->w;
11
13
      return cost;
14
15
```

8.5. Prim

```
vector<ii> G[MAXN];
bool taken[MAXN];
priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> pq;//min heap

void process(int v) {
   taken[v]=true;
   forall(e, G[v])
        if(!taken[e->second]) pq.push(*e);
}
```

```
9 // Minimun Spanning Tree in O(n^2)
10 ll prim() {
11
      zero(taken);
       process(0);
13
      ll cost=0;
14
       while(sz(pq)) {
15
           ii e=pq.top(); pq.pop();
16
           if(!taken[e.second]) cost+=e.first, process(e.second);
17
18
       return cost:
19 }
```

8.6. 2-SAT + Tarjan SCC

```
1 //We have a vertex representing a var and other for his negation.
 2 //Every edge stored in G represents an implication. To add an equation of
       the form a | | b, use addor(a, b)
 3 //MAX=max cant var, n=cant var
 4 #define addor(a, b) (G[neg(a)].pb(b), G[neg(b)].pb(a))
 5 vector<int> G[MAX*2];
 6 //idx[i]=index assigned in the dfs
 7 //lw[i]=lowest index(closer from the root) reachable from i
 8 int lw[MAX*2], idx[MAX*2], gidx;
 9 stack<int> q;
10 int qcmp, cmp[MAX*2];
| 11 | //verdad[cmp[i]]=valor de la variable i
12 bool verdad[MAX*2+1];
14 int neg(int x) { return x>=n? x-n : x+n;}
15 void tjn(int v) {
16 lw[v]=idx[v]=++qidx;
   q.push(v), cmp[v]=-2;
   forall(it, G[v]){
19
      if(!idx[*it] || cmp[*it]==-2){
20
        if(!idx[*it]) tjn(*it);
21
         lw[v] = min(lw[v], lw[*it]);
22
23
24
   if(lw[v] == idx[v]) {
26
      do(x=q.top(); q.pop(); cmp[x]=qcmp; while(x!=v);
27
      verdad[qcmp] = (cmp[neg(v)] < 0);
28
      gcmp++;
29
30 }
31 //remember to CLEAR G!!!
32 bool satisf(){//0(n)
memset(idx, 0, sizeof(idx)), qidx=0;
   memset(cmp, -1, sizeof(cmp)), qcmp=0;
35
    forn(i, n){
      if(!idx[i]) tjn(i);
```

```
if(!idx[neg(i)]) tjn(neg(i));

forn(i, n) if(cmp[i]==cmp[neg(i)]) return false;
return true;
}
```

8.7. Puntos de Articulación

```
1 int N;
  vector<int> G[1000000];
3 \mid //V[i] = node number(if visited), L[i] = lowest V[i] reachable from i
  int qV, V[1000000], L[1000000], P[1000000];
5 void dfs(int v, int f){
   L[v]=V[v]=++qV;
    forall(it, G[v])
      if(!V[*it]){
        dfs(*it, v);
        L[v] = min(L[v], L[*it]);
        P[v] += L[*it] >= V[v];
11
      else if(*it!=f)
        L[v]=min(L[v], V[*it]);
15
16 int cantart() { //O(n)
   aV=0;
   zero(V), zero(P);
   dfs(1, 0); P[1]--;
    int q=0;
    forn(i, N) if(P[i]) q++;
22 return q;
23 }
```

8.8. Least Common Ancestor + Climb

```
const int MAXN=100001;
const int LOGN=20;

//f[v][k] holds the 2^k father of v

//L[v] holds the level of v

int N, f[MAXN][LOGN], L[MAXN];

