MITRO204 - AUTOMATES ET TRANSDUCTEURS

1. Rationnalité

1.1. Automates sur un monoïde quelconque.

1.1.1. *Monoïdes.*

Définition 1.1. (Monoïde) Un monoïde, c'est un ensemble M muni d'une loi de composition interne (l.c.i) associative, d'un élément neutre (noté 1_M). Si de plus cette loi est commutative, elle est notée + (et son neutre est alors noté 0_M).

Exemple 1.2.

$$\begin{array}{rl} (\mathbb{N},+,0) & \\ (A^*,.,\epsilon) & \text{où . désigne l'opération de concaténation} \\ (\mathbb{Z},+,0) & \text{est un monoïde commutatif} \\ (\mathcal{F}(A,B),0,id_{A\to B}) & \begin{array}{l}\text{où } \mathcal{F}(A,B) \text{ désigne l'ensemble} \\ \text{des applications de A dans B.}\end{array} \end{array}$$

Remarque 1.3. a^* est équivalent à (N), car $a^n.a^m = a^{(n+m)}$

Définition 1.4. (Monoïde produit)

$$A^* \times B^* = (u,v) \text{ t.q } \begin{cases} (u,v).(u',v') = (u.u',v.v') \\ 1_{A^*\times B^*} = (1_{A^*},1_{B^*}). \end{cases}$$

Remarque 1.5. Ce langage est libre car $\forall (u,v) \in (A^*,B^*)$ on a la double décomposition : $(u,v) = (1,v).(u,1)$.

Définition 1.6. (Morphisme de monoïde) Un morphisme d'un monoïde M vers un monoïde N, c'est une application $\alpha : M \to N$ tq :

$$\begin{cases} \alpha(1_M) = 1_N \\ \alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n) \end{cases}$$

Exemple 1.7. Première projection $\pi_1 : A^* \times A^* \to A^*$ tq $\pi_1(u,v) = u$

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(1_{A^*},1_{A^*}) & = & 1_{A^*} \\ \pi_1(uu',vv') & = & uu' = \pi_1(u,v)\pi_1(u',v'). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha : A^* & \to & A^* \times A^* \\ a & \mapsto & (a,1) \\ b & \mapsto & (1,b) \\ u & \mapsto & (a^{|u|_a}, b^{|u|_b}) \text{ où } |u|_a \text{ désigne le nombre de "a" dans u.} \end{array}$$

1.1.2. *Automates sur* $\mathbb{N}$.

Définition 1.8. (Automate) Un automate $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{N}$, c'est une graphe défini par un quintuplet : $\mathcal{A} =< Q, M, E, I, T >$, avec :

Q	l'ensemble des états ;
M	un monoïde ;
E	une partie de $Q \times M \times Q$;
I	l'ensemble des états initiaux ;
T	l'ensemble des états finals.

Définition 1.9. (Partie acceptée par un langage) C'est l'ensemble des étiquettes pour lesquelles il existe un état final t de T et un état initial i de I, tels que l'automate $\mathcal{A}$ permette un calcul de i vers t. C'est-à-dire :

$$|\mathcal{A}| = \left\{ m \in M, \exists t \in T \exists i \in I, \exists i \xrightarrow{m} t \in \mathcal{A} \right\}.$$

Exemple 1.10.

$$|V_1| = \{(a^n b^m, c^n), m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque 1.11.
On parle d'automate fini si E est fini.
Deux automates sont dits équivalents s'ils admettent les mêmes parties acceptées.
Un automate est dit propre si aucune des ses transitions n'est étiquetée par 1_M.
Si l'automate $\mathcal{A}$ est fini, il existe un automate $\mathcal{A}'$, propre et effectivement calculable, équivalent à $\mathcal{A}$.

1.2. **Parties rationnelles d'un monoïde.**

1.2.1. *Semi-anneau* $\mathcal{P}(M)$.

Définition 1.12. (Ensemble des parties) $\mathcal{P}(M)$ désigne l'ensemble des parties de M, i.e :

$$P, Q \subseteq M \Longleftrightarrow P, Q \in \mathcal{P}(M)$$

Propriété 1.13. $\mathcal{P}(M)$ est un semi-anneau ($s.a$) complet (autrement dit, c'est un monoïde commutatif muni de deux l.c.i liées par la distributivité).

Remarque 1.14. Notation :

$$\begin{aligned} P.Q &= \{pq, p \in P, q \in Q\} \\ \bigcup_{i \in I} P_i &= \{p, \exists i \in I, p \in P_i\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.15.

$$\alpha : M \to N \textit{ morphisme de monoïde } \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N) \textit{ morphisme de s.a} \\ \forall P, Q \subseteq M, \tilde{\alpha}(P.Q) = \tilde{\alpha}(P).\tilde{\alpha}(Q) \end{cases}$$

1.2.2. *L'opérateur * (étoile).*

Définition 1.16. (Etoile de Kleene) Soit $P \subseteq M$, alors l'étoile de P, c'est :

$$P^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n \quad \text{où} \quad \begin{cases} P^0 = 1_M \\ \forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P^n P = P P^n \end{cases}$$

Exemple 1.17.

$$\varnothing^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varnothing^n = 1_M \cup \varnothing = 1_M.$$

Lemme 1.18.
$P^* =< P >$, où $< P >$ désigne le sous-monoïde engendré par P.
Si $\alpha : M \to N$ désigne un morphisme de monoïde

$$\alpha(P^*) = [\alpha(P)]^*.$$

1.2.3. *Opérations, expressions et parties rationnelles.*

Définition 1.19. (Expression rationnelle) On définit tout d'abord les opérations rationnelles :

$$\begin{array}{cc} + & \text{(union)} \\ . & \text{(concaténation)} \\ * & \text{(étoile)} \end{array}$$

Une expression rationnelle (abrégé *regexp*), c'est une formule bien formée définie inductivement sur M et sur les opérateurs $(0, 1, +, ., *)$ et t.q :

(i) tout élément de M est une expression rationnelle.

(ii) si E et F sont deux expressions rationnelles,
$(E + F)$, $(E.F)$, (E^*) sont aussi des expressions rationnelles.

Définition 1.20. (Parties dénotées par une *regexp*) Les parties dénotées par une expression rationnelle E, notées $|E|$, sont t.q :

(i) $|0| = \varnothing$, $|1| = 1_M$, $|m| = m$ avec $m \in M$.

(ii) Si E et F sont deux expressions rationnelles,
$|E + F| = |E| \cup |F|$, $|E + F| = |E|.|F|$, $|E^*| = |E|^*$.

Définition 1.21. (Partie rationnelle) Une partie de M est dite rationnelle si et seulement si elle est dénotée par une expression rationnelle.
L'ensemble des expressions rationnelles sur M est noté $\mathcal{R}atEM$.

Exemple 1.22.

$$|\mathcal{V}| = |(a, c)^*(b, 1)^*|$$

Définition 1.23. (Famille rationnellement fermée) Une famille de parties $\mathcal{F}$ est dite rationnellement fermée si pour $X, Y \in \mathcal{F}$, on a $X \cup Y$, XY, $X^* \in \mathcal{F}$.
L'intersection d'un ensemble de familles rationnellement fermées est rationnellement fermée.

Propriété 1.24. $\mathcal{R}atEM$ est la plus petite famille (de parties de M) qui est rationnellement fermée, et qui contient les parties finies (c'est-à-dire, qui contient un ensemble générateur de M et de $\varnothing$).

Remarque 1.25.

(i) $\mathcal{R}atEM$ n'est pas forcément fermée par intersection.
(i) $\mathcal{R}atEM$ n'est pas forcément fermée par morphisme inverse.

