Appunti di Fisica Tecnica
2014/2015

Contents

List of Figures

List of Tables

Part I

Sistemi Chiusi

1 Introduzione alla termodinamica

Termodinamica La termodinamica è la scienza che studia l'energia, la materia e le leggi che governano le loro interazioni. È la disciplina che studia le grandezze macroscopiche che caratterizzano i modi di essere dei sistemi termodinamici e le modifiche (variazioni) che quelle subiscono quando intervengono scambi di massa e/o di energia del sistema con l'ambiente.

Sistema termidinamico Si definisce sistema termodinamico una quantità di materia o porzione di spazio separata dal resto dell'universo mediante un determinato *contorno* costituito da una superficie reale o immaginaria, rigida o deformabile che interagisce col "mondo esterno". Tutto ciò che è esterno al sistema termodinamico si definisce infatti "mondo esterno": quando il mondo esterno è di massa infinita viene detto "ambiente", quando è di massa finita prende il nome generico di "sistema accoppiato".

Sistema chiuso Un sistema chiuso è un sistema che scambia con l'esterno *energia* come lavoro (se il contorno è deformabile) e/o calore.

Sistema aperto Un sistema aperto è un sistema che scambia con l'esterno sia *energia* che *materia*.

Sistema termodinamico semplice Per lo studio in questo corso si dovranno fare delle semplificazioni, quindi verranno considerati soltanto:

- sistemi chimicamente omogenei ed isotropi;
- sistemi esenti da qualsiasi effetto di superficie;
- chimicamente inerti;
- sistemi in cui le interazioni gravitazionali saranno ridotte al minimo;
- sistemi in cui non verranno prese in considerazione interazioni elettromagnetiche.

Stato di equilibrio Stato interno particolare cioè riproducibile e descrivibile attraverso il valore assunto da poche proprietà del sistema stesso, che godono della caratteristica di avere un unico ed uguale valore in ogni punto del sistema.

Stato a cui perviene spontaneamente il sistema quando è isolato (non scambia cioè né lavoro, né calore, né massa con l'ambiente esterno). Nel momento in cui il sistema viene perturbato giungerà poi in un nuovo stato di equilibrio. Studiamo quindi successivi stati di equilibrio.

Lo stato di equilibrio è il particolare stato cui perviene spontaneamente il sistema isolato. È riproducibile e descrivibile mediante un numero limitato di prorietà.

Grandezza intensiva Si definisce grandezza intensiva la grandezza fisica il cui valore non dipende dall'estensione del sistema (come temperatura, pressione, etc.). Ne consegue che lo stato interno del corpo non dipende dalla sua estensione.

Grandezza estensiva Si definisce grandezza estensiva la grandezza fisica che dipende dall'estensione del sistema (come massa, volume totale, etc.). La grandezza estensiva è additiva e di conseguenza il suo valore riferito ad un sistema risulta somma dei valori relativi ai sottoinsiemi che lo compongono.

Legge di Duhem Nel caso di un di sistema monocomponente, il numero di parametri termodinamici intensivi o estensivi specifici indipendenti atti a descrivere compiutamente lo stato interno di equilibrio è due.

Regola di Gibbs Stabilisce una relazione tra il numero di componenti C, il numero di fasi F, il numero di variabili intensive indipendenti V.

$$V = C + 2 - F$$

La legge di Duhem introduce l'esistenza dell'equazione di stato che lega fra loro tre variabili termodinamiche:

$$f(P, v, T) = 0$$

Contorno

- *adiabatico:* non permette lo scambio di calore;
- *diatermano:* permette lo scambio di calore;
- *rigido:* non permette lo scambio di lavoro;
- *mobile:* permette lo scambio di lavoro;
- *impermeabile:* non permette lo scambio di massa;
- *poroso:* permette lo scambio di massa.

Table 1: *Tipologie di sistemi termodinamici: tipi di scambio con l'ambiente esterno*

	Calore	Lavoro	Massa
Adiabatico	no		
Diatermano	sì		
Rigido		no	
Deformabile		sì	
Chiuso			no
Aperto			sì
Isolato	no	no	no

Sistema composto Un sistema composto è un sistema costituito da più sistemi semplici separati tra loro da pareti.

È interessante studiare l'evoluzione del sistema quando subisce trasformazioni, fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio.

Se possiamo descrivere le trasformazioni come una serie ordinata di stati intermedi successivi l'una all'altra, allora possiamo parlare di sistema termodinamico. Questo nella realtà non è quasi mai possibile del tutto.

Trasformazione In un sistema chiuso lo stato di equilibrio vincolato viene a cessare quando, per rimozione dei vincoli al contorno, il sistema scambia con l'ambiente calore e/o lavoro.

Il sistema perverrà a una nuova situazione di equilibrio avendo attraversato una serie di stati intermedi successivi detti nel loro insieme *trasformazione termodinamica.*

Tipi di trasformazioni

- *quasi statica o internamente reversibile:* costituita da una successione di stati di equilibrio. Può non essere reversibile;
- *reversibile:* se percorsa in senso inverso riporta sistema e ambiente nello stato iniziale;
- *irreversibile:* trasformazione in parte o per intero non reversibile. Non è rappresentabile su un diagramma di stato;
- *chiusa o ciclica:* gli estremi della trasformazione coincidono;

- *elementare:* se una delle grandezze di stato si mantiene costante durante la trasformazione.

  – isobare: la pressione (p) rimane costante;
  – isocore: il volume (V) rimane costante;
  – isoterme: la temperatura (T) rimane costante.

1.1 Gas Ideali

Gas ideale Un gas ideale (spesso chiamato anche gas "perfetto") è un gas descritto dall'equazione di stato dei gas perfetti, e che quindi rispetta la legge di Boyle-Mariotte[1], la prima legge di Gay-Lussac[2] o legge di Charles, e la seconda legge di Gay-Lussac[3], in tutte le condizioni di temperatura, densità e pressione. In questo modello le molecole del gas sono assunte puntiformi e non interagenti. I gas reali si comportano in buona approssimazione come gas perfetti quando la pressione è sufficientemente bassa e la temperatura sufficientemente alta.

I sistemi che verranno trattati, verranno considerato dal punto di vista *macroscopico:* lo stato del sistema viene definito attraverso la misura di grandezze rilevabili, utilizzando normali strumenti di misura (pressione, temperatura, volume), che hanno in comune le seguenti caratteristiche:

- non implicano alcuna ipotesi sulla struttura della materia;

[1] La legge di Boyle e Mariotte afferma che in condizioni di temperatura costante la pressione di un gas perfetto è inversamente proporzionale al suo volume, ovvero che il prodotto della pressione del gas per il volume da esso occupato è costante:

$$p \cdot V = costante \text{ oppure } p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

[2] La prima legge di Gay-Lussac afferma che in una trasformazione isobara, ovvero in condizioni di pressione costante, il volume di un gas ideale è direttamente proporzionale alla temperatura. Indicando con V0 e con V(T) le densità alle temperature assolute rispettivamente T0 e T, la legge è espressa matematicamente dalla relazione:

$$V(T) = V_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

dove il parametro α è detto coefficiente di dilatazione termica ha le dimensioni dell'inverso della temperatura perché il prodotto α T deve essere adimensionale. Un gas quindi va incontro a una rarefazione quando si scalda e a un addensamento quando si raffredda.

[3] La seconda legge di Gay-Lussac è una legge costitutiva che descrive come, in una trasformazione isocora in condizioni di volume costante, la pressione di un gas sia direttamente proporzionale alla sua temperatura. Indicando con P0 la pressione di un gas alla temperatura di $0°C$ e con $P(T)$ la pressione ad una temperatura $T > 0$, questa legge è espressa matematicamente dalla relazione:

$p(t) = p_0 (1 + \alpha \cdot t)$

con t espresso in $°C$ e α è detto coefficiente di espansione dei gas e vale per tutti i gas circa $3.663 \times 10 - 3°C^{-1}$, pari a circa $1/273°C^{-1}$. (Le dimensioni di α sono $°C^{-1}$ perché il prodotto αt deve essere adimensionale).

- sono in numero relativamente piccolo;
- sono suggerite più o meno dai nostri sensi;
- possono essere misurate direttamente.

Il punto di vista macroscopico descrive il sistema, fornendo le coordinate per ciascuna delle molecole che lo costituiscono.

Con questo approccio:

- si fanno delle ipotesi sulla struttura della materia, ad esempio che esistano le molecole;
- occorre precisare il valore di molte grandezze;
- l'esistenza di queste grandezze non è suggerita dalle nostre percezioni sensoriali;
- queste grandezze non possono essere misurate.

1.1.1 Equazione di stato del gas ideale

La teoria cinetica dei gas ci assicura che le coordinate di stato p, V e T sono legate da una equazione del tipo:

$$f(P, v, T) = 0$$

(Alla stessa conclusione si arriva per mezzo della legge di Duhem).

Per un gas ideale, in particolare, l'equazione di stato è del tipo:

$$pV = NRT$$

ove P è la pressione $[Pa]$ termodinamica del gas, V il volume occupato dalle N moli che compongono il gas stesso, T la temperatura assoluta del gas, R $\left[\frac{J}{kmol \cdot K}\right]$ la costante universale dei gas perfetti.

Dividendo l'equazione per il numero di moli N, otteniamo:

$$\frac{pV}{N} = RT \ ,$$

ovvero

$$p\overline{v} = RT$$

dove poniamo $\dfrac{V}{N} = \overline{v}$, volume molare $\left[\frac{m^3}{kmol}\right]$.

Perché R è costante per tutti i gas ideali?

Il valore della costante R deriva dalla teoria cinetica dei gas, la quale la calcola come rapporto tra il prodotto della pressione e del volume occupato da una mole di gas e la sua temperatura nell'impotesi che le molecole del gas non abbiano interazioni di alcun genere tra loro. Il risultato che si ottiene può essere semplicemente desunto dalla legge di Gay Lussac, per la quale 1 kmole di un gas ideale in condizioni normali ($P = 1atm\ e\ T = 0°C$) occupa un volume $V = 22.415m^3$.

Introducendo questo valore nell'equazione di stato dei gas ideali sono possibili altre espressioni che si ottengono da quella proposta introducendo il legame tra il numero di moli del gas (N) e la massa del gas (M). Ricordando infatti che la massa di una sostanza è $M = N \cdot M_m$, se dividiamo l'equazione iniziale di partenza dei gas perfetti per la massa otteniamo:

$$\frac{pV}{m} = \frac{NRT}{m},$$

ovvero

$$pv = \frac{RT}{M_m}$$

dove poniamo $v = \frac{V}{m}$, volume specifico, e $M_m = \frac{m}{N}$, massa molare del gas.

Ponendo poi $\frac{R}{M_m} = R^*$ otteniamo:

$$pv = R^* \cdot T$$

In questa relazione R^*è la costante caratteristica del gas considerato e si definisce come il rapporto tra la costante dei gas universali R e la massa molare del particolare gas. Quest'ultima equazione fa riferimento al volume specifico e non più al volume molare.

R^*per l'ossigeno (O_2):

$M = 32\frac{kg}{kmol}$, quindi $R^* = \frac{R}{M} = \frac{8314}{32}\frac{\frac{J}{kmol \cdot K}}{\frac{kg}{kmol}} = 260\frac{J}{kg \cdot K}$

R^*per l'azoto (N_2):

$M = 28\frac{kg}{kmol}$, quindi $R^* = \frac{R}{M} = \frac{8314}{28}\frac{\frac{J}{kmol \cdot K}}{\frac{kg}{kmol}} = 297\frac{J}{kg \cdot K}$

Nel seguito del corso l'aria verrà immaginata come un gas ideale biatomico con $M = 28.8\frac{kg}{kmol}$ (composta per l'80% di N_2 e per il 20% di O_2).

L'equazione di stato, anche se spesso ignota, viene utile in alcuni casi.

Nel caso di ***liquidi*** e ***solidi*** per esempio non esistono equazioni atte ad approssimarne il comportamento termodinamico. La sola consapevolezza dell'esistenza dell'equazione di stato però permette utili deduzioni.

Data la forma implicita dell'equazione $v = v\,(T,\, p)$, possiamo *differenziarla* rispetto a pressione e temperatura ottenendo:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp$$

Introducendo poi il *coefficiente di dilatazione isobaro* (specifica quanto si dilata a pressione costante una certa sostanza al variare della temperatura):

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

e il *coefficiente di comprimibilità isotermo* (specifica quanto il materiale modifica il suo volume all'aumentare della pressione a temperatura costante):

$$k_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

I due coefficienti introdotti, dipendenti debolmente da pressione e temperatura, sono misurabili sperimentalmente.

La precedente relazione differenziale risulta quindi:

$$dv = \beta v dT - k_T v dp$$

Considerando costanti i coefficienti per intervalli anche piuttosto ampi di temperatura e pressione, si rende possibile l'integrazione della relazione differenziale e il calcolo dello stato finale a partire da condizioni iniziali note.

2 Equazioni di bilancio

2.1 Primo e Secondo principio della termodinamica

È evidente che le grandezze intensive e le grandezze estensive non sono propriamente uguali tra loro, ovvero, non sono interscambiabili perché nella definizione di quello che è lo stato di equilibrio termodinamico si comportano diversamente e non sono sempre sovrapponibili.

Per poter analizzare un sistema, per poterne definire la sua evoluzione, cioè la sua trasformazione è necessario dotarsi anche di qualche strumento in più che ci permetta di mettere in relazione fra loro gli stati di equilibrio che via via il sistema assume nel corso della trasformazione. In parole povere, se un sistema evolve dallo stato A ad uno stato B, per definire lo stato di equilibrio B conoscendo lo stato di equilibrio di partenza, si ha il bisogno di trovare delle relazioni che mettano in relazione fra loro le grandezze caratteristiche dello stato di equilibrio A (quello di partenza) con le medesime o con altre grandezze caratteristiche che definiscono univocamente lo stato di equilibrio B del sistema.

L'equazione di stato mette in relazione fra loro le grandezze del sistema concentrandosi su un unico stato del sistema: conoscendo due proprietà, attraverso l'equazione di stato (che però molto spesso non è nota) si potrebbero trovare le altre caratteristiche di quel preciso stato di equilibrio.

Nel momento in cui il sistema va incontro ad una trasformazione l'equazione di stato non è più sufficiente a determinarne tutte le caratteristiche e proprietà. Utili per questo fine sono le cosiddette *equazioni di bilancio*.

Le equazioni di bilancio sono tre:

1. le *equazioni di bilancio di massa*, per i sistemi chiusi sono implicitamente verificate quindi per i sistemi chiusi l'equazione di bilancio di massa è di "poca" importanza mentre sarà importante per i sistemi aperti (che verranno trattati in seguito);

se un sistema è chiuso per definizione non scambia massa con l'esterno

2. le *equazioni di bilancio di energia*, sono un'estensione di quelle della meccanica classica, descrivono il cosiddetto principio di conservazione dell'energia che va sotto il nome di Primo principio della termodinamica.;

3. *le equazioni di bilancio di entropia*, vanno sotto il nome di Secondo principio della termodinamica.

2.1.1 Primo principio della termodinamica

Per un sistema semplice all'equilibrio è definita una proprietà intrinseca (funzione di stato) detta energia interna "U" la cui variazione è il risultato di interazioni del sistema con l'ambiente esterno (interazioni ovviamente di tipo energetico).

Questa proprietà dipende solamente dallo stato in cui il sistema si trova e non da come il sistema si è evoluto fino a quel punto:

$$\Delta U = Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow}$$

L'energia interna U non cambia soltanto quando il sistema scambia lavoro con l'ambiente esterno ma anche quando scambia calore.

Perché la notazione $Q^{\leftarrow}$e $L^{\rightarrow}$?

Da un punto di vista storico, la formalizzazione della termodinamica avviene storicamente dopo l'approccio tecnologico alla stessa, ovvero, la scienza termodinamica arriva dopo lo sviluppo della tecnologia termodinamica. Le macchine termiche difatto dovevano ricevere calore, quindi prendere calore dall'esterno (positivo entrante) e, dopo aver assorbito calore, rendere disponibile all'esterno del calore. Il lavoro veniva intrinsecamente preso positivo uscente; in un ipotetico sistema si può immaginare facilmente che, all'introduzione di calore, il contenuto dell'energia interna tenderà ad aumentare, quindi la sua variazione sarà positiva, allo stesso modo, se si introduce del lavoro meccanico (entrante) l'energia interna tenderà ad aumentare. Un fisico avrebbe quindi scritto:

$$\Delta U = Q^{\leftarrow} + L^{\leftarrow}$$

Cioè, se si introduce nel sistema dell'energia (che sia calore o che sia lavoro, non ha importanza, perché una delle più importanti proprietà che il primo principio permette di affermare è che calore e lavoro sono entrambe forme di energia equivalenti fra loro), la variazione di energia interna del sistema è la somma delle energie introdotte al suo interno.

Dal punto di vista ingegneristico però interessa la produzione di lavoro, quindi il lavoro viene preso positivo uscente ed ecco il perché di tale notazione. Ovviamente le due notazioni sono perfettamente equivalenti tra di loro, esprimono concettualmente la stessa proprietà.

Lavoro Il lavoro è energia fornita ad un sistema termodinamico semplice che sia riconducibile alla variazione di quota di un grave.

Calore Il calore è energia fornita ad un sistema termodinamico semplice che non è riconducibile alla variazione di quota di un grave. Ovvero, sono in qualche modo tutte le interazioni energetiche che non fanno riferimento alla meccanica classica.

calore e lavoro NON sono proprietà del sistema, sono forme di energia in transito, sono scambi/interazioni di energia con l'esterno; dipendono quindi dal tipo di percorso seguito per portare il sistema da uno stato ad un altro

Dal primo principio discendono alcune importanti proprietà:

- l'energia interna totale di un sistema, cioè l'energia interna riferita all'intera massa m del sistema, è una quantità estensiva:

$$U = m \cdot u$$

- scritto in forma differenziale il primo postulato assume la forma:

$$du = \delta q^{\leftarrow} - \delta l^{\rightarrow}$$

Il differenziale di energia interna all'unità di massa è un differenziale esatto perché è una funzione di stato, viceversa, calore e lavoro sono differenziali di linea perché dipendono dal percorso seguito per passare da uno stato termodinamico ad un altro.

- essendo U una quantità estensiva (additiva), se il sistema Z è composto da due (o più) sottosistemi A, B, ..., l'energia interna totale è:

$$U_Z = U_A + U_B + ...$$

- in un sistema isolato (semplice o composto) il bilancio energetico diviene:

$$\Delta U_{Isolato} = 0$$

- per un sistema che subisce una trasformazione ciclica , diverso dal caso di sistema isolato poiché qui lavoro e calore possono essere diversi da 0, ma sono tra di loro uguali in valore assoluto, si ha:

$$\Delta U_{Ciclo} = 0$$

una trasformazione ciclica parte da uno stato di equilibrio e seguendo un qualsiasi percorso ritorna allo stato di equilibrio di partenza

- per un sistema Z non isolato composto da due (o più) sottosistemi A, B, ..., l'energia interna totale è:

$$\Delta U_Z = \Delta U_A + \Delta U_B + ... = Q_Z^{\leftarrow} - L_Z^{\rightarrow}$$

  Formulazione classica del primo 1° della termodinamica: l'energia che è immagazzinata in un sistema e non va a cambiare né l'energia cinetica del centro di massa, né quella potenziale (e neanche l'energia elastica, chimica o elettrica) è chiamata *energia interna*.

Dall'ultima equazione, che afferma che la variazione di energia interna di un sistema composto è esprimibile come la differenza tra il calore entrante attraverso il contorno del sistema e il lavoro uscente attraverso di esso, deriva un'importante notazione: dato un sistema Z composto da diversi sottosistemi che fra di loro scambiano lavoro e calore, nel bilancio complessivo del sistema Z questi scambi interni non vengono considerati poiché, tanto quanto un sottosistema A cede calore ad un sottosistema B, tanto quest'ultimo riceve calore dal sistema A, quindi effettuando tutti i bilanci sui singoli sottosistemi queste interazioni si annullano a vicenda poiché entrano in due equazioni di bilancio diverse con segno opposto.

Quindi $Q_Z^{\leftarrow}$ e $L_Z^{\rightarrow}$ sono gli scambi di calore e lavoro che il sistema composto Z scambia con l'ambiente esterno.

La formulazione dell'energia interna è dovuta alla cosiddetta ***esperienza di Joule*** (vedi Figura 1).

Tale esperienza può essere così riassunta: in un contenitore rigido e perfettamente isolato termicamente è posta una massa di acqua inizialmente a riposo: nell'acqua è immerso un mulinello collegato ad un contrappeso. Lasciando scendere il contrappeso, questo compirà sul sistema, costituito dall'acqua, un lavoro che in parte si trasforma in energia cinetica posseduta dall'acqua in movimento ed in parte è dissipato per attriti viscosi.

Dopo qualche istante l'acqua ritorna in condizioni di riposo e si può concludere che il sistema costituito dall'acqua non ha modificato né la sua energia cinetica, né la sua energia potenziale. Se ne deve dedurre che il principio di conservazione dell'energia, da un punto di vista meccanico, è falso, oppure che l'energia sia stata immagazzinata nel sistema sotto qualche altra forma. Se, infatti, si dispone di un termometro nell'acqua si osserva che la sua temperatura è aumentata ovvero che il suo stato termodinamico è mutato.

Per i sistemi conservativi si ha:

$$\delta L = dE_K + dE_P$$

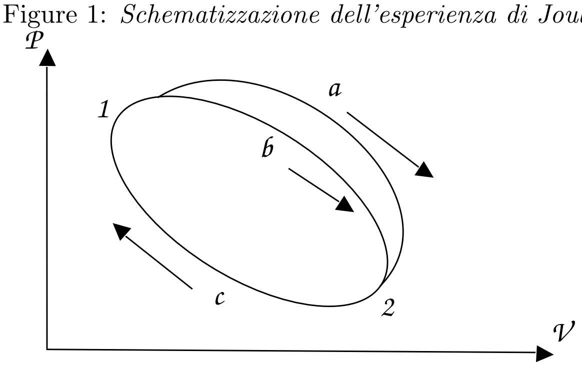
Il lavoro introdotto nel sistema non varia l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema, in quanto l'acqua, dopo l'agitazione iniziale torna in quiete.

$$dE_K + dE_P - \delta L \neq 0$$

Il sistema ha però aumentato la temperatura. E' un fenomeno senz'altro correlato alla variazione di un'energia immagazzinata che viene chiamata energia interna.

