Analisis Fourier
Bagian Kedua:
Deret Fourier (Lanjutan)

Referensi:

- Signal and System, Oppenheim, Wilsky, & Nawab (Bab 3)
- Digital Signal Processing, Proakis & Manolakis (Bab 4.1)

Isyarat-Isyarat yang tidak bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier

- Mayoritas isyarat periodik bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier.
- Ingat kembali persamaan sintesis dan analisis pada deret Fourier untuk isyarat periodik $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \qquad (1)$$ Persamaan Sintesis

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad (2)$$ Persamaan Analisis

Isyarat-Isyarat yang tidak bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier

- Ada beberapa isyarat periodik $x(t)$ yang **tidak bisa** direpresentasikan dalam Deret Fourier
- Salah satu penyebabnya adalah, saat dihitung koefisien deret Fourier a_k dengan persamaan analisis (2), hasil integrasi pada (2) tidak konvergen (nilai integrasi bisa tak berhingga)

- Penyebab lain: Meski hasil integrasi pada (2) konvergen (yang artinya seluruh koefisien a_k bisa dihitung), saat koefisien-koefisien a_k disubstitusikan ke persamaan sintesis (1), hasil persamaan sintesis tidak konvergen ke isyarat $x(t)$ yang asli.

Kondisi yang Harus Dipenuhi bagi Keberadaan Deret Fourier

- Seorang matematikawan, Peter Gustav Dirichlet, memformulasikan **kondisi** bagi isyarat periodik $x(t)$ untuk bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier.

- Kondisi Dirichlet-1: Pada setiap perioda, $x(t)$ harus absolutely integrable, artinya:

$$\boxed{\int_T |x(t)|dt < \infty}$$

Hal ini untuk memastikan bahwa **koefisien Deret Fourier** a_k tidak akan bernilai tak berhingga.

Kondisi yang Harus Dipenuhi bagi Keberadaan Deret Fourier

- Penjelasan bagi Kondisi di atas adalah sebagai berikut. Dari persamaan analisis (2) kita bisa menuliskan magnitude dari koefisien deret Fourier a_k sebagai:

$$|a_k| = \left| \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt$$

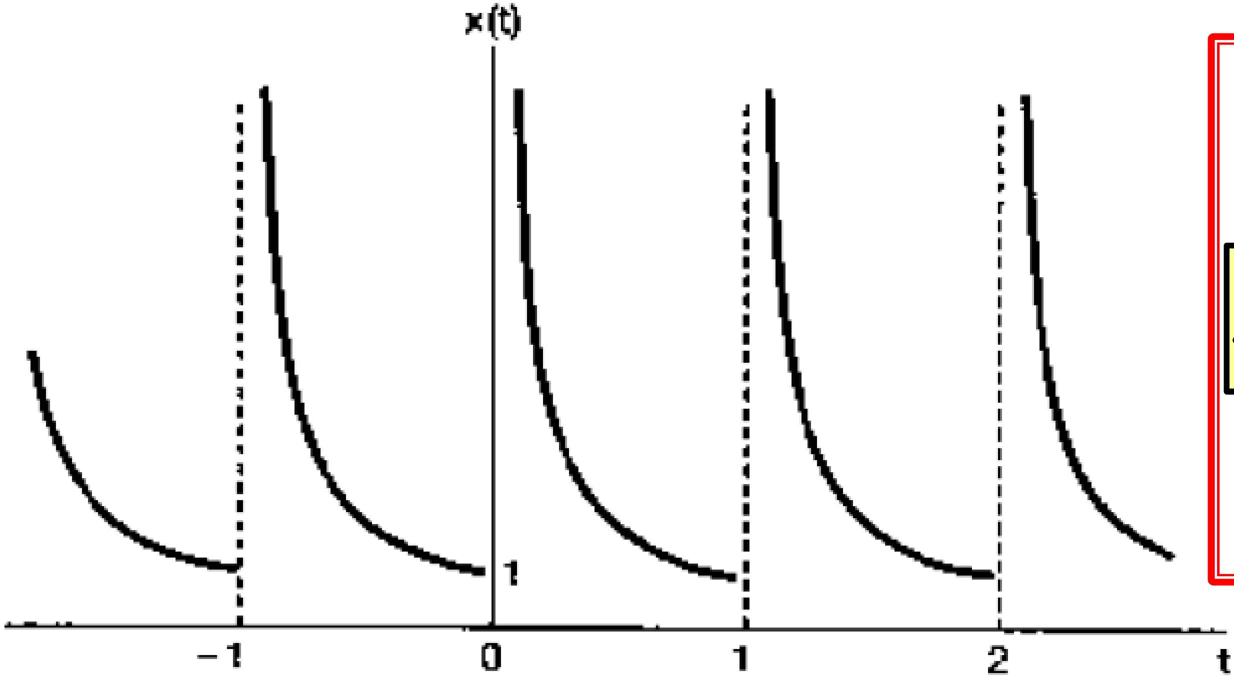
Jadi jika $\int_T |x(t)| dt < \infty$ maka otomatis $|a_k| < \infty$

Kondisi yang Harus Dipenuhi bagi Keberadaan Deret Fourier

- Kondisi Dirichlet-2: Pada setiap interval waktu yang terbatas (any finite interval of time), jumlah variasi $x(t)$ terbatas. Artinya jumlah titik puncak (maksima dan minima) pada setiap perioda isyarat $x(t)$ harus berhingga/terbatas.