Exemple 1.26. (Non fermeture par morphisme inverse)

$$\begin{aligned} \alpha : A^* &\rightarrow A^* \times A^* \\ a &\mapsto (a, 1) \\ b &\mapsto (1, b). \end{aligned}$$

$$(a, b)^* = \{(a^n, b^n), n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{R}at(A^* \times A^*).$$

$$\text{Mais : } \alpha^{-1}((a, b)^*) = \{w \in A^*, |w|_a = |w|_b\} \notin \mathcal{R}atA^*.$$

Exemple 1.27. (Non fermeture par intersection)

$$\begin{cases} V_1 = |\mathcal{V}_1| = (a, c)^*(b, 1)^* = \{(a^n, b^m, c^n), (n, m) \in \mathbb{N}^2\} \in \mathcal{R}atM \\ W_1 = |\mathcal{W}_1| = (a, 1)^*(b, c)^* = \{(a^n, b^m, c^m), (n, m) \in \mathbb{N}^2\} \in \mathcal{R}atM \end{cases}$$

$$\text{Mais : } V_1 \cap W_1 = \{(a^n, b^n, c^n), n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{R}atM$$

1.2.4. *Fermeture par morphisme.*

Théorème 1.28. *Soit $\alpha : M \longrightarrow N$ un morphisme de monoïde. Alors :*

(i) $R \in \mathcal{R}atM \Longrightarrow \alpha(R) \in \mathcal{R}atN$
(ii) $S \in \mathcal{R}atN \Longrightarrow \exists R \in \mathcal{R}atM, \exists \alpha$ *surjectif,* $\alpha(R) = S$

Théorème 1.29. *(Fondamental des automates finis) Une partie de M est rationnelle si et seulement si elle est acceptée par un automate fini sur M. Autrement dit, une partie de M est dénotée par une expression rationnelle si et seulement si elle est acceptée par un automate fini.*

Définition 1.30. (Ambiguïté) Un automate est dit ambigu s'il existe pour un calcul deux étiquetages possibles. Les parties rationnelles non-ambigües résultent des opérations non-ambigües :

(i) union disjointe non-ambigüe : $X \cup Y$;
(ii) produit non-ambigu : $X.Y \in M$ t.q $xy = x'y' \Longrightarrow x = x'$ et $y = y'$;
(iii) étoile non-ambigüe.

2. Reconnaissabilité

2.1. Représentation matricielle des automates sur $\mathcal{A}^*$.

2.1.1. *Représentation matricielle.*

Définition 2.1. (Représentation matricielle) Soit $\mathcal{A} =< Q, A, E, I, , T >$. La représentation matricielle associée à $\mathcal{A}$, c'est un triplet (λ, μ, ν) t.q :

(1) μ est un morphisme t.q :

$$\begin{array}{rcl} \mu : A & \longrightarrow & \mathbb{B}^{Q\times Q} \text{ (matrices booléennes de taille } |Q|) \\ a \in A & \longmapsto & ((a_{i,j})) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ dans } a_{p,q} \text{ si } \exists p \xrightarrow{a} q \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

(2) $\lambda \in \mathbb{B}^{1\times Q}$ t.q :

$$\lambda p = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } p \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \qquad \text{Exemple de codage : } \left\{ \begin{array}{l} e_i \in Q \Longrightarrow e_i \text{ i-ième vecteur canonique} \\ \forall e_i \in Q, \lambda_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } e_i \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(3) $\nu \in \mathbb{B}^{Q\times 1}$ t.q :

$$\nu q = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } q \in T \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \qquad \text{Exemple de codage : } \quad \forall e_i \in Q, \nu_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } e_i \in T \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Remarque 2.2. On identifie usuellement λ à I et ν à T.

Remarque 2.3. On peut en fait définir μ sur les mots de A^* :

$$\forall w \in A^*, \forall (p,q) \in Q, \mu_{p,q}(w) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ s'il existe dans } \mathcal{A} \text{ un calcul : } p \xrightarrow{w} q \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Preuve 2.4. *On procède par induction sur la longueur du mot $w_n = a_1 a_2 ... a_n$:*

$$\mu_{p,q}(w_{n+1}) = \mu_{p,q}(w_n a_{n+1}) = \sum_{r \in Q} \mu_{p,r}(w) \mu_{r,q}(a)$$

Exemple 2.5.

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.6. *Le langage accepté par $\mathcal{A}$, c'est donc :*

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \mathcal{A}^*, \lambda\mu(w)\nu = 1\}.$$

Définition 2.7. (Monoïde de transition) Le monoïde de transition de $\mathcal{A}$, c'est l'image par μ de A^* : $\mu(A^*) \subseteq \mathbb{B}^{Q\times Q}$.

Propriété 2.8.

$$\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle \iff \mathcal{A} = \langle \lambda, \mu, \nu\rangle \text{ et } E = \bigoplus_{a\in A} \mu(a)$$

Définition 2.9. (Ensemble d'accessibilité) L'ensemble d'accessibilité d'un automate $\mathcal{A}$, c'est :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{\lambda\mu(w), w \in A^*\} \subset \mathbb{B}^{1\times Q}.$$

Propriété 2.10.

$$w \in L(\mathcal{A}) \iff \lambda\mu(W)\nu = 1$$

$$\hat{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, A, F, I, S\rangle \text{ avec } \begin{cases} S = \{I\mu(w) \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, I\mu(w)T = 1, w \in A^*\} \\ F = \{(I\mu(w), a, I\mu(wa)), a \in A, w \in A^*\} \\ P = \{m \in A^*, ImT = 1\} \subseteq \mathbb{B}^{Q\times Q} \end{cases}$$

$$L(\mathcal{A}) = \mu^{-1}(P)$$

2.1.2. *Parties reconnaissables.*

Définition 2.11. (Partie reconnue par un morphisme) Soit M et N deux monoïdes. Soit $\alpha : M \to N$ un morphisme. La partie $P \subseteq M$ est reconnue par α si :

$$P = \alpha^{-1}(\alpha(P)) \iff \exists Q \subseteq N, P = \alpha^{-1}(Q)$$

On dit alors que P est saturée par l'équivalence d'application de α, c'est-à-dire que P contient toutes "ses" classes d'équivalence modulo α "en entier" (on rappelle que m et m' sont dans la même classe d'équivalence modulo α si $\alpha(m) = \alpha(m')$).

Définition 2.12. (Partie reconnue par un ensemble) La partie P est reconnue par l'ensemble N s'il existe un morphisme $\alpha : M \to N$ t.q P soit reconnu par α.

Définition 2.13. (Partie reconnaissable) La partie P est dite reconnaissable si elle est reconnue par un monoïde fini. On note $\mathcal{R}ecM$ l'ensemble des parties reconnaissables de M.

Théorème 2.14. *(Kleene) Si A est fini, alors $\mathcal{R}ecA^* = \mathcal{R}atA^*$*

Propriété 2.15. Soit $M' \subseteq M$ un sous-monoïde. Alors :

$$P \in \mathcal{R}ecM \implies P \cap M' \in \mathcal{R}ecM'$$

Soit $\alpha : M \to F$ et $\alpha_{M'} : M' \to F$ la trace du morphisme α de M dans M'. Alors :

$$P \cap M' = \alpha^{-1}(\alpha(P) \cap \alpha(M'))$$

Remarque 2.16.

$$P' \in \mathcal{R}ecM' \not\Rightarrow P' \in \mathcal{R}ecM$$

Exemple 2.17. On a : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $0 \in \mathcal{R}ec\mathbb{N}$, mais $0 \notin \mathcal{R}ec\mathbb{Z}$. En effet, en notant $\mathbb{N} = \{a^*\}$, et en prenant le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mu : \{a^*\} & \longrightarrow & (1, z), z \in \{a^*\} \\ 1_{\{a^*\}} & \mapsto & 1 \\ u \neq 1_{\{a^*\}} & \mapsto & z \end{array}$$

On a $0 \in \mathcal{R}ec\mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathcal{R}ec\mathbb{Z}$

Propriété 2.18. Soit $\alpha : M \longrightarrow N$ un morphisme. Alors :

$$R \in \mathcal{R}ecN \Longrightarrow \alpha^{-1}(M) \in \mathcal{R}ecM$$

Mais pourtant :

$$P \in \mathcal{R}ecM \not\Longrightarrow \alpha(P) \in \mathcal{R}ecN$$

Remarque 2.19. $\mathcal{R}ecM$ est une algèbre de Boole (classe de parties d'un ensemble contenant l'ensemble vide, l'ensemble entier, et qui de plus est fermée par union et complémentation). Toutefois, $\mathcal{R}ecM$ n'est fermé ni par produit, ni par étoile.

Théorème 2.20. *(Mc Knight) Soit M finiment engendré (autrement dit, il existe G fini, $G \subseteq M$ t.q $\langle G \rangle = G^* = M$). Dans ce cas :*

$$\mathcal{R}ecM \subseteq \mathcal{R}atM$$

Propriété 2.21.

$$\begin{array}{ccc} P \text{ reconnaissable} & \Longrightarrow & \alpha^{-1}(P) \text{ partie reconnaissable de } A^* \\ \text{par un monoïde} & \Longrightarrow & \alpha^{-1}(P) \text{ partie rationnelle de } A^* \\ \text{fini } M & \Longrightarrow & \alpha(\alpha^{-1}(P)) \text{ partie rationnelle de } M \end{array}$$

Théorème 2.22. *Soit $P \subseteq A^* \times B^*$. Alors :*

$$P \in \mathcal{R}ecA * \times B^* \Longleftrightarrow \exists I \text{ fini }, \forall i \in I, \exists T_i \in \mathcal{R}ecA^*, \exists U_i \in \mathcal{R}ecB^*, P = \bigcup_{i \in I} T_i \times U_i$$

3. Morphismes et revêtements

3.1. **Automate minimal d'un langage.** On s'intéresse ici au cas des automates déterministes complets.