Altra storica esperienza di Joule è quella diretta a determinare l'equivalente meccanico della caloria. Essa ha permesso di evidenziare il carattere di funzione di stato dell'energia interna. Questa esperienza può essere così schematizzata:

Figure 1: *Schematizzazione dell'esperienza di Joule*



Si considerino le due trasformazioni cicliche ac e bc rappresentate in Figura 1 e si assuma come vero il fatto sperimentale, ripetutamente osservato da Joule, che il rapporto tra calore e lavoro scambiato in una definita trasformazione ciclica è costante e dipendente unicamente dalle unità di misura adottate per la misura del calore e del lavoro.

Nel caso esemplificato, adottando le stesse unità di misura per Q e L, il rapporto diventa unitario. Si scriverà quindi, considerando i due cicli ac e bc:

$$Q_{ac} = L_{ac}$$

$$Q_{bc} = L_{bc}$$

In particolare si potrà scrivere:

$$Q_a + Q_c = L_a + L_c$$

$$Q_b + Q_c = L_b + L_c$$

e quindi in definitiva, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$Q_a - Q_b = L_a - L_b$$

$$Q_a - L_a = Q_b - L_b$$

$$\Delta U_{12_a} = \Delta U_{12_b}$$

2.1.2 Secondo principio della termodinamica

In un sistema termodinamico all'equilibrio esiste una funzione intrinseca dello stato del sistema (funzione di stato) detta entropia "S" la cui variazione per una trasformazione reversibile è data da:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q^{\leftarrow}_{rev}}{T}$$

Dal secondo principio discendono alcune importanti proprietà:

- l'entropia totale di un sistema, cioè l'entropia riferita all'intera massa m del sistema, è una quantità estensiva:

$$S = m \cdot s$$

- la variazione di entropia totale di un sistema isolato sede di trasformazioni termodinamiche è sempre maggiore di zero e tende a zero con il tendere dei processi alla reversibilità:

$$\Delta S_{Isolato} \geq 0$$

- Essendo S una quantità estensiva (additiva), se il sistema Z è composto da due (o più) sottosistemi A, B, ..., l'entropia totale è:

$$S_Z = S_A + S_B + ...$$

$$\Delta S_Z = \Delta S_A + \Delta S_B + ...$$

- In un sistema chiuso sede di trasformazioni termodinamiche il bilancio entropico può essere scritto come:

$$\Delta S = S_Q^{\leftarrow} + S_{Irr}$$

in cui il termine $S_Q^{\leftarrow}$ rappresenta l'entropia entrante attraverso i confini del sistema come conseguenza dello scambio di calore Q (primo assioma), mentre S_{Irr} (sempre maggiore di zero, in base al terzo assioma) è il termine di generazione entropica per irreversibilità. Il primo termine dovuto agli scambi di calore è teoricamente calcolabile, anche se è molto difficile determinare la variazione di calore al variare della temperatura perché non è affatto semplice fare un integrale di un differenziale di linea, mentre il secondo termine rimane quasi sempre un'incognita.

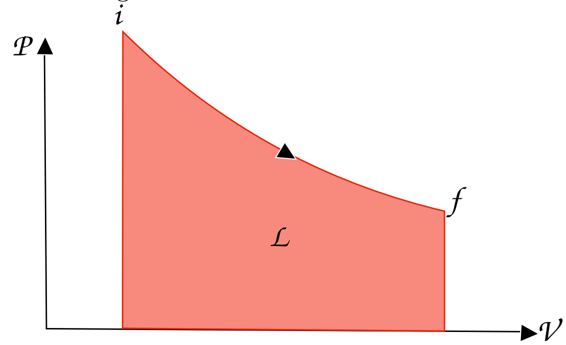
Calcolo delle grandezze termodinamiche

Si può dimostrare che, in alcuni casi semplici, è possibile il calcolo dei diversi termini che compaiono nel primo e nel secondo principio della termodinamica $(\Delta U, Q, L, \Delta S)$ in funzione delle grandezze direttamente misurabili quali pressione (P), temperatura (T) e volume (V).

2.2 Il lavoro termodinamico

La capacità di compiere lavoro non è altro che la combinazione di una forza per uno spostamento. Come si riconduce però il lavoro alla pressione e al volume?

Figure 2: *Il lavoro termodinamico*



Da un punto di vista meccanico il differenziale del lavoro è:

$$\delta L = F \cdot s_{spostamento}$$

In termodinamica il sistema classico che si può trovare è il sistema cilindro-pistone che permette di esprimere il lavoro come:

$$\delta l^{\rightarrow} = P\,dV$$

e quindi:

$$l^{\rightarrow} = \int_i^f P\,dV$$

2.2.1 Cilindro-pistone

In un dispositivo cilindro-pistone, uno squilibrio di forze infinitesimo tra forze esterne e forza interna $(P * A)$ provoca uno spostamento infinitesimo del pistone a cui corrisponde un lavoro.

$$\delta\vec{L} = P\,A\,ds = P\,dv$$

Si è considerato il sistema composto dal solo fluido comprimibile e la trasformazione quasi statica. Quando il sistema evolve da uno stato iniziale i a uno stato finale f attraverso una successione di stati di equilibrio sarà possibile esprimere una legge detta equazione di trasformazione tra le variabili di stato P e v e la sua integrazione rappresenterà il lavoro scambiato durante la trasformazione.

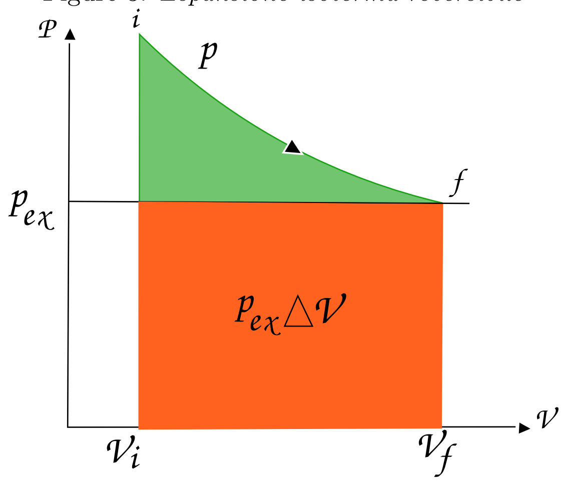
Riferendoci alla Figura 2, possiamo scrivere:

$$\delta\vec{l} = P\,dv$$
$$\vec{l} = \int_i^f \,P\,dv$$

Il calcolo dell'integrale al secondo membro richiede la conoscenza della funzione $P = P\,(v)$ detta *equazione della trasformazione.*

2.2.2 Espansione isoterma reversibile

Figure 3: *Espansione isoterma reversibile*



Consideriamo ora un'espansione isoterma reversibile, come quella in Figura 3, da V_ia V_f:

$$l = R^* \int_{v_i}^{vf} \frac{T}{v} dv = R^* T \ln\left(\frac{v_f}{v_i}\right)$$

Se espandiamo il gas in modo irreversibile, il lavoro compiuto è pari a:

$$l = p_{ex} \Delta V$$

Il lavoro reversibile (in verde in figura 3) è maggiore del lavoro irreversibile (in arancio in figura 3).

Immaginando un cilindro-pistone contenente al suo interno un gas ad una certa pressione con dei pesi di varia massa appoggiati sul pistone, eliminando le masse il sistema evolverà fino a portarsi in una situazione finale diversa, si espande e al termine dell'espansione avrà una pressione inferiore a quella di partenza. In questo caso si estrae una quantità di lavoro irreversibile inferiore rispetto a quella che si potrebbe estrarre idealmente.

2.2.3 Lavoro e funzione di stato

Funzione di stato Una funzione di stato è una proprietà del sistema che dipende solamente dallo stato in considerazione, e non dalla natura del processo (cammino) attraverso il quale il sistema è arrivato allo stato attuale. Un banale esempio di funzione di stato è l'altezza.

Invece:

- Il Lavoro NON è una funzione di stato;
- Il Lavoro compiuto DIPENDE dal cammino;
- L'altezza finale NON DIPENDE dal cammino;
- Il tempo trascorso DIPENDE dal cammino.

δl non è un differenziale esatto e il lavoro L non è una funzione di stato in quanto l'area sottesa dipende dall'equazione di trasformazione e il lavoro può essere > 0 nel caso di macchine a ciclo diretto (motrici), oppure < 0 nel caso di macchine a ciclo inverso (operatrici).

3 Calore e Temperatura

Per lungo tempo Calore e Temperatura furono confusi...

Ora noi sappiamo che il calore è una forma di energia, dovuta all'incessante movimento degli atomi e delle molecole di cui sono composti i vari oggetti. Essendo una particolare forma di energia, non ci deve sorprendere che non si conservi, così come non si conservano altre forme di energia.

3.0.4 La teoria del Calorico

L'opinione prevalente (Lavoisier, Fourier, Laplace e Poisson), era che il calore fosse una sorta di fluido misterioso, il calorico, che fluiva in ogni sostanza e spontaneamente passava da un corpo caldo ad un corpo freddo.

La teoria del calorico assegnava a questo fluido strane proprietà. Prima di tutto non aveva peso: scaldare un etto di ferro non portava ad un aumento del suo peso; però occupava spazio.

I corpi, infatti, aumentavano di volume se riscaldati. Nonostante i numerosi tentativi, il calorico sfuggiva ad ogni sforzo per essere isolato e investigato direttamente. Pian piano aumentava l'evidenza sperimentale e teorica che la teoria del calorico fosse errata.

I corpi caldi contengono piu' calorico del corpi freddi. Mettendo a contatto un corpo caldo con un corpo freddo, il calorico fluisce dal corpo caldo a quello freddo.

Benjamin Thompson, Conte Rumford, supervisionava la fabbricazione di cannoni.

Il corpo di un cannone veniva fabbricato a partire da un cilindro di metallo, in cui veniva prodotto meccanicamente un foro del diametro desiderato. L'attrito meccanico generava moltissimo calore.

La teoria del calorico sosteneva che la polvere di metallo poteva "contenere" meno calorico del blocco di metallo originale. Durante la lavorazione del cannone, il calorico non poteva più essere immagazzinato nella Polvere metallica, e veniva disperso sotto forma di calore.

Thompson immerse un blocco metallico in acqua, e dimostrò che era necessaria la stessa quantità di calore per innalzare di un grado la polvere metallica generata, oppure un blocco di metallo dello stesso peso. La polvere metallica non era meno capace di immagazzinare calore rispetto al pezzo di metallo non polverizzato. Il calore prodotto proveniva semplicemente dal lavoro meccanico compiuto per forare il cannone.

Il calore quindi non era una sostanza. Le idee sbagliate però sono dure a morire, e la teoria del calorico sopravvisse ancora un poco.

Ancora oggi, nel linguaggio comune, sono presenti dei "resti linguistici" di quella teoria. Parliamo infatti di calore che "entra" ed "esce" dai corpi, o dalle finestre aperte. L'uso della *caloria (cal)* come unità di energia è una vestigia di quel passato.

3.0.5 James Prescott Joule e la conservazione dell'energia

Il riconoscimento e l'enunciazione del principio universale della conservazione dell'energia è dovuto principalmente a James Prescott Joules (1818-1889), birraio e appassionato di scienza.

In suo onore oggi usiamo il joule come unità di misura del lavoro e dell'energia del Sistema Internazionale (SI). Tuttavia in alcuni campi sono ancora utilizzate le calorie, ad esempio nelle etichette dei cibi, (in realtà Kilocalorie).

Joule provò l'equivalenza tra calore e lavoro meccanico: il lavoro eseguito per far ruotare le pale, causa un aumento della temperatura dell'acqua Joules mostrò anche che la quantità di calore prodotto era proporzionale alla quantità di lavoro.

"I fenomeni della natura, siano essi meccanici, chimici o vitali (biologici), consistono quasi interamente nella continua conversione di attrazione nello spazio (energia potenziale), forza vitale (energia cinetica) e calore, uno nell'altro.

Questo è il modo in cui l'ordine viene mantenuto nell'universo: nulla è sbilanciato, nulla viene perso, ma l'intero meccanismo, per quanto complicato, lavora incessantemente e armoniosamente. E sebbene, come nella terribile profezia di Ezechiele, "ruote potranno incastrarsi in altre ruote", e ogni cosa possa apparire complicata e implicato nell'apparente confusione e nella varietà quasi senza fine di cause, effetti, conversioni e arrangiamenti, tuttavia la più perfetta regolarità viene preservata. Il tutto governato dal volere superiore di Dio".

3.0.6 Robert von Mayer

Julius Robert von Mayer fu il primo a enunciare esplicitamente il principio di conservazione dell'energia.

Le varie forme di energia (Chimica, Elettrica, Magnetica, Meccanica, Calore) si possono trasformare una nell'altra, ma l'energia totale rimane costante.

3.1 Il Calore

3.1.1 Capacità termica

Capacità termica Rapporto tra il calore fornito al sistema e la variazione di temperatura del sistema stesso.

$$C_x = \left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT}\right)_x$$

Calore specifico Rapporto tra la capacità termica del sistema e la sua massa.

$$c_x = \frac{1}{m}\left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT}\right)_x$$

Calore specifico a volume costante Rapporto tra la derivata parziale dell'energia interna e la temperatura a volume costante.

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

$$c_v = c_v\left(T, P\right)$$

Dimostrazione

Poiché u è proprietà del sistema, per la legge di Duhem la si può riferire a due variabili a scelta, per esempio temperatura e volume:

$$u = u\left(T, v\right)$$

Per il primo principio si può scrivere che:

$$du = \delta q^{\leftarrow} - \delta l^{\rightarrow} = \delta q^{\leftarrow} - Pdv$$

$$\delta q^{\leftarrow} = du + Pdv$$

$$\delta q^{\leftarrow} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + Pdv$$

$dv = 0$ poiché il volume è costante, ipotizzando una trasformazione isocora, quindi:

$$\delta q^{\leftarrow} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$

Dunque:

$$\left(\frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_v = c_v$$

3.1.2 Calore specifico a pressione costante

Calore specifico a pressione costante Per definire il calore specifico a pressione costante bisogna introdurre prima una nuova funzione di stato, ovvero *l'entalpia*, poiché la sua variazione può essere ricondotta proprio al calore specifico a pressione costante.

Entalpia L'entalpia è una funzione di stato che esprime la quantità di energia che un sistema termodinamico può scambiare con l'ambiente. L'entalpia è definita dalla somma dell'energia interna e del prodotto tra volume e pressione di un sistema.

$$h = u + Pv$$

Calore specifico a pressione costante

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

$$c_p = c_p\left(T, P\right)$$

Per le trasformazioni che avvengono a pressione costante la variazione di entalpia è uguale al calore scambiato dal sistema con l'ambiente esterno.

Dimostrazione

$$h = u + Pv$$

$$dh = du + Pdv + vdP, \text{ dove } du + Pdv = \delta q^{\leftarrow}$$

Poiché l'entalpia è una funzione di stato, per la legge di Duhem la si può riferire a due variabili a scelta, per esempio temperatura e pressione:

$$h = h\left(T, P\right)$$

Possiamo scrivere:

$$\delta q^{\leftarrow} = dh - vdP$$

$$\delta q^{\leftarrow} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP - vdP$$

$dP = 0$ poiché la pressione è costante considerando una trasformazione isobara

Quindi:

$$\delta q^{\leftarrow} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT$$

E infine:

$$\left(\frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_P$$

4 Espansione libera di un gas ideale

Si considerino due recipienti isolati termostaticamente, cioè indipendenti dagli scambi di calore con l'esterno, separati da una valvola, uno contenente un gas ideale e l'altro vuoto. All'apertura della valvola di intercettazione, mettendo così in comunicazione i due recipienti, si osserva che, dopo un periodo di instabilità, la temperatura ritorna al suo valore iniziale, mentre la pressione si stabilizza su un valore tale per cui $P_f < P_i$.

Essendo il sistema isolato, il primo principio della termodinamica consente di affermare che l'energia interna del sistema rimane costante.

Poiché il sistema è costituito da un gas ideale che subisce una trasformazione durante la quale varia sia la pressione, sia il volume mentre può essere perciò funzione della sola temperatura (rimasta costante) e non della pressione (che è variata). In definitiva, per un gas ideale, si ha:

$$u = u\left(T\right)$$

Dunque possiamo ricondurre anche il calore specifico a pressione e a volume costante alla sola temperatura per il gas ideale:

$$c_v = c_v\left(T\right)$$

$$c_P = c_P\left(T\right)$$

infatti:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{du}{dT}\right)$$

Quindi il calore specifico a volume costante cessa di essere riferito solo alle trasformazioni isocore ma permette di risalire all'energia interna del sistema.

Ma anche per l'entalpia si ha:

$$h = h\left(T\right)$$

poiché:

$$h = u + Pv, \text{ ma } u = u\left(T\right) \text{ e } Pv = R^*T$$

quindi si ha anche che:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{dh}{dT}\right)$$

Inolte se $c_v = cost.$ abbiamo che $\Delta u = c_v \Delta T$; se $c_p = cost.$ abbiamo che $\Delta h = c_p \Delta T$.

4.1 Relazione di Mayer

La relazione di Mayer afferma che il calore specifico a pressione costante è pari alla somma del calore specifico a volume costante e la costante caratteristica del gas considerato:

$$c_p = c_v + R^*$$

Dimostrazione

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{dh}{dT}\right) = \left(\frac{du + d(Pv)}{dT}\right) = \left(\frac{du + d(R^*T)}{dT}\right) = \left(\frac{du}{dT}\right) + R^* = c_v + R^*$$

4.1.1 Gas ideali con c_P e c_v costanti

Table 2: *Gas ideali con c_v e c_P costanti*

	c_v	c_P
Gas Monoatomico	$\frac{3}{2}R^*$	$\frac{5}{2}R^*$
Gas Biatomico o Poliatomico lineare	$\frac{5}{2}R^*$	$\frac{7}{2}R^*$
Gas Poliatomico non lineare	$\frac{6}{2}R^*$	$\frac{8}{2}R^*$

4.1.2 Il calore specifico del liquido incomprimibile ideale

$$c_v = c_P = c\left(T\right)$$

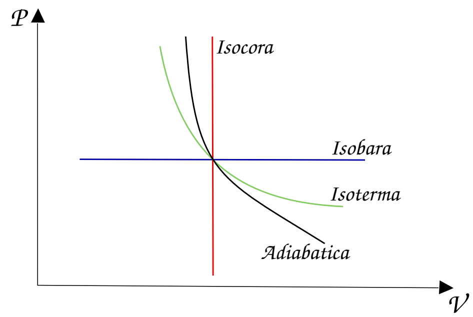
4.2 Trasformazioni politropiche

4.2.1 Indice n della politropica

Politropica Una trasformazione politropica è una trasformazione di un gas ideale per la quale si può supporre che:

$$c_x = \frac{\delta q}{\delta T} = costante$$

Figure 4: *Rappresentazione nel piano $P - V$ dei vari tipi di trasformazioni termodinamiche*



In Figura 4 sono rappresentati i tipi di trasformazioni termodinamiche nel piano $P-V$. Da notare che isoterma e adiabatica sono entrambe rami di iperbole ma l'isoterma ha una chiusura maggiore di quella dell'adiabatica.

Si consideri una generica trasformazione quasi-statica per un sistema costituito da un gas perfetto:

$$\delta q^{\leftarrow} = c_x dT \tag{1}$$

ricordiamo che:

$$\delta q^{\leftarrow} = du + Pdv$$

ma anche:

$$\delta q^{\leftarrow} = dh - vdP$$

dunque, ricordando che $du = c_v dT$ e che $dh = c_P dT$, abbiamo:

$$\delta q^{\leftarrow} = c_v dT + Pdv \tag{2}$$

$$\delta q^{\leftarrow} = c_P dT - v dP \tag{3}$$

Uguagliando la (1) alla (3) e la (1) alla (2) otteniamo:

$$(c_x - c_P)\, dT = -v dP$$
$$(c_x - c_v)\, dT = P dv$$

Il rapporto:

$$n = \frac{c_x - c_P}{c_x - c_v} = -\frac{v dP}{P dv}$$

viene definito n, indice della politropica.
Separando le variabili e integrando:

$$n \frac{dv}{v} = -\frac{dP}{P}$$
$$n \ln v = -\ln P$$
$$P v^n = cost$$

Un modo analogo di esprimere l'equazione precedente è:

$$P v v^{n-1} = cost$$

e ancora:

$$T v^{n-1} = cost'$$
$$T \left(\frac{R^* T}{P}\right)^{n-1} = cost'$$

infine anche:

$$\frac{T^n}{P^{n-1}} = cost''$$
$$P T^{\frac{n}{1-n}} = cost''$$

Table 3: *Trasformazioni: valori di c_x, c_P e c_v*

Tipo di Trasformazione	c_x	$n = \frac{c_x - c_P}{c_x - c_v}$
Isoterma $T = costante$	$\pm\infty$	1
Isocora $v = costante$	c_v	$\pm\infty$
Isobara $P = costante$	c_P	0
Adiabatica $q = costante$	0	$\gamma = \frac{c_P}{c_v}$

Osserviamo che $\frac{c_P}{c_v} = \gamma > 1$ per la legge di Mayer.
Per $n \neq 1$ l'integrale del lavoro diventa:

$$l^{\rightarrow} = \int_1^2 Pdv$$

$$l^{\rightarrow} = \frac{P_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right]$$

$$l^{\rightarrow} = \frac{P_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

Dimostrazione

Per una politropica generica si ha che $Pv^n = cost$ e quindi si può scrivere anche:

$$Pv^n = P_1 v_1^n$$

$$l = \int_{v_1}^{v_2} Pdv$$

$$P = P_1 v_1^n v^{-n}$$

$$l = \int_{v_1}^{v_2} P_1 v_1^n \frac{dv}{v^n} = P_1 v_1^n \cdot \left[\frac{v^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^2 = \frac{P_1 v_1^n}{1-n}\left[v_2^{1-n} - v_1^{1-n}\right] = \frac{P_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right] = \frac{P_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

Per $n = 1$ (trasformazione isoterma) l'integrale del lavoro diventa:

$$l = P_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Dimostrazione

Per una trasformazione isoterma si ha che $Pv = cost$ e quindi si può scrivere anche:

$$Pv = P_1 v_1$$

$$l = \int_{v_1}^{v_2} Pdv$$

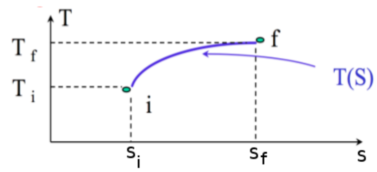
$$P = P_1 \frac{v_1}{v}$$

$$l = \int_{v_1}^{v_2} P_1 v_1 \frac{dv}{v} = P_1 v_1 \left[\ln v\right]_1^2 = P_1 v_1 \left[\ln v_2 - \ln v_1\right] = P_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

4.3 Diagramma $T - S$

Gli stati termodinamici e le trasformazioni termodinamiche possono essere rappresentati in un diagramma $T - S$:

Figure 5: *Diagramma $T - S$*



In un diagramma T-S, l'area sottesa dalla curva rappresentativa di una trasformazione reversibile è uguale al calore scambiato dal sistema nella trasformazione:

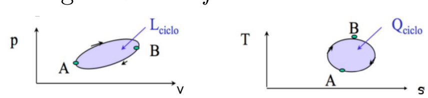
$$\int_i^f T\left(S\right) dS = \int_i^f \delta Q = Q$$

In un diagramma $T - S$:

- Le curve isoterme sono linee orizzontali
- Le curve isoentropiche sono linee verticali
- Le isobare del gas ideale sono linee inclinate a pendenza crescente
- Le isocore hanno pendenza ancor maggiore rispetto alle isobare.

