Analisis Fourier Bagian Empat: Transformasi Fourier untuk Isyarat Waktu Kontinu (Lanjutan)

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

- Pada slide-slide berikut akan dibahas mengenai sifat-sifat Transformasi Fourier

Notasi $\mathcal{F}(x(t))$ mengindikasikan transformasi Fourier dari $x(t)$

Notasi $\mathcal{F}^{-1}(X(j\omega))$ mengindikasikan invers transformasi Fourier dari $X(j\omega)$

- Sedangkan notasi

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

- Mengindikasikan adanya hubungan pasangan transformasi Fourier antara $x(t)$ dan $X(j\omega)$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
1. Linearitas

- Jika diketahui bahwa

$$x_1(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega) \qquad x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$$

- Maka berlaku

$$ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

Pembuktian:

- Jelas dari pernyataan di atas bahwa

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt \text{ dan } X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
1. Linearitas

- Apabila $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ maka

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)]e^{-j\omega t}dt$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Dengan demikian diperoleh:

$$\boxed{X(j\omega) = aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)}$$

Contoh-1

Diketahui sinyal $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

Maka

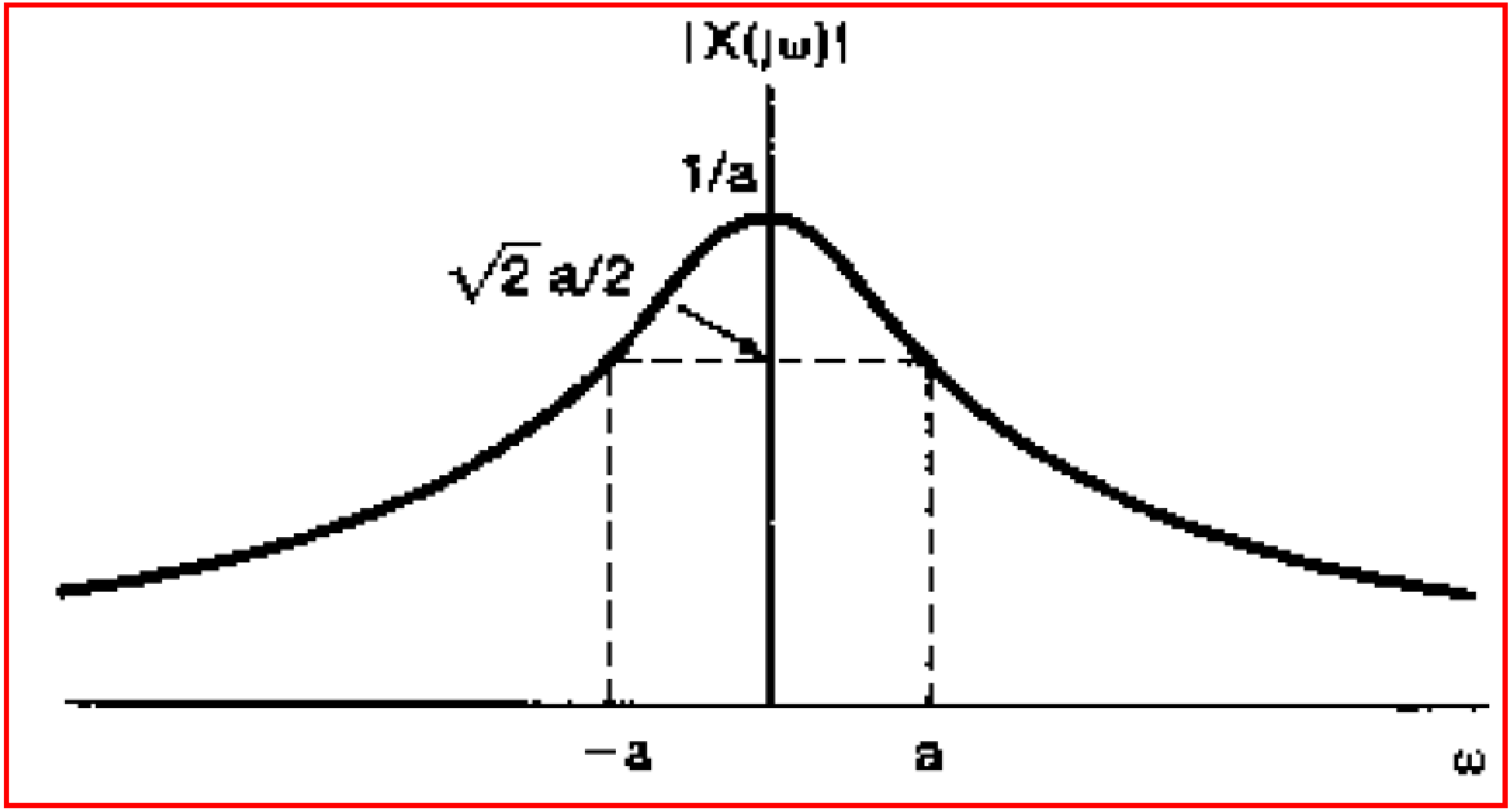
$$\boxed{X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0.}$$

Berhubung $X(j\omega)$ bernilai kompleks maka untuk memplot $X(j\omega)$, kita perlu memecahnya menjadi komponen magnitude dan fase.

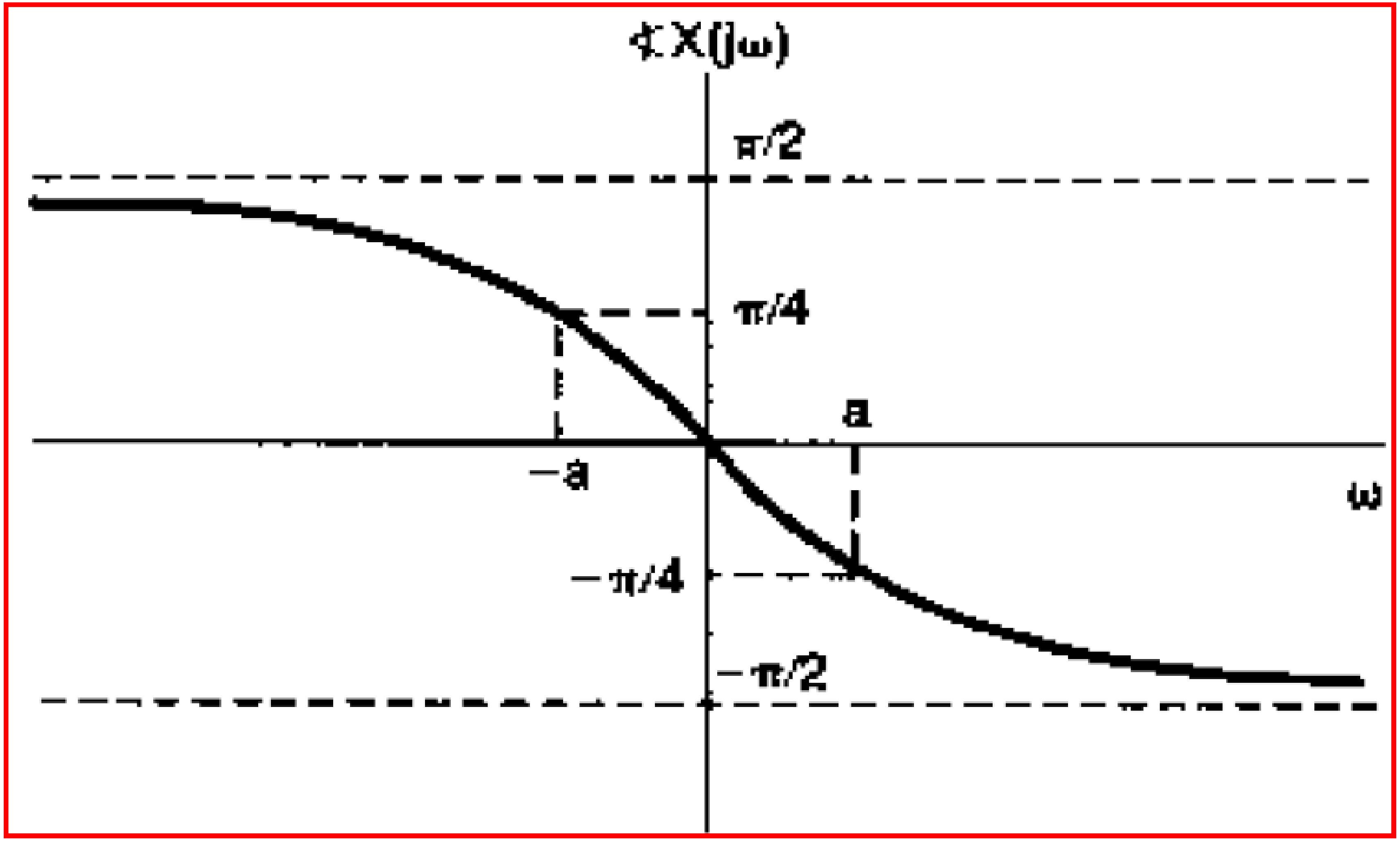
$$\boxed{|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Contoh-1



Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 291

Contoh-1



Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 291

Contoh-1

- Bagaimana jika akan dicari: **Fourier Transform** dari

$$\boxed{y(t) = u(t)[ae^{-\alpha t} + be^{-\beta t}], \quad \alpha, \beta > 0}$$

$$Y(j\omega) = a\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt + b\int_0^\infty e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$

$$= -\frac{a}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^\infty - \frac{b}{\beta + j\omega} e^{-(\beta+j\omega)t}\Big|_0^\infty$$

$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{a}{\alpha + j\omega} + \frac{b}{\beta + j\omega}, \quad \alpha, \beta > 0}$$

Contoh-1

- Tampak pada Contoh di atas kita sebetulnya bisa memberlakukan sifat linearitas.
- Pada **awal** Contoh 1, kita telah mengidentifikasikan bahwa

$$\boxed{e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}, \quad \text{dengan } a > 0}$$

- Dengan cara yang sama bisa didapatkan

$$\boxed{e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad \text{dengan } \alpha > 0}$$

$$\boxed{e^{-\beta t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\beta + j\omega}, \quad \text{dengan } \beta > 0}$$

Contoh-1

- Dengan memanfaatkan sifat linearitas, maka jelas bahwa **Fourier Transform** bagi

$$\boxed{y(t) = u(t)[ae^{-\alpha t} + be^{-\beta t}], \quad \alpha, \beta > 0}$$

- Bisa dituliskan sebagai (sama dengan jawaban yang telah diperoleh).

$$\boxed{y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{a}{\alpha + j\omega} + \frac{b}{\beta + j\omega}, \quad \alpha, \beta > 0}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

2. Time Shifting

- Jika diketahui bahwa

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

- Maka berlaku bahwa

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Pembuktian:

- Kita bisa meninjau formula Invers Transformasi Fourier (Persamaan Sintesis)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (1)$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

2. Time Shifting

- Apabila kita substitusi t dengan $t - t_0$ pada persamaan sintesis (1) di atas diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x(t-t_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}e^{-j\omega t_0}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{e^{-j\omega t_0}X(j\omega)\right\} e^{j\omega t}d\omega \qquad (2)
\end{aligned}
$$

- Kita perhatikan standar persamaan sintesis untuk Transformasi Fourier (1) dan bandingkan hasil di atas dengan (1)

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
2. Time Shifting

- Maka jelas bahwa (2) merupakan persamaan sintesa bagi $x(t - t_0)$. Dengan demikian, benar bahwa:

$$\boxed{x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)}$$

- Selain cara di atas kita juga bisa menghitung solusi persamaan analisis (Transformasi Fourier) untuk $x(t - t_0)$:

$$\mathcal{F}(x(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega (t-t_0)} e^{-j\omega t_0} dt$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
2. Time Shifting

- Jika kita misalkan $u = t - t_0$ maka diperoleh bahwa $du = dt$ mengingat t_0 adalah konstanta. Dengan demikian

$$\mathcal{F}(x(t-t_0)) = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)}dt$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u}du = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

- Dengan demikian, benar bahwa:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{x(t-t_0)\right\} = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
3. Konjugasi

- Jika Transformasi Fourier dari $x(t)$ diberikan oleh $X(j\omega)$ atau

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)}$$

- Maka Transformasi Fourier dari $x^*(t)$ diberikan oleh $X^*(-j\omega)$ atau

$$\boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)}$$

Pembuktian:

- Sifat ini diperoleh dengan melakukan operasi complex conjugate pada kedua ruas persamaan.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
3. Konjugasi

- Sehingga diperoleh:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

- Menggantikan ω dengan –ω => Diperoleh:

$$\boxed{X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
3. Konjugasi

- Jika persamaan di atas kita bandingkan dengan persamaan standar Transformasi Fourier (Persamaan Analisis) berikut:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (3)$$

- Maka jelas bahwa $X^*(-j\omega)$ adalah hasil Transformasi Fourier dari $x^*(t)$. Dengan demikian benar bahwa:

$$x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega) \quad \text{jika} \quad x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier:
4. Conjugate Symmetry

- Jika $x(t)$ adalah isyarat real, $x(t) \in \mathbb{R}$, maka $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

Pembuktian:

$$X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)e^{-j\omega t}dt\right)^*$$

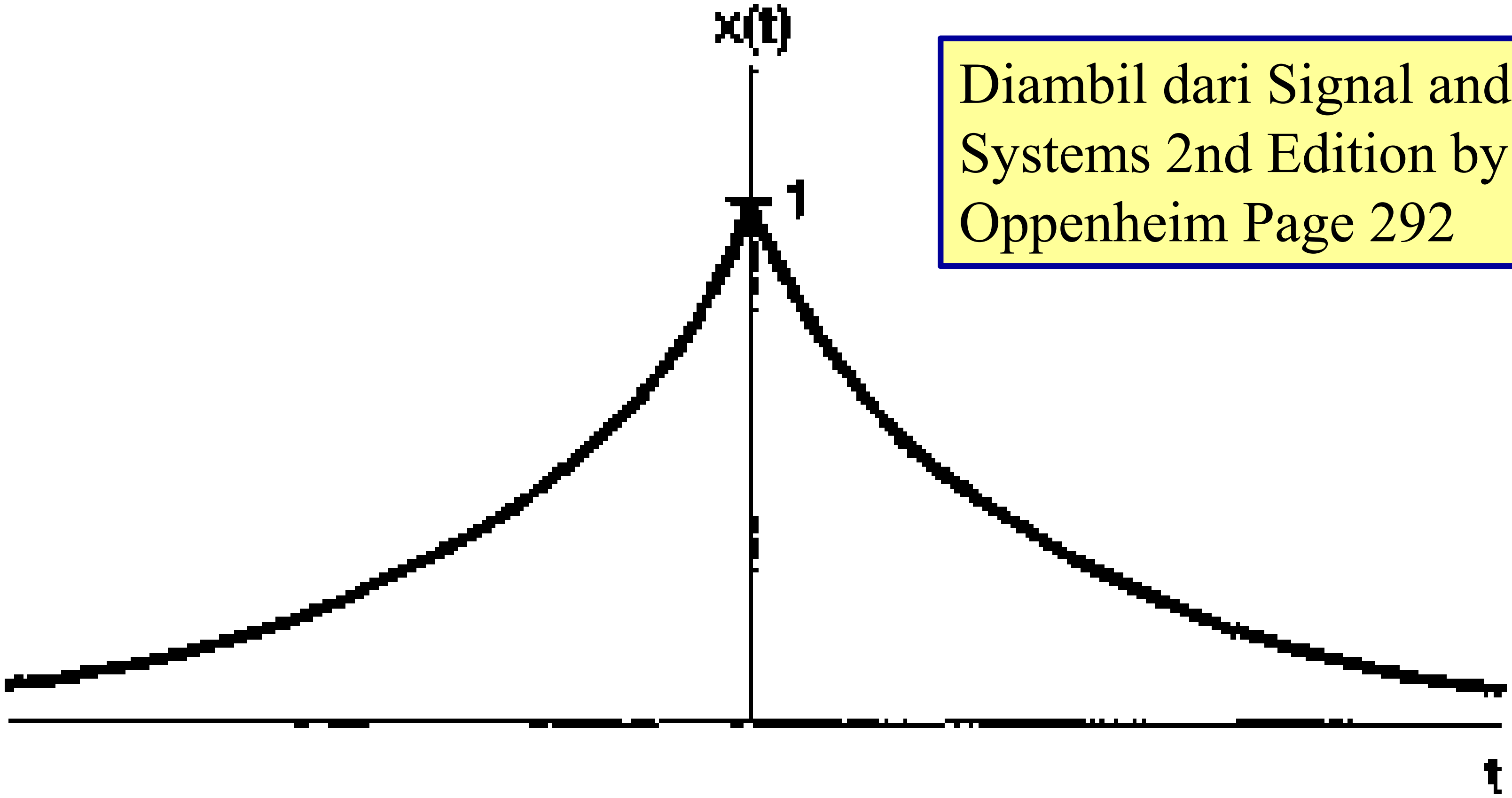
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{+j\omega t}dt = X(-j\omega)$$