//call before build:

void dfs(int v, int fa=-1, int lvl=0){//generate required data}

f[v][0]=fa, L[v]=lvl;
forall(it, G[v])if(*it!=fa) dfs(*it, v, lvl+1); }

void build(){//f[i][0] must be filled previously, O(nlgn)}

forn(k, LOGN-1) forn(i, N) f[i][k+1]=f[f[i][k]][k];}

#define lg(x) (31-_builtin_clz(x))//=floor(log2(x))

int climb(int a, int d){//O(lgn)}

if(!d) return a;
```

```
dforn(i, lg(L[a])+1) if(1<<i<=d) a=f[a][i], d-=1<<i;
    return a;}
int lca(int a, int b) {//O(lgn)
    if(L[a]<L[b]) swap(a, b);
    a=climb(a, L[a]-L[b]);
    if(a==b) return a;
    dforn(i, lg(L[a])+1) if(f[a][i]!=f[b][i]) a=f[a][i], b=f[b][i];
    return f[a][0]; }
int dist(int a, int b) {//returns distance between nodes
    return L[a]+L[b]-2*L[lca(a, b)];}</pre>
```

8.9. Heavy Light Decomposition

```
1 vector<int> G[MAXN];
 2 int treesz[MAXN]; //cantidad de nodos en el subarbol del nodo v
 int dad[MAXN];//dad[v]=padre del nodo v
 4 void dfs1(int v, int p=-1){//pre-dfs
 5 | dad[v]=p;
 6 treesz[v]=1;
 7 forall(it, G[v]) if(*it!=p){
    dfs1(*it, v);
    treesz[v]+=treesz[*it];
10 }
111 }
12 //PONER O EN 0 !!!!!
| 13 | int pos[MAXN], q; //pos[v] = posicion del nodo v en el recorrido de la dfs
14 //Las cadenas aparecen continuas en el recorrido!
15 int cantcad;
16 int homecad[MAXN]; //dada una cadena devuelve su nodo inicial
17 int cad[MAXN]: //cad[v]=cadena a la que pertenece el nodo
18 void heavylight (int v, int cur=-1) {
if (cur==-1) homecad[cur=cantcad++]=v;
20 pos[v]=q++;
21 cad[v]=cur;
    int mx=-1:
    forn(i, sz(G[v])) if(G[v][i]!=dad[v])
24
     if(mx==-1 || treesz[G[v][mx]]<treesz[G[v][i]]) mx=i;</pre>
    if (mx!=-1) heavylight(G[v][mx], cur);
    forn(i, sz(G[v])) if(i!=mx && G[v][i]!=dad[v])
27
      heavylight (G[v][i], -1);
28 }
29 //ejemplo de obtener el maximo numero en el camino entre dos nodos
30 //RTA: max(query(low, u), query(low, v)), con low=lca(u, v)
31 //esta funcion va trepando por las cadenas
32 int query(int an, int v){//O(logn)
33 //si estan en la misma cadena:
if(cad[an] == cad[v]) return rmq.qet(pos[an], pos[v]+1);
    return max(query(an, dad[homecad[cad[v]]]),
36
            rmq.get(pos[homecad[cad[v]]], pos[v]+1));
37 }
```

8.10. Centroid Decomposition

```
1 vector<int> G[MAXN];
  bool taken[MAXN];//poner todos en FALSE al principio!!
  int padre[MAXN];//padre de cada nodo en el centroid tree
  int szt[MAXN];
  void calcsz(int v, int p) {
    szt[v] = 1;
    forall(it,G[v]) if (*it!=p && !taken[*it])
      calcsz(*it,v), szt[v]+=szt[*it];
11 void centroid(int v=0, int f=-1, int lvl=0, int tam=-1) {//O(nlogn)
   if(tam==-1) calcsz(v, -1), tam=szt[v];
   forall(it, G[v]) if(!taken[*it] && szt[*it]>=tam/2)
    {szt[v]=0; centroid(*it, f, lvl, tam); return;}
   taken[v]=true;
    padre[v]=f;
    forall(it, G[v]) if(!taken[*it])
18
      centroid(*it, v, lvl+1, -1);
19 }
```

8.11. Ciclo Euleriano