Per una trasformazione ciclica reversibile, le aree incluse nelle curve chiuse rappresentative del ciclo nei diagrammi $p - V$ e $T - S$ sono uguali, essendo, per il 1° Principio: $L = Q$.

Figure 6: *Trasformazione ciclica*



$$Tds = c_x dT$$

Separando le variabili e integrando si ottiene l'equazione della politropica nel piano $T - s$:

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds}{c_x}$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = \int_{S_0}^{S} \frac{ds}{c_x}$$

$$\ln\frac{T}{T_0}=\frac{s-s_0}{c_x}$$

$$T=T_0\cdot e^{\frac{s-s_0}{c_x}}\text{, al variare di } c_x$$

Nel piano $T-s$ tutte le politropiche sono rappresentate da esponenziali. In particolare le isoterme avendo $c_x=\infty$ sono rette orizzontali e così, per il gas ideale, anche le isentalpiche dato che $h=h\left(T\right)$. Le isentropiche invece sono rette verticali visto che $c_x=0$. Le isocore essendo $c_v=c_P$ sono più ripide delle isobare.

5 Entropia

In un processo reversibile si ha:

$$du=Tds-Pdv$$

ovvero:

$$ds=\frac{du}{T}+\frac{P}{T}dv$$

5.1 Gas perfetti

$$du=c_vdT$$

$$PV=R^*T$$

$$ds=c_v\frac{dT}{T}+R^*\frac{dv}{v}$$

oppure:

$$ds=c_P\frac{dT}{T}-R^*\frac{dP}{P}$$

$$ds=c_P\frac{dv}{v}+c_v\frac{dP}{P}$$

Infatti, in un processo reversibile si ha:

$$dh=Tds+vdP$$

ovvero:

$$ds=\frac{dh}{T}-\frac{v}{T}dP$$

$$dh=c_PdT$$

per i gas perfetti:

$$PV=R^*T$$

$$ds = c_P \tfrac{dT}{T} - R^* \tfrac{dP}{P}$$

$$ds = c_v \tfrac{dT}{T} + R^* \tfrac{dv}{v}$$

$$PV = R^* T$$

$$Pdv + vdP = R^* dT$$

$$ds = c_v \left(\tfrac{P}{R^* T} dv + \tfrac{v}{R^* T} dP \right) + R^* \tfrac{dv}{v}$$

$$ds = c_v \tfrac{dv}{v} + c_v \tfrac{dP}{P} + R^* \tfrac{dv}{v}$$

$$ds = c_p \tfrac{dv}{v} + c_v \tfrac{dP}{P}$$

Integrando:

$$s = s_0 + c_v \ln \tfrac{T}{T_0} + R^* \ln \tfrac{v}{v_0}$$

$$s = s_0 + c_P \ln \tfrac{T}{T_0} - R^* \ln \tfrac{P}{P_0}$$

$$s = s_0 + c_P \ln \tfrac{v}{v_0} + c_v \ln \tfrac{P}{P_0}$$

La variazione di entropia (funzione di stato) è indipendente dal cammino che porta il sistema dallo stato iniziale allo stato finale.

Entrando più nel dettaglio abbiamo che:

per una trasformazione reversibile:

- Una prima possibilità è:

$$du = \delta q - Pdv$$

poiché $\delta q = Tds$ si può scrivere:

$$du = Tds - Pdv$$

ricavando ds:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} dv = \frac{c_v dT}{T} + \frac{R^*}{v} dv \tag{4}$$

dove si è posto $\frac{c_v dT}{T} = du$ e $\frac{R^*}{v} dv$ è ottenuta da $Pv = R^* T$.
Integrando la (4) si ottiene:

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{T}{T_0} + R^* \ln \frac{v}{v_0}$$

- Una seconda possibilità, utilizzando la definizione di entalpia è:

$$dh = \delta q - vdP$$

poiché $\delta q = Tds$ si può scrivere:

$$dh = Tds - vdP$$

ricavando ds:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T}dP = \frac{c_p dT}{T} - \frac{R^* dP}{P} \tag{5}$$

dove si è posto $dh = c_p dT$ e $\frac{v}{T} = \frac{R^*}{P}$.
Integrando la (5) si ottiene:

$$s - s_0 = c_v \ln\frac{T}{T_0} - R^* \ln\frac{P}{P_0}$$

- Una terza possibilità è:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R^* \frac{dv}{v} \tag{6}$$

ricordando che:

$$PV = R^* T$$

si può scrivere:

$$Pdv + vdP = R^* dT \tag{7}$$

sostituendo la (7) nella (6) si ottiene:

$$ds = c_v \left(\frac{P}{R^* T} dv + \frac{v}{R^* T} dP \right) + R^* \frac{dv}{v}$$

$$ds = c_v \frac{dv}{v} + c_v \frac{dP}{P} + R^* \frac{dv}{v}$$

ricordando che $c_P = c_v + R^*$:

$$ds = c_P \frac{dv}{v} + c_v \frac{dP}{P}$$

integrando:

$$s - s_0 = c_P \ln\frac{v}{v_0} + c_v \ln\frac{P}{P_0}$$

5.2 Liquido incomprimibile perfetto

$$du = cdT$$

$$v = cost$$

$$ds = c \cdot \frac{dT}{T_0}$$

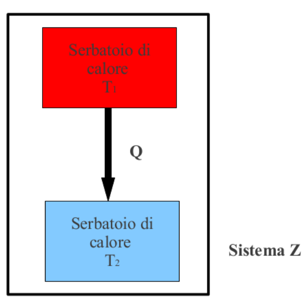
$$s = s_0 + c \cdot \ln \frac{T}{T_0}$$

Table 4: *Tabella riassuntiva trasformazioni politropiche*

	$l = \int pdv$	$q = \int dq$	Δu	Δh	Δs
$P = cost$	$p\Delta v$	$c_P \Delta T$	$c_v \Delta T$	$c_p \Delta T$	$c_P \ln \frac{T_2}{T_1}$
$V = cost$	$-$	$c_v \Delta T$	$c_v \Delta T$	$c_P \Delta T$	$c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$
$T = cost$	$R^* T \ln \frac{v_2}{v_1} - R^* T \ln \frac{P_2}{P_1}$	$R^* T \ln \frac{v_2}{v_1} - R^* T \ln \frac{P_2}{P_1}$	$-$	$-$	$R^* T \ln \frac{v_2}{v_1};\ R^* T \ln \frac{P_2}{P_1}$
$dQ = 0$	$-c_v \Delta T$	$-$	$c_v \Delta T$	$c_P \Delta T$	$-$
$c_x = cost$	$(c_x - c_v)\,\Delta T$	$c_x \Delta T$	$c_v \Delta T$	$c_P \Delta T$	$c_P \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$ $c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{v_2}{v_1}$

5.3 Il bilancio entropico

Figure 7: *Trasferimento di calore: bilancio entropico*



Serbatoio sistema termidinamico che scambia calore reversibilmente senza modificare la sua temperatura ($T = cost$).

Bilancio di energia e di entropia per il sistema Z

$$\Delta S_Z = S_q + S_{irr}$$

poiché si tratta di un sistema isolato, si ha $\Delta S_Z = 0$, quindi:

$$\Delta S_Z = S_{irr}$$

Ma la variazione di entropia del sistema Z si può esprimere anche come somma della variazione di entropia dei sottosistemi:

$$\Delta S_Z = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Inoltre, la variazione di energia interna del sistema Z è nulla:

$$\Delta U_Z = 0$$

quindi si ha che $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ e $Q_1^{\rightarrow} + Q_2^{\rightarrow} = 0$.
Si può scrivere per i singoli serbatoi:

$$\Delta S_1 = S_{Q_1} + S_{irr_1}$$

$$\Delta S_2 = S_{Q_2} + S_{irr_2}$$

ma poiché lo scambio di calore avviene reversibilmente:

$$\Delta S_1 = S_{Q_1} = \int \frac{\delta Q_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int \delta Q_1 = \frac{Q^{\leftarrow}}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = S_{Q_2} = \int \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int \delta Q_2 = \frac{Q_2^{\leftarrow}}{T_2}$$

e si è potuta portare fuori dal simbolo di integrale la temperatura poiché $T_1 = cost$ e $T_2 = cost$.
Si ricava quindi che:

$$S_{irr} = \frac{Q_1^{\leftarrow}}{T_1} + \frac{Q_2^{\leftarrow}}{T_2}$$

$$S_{irr} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

Quindi per il sistema Z:

$$\Delta S_Z = \frac{Q_1^{\leftarrow}}{T_1} + \frac{Q_2^{\leftarrow}}{T_2} + S_{irr}$$

Poiché si ha che $Q_1^{\leftarrow} = -Q$ e $Q_2^{\leftarrow} = +Q$, si può scrivere:

$$-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = S_{irr}$$

ma $S_{irr} \geq 0$, quindi:

$$-\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} \geq 0$$

si può affermare che $T_1 > T_2$, altrimenti non si rispetterebbe $S_{irr} \geq 0$.

Dato che due corpi alla medesima temperatura non scambiano tra loro calore se ΔT è infinitesimo allora $S_{irr} = 0$. Quindi è la relazione stessa tra i due corpi a generare in qualche modo irreversibilità.

5.3.1 Il bilancio entropico: secondo Lord Kelvin

È impossibile realizzare una macchina termica che funzionando ciclicamente possa trasformare in lavoro il calore assorbito da una sorgente a temperatura uniforme.

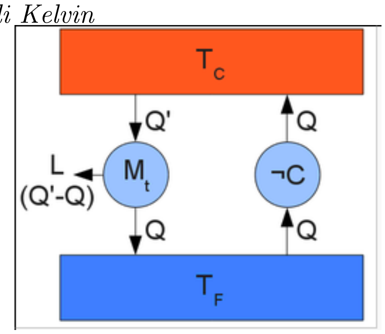
Oppure: è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasformare completamente il calore assorbito in lavoro.

5.3.2 Il bilancio entropico: secondo Clausius

È impossibile il passaggio spontaneo (senza lavoro) di calore da un corpo freddo ad uno più caldo per differenza finita di temperatura.

Dimostrazione dell'equivalenza dei due enunciati L'equivalenza dell'enunciato di Kelvin e di quello di Clausius si può mostrare tramite il seguente ragionamento per assurdo.

Figure 8: *Schematizzazione di una macchina termica basata su una macchina che viola l'enunciato di Kelvin*



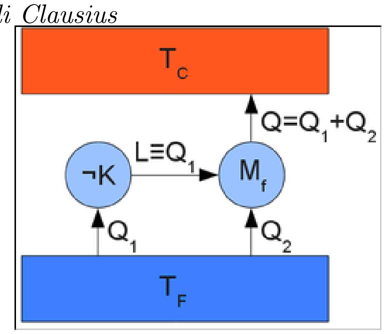
Kelvin implica Clausius Facendo riferimento alla Figura 8, si supponga per assurdo che l'enunciato di Clausius sia falso, ossia che esista una macchina frigorifera ciclica in grado di trasferire calore da una sorgente fredda ad una calda, senza apporto di lavoro esterno.

Sia Q la quantità trasferita per ogni ciclo della macchina dalla sorgente fredda a quella calda.

Si può allora far lavorare una macchina termica tra le due sorgenti, in modo tale che essa sottragga ad ogni ciclo una quantità di calore Q' dalla sorgente calda, trasferendo a quella fredda una quantità Q (uguale a quella precedentemente sottratta) e convertendo la differenza $Q' - Q$ in lavoro.

La sorgente fredda allora non subisce alcun trasferimento netto di calore e pertanto il sistema di macchine termiche sta estraendo calore, globalmente, dalla sola sorgente calda, producendo esclusivamente lavoro, in violazione della formulazione di Kelvin-Planck del secondo principio.

Figure 9: *Schematizzazione di una macchina termica basata su una macchina che viola l'enunciato di Clausius*



Clausius implica Kelvin Ora, facendo riferimento alla Figura 9, si supponga ora di poter convertire integralmente il calore in lavoro, estratto per mezzo di una macchina ciclica da una sola sorgente S a temperatura costante.

Sia L tale lavoro estratto in un ciclo.

Allora si può prendere una seconda sorgente S' a temperatura più alta e far funzionare una macchina frigorifera tra le due sorgenti, che assorba ad ogni ciclo il lavoro L prodotto dall'altra macchina.

Si ha così un trasferimento netto di calore dalla sorgente fredda S alla sorgente calda S', in violazione dell'enunciato di Clausius.

Formulazione matematica

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} > \frac{dQ_{irr}}{T}$$

ovvero:

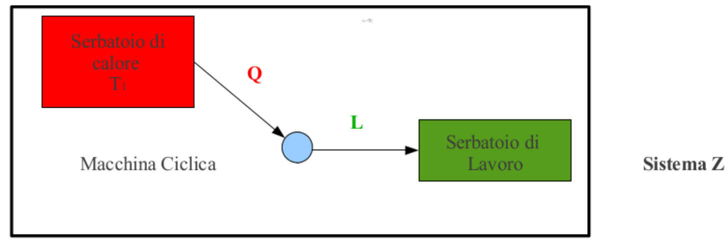
$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \geq \frac{dQ}{T}$$

Se il sistema è isolato termicamente e quindi non scambia calore, cioè $dQ = 0$, si ha:

$$dS \geq 0$$

5.3.3 Dimostrazione ulteriore dell'affermazione di Lord Kelvin

Figure 10: *Macchina ciclica*



$$\Delta S_Z = S_{irr} + S_Q$$

poiché il sistema è isolato $S_Q = 0$, quindi:

$$\Delta S_Z = S_{irr}$$

Poiché, come mostra la Figura 10, il sistema è composto da una macchina ciclica e due serbatoi, si può esprimere la variazione di entropia del sistema Z come:

$$\Delta S_Z = \Delta S_{SC} + \Delta S_M + \Delta S_{SL}$$

Poiché la macchina è ciclica e l'entropia è funzione di stato $\Delta S_M = 0$; inolre il serbatoio di lavoro ha $Q = 0$, ovvero è una trasformazione reversibile adiabatica, e quindi anche $\Delta S_{SL} = 0$. Quindi si ottiene che:

$$\Delta S_Z = \Delta S_{SC}$$

Dato che la temperatura è costante ($T = cost$) la variazione di entropia del serbatoio di calore è pari a :

$$\Delta S_{SC} = \frac{Q^{\leftarrow}}{T} = S_{irr} \geq 0$$

Quindi si ha che $\frac{Q}{T} \geq 0$ e quindi:

$$Q \geq 0$$

La temperatura è assoluta e quindi intrinsecamente positiva. Il calore Q è entrante altrimenti l'energia sarebbe < 0. Ciò significa che la situazione descritta in figura viola il secondo principio della termodinamica e che quindi tale macchina sia incapace di produrre lavoro.

5.3.4 Interpretazione fisica del concetto di Entropia

E' evidente ai nostri sensi che l'energia di un sistema termodinamico isolato può essere espressa come somma di due termini: l'energia disponibile ad essere convertita in lavoro (E_{disp}) e energia che non è possibile convertire in lavoro ($E_{nondisp}$):

$$E = E_{disp} + E_{nondisp}$$

Definiamo l'entropia come proprietà di un sistema termodinamico la cui variazione dS a seguito di una trasformazione sia proporzionale alla differenza fra la variazione di energia totale dE e la variazione dell'energia disponibile per produrre lavoro dE_{disp}:

$$dS = C\,(dE - dE_{disp})$$

Per un sistema isolato che evolva verso una diversa situazione di equilibrio a seguito della rimozione di vincoli il principio di conservazione dell'energia consente di affermare che $dE = 0$ mentre il principio di degradazione dell'energia consente di affermare che $dE_{disp} < 0$ e quindi che $dS_{is} >= 0$.

Secondo questa interpretazione l'entropia risulta essere una misura dell'energia non disponibile.

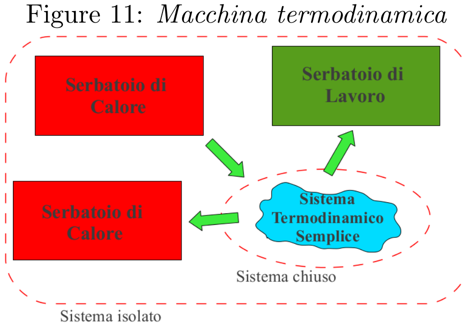
6 Macchine termodinamiche

Macchina termodinamica Sistema termodinamico composto ed isolato che, nella sua forma più semplice, è realizzato da:

- due serbatoi di calore;
- un serbatoio di lavoro;
- una macchina ciclica

che è in grado di produrre od assorbire con continuità lavoro interagendo con il serbatoio di lavoro ed i serbatoi di calore (vedi Figura 11).

Figure 11: *Macchina termodinamica*



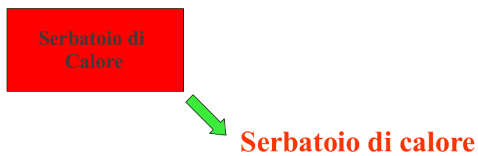
6.1 Serbatoio di Lavoro

Figure 12: *Serbatoio di Lavoro*

Serbatoio di lavoro sistema termodinamico che scambia solo lavoro con l'esterno senza alterare il suo stato termodinamico; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche (internamente reversibili).

6.2 Serbatoio di Calore

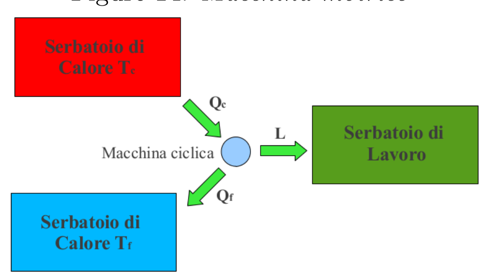
Figure 13: *Serbatoio di Calore*



Serbatoio di Calore Sistema termodinamico che scambia solo calore con l'esterno senza alterare il suo stato termodinamico; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche (internamente reversibili).

6.3 Macchine Motrici

Figure 14: *Macchina motrice*



Dalle equazioni di bilancio:

$$\begin{cases} \Delta U_Z = 0 \\ \Delta S_Z = S_{irr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{SL} + \Delta U_F = 0 \\ \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{SL} + \Delta S_F = S_{irr} \end{cases}$$

Ma essendo:

- per il serbatoio di calore caldo

$$\begin{cases} \Delta U_C = Q_C^{\leftarrow} \\ \Delta S_C = \frac{Q_C^{\leftarrow}}{T_C} \end{cases}$$

- per la macchina ciclica

$$\begin{cases} \Delta U_M = 0 \\ \Delta S_M = 0 \end{cases}$$

- per il sebatoio di lavoro

$$\begin{cases} \Delta U_{SL} = -L_{SL}^{\rightarrow} \\ \Delta S_{SL} = 0 \end{cases}$$

- per il serbatoio di calore freddo

$$\begin{cases} \Delta U_F = Q_F^{\leftarrow} \\ \Delta S_F = \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} \end{cases}$$

ne deriva che:
$\begin{cases} Q_C^{\leftarrow} + Q_F^{\leftarrow} - L_{SL}^{\rightarrow} = 0 \\ \frac{Q_C^{\leftarrow}}{T_C} + \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$, quindi $\begin{cases} -Q_C + Q_F + L_{SL} = 0 \\ -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$
e infine:

$$\begin{cases} Q_F = Q_C - L \\ L = Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) - T_F\, S_{irr} \end{cases}$$

Essendo $T_C > T_F$ e $L > 0$, il lavoro è massimo quando il processo è reversibile.

Rendimento Rapporto tra il risultato energetico che la macchina fornisce e la spesa energetica per raggiungere l'obiettivo.

In generale si ha:

$$\eta = \frac{L}{Q_C}$$

sostituendo:

$$\eta = \tfrac{L}{Q_C} = 1 - \tfrac{T_F}{T_C} - \tfrac{T_F}{Q_C} S_{irr}$$

poiché il lavoro è massimo se il sistema è reversibile, si ottiene che:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

ciò che si è ottenuto è l'espressione del rendimento termodinamico di una macchina motrice che opera reversibilmente con serbatoi di calore a temperatura costante considerati di massa infinita.