3.1.1. *Automate des quotients.*

Définition 3.1. (Quotient d'un mot) Soit $L \subset A^*$ et $u \in A^*$. On note $u^{-1}L$ l'ensemble des mots de L commençant par u, et auxquel on a ôté u :

$$u^{-1}L = \{v \in A^*, uv \in L\}$$

Propriété 3.2.

$$u \in L \Longleftrightarrow 1_{A^*} \in u^{-1}L$$

$$v^{-1}(u^{-1}(L)) = (uv)^{-1}L$$

Remarque 3.3. Cette dernière propriété implique que u^{-1} est une action de A^* sur $\mathcal{P}(A^*)$.

Définition 3.4. (Automate des quotients) En notant Q_L l'ensemble des quotients :

$$Q_L = \{u^{-1}L, u \in A^*\}$$

$\mathcal{A}_L$ désigne l'automate des quotients, défini comme :

$$\mathcal{A}_L = \langle Q_L, A, X, \{L\}, T\rangle \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} T = \{S \in Q_L, 1 \in S\} \\ X(K,a) = a^{-1}K \end{array} \right.$$

Propriété 3.5.

$$Q_L \text{ fini} \implies \text{L rationnel}$$

3.1.2. *Equivalence de Nérode.*

Définition 3.6. (Futur d'un élément) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, \delta, I, T\rangle$ un automate déterministe. On pose :

$$\delta(p,w) \triangleq p.w \text{ avec } p \in Q \text{ et } w \in A^*.$$

Alors le futur de p dans $\mathcal{A}$, c'est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ dans lequel on a remplacé I par p :

$$L_p = \{w \in A, p.w \in T\} = L\left(\langle Q, A, \delta, \{p\}, T\rangle\right)$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des mots de A^* qui, partant de l'état p, permettent d'aboutir à un état final.

Remarque 3.7. On peut alors dire que $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} L_i$: le langage reconnu par $\mathcal{A}$, c'est l'avenir de son état initial.

Propriété 3.8.

$$\forall p \in Q, \forall q \in Q, p.u = q \Longrightarrow L_q = u^{-1}L_p.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Tous les états de A} \\ \text{sont accessibles} \end{pmatrix} &\implies \forall p \in Q, \exists u \in A^*, i.u = p \\ &\implies \forall p \in Q, \exists u \in A^*, L_p = u^{-1}L_i. \end{aligned}$$

Propriété 3.9.

$$\begin{array}{rcl} \nu : Q & \implies & Q_L \\ p & \mapsto & L_p \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} L \text{ rationnel} & \implies & Q_L \text{ fini} \\ p \equiv q[\nu] & \implies & L_p = L_q. \end{array}$$

Remarque 3.10. On peut définir $\mathcal{A}_{/[\nu]} = \langle Q_{/[\nu]}, \mathcal{A}, \delta_\nu, [i]_\nu, T_{/\nu}\rangle$ avec $Q_{/\nu} \triangleq Q_L$ et $\delta_\nu : [p].a \Longrightarrow [p.a]$. Alors $T_{/\nu}$ définit bien une classe d'états finals car si $p \in T_{/\nu}$ est final, alors L_p contient le mot vide, et comme n'importe quel autre $q \in T_{/\nu}$ a le même avenir, n'importe quel autre q est aussi final.

3.1.3. *Algorithme de Moore.*

On calcule une suite $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$... de partitions de Q. Pour ce faire, on part de $\mathcal{P}_0 = \{Q \setminus T, T\}$. On est sûr qu'il s'agit bien d'une partition de Q, car les états finals ont pour futur le mot vide, et les états non-finals ont, par définition, un avenir différent du mot vide. A l'étape k ($k \geq 0$) de l'algorithme, ont considère le $k+1$-ième raffinement de $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{k+1}$, supposant $\mathcal{P}_k$ construit. Alors $\mathcal{P}_{k+1}$ doit vérifier :

$$\forall p, q \text{ t.q } p \equiv q[\mathcal{P}_k] : p \not\equiv q[\mathcal{P}_{k+1}] \Longleftrightarrow \exists a \in \mathcal{A}, p.a \not\equiv q.a[\mathcal{P}_k]$$

Autrement dit, deux éléments dans la même classe à l'étape k ne le seront plus à l'étape $k+1$ si l'on trouve une étiquette qui à partir de ces deux éléments, conduit dans deux classes différentes (à l'étape k).

Théorème 3.11. *Il existe une étape n de l'algorithme pour laquelle* $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$. *A cette étape (et donc pour toutes les suivantes), la partition* $\mathcal{P}_n$ *coïncide avec la classe d'équivalence de* ν *:* $\mathcal{P}_n = [\nu]$

Preuve 3.12. *Montrons* $p \equiv q[\mathcal{P}_n] \Longrightarrow L_p = L_q$.
Supposons $\exists p, q$ *t.q* $u \in L_p \setminus L_q \cup L_q \setminus L_p \triangleq \Delta_{p,q}$.
Alors u est de longueur minimale dans tous les $\Delta_{r,s}$ *non vides. u peut alors s'écrire* $u = a.u'$ *avec :*

$$p.a = q.a \equiv \begin{cases} r[\mathcal{P}_n] \\ s[\mathcal{P}_n] \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} L_r = a^{-1}L_p \\ L_s = a^{-1}L_q \end{cases}$$

Mézalor, $\Delta_{r,s}$ *contient u', qui s'avère plus court que u : contradiction.*

Exemple 3.13.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}. \\ \mathcal{P}_1 &= \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}. \end{aligned}$$

Car $e_1.b = 1$ mais $e_2.b = 3$, avec $1 \not\equiv 3[\mathcal{P}_0]$.

Automate minimal :

3.2. **Morphismes d'automates (booléens).**

Définition 3.14. (Morphisme d'automates) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle R, A, F, J, U\rangle$. L'application $\Phi : Q \to R$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ (noté $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) si :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(I) & \subseteq & J \\ \Phi(T) & \subseteq & U \\ (p, a, q) \in E & \Longrightarrow & (\Phi(p), a, \Phi(q)) \in F \end{array}$$

Exemple 3.15. L'application "quotient de $\mathcal{A}$ par ν" est un morphisme.
L'application de projection $\Pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est également un morphisme.

Propriété 3.16.

$$L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{B})$$

Exemple 3.17.

Définition 3.18. (Morphisme conforme) On dit que Φ est conforme si tout calcul de $\mathcal{B}$ est l'image d'un calcul de $\mathcal{A}$.

Propriété 3.19.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\Psi\circ\Phi} \mathcal{C}$$

3.3. **Propriétés locales des morphismes.**

3.3.1. *Bouquet entrant et sortant.*

Définition 3.20. (Bouquet entrant, sortant) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle$ un automate et $p \in Q$. Les bouquets entrant et sortant de p dans $\mathcal{A}$ sont respectivement :

$$\begin{array}{rcl} out_{\mathcal{A}}(p) & = & \{q \in Q, \exists e \in E, \exists a \in A, e = (p, a, q)\} \\ in_{\mathcal{A}}(p) & = & \{q \in Q, \exists e \in E, \exists a \in A, e = (q, a, p)\} \end{array}$$

Autrement dit, le bouquet sortant de p, c'est l'ensemble des transitions qui partent de p. Quant au bouquet entrant de p, c'est l'ensemble des transitions qui arrivent en p.

Propriété 3.21. Soit $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme. Alors, pour tout état de $\mathcal{A}$, la restriction de Φ au bouquet sortant (*resp.* entrant) de p dans $\mathcal{A}$ est à valeurs dans le bouquet sortant (*resp.* entrant) de $\Phi(p)$ dans $\mathcal{B}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \forall p \in Q, \Phi\left(out_{\mathcal{A}}(p)\right) & = & out_{\mathcal{B}}(\Phi(p)) \\ \Phi\left(in_{\mathcal{A}}(p)\right) & = & in_{\mathcal{B}}(\Phi(p)) \end{array}$$

3.3.2. *Etats subliminaux.*

Propriété 3.22.

$$\Phi \text{ localement injectif, surjectif, bijectif } \Longrightarrow \forall p \in Q, \tilde{\Phi} : out_{\mathcal{A}}(p) \to out_{\mathcal{B}}(\Phi(p))$$

$$\Phi \text{ localement co-injectif, co-surjectif, co-bijectif } \Longrightarrow \forall p \in Q, \tilde{\Phi} : in_{\mathcal{A}}(p) \to in_{\mathcal{B}}(\Phi(p))$$

$$
\begin{aligned}
\Phi \text{ localement surjectif} &\implies \forall j \in J, \exists i \in I, \Phi(i) = j \\
&\implies \Phi(I) = J \\
&\implies \forall S \subseteq U, \forall t \in \Phi{-}1(S), t \in T \\
&\implies \Phi^{-1}(U) = T
\end{aligned}
$$

Les propriétés précédentes sont stables par composition.