```
int n,m,ars[MAXE], eq;
  vector<int> G[MAXN];//fill G,n,m,ars,eq
3 list<int> path;
4 int used[MAXN];
 5 bool usede[MAXE];
6 queue<list<int>::iterator> q;
  int get(int v){
    while (used[v] < sz(G[v]) && usede[ G[v][used[v]] ]) used[v] ++;</pre>
    return used[v];
  void explore(int v, int r, list<int>::iterator it){
    int ar=G[v][get(v)]; int u=v^ars[ar];
    usede[ar]=true;
   list<int>::iterator it2=path.insert(it, u);
    if(u!=r) explore(u, r, it2);
    if(get(v) < sz(G[v])) q.push(it);</pre>
17
18 void euler() {
   zero(used), zero(usede);
    path.clear();
    g=queue<list<int>::iterator>();
    path.push_back(0); q.push(path.begin());
23
    while (sz(q)) {
    list<int>::iterator it=q.front(); q.pop();
      if(used[*it] < sz(G[*it])) explore(*it, *it, it);</pre>
25
26
    reverse(path.begin(), path.end());
```

```
28 }
29 void addEdge(int u, int v) {
30   G[u].pb(eq), G[v].pb(eq);
31   ars[eq++]=u^v;
32 }
```

8.12. Diametro Árbol

```
vector<int> G[MAXN]; int n,m,p[MAXN],d[MAXN],d2[MAXN];
 2 int bfs(int r, int *d) {
    queue<int> q;
    d[r]=0; q.push(r);
    int v:
     while(sz(q)) { v=q.front(); q.pop();
      forall(it,G[v]) if (d[*it]==-1)
         d[*it]=d[v]+1, p[*it]=v, q.push(*it);
    return v;//ultimo nodo visitado
12 vector<int> diams; vector<ii> centros;
13 void diametros(){
memset (d, -1, sizeof (d));
    memset (d2, -1, sizeof(d2));
    diams.clear(), centros.clear();
17
   forn(i, n) if(d[i]==-1){
      int v,c;
      c=v=bfs(bfs(i, d2), d);
20
      forn (_, d[v]/2) c=p[c];
21
      diams.pb(d[v]);
22
      if(d[v]&1) centros.pb(ii(c, p[c]));
23
      else centros.pb(ii(c, c));
24
25 }
```

8.13. Componentes Biconexas y Puentes

```
vector<int> G[MAXN];

struct edge{
   int u,v, comp;
   bool bridge;
};
vector<edge> e;
void addEdge(int u, int v)

{
   G[u].pb(sz(e)), G[v].pb(sz(e));
   e.pb((edge){u,v,-1,false});
}
```

```
13 //d[i]=id de la dfs
14 //b[i]=lowest id reachable from i
15 int d[MAXN], b[MAXN], t;
16 int nbc;//cant componentes
17 int comp[MAXN]; //comp[i]=cant comp biconexas a la cual pertenece i
18 void initDfs(int n)
19 {
20
    zero(G), zero(comp);
21
    e.clear();
    forn(i,n) d[i]=-1;
    nbc = t = 0;
23
24
25 stack<int> st;
26
   void dfs(int u,int pe) //O(n + m)
27
28
    b[u]=d[u]=t++;
29
     comp[u] = (pe! = -1);
3.0
     forall(ne,G[u]) if(*ne!=pe)
31
32
       int v=e[*ne].u ^ e[*ne].v ^ u;
       if (d[v] == -1)
33
34
35
         st.push(*ne);
36
         dfs(v,*ne);
37
         if(b[v]>d[u]) e[*ne].bridge=true; // bridge
         if(b[v]>=d[u]) // art
38
39
           int last:
40
           do
41
42
            las=st.top(); st.pop();
             e[last].comp=nbc;
           }while(last!=*ne);
46
           nbc++;
47
           comp[u]++;
48
         b[u]=min(b[u],b[v]);
49
50
51
       else if(d[v]<d[u]) // back edge</pre>
52
53
         st.push(*ne);
         b[u]=min(b[u], d[v]);
54
55
56
57
```

8.14. Hungarian

1 //Dado un grafo bipartito completo con costos no negativos, encuentra el matching perfecto de minimo costo.
2 #define tipo double