karena $x(t) \in \mathbb{R}$

Contoh-2

- Tentukan Transformasi Fourier bagi isyarat (lihat gambar):

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$



Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 292

Contoh-2

- Kita bisa mengaplikasikan operasi transformasi Fourier (persamaan analisis (3)) pada $x(t)$

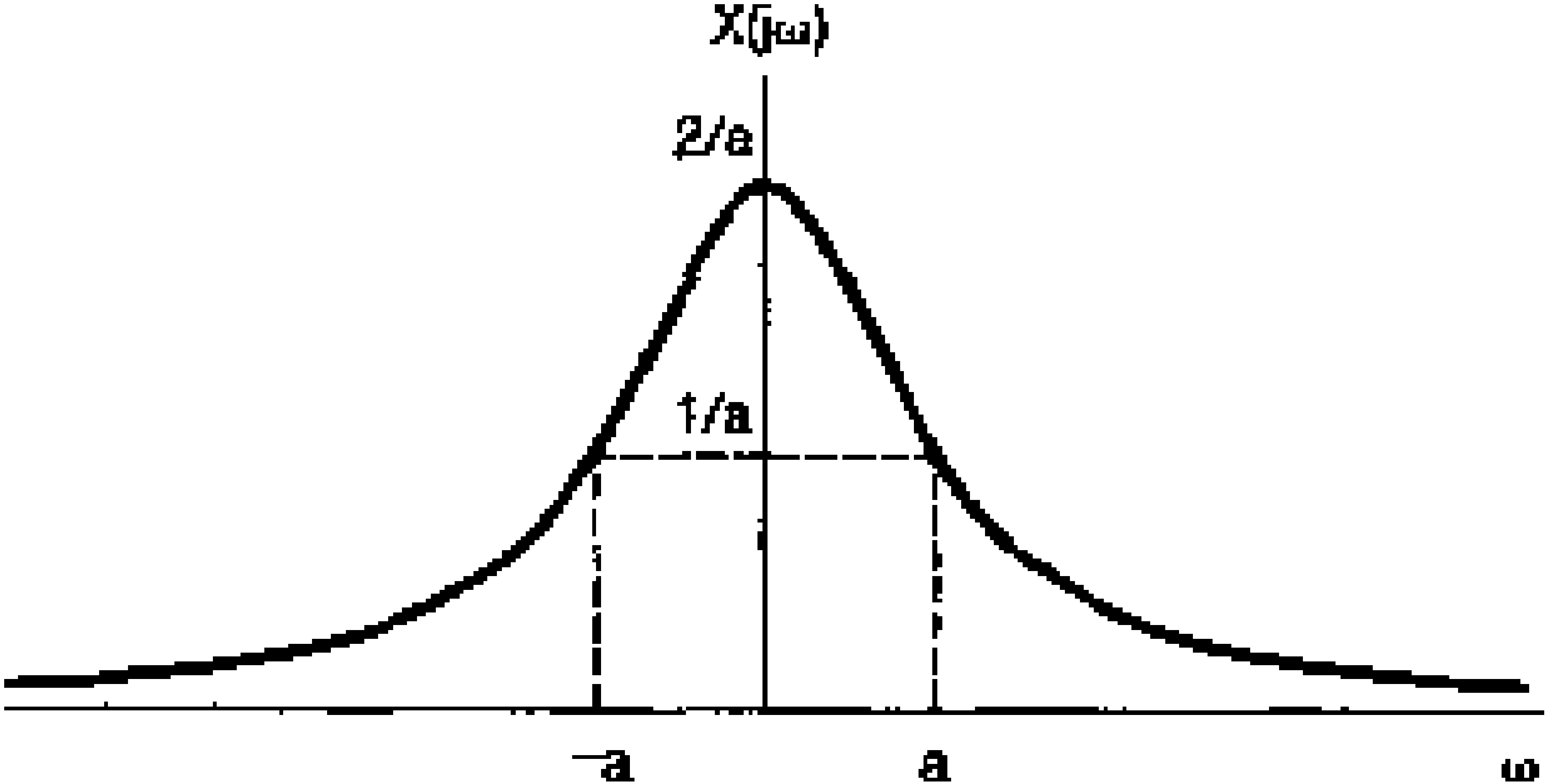
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega}\, e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+j\omega)}\, e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

Contoh 2



Hasil Transformasi Fourier untuk Contoh 2 (Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 292)

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
5. Differensiasi

Jika $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$ akan dicari $\mathcal{F}(g(t))$ di mana

$$\boxed{g(t) = \frac{d}{dt}x(t)}$$

- Kita bisa mulai dengan persamaan invers Transformasi Fourier (Persamaan Sintesis (1)) dan melakukan derivatif terhadap kedua ruas persamaan tersebut.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (1)$$

$$\boxed{g(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
5. Differensiasi

- Dengan demikian,

$$g(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}d\omega$$

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

- Tampak dari hasil di atas diperoleh bahwa

$$\boxed{\mathcal{F}(g(t)) = G(j\omega) = j\omega X(j\omega)}$$

$$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)} \quad \text{jika} \quad \boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
5. Differensiasi

- Sifat differensiasi di atas merupakan sifat yang penting karena sifat tersebut memungkinkan dilakukannya substitusi terhadap operasi differensiasi di kawasan waktu dengan operasi perkalian dengan jω di kawasan frekuensi.

- Sifat substitusi ini akan cukup bermanfaat saat Transformasi Fourier digunakan untuk melakukan analisis terhadap sistem Linear Time Invariant (LTI) yang direpresentasikan dengan persamaan differensial.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

6. Integrasi

Jika $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$ akan dicari $\mathcal{F}(g(t))$ di mana

$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$$

$$\boxed{\text{Jawab: } \mathcal{F}(g(t)) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)}$$

- Secara intuitif, kemunculan faktor $1/(j\omega)$ di kawasan frekuensi saat terjadi integrasi di kawasan waktu cukup masuk akal mengingat proses integrasi adalah lawan dari proses differensiasi.