- Kondisi Dirichlet-3: Pada setiap interval atau periode tertentu, jumlah/cacah diskontinuitas harus berhingga/terbatas. Kemudian, tiap-tiap diskontinuitas tersebut harus memiliki ukuran yang berhingga/terbatas pula

Isyarat-Isyarat yang tidak bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier



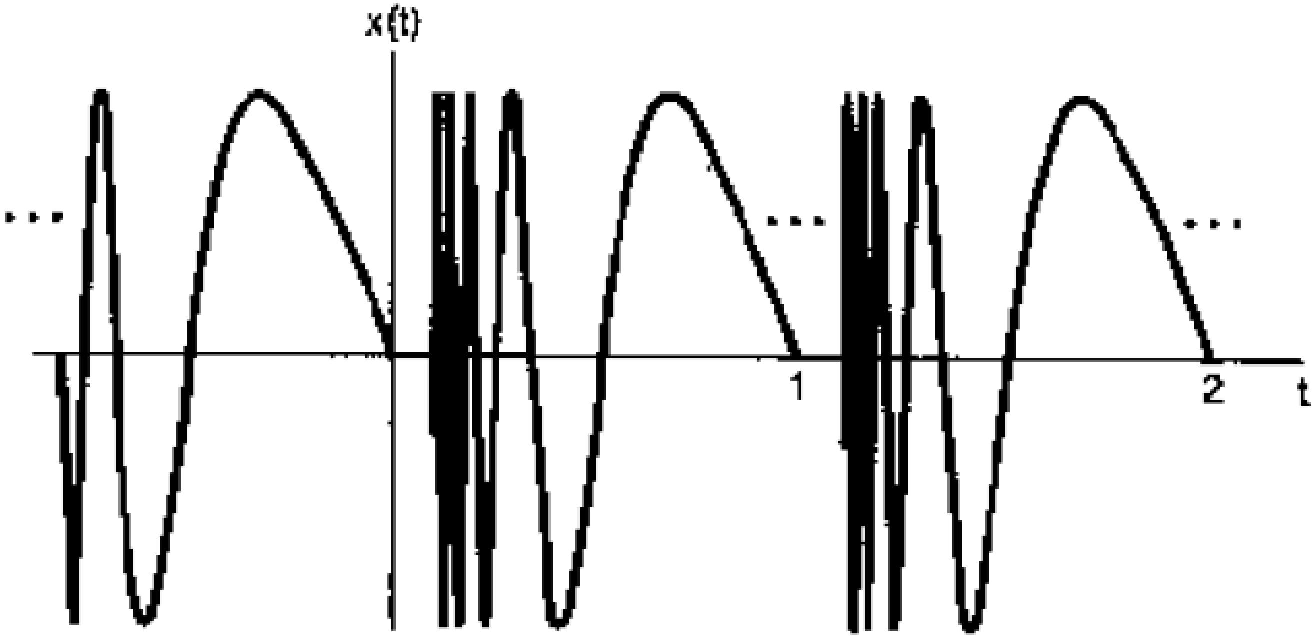
Definisi isyarat untuk 1 periode:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

dan $x(t)$ periodik dengan periode 1

Gambar: Isyarat ini melanggar Kondisi Dirichlet Pertama
Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 199

Isyarat-Isyarat yang tidak bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier



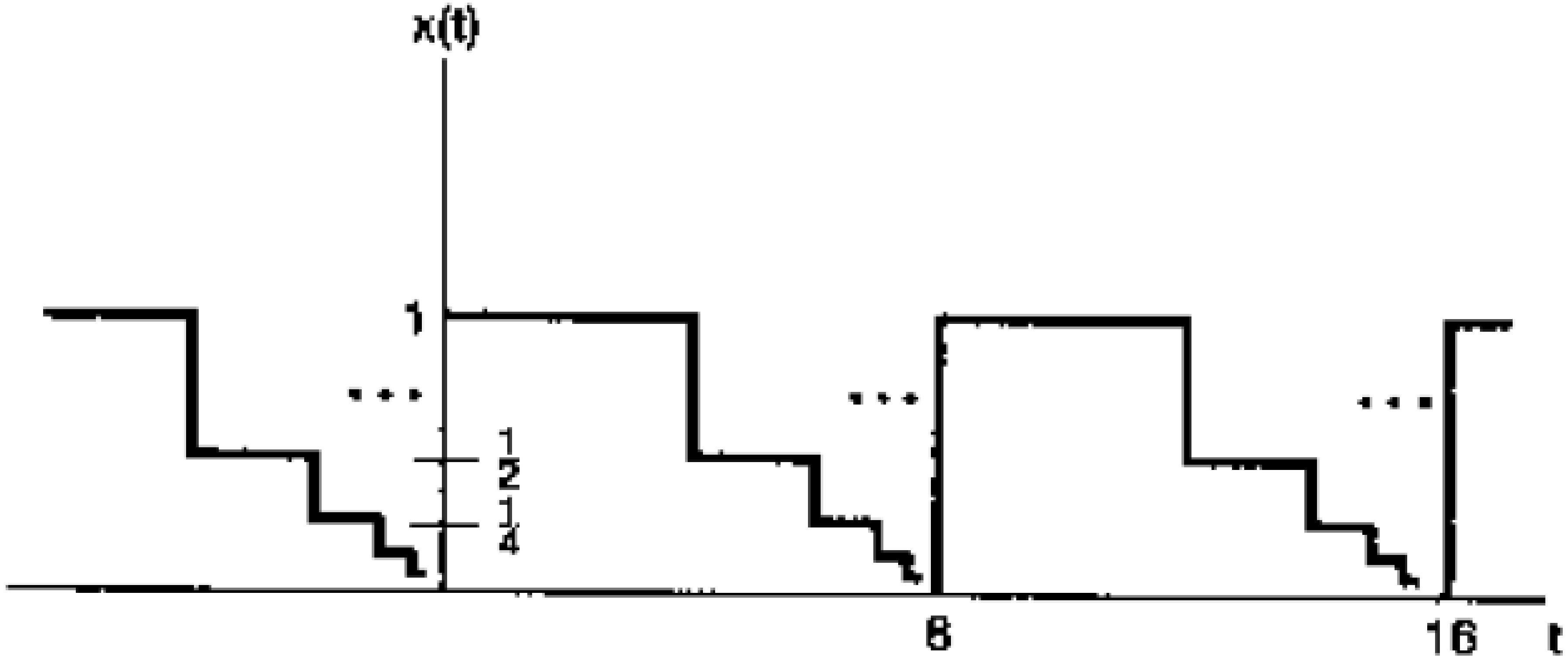
Definisi isyarat untuk 1 periode:

$$\boxed{x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1}$$

dan $x(t)$ periodik dengan periode 1

Gambar: Isyarat ini melanggar Kondisi Dirichlet Kedua
Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 199

Isyarat-Isyarat yang tidak bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier



Gambar: Isyarat ini melanggar Kondisi Dirichlet Ketiga
Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 199

Sifat-Sifat Deret Fourier

- Dalam menguraikan berbagai sifat-sifat deret Fourier bisa digunakan **notasi ringkas** untuk mengilustrasikan relasi antara isyarat periodik dengan koefisien deret Fourier-nya.

