

# Internship Néel - Quantum String

Léo Giroud

Juin 2021

## 1 Introduction

## 2 Masse fixée sur la corde avec ressort

### 2.1 du Lagrangien aux équations

Dans ce système, on considère une masse fixée sur la corde en  $x = 0$ , où cette même masse est attachée à un ressort de raideur  $K$  (on considère le déplacement nul à  $u(x, t) = 0$ ).

On va encoder la présence de la masse dans la densité linéique de la corde: elle va maintenant dépendre de  $x$  de telle sorte que,  $\forall x \neq 0 \Rightarrow \rho(x) = \rho_0$  mais en  $x = 0$  la masse  $m$  est présente en une singularité. On en déduit l'expression de la densité de la corde  $\rho(x) = \rho_0 + m\delta(x) = \rho_0(1 + \frac{m}{\rho_0}\delta(x))$

Pour prendre en compte l'existence de la constante de raideur, on peut raisonner de façon équivalente: on peut considérer chaque élément de la corde relié à un ressort.  $\forall x \neq 0$  les constantes de raideur de ces supposés ressorts sont nulles, car la corde est libre sauf à l'endroit de la masse en  $x = 0$  où "tout le ressort est concentré en ce point". On en déduit une expression de la "constante de raideur linéique"  $\kappa(x) = K\delta(x)$

On peut maintenant écrire le Lagrangien *linéique* avec les différents termes:

- Le terme cinétique:  $\frac{1}{2}\rho(x)[\partial_t u(x, t)]^2 = \frac{1}{2}\rho(x)\dot{u}^2$
- Le terme potentiel de tension:  $\frac{1}{2}T[\partial_x u(x, t)]^2 = \frac{1}{2}Tu'^2$
- Le terme potentiel de ressort:  $\frac{1}{2}\kappa(x)[u(x, t)]^2$

le Lagrangien *linéique* s'écrit donc:

$$\mathcal{L}(x, t, u, \partial_x u(x, t), \partial_t u(x, t)) = \frac{1}{2}\rho(x)[\partial_t u(x, t)]^2 - \frac{1}{2}T[\partial_x u(x, t)]^2 - \frac{1}{2}\kappa(x)[u(x, t)]^2 \quad (1)$$

Ou en allégeant l'écriture:

$$\mathcal{L}(x, t, u, u', \dot{u}) = \frac{1}{2}\rho(x)\dot{u}^2 - \frac{1}{2}Tu'^2 - \frac{1}{2}\kappa(x)u^2 \quad (2)$$

On dérive maintenant le lagrangien linéique:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = 0 \\ \Rightarrow -\kappa(x)u + \frac{\partial}{\partial x} Tu' - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x)\dot{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

On tombe enfin sur l'équation décrivant l'évolution de la corde:

$$\boxed{\frac{\rho_0 + m\delta(x)}{T} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = -\frac{K}{T} \delta(x) u(x, t)} \quad (4)$$

Ou avec le d'Alembertien:

$$\square u(x, t) = -(m\partial_t^2 u(x, t) + Ku(x, t)) \frac{\delta(x)}{T} \quad (5)$$

Avec  $k = m\omega^2$  où  $\omega$  s'apparente à la pulsation de la particule

## 2.2 Les coefficients de transmission/réflexion

On impose un champ incident monochromatique. Ainsi le champ de la corde se décompose ainsi:

- $u_I(x, t) = A \exp^i(\omega t - kx)$
- $u_R(x, t) = B \exp^i(\omega t + kx)$
- $u_T(x, t) = C \exp^i(\omega t - kx)$

Avec

- $u(x < 0, t) = u_I(x, t) + u_R(x, t)$
- $u(x > 0, t) = u_T(x, t)$

Tout d'abord on exprime la continuité du champ. Trivialement:

$$A + B = C \quad (6)$$

On peut approximer la dérivée seconde d'espace comme ceci:

$$\partial_x^2 u(x, t) \simeq \frac{1}{\Delta x} (\partial_x u(x + \Delta x, t) - \partial_x u(x - \Delta x, t))$$

On approxime le Dirac aussi:

$$\delta(0) = \frac{1}{\Delta x}$$

On fera tendre  $\Delta x$  vers zéro à posteriori.