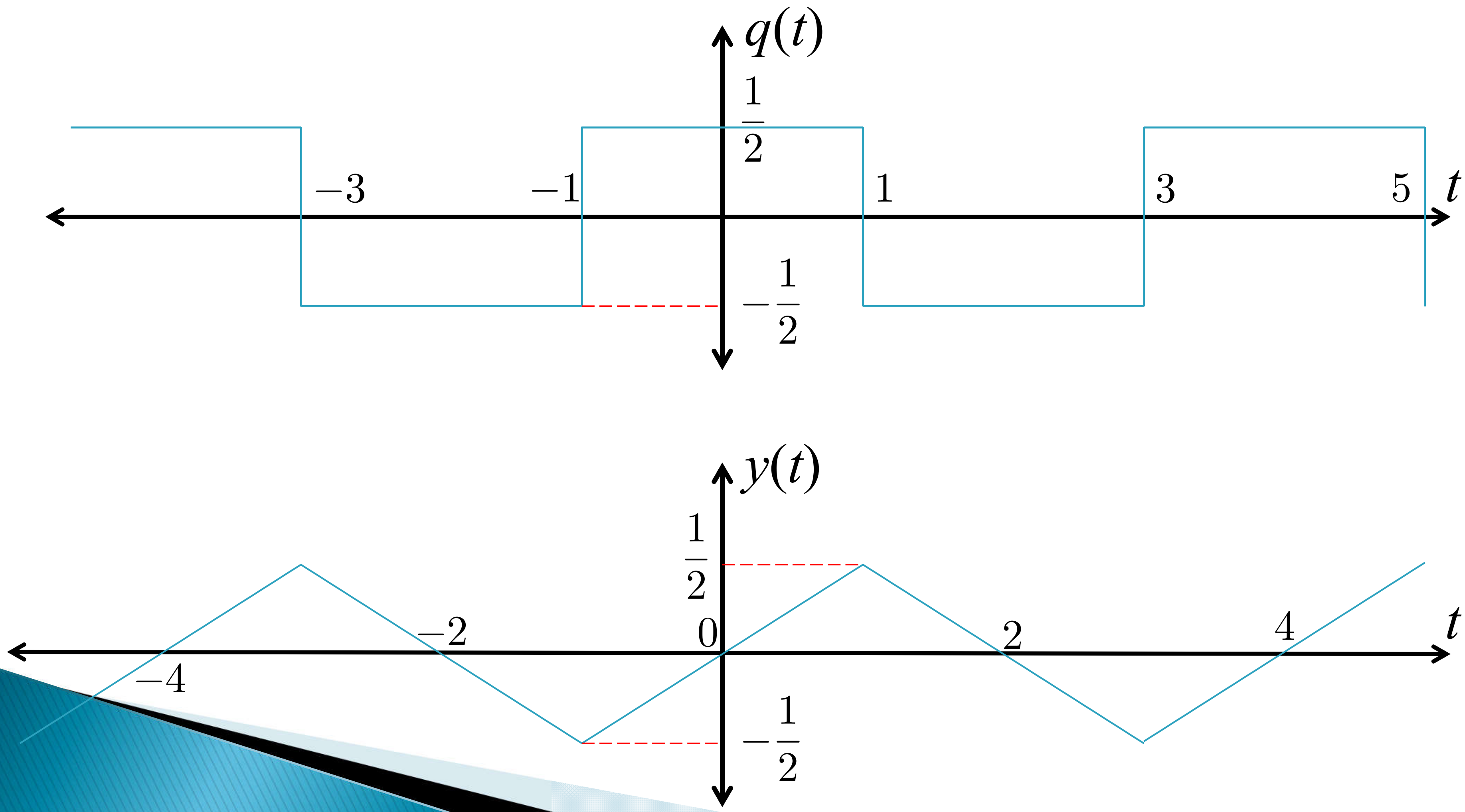
Sifat-Sifat Transformasi Fourier
6. Integrasi

- Sedangkan proses differensiasi di kawasan waktu diikuti dengan munculnya perkalian dengan faktor $j\omega$ di kawasan frekuensi.
- Yang mungkin mengundang tanya adalah munculnya faktor konstan $\pi X(0)\delta(\omega)$.

- Kemunculan faktor konstan ini ekivalen dengan munculnya faktor konstan pada saat kita melakukan integral tak tentu.
- Hal ini karena ada lebih dari satu fungsi isyarat yang memiliki derivatif yang sama

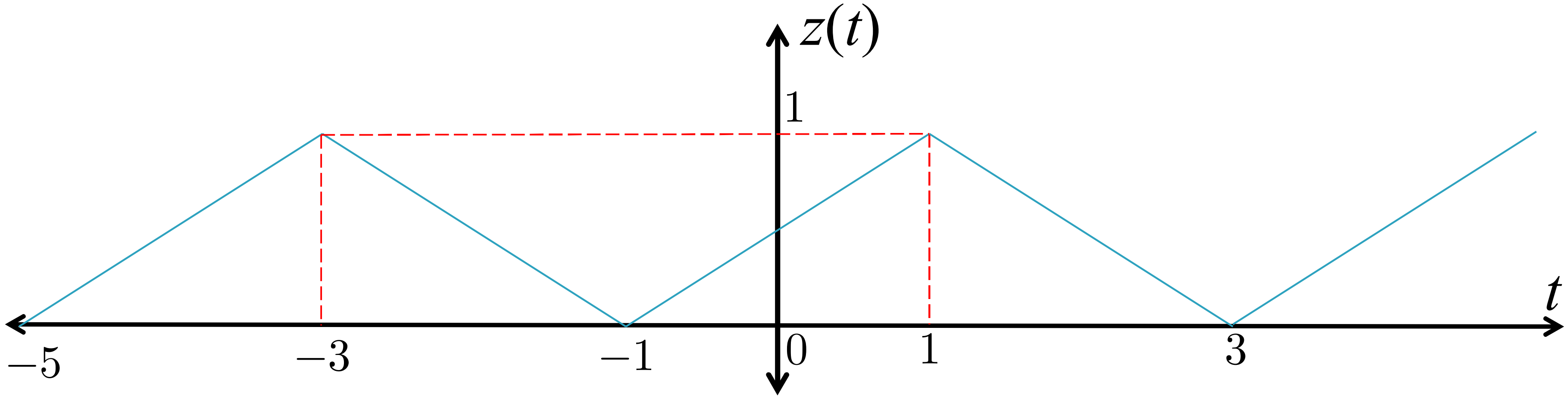
Sifat-Sifat Transformasi Fourier

6. Integrasi



Sifat-Sifat Transformasi Fourier

6. Integrasi



- Sebagai contoh, pada ketiga gambar di atas, hasil derivative dari fungsi $z(t)$ maupun $y(t)$ adalah fungsi yang sama yaitu $q(t)$.
- Hal ini karena fungsi $z(t)$ dan $y(t)$ hanya berbeda dengan faktor konstan (berbeda komponen DC).

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
6. Integrasi

- Munculnya faktor konstan $\pi X(0)\delta(\omega)$ di kawasan frekuensi saat kita melakukan proses integrasi di kawasan waktu tidak lain untuk memperhitungkan keberadaan komponen Direct Current (DC) yang mungkin muncul di atas.

