

**Appunti di Meccanica**  
**2014/2015**

# Contents

<b>1</b>	<b>Cinematica</b>	<b>4</b>
1.1	Cinematica del punto . . . . .	4
1.1.1	Legge oraria . . . . .	4
1.1.2	Traiettoria . . . . .	5
1.1.3	Ascissa curvilinea . . . . .	6
1.1.4	Velocità . . . . .	6
1.1.5	Accelerazione . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Cinematica del Corpo Rigido</b>	<b>9</b>
2.1	Proprietà del corpo rigido . . . . .	10
2.2	Teorema di Rivals . . . . .	14
2.3	Vincoli elementari . . . . .	14
2.4	Puro rotolamento di un disco . . . . .	15
2.4.1	Posizione del punto $O$ del disco . . . . .	18
2.4.2	Velocità del centro $O$ del disco . . . . .	18
2.4.3	Accelerazione del centro $O$ del disco . . . . .	18
2.4.4	Velocità angolare del disco . . . . .	18
2.4.5	Accelerazione angolare del disco . . . . .	19
2.4.6	Velocità del punto $P$ . . . . .	19
2.4.7	Modulo della velocità del punto $P$ . . . . .	19
2.4.8	Accelerazione di $P$ . . . . .	20
2.4.9	Cicloide: traiettoria di un punto $P$ del disco lungo il perimetro esterno . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Moti relativi</b>	<b>21</b>
3.1	Alcuni esempi . . . . .	21
3.2	Posizione di $P$ . . . . .	23
3.3	Velocità assoluta di $P$ . . . . .	23
3.4	Accelerazione assoluta di $P$ . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Cinematica di sistemi di corpi rigidi</b>	<b>27</b>

## List of Figures

1	<i>Rappresentazione del vettore posizione <math>\overline{OP}</math> nel piano cartesiano</i>	4
2	<i>Traiettoria: curva nel piano cartesiano</i>	5
3	<i>Distanza tra due punti</i>	6
4	<i>Componenti del vettore velocità <math>\vec{v}</math></i>	7
5	<i>Spostamento infinitesimo</i>	8
6	<i>Moto traslatorio</i>	10
7	<i>Moto rotatorio</i>	11
8	<i>Moto roto-traslatorio</i>	11
9	<i>Atto di moto: caso 1</i>	12
10	<i>Atto di moto: caso 2</i>	12
11	<i>Atto di moto: caso 3</i>	13
12	<i>Corpo rigido (spostamento)</i>	13
13	<i>Vincolo di incastro</i>	14
14	<i>Vincolo di cerniera</i>	14
15	<i>Vincolo di pattino/manicotto</i>	15
16	<i>Vincolo di carrello</i>	15
17	<i>Vincolo di puro rotolamento di un disco</i>	16
18	<i>Dimostrazione: vincolo di puro rotolamento con un singolo grado di libertà</i>	17
19	<i>Velocità del punto <math>P</math></i>	19
20	<i>Modulo della velocità di <math>P</math></i>	19
21	<i>Accelerazione del centro di istantanea rotazione <math>C</math></i>	20
22	<i>Cicloide</i>	21
23	<i>Moti relativi: esempio 1</i>	21
24	<i>Moti relativi: esempio 2</i>	22
25	<i>Sottocasi dell'esempio 2</i>	22
26	<i>Moti relativi: posizione di <math>P</math></i>	23
27	<i>Contributi di <math>x'_P \frac{d\vec{i}}{dt}</math> e <math>y'_P \frac{d\vec{j}}{dt}</math> nella velocità di <math>P</math></i>	24

# 1 Cinematica

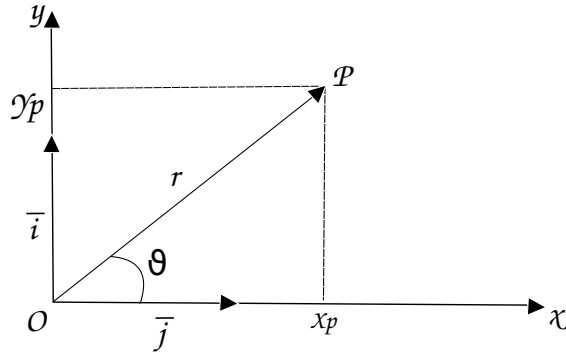
La cinematica è parte della meccanica che studia il movimento a prescindere dalle cause del movimento stesso (a differenza della dinamica).

Il **movimento** è evoluzione nel tempo della posizione di un corpo o sistema di corpi.

## 1.1 Cinematica del punto

Per descrivere la posizione del sistema bisogna definire uno o più osservatori che possano “vederlo” in modo diverso, ovvero bisogna definire un sistema di riferimento (sistema di riferimento cartesiano, Figura 1).

Figure 1: *Rappresentazione del vettore posizione  $\overline{OP}$  nel piano cartesiano*



**Posizione di P** La posizione di un punto P è un vettore con direzione passante per P e origine O, verso da O a P e modulo  $= \overline{PO}$ .

$$\vec{P} = (P - O) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = x + i \cdot y = r e^{i\theta}$$

$x + i \cdot y$ : corrispondenza fra punti del piano e numeri complessi;

$r e^{i\theta}$ : coordinate polari.

Il movimento implica che il vettore  $\vec{P}$  varia nel tempo, dunque possiamo scrivere:

$$\vec{P}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

### 1.1.1 Legge oraria

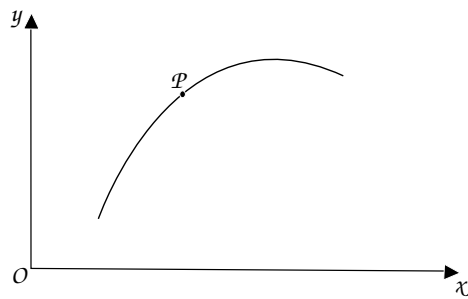
**Legge oraria** Una volta fissato il sistema di riferimento (ad es. cartesiano), il moto è completamente descritto dalla legge oraria, costituita dall'insieme delle tre funzioni:

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$$

### 1.1.2 Traiettoria

**Traiettoria** La linea nello spazio costituita dai punti via via occupati da un punto materiale (Figura 2); si assume che sia sempre continua, perché il moto è sempre continuo (in fisica classica, almeno). La sua equazione si ottiene eliminando la variabile  $t$  dal sistema che descrive la legge oraria. In base al tipo di traiettoria si dà una prima classificazione del moto, che può essere: rettilineo, circolare, ellittico, genericamente curvilineo, ecc.