3.4. **Quotients d'automates.**

Propriété 3.23. Soit $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ localement surjectif. Alors, pour tout calcul d de $\mathcal{B}$ d'origine s, pour tout état p, antécédent de s par Φ $\big(p \in \Phi^{-1}(s)\big)$, on peut trouver un calcul c de $\mathcal{A}$, d'origine p, dont l'image par Φ redonne d $(\Phi(c) = d)$.

Preuve 3.24. *On construit pas à pas c en cherchant les antécédents des bouquets sortants du calcul d.*

Corollaire 3.25. Soit $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ localement surjectif. Alors $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ et de plus :

$$
\begin{aligned}
\Phi \text{ est conforme} &\iff \Phi \text{ est globalement surjectif} \\
&\iff \Phi(Q) = R \\
\mathcal{B} \text{ est accessible} &\implies \Phi \text{ est conforme} \\
&\implies \Phi \text{ est globalement surjectif}
\end{aligned}
$$

Propriété 3.26. Soit $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ localement et globalement surjectif ("out-morphisme"). Φ s'appelle le quotient de $\mathcal{A}$. On dit alors que $\mathcal{A}$ est une simulation de $\mathcal{B}$.

Propriété 3.27. Pour tout automate $\mathcal{A}$, il existe un quotient minimal, unique à isomorphisme près et effectivement calculable (par l'algorithme de Moore), qui est quotient de tous les quotients de $\mathcal{A}$.

3.5. **Revêtements.**

Définition 3.28. (Revêtement) $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un revêtement s'il est localement bijectif (et globalement surjectif).

Propriété 3.29. Il existe une bijection entre les calculs réussis de $\mathcal{A}$ et ceux de $\mathcal{B}$.

Corollaire 3.30. Un revêtement d'un automate non-ambigu est non-ambigu. En effet chaque mot accepté par un calcul unique donne par bijectivité un mot accepté par un calcul unique.

Lemme 3.31. *(transitions colorées) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle$. On suppose E "colorié" en deux "couleurs", disons rouge et bleu. Alors, l'ensemble des mots acceptés par des calculs de $\mathcal{A}$ qui contiennent au moins une transition coloriée en rouge est un ensemble rationnel (i.e, accepté par un automate fini).*

3.5.1. *Revêtement de Schützenberger.*

Définition 3.32. (Automate déterminisé par la méthode des sous-ensembles) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle$ un automate. L'automate déterminisé de $\mathcal{A}$ par la méthode des

sous-ensembles, c'est un automate $\hat{\mathcal{A}} = \langle Q', A, E', I', T' \rangle$ t.q :
(3.1)

$$\begin{array}{rl} (i) & Q' = \mathcal{P}(Q) \\ (ii) & E' = \{(p', a, q'), \exists a \in A, \exists p \in p', \exists q \in q', p \xrightarrow{a} q \in \mathcal{A}, (p', q') \in Q'^2\} \\ (iii) & I' = \{p' \in Q', \forall p \in p', p \in I\} \\ (iv) & T' = \{p' \in Q', \exists p \in p', p \in T\} \end{array}$$

Définition 3.33. (Automate produit) Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T \rangle$ et $\mathcal{A}' = \langle Q', A, E', I', T' \rangle$ deux automates. Leur produit $\mathcal{B} = \langle R, A, F, J, U \rangle$ est défini comme suit :

$$\begin{array}{rl} (i) & R = Q \times Q' \text{ privé des états inaccessibles} \\ (ii) & \{(p', a, q'), \exists a \in A, \forall (p, q) \in p' \times q' \cap (E \text{ ou } E'), (p, a, q) \in (E \text{ ou } E')\} \\ (iii) & J = \{p' \in Q', \forall p \in p', p \in I \text{ ou } I'\} \\ (iv) & U = \{p' \in Q', \forall p \in p', p \in T \text{ ou } T'\} \end{array}$$

Théorème 3.34. *Soit $\mathcal{A}$ un automate accessible. Soit $\hat{\mathcal{A}}$ le déterminisé de $\mathcal{A}$ par la méthode des sous-ensembles. Soit $\mathcal{S}$ une partie accessible de $\mathcal{A} \times \hat{\mathcal{A}}$. Alors :*

$$\begin{array}{rl} (i) & \pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A} \textit{ est un revêtement} \\ (ii) & \pi_{\hat{\mathcal{A}}} : \mathcal{S} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}} \textit{ est localement co-surjectif} \end{array}$$

Propriété 3.35. Soit $\mathcal{A}$ un automate et soit $\mathcal{B}$ un autre automate, déterministe, équivalent à $\mathcal{A}$ (par exemple, $\hat{\mathcal{A}}$, obtenu par la méthode des sous-ensembles). Alors l'application $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un revêtement.

Définition 3.36. (Revêtement de Schützenberger) Le revêtement de Schützenberger d'un automate $\mathcal{A}$, c'est la partie accessible et co-accessible de l'automate produit $\mathcal{A} \times \hat{\mathcal{A}}$.

4. Transducteurs

4.1. **Définitions.**

Définition 4.1. (Transducteur) Un transducteur, c'est un automate sur $A^* \times B^*$ ou $A_1^* \times A_2^* \times ... \times A_k^*$. Chaque transition est alors étiquetée par un couple (u, v), noté par commodité $u|v$. On a du reste : $(u, v)(u', v') = (uu', vv')$.

Définition 4.2. (Relation entre mots) On considère une application θ et une relation $\hat{\theta} \subseteq A^* \times B^*$ définissant un graphe, telles que :

$$\begin{array}{rcl} \theta : A^* & \longrightarrow & B^* \\ u & \mapsto & \left\{ v \in B^*, uv \in \hat{\theta} \right\}. \end{array}$$

Soit $L \subseteq A^*$. Alors :

$$\theta(L) = \bigcup_{u \in L} \theta(u).$$

Propriété 4.3. On peut définir l'inverse de θ, $\theta^{-1} : B^* \longrightarrow A^*$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\theta^{-1}} & = & \hat{\theta} \\ \forall v \in B^*, \theta^{-1}(v) & = & \left\{ u \in A^*, (u, v) \in \hat{\theta} \right\}. \end{array}$$

Théorème 4.4.

$$
\begin{array}{lcll}
\theta : A^* \longrightarrow B^* \textit{ rationnelle} & \Longleftrightarrow & \hat{\theta} \triangleq |\mathcal{T}| \textit{ transducteur fini étiqueté dans } A^* \times B^* & \\
 & \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} \hat{\theta} \triangleq |\mathcal{T}| \textit{ transducteur fini} \\ \textit{étiqueté dans } (A \times 1) \cup (1 \times B) \end{array} & \textit{(normalisé)} \\
 & \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} \hat{\theta} \triangleq |\mathcal{T}| \textit{ transducteur fini} \\ \textit{étiqueté dans } (A \times 1) \cup (1 \times B) \cup (A \times B) \end{array} & \textit{(sous-normalisé)}
\end{array}
$$

Remarque 4.5. La transition $1|1$ correspond au mot neutre de $A^* \times B^*$ (noté $1_{A^* \times B^*}$)

Propriété 4.6. Tout automate fini sur M est équivalent à un automate fini propre (c'est-à-dire, sans transitions étiquetées par 1_M).

Corollaire 4.7. $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ est une relation rationnelle. D'où l'on tire :

$$\theta \in \mathcal{R}at A^* \Longrightarrow Im\theta \in \mathcal{R}at B^*.$$

Définition 4.8. (Intersection avec un rationnel) Soit $K \in \mathcal{R}at A^*$. On définit l'application ι_K :

$$
\begin{array}{rcl}
\iota_K : A^* & \longrightarrow & A^* \\
u & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} u \text{ si } u \in K \\ \varnothing \text{ sinon} \end{array} \right.
\end{array}
$$

4.2. **Propriétés : bonnes et mauvaises nouvelles.**

Propriété 4.9. $\mathcal{R}at A^* \times B^*$ n'est pas fermé par intersection.

