Bem vindo Ao exercício sobre Equações Diferenciais Ordinárias

Autor : Adevan Neves Santos

(1) Calcule a corrente elétrica que circula em um circuito composto por uma fonte $v(t) = v_0 \cos{(\omega t)}$ em série com um resistor R e um capacitor C. Use :

$E(t) - Ri(t) - \frac{q(t)}{C} = 0, \; mas \; i = \frac{d}{dt}q(t)$

Para Circuitos RC, podemos aplica a Lei de Kirchhoff (Tensão), estabelecendo que :

$$E(t) - Ri(t) - \frac{q(t)}{C} = 0 \div R \rightarrow \frac{E(t)}{R} - \frac{dq}{dt} - \frac{q(t)}{CR} = 0 \rightarrow \frac{E(t)}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{CR}$$
$$\frac{dq}{dt} + (\frac{1}{CR})q = \frac{E(t)}{R}$$

Modelo $\rightarrow y' + P(x) * y = q(x)$

Solução $\rightarrow y(x) = e^{-\int Pdx}[\int q(x)e^{\int P(x)dx} + C]$

Calculando :

$$P = \frac{1}{CR}$$
$$\int Pdt = \int \frac{dt}{CR} = \frac{t}{CR}$$

Concluimos que :

$e^{-\int Pdt} = e^{-\frac{t}{CR}}$

$$\int q(t)e^{\int P(t)dt} = \int \frac{E(t)e^{\frac{t}{CR}}dt}{R} = \int \frac{v_0 \cos{(\omega t)} e^{\frac{t}{CR}}dt}{R}$$

Reforçando que C,R,ω são constantes

$\int \frac{v_0 \cos(\omega t)dt}{R} = \frac{1}{\omega}\int \frac{v_0 \cos(\omega t)e^{\frac{t}{CR}}\omega dt}{R}$

Técnica utilizada : $\int udv = uv - \int vdu$ **(Integral por Partes)**

$dv = \cos{(\omega t)}\omega dt \; \rightarrow \int dv = \int \cos{(\omega t)}\omega dt$
$l = \omega t \rightarrow dl = \omega dt$
$v = \int cos(l)dl = sen(l) = sen(\omega t)$
$\frac{v_0}{R\omega}\int e^{\frac{t}{CR}}(\cos{(\omega t)})\omega dt = \frac{v_0}{R\omega}\int udv$
$\int udv = uv - \int vdu = e^{\frac{t}{CR}} sen(\omega t) - \int \frac{sen(\omega t)e^{\frac{t}{CR}}dt}{CR}$

Temos que :

$-\int \frac{sen(\omega t)e^{\frac{t}{CR}}dt}{CR} = \frac{1}{CR\omega}\int(-sen(\omega t)\omega)e^{\frac{t}{CR}}dt$

$$u_2 = e^{\frac{t}{CR}} \to du_2 = \frac{e^{\frac{t}{CR}}dt}{CR}$$

$$dv_2 = -sen(\omega t)\omega dt \to \int dv_2 = \int -sen(\omega t)\omega dt$$

$$l_2 = \omega t \to dl_2 = \omega dt\ v_2 = -sen(l_2)\ dl_2 \to v_2 = \cos(l_2) = \cos(\omega t)$$

Aplicando novamente a técnica

$$\int u_2 dv_2 = u_2 v_2 - \int v_2 du_2$$

$$= e^{\frac{t}{CR}} * \cos(\omega t) - \frac{1}{CR\omega}\int e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega t)\omega dt$$

Tomando $I = \int e^{\frac{t}{RC}}\cos(\omega t)\omega dt$

$$e^{\frac{t}{CR}} * \cos(\omega t) - \frac{1}{CR\omega}I,\ ent\tilde{a}o:$$

$$-\int \frac{sen(\omega t)e^{\frac{t}{CR}}dt}{CR} = \frac{1}{CR\omega}[e^{\frac{t}{RC}*\cos(\omega t) - \frac{1}{CR\omega}}I]$$

$$\frac{V_0}{R\omega}I = e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + \frac{e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega t)}{CR\omega} - \frac{1}{(CR\omega)^2}I$$

$$(\frac{v_0}{R\omega} + \frac{1}{(CR\omega)^2}) \to \frac{1}{R\omega}(v_0 + \frac{1}{C^2R\omega})I = \ldots . \to I(\frac{V_0C^2R\omega + 1}{C^2R^2\omega^2}) = \ldots\ldots$$

$$I = \frac{C^2R^2\omega^2 e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + CR\omega e^{\frac{t}{RC}}\cos(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}$$

Com isso, podemos finalmente resolver a integral:

$$\int e^{\frac{t}{RC}}\cos(\omega t)\omega dt = \frac{C^2R^2\omega^2 e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + CR\omega e^{\frac{t}{RC}}\cos(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}$$

$$q(t) = e^{-\int Pdt}[\int q(t)e^{\int Pdt}dt + C]$$

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}}[\frac{C^2R^2\omega^2 e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + CR\omega e^{\frac{t}{RC}}\cos(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}]$$

$$q(t) = \frac{C^2R^2\omega^2 sen(\omega t) + CR\omega cos(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}$$

Como $i(t) = \frac{dq}{dt}$**, então :**

$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C^2R^2\omega^3\cos(\omega t) - CR\omega^2 sen(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}$

Esta é a corrente que circula no circuito descrito !!!