

1 Préambule

1.1 Introduction

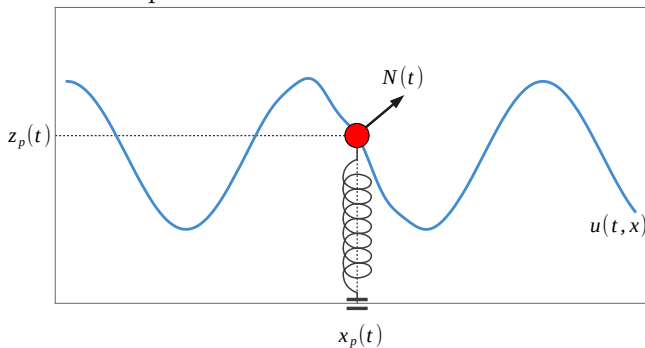
La dualité onde-corpuscule est une notion fondamentale en physique. En 1924, Louis De Broglie pose les concepts de la "mécanique ondulatoire" avec sa thèse, notamment avec sa célèbre relation $\lambda = h/p$ qui étend le principe d'onde à toute particule, pas uniquement le photon. De là va émerger la "mécanique quantique", où l'objet manipulé sera bien une onde, mais une "onde de probabilité" qui n'a rien de physique. De plus, cette onde probabiliste ne laisse pas la place à la notion de particule, bien qu'elle décrive avec une précision folle les phénomènes observés.

De Broglie était convaincu d'une 'onde réelle' et conceptualise la *théorie de l'onde pilote*: il tente de montrer qu'une seconde solution consistant d'une *singularité mobile* existe (en plus de celles de lignes de courant), et associer les deux (*double solution*) donnerait un sens à la dualité onde-corpuscule. Développée plus tard par David Bohm, qui donne lieu à la **Théorie de De Broglie-Bohm**, qui se veut être une interprétation réaliste et déterministe de la mécanique quantique, contrairement à *l'interprétation de Copenhague*.

1.2 L'expérience macroscopique

Cette *solution double* se compose d'une particule avec fréquence propre en interaction avec un champ vectoriel. L'intérêt de cette théorie et que l'on peut construire un système physique macroscopique (à priori très simple), étant une analogie de la physique de l'onde pilote: étant donné que la particule est le siège d'une onde stationnaire dans son propre référentiel, on se limitera au cas d'une masse fixe sur la corde.

On dispose une corde vibrante sur un banc d'essai, sur laquelle on place une particule (masselotte) libre de se déplacer sur la corde, qui est reliée à un ressort. Celui-ci simulera la pulsation propre $K = m\omega^2$ de la particule.



1.3 Néel: équipe Nano Optique et Force

M. Cédric Poulain, en compagnie de son équipe NOF, se sont penchés sur le sujet et ont théorisé un certain nombre de choses dans un article¹. A présent, leur objectif est de réaliser la manip sur un banc expérimental, et d'avoir une simulation numérique de l'expérience, et comparer avec les mesures.

1.4 Les objectifs

Etant en binôme avec Alexandre Delattre sur ce sujet, celui-ci s'est consacré à la partie expérimentale du sujet. M. Poulain m'a confié

la tâche de créer une simulation en Python, compte-tenu de mon expérience en informatique.

Les objectifs de mon stage sont les suivants:

- Poser les bonnes équations du système et les numériser
- Permettre la simulation du système avec masselottes **fixées** sur la corde, avec un nombre quelconque de celles-ci sur la corde
- Possibilité de générer une vidéo de la simulation, et surtout la sauvegarde de la simulation sous forme de fichier de données
- Théoriser les transmissions/réflexion du champ sur la particule et proposer des outils d'analyse spectrale pour les mesurer

2 Mise en équations du problème

2.1 Du Lagrangien aux équations du mouvement

2.1.1 Distribution des masselottes

On peut modéliser notre corde de longueur L , densité ρ_0 , sous tension T comme un ensemble de points espacés de dx , où en chaque point x peut se situer une masse et/ou un ressort. On dispose n masselottes *ponctuelles* m_i , de position x_i attachées à un ressort de raideur K_i sur la corde. Ainsi, on va définir la densité de masse $\rho(x)$ et de raideur $\kappa(x)$ **localement (linéique)** en tout point x .