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan koefisien deret Fourier $x(t)$ diberikan oleh a_k, atau dengan kata lain:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},}$$

- Maka kita bisa menuliskan ringkasan dari persamaan di atas sebagai

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \qquad (3)}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

- Notasi di atas digunakan untuk menandakan hubungan pasangan antara isyarat periodik $x(t)$ dengan koefisien deret Fouriernya (yaitu a_k untuk semua integer k)

Sifat 1: Linearitas

Jika $x(t)$ dan $y(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T dan

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$$

Maka $z(t) = Ax(t) + By(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T dan

$$\boxed{z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 1: Linearitas

Berhubung: $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$ dan $y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$

Maka relasi di atas ekivalen dengan

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},} \qquad \boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t},}$$

- Dengan demikian, kombinasi linear dari $x(t)$ dan $y(t)$ yaitu $z(t) = Ax(t) + By(t)$ bisa dituliskan sebagai:

$$\boxed{z(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + B\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 1 (Lanjutan)

$$z(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + B \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A a_k e^{jk\omega_0 t} + B b_k e^{jk\omega_0 t} \right]$$

$$\boxed{z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(A a_k + B b_k \right) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}}$$

- Dengan $c_k = Aa_k + Bb_k$ (Pembuktian Selesai)

Sifat-Sifat Deret Fourier

Sifat 2: Time Shifting

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_k}$$

- Maka $y(t)=x(t-t_0)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$\boxed{x(t-t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k}$$

- Cukup jelas bahwa pergeseran suatu isyarat $x(t)$ dengan tunda waktu t_0 **tidak akan** mengubah periode isyarat. Sehingga jelas bahwa $x(t-t_0)$ akan periodik dengan periode T.

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 2: Time Shifting

Bukti: Katakanlah b_k adalah koefisien deret Fourier bagi $y(t) = x(t - t_0)$, maka

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Asumsikan: $\tau = t - t_0$, maka $d\tau = dt$ dan range dari τ juga akan meliputi interval berdurasi T. Dengan demikian,

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau + t_0)}d\tau$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 2 (Lanjutan)

$$b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_0} a_k$$

- Dengan demikian, terbukti bahwa jika:

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_k \text{ atau } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

- Maka $x(t - t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

atau

$$\boxed{x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t - t_0)},}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

- **Sifat 3: Time Reversal**

Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k}$$

Maka $y(t)=x(-t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$\boxed{x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}}$$

- Cukup jelas bahwa membalik sumbu waktu **tidak akan** mengubah periode isyarat. Sehingga jelas bahwa $x(-t)$ akan periodik dengan periode yang sama dengan periode $x(t)$ yaitu T.

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 3: Time Reversal

Berhubung: $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$

Maka bisa dituliskan

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Dengan demikian, jika b_k adalah koefisien deret Fourier bagi $y(t)$ dan $y(t) = x(-t)$, maka diperoleh

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 3 (Lanjutan)

- Jika diperkenalkan $m = -k$, maka

$$\boxed{y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm\omega_0 t}}$$

- Dengan demikian,

$$\boxed{y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm\omega_0 t}}$$

- Jelas bahwa $b_m = a_{-m}$.

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 3 (Lanjutan)

- Dengan demikian, terbukti bahwa jika:

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \text{ atau } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

- Maka

$$\boxed{x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t},}$$

atau

$$\boxed{x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Sifat 4: Time Scaling

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\text{maka } x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

- Artinya $x(\alpha t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T/α (dengan frekuensi fundamental $\alpha\omega_0 = 2\pi/(T/\alpha)$)

Sifat-Sifat Deret Fourier

Sifat 4: Time Scaling

- Dengan demikian, koefisien Deret Fourier **tidak mengalami perubahan**, tetapi **representasi Deret Fourier** mengalami perubahan karena terjadinya **perubahan fundamental frequency** dari ω_0 ke $\alpha\omega_0$.
- Pembuktian tidak tersedia karena bisa dilakukan dengan cukup mudah (tinggal mengganti t dengan αt)

Sifat-Sifat Deret Fourier

- **Sifat 5: Perkalian**

Jika $x(t)$ dan $y(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$$

Maka $x(t)y(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T dan

$$\boxed{x(t)y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 5: Perkalian

Berdasarkan pernyataan di atas, representasi deret Fourier bagi $x(t)$ dan $y(t)$ bisa dituliskan sebagai

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},} \qquad \boxed{y(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{jl\omega_0 t},}$$

Maka

$$x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k b_l e^{jk\omega_0 t} e^{jl\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k b_l e^{j(k+l)\omega_0 t}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 5: Perkalian

- Jika $m = k + l$ maka m juga berkisar dari $-\infty$ ke $+\infty$, sehingga

$$x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k} e^{jm\omega_0 t}$$

- Kita pertukarkan posisi jumlahan:

$$\boxed{x(t)y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k} e^{jm\omega_0 t}}$$

- Kita set $h_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k}$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 5: Perkalian

- Dengan demikian, persamaan di atas menjadi

$$\boxed{x(t)y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m e^{jm\omega_0 t},}$$

