I Principes de dénombrement

A Cardinal d'un ensemble et principe additif

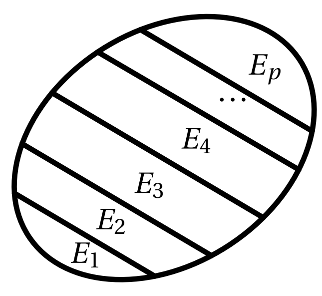
n et p sont des nombres entiers naturels avec $p \geq 1$. E est un ensemble fini.

Définition : *Cardinal*
Le **cardinal** de E, noté Card(E), est le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Remarque :
Card$(\emptyset) = 0$

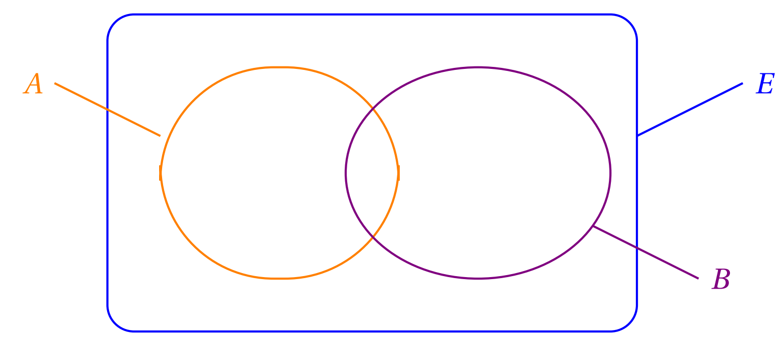
Propriété :
Si $E_1, E_2 \ldots, E_p$ sont p ensembles finis **deux à deux disjoints**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \ldots + \text{Card}(E_p).$$



Remarque :
Si A et B sont deux ensembles finis d'un ensemble fini E, alors les ensembles A et $\overline{A} \bigcap B$ sont deux ensembles disjoints. On en déduit que

$$\text{Card}(A \bigcup B = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \bigcap B)$$



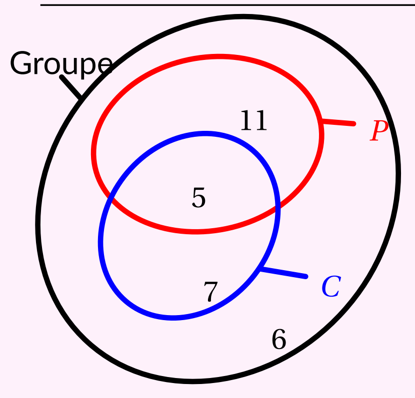
Application n° 1 *Dénombrer avec un tableau ou un diagramme , Utiliser le principe additif*
Dans un club de vacances, deux sports, entre autres, sont proposés ! stand-up paddle (SUP) et le catamaran. On sait que , parmi un groupe de jeunes, 16 pratiquent le Stand-up paddle, 12 le catamaran , 5 pratiquent ces deux sports et 6 n'en pratique aucun. Déterminer, avec deux manières différentes le nombre de personnes dans ce groupe.

Correction :
On note "P" L'ensemble des jeunes pratiquant le paddle. et "C" celui des sportifs pratiquant le Catamaran.

1reMéthode : Le tableau

C / P	Oui	Non	Total
Oui	5	11	16
Non	7	6	13
Total	12	17	29

2eMéthode : Le diagramme



16 jeunes pratiquent le paddle et 5 les deux donc 16-5=11 ne pratiquent le paddle mais pas le catamaran.
12 jeunes pratiquent le catamaran et 5 les deux donc 12-5=7 ne pratiquent le Catamaran mais pas le Paddle.
Le nombre total de jeunes dans le groupe est 11+5+7+6=29.

B Produit cartésien

Définition : *Produit Cartésien*
Le **produit Cartésien** de deux ensembles finis et E et F, noté $E \times F$ est l'ensemble des **couples**$(x; y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemple :
Pour $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$; on a $E \times F = \{(1;3);(1;4);(2;3);(2;4)\}$

Propriété :
Soient E et F deux ensembles finis. Alors Card$(E \times F) =$ Card$(E) \times$ Card(F)

Définition et Propriété :
Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2 \ldots, E_k$, k ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée $(x_1; x_2; \ldots x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est appelée $k-$**uplet** (ou $k-$liste)
- L'ensemble des ces $k-$**uplets** est le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$.
- Lorsque les ensembles $E_1, E_2 \ldots, E_k$ sont finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

Démonstration

Pour deux ensembles :
Soient E et F deux ensembles finis avec $n =$ Card(E) et $m =$ Card(F)

- Si $m = 0$ ou $n = 0$ alors $E \times F = \emptyset$ et la propriété est vraie.
- Sinon soit $E = \{x_1; \ldots; x_n\}$.
  $\forall i \in \{1 \ldots\}$; on note $A_i = \{x_i\} \times F$. Les ensembles A_i sont disjoints et de même cardinal que F.
  $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_i) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(F) = n \times m$

Pour k ensembles :Démonstration par récurrence :
Soit $\mathscr{P}_k$ la propriété : Card$(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) =$ Card$(E_1) \times$ Card$(E_2) \times \ldots \times$ Card(E_k) pour $k \geq 2$

- **Initialisation** : Démontrons que la propriété est vraie pour $k = 2$ on à :
  Card$(E_1 \times E_2) =$ Card$(E_1) \times$ Card(E_2) d'après la preuve précédente.
  La propriété est donc vraie pour $k = 2$ et **la propriété est initialisée.**
- **Hérédité :** Supposons qu'il existe $i \geq 2$ tel que la propriété $\mathscr{P}_i$ soit vraie . alors on à
  Card$(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_i \times E_{i+1}) =$ Card$(E_1 \times E_2 \ldots E_i) \times$ Card$(E_{i+1}) =$ Card$(E_1) \times$ Card$(E_2) \times \ldots \times$ Card$(E_{i+1}) \times$ Card(E_{i+1})
- **Conclusion** La propriété est initialisée pour $k = 2$ et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$

Conséquence :
Si E est un ensemble de cardinal n et si $k \in N^*$, alors Card$(E^k) = n^k$

Application n° 2 *Utiliser le principe multiplicatif*
Un code secret est constitué de trois 0 à 9 chiffres suivis de deux lettres de l'alphabet en majuscule, puis d'un caractère spécial à choisir parmi + - * $ &. Combien de codes secrets différents peut-on constituer ?

Correction :
Il y a 10^3 choix possibles pour les trois chiffres, puis 26^2 choix possibles pour les deux lettres en minuscules, et enfin 5 choix possibles pour le caractère spécial. En tout il y a : $10^3 \times 26^2 \times 5 = 3380000$ codes secrets différents que l'on peut constituer.