$$\rho(x) = \rho_0 + \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - x_i) \Rightarrow \int_0^L \rho(x) dx = \rho_0 L + \sum_i m_i$$

$$\kappa(x) = \sum_{i=0}^n K_i \delta(x - x_i)$$

On rappelle aussi que la célérité de la corde est donnée par $c^2 = \frac{T}{\rho}$

2.1.2 Le Lagrangien linéique

On va donc considérer un point x de notre corde et construire son Lagrangien *linéique*. On a l'énergie cinétique de la corde, les forces de tension et de rappel des ressorts. On tombe sur:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} \kappa(x) (u(x, t))^2 \quad (1)$$

On dérive ce Lagrangien pour arriver à l'équation de propagation:

$$\square u(x, t) = \sum_i \frac{-1}{T} \delta(x - x_i) (m_i \partial_t^2 u(x, t) + K_i u(x, t)) \quad (2)$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de particule sur la corde, on retombe bien sur un d'Alembertien nul.

3 Numérisation

3.1 Contraintes numériques

On discrétise la corde en n_x cellules, chacune espacée de Δx . On a naturellement la condition: $L = (n_x - 1)\Delta x$

Notre pas de temps de la simulation est contraint par la relation $c\Delta t = \Delta x$

3.2 Discrétisation

3.2.1 Différences finies

Pour de discrétiser le problème, afin de pouvoir numériser, on va utiliser la méthode des différences finies. On va donc approximer les dérivées première et seconde avec un schéma centré:

$$f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} + \mathcal{O}(h) \quad (3)$$

$$f''(z) = \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

3.3 Equations à numériser

En faisant le calcul avec les approximations dues à la numérisation, on trouve:

$$\frac{1}{1+\beta} (u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t) + (2\beta - \gamma)u(x, t)) - u(x, t - \Delta t) = u(x, t + \Delta t) \quad (5)$$

Deux cas possibles:

- si on ne se situe pas à la particule $x \neq x_i \Rightarrow F(\beta = 0, \gamma = 0) \Rightarrow u(x, t + \Delta t) = u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - u(x, t - \Delta t)$
- si on se situe à l'endroit de la particule $x = x_i \Rightarrow F(\beta = \frac{m_i}{\rho_0 \Delta x}, \gamma = \frac{K_i \Delta x}{T})$

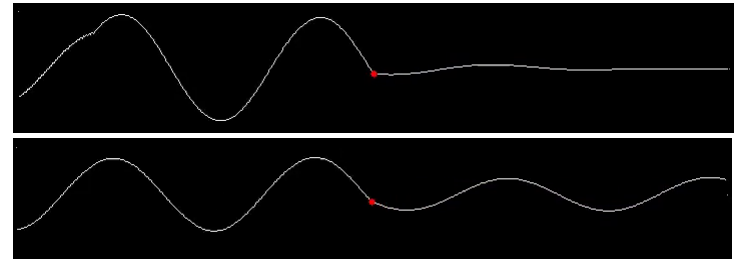
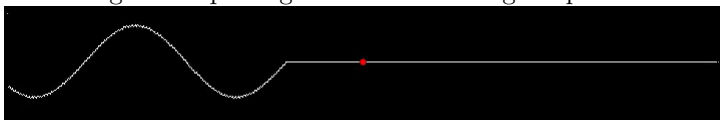
3.4 Conditions aux bords

La seconde partie importante du travail a été de numériser les effets des bords. J'ai dû coder les conditions pour les bords à réflexion parfaite, absorbeur, corde bouclée, et le cas d'un excitateur.

4 Résultats

4.1 Images

Un exemple de simulation. Une image d'une onde incidente provenant d'un excitateur (+ absorbeur) de la gauche. Une seconde image de l'onde pendant l'interaction avec la masse, on voit l'onde réfléchiée et transmise: on est dans le régime transitoire. Une dernière image à temps long: on est dans le régime permanent



4.2 Coefficient de réflexion/transmission

Ma dernière tâche a été de vérifier si les coefficients de transmission/réflexion calculés analytiquement au début de mon stage sont cohérents avec ceux mesurés avec ma simulation.

$$r = \frac{-1}{1 + i\alpha} \quad t = \frac{1}{1 - i\alpha^{-1}} \quad \alpha = \frac{2\omega\rho_0 c}{K - m\omega^2} \quad (6)$$

On procède donc à une multitude de simulations avec certains paramètres fixes et d'autres variables. Graphes disponibles en annexes.