On calcule:

- $\partial_x u(x < 0, t) = ik(-u_I + u_R)$
- $\partial_x u(x > 0, t) = -iku_T$
- $\partial_t^2 u(x = 0, t) = -\omega^2 u_T$
- On prend la valeur du champ à droite en  $x = 0$   $u(x = 0, t) = u_T(x = 0, t)$

On reprend dans (4)

$$\partial_x^2 u(0, t) = \frac{\rho_0 + m\delta(0)}{T} \partial_t^2 u(0, t) + \frac{K}{T} \delta(0) u(0, t)$$

$$\frac{1}{\Delta x} [-iku_T(0, t) + ik u_I(0, t) - ik u_R(0, t)] = -\frac{\rho_0 + m/\Delta x}{T} \omega^2 u_T(0, t) + \frac{K}{T\Delta x} u_T(0, t)$$

On exprime avec les exponentielles, qui disparaissent:

$$ikT(-C + A - B) = [K - \omega^2(\Delta x \rho_0 + m)]C$$

En utilisant la continuité du champ (6)

$$-2ikTB = [K - \omega^2(\Delta x \rho_0 + m)](A + B) = X(A + B) \Rightarrow -(2ikT + X)B = XA \Rightarrow B = \frac{-1}{i\frac{2kT}{X} + 1} A = \frac{-1}{i\alpha + 1} A$$

Avec

$$\alpha = \frac{2kT}{K - (m + \Delta x \rho_0)\omega^2} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \boxed{\frac{2\omega \rho_0 c}{K - m\omega^2} = \alpha} \quad (7)$$

Ainsi on trouve l'expression du coefficient de réflexion:

$$r = \frac{B}{A} = \frac{-1}{1 + i\alpha} \Rightarrow \boxed{|r|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2}} \quad (8)$$

Puis on en déduit directement le coefficient de transmission:

$$t = r + 1 = \frac{C}{A} = \frac{1}{1 - i\alpha^{-1}} \Rightarrow \boxed{|t|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^{-2}}} \quad (9)$$

### 2.3 Energie de la corde

A partir du Lagrangien (linéique), on peut tout à fait définir un Hamiltonien (linéique) qui correspond à l'énergie linéique de la corde.

$$\mathcal{H} = \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2}\rho(x)[\partial_t u(x, t)]^2 + \frac{1}{2}T[\partial_x u(x, t)]^2 + \frac{1}{2}\kappa(x)[u(x, t)]^2 \quad (10)$$

## 2.4 Simulation d'une corde infinie: condition aux bords

On veut simuler une corde infinie. On veut trouver les conditions en bout de corde pour simuler ce comportement...

### 2.4.1 Idée: masse fixée à un ressort en bout de corde

Pour se faire, on voudrait n'avoir aucune réflexion sur l'extrémité droite de la corde. On y place une masse  $M$ , fixée à un ressort  $K$ , qui peut coulisser verticalement sans frottements.

La masse étant fixe horizontalement, un premier bilan de force nous donne:

$$T \cos \theta = F_x \simeq T[1 - \frac{\theta^2}{2}] = T - \frac{T}{2}[\partial_x u(L, t)]^2$$

Où  $F_x$  est la force qui retient la masse en  $x = L$

Le second bilan des forces (vertical) nous donne (en utilisant l'approximation des petits angles):

$$M\partial_t^2 u(L, t) = T \sin \theta - Ku(L, t) \simeq T \tan \theta - Ku(L, t) \simeq T\partial_x u(L, t) - Ku(L, t)$$