- Bila kita bandingkan persamaan di atas dengan persamaan umum deret Fourier, maka jelas bahwa koefisien deret Fourier untuk $x(t)y(t)$ di atas diberikan oleh

$$\boxed{h_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Sifat 6: Konjugasi

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

- Maka $x^*(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan

$$\boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 6: Konjugasi

- Telah diketahui bahwa:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},}$$

- Jika kita kenakan operasi konjugat pada persamaan di atas maka diperoleh

$$\boxed{x^*(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right]^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 6: Konjugasi

- Agar pangkat komponen eksponensial konsisten dengan format deret Fourier, kita membalik variabel dalam jumlahan dari k menjadi $-k$ (selang perubahan **tidak akan** berubah):

$$\boxed{x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \qquad (4)}$$

- Cukup jelas dari (4) bahwa jika:

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \quad \text{maka} \quad \boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}^*}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Konsekuensi Sifat 6: Konjugasi

- Tampak bahwa jika $x(t)$ **adalah isyarat real,** maka $x(t)=x^*(t)$ dan diperoleh dari pers. (4) di atas bahwa:

$$\boxed{x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

- Jadi untuk isyarat real $x(t)$ berlaku:

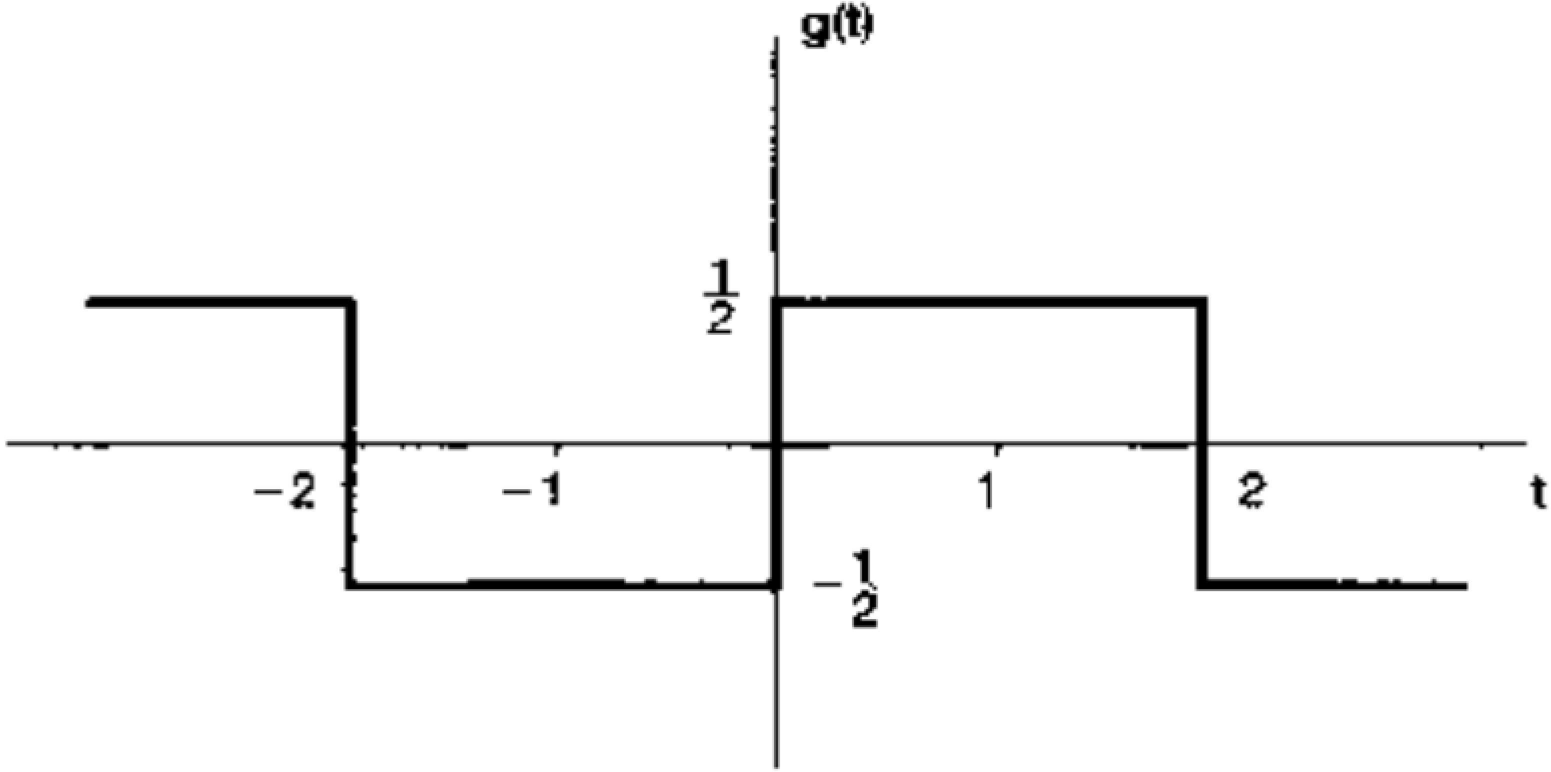
$$\boxed{a_{-k} = a_k^*}$$

- Dan akibatnya a_0 bernilai real sedangkan untuk **magnitude** koefisien deret Fourier berlaku:

$$\boxed{|a_{-k}| = |a_k|}$$

Contoh-A

- Lihat **Example 3.6** Buku Signal & System (Oppenheim & Willsky) hal 206-207 serta Gambar 3.10



Contoh-A

- Tampak isyarat $g(t)$ dengan **periode fundamental** sebesar 4.
- Untuk menentukan representasi deret Fourier, kita bisa menentukan koefisien deret Fourier dengan formula:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T g(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} g(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

- Namun kita bisa pula memanfaatkan Contoh-2 pada slide bagian 1 (**Contoh 3.5 Buku Oppenheim**) dan memanfaatkan sifat-sifat deret Fourier yang telah dibahas.