4.3 Caractérisation du régime transitoire

Un point très important qui n'est que très peu abordé dans ce type de problèmes est le régime **transitoire**. En effet, dans la majorité des calculs théoriques faisant intervenir des champs, on prend des sinusoïdes émis depuis l'infini des temps. Faire les calculs avec ces considérations donnent des résultats théoriques qui définissent un régime **permanent**. Cependant, lors de l'expérience, nous partons d'un champ constant et on commence à l'exciter à un instant $t = 0$. Lors de cette transition, jusqu'à exciter totalement le champ, on a alors un comportement **transitoire** qui mettra un certain temps avant de converger vers le permanent.

Durant le temps qu'il me restait, j'ai donc tenté d'observer ce régime transitoire, pour une masselotte m, k au centre d'une corde infinie, et l'idée est d'essayer d'en dégager un temps caractéristique $\tau(m, k, \omega)$ qui donne une estimation du temps de convergence jusqu'au régime permanent. Cependant l'extraction d'un temps caractéristique a été très compliquée, notamment à cause du grand nombre de graphes à traiter.

5 Conclusion

Devant repartir de zéro, la tâche n'a pas été facile. Malgré tout, surtout en tenant compte de la durée courte de mon stage (2 mois), nous avons enfin un programme permettant des simulations satisfaisantes, càd qui a passé un certain nombre de tests. De plus, notre compréhension physique du problème a bien avancé, notamment grâce à l'expression des coefficients ainsi que du lagrangien.

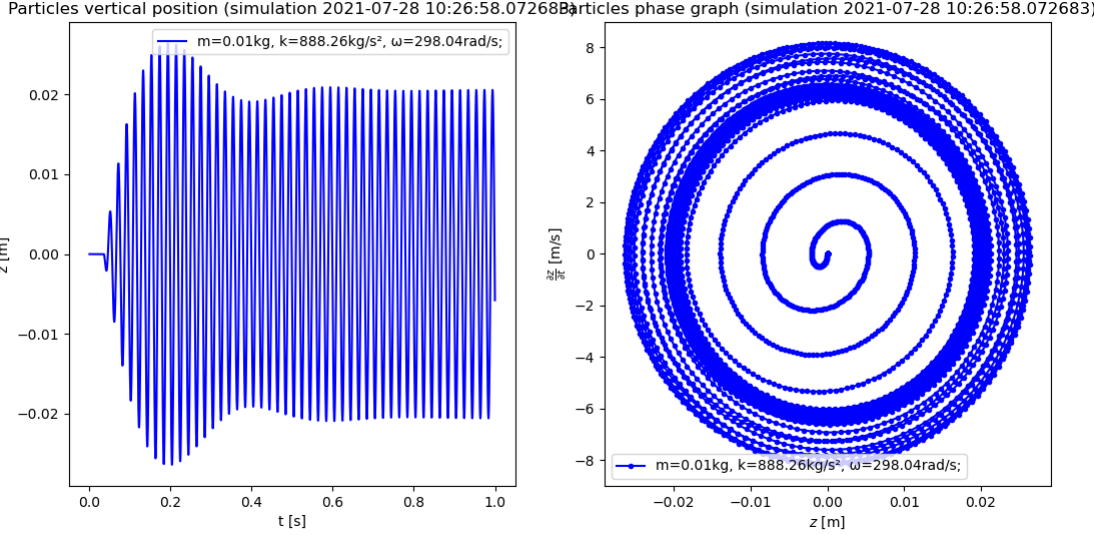
La prochaine étape est de coder et d'étudier le cas de la masselote mobile. J'ai préparé avec soin mon code pour que l'implémentation des masses mobiles puisse se faire très rapidement par un futur stagiaire.