- Perhatikan bahwa $\delta(\omega)$ akan bernilai 1 jika $\omega=0$ => Nilai $\pi X(0)$ pada $\pi X(0)\delta(\omega)$ menggambarkan besarnya kontribusi energi pada komponen frekuensi $\omega=0$ (energi isyarat konstan atau komponen DC) di dalam isyarat di kawasan waktu.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
7. Time Scaling

- Jika $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$ dan akan dicari $\mathcal{F}(x(at))$ dengan $a \neq 0$, maka bisa dituliskan:

$$\boxed{\mathcal{F}(x(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt}$$

- Kemudian perkenalkan $\tau = at$ yang jika dikenakan operasi derivative menghasilkan $d\tau = a\, dt$.
- Kita akan evaluasi kasus dengan nilai $a > 0$ dan $a < 0$.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

7. Time Scaling

- Untuk $a > 0$, diperoleh:

$$\mathcal{F}(x(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{a}e^{-j\frac{\omega}{a}at}d\tau$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

- Untuk $a<0$, maka karena $\tau = at$, τ akan berlawanan tanda dengan t.
- Akibatnya selang integral bagi τ berlawanan dengan selang integral bagi t.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

7. Time Scaling

- Untuk $a < 0$, diperoleh:

$$\mathcal{F}(x(at)) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)\frac{1}{a}e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = -\frac{1}{a}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

Untuk $a<0$ dan $a>0$ diperoleh:

$$\boxed{\mathcal{F}(x(at)) = \left|\frac{1}{a}\right| X\left(j\frac{\omega}{a}\right)}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

7. Time Scaling

- Salah satu khusus adalah saat $a = -1$, dimana diperoleh:

$$\boxed{\mathcal{F}(x(-t)) = X(-j\omega)}$$

- Artinya saat kita membalik isyarat di kawasan waktu (pencerminan terhadap garis $t = 0$) maka otomatis kita juga akan membalik hasil transformasi Fourier atau representasi isyarat tersebut di kawasan frekuensi (terjadi pencerminan terhadap garis $\omega = 0$).

- Hal yang menarik lainnya adalah saat $a > 1$. Pada saat itu kita melakukan pemampatan (shrinking atau kompresi) terhadap isyarat.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
7. Time Scaling

- Misalnya, saat $a = 2$, maka ukuran isyarat menjadi lebih kecil (setengah dari ukuran semula).
- Sebaliknya pada kawasan frekuensi terjadi stretching (peregangan) karena hasil representasi frekuensi akan membesar menjadi a kali lipat saat $a > 1$, makin banyak komponen frekuensi lebih tinggi yang dilibatkan.

- Sebaliknya saat $0 < a < 1$, kita melakukan peregangan (stretching) terhadap isyarat.
- Saat $a = 0,5$, ukuran isyarat menjadi lebih besar (dua kali ukuran semula)

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
7. Time Scaling

- Sebaliknya pada kawasan frekuensi terjadi shrinking (pemampatan atau kompresi) karena hasil representasi frekuensi akan mengecil menjadi a x ukuran semula saat $0 < a < 1$, makin banyak komponen frekuensi lebih tinggi yang tidak dilibatkan.

- Artinya terjadi relasi invers antara representasi isyarat di kawasan waktu dan di kawasan frekuensi.
- Kasus serupa akan muncul pada saat kita membaca sifat dualitas dari Transformasi Fourier.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Ingat kembali formula persamaan sintesis dan persamaan analisis:

Transformasi Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Persamaan Sintesis (Inverse Fourier Transform)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Persamaan Analisis (Fourier Transform)

- Tampak bahwa bentuk kedua persamaan di atas mirip atau serupa walaupun tidak sama persis.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

8. Duality

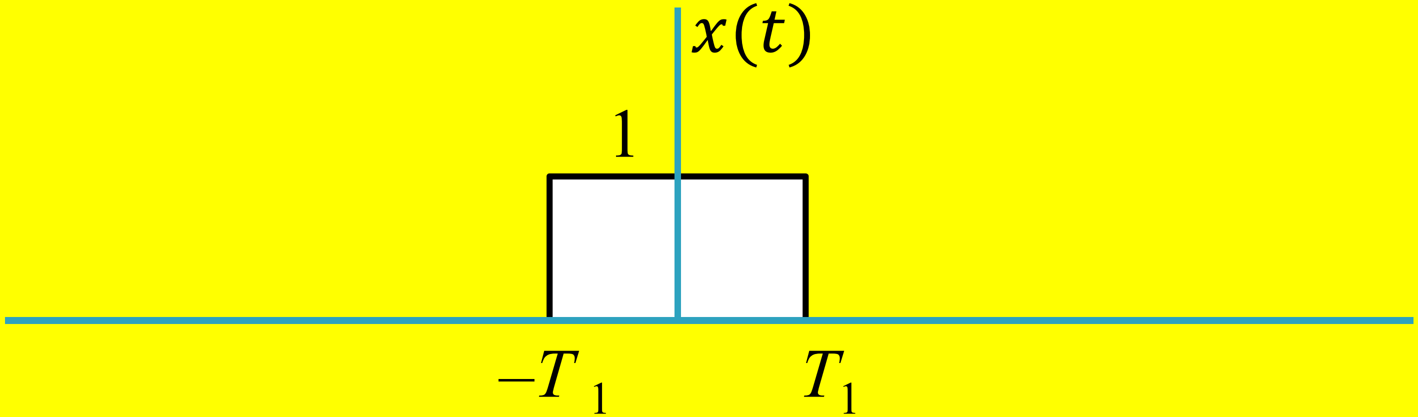
- Adanya kemiripan atau hubungan simetris antara persamaan sintesis dan persamaan analisis mengakibatkan Transformasi Fourier memiliki sifat yang disebut dengan **Duality**.

- Contoh yang bisa dipakai adalah:
  - Isyarat gelombang kotak di kawasan waktu dan transformasi Fouriernya di kawasan frekuensi.
  - Representasi gelombang kotak di kawasan frekuensi dan invers transformasi Fouriernya di kawasan waktu.
  - Untuk keperluan ini tinjau dua Contoh berikut ini.

Contoh-3

Diketahui isyarat kotak aperiodik berikut:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



- Fourier Transform untuk isyarat $x(t)$ bisa dihitung dengan mengaplikasikan persamaan analisis (3) pada $x(t)$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt$$

Contoh-3

- Untuk kasus ω ≠ 0, diperoleh bahwa:

$$X(j\omega) = \frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{2j\omega}\left[e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}\right]$$

$$= \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega},\ \omega \neq 0$$

- Sedangkan untuk ω = 0 diperoleh

$$X(0) = \left[X(j\omega)\right]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]_{\omega=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-T_1}^{T_1} dt = 2T_1$$

