ACCQ202 - cours n°3

adele.mortier

October 2015

1 Rappels

Définition 1.1. *On pose*

$$p(x, y, z) \triangleq \mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z)$$

Alors

$$(X, Y, Z) \sim p(x, y, z)$$

Et on a:

$$I(X, Y|Z) = \mathbb{E}_{p(x,y,z)} \left[log(\frac{\mathbb{P}(X, Y|Z)}{\mathbb{P}(X|Z)\mathbb{P}(Y|Z)}) \right]$$

Propriété 1.1. (chain rule)

$$I(X_1 ... X_n, Y) = \sum\nolimits_{i\in[1,n]} I(X_i, Y|X^{i-1})$$

Preuve:

$$\begin{aligned} I(X^n, Y) &= H(X^n) - H(X^n|Y) \\ &= \sum\nolimits_{i\in[1,n]} H(X_i|X^{i-1}) - H(X_i|X^{i-1}, Y) \\ &= I(X_i, Y|X^{i-1}) \end{aligned}$$

Rappel: lois des grands nombres Soit $(Z_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de variables aléatoires i.i.d, telle que $\mathbb{E}(Z_1) = n$. Alors:

$$\frac{1}{n} \sum\nolimits_{i\in[1,n]} Z_i \overset{\text{en probabilité}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(Z_1)$$

i.e. $\forall$ $\epsilon > 0$, $\forall$ $\delta > 0$, $\exists$ N $\in \mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq$ N,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i\in[1,n]} Z_i - \mathbb{E}(Z_1) \right| \geq \epsilon \right) \leq \delta$$

De plus, on a également convergence presque-sûre: soit $\mathbb{Z}^\infty$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{Z}$. Alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{Z}^\infty$ tel que

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^\infty = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c \\ \forall (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\infty f_n = \frac{1}{n}\sum_{i\in[1,n]} Z_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z_1) \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1 \end{cases}$$

2 Probabilité asymptotique d'équirépartition

Définition 2.1. (probabilité asymptotique d'équirépartition - A.E.P)
Soit $(X_i)_{i\in[1,n]}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Alors:

$$-\frac{1}{n} log\left[p(X_1, ..., X_n)\right] \underset{n\to+\infty}{\overset{en\ probabilit\acute{e}}{\longrightarrow}} H(X)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} log\left[p(X_1, ..., X_n)\right] &= -\frac{1}{n} log\left[\prod_{i\in[1,n]} p(x_i)\right] \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i\in[1,n]} log\left[p(x_i)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[log\left(\frac{1}{X}\right)\right] = H(X) \end{aligned}$$

Définition 2.2. (ensemble typique)
L'ensemble typique par rapport à une distribution $p(x)$ est défini par:

$$\mathcal{A}_\epsilon^n = \left\{x^n, 2^{-n(H(X)+\epsilon)} \le p(x^n) \le 2^{-n(H(X)-\epsilon)}\right\}$$

Propriété 2.1.
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N,$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}_\epsilon^n) &\ge 1-\epsilon \\ |\mathcal{A}_\epsilon^n| &\le 2^{n(H(X)+\epsilon)} \\ |\mathcal{A}_\epsilon^n| &\ge (1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)} \end{aligned}$$

Preuve:
$\forall \epsilon > 0$, *et pour n suffisamment grand, l'A.E.P donne:*
$\mathbb{P}(\mathcal{A}_\epsilon^n) = \mathbb{P}\left(X^n, \left|\frac{1}{n} log\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) - H(X)\right| \le \epsilon\right) \ge 1-\epsilon$

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{x^n\in[1,n]} p(x^n) &\ge \sum_{x^n\in\mathcal{A}_\epsilon^n} p(x^n) \\ &\ge \sum_{x^n\in\mathcal{A}_\epsilon^n} 2^{-n(H(X)+\epsilon)} \\ D'o\grave{u}\, |\mathcal{A}_\epsilon^n| &\le 2^{n(H(X)+\epsilon)} \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}1-\epsilon &\leq \mathbb{P}(\mathcal{A}_\epsilon^n)\\ &= \sum\nolimits_{x^n\in\mathcal{A}_\epsilon^n} p(x^n)\\ &\leq |\mathcal{A}_\epsilon^n|\, 2^{-n(H(X)-\epsilon)}\end{aligned}$$

