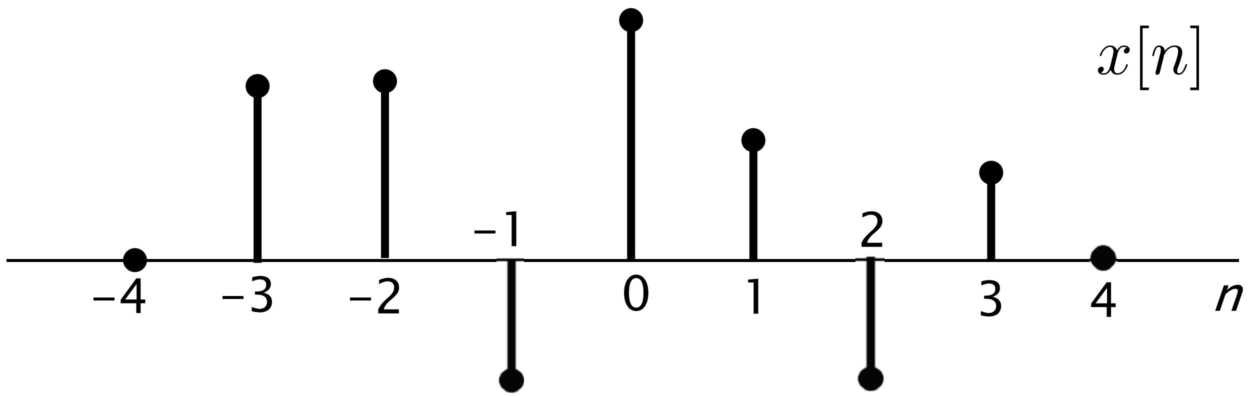
Sistem Linear Time Invariant (LTI) Diskret

Sumber Bacaan:
Signal and System, Oppenheim, Willsky, & Hamid Nawab, Sub-Bab 2.1

Representasi Isyarat Waktu Diskret

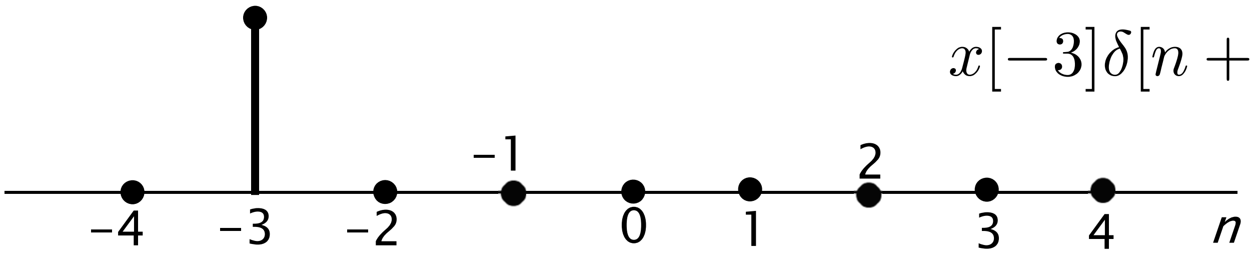
- Isyarat diskret dapat dipandang sebagai sederetan atau runtun isyarat impuls satuan.
- Perhatikan isyarat $x[n]$ berikut ini.



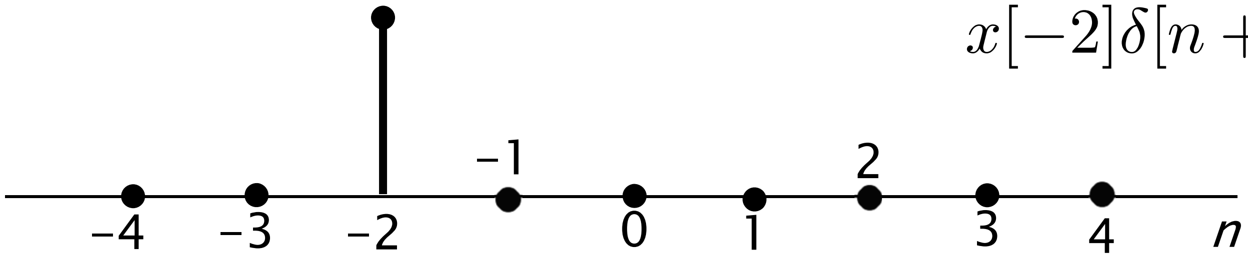
- Isyarat $x[n]$ di atas dapat diuraikan sebagai jumlahan isyarat-isyarat impuls satuan dengan proses delay waktu (time-shift) dan scaling yang bersesuaian berikut ini.