```
3 tipo cost[N][N], lx[N], ly[N], slack[N]; //llenar: cost=matriz de adyacencia
   4 int n, max_match, xy[N], yx[N], slackx[N], prev2[N]; //n=cantidad de nodos
   5 bool S[N], T[N]; //sets S and T in algorithm
   6 void add_to_tree(int x, int prevx) {
  S[x] = true, prev2[x] = prevx;
        forn(y, n) if (lx[x] + ly[y] - cost[x][y] < slack[y] - EPS)
              slack[y] = lx[x] + ly[y] - cost[x][y], slackx[y] = x;
10 }
11 void update_labels() {
12 tipo delta = INF;
forn (y, n) if (!T[y]) delta = min(delta, slack[y]);
forn (x, n) if (S[x]) lx[x] -= delta;
forn (y, n) if (T[y]) ly[y] += delta; else slack[y] -= delta;
17 void init_labels() {
zero(lx), zero(ly);
forn (x,n) forn (y,n) lx [x] = max (lx[x], cost[x][y]);
20 }
21 void augment() {
if (max_match == n) return;
23 int x, y, root, q[N], wr = 0, rd = 0;
memset(S, false, sizeof(S)), memset(T, false, sizeof(T));
memset (prev2, -1, sizeof (prev2));
26 forn (x, n) if (xy[x] == -1) {
             q[wr++] = root = x, prev2[x] = -2;
28
             S[x] = true; break; }
          forn (y, n) slack[y] = lx[root] + ly[y] - cost[root][y], slack[y] = root;
30
          while (true) {
31
              while (rd < wr) {</pre>
32
                  x = q[rd++];
33
                  for (y = 0; y < n; y++) if (cost[x][y] == lx[x] + ly[y] && !T[y]) {
34
                       if (yx[y] == -1) break; T[y] = true;
35
                       q[wr++] = yx[y], add_to_tree(yx[y], x); }
36
                  if (y < n) break; }
37
              if (y < n) break;</pre>
38
              update_labels(), wr = rd = 0;
39
              for (y = 0; y < n; y++) if (!T[y] \&\& slack[y] == 0) {
40
                   if (vx[v] == -1)\{x = slackx[v]; break;\}
41
                   else{
42
                       T[y] = true;
43
                       if (!S[yx[y]]) q[wr++] = yx[y], add_to_tree(yx[y], slackx[y]);
44
45
              if (v < n) break; }
         if (y < n) \{
46
47
              max match++;
 48
              for (int cx = x, cy = y, ty; cx != -2; cx = prev2[cx], cy = ty)
49
                   ty = xy[cx], yx[cy] = cx, xy[cx] = cy;
              augment(); }
51 }
52 tipo hungarian() {
        tipo ret = 0; \max_{max_m} = 0, \max_{max_
         memset(yx, -1, sizeof(yx)), init_labels(), augment(); //steps 1-3
          forn (x,n) ret += cost[x][xy[x]]; return ret;
```

66 }

8.15. Dynamic Connectivity

```
struct UnionFind {
    int n, comp;
    vector<int> pre,si,c;
    UnionFind(int n=0):n(n), comp(n), pre(n), si(n, 1) {
     forn(i,n) pre[i] = i; }
    int find(int u) {return u==pre[u]?u:find(pre[u]);}
    bool merge(int u, int v)
      if((u=find(u))==(v=find(v))) return false;
      if(si[u]<si[v]) swap(u, v);
      si[u] + = si[v], pre[v] = u, comp - -, c.pb(v);
      return true;
12
13
    int snap() {return sz(c);}
    void rollback(int snap)
16
17
      while(sz(c)>snap)
18
        int v = c.back(); c.pop_back();
20
        si[pre[v]] = si[v], pre[v] = v, comp++;
21
22
23 };
24 enum {ADD, DEL, QUERY};
25 struct Query {int type, u, v; };
26 struct DynCon{//bidirectional graphs; create vble as DynCon name(cant_nodos)
    vector<Query> q;
   UnionFind dsu;
   vector<int> match, res;
    map<ii,int> last;//se puede no usar cuando hay identificador para cada
        arista (mejora poco)
    DynCon(int n=0):dsu(n){}
    void add(int u, int v) //to add an edge
33
34
      if(u>v) swap(u,v);
      q.pb((Query) \{ADD, u, v\}), match.pb(-1);
      last[ii(u,v)] = sz(q)-1;
36
37
38
    void remove(int u, int v) //to remove an edge
39
      if(u>v) swap(u,v);
41
      q.pb((Query) {DEL, u, v});
42
      int prev = last[ii(u,v)];
      match[prev] = sz(q)-1;
      match.pb(prev);
44
45
    void query() //to add a question (query) type of query
```