6.3.1 Esempio: macchina motrice con serbatoio caldo a massa finita

Si consideri una macchina motrice con serbatoio caldo di massa finita contenente un liquido ideale. Dalle equazioni di bilancio si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta U_Z = 0 \\ \Delta S_Z = S_{irr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{SL} + \Delta U_F = 0 \\ \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{SL} + \Delta S_F = S_{irr} \end{cases}$$

Poiché il serbatoio di calore caldo a massa finita ha $T_1 > T_2$ per esso si ha:

$$\begin{cases} \Delta U_C = mc\,(T_2 - T_1) \\ \Delta S_C = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{cases}$$

per la macchina ciclica:

$$\begin{cases} \Delta U_M = 0 \\ \Delta S_M = 0 \end{cases}$$

per il serbatoio di lavoro:

$$\begin{cases} \Delta U_{SL} = -L^{\rightarrow}_{SL} \\ \Delta S_{SL} = 0 \end{cases}$$

per il serbatoio di calore freddo:

$$\begin{cases} \Delta U_F = Q_F^{\leftarrow} \\ \Delta S_F = \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} \end{cases}$$

ne deriva che:

$$\begin{cases} mc\,(T_2 - T_1) + Q_F^{\leftarrow} - L_{SL}^{\rightarrow} = 0 \\ mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mc\,(T_2 - T_1) + Q_F + L = 0 \\ mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

Poiché il sistema considerato è reversibile, $S_{irr} = 0$, quindi:

- $Q_C^{\leftarrow} = mc\,(T_2 - T_1)$ negativo uscente
- $Q_C = mc\,(T_1 - T_2)$ valore assoluto
- $Q_F^{\leftarrow} = -mcT_F \ln \frac{T_2}{T_1} = mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2}$ positivo
- $Q_F = mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2}$ in valore assoluto
- $L^{\rightarrow} = Q_C^{\leftarrow} + Q_F^{\leftarrow} = mc\,(T_2 - T_1) + mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2}$ negativo entrante
- $L = Q_C - Q_F = mc\,(T_1 - T_2) - mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2}$ in valore assoluto

Quindi si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} Q_C = mc\,(T_1 - T_2) \\ Q_F = mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2} \\ L = mc\,(T_1 - T_2) - mcT_F \ln \frac{T_1}{T_2} \end{cases}$$

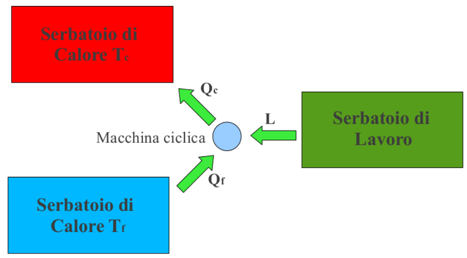
Quindi, poiché il rendimento è pari a $\eta = \frac{L}{Q_C}$ (rapporto tra il risultato energetico che la macchina fornisce e la spesa energetica per raggiungere l'obiettivo), si ottiene un rendimento reversibile pari a:

$$\eta_{rev} = \frac{L}{Q_C} = \frac{(T_1 - T_2) - T_F \ln \frac{T_1}{T_2}}{T_1 - T_2}$$

Tale espressione è il rendimento termodinamico di una macchina motrice che opera reversibilmente con il serbatoio superiore a massa finita.

6.4 Macchine Operatrici

Figure 15: *Macchina Operatrice*



Dalle equazioni di bilancio:

$$\begin{cases} \Delta U_Z = 0 \\ \Delta S_Z = S_{irr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{SL} + \Delta U_F = 0 \\ \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{SL} + \Delta S_F = 0 \end{cases}$$

Ma essendo:

- per il serbatoio di calore caldo

$$\begin{cases} \Delta U_C = Q_C^{\leftarrow} \\ \Delta S_C = \frac{Q_C^{\leftarrow}}{T_C} \end{cases}$$

- per la macchina ciclica

$$\begin{cases} \Delta U_M = 0 \\ \Delta S_M = 0 \end{cases}$$

- per il sebatoio di lavoro

$$\begin{cases} \Delta U_{SL} = -L_{SL}^{\rightarrow} \\ \Delta S_{SL} = 0 \end{cases}$$

- per il serbatoio di calore freddo

$$\begin{cases} \Delta U_F = Q_F^{\leftarrow} \\ \Delta S_F = \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} \end{cases}$$

ne deriva che:

$\begin{cases} Q_C^{\leftarrow} + Q_F^{\leftarrow} - L_{SL}^{\rightarrow} = 0 \\ \frac{Q_C^{\leftarrow}}{T_C} + \frac{Q_F^{\leftarrow}}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$, e quindi considerando i flussi di calore e lavoro si ottiene:

$$\begin{cases} Q_C - Q_F - L_{SL} = 0 \\ \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

ricavando che $Q_F = Q_C - L$ e sostituendo:

$$L = Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) + T_F\, S_{irr}$$

poiché il lavoro massimo si ottiene se il processo è reversibile (quindi $S_{irr} = 0$), e $T_C > T_F$ e $L > 0$.

Efficienza o C.O.P. Rapporto tra il risultato energetico che la macchina fornisce e la spesa energetica per raggiungere l'obiettivo.

Per una macchina frigorifera si ha:

$$\epsilon_f = \frac{Q_F}{L}$$

$$\epsilon_f = \frac{Q_F}{L} = \frac{T_F}{T_C - T_F + \frac{T_C\, T_F\, S_{irr}}{Q_F}}$$

se la macchina frigorifera opera reversibilmente con serbatoi di calore a temperatura costante si ottiene:

$$\epsilon_{f_{rev}} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

Per una pompa di calore si ha:

$$\epsilon_p = \frac{Q_C}{L}$$

$$\epsilon_{pdc} = \frac{Q_C}{L} = \frac{T_C}{T_C - T_F + \frac{T_C\, T_F\, S_{irr}}{Q_C}}$$

se la pompa di calore opera reversibilmente con serbatoi di calore a temperatura costante si ottiene:

$$\epsilon_{pdc_{rev}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Le due espressioni rappresentano l'efficienza termodinamica di una macchina operatrice che opera reversibilmente con serbatoi di calore a temperatura costante e considerati di massa infinita.

Il legame tra l'efficienza per una macchina frigorifera e quella per una pompa di calore è:

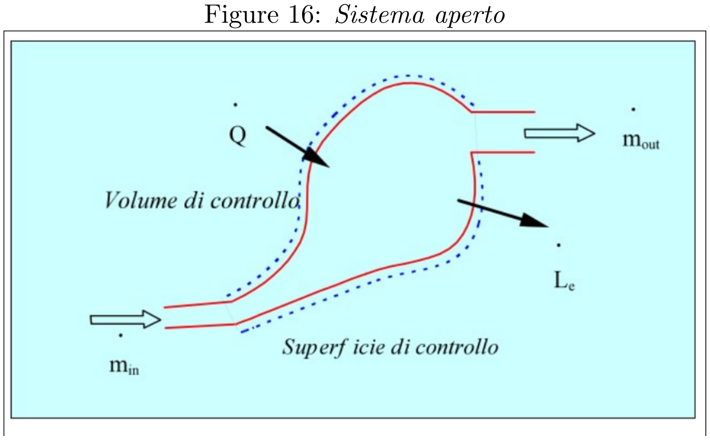
$$\epsilon_{pdc} = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_F + L}{L} = \epsilon_f + 1$$

Part II
Sistemi Aperti

7 Sistema aperto

Sistema aperto È delimitato da una superficie di controllo chiamata volume di controllo (sezione delimitata di spazio): ttraverso di essa viene scambiato calore e lavoro; attraverso ben delimitate sezioni invece si ipotizzerà che può fluire anche massa (solo attraverso le sezioni di ingresso e di uscita, lungo tutto il resto invece calore e/o lavoro).

Figure 16: *Sistema aperto*



In realtà si parla di potenza termica e di potenza lavoro riferite all'unità di tempo (sono dimensionalmente potenze); si ha infatti massa in movimento e quindi si fa riferimento alla portata massica riferita all'unità di tempo.

Per i sistemi aperti si fa riferimento alle equazioni di bilancio di massa, a differenze dei sistemi chiusi, per i quali non si considera perché mantengono la massa costante.

8 Equazioni di bilancio

8.1 Bilancio di Massa

La massa che si accumula all'interno del volume di controllo è pari a:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow}$$

non è altro che la differenza tra "ciò che entra" nel volume di controllo e "ciò che esce".

8.1.1 Equazione di continuità

$$\dot{m} = \rho w \Omega$$

dove:

- ρ = massa volumica = $\frac{1}{v}$
- w = velocità della sezione
- Ω = area della sezione

8.2 Bilancio di Energia 1/2

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{E}_i^{\leftarrow}$$

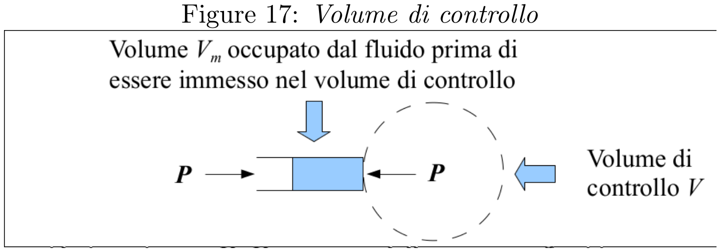
$E^{\leftarrow}$:

- energia associata al trasporto di massa
- calore scambiato
- lavoro scambiato
- energia dovuta ad una sorgente

Bisogna considerare quindi anche un altro tipo di energia: il lavoro necessario da compiere per inserire la massa nel volume di controllo. Per far entrare la massa all'interno del volume di controllo va speso lavoro, ma va speso anche quando la massa va estratta dal volume di controllo.

Si consideri un sistema $V + V_m$ occupato dalla massa m_i. Se si immette m_i in V, il volume varia mantenendo costante la massa.

Figure 17: *Volume di controllo*



Se si ipotizza che la massa è molto più piccola del volume allora il suo inserimento non causa variazioni sensibili della pressione.

Il sistema è un sistema chiuso che scambia un lavoro L_p con l'esterno:

$$L_p^{\leftarrow} = -\int_{V+V_m}^{V} P\,dV = PV - PV + PV_m = PV_m = m_i P v_i$$

questo termine di lavoro compare per ogni sezione di ingresso e di uscita della massa.

8.2.1 Energia associata al trasporto di massa

$$E_m = \sum_i m_i^{\leftarrow} \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right)$$

8.2.2 Calore scambiato

$Q^{\leftarrow}$: calore estratto dal sistema per renderlo disponibile all'esterno; viene assorbito dall'esterno per far evolvere il sistema nella direzione che vogliamo. Viene prelevato dall'esterno se la macchina è operatrice.

8.2.3 Lavoro scambiato

Il lavoro scambiato non viene visto in relazione con l'esterno; ha a che fare con il sistema aperto. Entra in gioco nell'evoluzione che il fluido compirà all'interno del sistema.

- Lavoro d'**elica** $L_e^{\rightarrow}$
- Lavoro di **pulsione** $L_P^{\leftarrow} = \sum_i m_i\, P_i\, v_i$

Quest'ultimo, il lavoro di pulsione, è l'energia associata ad un termine di sorgente (effetto Joule, reazioni chimiche, reazioni nucleari, etc.).

8.3 Bilancio di Energia 2/2

Nella sezione 8.2 si è detto che:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{E}_i^{\leftarrow}$$

ovvero:

$$\frac{dE}{dt} = m_i \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right)_i + \dot{Q}^{\leftarrow} - m_u \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right)_u - \dot{L}_e^{\rightarrow} + \dot{m}_i \left(Pv \right)_i - \dot{m}_u \left(Pv \right)_u$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m}_i \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right)_i + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{m}_u \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right)_u - \dot{L}_e^{\rightarrow}$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right)_i + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow}$$

L'entalpia tiene conto sia dell'energia interna sia del lavoro specifico introdotto per inserire il fluido all'interno del volume di controllo.

8.4 Bilancio di Entropia

L'entropia del volume di controllo dipende da quella associata al trasporto di massa, dalla potenza entropica legata agli scambi di calore, e quello dovuto all'irreversibilità.

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} s_i + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr}$$

9 Regime stazionario

Per poter utilizzare in modo più semplificato le equazioni di bilancio per sistemi aperti, bisogna fare qualche semplificazione legata al regime stazionario.

9.0.1 Equazioni di bilancio: Massa

$$\frac{dm}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} = 0$$

quindi:

$$\dot{m}_i^{\leftarrow} = -\dot{m}_u^{\leftarrow} = \dot{m}^{\leftarrow}$$

9.0.2 Equazioni di bilancio: Energia

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{E}_i^{\leftarrow} = 0$$

quindi:

$$\dot{m}^{\leftarrow} \left[(h_i - h_u) + g\left(z_i - z_u\right) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2} \right] + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

in questo caso si è potuto raccogliere perché le masse sono uguali.

9.0.3 Equazioni di bilancio: Entropia

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{S}_i^{\leftarrow} = 0$$

quindi:

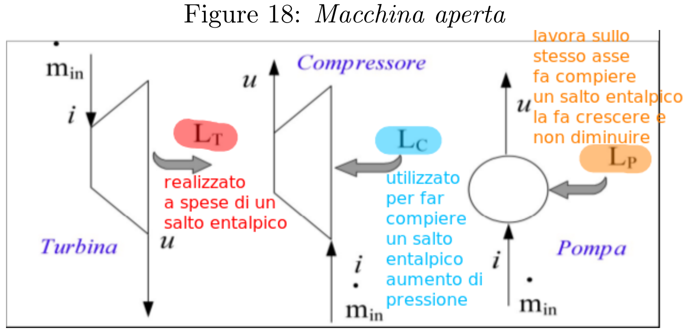
$$\dot{m}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

Questa equazione viene utilizzata per il calcolo di scambi energetici per sistemi aperti.

9.1 Macchina aperta

Macchina aperta dispositivo stazionario adiabatico atto a scambiare lavoro per il quale si ipotizzano trascurabili le variazioni di energia potenziale e cinetica tra le sezioni di ingresso e di uscita.

Figure 18: *Macchina aperta*



Turbina agisce su qualunque fluido gas, vapore, bifase.

Compressore agisce solo su gas.

Pompa agisce solo su fluidi; alza la pressione senza ridurre il volume.

9.1.1 Bilancio di Energia

$$\dot{m}^{\leftarrow}(h_i - h_u) - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

9.1.2 Bilancio di Entropia

$$\dot{m}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

9.2 Dispositivi schematizzabili come sistemi aperti

I dispositivi schematizzabili come sistemi aperti presentano un flusso costante di fluido e una distribuzione di temperatura a regime costante e sono ipotizzabili trascurabili le variazioni di energia potenziale e/o cinetica.

9.2.1 Scambiatore di calore

Grazie al calore che viene scambiato, uno scambiatore di calore fa compiere un salto di entalpia al sistema; provvede invece una diminuzione di entalpia quando il calore viene fatto uscire dal sistema stesso.

Scambiatore di calore sistema aperto stazionario che opera senza scambio di lavoro per il quale si ipotizzano trascurabili le variazioni di energia potenziale e cinetica tra le sezioni di ingresso e di uscita.

$$\dot{m}^{\leftarrow}(h_i - h_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

9.2.2 Diffusore ($w \downarrow$) e ugello ($w \uparrow$)

I diffusori e gli ugelli sono sistemi aperti stazionari che operano senza scambio di lavoro e di calore per i quali si ipotizzano trascurabili la variazione di energia potenziale tra le sezioni di ingresso e di uscita ma non quelle di energia cinetica.

$$\dot{m} \cdot \left[(h_i - h_u) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2}\right] = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

9.2.3 Valvola di laminazione

Le valvole di laminazione sono sistemi aperti stazionari (detti anche dispositivi isentalpici) per i quali si ipotizzano trascurabili le variazioni di energia potenziale e cinetica tra le sezioni di ingresso e di uscita.

$$(h_i - h_u) = 0$$

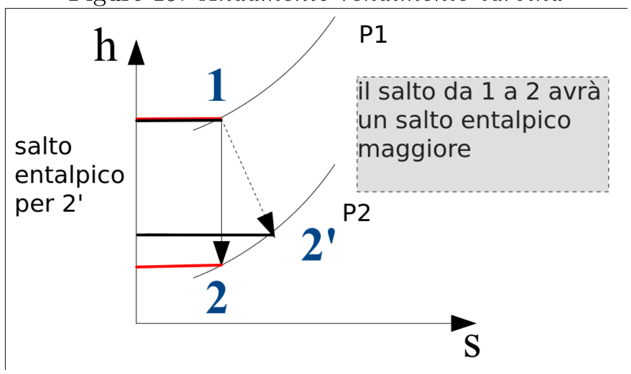
$$\dot{m}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

9.2.4 Turbina

Rendimento isentropico di una macchina aperta Si chiama rendimento isentropico di una macchina motrice aperta (turbina) il rapporto fra la potenza realmente ottenuta e la potenza massima ottenibile in condizioni ideali (trasformazione isentropica del fluido e quindi adiabatica reversibile) a parità di condizioni di ingresso e a parità di pressione di fine espansione.

Rendimento espansione turbina $\eta_{isT} = \frac{\dot{L}^{\rightarrow}_{reale}}{\dot{L}^{\rightarrow}_{ideale}} = \frac{\left(h_1 - h_{2'}\right)}{\left(h_1 - h_2\right)}$

Figure 19: *Andamento rendimento turbina*

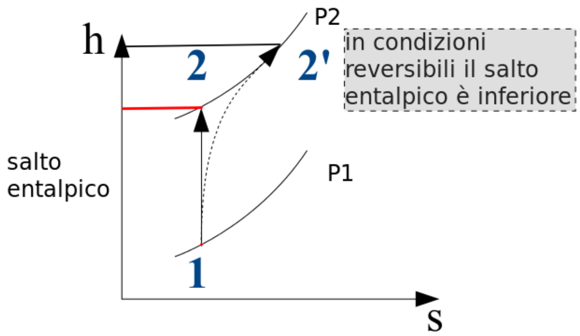


9.2.5 Compressore

Rendimento isentropico di una macchina aperta Si chiama rendimento isentropico di una macchina operatrice aperta (compressore e pompa) il rapporto tra la potenza minima spesa in condizioni ideali (trasformazione del fluido isentropica e quindi adiabatica reversibile) e la potenza realmente spesa a parità di condizioni di ingreso e a parità di pressione di fine compressione.

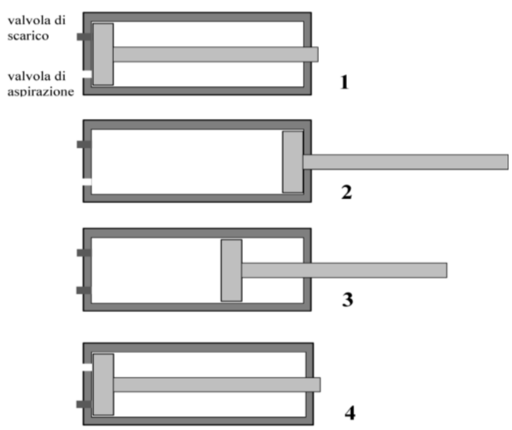
Rendimento isentropico compressore $\eta_{isC} = \frac{\dot{L}^{\rightarrow}_{ideale}}{\dot{L}^{\rightarrow}_{reale}} = \frac{\left(h_1 - h_2\right)}{\left(h_1 - h_{2'}\right)} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1}$

Figure 20: *Compressore*



9.2.6 Compressore Alternativo Ideale

Figure 21: *Compressore alternativo ideale*



- Nella fase 1 il volume è idealmente nullo
- Quando si inizia a far entrare volume (fase 2) si ha lavoro positivo
- Nella fase 3 la valvola si comprime, il volume decresce e si ha quindi lavoro negativo
- Nella 4^a fase la valvola si comprime completamente e si torna quindi a volume nullo

Figure 22: *Diagramma del compressore ideale*

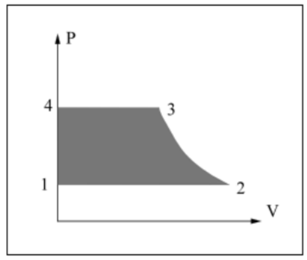
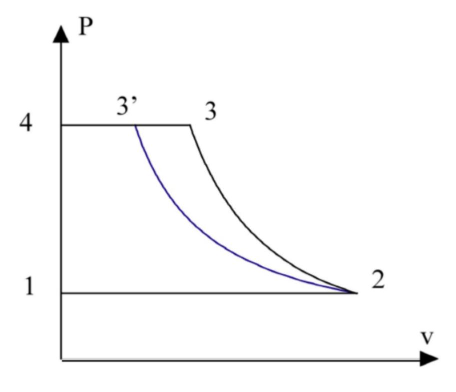


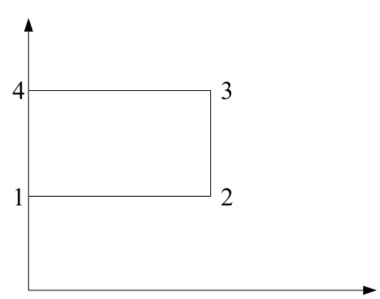
Figure 23: *Compressione adiabatica* $(2-3)$ *o isoterma* $\left(2-3^{'}\right)$



Come si vede in Figura 23, sarebbe meglio avere una trasformazione isoterma che permette di avere area sottesa maggiore.