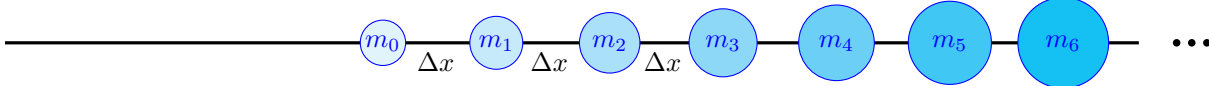
On impose un champ incident  $u_I(x, t) = A \exp^i(\omega t - kx)$  et on pose le champ réfléchi  $u_R(x, t) = B \exp^i(\omega t + kx)$

En calculant les dérivées, puis en éliminant les exponentielles, tombe sur:

$$-M\omega^2(A + B) = ikT(A - B) - K(A + B) \Rightarrow B = -A \frac{K - M\omega^2 - ikT}{K - M\omega^2 + ikT}$$

Peu importe la valeur de  $K, M$  on aura toujours  $ikT \neq 0$ . Ainsi,  $B = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow$  **si on a un champ incident, on aura toujours une réflexion... Il faut donc rajouter un absorbeur si on veut dissiper l'énergie**

### 2.4.2 Succession de masses pour créer un absorbeur



On peut utiliser ce principe qu'il y aura toujours une réflexion pour construire un absorbeur idéal: on aligne  $N$  masses  $m_i$  de masse croissantes, espacées de  $\Delta x$ , **fixes sur la corde**.

Nous allons donc calculer le coefficient de réflexion total  $R$  de cet ensemble. Il va pouvoir être exprimé par la somme de termes correspondant aux différentes masses. L'expression de celui-ci n'étant pas triviale, nous allons y aller étape par étape.

Supposons que nous envoyons une onde incidente  $u_I(x, t) = A \exp^i(\omega t - kx)$ . Nous avons calculé les coefficients de réflexion/transmissions pour des masses sur une corde (ici on prend  $K = 0$  car les masses sont sans ressort):

$$r_i = \frac{-1}{1 + i\alpha_i} \quad t_i = \frac{1}{1 - \frac{i}{\alpha_i}} \quad \alpha_i = \frac{-2kT}{m_i\omega^2}$$

Voici comment nous allons procéder: nous allons suivre le "parcours" de l'onde incidente au long de ses réflexions et transmissions, pour déterminer les termes qui composent  $R$ .

Le premier élément à prendre en compte est l'onde  $u_I$  directement réfléchi par  $m_0$ . Ensuite, nous avons l'onde qui va être transmise par  $m_0$ , réfléchi par  $m_1$ , enfin retransmise par  $m_0$ . Ce terme sera plus petit que le premier. Cependant, on voit bien que l'onde entre  $m_0$  et  $m_1$  peut rebondir une infinité de fois entre les deux jusqu'à ressortir en  $m_0$ . Plus le nombre de rebonds intermédiaires va être élevé, plus le terme correspondant sera petit (ordre à quantifier). **On voit bien que ces rebonds intermédiaires vont devoir être négligés pour pouvoir un résultat pas trop horrible, cependant ils ne sont peut-être pas si négligeables que ça, il faudrait approfondir !**

On suppose qu'on néglige les rebonds intermédiaires. On aura  $N$  termes qui composent  $R$ :

- $\rightarrow m_0 \rightarrow \sigma_0 = r_0$
- $\rightarrow m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow m_0 \rightarrow \sigma_1 = t_0 r_1 t_0 = t_0^2 r_1 = \sigma_0 t_0^2 \frac{r_1}{r_0}$
- $\rightarrow m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_1 \rightarrow m_0 \rightarrow \sigma_2 = t_0 t_1 r_2 t_1 t_0 = t_0^2 t_1^2 r_2 = \sigma_1 t_1^2 \frac{r_2}{r_1}$
- $\rightarrow m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow m_2 \rightarrow m_1 \rightarrow m_0 \rightarrow \sigma_3 = t_0 t_1 t_2 r_3 t_2 t_1 t_0 = t_0^2 t_1^2 t_2^2 r_3 = \sigma_2 t_2^2 \frac{r_3}{r_2}$
- ...