Exemple 4.10.

$$|\mathcal{V}| \cap |\mathcal{W}| = \{(a^n b^n, c^n), n \in \mathbb{N}\}$$

Corollaire 4.11. $\mathcal{R}at A^* \times B^*$ n'est pas fermé par complément.

Propriété 4.12. L'application complémentaire de l'identité :

$$
\begin{array}{rcl}
\complement id : A^* & \longrightarrow & A^* \\
u & \mapsto & \{v \in A^*, v \neq u\}
\end{array}
$$

est une relation rationnelle.

Exemple 4.13.

Théorème 4.14. *(Rabin & Scott, 1959) Soit A et B deux alphabets t.q $|A| \geq 2$ et $|B| \geq 2$. Alors le problème consistant à déterminer si deux langages disjoints R et S ($R \cap S = \varnothing$) sont t.q :*

$$\begin{cases} R \in \mathcal{R}at A^* \times B^* \\ S \in \mathcal{R}at A^* \times B^* \end{cases}$$

est un problème indécidable.

Corollaire 4.15. (Fischer & Rozenberg, 1968) La relation d'équivalence entre langages est un problème indécidable dans $\mathcal{R}at A^* \times B^*$.

Théorème 4.16. *(Elgot & Mezei, 1965) Soit $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ et $\sigma : B^* \longrightarrow C^*$ deux relations rationnelles. Alors la composée :*

$$\sigma \circ \theta : A^* \longrightarrow C^*$$

est également une relation rationnelle.

Lemme 4.17. *Si $\sigma : A^* \longrightarrow B^*$ est une relation rationnelle fonctionnelle, alors son application complémentaire $\complement\sigma$ telle que :*

$$\begin{array}{rcl} \complement\sigma : A^* & \longrightarrow & B^* \\ u & \mapsto & \{v \in B^*, v \neq \sigma(u)\}\,. \end{array}$$

est une relation rationnelle.

4.3. **Les deux théorèmes pivot.**

Théorème 4.18. *(Elgot et Mezei, 1965) (Composition)*

Théorème 4.19. *(Evaluation) Soit $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ une relation rationnelle. Alors :*

$$R \in \mathcal{R}at A^* \Longrightarrow \theta(R) \in \mathcal{R}at B^*$$

Preuve 4.20.

$$\begin{aligned} \theta(R) &= \mathcal{I}m(\theta \circ \iota_R) \\ &= \bigcup_{u \in R} \theta(u) \\ &= \bigcup_{u \in R} \left\{ w \in B^*, (v, w) \in \hat{\theta} \right\}. \\ &= \left\{ w \in B^*, \exists v \in R, (v, w) \in \hat{\theta} \right\}. \\ &= \left\{ w \in B^*, \exists u \in A^*, (u, v) \in \hat{\iota}_K(v, u) \in \hat{\theta} \right\}. \end{aligned}$$

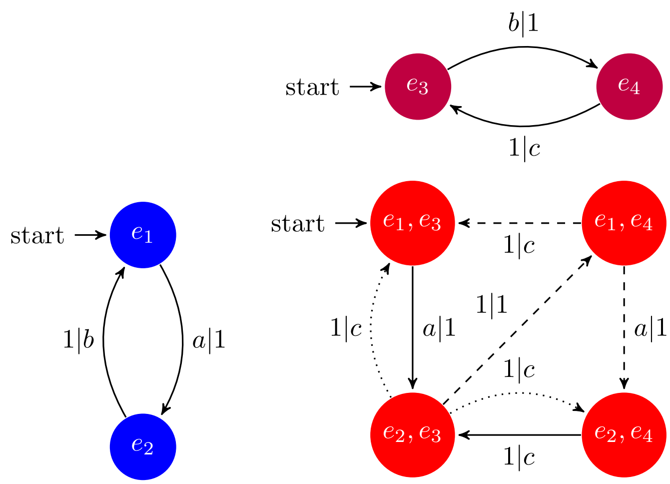
Preuve 4.21. *(1er théorème) Soit $\mathcal{T} = \langle Q, A^* \times B^*, E, I, T\rangle$ et $\mathcal{S} = \langle R, B^* \times C^*, F, J, U\rangle$. On note $|\mathcal{T}| = \hat{\theta}$ et $|\mathcal{S}| = \hat{\sigma}$.*
Soit $\mathcal{U} = \mathcal{T} \bowtie \mathcal{S} = \langle Q \times R, A^* \times C^*, G, I \times J, T \times U\rangle$ avec
$(p, r) \xrightarrow{x|y} (q, s)$
$\exists b \in B, \exists p \xrightarrow{x|b} q \in E$
$\exists r \xrightarrow{b|y} s \in F$

DBUT COURS ENZO

Preuve 4.22.

$$\begin{aligned}
\theta(K) &= \mathcal{I}m(\theta \circ \iota_K) \\
&= \bigcup_{u \in K} \theta(u) \\
&= \bigcup_{v \in K} \left\{ w \in B^*, (v, w) \in \hat{\theta} \right\} \\
&= \left\{ w \in B^*, \exists v \in K, (v, w) \in \hat{\theta} \right\} \\
&= \left\{ w \in B^*, \exists (u, v) \in A^* \times A^*, (u, v) \in \hat{\iota}_K, (v, w) \in \hat{\theta} \right\}
\end{aligned}$$

Exemple 4.23.



4.4. **Réalisation par représentation.**

4.4.1. *Transducteur temps réel.*

Définition 4.24. (Transducteur temps réel) Un transducteur temps réel (abrégé $t.r$), c'est un automate $\mathcal{T} = \langle Q, A, B^*, E, I, T \rangle$ de A^* dans B^*, dont les transitions sont étiquetées dans $A^* \times \mathcal{R}at(B^*)$ et t.q I et T sont deux applications de Q dans $\mathcal{R}at(B^*)$. Plus formellement, $\mathcal{T}$ est un transducteur temps réel si :

(i) $\qquad \exists I, T : Q \longrightarrow \mathcal{R}atB^*$

(ii) $\quad \forall a \in A, \forall (p, q) \in Q^2, \mu(a) = \{w \in B^*, p \xrightarrow{a|w} q \in E\} \triangleq K_{a,p,q}$

(iii) $\quad E = \left\{ (p, (a, K_{a,p,q}), q), (p, q) \in Q^2, a \in A, K_{a,p,q} \in \mathcal{R}atB^* \right\}$

Propriété 4.25.

$$\forall w \in A^*, \forall (p, q) \in Q^2, \mu(w)_{p,q} = H \Longleftrightarrow p \xrightarrow{w|H} q \in E$$

Si θ est une relation rationnelle représentée par $\mathcal{T} = \langle I, \mu, T \rangle$, transducteur $t.r$:

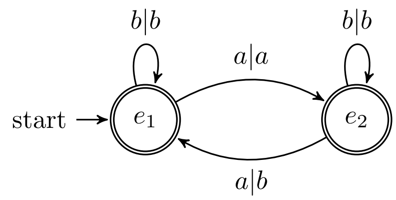
$$\forall w \in A^*, \theta(w) = I\mu(w)T$$

Propriété 4.26. Soit $\mathcal{T} = \langle Q, A, E, I, T \rangle$, avec toutes ses étiquettes dans $\mathcal{A} \times \mathcal{R}atB^*$, et $I, T : Q \longrightarrow \mathcal{R}atB^*$. Alors :

$$Q \text{ est fini } \Longrightarrow \mathcal{T} \text{ est fini}$$

Preuve 4.27.

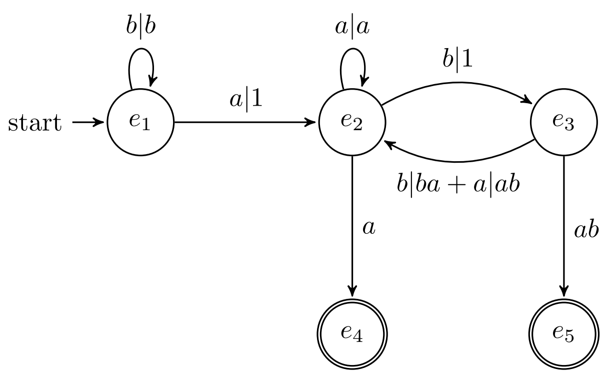
Exemple 4.28.



$$I = (10) \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu(abab) &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ab \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & ab \\ b^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab^3 & 0 \\ 0 & b^2ab \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 4.29.