```
48
       q.pb((Query) {QUERY, -1, -1}), match.pb(-1);
49
    void process() //call this to process queries in the order of q
50
51
       forn(i,sz(q)) if (q[i].type == ADD \&\& match[i] == -1) match[i] = sz(q);
      qo(0,sz(q));
54
    void go(int 1, int r)
55
56
57
      if(1+1==r)
58
59
         if (q[1].type == QUERY) // Aqui responder la query usando el dsu!
           res.pb(dsu.comp);//aqui query=cantidad de componentes conexas
60
61
         return;
62
63
       int s=dsu.snap(), m = (1+r) / 2;
       forr(i,m,r) if(match[i]!=-1 && match[i]<1) dsu.merge(q[i].u, q[i].v);</pre>
64
65
       go(1,m);
66
       dsu.rollback(s);
       s = dsu.snap();
       forr(i,1,m) if(match[i]!=-1 && match[i]>=r) dsu.merge(q[i].u, q[i].v);
69
      go(m,r);
70
      dsu.rollback(s);
71 }
72 };
```

UTN FRSF - El Rejunte

9. Flow

9.1. Edmond Karp

```
#define MAX V 1000
   #define INF 1e9
   //special nodes
   #define SRC 0
  #define SNK 1
  map<int, int> G[MAX_V];//limpiar esto -- unordered_map mejora
  //To add an edge use
  #define add(a, b, w) G[a][b]=w
  int f, p[MAX V];
10 void augment(int v, int minE)
11
    if(v==SRC) f=minE;
    else if(p[v]!=-1)
14
15
       augment(p[v], min(minE, G[p[v]][v]));
16
       G[p[v]][v]-=f, G[v][p[v]]+=f;
17
18
  11 maxflow() //O(min(VE^2, Mf*E))
19
20 {
   11 Mf=0;
21
22
    do
23
24
       char used[MAX_V]; queue<int> q; q.push(SRC);
       zero(used), memset(p, -1, sizeof(p));
26
27
       while (sz(a))
28
        int u=q.front(); q.pop();
29
        if(u==SNK) break;
30
        forall(it, G[u])
31
32
          if(it->snd>0 && !used[it->fst])
33
           used[it->fst]=true, q.push(it->fst), p[it->fst]=u;
34
35
       augment (SNK, INF);
      Mf+=f:
36
37
     }while(f);
    return Mf;
39
```

9.2. Min Cut

```
//Suponemos un grafo con el formato definido en Edmond Karp o Push relabel
bitset<MAX_V> type,used; //reset this
void dfs1(int nodo)
{
```

```
type.set(nodo);
    forall(it,G[nodo]) if(!type[it->fst] && it->snd>0) dfs1(it->fst);
 8 void dfs2(int nodo)
    used.set(nodo);
11
    forall(it,G[nodo])
12
13
      if(!type[it->fst])
14
15
         //edge nodo -> (it->fst) pertenece al min_cut
16
         //y su peso original era: it->snd + G[it->fst][nodo]
17
         //si no existia arista original al revs
18
19
      else if(!used[it->fst]) dfs2(it->fst);
20 }
21 }
22 void minCut() //antes correr algn maxflow()
23 {
24 dfs1(SRC);
25 dfs2(SRC);
26
    return;
27 }
```

9.3. Push Relabel

```
#define MAX V 1000
 2 int N; //valid nodes are [0...N-1]
 3 #define INF 1e9
 4 //special nodes
 5 #define SRC 0
 6 #define SNK 1
 7 map<int, int> G[MAX_V];//limpiar esto -- unordered_map mejora
 8 //To add an edge use
 9 #define add(a, b, w) G[a][b]=w
10 ll excess[MAX_V];
int height [MAX_V], active [MAX_V], cuenta [2*MAX_V+1];
12 queue<int> Q;
14 void enqueue (int v)
15 {
   if (!active[v] && excess[v] > 0) active[v]=true, Q.push(v);
17 }
18 void push (int a, int b)
19 {
|20| int amt = min(excess[a], ll(G[a][b]));
    if(height[a] <= height[b] || amt == 0) return;</pre>
    G[a][b]-=amt, G[b][a]+=amt;
     excess[b] += amt, excess[a] -= amt;
24
     enqueue (b);
```

UTN FRSF - El Rejunte 9 FLOW