Contoh-A

- Jika kita menggunakan Contoh 2 pada Bagian 1 dan untuk isyarat $x(t)$ pada contoh tersebut kita set $T=4$ dan $T_1=1$, maka tampak bahwa $g(t)$ pada Contoh ini dapat dituliskan:

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

- Dari **time-shifting property** jelas bahwa jika koefisien deret Fourier bagi $x(t)$ adalah a_k, dan koefisien deret Fourier bagi $x(t-1)$ adalah b_k, maka:

$$b_k = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{T}(1)} = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{4}} = a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

Contoh-A

- Koefisien Deret Fourier bagi **komponen DC (konstan)** pada $g(t)$ yaitu 1/2 diberikan oleh:

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

- Jika kita menggunakan property **linearitas**, maka koefisien Deret Fourier bagi $g(t)$ diberikan oleh

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

- Langkah berikut adalah meninjau ulang a_k yang merupakan koefisien Deret Fourier bagi $x(t)$ pada Contoh-2 Bagian I

Contoh-A

- Tinjau Contoh-2 pada PPT Bagian I (Example 3.5 Signal & System Oppenheim & Willsky).
- Untuk $T = 4$ dan $T_1 = 1$ diperoleh bahwa

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0}$$

- Dengan demikian, koefisien Deret Fourier bagi $g(t)$ diberikan oleh:

$$\boxed{d_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}}$$

Contoh-A

- Dengan demikian, $g(t)$ diberikan oleh:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

- Berhubung $T=4$ maka

$$\boxed{g(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{jk\frac{\pi}{2}(t-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{jk\frac{\pi}{2}(t-1)}}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Sifat 7: Differensiasi

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik dengan periode T (frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$) dan koefisien deret Fourier bagi $x(t)$ diberikan oleh a_k:

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_k}$$

- Dan bila $y(t)$ adalah **turunan** dari $x(t)$ terhadap waktu dan koefisien deret Fourier bagi $y(t)$ diberikan oleh b_k:

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt}} \qquad \boxed{y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} b_k}$$

Maka b_k diberikan oleh:

$$\boxed{b_k = jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k}$$

Sifat-Sifat Deret Fourier

Pembuktian Sifat 7: Differensiasi

- Telah diketahui bahwa:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},}$$

- Jika kita kenakan operasi derivative atau **turunan** terhadap waktu *t* pada persamaan di atas, akan diperoleh:

$$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d\,a_k e^{jk\omega_0 t}}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 a_k e^{jk\omega_0 t}.}$$

- Jika kita bandingkan pers. di atas dengan formula umum persamaan sintesis deret Fourier maka jelas bahwa koefisien deret Fourier diberikan oleh $jk\omega_0 a_k$.

Contoh-B

- Tinjau Contoh 3.7 pada Buku Signal and System, Oppenheim & Willsky
- Diketahui sebuah gelombang segitiga $x(t)$ dengan periode T=4 dan frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$.

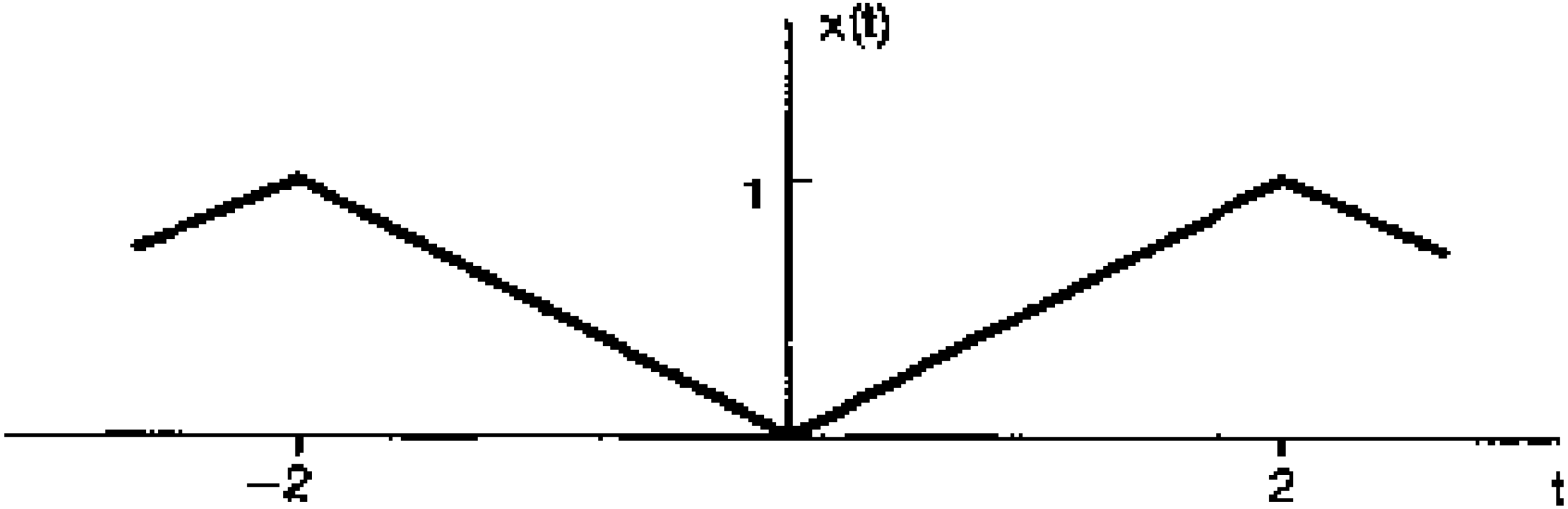


Figure 3.11 Triangular wave signal in Example 3.7.

Contoh B

- Tampak bahwa isyarat $x(t)$ yang berupa gelombang segitiga di atas bila didifferensialkan akan menghasilkan isyarat $g(t)$ pada Contoh A.