9.2.7 Pompa ideale

Figure 24: *Diagramma pompa ideale*



Il lavoro di una pompa ideale è negativo:

$$l^{\leftarrow} = v\,(P_4 - P_1)$$

9.3 Lavoro specifico per unità di massa fluente

Con opportuni passaggi, sotto l'ipotesi di regime stazionario, trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale, per un tratto infinitesimo di lunghezza dx le equazioni di bilancio energetico ed entropico espresse per unità di massa sono:

$$-dh + \delta q^{\leftarrow} - \delta l_e^{\rightarrow} = 0$$

$$-ds + ds_Q + ds_{irr} = 0$$

Si ipotizzi che le irreversibilità siano associate al solo moto del fluido e non agli scambi di calore con il serbatoio esterno.

$$-dh + \delta q_{rev}^{\leftarrow} - dl_e^{\rightarrow} = 0$$

$$-ds + \frac{\delta q_{rev}^{\leftarrow}}{T} + ds_{irr} = 0$$

e quindi:

$$Tds = \delta q_{rev} + Tds_{irr}$$

Ricordando che: $dh = Tds + vdP$
Si ottiene:

$$dh = \delta q_{rev}^{\leftarrow} + Tds_{irr} + vdP$$

$$dh = \delta q_{rev}^{\leftarrow} - \delta l_e^{\rightarrow}$$

E quindi:

$$-\delta l_e^{\rightarrow} = vdP + Tds_{irr}$$

Integrando fra la sezione di ingresso e quella di uscita, ipotizzando di non avere irreversibilità:

$$l_e = -\int_i^u v\,dP\, - \int_i^u T\,ds_{irr}$$

dove:

- $\int_i^u v\,dP = l_{rev}$
- $\int_i^u T\,ds_{irr}$ = Energia dissipata per irreversibilità interna

Part III
Sistemi bifase

10 Sistema eterogeneo

Sistema omogeneo Un sistema è omogeneo se ogni sua parte ha le medesime proprietà fisiche, indipendentemente dalla posizione.

Sistema eterogeneo Un sistema è eterogeneo se al suo interno si presenta in due stati diversi, ovvero al suo interno evolvono due sostanze diverse.

I sistemi si dividono poi anche in sistemi monocomponente o multicomponente.

Sistema monocomponente Il sistema monocomponente è un sistema al cui interno è presente una sola sostanza.

Sistema multicomponente Il sistema multicomponente è un sistema al cui interno sono presenti più sostanze.

10.1 Grandezze estensive

Dato un sistema eterogeneo costituito da due stati (o fasi) α e β, le grandezze estensive specifiche risultano dalla media pesata sulle masse dei valori delle grandezze estensive specifiche delle singole fasi.

$$m = m_\alpha + m_\beta$$

$$E = E_\alpha + E_\beta$$

$$\frac{E}{m} = e = \frac{m_\alpha}{m} e_\alpha + \frac{m_\beta}{m} e_\beta$$

dove, e, e_α, e_β sono grandezze estensive riferite all'unità di massa specifica.

10.1.1 Frazione massica

Data $m = m_\alpha + m_\beta$, si definisce la frazione massica per i due stati α e β:

$$x_\alpha = \frac{m_\alpha}{m}$$

$$x_\beta = \frac{m_\beta}{m}$$

$$e = x_\alpha e_\alpha + x_\beta e_\beta$$

$$x_\alpha + x_\beta = 1$$

quindi:

$$e = (1 - x_\beta)\, e_\alpha + x_\beta e_\beta$$

10.2 Regola di Gibbs per i sistemi bifase

Ricordando la regola di Gibbs $V = C + 2 - F$, dove:

- V = n° di variabili **intensive** atte a descrivere il sistema
- C = n° di componenti
- F = n° di fasi

Per il sistema monocomponente bifase si ha che $V = 1$.

Pressione e temperatura non sono variabili indipendenti durante una transizione di fase.

Transizione di fase passaggio da uno stato di aggregazione a un altro $dh = \delta q + vdP$. La transizione di fase avviene a P costante, quindi: $dh = \delta q$, dove δq è il calore latente di ebollizione.

10.3 Sistema eterogeneo monocomponente

10.3.1 Stati monofasi

- Solido
- Liquido
- Aeriforme (Gas)
  - Vapore (è quasi sempre impossibile trattarlo come gas perfetto)

10.3.2 Stati bifasi

- Coesistenza di solido e liquido
- Coesistenza di solido e aeriforme (vapore)
- Coesistenza di liquido e aeriforme (vapore)

10.3.3 Stati tripli

- Coesistenza di solido, liquido e aeriforme (vapore)

10.3.4 Tipi di sistemi eterogenei monocomponente

Liquido sottoraffreddato Liquido non in procinto di evaporare.

Liquido saturo Liquido in procinto di evaporare.

Miscela satura liquido-vapore Contemporanea presenza di liquido e vapore.

Vapore saturo Vapore in condizioni di incipiente condensazione.

Vapore surriscaldato Vapore non in procinto di condensare (si trova a temperatura superiore a quella di ebollizione).

Temperatura di saturazione Temperatura alla quale una sostanza pura comincia ad evaporare, fissata la pressione.

10.3.5 Diagrammi P, v, T

Figure 25: *Diagramma P, v, T*

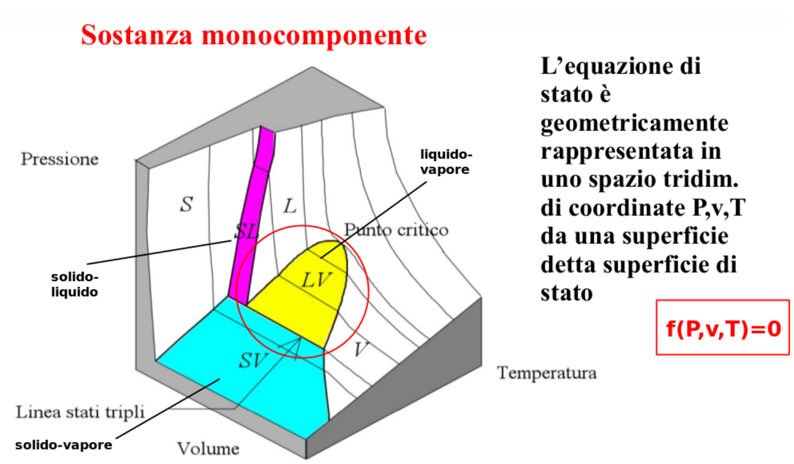


Figure 26: *Punto critico*

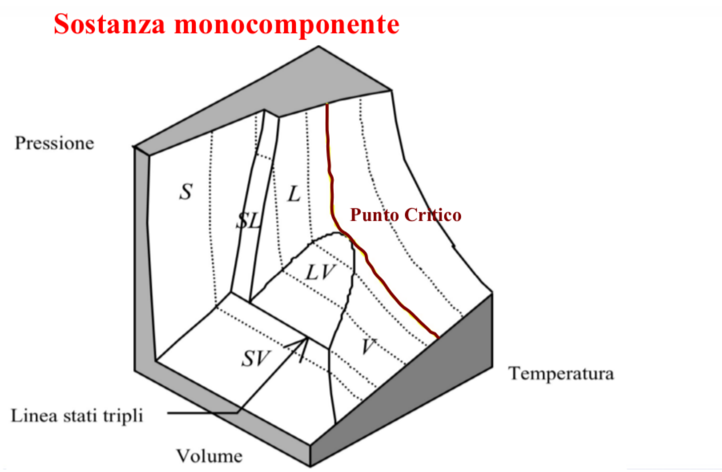


Figure 27: *Curva di saturazione*

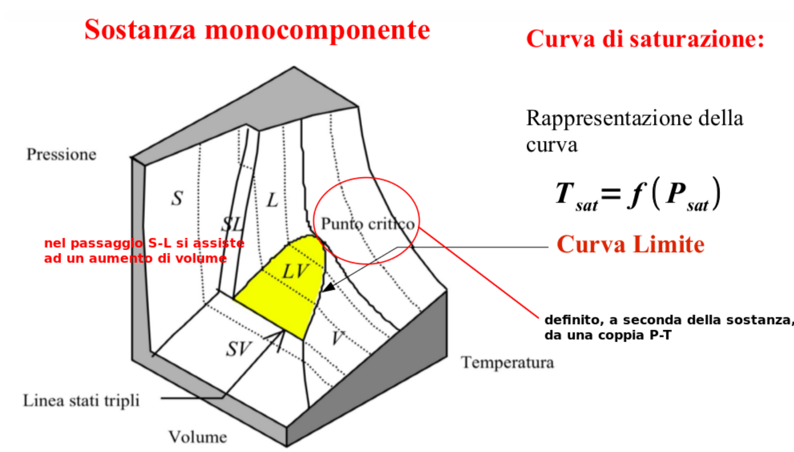
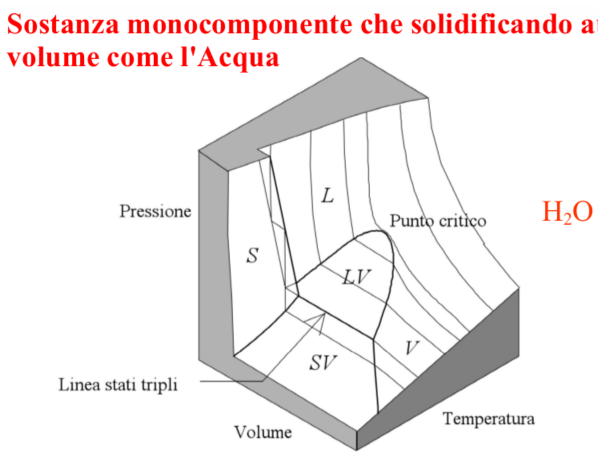


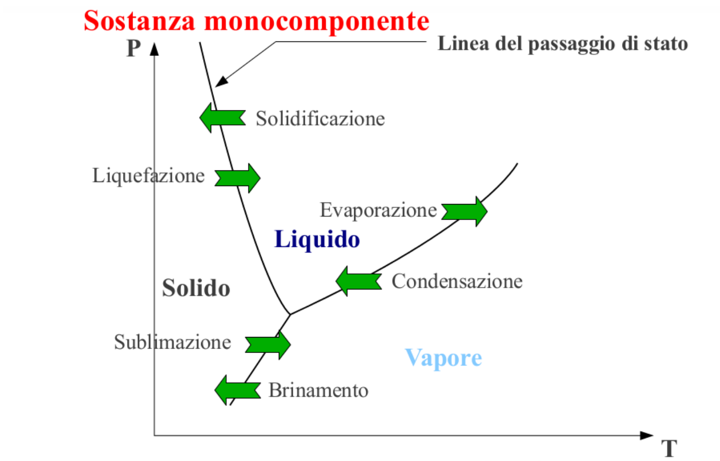
Figure 28: *Aumento di volume* (H_2O)



10.3.6 Diagrammi P, T

Figure 29: *Aumento di volume per sostanze che solidificano*

Figure 30: *Passaggi di stato*



10.4 Entalpia (calore) di transizione di fase

$$h_{solido} < h_{liquido} < h_{vapore}$$

Table 5: *Entalpia: transizioni di fase*

fase	formula
entalpia di liquefazione	$h_{liquido} - h_{solido} > 0$
entalpia di solidificazione	$h_{solido} - h_{liquido} < 0$
entalpia di evaporazione	$h_{vapore} - h_{liquido} > 0$
entalpia di condensazione	$h_{liquido} - h_{vapore} < 0$
entalpia di sublimazione	$h_{vapore} - h_{solido} > 0$
entalpia di brinamento	$h_{solido} - h_{vapore} < 0$

10.5 Proprietà termodinamiche dei sistemi bifase

Liquido-Vapore

Titolo di vapore $x = x_v = \frac{m_v}{m}$; il titolo di vapore è detto anche fase massica in vapore.

Titolo di liquido $x_l = \frac{m_l}{m} = 1 - x$; il titolo di liquido è detto anche fase massica in liquido.

$$x_v + x_l = 1$$

10.5.1 Volume specifico

$$v = (1 - x)\, v_l + x v_v = v_l + x v_{lv}$$

10.5.2 Energia interna

$$u = (1 - x)\, u_l + x u_v = u_l + x u_{lv}$$

10.5.3 Entropia

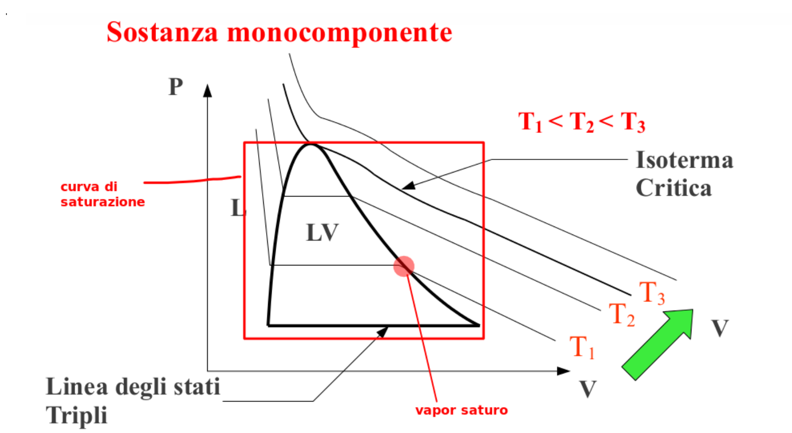
$$s = (1 - x)\, s_l + x s_v = s_l + x s_{lv}$$

10.5.4 Entalpia

$$h = (1 - x)\, h_l + x h_v = h_l + x h_{lv}$$

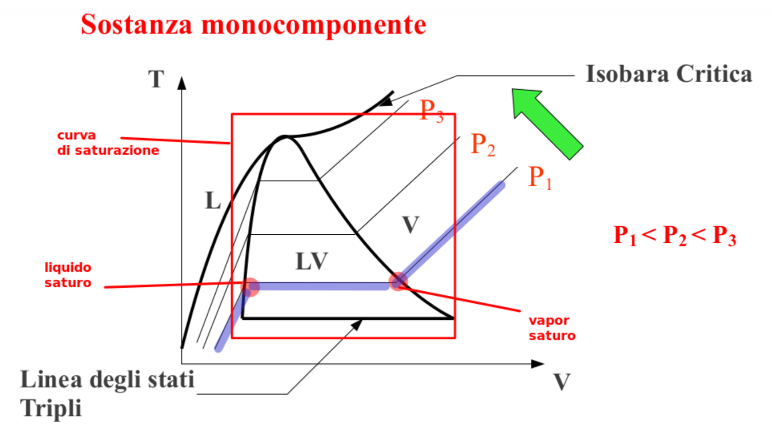
10.5.5 Diagramma P, v

Figure 31: *Diagramma P, v*



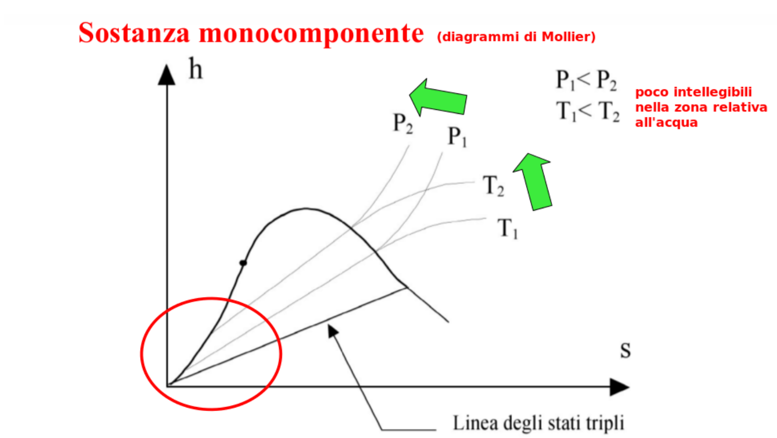
10.5.6 Diagramma T, v

Figure 32: *Diagramma* T, v



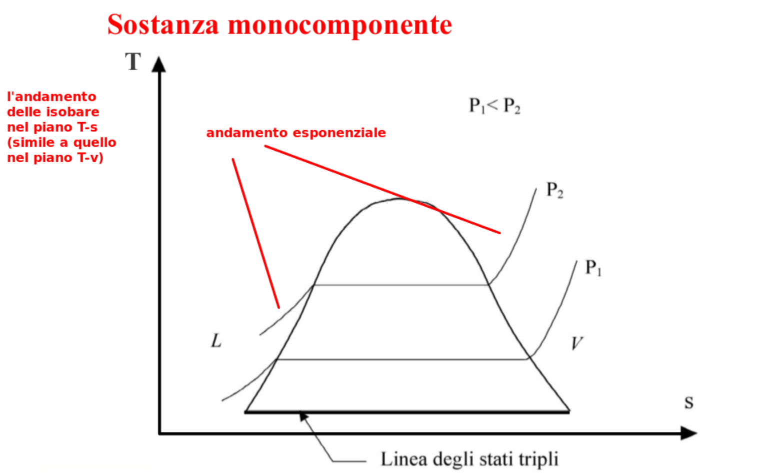
10.5.7 Diagramma h, s

Figure 33: *Diagramma* h, s



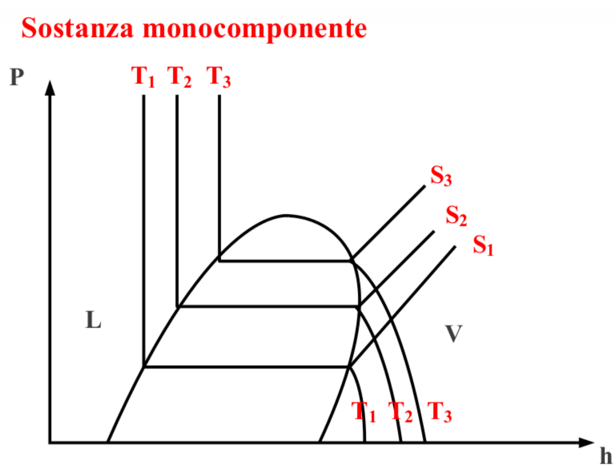
10.5.8 Diagramma T, s

Figure 34: *Diagramma T, s*



10.5.9 Diagramma P, h

Figure 35: *Diagramma P, h*



10.5.10 Tabella di saturazione dell'Acqua

Table 6: *Saturazione dell'acqua*

permette di conoscere i parametri lungo la curva di saturazione

T	P	volume specifico	(m^3/kg)		entalpia specifica	(kJ/kg)		entropia specifica	(kJ/kgK)	
(°C)	(kPa)	$v_l \cdot 10^3$	v_{lv}	v_v	h_l	h_{lv}	h_v	s_l	s_{lv}	s_v
50	12.335	1.0121	12.045	12.046	209.26	2382.9	2592.2	0.7035	7.3741	8.0776
55	15.741	1.0145	9.578	9.579	230.17	2370.8	2601.0	0.7677	7.2249	7.9926
60	19.920	1.0171	7.678	7.679	251.09	2358.6	2609.7	0.8310	7.0798	7.9108
65	25.009	1.0199	6.201	6.202	272.02	2346.3	2618.4	0.8933	6.9389	7.8322
70	31.160	1.0228	5.045	5.046	292.97	2334.0	2626.9	0.9548	6.8017	7.7565
75	38.549	1.0259	4.133	4.134	313.94	2321.5	2635.4	1.0154	6.6681	7.6835
80	47.360	1.0292	3.408	3.409	334.92	2308.8	2643.8	1.0753	6.5379	7.6132
85	57.810	1.0326	2.828	2.829	355.92	2296.1	2652.0	1.1343	6.4111	7.5454
90	70.110	1.0361	2.3603	2.3613	376.94	2283.2	2660.1	1.1925	6.2874	7.4799

u

10.5.11 Tabella del vapore surriscaldato dell'acqua

(da inserire)

10.6 Interpolazione dei dati tabulati

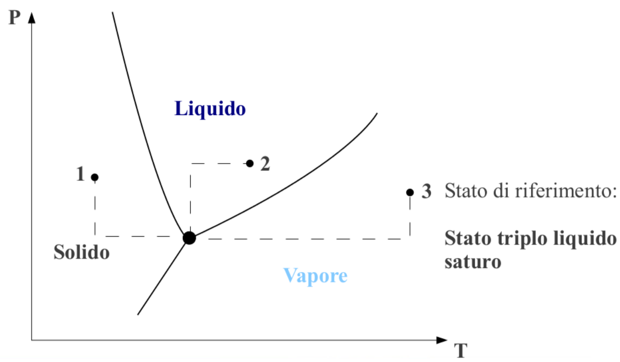
10.6.1 Interpolazione lineare

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{P - P_1}{P_2 - P_1}$$

10.7 Entralpia ed Entropia specifica

Figure 36: *Espressioni approssimate per il calcolo di Entropia ed Entalpia specifica*



10.7.1 Espressioni approssimate per il calcolo di Entalpia ed Entropia specifica per l'acqua

Stato solido (1)

$$h = h_0 + h_{l_{st}} + c_s (T - T_0) + v (P - P_0)$$

$$s = s_0 + s_{l_{st}} + c_s \ln \frac{T}{T_0} = s_0 + \frac{h_{l_{st}}}{T_0} + c_s \ln \frac{T}{T_0}$$

Stato liquido (2)

$$h = h_0 + c_l (T - T_0) + v (P - P_0)$$

$$s = s_0 + c_l \ln \frac{T}{T_0}$$

10.8 Proprietà termodinamiche dell'acqua

- Stato triplo

$$T_t = 273,16K$$

$$P_t = 611,2Pa$$

- Stato critico

$$T_{cr} = 647,29K$$

$$P_{cr} = 220,9Pa$$

Calore specifico del ghiaccio $c_s = 2093\frac{J}{kg \cdot K}$

Calore specifico del liquido $c_l = 4186\frac{J}{kg \cdot K}$

Calore specifico medio a pressione costante del vapore $c_{P_v} = 2009\frac{J}{kg \cdot K}$

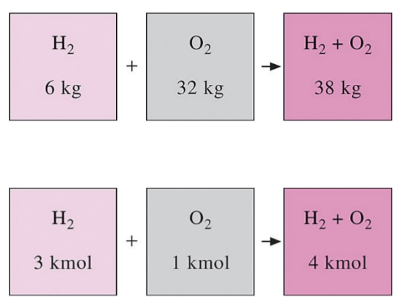
Entalpia di solidificazione allo stato triplo $h_{l_{st}} = -333\frac{kJ}{kg \cdot K}$

Entalpia di evaporazione allo stato triplo $h_{l_{vt}} = 2501,6\frac{kJ}{kg \cdot K}$

10.9 Miscele di gas ideali

Per determinare le proprietà di una miscela è necessario conoscere la natura dei suoi componenti.