```
26 void gap(int k)
27
28
    forn(v, N)
29
      if (height[v] < k) continue;</pre>
31
      cuenta[height[v]]--;
32
      height[v] = max(height[v], N+1);
33
      cuenta[height[v]]++;
34
      enqueue(v);
35
36 }
37 | void relabel(int v)
   cuenta[height[v]]--;
39
   height[v] = 2*N;
40
    forall(it, G[v])
    if(it->snd) height[v] = min(height[v], height[it->fst] + 1);
    cuenta[height[v]]++;
    enqueue(v);
45
46
  ll maxflow() //O(V^3)
47
   zero(height), zero(active), zero(cuenta), zero(excess);
    cuenta[0]=N-1; cuenta[N]=1;
    height[SRC] = N;
50
    active[SRC] = active[SNK] = true;
    forall(it, G[SRC])
52
53
      excess[SRC] += it->snd;
54
55
      push(SRC, it->fst);
57
    while (sz(O))
58
     int v = Q.front(); Q.pop();
59
60
      active[v]=false;
     forall(it, G[v]) push(v, it->fst);
61
62
      if(excess[v] > 0)
      cuenta[height[v]] == 1? gap(height[v]):relabel(v);
63
   11 mf=0;
65
    forall(it, G[SRC]) mf+=G[it->fst][SRC];
    return mf;
67
68 }
```

9.4. Dinic

```
struct Edge {
   int u, v;
   ll cap, flow;
   Edge() {}
   Edge(int u, int v, ll cap): u(u), v(v), cap(cap), flow(0) {}
```

```
6 };
 7 struct Dinic {
 8 int N;
    vector<Edge> E:
| vector<vector<int>> q;
| vector<int> d, pt;
Dinic(int N): N(N), E(0), g(N), d(N), pt(N) {} //clear and init
    void addEdge(int u, int v, ll cap)
14
15
      if (u != v)
16
17
         E.emplace_back(Edge(u, v, cap));
18
         g[u].emplace_back(E.size() - 1);
19
         E.emplace back(Edge(v, u, 0));
20
         g[v].emplace_back(E.size() - 1);
21
22
    bool BFS (int S, int T)
24
25
      queue<int> q({S});
26
      fill(d.begin(), d.end(), N + 1);
27
      d[S] = 0;
28
       while(!q.empty())
29
30
         int u = q.front(); q.pop();
31
         if (u == T) break;
32
         for (int k: q[u])
33
34
           Edge &e = E[k];
35
           if (e.flow < e.cap && d[e.v] > d[e.u] + 1)
36
37
             d[e.v] = d[e.u] + 1;
38
             q.emplace(e.v);
39
40
41
42
       return d[T] != N + 1;
43
    ll DFS(int u, int T, ll flow = -1)
45
46
      if (u == T || flow == 0) return flow;
47
       for (int &i = pt[u]; i < q[u].size(); ++i)</pre>
48
49
        Edge &e = E[q[u][i]];
         Edge &oe = E[q[u][i]^1];
51
         if (d[e.v] == d[e.u] + 1)
52
           11 amt = e.cap - e.flow;
54
           if (flow !=-1 \&\& amt > flow) amt = flow;
55
           if (ll pushed = DFS(e.v, T, amt))
56
57
             e.flow += pushed;
             oe.flow -= pushed;
58
```

UTN FRSF - El Rejunte 10 JUEGOS

```
return pushed;
60
61
62
63
       return 0;
    11 maxFlow(int S,int T)
65
66
67
       11 \text{ total} = 0;
       while(BFS(S, T))
68
69
         fill(pt.begin(), pt.end(), 0);
70
71
         while (ll flow = DFS(S, T)) total += flow;
72
73
       return total;
74
75 };
```

9.5. Min cost - Max flow