6 Annexes

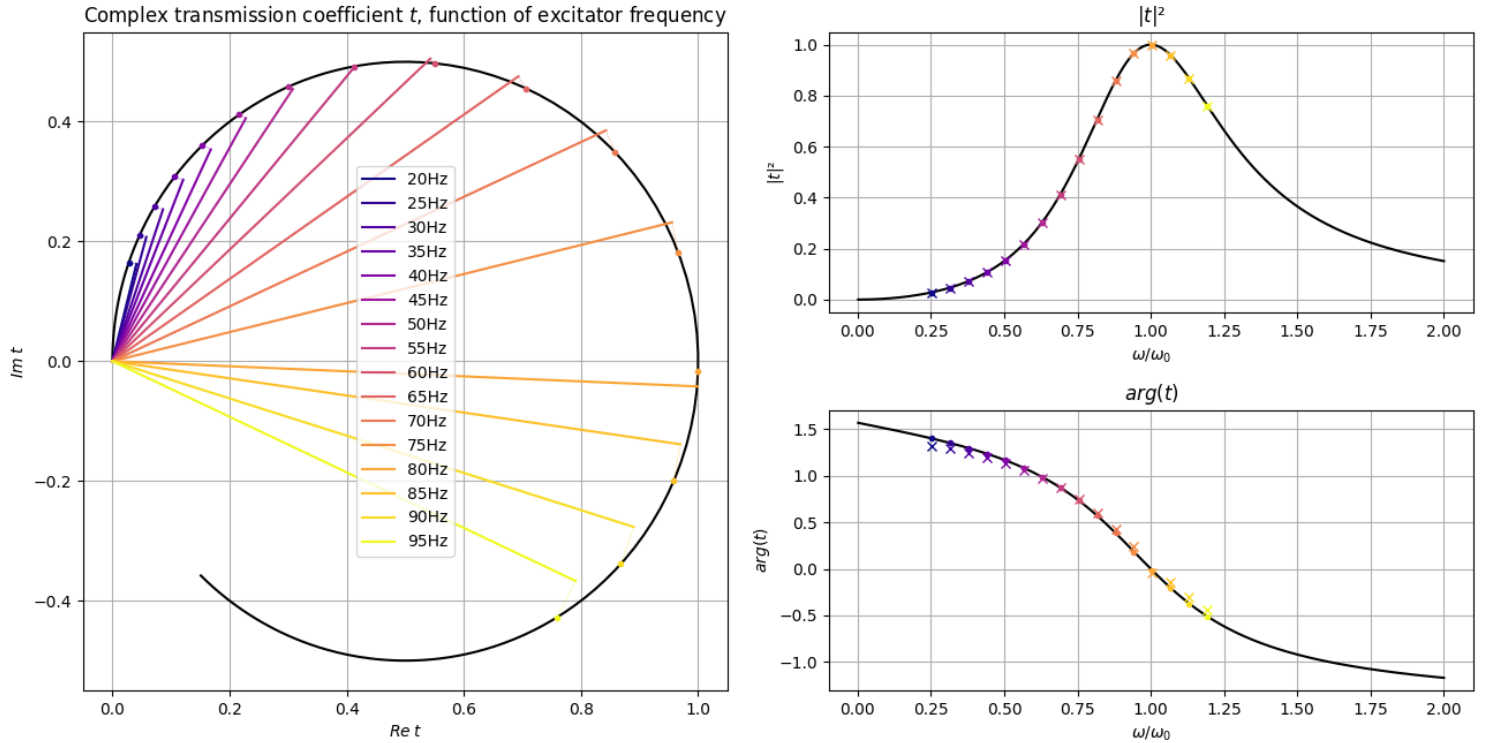
6.1 Programme en libre accès

Mon programme est en libre accès sur Github, à cette adresse: <https://github.com/leogarithm/quantum-string>

6.2 Graphes



Graphes $z(t)$ et $\dot{z}(z)$ de la particule pour une simulation de paramètres $T = 1.0\text{s}$, $n_x = 1023$, $T = 10.0\text{N}$, $\rho = 5.0\text{g/m}$



Graphes du coefficient de transmission pour une simulation d'une masselotte au milieu d'une corde $L = 6.0\text{m}$, $n_x = 2047$, $m = 1\text{g}$, $k = 250.0\text{N/m}$ pour une multitude de fréquences d'excitations ω . Les points théoriques sont situés sur les courbes noires