Raisonnement par récurrence

Capacités attendues :

- ☞ Raisonnement par récurrence pour étudier les suites
- ☞ Étude de sommes
- ☞ Arithmétique

Principe :
Le **Raisonnement par récurrence** ne peut s'utiliser que lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 .

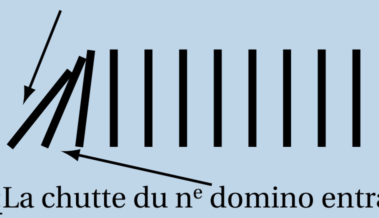
Illustration :
Notre proposition ici est la suivante « Tous les dominos se renversent ».

Pour que notre Proposition soit vraie : il faut conditions :

1. Renverser le premier domino
2. s'assurer que chaque domino renverse le suivant.

Si les deux étapes ci-dessus (initialisation et hérédité) sont vérifiées alors on en déduit que notre propriété est vraie : tous les dominos se renversent.

Initialisation : Le premier domino est renversé

☞ 

Hérédité :La chutte du n^e domino entraine la chutte du $(n+1)^e$

Axiome :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathscr{P}_n$ définie pour tout entier $n \geq n_0$.
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathscr{P}_n$ est vraie pour l'entier n_0 ;
2. pour tout entier $k \geq n_0$, « $\mathscr{P}_k$ est vraie » implique « $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie » ; alors on peut conclure que, pour tout $n \geq n_0$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Remarque :
Cet axiome est en fait un théorème qui se démontre avec les axiomes de Péano

Application n° 1 *Raisonnements par récurrence pour étudier les suites*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$. Démontrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 91\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9$.

Correction :

1. On appelle $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n = 91\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9$.
2. **Initialisation** : Montrons que $\mathscr{P}_0$ est vraie : $u_0 = 100$ et $91 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 9 = 91 + 9 = 100$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
3. **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Démontrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   On sait par hypothèse que $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$ or par hypothèse de récurrence : $u_n = 91\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9$, donc en remplaçant,
   $u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\right) + 3 = 91\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 6 + 3 = 91\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 9$.
   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
4. **Conclusion** : **La propriété est vraie pour** $n = 0$ **et est héréditaire** donc par récurrence on a :
   $u_n = 91\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9$.

Application n° 2 *Étude de somme*

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Correction :

1. On appelle $\mathscr{P}_n$ l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. **Initialisation** : **Montrons que** P_1 **est vraie** $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ **et** $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ **donc** P_1 **est vraie**
3. **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie , montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie :
   $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1$
   Or d'après l'Hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$
   $= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Soit P_{n+1} **est vraie**
4. **Conclusion** : **La propriété est vraie pour** $n = 1$ **et est héréditaire** donc par récurrence on a :
   $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Application n° 3 *Arithmétique*

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$
$7^n - 1$ est un multiple de 6.

Correction :

1. On appelle $\mathscr{P}_n$ la propriété $7^n - 1$ est un multiple de 6.
2. **Initialisation :** Montrons que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   $7^0 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 6 car $6 \times 0 = 0$.
3. **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier n pour tel que $\mathscr{P}_{n+1}$ soit vraie.
   Ceci implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6k$.
   $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7 \times (6k+1) - 1 = 7 \times 6k + 7 - 1 = 6(7k+1)$. Donc $7^{n+1} - 1$ est un multiple de 6 et $P(n+1)$ est vraie.
4. **Conclusion** : **La propriété est vraie pour** $n = 1$ **et est héréditaire** donc par récurrence on a $7^n - 1$ est un multiple de 6 $\forall n \in \mathbb{N}$