```
const int MAXN=10000;
  typedef ll tf;
   typedef 11 tc;
   const tf INFFLUJO = 1e14;
  const tc INFCOSTO = 1e14;
   struct edge {
    int u, v;
    tf cap, flow;
    tc cost;
    tf rem() { return cap - flow; }
   };
11
12 int nodes; //numero de nodos
13 vector<int> G[MAXN]; // limpiar!
14 vector<edge> e; // limpiar!
15 void addEdge(int u, int v, tf cap, tc cost)
16
17
    G[u].pb(sz(e)); e.pb((edge){u,v,cap,0,cost});
    G[v].pb(sz(e)); e.pb((edge) \{v,u,0,0,-cost\});
18
19
20 tc dist[MAXN], mnCost;
21 int pre[MAXN];
22 tf cap[MAXN], mxFlow;
23 bool in queue[MAXN];
24 void flow(int s, int t)
25
    zero(in_queue);
26
    mxFlow=mnCost=0;
27
28
    while (1)
29
30
      fill(dist, dist+nodes, INFCOSTO); dist[s] = 0;
      memset(pre, -1, sizeof(pre)); pre[s]=0;
```

```
zero(cap); cap[s] = INFFLUJO;
33
       queue<int> q; q.push(s); in_queue[s]=1;
34
       while (sz(q))
35
36
         int u=q.front(); q.pop(); in_queue[u]=0;
37
         for(auto it:G[u])
38
39
           edge &E = e[it];
40
           if(E.rem() && dist[E.v] > dist[u] + E.cost + 1e-9) // ojo EPS
41
42
             dist[E.v]=dist[u]+E.cost;
43
             pre[E.v] = it;
44
             cap[E.v] = min(cap[u], E.rem());
45
             if(!in_queue[E.v]) q.push(E.v), in_queue[E.v]=1;
46
47
48
49
       if (pre[t] == -1) break;
50
       mxFlow +=cap[t];
51
       mnCost +=cap[t]*dist[t];
52
       for (int v = t; v != s; v = e[pre[v]].u)
         e[pre[v]].flow += cap[t];
54
55
         e[pre[v]^1].flow -= cap[t];
56
57 }
58 }
```

10. Juegos

10.1. Nim Game

Juego en el que hay N pilas, con objetos. Cada jugador debe sacar al menos un objeto de una pila. GANA el jugador que saca el último objeto.

$$P_0 \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_n = R$$

Si $R\neq 0$ gana el jugador 1.

10.1.1. Misere Game

Es un juego con las mismas reglas que Nim, pero PIERDE el que saca el último objeto. Entonces teniendo el resultado de la suma R, y si todas las pilas tienen 1 solo objeto todos1=true, podemos decir que el jugador2 GANA si:

```
(R=0)&\neg todos1||(R\neq 0)&todos1
```

UTN FRSF - El Rejunte

10.2. Ajedrez

10.2.1. Non-Attacking N Queen

Utiliza: <algorithm>
Notas: todo es $O(!N \cdot N^2)$.

```
#define NOUEEN 8
   #define abs(x) ((x)<0?(-(x)):(x))
  int board[NOUEEN];
  void inline init() {for(int i=0;i<NQUEEN;++i)board[i]=i;}</pre>
  bool check() {
       for(int i=0;i<NOUEEN;++i)</pre>
           for(int j=i+1;i<NQUEEN;++j)</pre>
                if (abs(i-j) == abs(board[i]-board[j]))
                    return false:
       return true;
11
12
13 //en main
14 init();
15 do {
       if(check()){
16
           //process solution
17
18
  }while (next_permutation (board, board+NQUEEN));
```

11. Utils

11.1. Convertir string a num e viceversa

```
#include <sstream>
string num_to_str(int x) {
    ostringstream convert;
    convert << x;
    return convert.str();
}

int str_to_num(string x) {
    int ret;
    istringstream (x) >> ret;
    return ret;
}
```

11.2. Truquitos para entradas/salidas