Figure 2: *Traiettoria: curva nel piano cartesiano*



Se per esprimere una generica curva, come quella in figura 2, nel piano usiamo:

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$$

l'espressione è in forma parametrica.

Per esprimerla in forma esplicita invece usiamo:

$$y = f(x) + \text{legge di moto}$$

### 1.1.3 Ascissa curvilinea

**Ascissa curvilinea** Una volta nota la traiettoria, si può fissare su di essa un'origine ed un verso, con una freccia (entrambi convenzionali, arbitrari). Si dice allora *ascissa curvilinea*  $s$  di un generico punto della traiettoria la distanza, misurata sulla curva di traiettoria, del punto dall'origine, presa con segno positivo o negativo a seconda che il punto si trovi nella zona della traiettoria verso cui punta la freccia, oppure nell'altra zona.

Ovvero, è la distanza lungo la traiettoria di  $P$  da un riferimento  $P_o(t_o) \in$  traiettoria, corrispondente ad un determinato istante di tempo.

Allora la legge di moto è rappresentabile con:

$$s = s(t)$$

La posizione del punto  $P$  diventa:

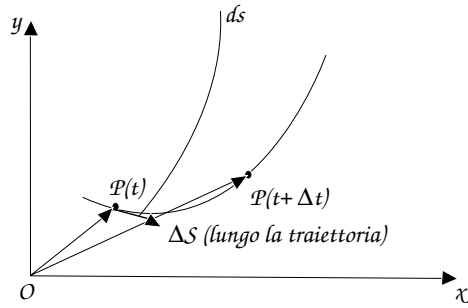
$$\vec{P} = \vec{P}(s(t))$$

### 1.1.4 Velocità

**Velocità di un punto** Vettore ottenuto derivando la posizione del punto  $P$  rispetto al tempo (Figura 4).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

Figure 3: Distanza tra due punti



$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \dot{s}$$

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$$

$\Delta \vec{P}$ : distanza tra due punti  $P(t + \Delta t)$  e  $P(t)$  è la corda sottesa all'arco  $\Delta S$  (Figura 3).

Per  $\Delta S \rightarrow 0$ , arco e corda tendono a coincidere.

$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{P}}{ds} \right| = 1$  direzione e verso sempre tangente all'arco perché si tratta di una corda.

Allora  $\frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{t}$  è il versore tangente alla traiettoria nel punto P.

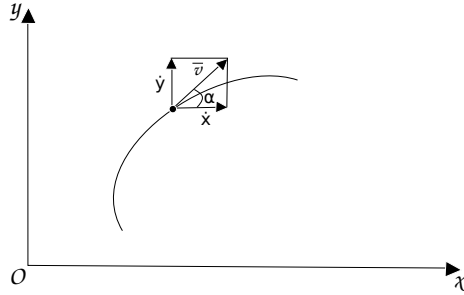
$$\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{t}$$

$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = \dot{x} + \vec{i} \cdot \dot{y} = v e^{i\alpha}$$

dove:

- $\alpha$  : angolo formato da  $\vec{v}$  con l'asse reale;
- $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ;
- $\alpha = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ;

Figure 4: Componenti del vettore velocità  $\vec{v}$



$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ , dove  $f'(x)$  è la derivata prima della traiettoria rispetto a x.

### 1.1.5 Accelerazione

**Accelerazione** Vettore ottenuto derivando la velocità  $\vec{v}$  rispetto al tempo.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) + \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \\ &= \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \cdot \dot{s} \end{aligned}$$

dove si ricorda che  $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ .

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + \dot{s}^2 \cdot \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2}$$

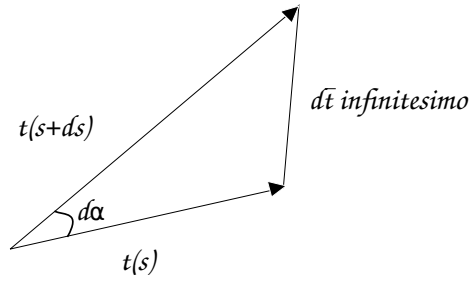
Dimostriamo che  $\frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$ , con:

- $\rho$  = raggio del cerchio osculatore alla traiettoria in P (cerchio che meglio approssima la traiettoria nell'intorno della posizione considerata);
- $\vec{n}$  = versore normale alla traiettoria ( $\vec{n} \perp \vec{t}$ ).

Allora:

$$ds = \rho \cdot d\alpha \implies d\alpha = \frac{ds}{\rho}$$

Figure 5: *Spostamento infinitesimo*



Considero il vettore  $d\vec{t} = \vec{t}(s+ds) - \vec{t}(s)$ . Poiché parliamo di quantità infinitesime (Figura 5),  $d\vec{t} \cong ds$ . Allora:

$$|d\vec{t}| = \rho \cdot d\alpha = 1 \cdot d\alpha$$

implica:

$$|d\vec{t}| = \frac{ds}{\rho}$$

che a sua volta implica:

$$d\vec{t} = \frac{ds}{\rho} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$$

come volevasi dimostrare.

Allora  $\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \cdot \vec{n}$  è la somma di due componenti, una tangenziale ( $\vec{t}$ ) e una normale ( $\vec{n}$ ).

$$\vec{a} = a_t \cdot \vec{t} + a_n \cdot \vec{n}$$



Osservazioni:

- la componente normale è sempre centripeta;
- $\rho > 0$  perché raggio;
- $\dot{s}^2 > 0$  perché al quadrato;
- la componente tangenziale giustifica una variazione di modulo della velocità;
- la componente normale giustifica una variazione di direzione della velocità.
- con moto uniforme:  $a_t = 0$ ;
- con moto rettilineo:  $a_n = 0$ .