Representasi Isyarat Waktu Diskret

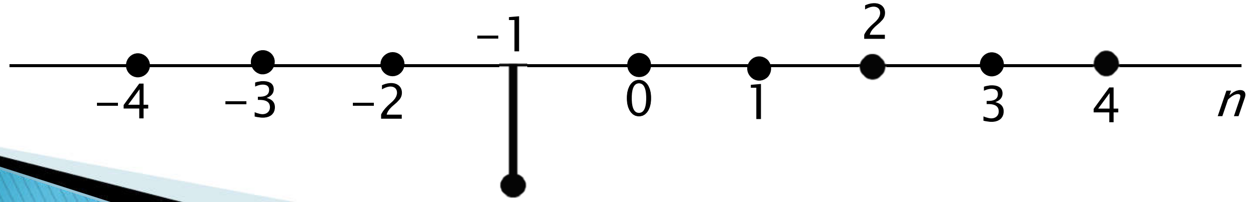
$$x[-3]\delta[n+3]$$



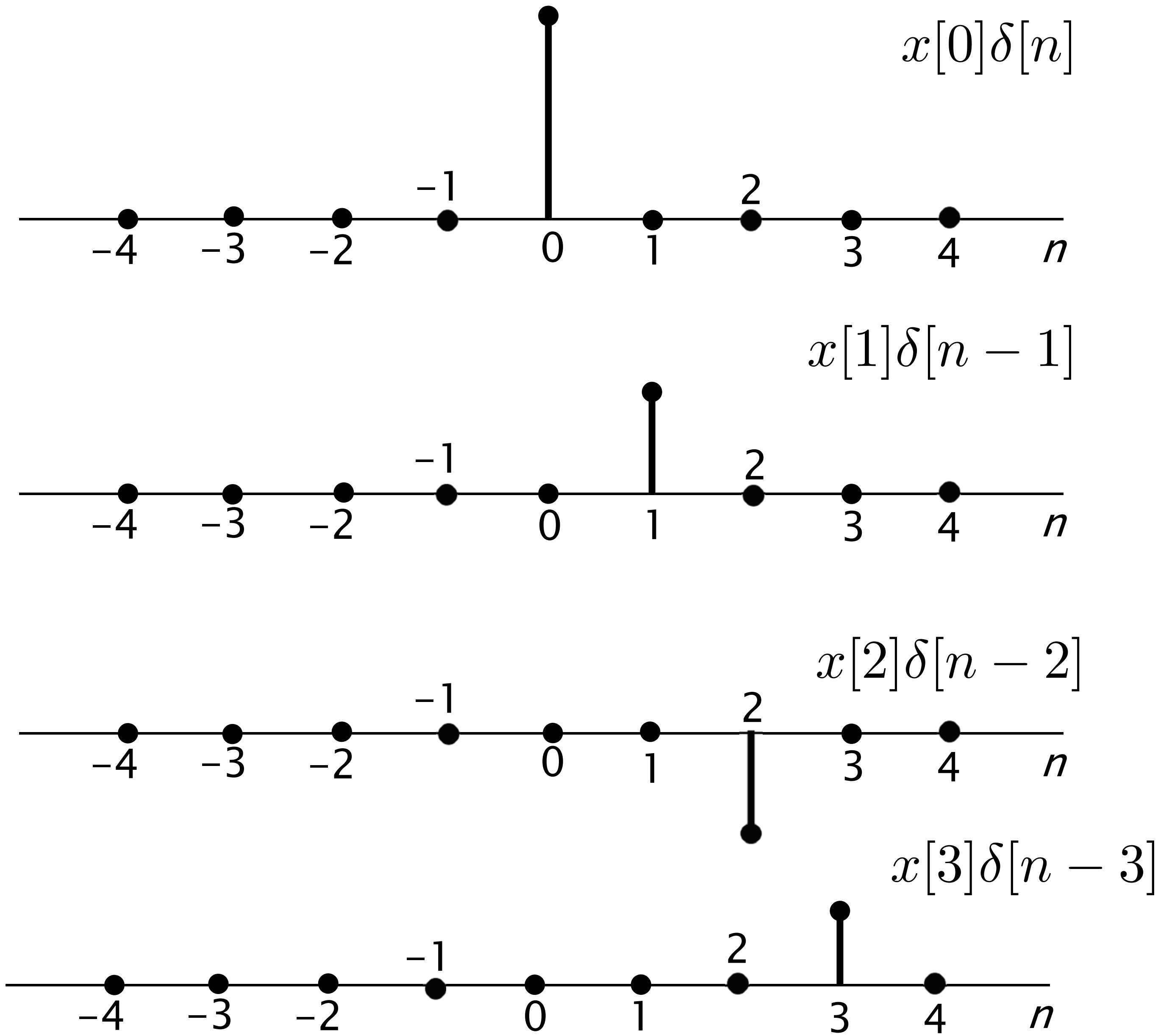
$$x[-2]\delta[n+2]$$



$$x[-1]\delta[n+1]$$



Representasi Isyarat Waktu Diskret



Representasi Isyarat Waktu Diskret

- Berkenaan dengan isyarat-isyarat impuls satuan di atas, perlu diperhatikan arti notasi berikut:

$$\boxed{x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n=-1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}.}$$

$$\boxed{x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.}$$

$$\boxed{x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.}$$

- Dengan demikian, pada kasus di atas, kuantitas dari proses scaling terhadap impuls satuan yang digeser ke kanan sebesar n_0 satuan sama dengan nilai isyarat $x[n]$ pada $n=n_0$.

Representasi Isyarat Waktu Diskret

- Dengan demikian, dapat dituliskan:

$$x[n] = \cdots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots$$

- Tampak bahwa untuk setiap nilai n tertentu, hanya satu suku di ruas kanan yang bernilai tidak nol.
- Dan nilai scaling pada suku yang tidak nol tersebut adalah nilai isyarat $x[n]$ pada nilai n yang tertentu di atas.

- Sehingga $x[n]$ di atas dapat dituliskan sebagai:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Representasi Isyarat Waktu Diskret

- Dengan demikian, $x[n]$ dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linear (weighted sum) dari impuls satuan $\delta[n-k]$ dengan bobot untuk $\delta[n-k]$ dalam kombinasi linear tsb diberikan oleh $x[k]$.

- Sebagai contoh, saat $x[n]$ berupa unit step, $x[n] = u[n]$, dan berhubung $u[n] = 0$ saat $n<0$ dan $u[n] = 1$ saat $n \geq 0$, maka dapat dituliskan:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 1\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Tanggapan Impuls Sistem LTI Diskret

- Tanggapan impuls (*impulse response*): Keluaran atau tanggapan sistem saat masukannya berupa impuls satuan (*unit impulse*)
- Notasi: Tanggapan Impuls Sistem Kontinu: $h(t)$
- Notasi: Tanggapan Impuls Sistem Diskret: $h[n]$

- Ingat kembali:

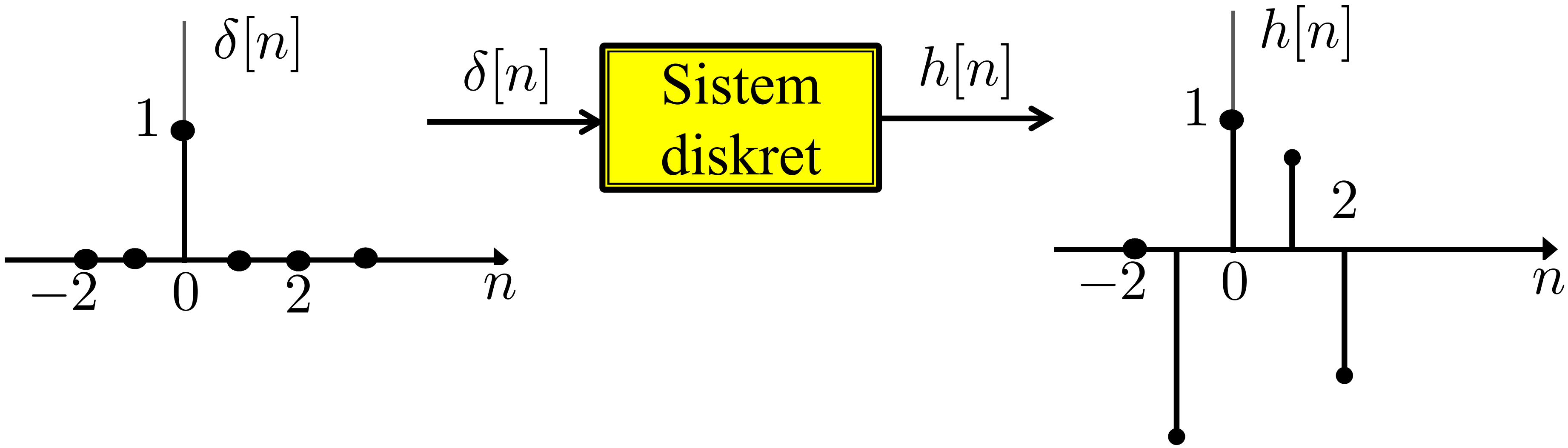
$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

- $h[n]$ adalah tanggapan impuls sistem diskret => saat masukan sistem $\delta[n]$ maka keluarannya kita namakan $h[n]$:

$$\boxed{\delta[n] \rightarrow h[n]}$$

Tanggapan Impuls Sistem LTI Diskret

- Contoh ilustrasi



- Untuk sistem **time invariant**, saat input mengalami penundaan, maka keluarannya pun hanya sekedar tertunda dengan waktu yang sama.