On a donc le coefficient de réflexion total du dispositif  $R = \sum_{i=0}^N \sigma_i$

On observe aussi que  $\sigma_{i+1} = \sigma_i t_i^2 \frac{r_{i+1}}{r_i}$

Les masses sont croissantes  $m_{i+1} > m_i \Rightarrow 0 < \alpha_{i+1} < \alpha_i$  Dans la suite on proposera une façon d'augmenter les masses pour que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$

On voit sans encombre que, pour un grand nombre de masses

- $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{1+i\alpha_i}{1+i\alpha_{i+1}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$
- $t_i = \frac{1}{1 - \frac{i}{\alpha_i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} i\alpha_i \Rightarrow t_i^2 \longrightarrow -\alpha_i^2$

Cela implique que pour un  $i$  assez élevé, on aura  $\sigma_{i+1} \simeq -\sigma_i \alpha_i^2$

Pour simplifier le problème sans perte de généralité (pour faire tendre  $\alpha_i$  vers zéro rapidement), on peut multiplier les masses successives par un facteur  $m_{i+1} = a m_i$   $a > 1 \Rightarrow \alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i}{a} \Rightarrow \alpha_i = a^{-i} \alpha_0$

Avec un peu de calcul (à refaire car je me suis certainement planté), on arrive à une expression de  $\sigma_i$  en fonction de  $i$

$$\sigma_n \simeq (-1)^n a^{-n(n+1)} \alpha_0^{2n} \sigma_0 \longrightarrow (i \frac{\alpha_0}{a})^{2n} \sigma_0 \quad (11)$$

Afin d'avoir un premier résultat analytique avec les mains, on se propose d'avoir un  $a$  suffisamment grand pour être dans le cas (11) dès la masse  $i = 1$

$$R = \sum_{n=0}^N \sigma_n = \sigma_0 \frac{1 - (i \frac{\alpha_0}{a})^{2N}}{\frac{\alpha_0^2}{a^2} + 1} \quad (12)$$

Attention, cette expression n'est valable que pour un  $N$  suffisamment grand, un  $\alpha_0$  assez petit et un  $a$  assez grand. Attention cependant, si  $\alpha_0$  est trop petit, on aura une réflexion  $r_0$  à la première masse qui sera trop importante... Il faut jouer avec les paramètres pour se rendre compte.

### 2.4.3 Absorbeur idéal en bout de corde

Une simple considération géométrique nous permet d'arriver à un absorbeur idéal. Ce que nous voulons en réalité, c'est juste une fenêtre de corde infinie où un signal arrive de  $-\infty$ . On va donc regarder ce qu'il se passe pour un signal se propageant de la sorte sur une corde infinie...

L'on suppose une corde infinie avec un signal se propageant dessus tel que  $u(x, t) = f(x + ct)$  (marche tout pareil en rajoutant  $+g(x - ct)$ )

On rappelle la condition  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ . Si l'on regarde notre signal à un instant  $t + \Delta t$ :

$$u(x, t + \Delta t) = f(x + c(t + \Delta t)) = f(x + ct + c\Delta t) = f(x + \Delta x + ct) = u(x + \Delta x, t)$$

Ceci est évidemment trivial. Mais si l'on considère une fenêtre de cette corde  $x \in [0, L]$ , on en déduit une condition suffisante sur le champ pour simuler parfaitement une onde traversant notre fenêtre comme si elle était sur une corde infinie:

$$u(x = L, t + \Delta t) = u(x = L - \Delta x, t) \quad (13)$$

Et très similairement à gauche:

$$u(x = 0, t + \Delta t) = u(x = \Delta x, t) \quad (14)$$

On peut retrouver ce calcul en posant le PDF avec un terme de frottements  $\mu \frac{\partial u}{\partial t}$  avec  $\mu = T/c$  (à montrer)

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15)$$

Lorsque  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

En prenant  $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x}$

Avec ça on obtient bien  $u(x, t + \Delta t) = u(x - \Delta x, t)$  la condition de notre absorbeur (à droite)