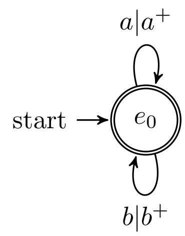
$$I = (100) \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & ab & 0 \end{pmatrix} \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & ba & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ ab \end{pmatrix}$$

Il s'agit en fait d'un lautomate qui "lit" de gauche à droite et cherche à remplacer *abb* par *baa* autant que faire se peut. Dans la pratique, ce genre d'automate peut prendre en entrée un nombre écrit dans la base des nombres de Fibonacci, et remplace alors 011 par 100 (car par définition, chaque nombre de Fibonacci vaut la somme des deux nombres qui le précèdent).

Définition 4.30. (Substitution) La relation $\sigma : A^* \longrightarrow B^*$ est une substitution si :

$$\begin{cases} \forall a \in A, \sigma(a) \subseteq B^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_i)_{i\in[1;n]}, \sigma(a_1 a_2 ... a_n) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)...\sigma(a_n) \end{cases}$$

Exemple 4.31.



$$\sigma(aaba) = a^+a^+b^+a^+$$

Théorème 4.32.

$$\begin{pmatrix} \textit{La relation} \\ \theta : A^* \longrightarrow B^* \\ \textit{est rationnelle} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{La relation } \theta : A^* \longrightarrow B^* \textit{ est réalisée} \\ \textit{par un transducteur temps réel} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} & \textit{Il existe } \langle I, \mu, T\rangle \\ & \textit{représentation de } A^* \textit{ dans } \mathcal{R}at B^* \\ & \textit{de dimension } |Q| \textit{ finie t.q :} \\ (i) & I, T : Q \longrightarrow \mathcal{R}at B^* \\ (ii) & I \in (\mathcal{R}at B^*)^{1\times|Q|} \\ (iii) & T \in (\mathcal{R}at B^*)^{|Q|\times 1} \\ (iv) & \mu : A^* \longrightarrow (\mathcal{R}at B^*)^{|Q|\times|Q|} \\ (v) & \forall w \in A^*, \theta(w) = I\mu(w)T \in \mathcal{R}at B^* \end{pmatrix}$$

Preuve 4.33.
Condition nécessaire ($\Longrightarrow$)

Soit $\mathcal{A} = \langle E, I, T\rangle$ un automate sur $M = A^* \times B^*$. I et T sont représentés par deux matrices booléennes de taille $|Q|$: $I, T, \in \mathbb{B}|Q|$. $E \in (\delta_f(M))^{|Q|\times|Q|}$. $|\mathcal{A}| = IE^*T$. Les coefficients de E^* sont dans la clôture rationnelles des coefficients de E.

Remarque 4.34. (Représentation booléenne d'un automate). Soit $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T\rangle$ un automate. On a alors :

$$I, T, \subseteq Q \quad I \in \mathbb{B}^{1\times|Q|} \quad T \in \mathbb{B}^{|Q|\times 1}$$

$$\mu : A^* \longrightarrow \mathbb{B}^{|Q|\times|Q|}\text{t.q :}$$

$$\forall a \in A, \forall (p,q) \in Q^2, \mu(a)_{p,q} = \begin{cases} 1 \text{ si } p \xrightarrow{a} q \in \mathcal{A}, (p,a,q) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

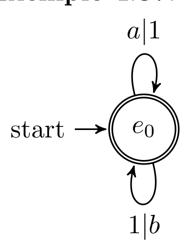
Propriété 4.35.

$$\forall w \in A^*, \forall (p,q) \in Q^2, \mu(w)_{p,q} = \begin{cases} 1 \text{ si } p \xrightarrow{f} q \in \mathcal{A}, f \in A^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

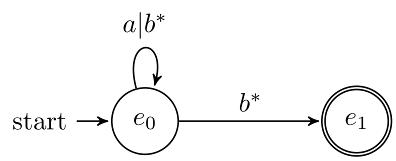
Corollaire 4.36.

$$\begin{array}{rcl} L(\mathcal{A}) & = & \{w \in A^*, I\mu(w)T = 1\} \\ E \in (\mathcal{P}(A))^{|Q|\times|Q|} & \Longrightarrow & L(\mathcal{A}) = IE^*T \\ \forall (p,q) \in Q^2, E_{p,q} & = & \{a, p \xrightarrow{a} p \in \mathcal{A}\} \\ E & = & \displaystyle\sum_{a\in A} a\mu(a) \end{array}$$

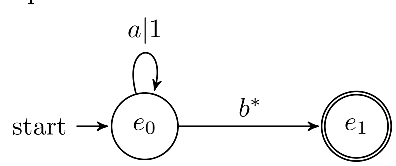
Exemple 4.37. (Sens $\Longleftarrow$)



$\Longrightarrow$



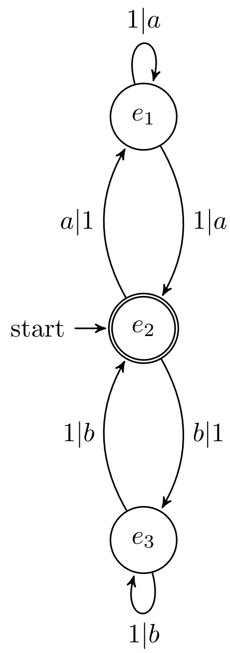
(forte équivalence avec l'automate de départ)



(même relation, mais calcul différent
équivalence simple avec l'automate de départ)

$$((a,1) + (1,b))^* = ((1,b)^*(a,1))^*(1,b)^*(a,b^*)^*(1,b)^*$$

Exemple 4.38.



G^*?

$$F = \begin{pmatrix} 0 & (a|1) & (b|1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

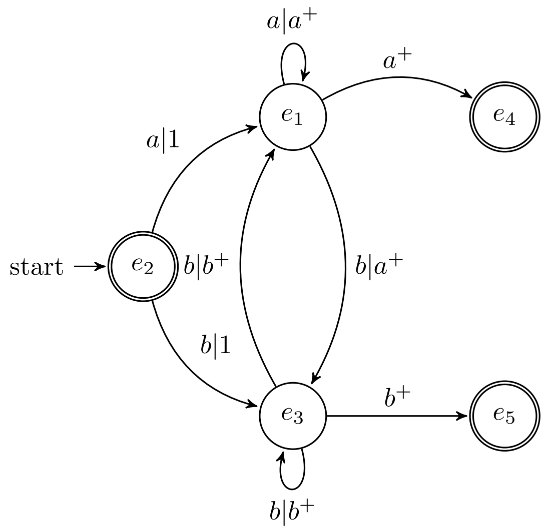
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1|a) & (1|a) & 0 \\ (1|b) & 0 & (1|b) \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline U & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline U & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline U & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & D^* \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
G^* &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline U & 0 \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)^* \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1,a^*) & 0 \\ 0 & 0 & (1,b^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1,a) & 0 & 0 \\ (1,b) & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1,a^*) & 0 \\ 0 & 0 & (1,b^*) \end{pmatrix} \\
G^* &= \begin{pmatrix} 0 & (a,1) & (b,1) \\ 0 & (1,a^+) & (b,a^+) \\ 0 & (a,b^+) & (b,b^+) \end{pmatrix} \\
G^*T &= \begin{pmatrix} 1 \\ (1,a^*) \\ (1,b^+) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Exemple 4.39. (Sens $\Longrightarrow$)

Théorème 4.40. *(Kleene - Schützenberger)*

$$\left(\begin{array}{c} \textit{La relation } \theta : A^* \longrightarrow B^* \\ \textit{est rationnelle} \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{Il existe une représentation} \\ \langle I, \mu, T \rangle : A^* \longrightarrow \mathcal{R}at B^* \\ \textit{qui réalise } \theta \end{array} \right)$$

Et cette relation se définit alors par :

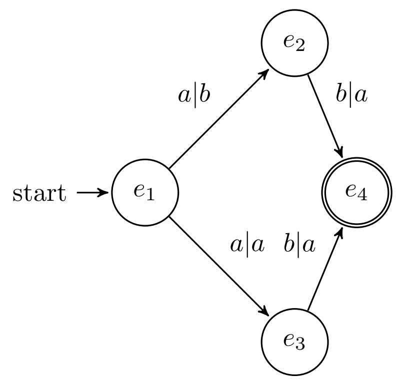
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu : A^* \longrightarrow (\mathcal{R}at B^*)^{|Q| \times |Q|} \\ \forall w \in A^*, Q(w) = I\mu(w)T \\ E = \sum_{a \in A} (a, 1)(1, \mu(a)) \\ I \in (\mathcal{R}at B^*)^{1 \times |Q|} \\ T \in (\mathcal{R}at B^*)^{|Q| \times 1} \end{array} \right. \tag{4.1}$$

On dit que cette représentation est émondée, c'est-à-dire que tous les états qui la composent sont des états utiles.