D'où $(1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)}$
Remarque: *on notera dès lors "*$a_n = b_n$*" lorsque* $\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N$,

$$\left|\frac{1}{n}log\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right| \leq \epsilon$$

3 Codage de source revisité

Un code $\mathcal{C}$ est tel que:

$$\mathcal{C} : x^n = (x_1, ..., x_n) \mapsto \mathcal{C}(x_1, ..., x_n)$$

$$\begin{cases}\text{Si } x^n\in\mathcal{A}_\epsilon^n \text{ alors: } \mathcal{C}(x^n) \triangleq c_1...c_k\\ \text{Si } x^n\notin\mathcal{A}_\epsilon^n \text{ alors: } \mathcal{C}(x^n) \triangleq c_1...c_l\end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases}k\leq n(H(X)+\epsilon)+1\\ l\leq nlog|\chi|\end{cases}$$

Et alors:

$$\begin{aligned}L(\mathcal{C}) &= \sum\nolimits_{x\in\chi} l(x^n)p(x^n)\\ &= \sum\nolimits_{x^n\in\mathcal{A}_\epsilon^n} l(x^n)p(x^n) + \sum\nolimits_{x^n\notin\mathcal{A}_\epsilon^n} l(x^n)p(x^n)\\ &\leq n(H(X)+\epsilon)+1+\epsilon nlog|\chi| \triangleq n(H(X)+\epsilon'(n))\end{aligned}$$

En posant $\epsilon' : n\mapsto \epsilon(1+log|\chi|)+{}^1/_n$

Définition 3.1.

$$\mathcal{A}_\epsilon^n = \left\{(x^n,y^n), \begin{cases}\left|-\frac{1}{n}log\left(p(x^n)\right)-H(X)\right|\leq\epsilon\\ \left|-\frac{1}{n}log\left(p(y^n)\right)-H(Y)\right|\leq\epsilon\\ \left|-\frac{1}{n}log\left(p(x^n,y^n)\right)-H(X,Y)\right|\leq\epsilon\end{cases}\right\}$$

Théorème 3.1.
Si $(X^n,Y^n)\sim\prod_{i\in[1,n]}p(x_i,y_i)$*, alors* $\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((X^n,Y^n)\in\mathcal{A}_\epsilon^n\right) &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\\ |\mathcal{A}_\epsilon^n| &\leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}\end{aligned}$$

Si $\left(\bar{X}^n, \bar{Y}^n\right) \sim \prod_{i\in[1,n]} p(x_i)p(y_i)$ *alors* $\forall\epsilon{>}0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$*:*

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(\left(\bar{X}^n, \bar{Y}^n\right) \in \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon^n\right) & \leq & 2^{-n(I(X,Y)-3\epsilon)} \\ \mathbb{P}\left(\left(\bar{X}^n, \bar{Y}^n\right) \in \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon^n\right) & \geq & (1-\epsilon)\, 2^{-n(I(X,Y)+3\epsilon)}\end{array}$$

Preuve:

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon^n = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \quad \left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) \geq 1 - \epsilon/3 \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}_2) \geq 1 - \epsilon/3 \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}_3) \geq 1 - \epsilon/3\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon^n\right) & = & \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3\right) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left((\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3)^c\right) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{A}_2^c \cap \mathcal{A}_3^c\right) \\ & \geq & 1 - \epsilon\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}1 & = & \sum_{(x^n,y^n)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} p(x^n, y^n) \\ & \geq & \sum_{(x^n,y^n)\in\mathcal{A}_n^\epsilon} p(x^n, y^n) \\ & \geq & 2^{-n(H(X,Y)+\epsilon}|\tilde{\mathcal{A}}_n^\epsilon|\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(\left(\bar{X}^n, \bar{Y}^n\right) \in \mathcal{A}_\epsilon^n\right) & = & \sum_{(x^n,y^n)\in\mathcal{A}_n^\epsilon} p(x^n)p(y^n) \\ & \leq & \sum 2^{-n(H(X)-\epsilon)} + 2^{-n(H(Y)-\epsilon)} \\ & \leq & 2^{n(H(X,Y)-H(X)-H(Y)+3\epsilon)} \\ & \leq & 2^{n(I(X,Y)+3\epsilon)}\end{array}$$