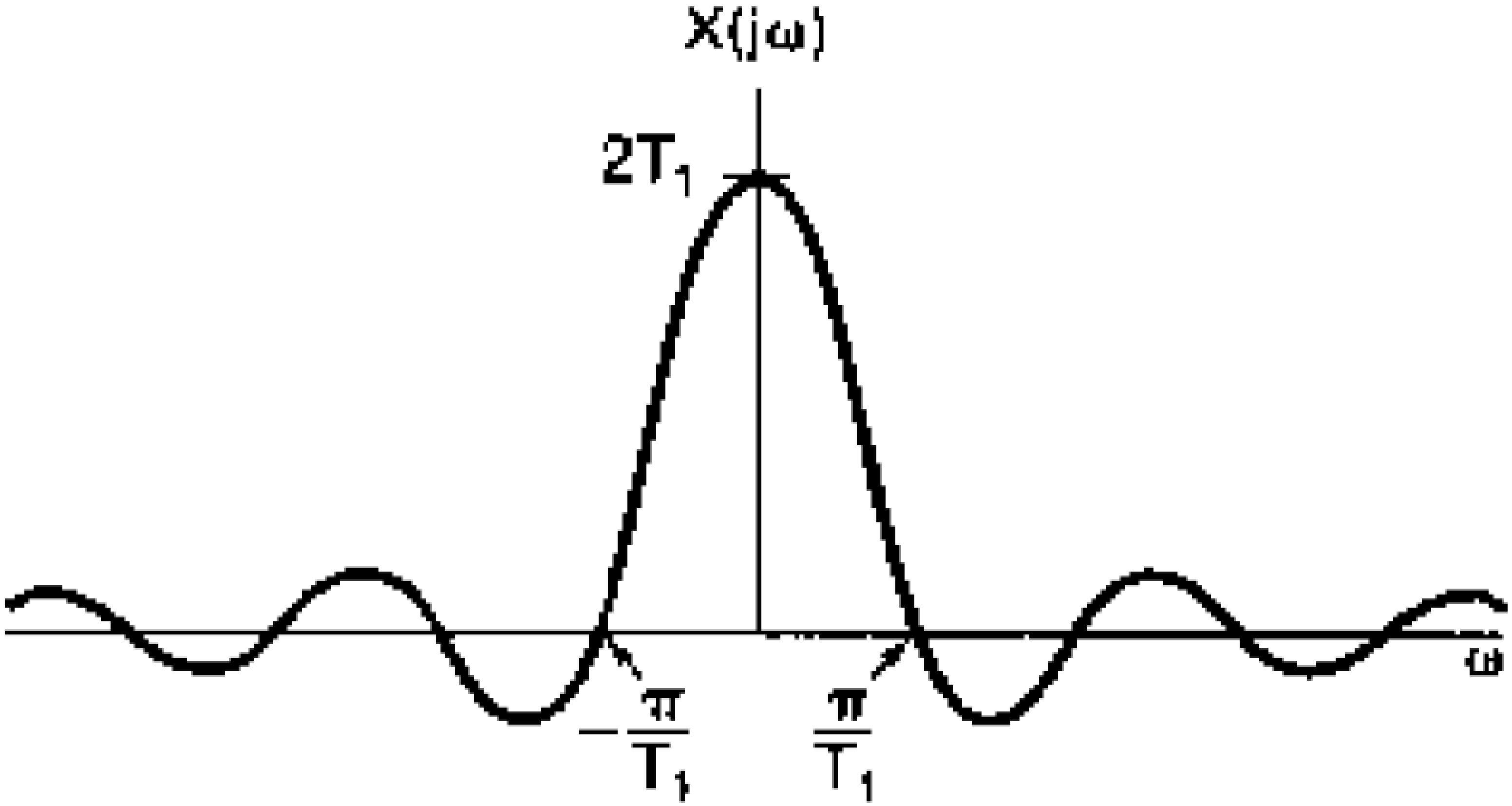
Contoh-3

- Dengan demikian, bisa disimpulkan bahwa spektrum frekuensi bagi $x(t)$ (representasi $x(t)$ di kawasan frekuensi) diberikan oleh:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2T_1, & \text{untuk } \omega = 0 \\ 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} & \text{untuk } \omega \neq 0 \end{cases}$$

- Gambar berikut mengilustrasikan plot spektrum frekuensi $X(j\omega)$ bagi isyarat di kawasan waktu $x(t)$ (gelombang kotak di atas).

Contoh-3

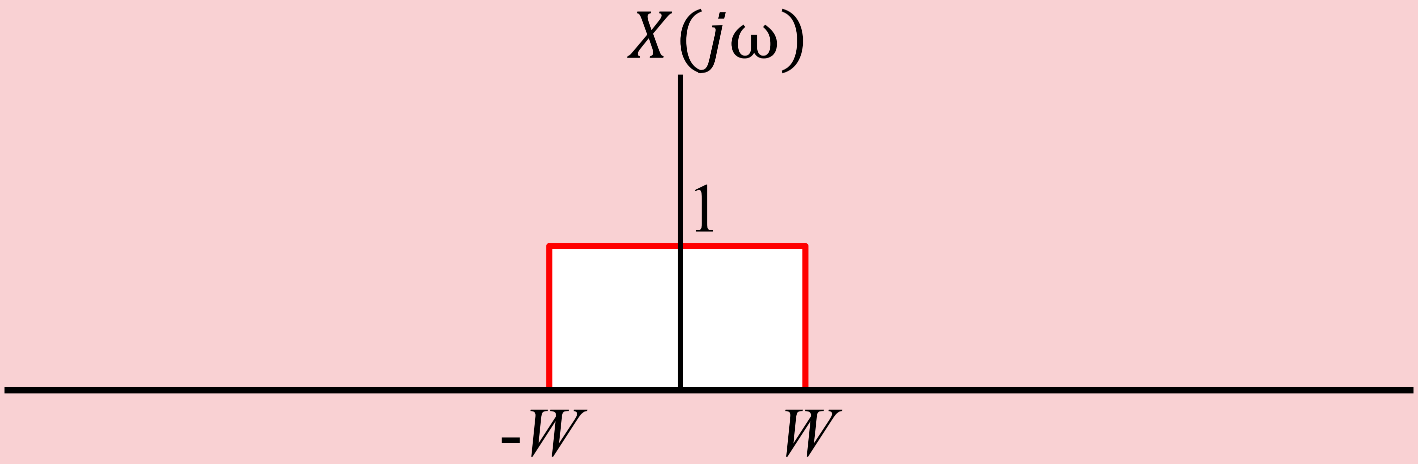


Gambar di atas adalah Plot representasi pada kawasan frekuensi $X(j\omega)$ bagi isyarat gelombang kotak $x(t)$. Tampak bahwa $X(j\omega)$ memiliki bentuk fungsi sinc. Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 293

Contoh-4

- Tentukan isyarat $x(t)$ yang transformasi Fouriernya diberikan oleh:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$



- Isyarat di kawasan waktu $x(t)$ bisa dihitung dengan mengaplikasikan persamaan sintesis (1) (Inverse Fourier Transform) pada $X(j\omega)$.

Contoh-4

- Dengan demikian,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega$$

- Untuk $t \neq 0$, diperoleh:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{j\omega t}\right]_{\omega=-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{jWt} - e^{-jWt}\right] = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

Contoh-4

- Untuk $t = 0$, diperoleh:

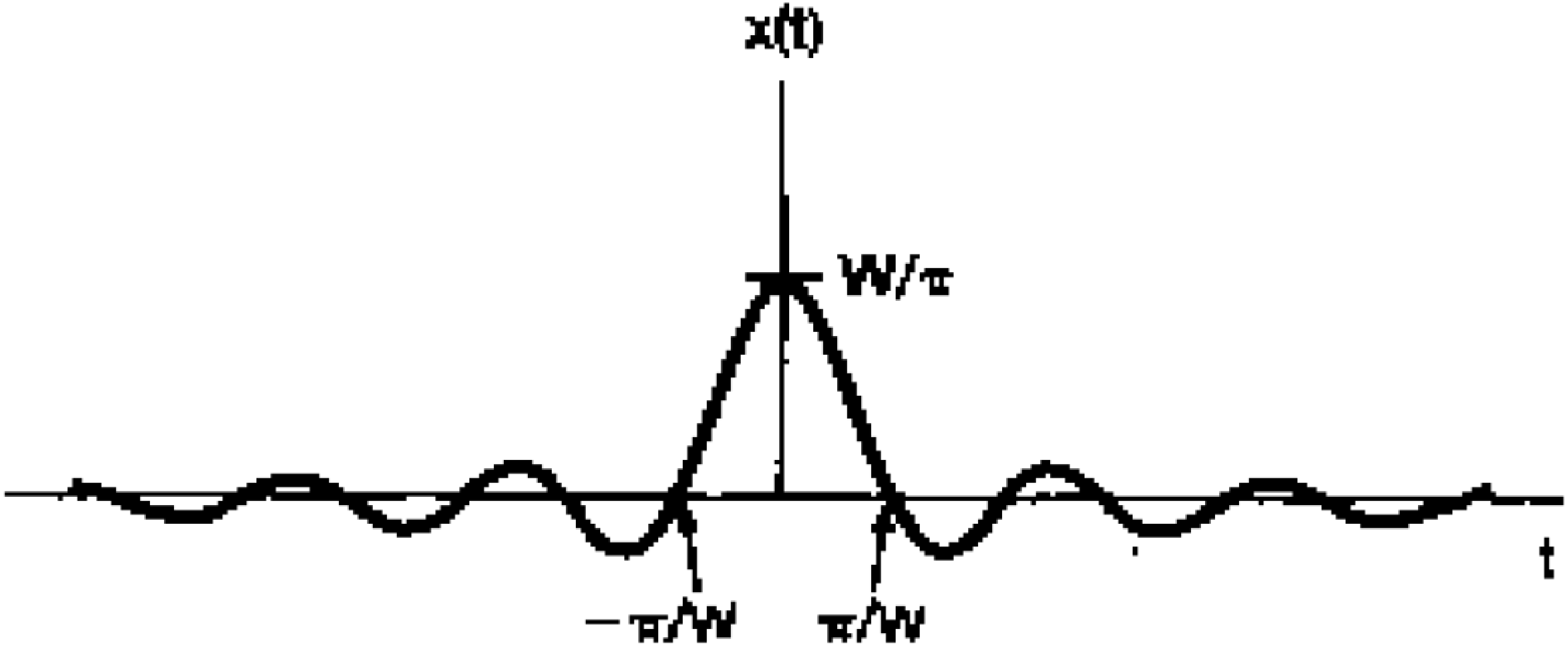
$$x(0) = [x(t)]_{t=0} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t} d\omega\right]_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}(W + W) = \frac{2W}{2\pi} = \frac{W}{\pi}$$

- Dengan demikian, bisa disimpulkan bahwa isyarat $x(t)$, yang transformasi Fouriernya diberikan oleh $X(j\omega)$ di atas, dapat dituliskan sebagai:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{W}{\pi}, & \text{untuk } t = 0 \\ \dfrac{\sin(Wt)}{\pi t} & \text{untuk } t \neq 0 \end{cases}$$

Contoh 4



Gambar di atas adalah Plot representasi isyarat di kawasan waktu $x(t)$ yang spektrum frekuensinya diberikan oleh $X(j\omega)$ di atas (spektrum kotak). Tampak bahwa $x(t)$ memiliki bentuk fungsi sinc. Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 294

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Hal yang menarik pada kedua Contoh di atas dirangkumkan berikut ini
- Pada Contoh 3, tampak bahwa ukuran lebar kotak pada $x(t)$ (kawasan waktu) **berbanding terbalik** dengan ukuran lebar main lobe (bukit utama yang terletak di tengah) pada kurva berbentuk sinc di kawasan frekuensi $X(j\omega)$.

- Hal ini karena sepasang titik potong $X(j\omega)$ dengan sumbu ω yang paling dekat dengan main lobe terjadi pada $\omega = \pm\pi/T_1$.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Di samping lebar main lobe pada $X(j\omega)$ semakin kecil saat lebar kotak pada $x(t)$ semakin besar, puncak main lobe pada $X(j\omega)$ juga akan semakin tinggi berhubung tinggi main lobe pada $X(j\omega)$ proporsional dengan lebar kotak pada $x(t)$.

- Hal serupa juga tampak pada Contoh 4.
- Semakin lebar ukuran kotak pada kawasan frekuensi $X(j\omega)$, maka semakin tinggi puncak main lobe dan semakin sempit lebar main lobe pada kurva sinc pada isyarat di kawasan waktu $x(t)$.

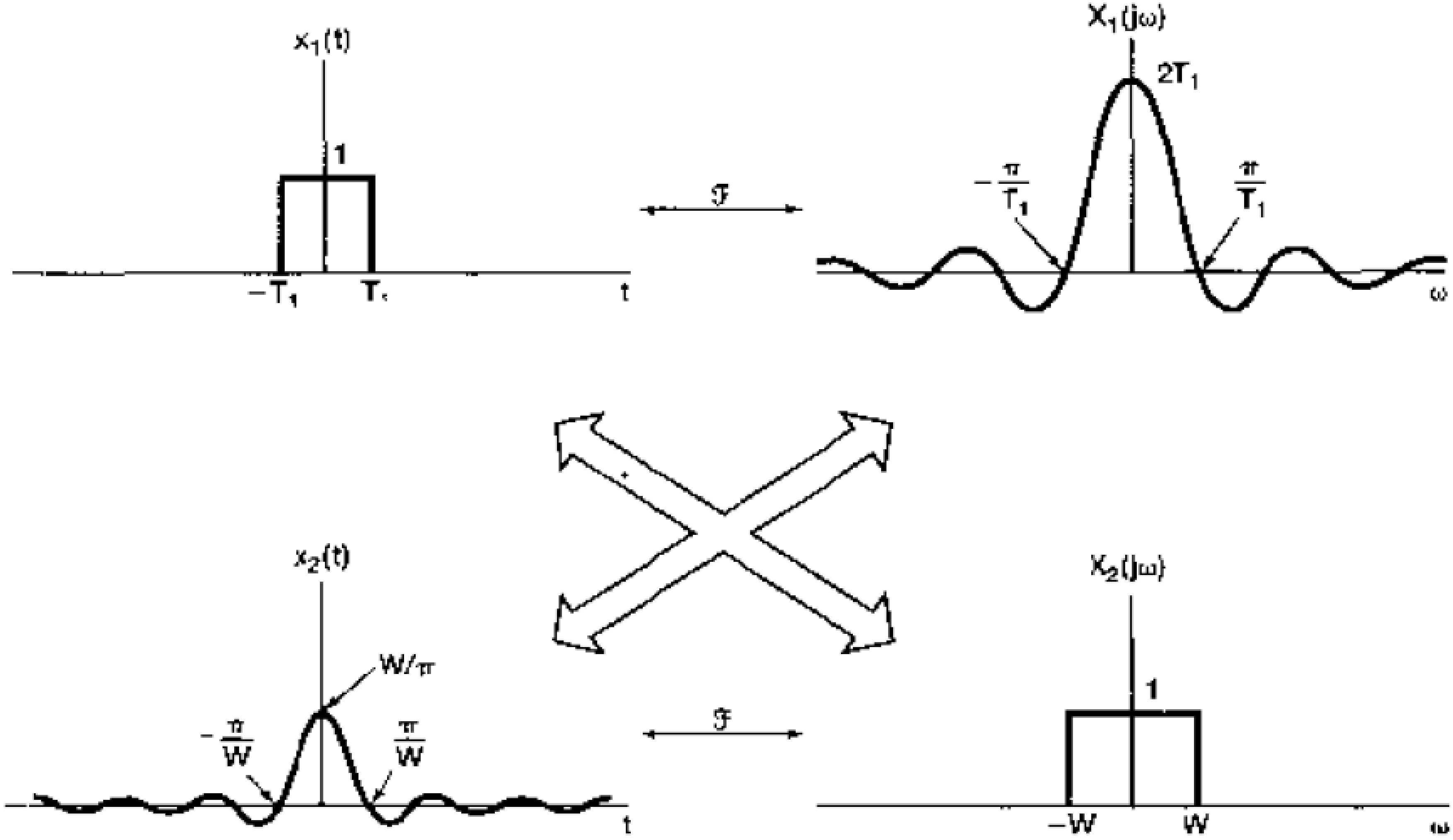
Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Hal ini mempertegas keberadaan relasi invers antara representasi isyarat di kawasan waktu dengan representasi di kawasan frekuensi yang telah disinggung saat kita membahas sifat Time Scaling.