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = \ddot{x} + i \cdot \ddot{y}$$

Inoltre:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v \cdot e^{i\alpha}) = \dot{v} \cdot e^{i\alpha} + v \cdot i \dot{\alpha} e^{i\alpha} = \ddot{s} \cdot e^{i\alpha} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

dove abbiamo che:

- $\dot{v} \cdot e^{i\alpha} = \ddot{s} \cdot e^{i\alpha}$
- $v \cdot i \dot{\alpha} e^{i\alpha} = v \cdot \dot{\alpha} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\alpha} = v \cdot \dot{\alpha} \cdot e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$

dove  $e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$  indica una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$ , quindi risulta ortogonale alla velocità.

- $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \dot{s} \implies v \cdot i \dot{\alpha} e^{i\alpha} = \dot{s} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \dot{s} \cdot e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$

## 2 Cinematica del Corpo Rigido

**Posizione del corpo** Definire la posizione di tutti i punti componenti il corpo che sono infiniti.

**Atto di moto di un corpo** Insieme delle velocità di tutti i punti del corpo in un preciso istante di tempo.

**Spostamento infinitesimo** Le posizioni di tutti i punti del corpo variano di una differenza infinitesima.

N.B.: le traiettorie, velocità, accelerazioni sono parallele ad un piano chiamato *piano direttore*, che non deve essere necessariamente lo stesso per tutte e tre

**Spostamento rigido** Un corpo subisce uno spostamento rigido se “a valle” dello spostamento è possibile definire un nuovo sistema di riferimento (s.d.r.) rispetto al quale la posizione del corpo risulta invariata; in pratica i punti si spostano tutti nello stesso modo.

**Corpo rigido** Un corpo che può subire solo spostamenti rigidi e nessuna variazione di forma o dimensione. Quindi basta conoscere la posizione di un punto del corpo e la sua orientazione per conoscere la sua posizione nello spazio, cioè  $x$ ,  $y$  e  $\varphi$ .

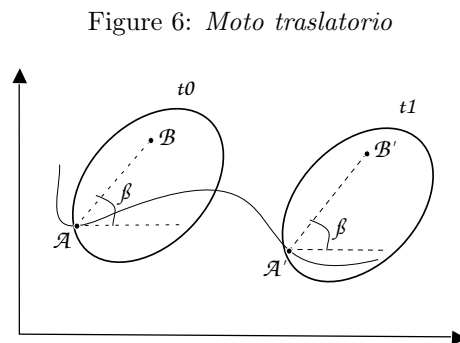
## 2.1 Proprietà del corpo rigido

Considerando un corpo rigido si passa da  $\infty^2$  gradi di libertà a 3 gradi di libertà, ovvero:

- $x_A(t)$ ;
- $y_A(t)$ ;
- $\varphi(t)$ .

Considerando il movimento “in grande” abbiamo tre tipi di movimento:

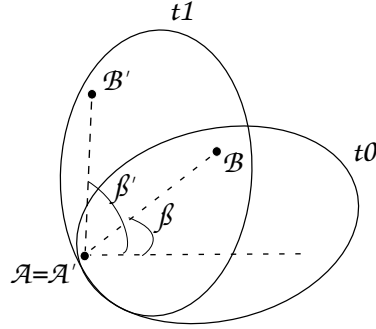
- *moto traslatorio* (Figura 6): tutti i punti hanno stessa velocità e traiettorie parallele;



N.B.: il moto traslatorio non è un moto rettilineo, l'unica cosa che lo rende tale è che l'orientazione non cambia nel tempo ma la traiettoria può non essere una retta.

- *moto rotatorio* (Figura 7): è possibile definire un punto (interno o esterno del corpo) che non cambia posizione rispetto al corpo;

Figure 7: *Moto rotatorio*



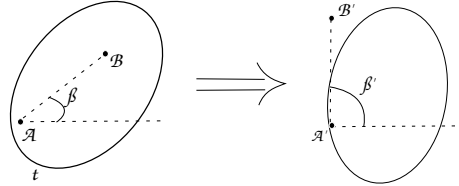
Il corpo ha subito una rotazione di  $\varphi$  il cui asse passa per A ed è ortogonale al piano e:

$$\varphi = \beta' - \beta$$

Nel moto rotatorio tutti i punti del corpo hanno una traiettoria circolare con centro nel centro di rotazione.

- *moto roto-traslatorio* (Figura 8): può essere visto come una composizione tra il moto traslatorio e il moto rotatorio.

Figure 8: *Moto roto-traslatorio*



Nel piano l'*atto di moto* si riduce a:

- rotatorio: esiste un punto appartenente al corpo o ad esso solidale che ha velocità nulla, ovvero:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b = \vec{v}_c$$

- traslatorio: la velocità di tutti i punti corrisponde in direzione, modulo e verso, ovvero:

$$\exists c \mid \vec{v}_c = 0$$

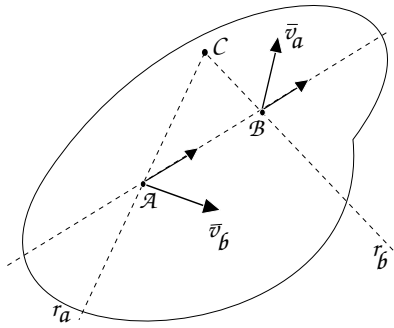
Consideriamo ad esempio i punti  $A, B \implies \vec{v}_a, \vec{v}_b$ ; possiamo analizzare tre casi:

1. le direzioni di  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_b$  diverse;
2.  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_b$  parallele con stesso modulo e verso;
3.  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_b$  con modulo  $\neq$ .

Nel primo caso, schematizzato in Figura 9, abbiamo:

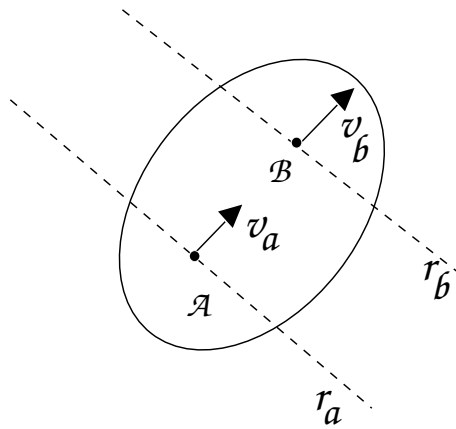
- $r_a$  retta ortogonale a  $\vec{v}_a$  passante per  $A$ ;
- $r_b$  retta ortogonale a  $\vec{v}_b$  passante per  $B$ ;
- tutti i punti di  $r_a$  devono avere la stessa velocità di  $A$ ;
- tutti i punti di  $r_b$  devono avere la stessa velocità di  $B$ ;
- $\vec{v}_c = 0$ .