Figure 37: *Esempi di miscele di gas ideali*



$$m_m = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

$$N_m = \sum_{i=1}^{k} N_i$$

- Frazione in massa

$$mf_i = \frac{m_i}{m_m}$$

- Frazione molare

$$y_i = \frac{N_i}{N_m}$$

10.9.1 Massa molare apparente di una miscela

$$M_m = \frac{m_m}{N_m} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{N_m} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i M_i}{N_m} = \sum_{i=1}^{k} y_i M_i$$

La somma delle frazioni in massa e delle frazioni molari di una miscela è pari a 1:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} mf_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} y_i = 1$$

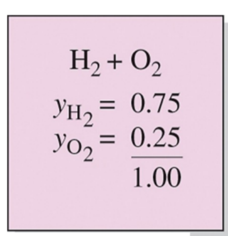
Ricordando che: $R^* = \frac{R}{M}$ e ponendo $m = NM$ costante apparente del gas, si ha:

$$M_m = \frac{m_m}{N_m} = \frac{m_m}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_m M_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{mf_i}{M_i}}$$

Frazione in massa e frazione molare di una miscela sono in relazione fra loro:

$$mf_i = \frac{m_i}{m_m} = \frac{N_i M_i}{N_m M_m} = y_i \frac{M_i}{M_m}$$

Figure 38: *Frazione molare di idrogeno e ossigeno*



10.9.2 Comportamento P, v, T di una miscela di gas

Legge di Dalton La pressione di una miscela di gas è uguale alla somma delle pressioni che ognuno dei gas avrebbe se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e volume della miscela.

$$P_m = \sum_{i=1}^{k} P_i \left(T_m, V_m\right)$$

Legge di Amagat Il volume di una miscela di gas è uguale alla somma dei volumi che ognuno dei gas occuperebbe se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e pressione della miscela.

$$V_m = \sum_{i=1}^{k} V_i \left(T_m, P_m\right)$$

Le leggi di Dalton e Amagat sono esatte per i gas ideali, approssimate per i gas reali. Per i gas ideali le due leggi portano ai medesimi risultati.

Figure 39: *Gas mixture*

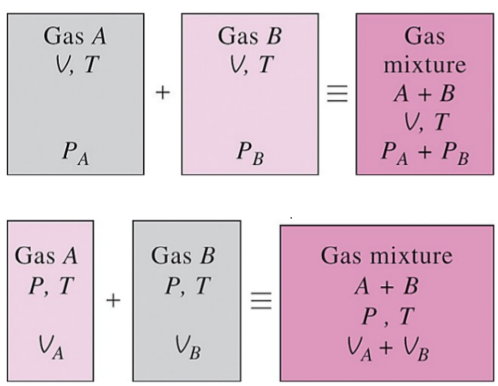
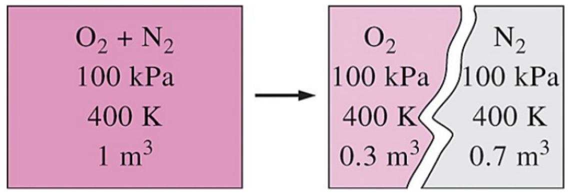


Figure 40: *Gas mixture example*



Indicando con:

- P_i pressione parziale
- $\frac{P_i}{P_m}$ rapporto in pressione
- V_i volume parziale
- $\frac{V_i}{V_m}$ rapporto in volume

Si può scrivere:

$$\frac{P_i\left(T_m,\, V_m\right)}{P_m} = \frac{\frac{N_i R_u T_m}{V_m}}{\frac{N_m R_m T_m}{V_m}} = \frac{N_i}{N_m} = y_i$$

$$\frac{V_i\left(T_m,\, P_m\right)}{V_m} = \frac{\frac{N_i R_u T_m}{P_m}}{\frac{N_m R_u T_m}{P_m}} = \frac{N_i}{N_m} = y_i$$

E da queste quindi si ottiene:

$$\frac{P_i}{P_m} = \frac{V_i}{V_m} = \frac{N_i}{N_m} = y_i$$

Questa equazione è valida solo per le miscele di gas ideali ed è ottenuta ipotizzando un comportamento ideale per ogni gas che compone la miscela e per la miscela stessa.

La quantità $P_i = y_i P_m$ è chiamata pressione parziale, e la quantità $V_i = y_i V_m$ è chiamata volume parziale.

Da notare che, per la miscela ideale, la frazione molare, il rapporto in pressione e il rapporto in volume sono identici.

La composizione di una miscela ideale è spesso determinata con un'analisi volumetrica.

Le proprietà di una miscela per unità di massa Le proprietà per unità di massa coinvolgono le frazioni in massa.

$u_m = \sum_{i=1}^{k} mf_i u_i \ \left[\frac{kJ}{kg}\right]$

$h_m = \sum_{i=1}^{k} mf_i h_i \left[\frac{kJ}{kg}\right]$

$s_m = \sum_{i=1}^{k} mf_i s_i \ \left[\frac{kJ}{kg \cdot K}\right]$

$c_{v,m} = \sum_{i=1}^{k} mf_i c_{v,i} \ \left[\frac{kJ}{kg \cdot K}\right]$

$c_{p,m} = \sum_{i=1}^{k} mf_i c_{p,i} \ \left[\frac{kJ}{kg \cdot K}\right]$

Le proprietà estensive specifiche di una miscela Le proprietà estensive specifiche di una miscela sono determinate attraverso la media pesata.

$\dot{u}_m = \sum_{i=0}^{k} y_i \dot{u}_i \ \left[\frac{kJ}{kmol}\right]$

$\dot{h}_m = \sum_{i=0}^{k} y_i \dot{h}_i \ \left[\frac{kJ}{kmol}\right]$

$\dot{s}_m = \sum_{i=0}^{k} y_i \dot{s}_i \ \left[\frac{kJ}{kmol \cdot K}\right]$

$\dot{c}_{v,m} = \sum_{i=0}^{k} y_i \dot{c}_{v,i} \ \left[\frac{kJ}{kmol \cdot K}\right]$

$\dot{c}_{p,m} = \sum_{i=0}^{k} y_i \dot{c}_{p,i} \ \left[\frac{kJ}{kmol \cdot K}\right]$

10.9.3 Legge di Gibbs-Dalton

Per un gas ideale le proprietà di un componente non sono influenzate dalla presenza di altri gas e tale componente si comporta come se fosse da solo alla T_m e al volume V_m della miscela. Inoltre h, u, c_v, e c_p dipendono solo dalla temperatura e sono indipendenti da pressione e volume della miscela.

$$\Delta s_i^o = s_{i,2}^o - s_{i,1}^o - R_i \ln \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$$

Dove:

- $P_{i,2} = y_{i,2} P_{m,2}$ è la pressione parziale del componente i-esimo allo stato 2
- $P_{i,1} = y_{i,1} P_{m,1}$ è la pressione parziale del componente i-esimo allo stato 1

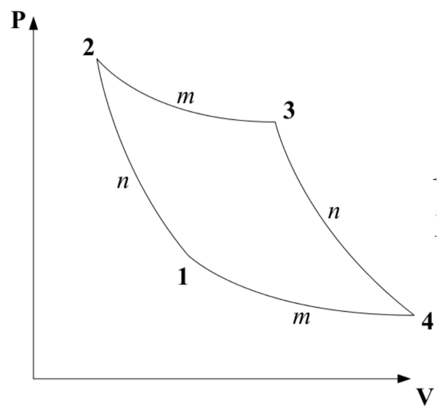
$$\Delta s_i = s_{i,2}^o - s_{i,1} - R_i \ln \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} \backsimeq c_{p,i} \ln \frac{T_{i,2}}{T_{i,1}} - R_i \ln \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$$

$$\Delta \dot{s}_i = \dot{s}_{i,2}^o - \dot{s}_{i,1}^o - R_i \ln \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} \backsimeq \dot{c}_{p,i} \ln \frac{T_{i,2}}{T_{i,1}} - R_i \ln \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$$

Part IV
Cicli termodinamici a gas

11 Proprietà dei cicli simmetrici

Figure 41: *Ciclo simmetrico*



Per un ciclo simmetrico si possono scrivere le seguenti equazioni:

- $v_1 v_3 = v_2 v_4$
- $P_1 P_3 = P_2 P_4$
- $T_1 T_3 = T_2 T_4$

Inoltre:

- $P_1 v_1^n = P_2 v_2^n$
- $P_2 v_2^m = P_3 v_3^m$
- $P_3 v_3^n = P_4 v_4^n$
- $P_4 v_4^m = P_1 v_1^m$

Moltiplicando membro a membro le equazioni di pari indice si ottiene:

$$P_1 P_3 \left(v_1 v_3\right)^n = P_2 P_4 \left(v_2 v_4\right)^n \tag{8}$$

$$P_3 P_1 \left(v_3 v_1\right)^m = P_2 P_4 \left(v_2 v_4\right)^m \tag{9}$$

Dividendo membro a membro:

$$v_1 v_3 = v_2 v_4$$

che inserita nella formula (8) e con l'equazione dei gas perfetti si ottiene:

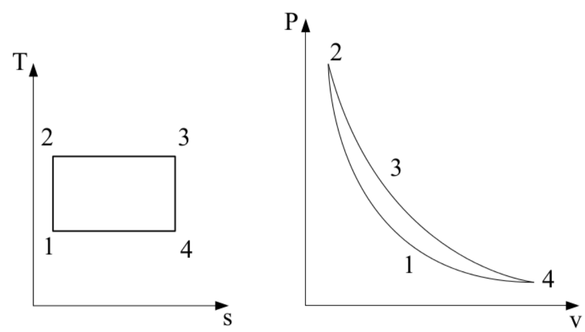
$$P_1 P_3 = P_2 P_4$$

$$T_1 T_3 = T_2 T_4$$

12 Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo simmetrico costituito da due isoentropiche e due isoterme.

Figure 42: *Ciclo di Carnot*



Rendimento del ciclo $\eta = \frac{L}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ essendo isoterme le trasformazioni lungo le quali si scambia calore.

Possibili fonti di irriversibilità per una macchina termodinamica:

- *irreversibilità esterna* $(T_1 > T_F \, \mathrm{e} \, T_2 < T_C)$

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C} > \eta_{Ciclo} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Bilancio entropico su tutta la macchina termica $-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$

Per il ciclo di Carnot vale $\frac{Q_C}{T_3} = \frac{Q_F}{T_1} = \Delta S$
che risolta rispetto a Q_F $Q_C \left(\frac{1}{T_F} \frac{T_1}{T_3} - \frac{1}{T_C} \right) = S_{irr}$ e $Q_C \left(\frac{T_C T_1 - T_F T_3}{T_3 T_C T_F} \right) = S_{irr} > 0$

- *irreversibilità interna* $(s_1 < s_2 \, \mathrm{e} \, s_3 < s_4)$

Bilancio entropico su tutta la macchina termica $-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$

$$\frac{Q_C}{T_C} = S_3 - S_2$$

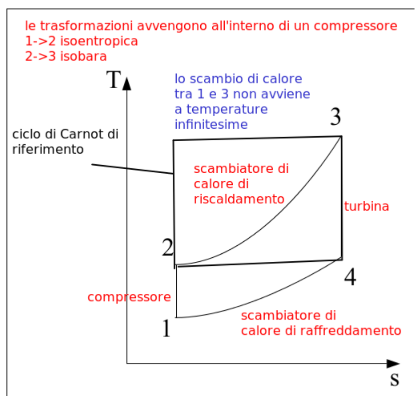
$$\frac{Q_F}{T_F} = S_4 - S_1$$

$$S_2 - S_3 + S_4 - S_1 = S_{irr} > 0$$

13 Ciclo Joule-Brayton

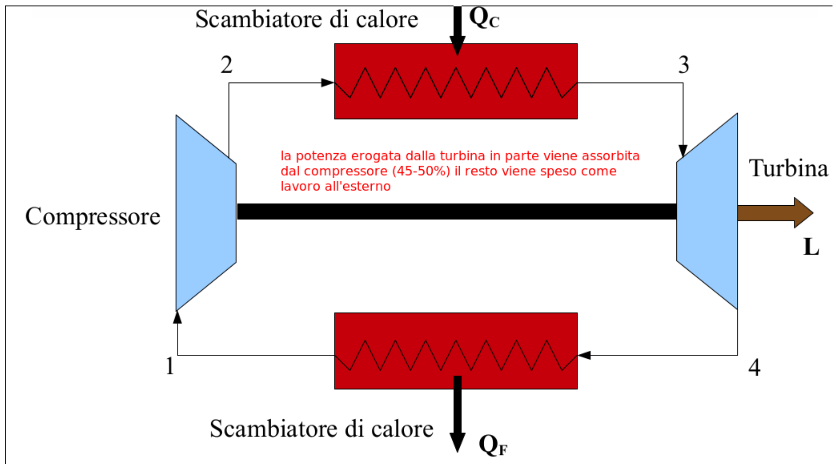
Il ciclo Joule-Brayton è un ciclo costituito da due isoentropiche e due isobare.

Figure 43: *Joule-Brayton*



Nella Figura 44 si può osservare il ciclo di Joule-Brayton che coinvolge una turbina, un compressore e due scambiatori di calore (caldo e freddo).

Figure 44: *Ciclo JB*



Rendimento termodinamico del ciclo JB (gas perfetti, ciclo ideale simmetrico) Il rendimento di JB è inferiore del rendimento di Carnot. Il calore addotto, considerando una trasformazione isobara, vale:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{m}\left(h_3 - h_2\right)$$

Ritenendo costante il calore specifico nel range di temperatura ipotizzabile si ha:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{m}\left(h_3 - h_2\right) = \dot{m}c_P\left(T_3 - T_2\right)$$

Analogamente l'espressione del calore sottratto vale:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{m}\left(h_4 - h_1\right) = \dot{m}c_P\left(T_4 - T_1\right)$$

Il rendimento termodinamico del ciclo vale:

$$\eta_{JB} = \frac{\left(\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out}\right)}{\dot{Q}_{in}} = 1 - \frac{\dot{Q}_{out}}{\dot{Q}_{in}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Rendimento del ciclo $\eta_{JB} = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ (inserendo il bilancio di entropia fra 1 e 2 per i gas perfetti)

$$\Delta s_{1-2} = c_P \ln\frac{T_2}{T_1} - R^* \ln\frac{P_2}{P_1} = 0$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_P} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{R^*}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R^*}{c_P}} = r^{\frac{R^*}{c_P}} = r^{\frac{k-1}{k}}$$

dove r è il rapporto di compressione $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$.

Il rendimento si può esprimere quindi come:

$$\eta_{JB} = 1 - \frac{1}{r^{\frac{k-1}{k}}}$$

Il rendimento del ciclo di Joule-Brayton è funzione del solo rapporto di compressione e presenta un minimo quando la pressione P_2 tende alla pressione P_1:

$$r_{Pmin} = 1$$

E un valore massimo quando T_2 tende a T_3:

$$r_{Pmax} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Anche il lavoro netto prodotto dal ciclo JB ideale è funzione del solo rapporto di compressione:

$$\begin{aligned} l &= l_T - l_C = c_P\left(T_3 - T_4\right) - c_P\left(T_2 - T_1\right) = c_P T_3\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right) - c_P T_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \\ &= c_P T_3\left(1 - \frac{1}{r_P^{\frac{k-1}{k}}}\right) - c_P T_1\left(r_P^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) \end{aligned}$$

Si ha il massimo lavoro in corrispondenza del rapporto di compressione:

$$r_{Popt} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = \sqrt{r_{Pmax}}$$

Ricordando poi che in una turbina isoentropica si ha:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{R}{c_P}} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

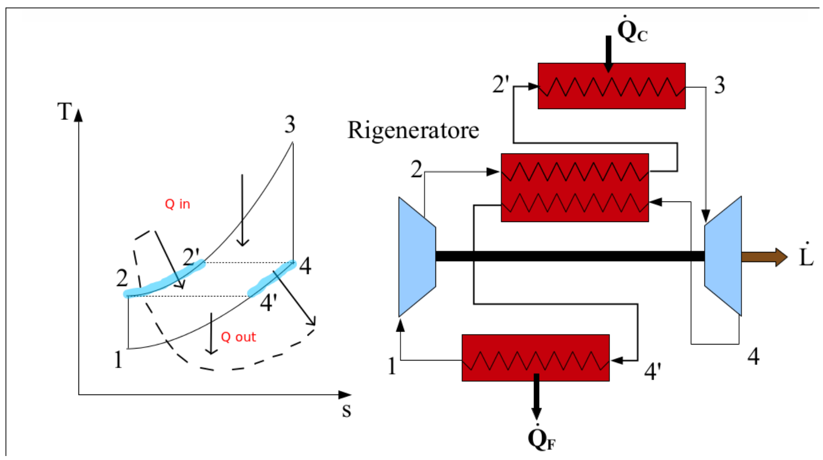
E inserendo in questa espressione al posto di $\frac{P_3}{P_4}$ (pari a $\frac{P_2}{P_1}$) il valore di r_{Popt} e sfruttando le proprietà dei cicli simmetrici si ottiene:

$$T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

Cioè il lavoro specifico è massimo nel ciclo in cui la temperatura di fine espansione coincide con quella di fine compressione.

13.1 Ciclo Joule-Brayton con Rigenerazione

Figure 45: *JB con Rigenerazione*

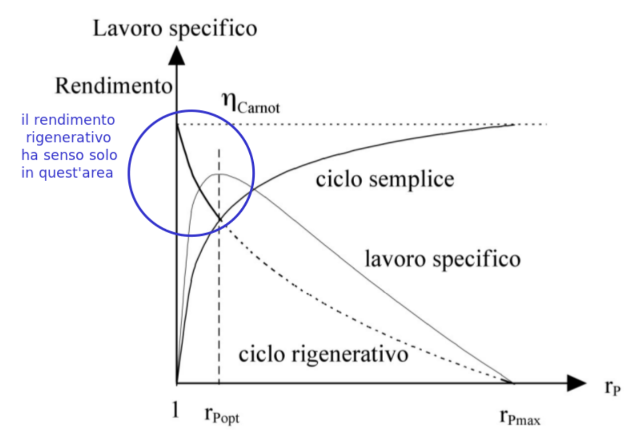


Rendimento del ciclo rigenerato ($T_{2'} = T_4$, gas perfetti e ciclo ideale simmetrico)

$$\eta_{rig} = 1 - \frac{\dot{L}}{\dot{Q}} = \frac{\dot{L}_t - \dot{L}_c}{\dot{Q}} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_4)} 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}$$

$$\eta_{rig} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{T_2 T_1}{T_3 T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_P^{\frac{k-1}{k}}$$

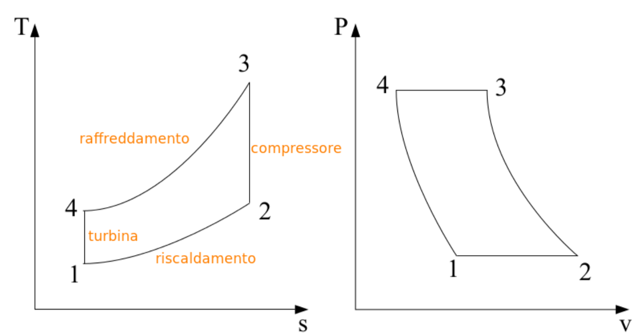
Figure 46: *Rendimento JB*



13.2 Ciclo Joule-Brayton inverso

Il ciclo Joule-Brayton inverso è un ciclo frigorifero costituito da due isoentropiche e due isobare.

Figure 47: *Joule-Brayton inverso*



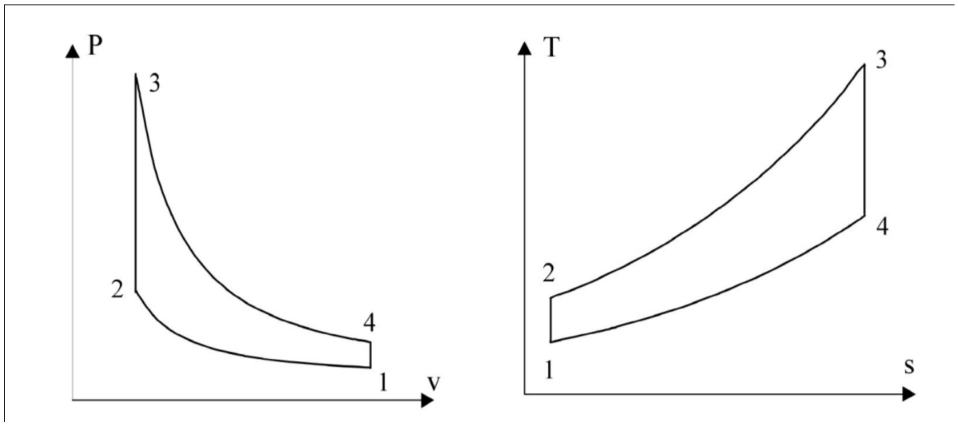
Coefficiente di effetto utile solo per cicli simmetrici

$$\epsilon = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C - \dot{Q}_F} = \left(\frac{T_2 - T_1}{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}\right) = \frac{T_2}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_4 - T_1} = \left(\frac{1}{r^{\frac{k-1}{k}} - 1}\right)$$

14 Ciclo Otto

Il ciclo Otto è un ciclo simmetrico costituito da due isoentropiche e due isocore.

Figure 48: *Ciclo Otto*



Il ciclo Otto ideale è costituito da quattro trasformazioni interamente reversibili:

1. compressione isoentropica
2. adduzione di calore a volume costante
3. espansione isoentropica
4. sottrazione di calore a volume costante.