- Di samping itu, jika kita membandingkan Contoh 3 dan 4, kita menemukan sifat yang disebut dengan duality.
- Sifat ini diakibatkan oleh formula Transformasi Fourier (persamaan analisis) dan inversnya (persamaan sintesis) yang simetris (mirip walau tidak sama persis)

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

8. Duality



Diambil dari Signal and Systems 2nd Edition by Oppenheim Page 310

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Sifat Duality di sini maksudnya adalah:
  - Jika ada suatu karakteristik pada representasi isyarat di kawasan waktu yang memiliki implikasi terhadap hasil Fourier transformnya (representasi di kawasan frekuensi)
  - Maka jika karakteristik serupa muncul pada representasi isyarat di kawasan frekuensi, implikasi yang serupa akan terjadi pada representasi isyarat di kawasan waktu.

- Contoh lain adalah pada sifat differensiasi.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Sifat differensiasi, ingat kembali:

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(j\omega) = j\omega X(j\omega) \qquad (4)$$

- Ingat kembali persamaan analisis (atau persamaan Transformasi Fourier)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Jika persamaan analisis ini kita differensialkan terhadap ω, akan diperoleh

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jt\, x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

8. Duality

- Dengan demikian, tampak jelas bahwa:

$$\boxed{g(t) = -jt\,x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(j\omega) = \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \qquad (5)}$$

- Tampak bahwa differensiasi di kawasan frekuensi identik dengan perkalian dengan *jt* di kawasan waktu.
- Hal ini merupakan kebalikan (*duality*) dari persamaan (4): differensiasi di kawasan waktu identik dengan perkalian dengan $j\omega$ di kawasan frekuensi.

Sifat-Sifat Transformasi Fourier
8. Duality

- Contoh-contoh duality yang lain:
  - Time Shifting di kawasan waktu => perkalian dengan complex exponential di kawasan frekuensi.

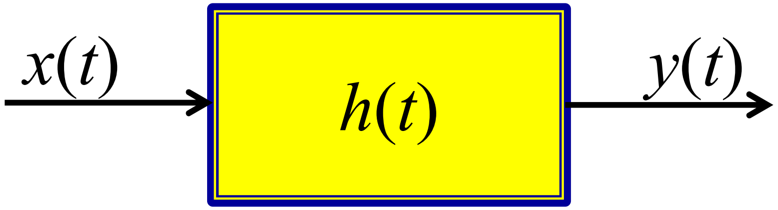
$$\boxed{x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)}$$

- Dengan:
  - Frequency Shifting di kawasan frekuensi => perkalian dengan complex exponential di kawasan waktu

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))}$$

Transformasi Fourier dan Konvolusi di Kawasan Waktu

- Tinjau suatu sistem Linear Time Invariant (LTI) yang masukannya diberikan oleh $x(t)$, keluarannya diberikan oleh $y(t)$ dan tanggapan impulsnya diberikan oleh $h(t)$.



- Bagaimana relasi antara isyarat $x(t)$ dan $y(t)$ di kawasan frekuensi (relasi antara $\mathcal{F}\{x(t)\}$ dan $\mathcal{F}\{y(t)\}$)?
- Ingat kembali bahwa di kawasan waktu, keluaran $y(t)$ merupakan hasil konvolusi antara masukan $x(t)$ dan tanggapan impuls $h(t)$.

Transformasi Fourier dan Konvolusi di Kawasan Waktu

- Dengan demikian, bisa dituliskan bahwa:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

- Kita kenakan operasi Transformasi Fourier ke kedua ruas:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Transformasi Fourier dan Konvolusi di Kawasan Waktu

- Kemudian kita tukar urutan integral di atas serta melakukan sedikit modifikasi

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Perhatikan bagian di dalam kotak merah. Berhubung integral di dalam kotak dilakukan terhadap *dt*, kita bisa menganggap τ sebagai konstanta pada tahapan ini.
- Di samping itu, perhatikan bahwa $d(t-\tau) = dt$ berhubung di dalam kotak merah, τ masih dianggap sebagai konstanta.

Transformasi Fourier dan Konvolusi di Kawasan Waktu

- Substitusi *dt* dengan *d*(*t*–τ)

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \boxed{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) \right]} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Dengan membandingkan integral di atas dengan Persamaan Analisis Transformasi Fourier (3), maka diperoleh

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) X(j\omega)}$$

Transformasi Fourier dan Konvolusi di Kawasan Waktu

Jadi:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\Big\Downarrow \ \mathcal{F}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

- Artinya, saat terjadi konvolusi dua buah fungsi di kawasan waktu, maka di kawasan frekuensi terjadi perkalian antara Fourier transform dari masing-masing fungsi tersebut.

Sifat Perkalian di Kawasan Waktu

- Tampak pada slide sebelumnya bahwa operasi konvolusi di kawasan waktu selaras dengan operasi perkalian di kawasan frekuensi.
- Terkait dengan adanya keberadaan dualitas antara kawasan waktu dan kawasan frekuensi bisa diperoleh bahwa perkalian di kawasan waktu juga selaras dengan operasi konvolusi di kawasan frekuensi

$$r(t) = s(t)p(t) \leftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta$$

- Sifat perkalian di kawasan waktu ini banyak dipakai dalam proses modulasi di Komunikasi Radio

Sifat Perkalian di Kawasan Waktu

- Perkalian di kawasan waktu: $q(t)=x(t)\,y(t)$

Bagaimana relasi antara $\mathcal{F}(q(t)) = Q(j\omega)$ dengan $\mathcal{F}(y(t)) = Y(j\omega)$ dan $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$?

$$q(t) = x(t)y(t) = \frac{1}{2\pi}y(t)\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)e^{j\theta t}d\theta$$

$$q(t) = x(t)y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j(\omega-\theta))e^{j(\omega-\theta)t}d\omega e^{j\theta t}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))e^{j(\omega-\theta)t}e^{j\theta t}d\omega d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta\right]e^{j\omega t}d\omega$$

Sifat Perkalian di Kawasan Waktu

Jadi:

$$q(t) = x(t)y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta\right)$$

$$\boxed{Q(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)y(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta}$$

Jika kita memiliki perkalian di kawasan waktu, hasil transformasi Fourier di kawasan frekuensi berupa konvolusi.

Tabel: Sifat-sifat Transformasi Fourier

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Section	Property	Aperiodic signal	Fourier transform
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Time Shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Time Reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Time and Frequency Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplication	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$
4.3.4	Differentiation in Time	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Differentiation in Frequency	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$

Tabel: Sifat-sifat Transformasi Fourier (Lanjutan)

4.3.3	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Symmetry for Real and Even Signals	$x(t)$ real and even	$X(j\omega)$ real and even
4.3.3	Symmetry for Real and Odd Signals	$x(t)$ real and odd	$X(j\omega)$ purely imaginary and odd
4.3.3	Even-Odd Decomposition for Real Signals	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

TABLE 4.2 BASIC FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, otherwise
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, otherwise
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, otherwise
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$, $a_k = 0$, $k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)
Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & \|t\| < T_1 \\ 0, & T_1 < \|t\| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k

$x(t)\begin{cases}1, & \|t\| < T_1 \\ 0, & \|t\| > T_1\end{cases}$	$\dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	—
$\dfrac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases}1, & \|\omega\| < W \\ 0, & \|\omega\| > W\end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^n}$	—