Figure 9: *Atto di moto: caso 1*



Nel secondo caso, schematizzato in Figura 10, il centro di istantanea rotazione è a distanza infinita. Si può dimostrare che tutti i punti devono avere la stessa velocità.

Figure 10: *Atto di moto: caso 2*



Nel terzo caso (Figura 11), se le due velocità  $v_a$  e  $v_b$  sono parallele ma di modulo diverso allora devono necessariamente essere ortogonali alla retta che passa per i due punti altrimenti si violerebbe la rigidità del corpo rigido. L'unica possibilità è che le due  $v$  siano ortogonali ad una retta passante per due punti.

Figure 11: *Atto di moto: caso 3*

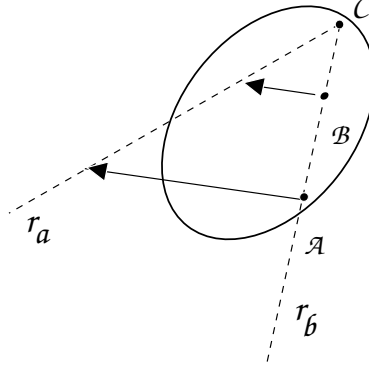
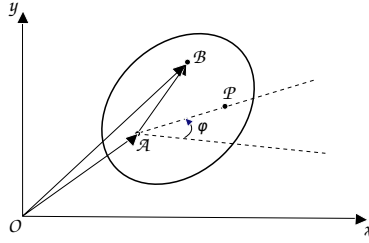


Figure 12: *Corpo rigido (spostamento)*



Facendo riferimento alla Figura 12, si può scrivere:

$$(B - O) = (A - O) + (B - A)$$

$$\beta - \varphi = \text{cost.}$$

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dt} (B - O) = \frac{d}{dt} (A - O) + \frac{d}{dt} (B - A), \text{ con } \frac{d}{dt} (A - O) = \vec{v}_A$$

$$\frac{d}{dt} (B - A) = \frac{d}{dt} (\bar{B} A e^{i\beta}) = i \dot{\beta} \bar{B} A e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

$$\dot{\beta} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$\vec{\omega} = \dot{\beta} \vec{k}$$

## 2.2 Teorema di Rivals

Per lo studio delle accelerazioni si fa uso del teorema di Rivals .

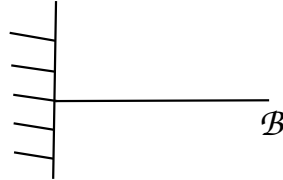
$$\begin{aligned}\vec{v}_b &= v_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \\ a_B &= \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} (B - A), \text{ con } \frac{dv_a}{dt} = \vec{a}_a \text{ e } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_a + \vec{\omega} \wedge (B - A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) \\ \text{con } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (B - A)) &= -|\vec{\omega}|^2 (B - A).\end{aligned}$$

## 2.3 Vincoli elementari

**Vincoli elementari** I vincoli elementari sopprimono direttamente uno o più gradi di libertà del corpo rigido: può essere soppresso rispetto alla terra o rispetto ad un secondo corpo. Sono di 4 tipi:

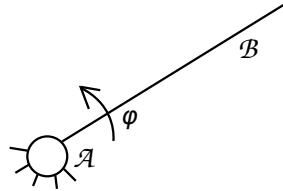
1. vincolo di incastro, Figura 13;
2. vincolo di cerniera, Figura 14;
3. vincolo di pattino/manicotto, Figura 15;
4. vincolo di carrello (composizione di cerniera e di pattino), Figura 16.

Figure 13: *Vincolo di incastro*



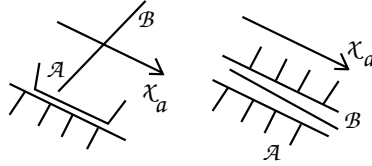
$$\begin{cases} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \\ \varphi &= 0 \end{cases}$$

Figure 14: *Vincolo di cerniera*



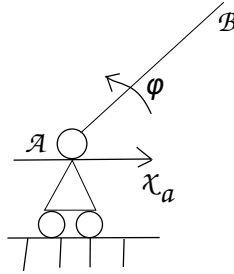
$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \varphi \neq 0 \end{cases}$$

Figure 15: *Vincolo di pattino/manicotto*



$$\begin{cases} x_A \neq 0 \\ y_A = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Figure 16: *Vincolo di carrello*

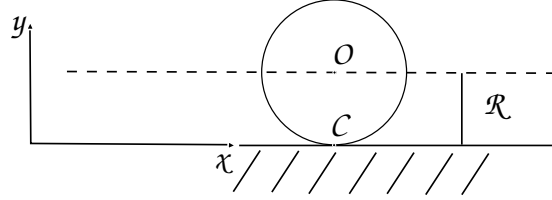


$$\begin{cases} x_A \neq 0 \\ y_A = 0 \\ \varphi \neq 0 \end{cases}$$

## 2.4 Puro rotolamento di un disco

Il vincolo di puro rotolamento di un disco su una guida non è un vincolo elementare. Per introdurre tale vincolo si consideri il semplice vincolo di contatto e analizzando il caso più semplice con una guida orizzontale rettilinea e un disco a contatto con questa guida.

Figure 17: *Vincolo di puro rotolamento di un disco*



Facendo riferimento alla Figura 17 si ha che:

- $O$  è l'origine del disco;
- $C$  è il punto di contatto del disco con la guida;
- $R$  è il raggio del disco;
- $(x, y)$  è il sistema di riferimento assoluto.

Il vincolo di contatto tra il disco e la guida introduce due aspetti:

1. Il disco è considerato un corpo rigido e la stessa cosa per la guida; ci deve essere assenza di compenetrazione tra i due corpi;
2. Si ipotizzi che non ci sia distacco tra il disco e la guida.

Poste queste due condizioni risulta che la velocità lungo l'asse  $y$ , ovvero quella ortogonale al contatto deve essere nulla:  $v_{C_y} = 0$ , altrimenti non verrebbe rispettata la condizione 2. Anche il centro del disco  $O$  avrà velocità lungo  $y$  nulla:  $v_{O_y} = 0$ . Il punto  $O$  compie una traiettoria rettilinea orizzontale parallela all'asse  $x$  e quindi alla guida, e perpendicolare al raggio  $R$  del disco con distanza dalla guida pari proprio ad  $R$ .

