# Bem vindo Ao exercício sobre Equações Diferenciais Ordinárias

## **Autor: Adevan Neves Santos**

(1) Calcule a corrente elétrica que circula em um circuito composto por uma fonte  $v(t)=v_0\cos{(\omega t)}$  em série com um resistor R e um capacitor C. Use :

$$E(t)-Ri(t)-rac{q(t)}{C}=0,\ mas\ i=rac{d}{dt}q(t)$$

Para Circuitos RC, podemos aplica a Lei de Kirchhoff (Tensão), estabelecendo que :

$$\begin{split} E(t) - Ri(t) - \frac{q(t)}{C} &= 0 \div R \ \rightarrow \ \frac{E(t)}{R} - \frac{dq}{dt} - \frac{q(t)}{CR} = 0 \ \rightarrow \frac{E(t)}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{CR} \\ &\frac{dq}{dt} + (\frac{1}{CR})q = \frac{E(t)}{R} \end{split}$$

$$\mathsf{Modelo} \to y^{,} + P(x) * y = q(x)$$

Solução 
$$ightarrow y(x) = e^{-\int P dx} [\int q(x) e^{\int P(x) dx} + C]$$

#### Calculando:

$$P = \frac{1}{CR}$$

$$\int Pdt = \int \frac{dt}{CR} = \frac{t}{CR}$$

### Concluimos que:

$$e^{-\int Pdt} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$\int q(t)e^{\int P(t)dt}=\int rac{E(t)e^{rac{t}{CR}}dt}{R}=\int rac{v_0\cos{(\omega t)}e^{rac{t}{CR}}dt}{R}$$

## Reforçando que C,R, $\omega$ são constantes

$$\int \frac{v_0 \cos(\omega t) dt}{R} = \frac{1}{\omega} \int \frac{v_0 \cos(\omega t) e^{\frac{t}{CR}} \omega dt}{R}$$

Técnica utilizada :  $\int u dv = uv - \int v du$  (Integral por Partes)

$$egin{aligned} dv &= \cos{(\omega t)} \omega dt & o \int dv = \int \cos{(\omega t)} \omega dt \ l &= \omega t o dl = \omega dt \ v &= \int \cos(l) dl = sen(l) = sen(\omega t) \ rac{v_0}{R\omega} \int e^{rac{t}{CR}} (\cos{(\omega t)}) \omega dt = rac{v_0}{R\omega} \int u dv \ \int u dv = uv - \int v du = e^{rac{t}{CR}} sen(\omega t) - \int rac{sen(\omega t)e^{rac{t}{CR}} dt}{CR} \end{aligned}$$

#### Temos que:

$$egin{aligned} -\int rac{sen(\omega t)e^{rac{t}{CR}}dt}{CR} &= rac{1}{CR\omega}\int (-sen(\omega t)\omega)e^{rac{t}{CR}}dt \ &u_2 = e^{rac{t}{CR}} 
ightarrow du_2 = rac{e^{rac{t}{CR}}dt}{CR} \ &dv_2 = -sen(\omega t)\omega dt 
ightarrow \int dv_2 &= \int -sen(\omega t)\omega dt \ &l_2 = \omega t 
ightarrow dl_2 = \omega dt \ v_2 = -sen(l_2) \ dl_2 
ightarrow v_2 &= \cos{(l_2)} = \cos{(\omega t)} \end{aligned}$$

### Aplicando novamente a técnica

$$egin{align} \int u_2 dv_2 &= u_2 v_2 - \int v_2 du_2 \ &= e^{rac{t}{CR}} * \cos{(\omega t)} - rac{1}{CR\omega} \int e^{rac{t}{CR}} \cos{(\omega t)} \omega dt \end{aligned}$$

Tomando  $I=\int e^{rac{t}{RC}}\cos{(\omega t)}\omega dt$ 

$$e^{rac{t}{CR}}*\cos{(\omega t)}-rac{1}{CR\omega}I,\ ent ilde{ao}: \ -\intrac{sen(\omega t)e^{rac{t}{CR}}dt}{CR}=rac{1}{CR\omega}[e^{rac{t}{RC}*\cos{(\omega t)}-rac{1}{CR\omega}}I] \ rac{V_0}{R\omega}I=e^{rac{t}{RC}}sen(\omega t)+rac{e^{rac{t}{CR}}\cos{(\omega t)}}{CR\omega}-rac{1}{(CR\omega)^2}I \ (rac{v_0}{R\omega}+rac{1}{(CR\omega)^2})
ightarrowrac{1}{R\omega}(v_0+rac{1}{C^2R\omega})I=\ldots
ightarrow I(rac{V_0C^2R\omega+1}{C^2R^2\omega^2})=\ldots\ldots \ I=rac{C^2R^2\omega^2e^{rac{t}{RC}}sen(\omega t)+CR\omega e^{rac{t}{RC}}\cos{(\omega t)}}{v_0C^2R\omega+1}$$

### Com isso, podemos finalmente resolver a integral:

$$\int e^{\frac{t}{RC}}\cos{(\omega t)}\omega dt = \frac{C^2R^2\omega^2e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + CR\omega e^{\frac{t}{RC}}\cos{(\omega t)}}{v_0C^2R\omega + 1}$$

$$q(t) = e^{-\int Pdt}[\int q(t)e^{\int Pdt}dt + C]$$

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}}[\frac{C^2R^2\omega^2e^{\frac{t}{RC}}sen(\omega t) + CR\omega e^{\frac{t}{RC}}\cos{(\omega t)}}{v_0C^2R\omega + 1}]$$

$$q(t) = \frac{C^2R^2\omega^2sen(\omega t) + CR\omega cos(\omega t)}{v_0C^2R\omega + 1}$$

Como  $i(t)=rac{dq}{dt}$ , então :

$$i(t)=rac{dq}{dt}=rac{C^2R^2\omega^3\cos(\omega t)-CR\omega^2sen(\omega t)}{v_0C^2R\omega+1}$$

# Esta é a corrente que circula no circuito descrito !!!