Rendimento termodinamico del ciclo Otto (gas perfetti, ciclo ideale simmetrico)

Il calore addotto, considerando una trasformazione isocora, vale:

$$q_{in} = u_3 - u_2$$

Ritenendo costante il calore specifico nel range di temperatura ipotizzabile si ha:

$$q_{in} = u_3 - u_2 = c_v\left(T_3 - T_2\right)$$

Analogamente l'espressione del calore sottratto vale:

$$q_{out} = u_4 - u_1 = c_v\left(T_4 - T_1\right)$$

Il rendimento termodinamico del ciclo vale:

$$\eta_{th} = \frac{(q_{in} - q_{out})}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Delta s_{1-2} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{V_2}{V_1} = 0$$

da cui:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_v} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{R^*}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R^*}{c_v}} = r_{vol}^{\frac{R^*}{c_v}} = r_{vol}^{k-1}$$

$$\eta_{otto} = 1 - r_{vol}^{1-k}$$

dove r_{vol} è il rapporto di compressione volumetrico $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$.

Ricordando che sia la compressione sia l'espansione sono assunte isoentropiche, si ha:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{k-1} = \frac{T_4}{T_3}$$

quindi:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

e infine:

$$\eta_{th} = 1 - r^{1-k}$$

Ricapitolando:

- $r_{vol} = \frac{V_1}{V_2}$
- $\eta = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$
- $\eta = 1 - \frac{1}{r_{vol}^{k-1}}$

Per quanto riguarda il lavoro specifico prodotto nel ciclo Otto si ha:

$$l = c_v \left(T_3 - T_4\right) - c_v \left(T_2 - T_1\right)$$

$$l = c_v T_3 \left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right) - c_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

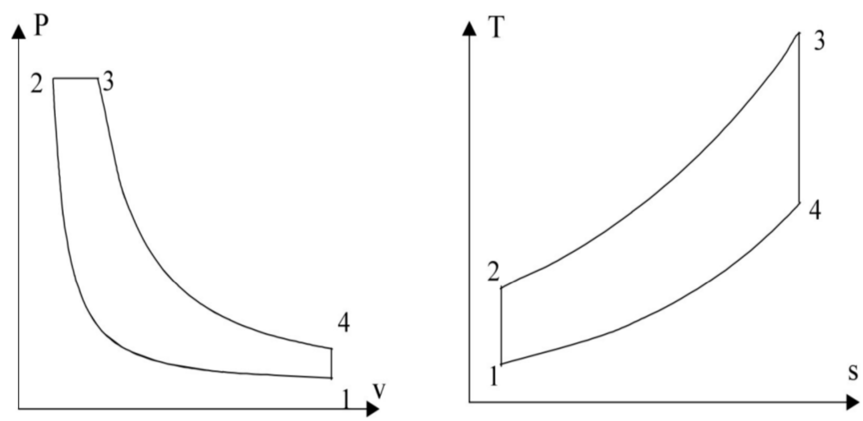
$$l = c_v T_3 \left(1 - \frac{1}{r_v^{k-1}}\right) - c_v T_1 \left(r_v^{k-1} - 1\right)$$

15 Ciclo Diesel

Il ciclo Diesel è difficile da trattare; non è possibile applicare alcuni princìpi della simmetricità del grafico. Per questo ciclo il parametro che ritorna utile è il rapporto tra volume iniziale e volume finale.

Il ciclo è costituito da due isoentropiche, una isocora e una isobara.

Figure 49: *Ciclo Diesel*



Rendimento del ciclo (gas perfetto, ciclo ideale)

$$\eta_{Diesel} = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{c_v\left(T_4 - T_1\right)}{c_P\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{c_v T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{c_P T_2\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)}$$

ponendo $r = \frac{V_1}{V_2}$ rapporto di compressione volumetrico, e $z = \frac{V_3}{V_2}$ rapporto di combustione:

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{r^{k-1}}\frac{1}{k}\frac{\left(z^k - 1\right)}{z - 1}$$

Durante la trasformazione $1 - 2$ isoentropica si ha:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = r^{k-1}$$

Durante la trasformazione $2 - 3$ isobara si ha:

$$z = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$|\Delta s_{2-3}| = |\Delta s_{4-1}| \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{c_P} = \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{c_v}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{c_P}{c_v}} = \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{c_v}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{c_P}{c_v}} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{c_P}{c_v}} = z^k$$

16 Ciclo Stirling

Il ciclo Stirling è costituito da due isoterme e due isocore.

17 Ciclo Ericson

Il ciclo Ericson è costituito da due isoterme e due isobare.

Part V
Cicli termodinamici a vapore

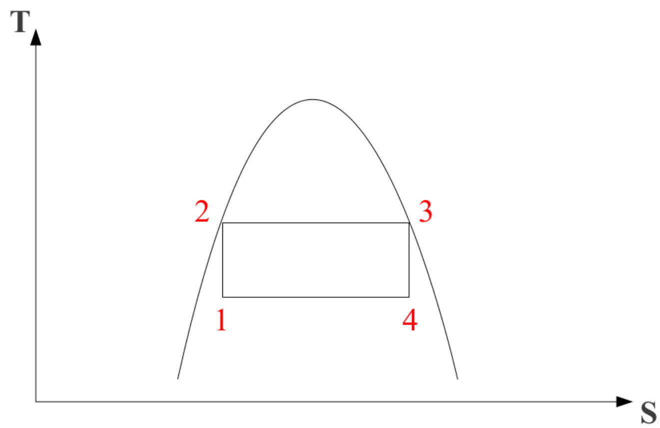
18 Caratteristiche del fluido di lavoro

- Elevata massa volumica
- Elevata entalpia di transizione di fase
- Elevata temperatura critica
- Temperatura dello stato triplo inferiore alla temperatura minima del ciclo
- Fluido non corrosivo e non tossico
- Fluido chimicamente stabile
- Fluido facilmente reperibile e di basso costo
- Elevata pendenza nel piano $T - S$ della curva limite superiore
- Pressione di condensazione superiore alla pressione atmosferica

18.1 Ciclo Motore a Vapore

18.1.1 Ciclo di Carnot

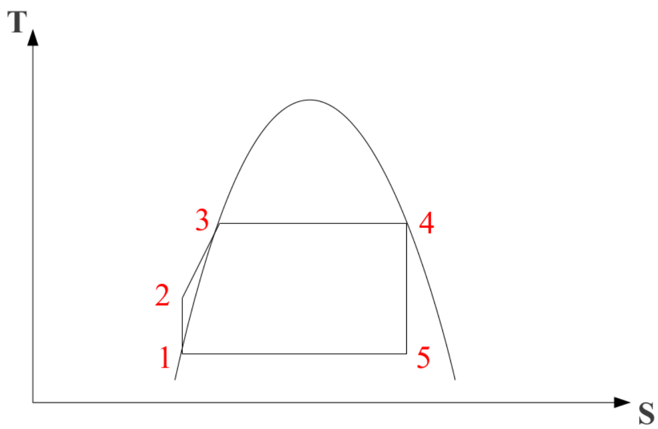
Figure 50: *Ciclo di Carnot*



Si potrebbe pensare di realizzare un ciclo di Carnot all'interno della curva di saturazione, il problema è però sulle isoentropiche. Le turbine che si potrebbe utilizzare si deteriorerebbero velocemente, questo per via dell'alta percentuale di vapore, ad esempio nel punto 4 in Figura 50.

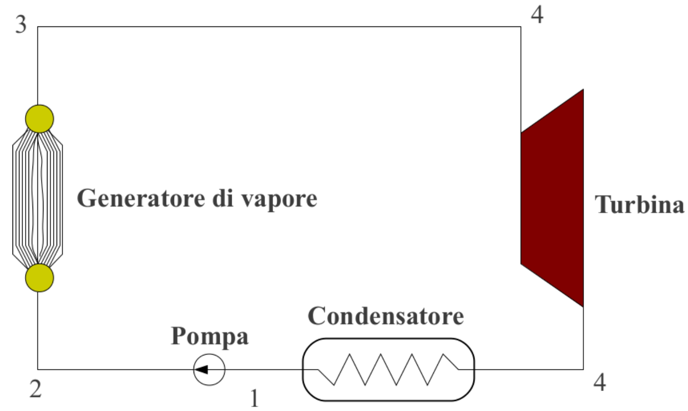
18.1.2 Ciclo Rankine semplice

Figure 51: *Ciclo Rankine semplice*



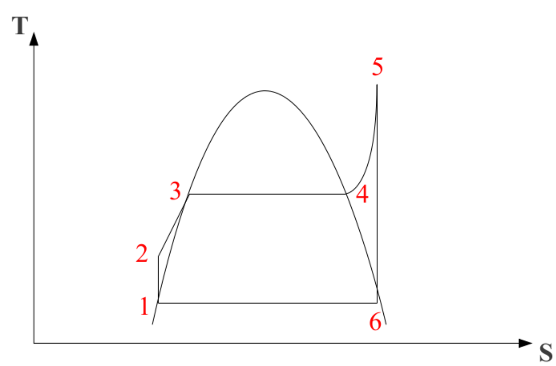
- $1 \rightarrow 2$: applico una **pompa** e porto in pressione il liquido
- $2 \rightarrow 3$: **scaldo** il materiale per passare da liquido sottorafreddato a liquido saturo
- $3 \rightarrow 4$: continuando a fornire **calore** raggiungo le condizioni di calore saturo
- $4 \rightarrow 5$: in questo modo arrivo al punto 5 con il titolo molto minore del 100%

Figure 52: *Rankine*



18.1.3 Ciclo Rankine con surriscaldamento

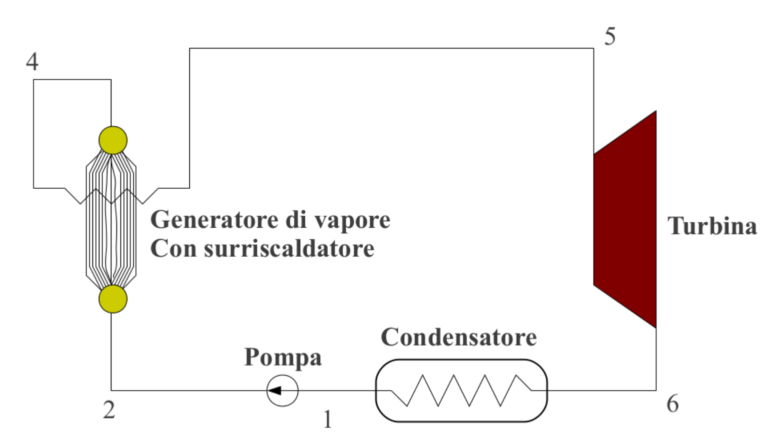
Figure 53: *Rankine surriscaldamento*



Nel Rankine con surriscaldamento i punti interessanti sono 1, 2, 5, 6. I punti 3 e 4 sono discontinuità grafiche ma in realtà fanno parte del processo di riscaldamento dal punto 2 al punto 5.

- nel tratto 4 $\rightarrow$ 5 continuo a scaldare e porto il sistema in condizioni di vapore surriscaldato
- nel tratto 5 $\rightarrow$ 6 espando (turbina) e riesco ad avvicinarmi ad un titolo del 100%

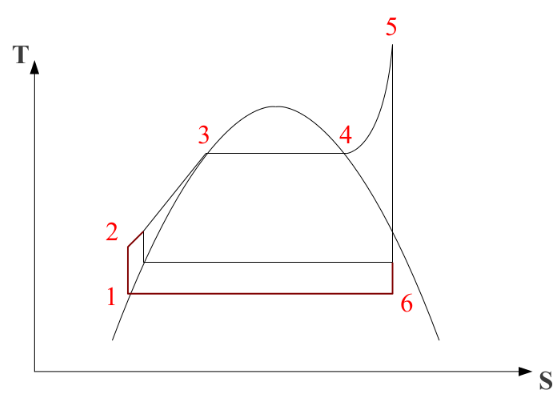
Figure 54: *Surriscaldamento*



Soluzioni per il miglioramento termodinamico del ciclo Rankine

- Riduzione della pressione di condensazione

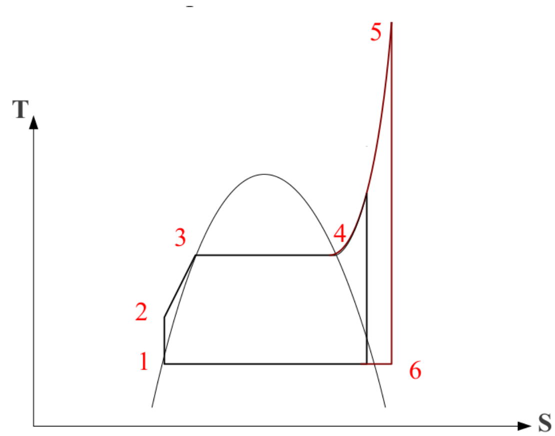
Figure 55: *Riduzione della pressione di condensazione*



Per migliorare il rendimento del ciclo bisogna aumentare l'area. Non bisogna scendere sotto la pressione atmosferica altrimenti entra aria. Inoltre si avrebbe un titolo più basso.

- Aumento della temperatura finale di surriscaldamento

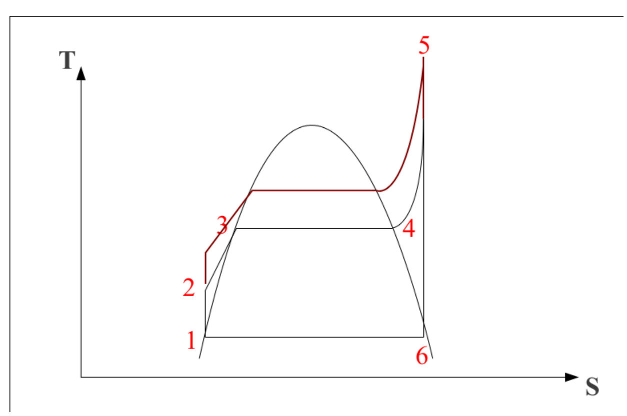
Figure 56: *Aumento della temperatura finale di surriscaldamento*



In questo caso surriscaldando fino al tratto in rosso da $5 \to 6$ si rischia di rovinare i materiali.

- Aumento della pressione di vaporizzazione

Figure 57: *Aumento della pressione di vaporizzazione*



Poiché i riscaldamenti sono isobari:

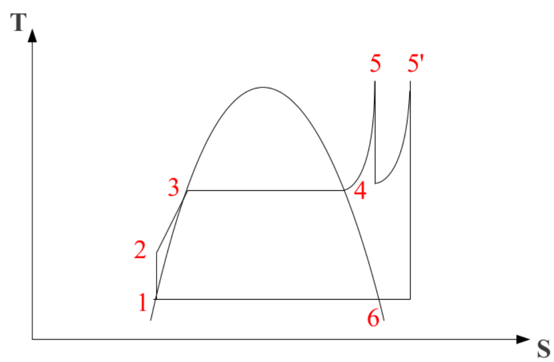
1. $P_2 = P_3 = P_5$
2. $P_4 = P_{5'}$

Al punto 5 si raggiunge la temperatura massima poi si espande fino ad una certa pressione ma anziché raggiungere la pressione di condensazione ricomincio a scaldare.

In realtà al punto 6 si espande fino a raggiungere la curva di saturazione.

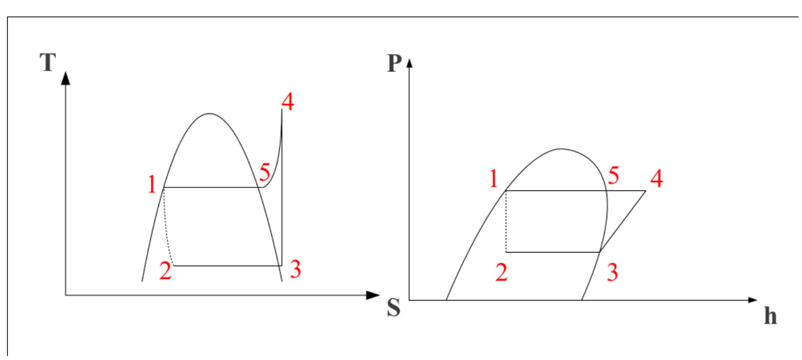
- Surriscaldamenti ripetuti

Figure 58: *Surriscaldamenti ripetuti*



18.1.4 Ciclo frigorifero a vapore

Figure 59: *Ciclo frigorifero a vapore*



- 1 → 2 processo isoentralpico
- 2 → 3 evaporazione dino a raggiungere vapor saturo
- 3 → 4 compressione fino a vapore surriscaldato
- 5 → 1 raffreddamento

Figure 60: *Schematizzazione*

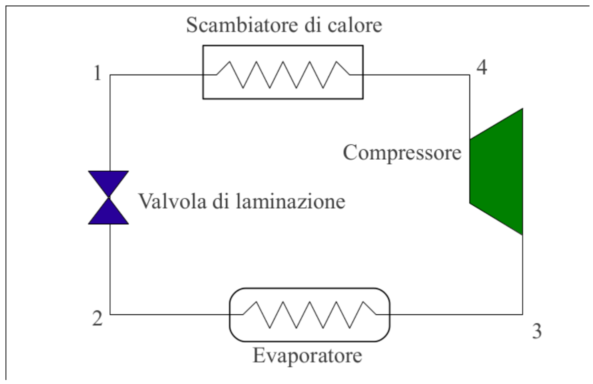
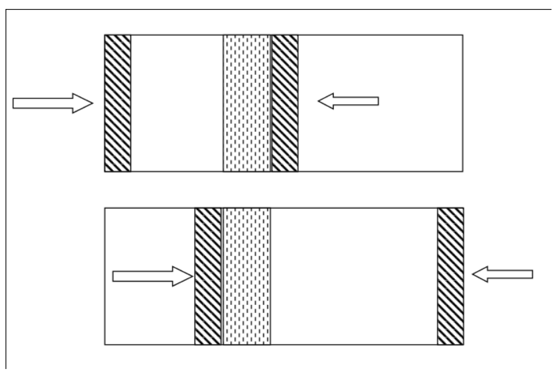


Figure 61: *Effetto Joule-Thomson*



Effetto Joule Thomson

$$Q - L = \Delta U$$

$$-(-P_1V_1 + P_2V_2) = U_2 - U_1$$

$$U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2$$

$$H_1 = H_2$$

$$\delta q + v\,dP = dh$$

$$\delta q_{rev} + Tds_{irr} + v\,dP = dh$$

$$Tds_{irr} + v\,dP = dh$$

$$ds_{irr} > 0,\ dP < 0,\ P_2 < P_1$$

La proprietà misurata nel corso dell'esperimento è il rapporto tra la variazione di temperatura e quella della pressione, ad H costante. Se passiamo al limite ΔP che tende a zero otteniamo il coefficiente di Joule Thomson.

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$$

Ossia la derivata parziale della temperatura in funzione della pressione in condizioni isentalpiche. Per il gas perfetto $\mu = 0$ ciò vuol dire che l'espansione secondo Joule-Thomson non ne modifica la temperatura. I gas reali presentano coefficienti di Joule-Thomson non nulli. Il coefficiente di Joule Thomson è positivo quando si osserva il raffreddamento del gas infatti dP è sempre negativa. E' negativo quando il gas si scalda a seguito dell'espansione poichè dT diviene una quantità positiva. I gas presentano una temperatura di inversione alla quale µ cambia segno.

Spiegazione fisica

Quando un gas si espande la distanza media tra le sue molecole aumenta. Data la presenza di forze attrattive intermolecolari, l'espansione causa un aumento di energia potenziale del gas. Se non viene estratto lavoro dal sistema durante il processo di espansione ("espansione libera") e non viene trasferito calore, l'energia totale del gas rimane la stessa per la conservazione dell'energia. L'aumento di energia potenziale produce quindi una diminuzione dell'energia cinetica e quindi una diminuzione di temperatura del gas. Un altro meccanismo ha invece effetti opposti: durante le collisioni tra le molecole del gas, l'energia cinetica viene temporaneamente convertita in energia potenziale. Mentre la distanza intermolecolare media aumenta, c'è una diminuzione del numero di collisioni per unità di tempo, che causa a sua volta una diminuzione dell'energia potenziale media. Dato che l'energia totale viene conservata questo comporta un aumento dell'energia cinetica (e quindi della temperatura). Se domina il primo effetto (lavoro interno fatto contro le forze attrattive intermolecolari) l'espansione libera causa una diminuzione della temperatura. Se domina il secondo effetto (diminuzione dell'energia potenziale associata alle collisioni) l'espansione libera provoca un aumento di temperatura.

Part VI
Trasmissione del calore

Il calore Q (come del resto il lavoro) non è una proprietà del sistema, ma una forma di energia in transito. Si può quindi dire che un sistema possiede energia (ad esempio energia interna U, energia cinetica E_c o energia potenziale E_p), ma si deve dire che un sistema scambia energia sotto forma di calore con un altro sistema. Questa quantità di calore scambiata può essere quantificata.

Quando avviene uno scambio di calore?

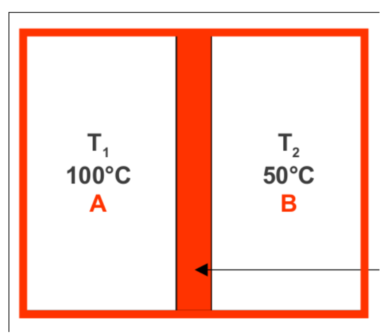
Il passaggio di calore da un sistema ad un altro può avvenire se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- I due sistemi si devono trovare a temperature diverse
- Non devono essere separati da una parete adiabatica

Come avviene uno scambio di calore?

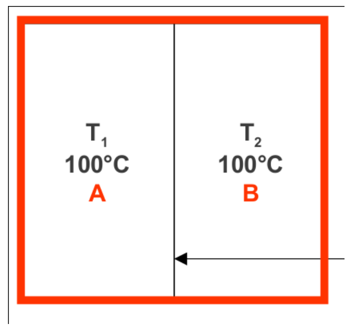
- Per il primo principio la quantità di calore trasferito ad un sistema (se $L = 0$) eguaglia l'entità dell'incremento di energia del sistema stesso.
- Per il secondo principio il calore si propaga nella direzione delle temperature decrescenti, da una regione ad alta temperatura ad una regione a bassa temperatura.