In generale, nel momento in cui si ha un semplice vincolo di contatto, la velocità lungo l'asse  $x$  è diversa da zero:  $v_{C_x} \neq 0$ . Tale velocità viene detta *velocità di strisciamento*. Se invece anche  $v_{C_x} = 0$  si è nella condizione di vincolo di puro rotolamento o altrimenti detto rotolamento senza strisciamento. In questa condizione risulta che:

$$\begin{cases} v_{C_y} &= 0 \\ v_{C_x} &= 0 \end{cases}$$

e quindi la velocità complessiva del punto  $C$  è nulla:  $\vec{v}_C = 0$ .

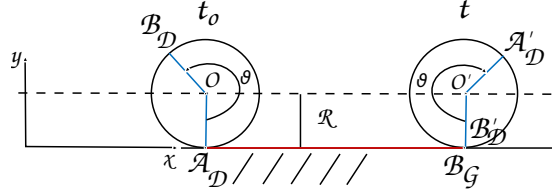
$C$  risulta essere il centro di istantanea rotazione del disco, ovvero quel punto che ad un istante fissato risulta avere velocità nulla.

Il vincolo di contatto introduce un grado di vincolo (elimina un grado di libertà del sistema) poiché impone che  $O$  non subisca nessuno spostamento ortogonale, ma soltanto a compiere una traiettoria rettilinea ortogonale alla guida.



### DIMOSTRAZIONE:

Figure 18: *Dimostrazione: vincolo di puro rotolamento con un singolo grado di libertà*



Si consideri la Figura 18 che rappresenta un disco in due istanti successivi. L'istante iniziale è  $t_0$ , quello successivo è  $t$ .

- $A_D$ : punto di contatto  $\in$  al disco all'istante iniziale  $t_0$ ;
- $A_G$ : punto di contatto  $\in$  alla guida all'istante iniziale  $t_0$ ;

Ad un generico istante  $t$  il disco sarà avanzato e si avrà:

- $B_D$ : punto generico  $\in$  al disco che si troverà sulla guida ad un certo istante di tempo;
- $A'_D$ : il punto  $B_D \in$  al disco al generico istante  $t$ ;
- $B_G$ : punto di contatto  $\in$  alla guida all'istante generico  $t$ ;
- $B'_D$ : punto di contatto  $\in$  al disco all'istante generico  $t$ ;
- $\theta$ : rappresenta la rotazione che il disco compie per passare dalla condizione iniziale  $t_0$  alla condizione all'istante  $t$ ; rimane invariato.

La condizione di puro rotolamento impone che  $A_G$ ,  $B_G$  e l'arco di circonferenza compreso tra  $A_D$  e  $B_D$  abbiano la stessa lunghezza:  $\overline{A_G B_G} = \widehat{A_D B_D}$ . In altre parole impone che l'ente cinematico che rappresenta il punto di contatto appartenente al disco e quello appartenente alla guida durante il moto compiano sostanzialmente lo stesso percorso lungo le due superfici dei due corpi a contatto. Questo risultato consente di introdurre un legame tra la rotazione del disco e la posizione del suo centro  $C$ . Infatti  $A_G B_G$  rappresenta l'ascissa curvilinea di  $O$  che individua dove è posizionato lungo la traiettoria rettilinea. Risulta che:  $\overline{O' O} = \overline{A_G B_G}$

$$s = R \cdot \theta, \text{ dove } s \text{ rappresenta l'arco di circonferenza } \widehat{A_D B_D}$$

#### 2.4.1 Posizione del punto $O$ del disco

La posizione del punto  $O$  è esprimibile:

$$x_o(t) = x_o(t_0) + s(t) = x_o(t_0) + R \cdot \theta(t)$$

La condizione di rotolamento senza strisciamento impone un vincolo ulteriore sottoforma di legame tra la posizione del centro  $C$  del disco lungo  $x$  e la rotazione del disco stesso, ovvero la sua orientazione. Il disco possiede quindi un singolo grado di libertà residuo poiché si può indifferentemente descrivere completamente la sua posizione definendo:

- la posizione di  $O$  per risalire poi al valore di  $\theta$ ;

oppure:

- la posizione di  $\theta$  per ricostruire la posizione del centro del disco.

#### 2.4.2 Velocità del centro $O$ del disco

La velocità è parallela e tangente a  $\overline{OO'}$ .

L'unica velocità è quella lungo  $x$  pari a:

$$v_O(t) = \dot{s} = R \cdot \dot{\theta}$$

Esprimendola sotto forma di vettori si ha:

$$\vec{v}_O = v_O \cdot \vec{i} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i}$$

#### 2.4.3 Accelerazione del centro $O$ del disco

L'accelerazione è parallela e tangente a  $\overline{OO'}$  ed è pari a:

$$a_O(t) = \dot{v}_O(t) = \ddot{s}(t) = R \cdot \ddot{\theta}$$

Esprimendola sotto forma di vettori si ha:

$$\vec{a}_O = a_O \cdot \vec{i} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{i}$$

Per esprimere la velocità e l'accelerazione angolari di un punto qualsiasi del disco diverso dal centro  $O$  si può ricorrere al teorema di Rivals (Sezione 2.2).

#### 2.4.4 Velocità angolare del disco

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}(\vec{k})$$

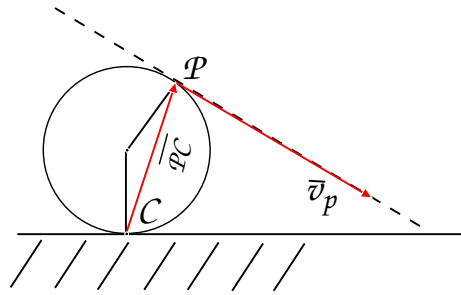
dove  $\vec{k}$  è il versore uscente dal piano, indica rotazioni in generale positive se compiute in senso antiorario, mentre nel caso considerato  $\theta$  è positiva se la rotazione è compiuta in senso orario (ecco il perché del  $-$  nella formula).