Propriété 4.41.

$$\left(\begin{array}{c}\text{La relation } \theta : A^* \longrightarrow B^* \\ \text{est fonctionnelle}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall a \in A \\ \text{tous les coefficients non nuls} \\ \text{de } \mu(a) \text{ sont des monômes}\end{array}\right)$$

Exemple 4.42.



$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corollaire 4.43. L'équivalence des fonctions rationnelles est un problème décidable. Autrement dit :

$$(\theta = \sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} dom\theta = dom\sigma \\ \theta \circ \sigma \text{ est une fonction}\end{array}\right. \tag{4.2}$$

Définition 4.44. (Fonction séquentielle). Une fonction rationnelle est dit séquentielle gauche (resp. droite), si elle est représentée par une représentation monomiale en ligne (resp. en colonne).

Théorème 4.45. *La question de savoir si une fonction est séquentielle gauche (resp. droite), est décidable.*

Théorème 4.46. *Toute fonction rationnelle est la composée d'une fonction séquentielle gauche par une fonction séquentielle droite.*

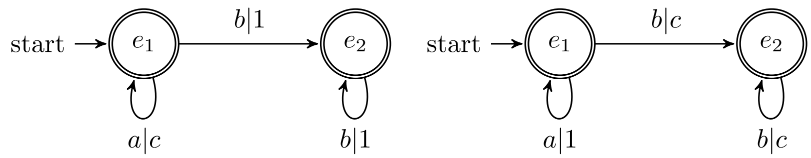
4.4.2. *Uniformisation des relations rationnelles.*

Définition 4.47. (Uniformisation). Uniformiser une relation rationnelle $\theta : A^* \longrightarrow B^*$, c'est "choisir", pour chaque élément du domaine A^*, un seul élément dans son image par θ. On dit qu'une application τ uniformise θ, si et seulement si :

$$\begin{array}{ll} (i) & \tau \text{ est fonctionnelle} \\ (ii) & dom\tau = dom\hat{\theta} \\ (iii) & \hat{\tau} \subseteq \hat{\theta} \; i.e, \; \forall w \in dom\hat{\theta}, \tau(w) \in \theta(w) \end{array}$$

Théorème 4.48. *Toute relation rationnelle est uniformisée par une fonction rationnelle non ambiguë (c'est-à-dire qu'entre chaque couple d'états, il n'existe qu'un seul calcul dont les transitions successives permettent de passer de l'un à l'autre).*

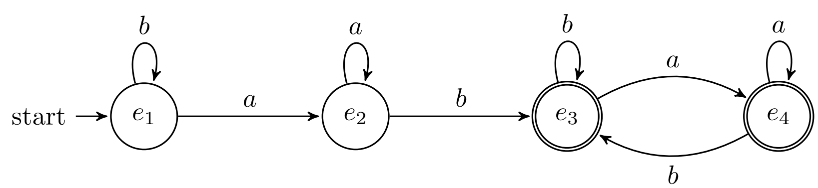
Exemple 4.49.



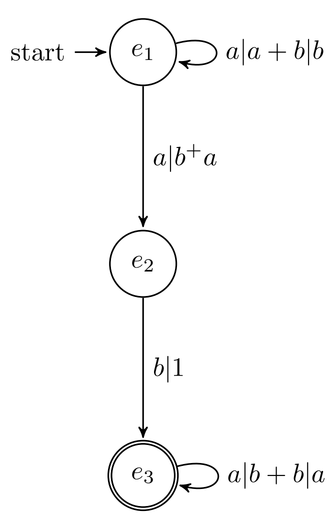
Cela montre que l'intersection de deux relations rationnelles n'est pas forcément rationnelle ?

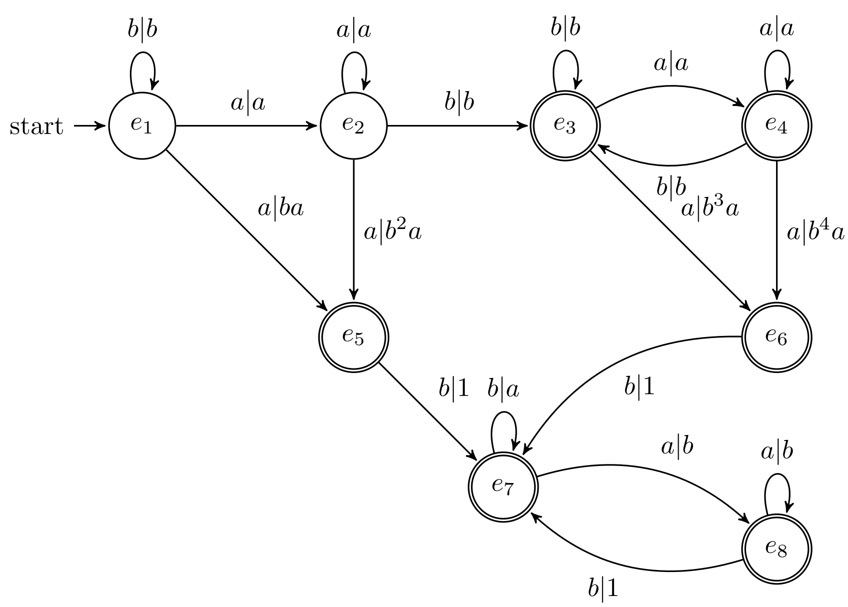
Remarque 4.50. En faisant le produit d'un automate $\mathcal{A}$, sous-jacent à un transducteur $\mathcal{T}$, avec son déterminisé $\hat{\mathcal{A}}$, on obtient un revêtement (c'est-à-dire, un automate qui assure une bijection entre les bouquets entrants et sortants). Ce produit donne également un automate équivalent à $\mathcal{A}$, mais non-ambigu, et dont chaque transition peut être mise en correspondance avec une transition de $\mathcal{A}$ (ce qui n'est pas le cas du déterminisé $\hat{\mathcal{A}}$). De cette manière on construit une uniformisation de $\mathcal{A}$.

Exemple 4.51.



$\mathcal{A}$





L'automate produit est un revêtement de Schützenberger de $\mathcal{A}$ Les sorties sont choisies de cet automate produit sont choisies en fonction des sorties de l'automate d'entrée sous-jacent à $\mathcal{T}$ (en colonne ici)

Exemple 4.52. En reprenant les données précédentes :

$$G^*F = (a,1)\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^+ & 0 \\ 0 & b^+ & 0 \end{pmatrix}\right) + (b,1)\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^+ \\ 0 & 0 & b^+ \end{pmatrix}\right)$$

$$\theta(w) = (1,0,0)\mu(w)\begin{pmatrix} 1 \\ a^+ \\ b^+ \end{pmatrix} = IG^*T \tag{4.3}$$

Théorème 4.53. *(Composition des représentations) Soit $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ et $\sigma : B^* \longrightarrow C^*$ deux relations. On suppose que θ est réalisée par la représentation $\langle I, \mu, T\rangle$ et que σ est réalisée par la représentation $\langle J, \kappa, U\rangle$. Alors la relation $\sigma \circ \theta$ est réalisée par : $\langle J, \kappa, U\rangle \circ \langle I, \mu, T\rangle = \langle J\kappa(I), \kappa \circ \mu, \kappa(T)U\rangle \triangleq \langle H, \pi, V\rangle$ en notant :*

$$\begin{aligned} H &\triangleq J\kappa(I) \\ \pi &\triangleq \kappa \circ \mu \\ V &\triangleq \kappa(T)U \end{aligned}$$

Preuve 4.54. *Supposons :*

$$\begin{cases} \forall w \in A^*, \theta(w) = I\mu(w)T \\ \forall z \in B^*, \sigma(z) = J\nu(z)U \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* \sigma \circ \theta(w) &= J\nu(I\mu(w)T)U \\ &= J\nu(I)\nu(\mu(w))\nu(T)U \\ &= I'\nu(\mu(w))T' \end{aligned}$$

En posant $I' = J\nu(I)$ et $T' = \nu(T)U$

Corollaire 4.55. Soit $\mu :: A^* \longrightarrow (\mathcal{R}atB^*)^{Q\times Q}$ et $\kappa \in \mathcal{R}atA^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \mu(\kappa) &= \bigcup_{w\in\kappa} \mu(w) \\ \mu(\kappa)_{p,q} &= \bigcup_{w\in\kappa} \mu(w)_{p,q} \\ \forall (p,q) \in Q^2, \mu(\kappa)_{p,q} &\in \mathcal{R}atB^* \end{aligned}$$