Figure 62: *Parete e contorno adiabatici*



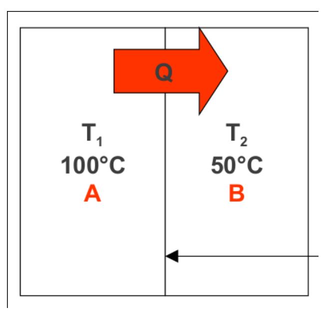
Nella Figura 62 il sistema A ed il sistema B rimarranno alla stessa temperatura $Q_{AB} = 0$. Il sistema A è isolato termicamente dal sistema B.

Figure 63: *Parete diatermica*



Nella Figura 63 $Q_{AB} = 0$. I sistemi, pur non essendo termicamente isolati, si trovano alla stessa temperatura.

Figure 64: *Parete diatermica*



Nella Figura 64 $Q_{AB} > 0$. Se non interverranno altri fattori, dopo un certo periodo di tempo, $T_1 = T_2$, dopo di che $Q_{AB} = 0$.

La trasmissione del calore focalizza l'indagine sugli scambi sotto forma di Q, si trascurano gli effetti degli scambi energetici in lavoro. Nei problemi pratici quello che interessa maggiormente è **la rapidità con cui avviene lo scambio**, piuttosto che la quantità di calore scambiata.

Esempio del thermos Dopo quanto tempo il caffè che si trova inizialmente a 90°C raggiunge gli 80 °C?

- L'analisi termodinamica ci consente di valutare la quantità di calore scambiato ma non il tempo
- La trasmissione del calore ci consente di valutarne anche il tempo

Oggetto della trasmissione del calore La determinazione della velocità di propagazione del calore verso o da un sistema e quindi i tempi di raffreddamento e di riscaldamento, così come la variazione di temperatura costituiscono l'oggetto della trasmissione del calore.

Considerando che il calore non si distribuisce istantaneamente in tutti i punti del sistema, può accadere che:

- All'interno di un sistema possono stabilizzarsi condizioni diverse di temperatura da un punto ad un altro e di conseguenza può permanere un flusso di calore da un punto ad un altro
- In un sistema la temperatura in un punto può variare nel tempo o rimanere costante e cioè il sistema può essere in regime variabile o permanente

Trasmissione del calore La trasmissione del calore si occupa dello studio dell'insieme di leggi che governano il passaggio di calore da un sistema ad un altro o da un punto ad un altro di uno stesso sistema, dei dispositivi coinvolti negli scambi di calore e delle leggi che danno la distribuzione di temperatura all'interno di un sistema in funzione dello spazio e del tempo.

19 Trasmissione del calore: generalità

Quando si conosce la potenza scambiata $\dot{Q}$, la quantità totale di calore scambiato Q durante un intervallo di tempo $\Delta\tau$ si può determinare con la relazione:

$$Q = \int_0^\tau \dot{Q} d\tau$$

Nel caso particolare in cui $\dot{Q}$ sia costante: $Q = \dot{Q} \cdot \Delta\tau$

Flusso termico Si definisce flusso termico la potenza riferita ad una superficie di aria unitaria. Il flusso termico medio (**flusso termico areico**) su una superficie si esprime:

$$\Phi \left[\frac{W}{m^2}\right] = \frac{\dot{Q}}{A}$$

Flusso di calore Il flusso di calore può essere definito dalla relazione:

$$\varphi = f\left(parametro,\, \Delta T\right)$$

parametro coefficiente che tiene conto della maggiore o minore facilità, con la quale, a parità di ΔT, ha luogo il trasferimento di calore; ΔT: differenza di temperatura.

19.1 La conduzione: in breve

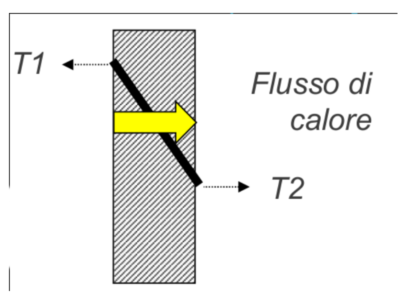
Conduzione La conduzione è il trasferimento di energia che si verifica per effetto dell'interazione delle particelle di una sostanza dotata di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia. Può avvenire:

- nei liquidi
- nei solidi
- nei gas

$$q^{\rightarrow} = -k\, grad\, T$$

- Nei liquidi e nei gas la conduzione è dovuta alla collisione delle molecole nel loro moto caotico
- Nei solidi è dovuta alla vibrazione delle molecole all'interno del reticolo e al trasporto di energia da parte degli elettroni liberi

Figure 65: *Conduzione*



Ad esempio La potenza termica trasmessa per conduzione attraverso una lastra piana indefinita di spessore costante è data da:

$$\dot{Q}_{COND} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

dove:

- $\dot{Q}_{COND}$ è la potenza termica trasmessa per conduzione $[W]$
  - k è la costante di proporzionalità o conducibilità termica del materiale $\left[\frac{W}{mK}\right]$
  - A è la superficie normale alla direzione di trasmissione del calore $\left[m^2\right]$
  - Δx è lo spessore $[m]$
  - ΔT è la differenza di temperatura $[K]$ o °C

19.2 La convezione: in breve

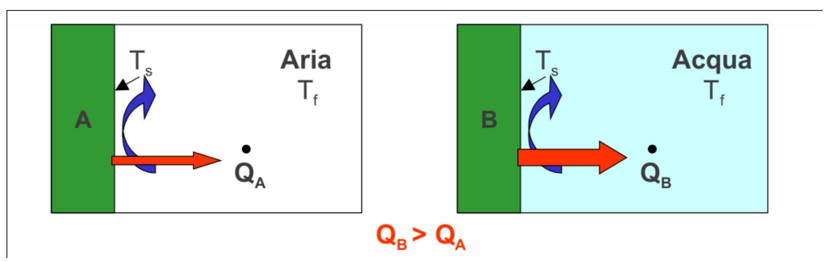
La convezione La convezione è il trasferimento di energia tra una superficie solida e un fluido adiacente in movimento.

- Implica gli effetti combinati di conduzione e trasporto di massa
- Il calore trasmesso per convezione aumenta con la velocità del fluido

Convezione forzata Avviene quando il fluido è forzato a scorrere su una superficie da mezzi esterni (ad esempio un ventilatore).

Convezione naturale (o libera) Avviene quando il moto del fluido è causato da forze ascensionali che sono indotte dalle differenze di densità dovute alla variazione di temperatura del fluido in un campo gravitazionale.

Figure 66: *Convezione*



La potenza termica trasmessa per convezione è espressa dalla relazione (Legge di Newton):

$$\dot{Q}_{CONV} = hA\left(T_s - T_f\right)$$

dove:

- h è il coefficiente di scambio termico convettivo $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$
- A è la superficie normale al flusso $\left[m^2\right]$
- T_s è la temperatura solido $[K]$
- T_f è la temperatura fluido $[K]$

19.3 L'irraggiamento: in breve

Irraggiamento L'irraggiamento è il trasferimento di energia che avviene attraverso le onde elettromagnetiche (o fotoni) prodotte da variazioni nelle configurazioni elettroniche degli atomi e delle molecole.

- Non richiede la presenza di un mezzo interposto (quindi avviene anche nel vuoto)
- Avviene alla velocità della luce
- Tutti i corpi a temperatura superiore allo zero termico emettono radiazione termica

La potenza massima termica trasmessa per irraggiamento da una superficie a temperatura assoluta T_s è data dalla Legge di *Stefan Boltzmann.*

19.3.1 Legge di Stefan Boltzmann

La legge di Stefan Boltzmann afferma che la potenza trasmessa da un'area A di un corpo ideale (detto **corpo nero**) è:

$$\dot{Q}_{e_{max}} = \sigma A \left(T_s\right)^4$$

Potenza emessa per irraggiamento La potenza emessa per irraggiamento da una qualsiasi superficie reale è invece data dalla relazione:

$$\dot{Q}_{emiss} = \epsilon \sigma A \left(T_s\right)^4$$

dove:

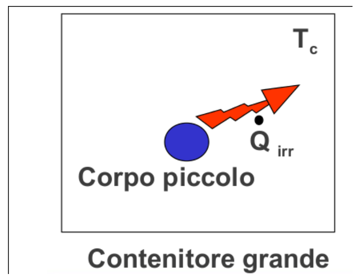
- ϵ è l'emissività della superficie il cui valore, compreso tra 0 e 1, è la misura di quanto il comportamento di una superficie si approssima a quella del corpo nero, per il quale $\epsilon = 1$

19.3.2 Potenza termica netta

Potenza termica netta Poiché nei corpi reali non tutta la radiazione elettromagnetica incidente viene riflessa si definisce potenza termica netta per irraggiamento la differenza tra la potenza termica radiante emessa e quella assorbita da una superficie. La determinazione della potenza termica netta scambiata è complessa in quanto dipende da numerosi fattori quali:

- Proprietà delle superfici
- Orientamento relativo
- Caratteristiche del mezzo tra le due superfici che irraggiano

Figure 67: *Irraggiamento*



Il caso di una superficie piccola è semplice:

$$\dot{Q}_{IRR} = \epsilon \sigma A \left(T_s^4 - T_c^4\right)$$

20 Conduzione

Definizione Per conduzione termica si intende la trasmissione di calore per contatto molecolare diretto. Il principio alla base della conduzione è diverso a seconda della struttura fisica del corpo: se la conduzione termica avviene nei gas è dovuta alla diffusione atomica e molecolare, se invece avviene nei liquidi e nei solidi è a causa di onde elastiche; nei materiali metallici il fenomeno è principalmente dovuto alla diffusione degli elettroni liberi dato che è trascurabile il contributo dell'oscillazione elastica del reticolo cristallino.

20.1 Equazione di Fourier

$$\bar{\nabla} = \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla} T = gradT = \overrightarrow{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = div\,\overrightarrow{v}$$

$$\bar{\nabla} \times \overrightarrow{v} = rot\,\overrightarrow{v}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\right)T &= laplaciano\, di\, T = \\
&= \left(\overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\overrightarrow{i}\frac{\partial T}{\partial x}+\overrightarrow{j}\frac{\partial T}{\partial y}+\overrightarrow{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

Definendo:

- $\overrightarrow{q}$ = vettore flusso di calore $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- k = conduttività termica $\left[\frac{W}{mK}\right]$
- σ = potenza generata nell'unità di volume $\left[\frac{W}{m^3}\right]$

Si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_v u\, dm &= \sum \dot{Q}^{\leftarrow}+\dot{Q}_{gen} = \\
&= \frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = \\
&= -\int_S \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{n}\, dS+\int_v \sigma dV
\end{aligned}
$$

Per il teorema della divergenza:

$$
\frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = -\int_v div\,\overrightarrow{q}\, dV+\int_v \sigma dV
$$

Ed essendo, per il postulato di Fourier:

$$
\overrightarrow{q} = -kgradT
$$

$$
\frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = -\int_v div\left(-kgradT\right)dV+\int_v \sigma dV
$$

Poiché V non è funzione di T e ipotizzando che k non dipenda dalla posizione:

$$
\int_v \frac{\partial}{\partial t}c_v\rho T dV-\int_v k\nabla^2 T dV-\int_v \sigma dV = 0
$$

$$
\int_v \left(\frac{\partial}{\partial t}c_v\rho T-k\nabla^2 T-\sigma\right)dV = 0
$$

Deve valere per ogni dV:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c_v \rho T\right) = k\nabla^2 T + \sigma$$

Ed infine si ricava l'**equazione di Fourier**:

$$\frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$

L'equazione di bilancio energetico (equazione di Fourier) è una equazione differenziale alle derivate parziali, lineare in $T = (x, y, z, t)$ del 2° ordine rispetto a x, y, z e del 1° ordine rispetto a t.

20.1.1 Casi particolari dell'equazione di Fourier

1. Assenza di generazione di potenza

$$\sigma = 0 \rightarrow \nabla^2 T = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

2. Regime stazionario (e prende il nome di **equazione di Poisson**)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

3. **Equazione di Laplace**

$$\sigma = 0\,;\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla^2 T = 0$$

20.2 Sistemi di coordinate

Nell'impostare il problema differenziale è importante scegliere il sistema di coordinate che permetta di eliminare una o più variabili indipendenti.

20.2.1 Coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma\left(x, y, z, t\right)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno)

Parete piana infinita secondo le direzioni y e z, $T = T(x)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma(x,t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che in caso di regime stazionario diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{k} = 0 \rightarrow^{\int dx} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\sigma}{k} \cdot x + A$$

$$T = -\frac{\sigma}{2k}x^2 + Ax + B$$

$$\dot{q} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -k\left(-\frac{\sigma}{k} \cdot x - A\right) = \sigma \cdot x - A \cdot k$$

Lastra piana monostrato senza generazione di potenza In assenza di generazione di potenza, ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T = T_1 & x = 0 \\ T = T_2 & x = s \end{cases}$$

Quindi:

$$T_1 = B$$

$$T_2 = A \cdot s + T_1$$

Ricavando A:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

Si ottiene:

$$T = A \cdot x + B = \frac{T_2 - T_1}{s} \cdot x + T_1$$

$$\dot{q} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -k \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{s}\right) = -\frac{\Delta T}{R}$$

20.2.2 Coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\sigma\left(r,\phi,z,t\right)}{k}=\frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno)

Cilindro pieno o cavo di altezza infinita, $T=T\left(r\right)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\sigma\left(r,t\right)}{k}=\frac{\rho c_V}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che in caso di regime stazionario diventa:

$$T=-\frac{\sigma}{4k}r^2+A\ln\frac{r}{B}=-\frac{\sigma}{4k}r^2+A\ln r+C$$

Cilindro indefinito

Il flusso termico dipende solo dal flusso radiale:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\sigma}{k}=0$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cdot r\right)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{k}$$

$$\rightarrow\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial r}\cdot r\right)}{\partial r}=-\frac{\sigma}{k}\cdot r$$

$$\rightarrow^{\int dx}\; r\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\frac{\sigma}{2k}\cdot r^2+C$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\frac{\sigma}{2k}\cdot r+\frac{C}{r}\;\rightarrow^{\int dx}\; T=-\frac{\sigma}{4k}\cdot r^2+C\cdot\ln\left(r\right)+D$$

$$\dot q=-k\frac{\partial T}{\partial r}=-k\left(-\frac{\sigma}{2k}\cdot r+\frac{C}{r}\right)=\frac{\sigma}{2}\cdot r-\frac{k}{r}\cdot C$$

Barra cilindrica piena (con generazione di potenza)

Ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$T = -\frac{\sigma}{4k} \cdot r^2 + C \cdot \ln(r) + D \rightarrow_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r + \frac{C}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & r = 0 \\ T = T_2 & r = R \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \mid_{r=0} = 0 \rightarrow C = 0$$

$$T = -\frac{\sigma}{4k} \cdot \left(R^2 - r^2\right) + T_2 \rightarrow_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r$$

$$\dot{q}_{areico} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2} \cdot r$$

$$\dot{q}_{per\, unit\grave{a}\, di\, lunghezza} = \pi r^2 \sigma$$

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot area\, scambio\, termico = \frac{\sigma}{2} r \cdot 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma = V\sigma$$

Cilindro cavo (senza generazione di potenza)

Ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T = T_i & r = R_i \\ T = T_e & r = R_e \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$\begin{cases} T_i = C \ln(R_i) + D \\ T_e = C \ln(R_e) + D \end{cases}$$

Facendo la differenza tra T_e e T_i:

$$T_e - T_i = C\left(\ln\left(R_e\right) - \ln\left(R_i\right)\right)$$

Quidi si ricava T:

$$T = C\cdot\ln\left(r\right)+D = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\cdot\ln\left(r\right)+T_i-\frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\cdot\ln\left(R_i\right) = T_i+\frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\cdot\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

Per $\dot{q}_{areico}$:

$$\dot{q}_{areico} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = k\frac{\left(T_i - T_e\right)}{\ln\frac{R_e}{R_i}}\cdot\frac{1}{r}$$

Per $\dot{q}_{per} unità\, di\, lunghezza$:

$$\dot{q}_{per} unità\, di\, lunghezza = \frac{2\pi k}{\ln\frac{R_e}{R_i}}\left(T_i - T_e\right)$$

E infine:

$$\dot{Q} = k\frac{T_i - T_e}{\ln\frac{R_e}{R_i}}\cdot\frac{1}{r}\cdot 2\pi r L = k\frac{T_i - T_e}{\ln\frac{R_e}{R_i}}2\pi L = cost$$

20.2.3 Coordinate sferiche

$$\frac{\partial T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\coth\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\sigma\left(r,\theta,\phi,t\right)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno)

Sfera piena o cava, $T = T\left(r\right)$

$$\frac{\partial T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma\left(r,t\right)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che in caso di regime stazionario:

$$T = -\frac{\sigma}{6k}r^2 + \frac{A}{r} + B$$

20.3 Conduzione attraverso una parete

Considerando costanti le temperature dell'aria all'interno e all'esterno dell'edificio, la trasmissione del calore per Conduzione attraverso una parete di un edificio può essere considerata:

- Stazionaria
- Mono dimensionale

Se non vi è alcuna generazione interna di calore, per il primo principio:

- Pot. Termica entrante - Pot. Termica Uscente = Pot. Termica acc ovvero:

$$\dot{Q}_e - \dot{Q}_u = \frac{dE_{parete}}{dt} \; Condizione\, al\, contorno$$

Poiché in condizioni stazionarie la potenza termica accumulata deve essere nulla, il flusso termico attraverso la parete deve essere costante.

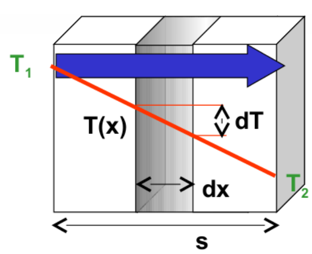
$$\dot{Q}_{cond} = cost$$

in quanto il flusso termico entrante deve uguagliare il flusso termico uscente.

In condizioni stazionarie e in assenza di generazione interna, la distribuzione di temperatura in una parete piana è una linea retta:

$$T = Ax + B$$

Figure 68: *Conduzione attraverso una parete*



Separando le variabili nell'equazione di Fourier e integrando da $x = 0$ dove $T(0) = T_1$ a $x = s$ dove $T(s) = T_2$, si ottiene:

$$\int_{x=0}^{s} \dot{Q}_{cond} dx = -\int_{T=T_1}^{T_2} kAdT$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s} \Delta T$$

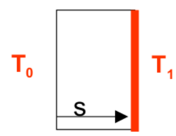
Dove:

- $\frac{k}{s}$ = *conduttanza* della parete $\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
- $\frac{s}{k}$ = *resistenza termica specifica* della parete al passaggio del calore $\left[\frac{m^2K}{W}\right]$ (resistenza termica specifica=resistenza termica, d'ora in avanti)

La proporzionalità diretta tra la quantità di calore e l'incremento di temperatura a parità di spessore è dimostrabile dalla seguente esperienza.

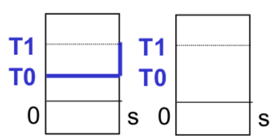
Si porta istantaneamente la faccia destra di una lastra ad una temperatura $T_1 > T_0$

Figure 69: Conduzione (1)



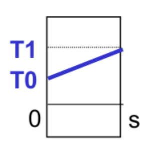
Durante il transitorio T è funzione, oltre che della coordinata s anche del tempo τ . Non si è quindi in regime stazionario o permanente

Figure 70: Conduzione (2)



Nella condizione a regime l'andamento del profilo delle temperature è lineare

Figure 71: Conduzione (3)



La relazione $\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s}\Delta T$, avendo posto $\frac{s}{k} = R_c$ resistenza termica, può anche essere espressa nella forma:

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_c}A\Delta T$$

dalla quale si evidenzia come $\dot{Q}_{cond}$ sia inversamente proporzionale alla resistenza termica del materiale.

La resistenza termica a sua volta è:

- direttamente proporzionale allo spessore della parete
- inversamente proporzionale alla conducibilità λ della parete

A parità di spessore, offriranno una maggiore resistenza termica al passaggio di calore le pareti costituite da materiali con λ più piccola.

20.3.1 Parete piana monostrato

Abbiamo esaminato il fenomeno della trasmissione del calore per Conduzione ed abbiamo appreso che, considerando che in una parete piana:

- il flusso di calore sia mono direzionale, ossia normale alla superficie della parete
- non vi sia alcuna generazione interna di calore
- il regime sia stazionario, ossia che sia superata la fase transitoria e che la distribuzione delle temperature all'interno della parete non risenta del tempo t.

La quantità di calore che attraversa la parete nell'unità di tempo, (la potenza termica) integrando la relazione di Fourier, risulta:

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s}\Delta T$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_{tot}}A\Delta T$$

$$R_{tot} = \sum \frac{s_n}{k_n}$$

R_T è la resistenza termica totale, ossia la sommatoria delle resistenze di ogni singolo strato di materiale considerato isotropo.

La resistenza al passaggio di calore per conduzione è direttamente proporzionale allo spessore S ed inversamente proporzionale alla conducibilità termica k.

20.3.2 Modellizzazione parete cilindrica Indefinita

Ipotizzando che la trasmissione di calore avvenga in direzione radiale e stazionariamente

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr}$$

$$\vec{q} = -kgradT$$

Separando le variabili nell'equazione di Fourier, ricordando che l'area attraverso la quale viene scambiato il calore è quella laterale del cilindro, e integrando da $r = r_1$ dove $T(r_1) = T_1$ a $r = r_2$ dove $T(r_2) = T_2$, si ottiene:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}}{A} = -\int_{T_1}^{T_2} k\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{\dot{Q}}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{Q} = \frac{-2\pi Lk}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\Delta T$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_{tot}}\Delta T$$

$$R_{cilindro} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi Lk}$$

20.3.3 Modellizzazione per sfere

Con procedimento analogo ai cilindri, per le sfere $\left(A = 4\pi r^2\right)$ si ottiene:

$$\dot{Q} = 4\pi r_1 r_2 k\frac{(T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)}$$