#### 2.4.5 Accelerazione angolare del disco

$$\dot{\vec{\omega}} = -\ddot{\theta} \left( \vec{k} \right)$$

#### 2.4.6 Velocità del punto $P$

Figure 19: *Velocità del punto  $P$*



La velocità del punto  $P$  per il teorema di Rivals è pari a:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C) + \vec{v}_C$$

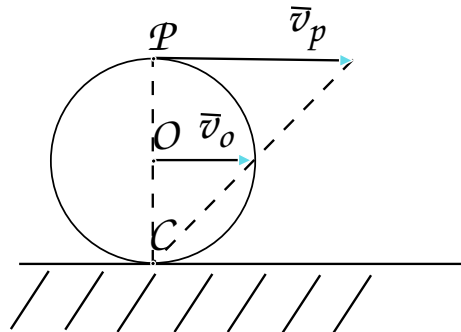
ma poiché  $C$  è centro di istantanea rotazione si ha che  $\vec{v}_C = 0$ , e quindi:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

Il vettore  $\vec{v}_P$  è appartenente al piano (ovvero ortogonale alla velocità angolare) e ortogonale a  $(P - C)$  (vedi Figura 19).

#### 2.4.7 Modulo della velocità del punto $P$

Figure 20: *Modulo della velocità di  $P$*



$$|\vec{v}_P| = |\vec{\omega}| \cdot \overline{PC}$$

Le velocità del centro del disco, per il teorema di Rivals, sono pari a:

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge (O - C) = -\dot{\theta} \vec{k} \wedge R \vec{j} = \dot{\theta} R \cdot \vec{i}$$

con  $\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{k}$  e  $(O - C) = R \vec{j}$ . Inoltre  $-\vec{i} = \vec{k} \wedge \vec{j}$  poiché opposto seguendo la regola della mano destra.

La velocità di un punto  $P$  opposto al centro di istantanea rotazione  $C$  del disco è pari a, per il teorema di Rivals:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C) = 2\dot{\theta} R \vec{i} = 2\vec{v}_O$$

con  $\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{k}$  e  $(P - C) = 2R \vec{j}$ .

Come si può osservare in Figura 20, la distribuzione della velocità è triangolare.  $P$  si trova a distanza doppia rispetto a  $C$  e quindi ha velocità doppia rispetto ad  $O$ . Tutti i punti intermedi hanno velocità distribuita triangolarmente compresa tra  $v_O$  e  $v_P$ .

#### 2.4.8 Accelerazione di $P$

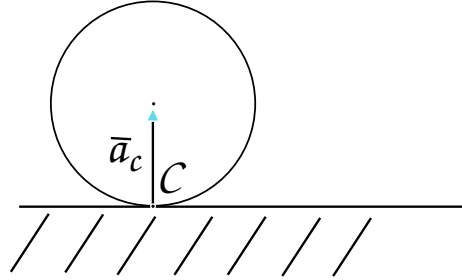
Poiché il centro di istantanea rotazione ha velocità nulla ma in generale ha accelerazione diversa da 0, applicando Rivals rispetto al punto  $O$  di cui si conosce l'accelerazione, si può determinare l'accelerazione di  $C$  (vedi Figura 21):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - O) - \omega^2 (C - O)$$

ma  $\dot{\vec{\omega}} = -\ddot{\theta} \vec{k}$ ,  $(C - O) = -R \vec{j}$  e  $\vec{a}_O = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{i}$  si può scrivere:

$$\vec{a}_C = R\ddot{\theta} \vec{j}$$

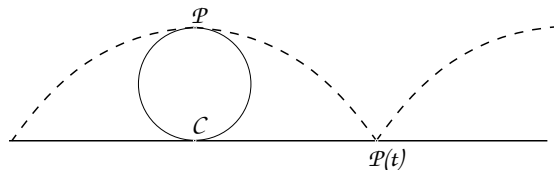
Figure 21: Accelerazione del centro di istantanea rotazione  $C$



#### 2.4.9 Cicloide: traiettoria di un punto $P$ del disco lungo il perimetro esterno

Considerando la traiettoria di un punto generico lungo il perimetro esterno del nostro disco, essa prende il nome di *cicloide* (Figura 22).

Figure 22: *Cicloide*



Nel momento in cui il punto  $P$  arriva a contatto con la guida e diventa quindi centro di istantanea rotazione del disco, presenta un punto angoloso (cuspidè), ovvero la tangente al CIR (centro di istantanea rotazione) è verticale e infatti la velocità in quel punto si annulla.

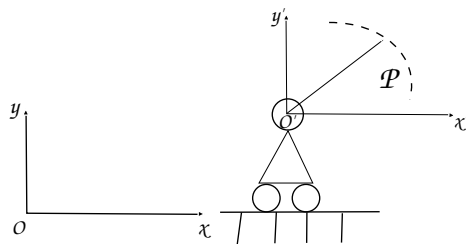
Se la  $\vec{a}_C$  fosse anche essa nulla,  $C$  non sarebbe soltanto CIR ma anche centro di rotazione del disco.

### 3 Moti relativi

L'utilizzo di diversi sistemi di riferimento in generale consente di scomporre il moto complesso di un corpo in moti più semplici da analizzare. Ovviamente perché questo avvenga i sistemi di riferimento devono essere scelti in maniera opportuna considerando i vincoli applicati al sistema e tale scelta deve basarsi sulla possibilità, una volta utilizzati i diversi sdr, di descrivere il moto del punto preso in interesse come un moto che avviene lungo una traiettoria semplice.

#### 3.1 Alcuni esempi

Figure 23: *Moti relativi: esempio 1*



In Figura 23 si descrive un'asta (corpo rigido) vincolata ad un carrello che si muove lungo una guida orizzontale.

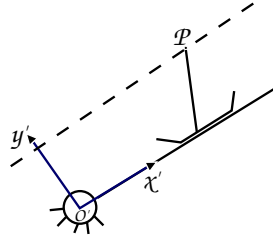
- $x, O, y$ : sistema di riferimento assoluto.

Tenendo conto del vincolo di carrello si può introdurre:

- $x', O', y'$ : sistema di riferimento mobile (o anche detto relativo), rispetto al quale il punto  $P$  compie una traiettoria circolare ed è quindi relativamente

semplice descrivere il suo moto relativo rispetto al sdr relativo.  $O'$  compie un moto orizzontale poiché è fissato nel centro del carrello.