- Katakanlah e_k adalah koefisien Deret Fourier bagi $x(t)$ (isyarat segitiga pada Contoh B)
- Telah diketahui bahwa koefisien Deret Fourier bagi $g(t)$ (gelombang kotak pada Contoh A) diberikan oleh d_k (lihat contoh A)

- Dari **Sifat Differensiasi** (lihat Sifat 7) untuk Deret Fourier maka

$$\boxed{d_k = jk\omega_0 e_k = jk\frac{2\pi}{T}e_k = jk\frac{\pi}{2}e_k}$$

Contoh B

- Dengan mempertimbangkan nilai d_k pada Contoh A, untuk $k \neq 0$:

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, \quad k \neq 0.$$

- e_0 tidak bisa dicari dengan formula di atas karena penyebut akan bernilai 0 jika kita masukkan k=0 pada formula di atas.

- Untuk $k = 0$, e_0 dapat ditentukan dengan formula standar untuk menghitung deret Fourier.

Contoh B

- Ingat bahwa

$$e_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$e_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^0 dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

- Untuk kasus ini

$$e_0 = \frac{1}{T}\left\{\int_{t=-2}^{t=0}\frac{-t}{2}dt + \int_{t=0}^{t=2}\frac{t}{2}dt\right\}$$

$$e_0 = \frac{1}{4}\left\{\left.\frac{-t^2}{4}\right|_{t=-2}^{t=0} + \left.\frac{t^2}{4}\right|_{t=0}^{t=2}\right\} = \frac{1}{2}$$

Contoh B

- Dengan demikian,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2\sin(k\pi/2)}{jk^2\pi^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}} e^{jk\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(k\pi/2)}{jk^2\pi^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}} e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2\sin(k\pi/2)}{jk^2\pi^2} e^{jk\frac{\pi}{2}(t-1)} + \frac{1}{2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(k\pi/2)}{jk^2\pi^2} e^{jk\frac{\pi}{2}(t-1)}$$

TABLE 3.1 PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME FOURIER SERIES

Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$\left.\begin{array}{l}x(t)\\y(t)\end{array}\right\}$ Periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\boxed{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\boxed{\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k}$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

$x(t) = x(-t)$

$x(t) = -x(t)$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Jika diketahui dua buah vektor berukuran n x 1 yaitu **a** = $[a_1, a_2, ..., a_n]^T$ dan **b** = $[b_1, b_2, ..., b_n]^T$, maka dot product antara **a** dan **b** diberikan oleh

$$\boxed{\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}$$

- Dengan $[.]^T$ mengindikasikan operasi transpose dari suatu vektor.

- Dot product antara vektor **a** = $[a_1, a_2, ..., a_n]^T$ dengan dirinya sendiri akan menghasilkan kuadrat panjang vektor **a**:

$$\boxed{\mathbf{a}.\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = |\mathbf{a}|^2}$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Pada saat dua vektor yang di-dot productkan adalah vektor kompleks, maka pada saat operasi dot product dilakukan, elemen-elemen vektor yang kedua dikonjugatkan.

- Dengan demikian, jika dua vektor berukuran n x 1 diberikan sebagai $\mathbf{a} = [a_1+j\alpha_1, a_2+j\alpha_2, \ldots, a_n+j\alpha_n]^T$ dan $\mathbf{b} = [b_1+j\beta_1, b_2+j\beta_2, \ldots, b_n+j\beta_n]^T$, maka:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}^* = (a_1 + j\alpha_1)(b_1 - j\beta_1) + (a_2 + j\alpha_2)(b_2 - j\beta_2) + \cdots + (a_n + j\alpha_n)(b_n - j\beta_n)$$

- Dengan $(.)^*$ mengindikasikan operasi konjugat dari skalar atau vektor.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Dot product antara vektor kompleks **a** = [a_1+$j\alpha_1$, a_2+$j\alpha_2$, ..., a_n+$j\alpha_n$]^T dengan dirinya sendiri akan menghasilkan kuadrat panjang vektor **a**:

$$\mathbf{a}.\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{a}^* = (a_1 + j\alpha_1)(a_1 - j\alpha_1) + (a_2 + j\alpha_2)(a_2 - j\alpha_2) + \cdots + (a_n + j\alpha_n)(a_n - j\alpha_n)$$

$$= |a_1 + j\alpha_1|^2 + |a_2 + j\alpha_2|^2 + \cdots + |a_n + j\alpha_n|^2$$

- Hal ini konsisten dengan kasus dot product untuk vektor real.
- Perlu dicatat bahwa $|z|$ merepresentasikan magnitude dari bilangan kompleks z.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Kita kembali ke kasus vektor real untuk memudahkan diskusi berikut.
- Tinjau Ruang Berdimensi tiga dengan vektor-vektor memiliki tiga buah elemen.
- Misalkan vektor $\mathbf{x} = [3\ -5\ 7]^T$ bisa diuraikan menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

- Di sini $[1\ 0\ 0]^T$ adalah vektor satuan dengan arah tertentu. Jika kita menggunakan sistem koordinat Kartesian, $[1\ 0\ 0]^T$ bisa dipandang sebagai vektor satuan yang searah sumbu-x.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Dengan demikian, $[0\ 1\ 0]^T$ dapat dipandang sebagai vektor satuan yang searah sumbu-y, sedangkan $[0\ 0\ 1]^T$ dapat dipandang sebagai vektor satuan yang searah sumbu-z

- Artinya pada persamaan (5), kontribusi komponen yang searah pada sumbu-x ($[1\ 0\ 0]^T$) pada $[3\ {-5}\ 7]^T$ adalah 3.
- Kontribusi komponen yang searah pada sumbu-y ($[0\ 1\ 0]^T$) pada $[3\ {-5}\ 7]^T$ adalah -5
- Kontribusi komponen yang searah pada sumbu-z ($[0\ 0\ 1]^T$) pada $[3\ {-5}\ 7]^T$ adalah 7

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Vektor-vektor $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$ sering disebut dengan **vektor-vektor basis**.
- Untuk mengetahui besarnya kontribusi dari suatu vektor basis pada suatu vektor tertentu **y**, kita bisa melakukan dot product antara **y** dengan vektor basis tersebut.

