II Arrangements et permutations

n et p sont des entier naturels avec $p \leq n$. E et un ensemble à n éléments.

Définition : *Factorielle*
On appelle **factorielle** n et on note $n!$ le produit de tous les nombres entier de 1 à n.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

Exemples :
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ Par Convention : $0! = 1$

A Arrangements et permutations

Définition : *Arrangement*
Un **arrangement de p éléments** de E est un $p-$uplet d'éléments distincts de E.

Exemple :
Si $E = \{$cerise; pamplemousse; fraise; citron; tomate$\}$
Alors (citron; pamplemousse; fraise) et (fraise; citron; pamplemousse) sont deux arrangements de trois éléments de E.

Remarque :
Un arrangement de E peut-être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise de éléments de E.

Propriété :
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$\mathscr{A}_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration
L'ensemble E comporte n éléments.
Pour construire un $p-$uplet distincts de E, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second, … $n-p+1$ choix pour le p^e.
Ainsi, le nombre d'arrangements de p éléments de E est :
$\mathscr{A}_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Application n° 3 *Reconnaitre et dénombrer des k-uplets, utiliser des arrangements*

1. Un groupe de 35 élèves doivent constituer un bureau de l'association MDL. Ce bureau est constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien de bureaux possibles y a-t-il ?
2. Huit sprinters de la finale olympique du 100 mètres prennent le départ.
Combien de podiums différents sont envisageables ?

Correction :
1. On cherche les 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble qui comprend 35 éléments . On a donc $\mathscr{A}_{35}^3 = 35 \times 34 \times 33 = 39270$
2. On cherche le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble qui comporte 8 éléments donc $8 \times 7 \times 6 = 336$

B Permutations des éléments d'un ensemble

Définition : *Permutation*
Une **permutation de** E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple :
On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3\}$
$(1,2,3)$ $(1,3,2)$ $(2,1,3)$ $(2,3,1)$ $(3,1,2)$ $(3,2,1)$ sont les six permutations de A.

Propriété :
Le nombre de permutations de E est $n!$.

Application n° 4 *Utiliser les arrangements et les permutations*
Déterminer le nombre d'anagrammes des mots suivant : ECLAIR, CHARLOTTE, RELIGIEUSE

Correction :
- Pour « éclair »on cherche le nombre de permutations de l'ensemble $\{E; C; L; A; I; R\}$.
Soit $6! = 720$ anagrammes pour le mot éclair.
- Pour le mot « CHARLOTTE »on cherche le nombre de permutations de l'ensemble $\{C; H; A; R; L; O; T; T; E\}$. Attention puisqu'il y a deux "T", il faut diviser par le nombres de permutations de ces deux "T" soit $\dfrac{9!}{2!} = 181440$.
- Pour le mot « RELIGIEUSE », on cherche le nombre de permutations de l'ensemble $\{R; E; L; I; G; I; E; U; S; E\}$. Attention , il y a 3 "E", et 2 "I". Donc le nombre d'anagrammes de ce mot est $\dfrac{10!}{3!2!} = 302400$.