Figure 24: *Moti relativi: esempio 2*



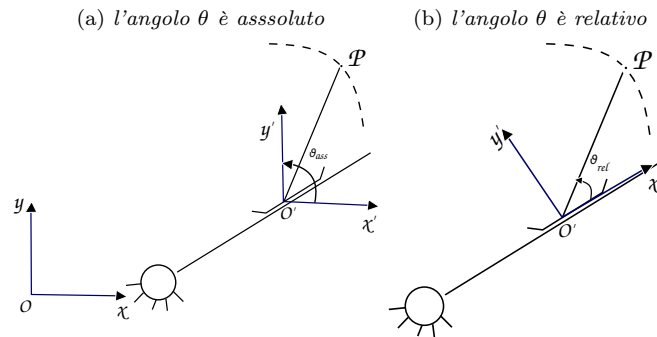
In Figura 24 si osserva un'asta incernierata a terra ed una seconda vincolata alla prima attraverso un vincolo di pattino.

La seconda asta non può avere una rotazione rispetto alla prima.

- $O'$ : origine del sdr relativo posta nella cerniera a terra;
- il sdr mobile ruota solidalmente con l'asta incernierata a terra;
- $P$  compie una traiettoria rettilinea parallela all'asse  $x'$  ( $\parallel$  all'asse a terra).

La scelta del sdr relativo non è univoca e in base alla scelta si possono avere diversi casi come quelli in Figura 25:

Figure 25: *Sottocasi dell'esempio 2*



Nel caso (a) il sdr relativo ha origine  $O'$  nel punto di collegamento delle due aste, e assi  $x'$  e  $y'$  paralleli durante tutto il moto agli assi  $x$  e  $y$  del sdr assoluto. Quindi il moto è puramente traslatorio senza cambio di orientazione ( $\theta$  è assoluto).

Nel caso (b) il sdr relativo ha origine  $O'$  nel punto di collegamento delle due aste, e assi  $x'$  e  $y'$  che ruotano solidalmente insieme alla prima asta, con  $x'$

diretto come la prima asta e  $y'$  ortogonale ad essa. In questo caso l'angolo  $\theta$  non è più riferito al sdr assoluto ma è un angolo relativo.

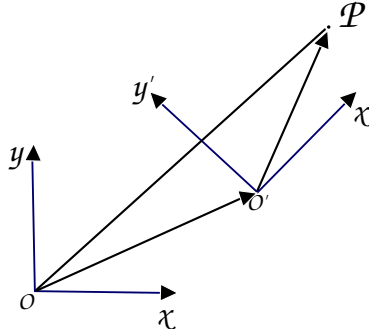
Sia nel caso (a) che nel caso (b) il punto  $P$  compie una traiettoria circolare.

### 3.2 Posizione di $P$

L'obiettivo è mettere in relazione i due differenti osservatori che descrivono il moto del punto  $P$  in termini di velocità e accelerazione noto il movimento del sdr mobile rispetto al sdr assoluto.

#### Posizione di $P$

Figure 26: *Moti relativi: posizione di  $P$*



In Figura 26:

- $\overline{OO'}$ : posizione del sdr mobile rispetto al sdr assoluto;
- $\overline{PO'}$ : posizione di  $P$  rispetto al sdr mobile.

$$(P - O) = (O' - O) + (P - O') = x_{O'} \cdot \vec{i} + y_{O'} \cdot \vec{j} + x'_P \cdot \vec{i}' + y'_P \cdot \vec{j}'$$

dove:

- $\vec{i}, \vec{j}$  sono i versori che indicano direzione e verso del sdr assoluto;
- $\vec{i}', \vec{j}'$  sono i versori che indicano direzione e verso del sdr mobile.

Variano sia  $x'_P$  che  $y'_P$  che i versori, che hanno modulo inalterato ma orientamento variabile poiché il sdr mobile può compiere rotazioni rispetto al sdr assoluto.

### 3.3 Velocità assoluta di $P$

$$\vec{v}_P = \dot{x}_{O'} \vec{i} + \dot{y}_{O'} \vec{j} + \dot{x}'_P \vec{i}' + x'_P \frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}'_P \vec{j}' + y'_P \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

raccogliendo:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + v_{rel_P} + x'_P \frac{d\vec{i}'}{dt} + y'_P \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

dove:

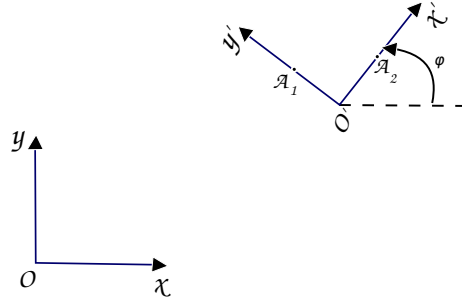
- $\vec{v}_{O'} = \dot{x}_{O'} \vec{i} + \dot{y}_{O'} \vec{j}$ , la velocità di  $O'$ ;
- $v_{rel_P} = \dot{x}'_P \vec{i}' + \dot{y}'_P \vec{j}'$ .

Per i termini  $x'_P \frac{d\vec{i}'}{dt}$  e  $y'_P \frac{d\vec{j}'}{dt}$  variano sia  $x'_P$ ,  $y'_P$  che  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  (poiché sono versori che mantengono inalterato il modulo ma, poiché in generale il sdr mobile può compiere delle rotazioni rispetto al sdr assoluto, la direzione dei versori può variare nel tempo).

Per valutare che contributi danno nella velocità questi due termini, è necessario introdurre (vedi Figura 27):

- $A_1$ : versore vincolato al sdr mobile e parallelo a  $x'$ ;
- $A_2$ : versore vincolato al sdr mobile e ortogonale a  $A_1$ .

Figure 27: Contributi di  $x'_P \frac{d\vec{i}'}{dt}$  e  $y'_P \frac{d\vec{j}'}{dt}$  nella velocità di  $P$



A questo punto possiamo scrivere i due versori  $\vec{i}'$  e  $\vec{j}'$  in funzione di  $A_1$  e  $A_2$ :

$$\vec{i}' = A_1 - O'$$

$$\vec{j}' = A_2 - O'$$

Si ipotizzi che il sdr mobile abbia rispetto al sdr assoluto velocità angolare pari a  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{i}' = (A_1 - O') = (A_1 - O) - (O' - O)$$

$$\vec{j}' = (A_2 - O') = (A_2 - O) - (O' - O)$$

Si è arrivati a considerare  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $O'$  del sdr mobile come  $\in$  un corpo rigido.