- Misalkan untuk mengetahui kontribusi komponen yang searah dengan sumbu-y pada vektor $[3\ -5\ 7]^T$ pada persamaan (5) bisa diperoleh dengan operasi dot product:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (3)(0) + (-5)(1) + (7)(0) = -5$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Demikian pula, kontribusi komponen yang searah dengan sumbu-*x* dan dengan sumbu-*z* pada vektor $[3\ -5\ 7]^T$ pada persamaan (5) berturut-turut bisa diperoleh dengan operasi *dot product*:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (3)(1) + (-5)(0) + (7)(0) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (3)(0) + (-5)(0) + (7)(1) = 7$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Kita bisa melakukan ekstensi konsep dot product pada operasi vektor ke operasi isyarat.
- Isyarat $x(t)$ untuk semua titik waktu t bisa pula kita tampung nilainya pada suatu vektor. Dengan demikian, vektor yang kita dapat akan memiliki ukuran yang tak berhingga.

- Hal yang sama bisa kita berlakukan pada isyarat eksponensial kompleks $e^{jk\omega_0 t} = \exp(jk(2\pi/T)t)$
- Isyarat $e^{jk\omega_0 t}$ untuk semua titik waktu t bisa pula kita tampung nilainya pada suatu vektor. Dan vektor yang dihasilkan akan memiliki ukuran yang tak berhingga pula.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Tinjau kembali Persamaan Analisis Deret Fourier.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad (2)$$

- Dari diskusi tentang konsep dot product serta dimungkinkannya memandang isyarat sebagai vektor berdimensi tak hingga, maka kita bisa memandang pers. (2) sebagai operasi dot product pula.
- Operasi dot product yang terjadi pada (2) adalah antara isyarat $x(t)$ dengan isyarat $\exp(jk(2\pi/T)t)$ (atau $\exp(jk\omega_0 t)$).

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Perhatikan bahwa $x(t)$ umumnya bernilai kompleks sedangkan $\exp(jk(2\pi/T)t)$ jelas bernilai kompleks.
- Perhatikan bahwa saat kedua isyarat ini kita operasikan pada persamaan (2), salah satu isyarat yaitu $\exp(jk(2\pi/T)t)$ dikonjugatkan menjadi $\exp(-jk(2\pi/T)t)$

- Hal ini konsisten dengan operasi dot product pada dua vektor kompleks (di mana vektor kedua pada operasi dot product dikonjugatkan).
- Pertanyaannya mengapa pers. (2) bisa dipandang sebagai operasi dot product.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Perhatikan bahwa saat kita melakukan operasi dot product antara **a** dan **b**:
  - Elemen **a** dan **b** pada indeks yang bersesuaian kita kalikan
  - Seluruh hasil perkalian yang didapat kita jumlahkan seluruhnya

- Hal yang sama berlaku pada persamaan (2):
  - Nilai isyarat $x(t)$ dan $\exp(-jk(2\pi/T)t)$ pada indeks t yang bersesuaian kita kalikan
  - Berhubung t adalah indeks waktu kontinu, maka seluruh hasil perkalian yang didapat di atas kita integralkan (jumlahan diganti integral).
  - Proses integrasi kita lakukan untuk satu periode T.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Kita kembali dengan vektor-vektor pada ruang dimensi-3 yang kita singgung sebelumnya.
- Tinjau **3 vektor basis** yang telah disinggung yaitu: $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, $[0\ 0\ 1]^T$.
- Tampak bahwa jika tiap pasang vektor di atas kita dot productkan hasilnya 0. Misalnya:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)(1) + (1)(0) + (0)(0) = 0$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Hal yang sama berlaku pula untuk 2 pasang vektor basis yang lain yaitu $[1\ 0\ 0]^T$ dengan $[0\ 0\ 1]^T$ serta $[0\ 1\ 0]^T$ dengan $[0\ 0\ 1]^T$.
- Hal ini cukup wajar karena ketiga vektor di atas merupakan tiga vektor basis yang **saling tegak lurus**.

- Ketika setiap dari ketiga vektor basis di atas kita dot productkan dengan dirinya sendiri maka hasilnya 1:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 1$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Hal ini juga wajar karena tiap vektor basis di atas merupakan vektor unit (vektor yang panjangnya 1).
- Berikutnya kita akan melihat apakah sekumpulan fungsi eksponensial kompleks yang saling harmonik, yaitu $\exp(jk(2\pi/T)t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. juga memiliki **karaketeristik serupa** dengan vektor basis $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$, untuk kasus vektor di ruang dimensi-3.

- Untuk keperluan ini kita akan kenakan operasi integral serupa dengan persamaan analisis Deret Fourier (2) hanya saja **tidak** antara $x(t)$ dengan $\exp(jk(2\pi/T)t)$ namun antar $\exp(jk(2\pi/T)t)$ dengan nilai k yang berbeda-beda

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Mula-mula kita kenakan operasi integral antara $\exp(jk(2\pi/T)t)$ dengan **dirinya sendiri** (k yang sama).
- Namun ingat bahwa kita ingin konsisten dengan operasi dot product pada vektor kompleks, sehingga $\exp(jk(2\pi/T)t)$ yang kedua kita konjugatkan menjadi $\exp(-jk(2\pi/T)t)$:

$$\frac{1}{T}\int_T e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^0 dt = \frac{1}{T}\int_0^T 1dt = 1$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Cukup menarik bahwa jika kita kenakan operasi persamaan analisis (2) (yang kita pandang serupa dengan operasi dot product) namun **bukan** antara $x(t)$ dengan $\exp(jk(2\pi/T)t)$ melainkan antara $\exp(jk(2\pi/T)t)$ dengan dirinya sendiri, hasilnya adalah 1.
- Hal ini mengingatkan kita pada dot product antara vektor basis $[1\ 0\ 0]^T$ dengan dirinya sendiri yang hasilnya juga 1.