```
//Cantidad de decimales
cout << setprecision(2) << fixed;
//Rellenar con espacios(para justificar)
cout << setfill(' ') << setw(3) << 2 << endl;
//Leer hasta fin de linea
// hacer cin.ignore() antes de getline()
while(getline(cin, line)) {
  istringstream is(line);
  while(is >> X)
      cout << X << " ";
      cout << endl;
}</pre>
```

11.3. Comparación de Double

```
const double EPS = 1e-9;
x == y <=> fabs(x-y) < EPS
x > y <=> x > y + EPS
x >= y <=> x > y - EPS
```

11.4. Iterar subconjuntos

```
for(int sbm=bm; sbm; sbm=(sbm-1)&bm)
```

11.5. Limites

```
#include <limits>
numeric_limits<T>
::max()
::min()
::epsilon()
```

UTN FRSF - El Rejunte

11.6. Mejorar Lectura de Enteros

```
//Solo para enteros positivos
inline void Scanf(int@ a)
{
    char c = 0;
    while(c<33) c = getc(stdin);
    a = 0;
    while(c>33) a = a*10 + c - '0', c = getc(stdin);
}
```

11.7. Tablita de relacion de Complejidades

n	Peor AC Complejidad	Comentario
\leq [10.,11]	$O(n!), O(n^6)$	ej. Enumerar permutaciones
\leq [15.,18]	$O(2^n \times n^2)$	ej. DP TSP
\leq [18.,22]	$O(2^n \times n)$	ej. DP con mascara de bits
≤ 100	$O(n^4)$	ej. DP con 3 dimensiones $+O(n)$ loops
≤ 400	$O(n^3)$	ej. Floyd Warshall
$\leq 2K$	$n^2 \log_2 n$	ej. 2 loops anidados + una busqueda en arbol en una estructura de datos
$\leq 10K$	$O(n^2)$	ej. Ordenamiento Burbuja/Selección/Inserción
$\leq 1M$	$O(n \log_2 n)$	ej. Merge Sort, armar Segment Tree
$\leq 100M$	$O(n), O(\log_2 n), O(1)$	La mayoría de los problemas de contest tiene $n \le 1M$ (cuello de botella en I/O)

11.8. Compilar C++11 con g++

Dos opciones, útil en Linux.

```
g++ -std=c++11 {file} -o {filename}

g++ -std=c++0x {file} -o {filename}
```

11.9. Build de C++11 para Sublime Text

11.10. Funciones Utiles

Algo	Params	Función
Algo		Funcion
fill, fill_n	f, l / n, elem	void llena [f, l) o [f,f+n) con elem
lower_bound, upper_bound	f, l, elem	it al primer ultimo donde se puede insertar elem para que quede ordenada
сору	f, l, resul	hace resul+ $i=f+i \ \forall i$
<pre>find, find_if, find_first_of</pre>	f, l, elem	it encuentra i \in [f,l) tq. i=elem,
	/ pred / f2, l2	$\operatorname{pred}(i), i \in [f2, l2)$
count, count_if	f, l, elem/pred	cuenta elem, pred(i)
search	f, 1, f2, 12	busca $[f2,l2) \in [f,l)$
replace, replace_if	f, l, old	cambia old / pred(i) por new
	/ pred, new	
lexicographical_compare	f1,11,f2,12	bool con [f1,l1];[f2,l2]
accumulate	f,l,i,[op]	$T = \sum \text{oper de [f,l)}$
inner_product	f1, 11, f2, i	$T = i + [f1, l1) \cdot [f2, \dots)$
partial_sum	f, l, r, [op]	$r+i = \sum /oper de [f,f+i] \forall i \in [f,l)$
builtin_ffs	unsigned int	Pos. del primer 1 desde la derecha
builtin_clz	unsigned int	Cant. de ceros desde la izquierda.
_builtin_ctz	unsigned int	Cant. de ceros desde la derecha.
_builtin_popcount	unsigned int	Cant. de 1s en x.
_builtin_parity	unsigned int	1 si x es par, 0 si es impar.
_builtin_XXXXXX11	unsigned ll	= pero para long long's.