Derivando rispetto al tempo i due versori si ottiene:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = v_{A_1} - v_{O'}$$

applicando Rivals:

$$v_{A_1} = v_{O'} + \vec{\omega} \wedge (A_1 - O')$$

e poiché:

$$A_1 - O' = \vec{i}'$$

si ottiene:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \quad (1)$$

In maniera del tutto analoga si arriva ad ottenere il seguente risultato per quanto riguarda la derivata rispetto al tempo di  $\vec{j}'$ :

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad (2)$$

La (1) e (2) sono chiamate formule di Poisson. Tali equazioni indicano che la derivata rispetto al tempo dei versori nel sdr relativo è pari al prodotto vettore tra la velocità angolare nel sdr mobile e il versore stesso.

Se  $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$  si può scrivere che:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' = \dot{\varphi}\vec{j}' \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' = -\dot{\varphi}\vec{i}' \quad (4)$$

La (3) e (4) possono essere espresse anche tramite numeri complessi introducendo:

$$\vec{i}' = e^{i\varphi}$$

$$\vec{j}' = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = i \cdot e^{i\varphi}$$

quindi:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = i\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \dot{\varphi}\vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\dot{\varphi}e^{i\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{i}'$$

Ritornando alla definizione della velocità di  $P$  si ottiene quindi che:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (P - O') + v_{rel_P} \vec{e}_P$$

ponendo poi:

$$v_{tr_P} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (P - O')$$

si ottiene:

$$\vec{v}_P = v_{tr_P} \vec{e}_P + v_{rel_P} \vec{e}_P$$

Nella definizione di  $v_{tr_P}$  si può riconoscere l'espressione del teorema di Rivals per sistemi rigidi, dove la velocità di  $P$  è espressa partendo dalla definizione di  $v_{O'}$ , in particolare  $\frac{d}{dt}(P - O') = v_{rel_P} \vec{e}_P + \vec{\omega} \wedge (P - O')$ .

Teorema dei  
moti relativi

La velocità di  
trascinamento  
di  $P$  è quella  
velocità che  
il punto  $P$   
avrebbe se  
fosse rigi-  
damente  
vincolato al  
sdr mobile

### 3.4 Accelerazione assoluta di $P$

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \wedge (P - O') + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} (P - O') + \frac{d}{dt} v_{rel_P} \vec{e}_P$$

quindi:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (P - O') + \vec{\omega} \wedge v_{rel_P} \vec{e}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O')) + \frac{d}{dt} v_{rel_P} \vec{e}_P$$

ma:

$$v_{rel_P} \vec{e}_P = \dot{x}_P' \vec{i}' + \dot{y}_P' \vec{j}'$$

derivando:

$$\frac{d}{dt} v_{rel_P} \vec{e}_P = \ddot{x}_P' \vec{i}' + \ddot{y}_P' \vec{j}' + \dot{x}_P' \vec{\omega} \wedge \vec{i}' + \dot{y}_P' \vec{\omega} \wedge \vec{j}' + \dot{y}_P' \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad (5)$$

dove  $\ddot{x}_P' \vec{i}' + \ddot{y}_P' \vec{j}' = \vec{a}_{rel_P}$  ovvero l'accelerazione relativa di  $P$  rispetto al sdr relativo. Il termine in più è dovuto alla variazione di orientazione degli assi del sdr mobile.

Quindi la (5) si può esprimere nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} v_{rel_P} \vec{e}_P = \vec{a}_{rel_P} + \vec{\omega} \wedge (\dot{x}_P' \vec{i}' + \dot{y}_P' \vec{j}')$$

Quindi si ottiene per l'accelerazione la seguente espressione:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (P - O') + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O')) + \vec{a}_{rel_P} + 2\vec{\omega} \wedge v_{rel_P} \vec{e}_P$$

dove:

$$a_{tr_P}^{\vec{}} = a_{O'}^{\vec{}} + \vec{\omega} \wedge (P - O') + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O'))$$

corrisponde all'accelerazione che il punto  $P$  avrebbe se fosse rigidamente vincolato al sdr mobile;

$$a_{Coriolis_P}^{\vec{}} = 2\vec{\omega} \wedge v_{rel_P}^{\vec{}}$$

Trattando di moti relativi non è possibile quindi ricostruire l'accelerazione assoluta come semplice composizione tra l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione relativa poiché si viene ad aggiungere un termine in più che è appunto l'accelerazione di Coriolis (tale risultato è noto come teorema di Coriolis).

Si ottiene infine quindi che:

$$a_P^{\vec{}} = a_{tr_P}^{\vec{}} + a_{rel_P}^{\vec{}} + a_{Coriolis_P}^{\vec{}}$$

Ci sono una serie di casi particolari in cui l'accelerazione di Coriolis non esiste individuabili direttamente dall'equazione che la rappresenta: ad esempio se il sdr mobile compie moto puramente traslatorio (velocità angolare nulla) oppure se non esiste una velocità relativa tra il punto  $P$  ed il sdr mobile.

## 4 Cinematica di sistemi di corpi rigidi

Il sistema è costituito da corpi rigidi interconnessi tra di loro attraverso opportuni vincoli.

Il primo problema da porsi quando si trattano sistemi di questo tipo è il computo dei gradi di libertà, cioè stabilire quanti ed eventualmente quali sono i gradi di libertà del sistema, in altre parole, quante variabili sono necessarie per descrivere univocamente la configurazione del sistema.

Nel piano, in assenza di vincoli o riferimenti particolari, un punto ha due gradi di libertà (che sono le sue possibilità di muoversi nelle due direzioni del piano), mentre un corpo rigido ha tre gradi di libertà che rappresentano la posizione di un suo punto nel piano e la sua orientazione.

In generale quindi un corpo rigido ha tre gradi di libertà; se si considera un sistema formato da due corpi rigidi, in assenza di vincoli si avranno sei gradi di libertà.