- Sekarang kita akan kenakan operasi integral persamaan analisis (2) antara $\exp(jm(2\pi/T)t)$ dengan $\exp(jk(2\pi/T)t)$ (dengan $k \neq m$ dan k serta m bilangan bulat).

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Sekali lagi, kita ingin konsisten dengan operasi dot product pada vektor kompleks, sehingga faktor yang kedua yaitu exp($jk(2\pi/T)t$) yang kedua kita konjugatkan menjadi exp($-jk(2\pi/T)t$):

$$\frac{1}{T}\int_T e^{+jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{+jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{j(m-k)\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \cos((m-k)\frac{2\pi}{T}t)dt + \frac{j}{T}\int_0^T \sin((m-k)\frac{2\pi}{T}t)dt$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

$$= \frac{1}{T}\left[\sin((m-k)\frac{2\pi}{T}t)\right]_0^T\left(\frac{T}{2\pi(m-k)}\right)$$

$$-\frac{j}{T}\left[\cos((m-k)\frac{2\pi}{T}t)\right]_0^T\left(\frac{T}{2\pi(m-k)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi(m-k)}\left[\sin((m-k)\frac{2\pi}{T}t)\right]_0^T$$

$$-\frac{j}{2\pi(m-k)}\left[\cos((m-k)\frac{2\pi}{T}t)\right]_0^T$$

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

$$= \frac{1}{2\pi(m-k)}\left[\sin((m-k)2\pi) - \sin(0)\right]$$

$$-\frac{j}{2\pi(m-k)}\left[\cos((m-k)2\pi) - \cos(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi(m-k)}[0-0] - \frac{j}{2\pi(m-k)}[1-1] = 0$$

- Perhatikan bahwa pada perhitungan terakhir kita **memanfaatkan fakta** bahwa *m* dan *k* adalah bilangan bulat serta $m \neq k$ yang artinya $m - k$ adalah bilangan bulat yang **tidak nol**.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Berhubung $m - k$ adalah bilangan bulat yang **tidak nol**, maka jelas bahwa $\cos((m-k)2\pi) = 1$ dan $\sin((m-k)2\pi) = 0$

- Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa untuk k dan m bilangan bulat serta $k \neq m$, maka

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T e^{+jm\frac{2\pi}{T}t} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = 0}$$

- Cukup menarik bahwa jika kita kenakan operasi persamaan analisis (2) antara $\exp(jm(2\pi/T)t)$ dengan $\exp(jk(2\pi/T)t)$, dengan $k \neq m$, hasilnya adalah 0.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Hal ini mengingatkan kita pada dot product antara vektor basis $[1\ 0\ 0]^T$ dengan $[0\ 1\ 0]^T$, $[1\ 0\ 0]^T$ dengan $[0\ 0\ 1]^T$, serta $[0\ 1\ 0]^T$ dengan $[0\ 0\ 1]^T$, yang hasilnya juga 0.
- Ingat bahwa $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$ adalah 3 vektor basis yang saling tegak lurus di ruang dimensi-3

- Dengan demikian, kita bisa juga memandang bahwa $\exp(jm(2\pi/T)t)$ dan $\exp(jk(2\pi/T)t)$, dengan $k \neq m$, adalah **2 fungsi** yang **saling tegak lurus** (orthogonal) dalam 1 periode T!!

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Dengan demikian, bisa diringkaskan untuk bilangan bulat m dan k :

$$\frac{1}{T}\int_T e^{+jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \begin{cases} 0, & \text{untuk } m \neq k \\ 1, & \text{untuk } m = k \end{cases}$$

- Kesimpulannya, kita bisa menganggap seperangkat fungsi eksponensial kompleks yang saling harmonik yaitu $\exp(jk(2\pi/T)t)$ atau $\exp(jk\omega_0 t)$, untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$ sebagai fungsi-fungsi basis yang saling tegak lurus dalam satu periode T.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Hal di atas analogi dengan fakta bahwa $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$ adalah 3 vektor basis yang saling tegak lurus di ruang dimensi-3.

- Sekarang kita tinjau persamaan sintesis Deret Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (1)$$

- Dari persamaan sintesis (1) di atas, kita bisa mengatakan bahwa sembarang isyarat periodik $x(t)$ bisa dituliskan sebagai **kombinasi linear** fungsi-fungsi basis $\exp(jk\omega_0 t)$ yang saling tegak lurus dalam satu periode T.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- **Analogi** bagi persamaan (1) di atas untuk kasus vektor dimensi-3 adalah:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

- Jika kita bandingkan persamaan (1) dan (6), tampak bahwa $\exp(jk(2\pi/T)t)$, dengan $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$, memainkan peranan yang sama dengan $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$ (fungsi-fungsi basis yang saling tegak lurus dalam periode T **vs** vektor-vektor basis yang tegak lurus dalam ruang dimensi-3)

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Sedangkan koefisien deret Fourier a_k pada Persamaan (1) memainkan **peranan yang sama** dengan skalar b_1, b_2, dan b_3 pada persamaan (6) (sebagai bobot kontribusi dari tiap-tiap fungsi basis $\exp(jk(2\pi/T)t)$ pada isyarat $x(t)$ **vs** sebagai bobot kontribusi dari tiap-tiap vektor basis $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$, dan $[0\ 0\ 1]^T$ pada vektor **b**.

- Dan **cara mencari** bobot kontribusi tsb di atas pun serupa.
- Dot product antara **b** dengan vektor basis pada kasus vektor 3 dimensi
- Persamaan analisis Deret Fourier (2) pada kasus representasi isyarat dengan Deret Fourier.

Relasi antara Operasi Vektor dan Deret Fourier

- Dengan kata lain,

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad (2)$$

ANALOGI DENGAN

$$b_2 = \mathbf{b}\,.\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = (b_1)(0)+(b_2)(1)+b_3(0)$$