Corollaire 4.56. Soit θ une relation rationnelle réalisée par $\langle I, \mu, T\rangle$. Soir $\kappa \in \mathcal{R}atA^*$. Alors :

$$\theta(\kappa) = I\mu(\kappa)T \in \mathcal{R}atB^* \tag{4.4}$$

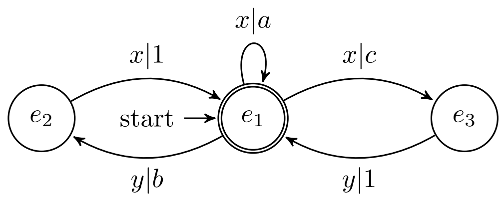
Propriété 4.57. Soit $\mu : A^* \longrightarrow (\mathcal{R}atB^*)^{Q\times Q}$ et $\kappa : B^* \longrightarrow (\mathcal{R}atC^*)^{R\times R}$ alors la relation composée π est un morphisme t.q :

$$\begin{aligned} \pi : A^* &\longrightarrow (\mathcal{R}atC^*)^{(Q\times R)\times(Q\times R)} \\ \forall w \in A^*, \pi(w) &= \kappa \circ \mu(w) \\ \forall (p,q) \in Q^2, \forall w \in A^*, \pi(w)_{pR,qR} &= \kappa(\mu(w)_{p,q}) \end{aligned}$$

Exemple 4.58.

$$\phi : A^* \longrightarrow B^* \qquad\qquad \phi^{-1} : B^* \longrightarrow A^*$$

(4.5)



$$\begin{array}{rcl} \phi(a) & = & x \\ \phi(b) & = & yx \\ \phi(c) & = & xy \end{array}$$

On cherche $\phi^{-1}(J, \kappa, U)$

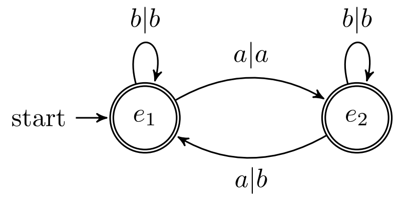
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu(x) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu(y) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} \kappa \circ \phi(a) = \kappa(\phi(a)) & = & \kappa(x) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \kappa \circ \phi(b) = \kappa(\phi(b)) & = & \kappa(yx) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix} \\ \kappa \circ \phi(c) = \kappa(\phi(c)) & = & \kappa(xy) = \begin{pmatrix} c & ab & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 4.59.

$$\begin{array}{ccccccc} \phi : A^* & \longrightarrow & B^* & \beta : B^* & \longrightarrow & A^* \\ a & \mapsto & x & x & \mapsto & ab \\ b & \mapsto & yx & y & \mapsto & bc \\ c & \mapsto & xy & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \beta \circ \phi(a) & = & ab \\ \beta \circ \phi(b) & = & bcab \\ \beta \circ \phi(c) & = & cabbc \end{array}$$



Exemple 4.60.

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$(1,0)\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1,0)\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nu(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\nu(b) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1,0)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1,0)\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J\nu I = (1,0)\nu(1)\nu(0) = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0,0)$$

$$\nu TU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w(a) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ \hline 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad w(b) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$$

4.5. **Relations rationnelles synchrones.**

Définition 4.61.

$$Diff_{rat}(A^* \times B^*) = \{(S,1) \cup (1 \times T), (S,T) \in \mathcal{R}atA^* \times \mathcal{R}atB^*\}$$

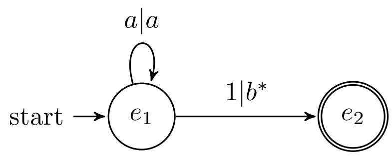
Définition 4.62. (Transducteur *letter to letter*) Un transducteur *letter to letter* (abrégé *l.t.l*), c'est un transducteur dont les transitions sont étiquetées par des couples ou des k-uplets de lettres (sans 1).

Définition 4.63. (Synchronicité à gauche) Soit $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ une relation rationnelle. Alors :

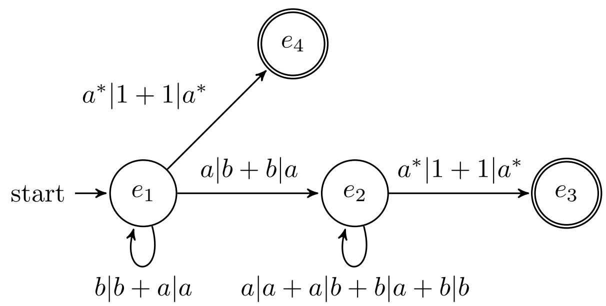
$$\begin{pmatrix} \theta \text{ est réalisée par un} \\ \text{transducteur } l.t.l \\ \text{à fonction finale} \\ \text{dans } Diff_{rat} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\theta \text{ est synchrone })$$

Définition 4.64. (Synchronicité à gauche bis) Une relation $\theta : A^* \longrightarrow B^*$ est synchrone à gauche (*resp.* à droite), si elle est réalisée par un transducteur calé à gauche (*resp.* à droite).

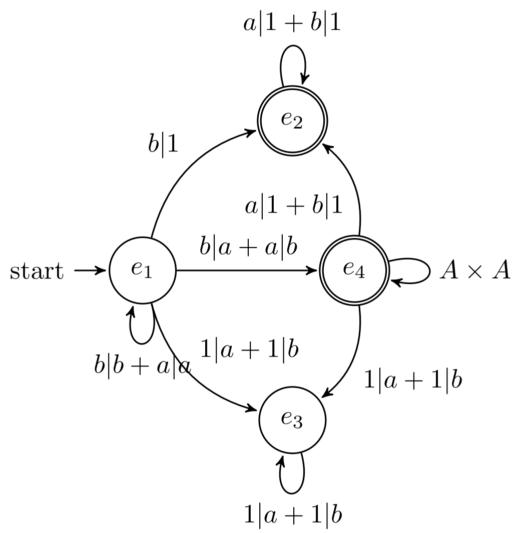
Exemple 4.65.



$$\theta(a^n) = \{a^n b^m, m \in \mathbb{N}\}$$



Complémentaire de l'identité :



Equivaut à :

Définition 4.66. (Transducteur calé) Soit $A_\$ = A \cup \{\$\}$ et $B_\$ = B \cup \{\$\}$. On dit qu'un transducteur *l.t.l* sur $A_\$ \times B_\$$, de fonction finale dans $\mathbb{B}$, satisfait la condition de calage si :

$$\left(\begin{array}{c} q \in Q \text{ admet une transition} \\ \text{entrante étiquetée dans} \\ \$ \times B \text{ (resp. } A \times \$) \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Toutes les transitions sortantes} \\ \text{de } q \text{ sont étiquetées dans} \\ \$ \times B \text{ (resp. } A \times \$) \end{array}\right)$$

Définition 4.67. (Transducteur calé bis) Soit $\mathcal{T}$ un transducteur sous-normalisé (ses transitions sont des couples de lettres, ou bien des couples de la forme $1|...$ ou $...|1$). On dit que $\mathcal{T}$ est calé à gauche si, pour tout état q de Q, s'il existe une transition entrante en q étiquetée dans $1 \times B$ (*resp.* $A \times 1$), alkors toute transition sortante de q est étiquetée dans $1 \times B$ (*resp.* $A \times 1$).

Remarque 4.68. Pour le calage à droite, il suffit de remplacer "entrante" par "sortante" dans la définition précédente.

Exemple 4.69. L'ordre lexicographique et l'ordre par longueur de mot sont des relations synchrones.

Définition 4.70. On note $\mathcal{S}ynchA^* \times B^*$, l'ensemble des relations synchrones sur $A^* \times B^*$

Propriété 4.71. $\mathcal{S}ynchA^* \times B^*$ est une algèbre de Boole effective. $\mathcal{S}ynchA^* \times B^*$ est fermée par composition.

Propriété 4.72. Le problème consistant à déterminer si $\mathcal{R}ecA^* \times B^* \subseteq \mathcal{S}ynchA^* \times B^*$ est un problème décidable.

Remarque 4.73. Néanmoins, la question de savoir si $\mathcal{R}atA^* \times B^* \subseteq \mathcal{S}ynchA^* \times B^*$ n'est elle, pas décidable.

Propriété 4.74. On définit le minimum d'un langage L comme suit :

$$minL = \{u \in L, \forall v \neq u, v \in L, |v| = |u|, u \leq v\}$$

Alors :

$$L \in \mathcal{R}at\theta^* \Longrightarrow minL \in \mathcal{R}atA^*$$

E-mail address: `adele.mortier@telecom-paristech.fr`