De même, on peut retrouver cette condition en développant l'opérateur d'alembertien:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial t} \right) = \overleftarrow{\square} \overrightarrow{\square} \quad (16)$$

et que cela revient à poser  $\square = \overrightarrow{\square}$  pour absorber les ondes venant de la gauche. En effet, cela implique  $\overleftarrow{\square} = \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial t} = 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial t}$  exactement ce qu'on a montré plus haut

### 2.4.4 Absorbeur en bout de corde + un excitateur

L'idée maintenant est d'avoir un absorbeur qui absorbe que d'un côté, mais qui laisse passer le champ de l'excitateur de l'autre côté.

D'abord on écrit le champ en  $x$  comme la combinaison linéaire du champ arrivant de gauche et de droite  $u(x, t) = \overrightarrow{u}(x, t) + \overleftarrow{u}(x, t)$ . On suppose que notre excitateur est à gauche, et que l'on veut éliminer les ondes de droite. On connaît donc l'expression du champ à gauche  $\overrightarrow{u}(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

Pour éliminer la partie de droite, on pose le PDF et on introduit une force de frottement de coefficient  $\mu = T/c$  (se vérifie en posant le PDF en imposant le champ qu'implique l'absorption) qui va annuler  $\overleftarrow{u}(x, t)$

$$\rho_0 \Delta x \partial_t^2 u(x, t) = -T \partial_x u(x, t) - \mu \partial_t \overleftarrow{u}(x, t)$$

En utilisant  $u(x, t) - \overrightarrow{u}(x, t) = \overleftarrow{u}(x, t)$ , et en choisissant correctement la discrétisation des dérivées, on obtient

$$u(x, t + \Delta t) = u(x + \Delta x, t) - (\overrightarrow{u}(x, t) - \overrightarrow{u}(x, t - \Delta t)) \quad (17)$$

Etant donné qu'à gauche on a donc une onde monochromatique unidirectionnelle se propageant, on peut utiliser  $\overrightarrow{u}(n_x, n_t) = A \sin(k \Delta x n_x - \omega \Delta t n_t) \Rightarrow \overrightarrow{u}(n_x, n_t) = \overrightarrow{u}(0, n_x + n_t)$

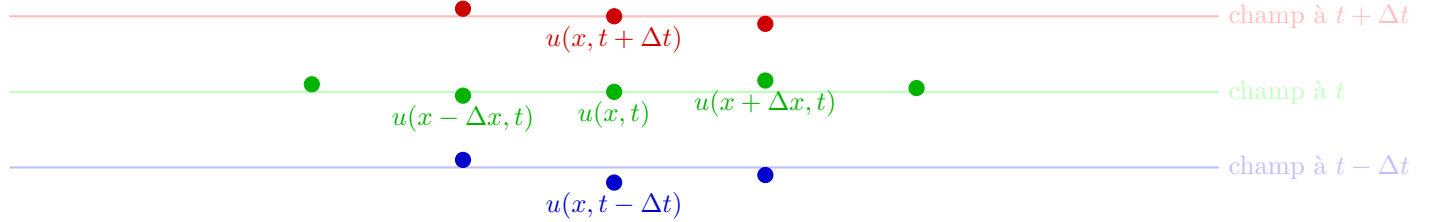
## 2.5 Numérisation des équations d'évolution

Pour coder les équations dans une simulation, on utilise le modèle des différences finies. On exprime la dérivée seconde d'une fonction:

$$f''(z) = \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (18)$$

On approxime aussi le Dirac par une fonction porte.

### 2.5.1 Evolution de la corde en tout point



On part de (4), puis après un certain nombre de lignes de calcul (**à refaire pour être sûr**) on obtient l'équation d'évolution:

$$u(x, t + \Delta t) = \frac{1}{1 + \beta} (u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) + (2\beta - \gamma)u(x, t)) - u(x, t - \Delta t) = F(\beta, \gamma) \quad (19)$$

Deux cas possibles:

- si on ne se situe pas à la particule  $x \neq x_i \Rightarrow F(\beta = 0, \gamma = 0) \Rightarrow u(x, t + \Delta t) = u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - u(x, t - \Delta t)$
- si on se situe à l'endroit de la particule  $x = x_i \Rightarrow F(\beta = \frac{m_i}{\rho_0 \Delta x}, \gamma = \frac{K_i \Delta x}{T})$

### 2.5.2 Energie

On peut calculer l'énergie des éléments de la corde en discrétisant le Hamiltonien linéique:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho(x)}{\Delta t^2} (u(x, t) - u(x, t - \Delta t))^2 + \frac{T}{4\Delta x^2} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t))^2 + \kappa(x) u(x, t)^2 \right) \quad (20)$$

Et on peut en déduire l'énergie totale de la corde en sommant sur toutes les cellules (on ne prend pas en compte les bords):

$$E = \sum_{n=1}^{n_x-1} \frac{dH(n\Delta x)}{dx} \Delta x = \Delta x \sum_{n=1}^{n_x-1} \mathcal{H}(n\Delta x) \quad (21)$$

## 2.6 Tentative d'observation de la transparence

En régime stationnaire, le champ s'écrit:  $u(x, t) = A \sin kx \cos \omega t$

En régime transparent, une particule est bien présente, mais possède un couple  $m, K$  tel que la particule ne "voit pas" le champ, c'est-à-dire que dans le régime du laboratoire le champ stationnaire est conservé.

On place l'origine des temps à  $t = 0$ . Le champ doit rester stationnaire donc on connaît son expression partout en tout temps. En particulier:

- $u(x, 0) = A \sin kx$
- $u(x, \Delta t) = A \sin kx \cos \omega \Delta t$
- $u(x, -\Delta t) = A \sin kx \cos -\omega \Delta t = A \sin kx \cos \omega \Delta t = u(x, \Delta t)$

On rappelle aussi que

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On remplace dans (19) pour trouver

$$2 \sin kx \cos \omega \Delta t = \frac{1}{1 + \beta} (\sin(kx + k\Delta x) + \sin(kx - k\Delta x) + (2\beta - \gamma) \sin kx)$$

D'après la trigonométrie on a  $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \Rightarrow \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$

On obtient

$$2 \sin kx \cos \omega \Delta t = \frac{1}{1 + \beta} (2 \sin kx \cos k\Delta x + (2\beta - \gamma) \sin kx)$$

On simplifie par  $\sin kx$  et on rappelle que  $\omega \Delta t = k\Delta x$

$$2(1 + \beta) \cos \omega \Delta t = (2 \cos \omega \Delta t + 2\beta - \gamma)$$

Je pose maintenant  $A = 1 + \beta$ ,  $B = 2\beta - \gamma$ ,  $X = \cos \omega \Delta t$

Cela nous donne

$$2AX = 2X + B \Rightarrow 2X = \frac{B}{A - 1} = \frac{2\beta - \gamma}{\beta} = 2 - \frac{\gamma}{\beta}$$

$$2 \cos \omega \Delta t = 2 - \frac{K}{m} \frac{\rho_0}{T} \Delta x^2 = 2 - \frac{K}{m} \frac{1}{c^2} \Delta t^2 = 2 - \frac{K}{m} \Delta t^2 = 2 - (\omega_0 \Delta t)^2 = 2 \cos \omega \Delta t \Rightarrow 1 - \frac{(\omega_0 \Delta t)^2}{2} = \cos \omega \Delta t$$

avec  $\omega_0^2 = K/m$  la pulsation propre de la particule

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{(\omega_0 \Delta t)^2}{2} \approx 1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2} + O(\omega^4 \Delta t^4)}$$

Ainsi, on peut bien observer numériquement une transparence pour  $\omega_0 = \omega$  si  $\omega^4 \Delta t^4 \ll 1$