$$\boxed{\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]}$$

Tanggapan Sistem LTI Diskret

- Untuk sistem linear berlaku sifat homogen (ingat kembali), sehingga jika masukan sistem dikalikan dengan faktor scala tertentu, keluarannya pun juga, artinya:

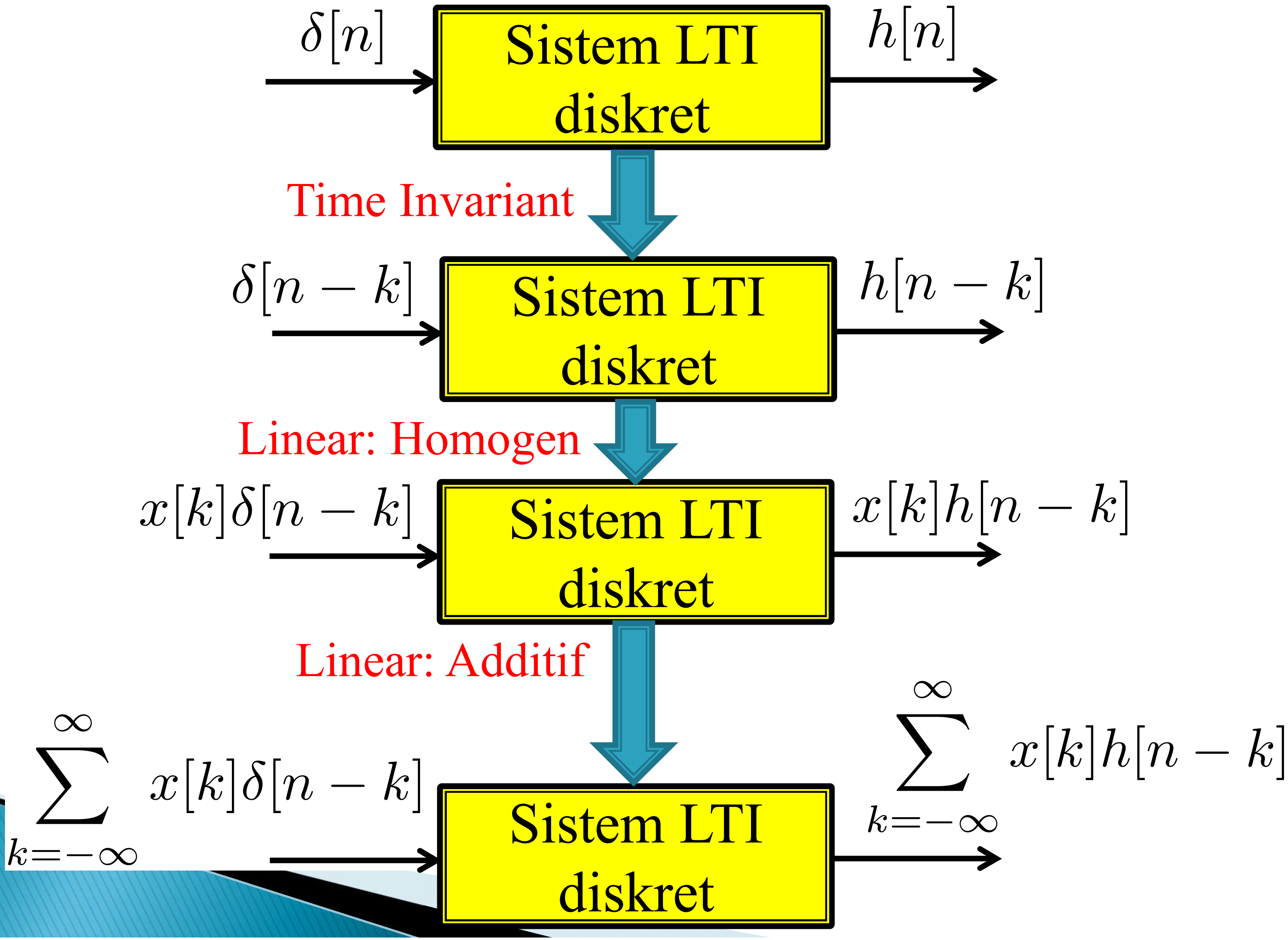
$$\boxed{x[k]\delta[n-k] \longrightarrow x[k]h[n-k]}$$

- Karena untuk sistem linear berlaku pula sifat additif maka:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (1)}$$

Tanggapan Sistem LTI Diskret

- Dengan kata lain bisa digambarkan:



Tanggapan Sistem LTI Diskret

- Jika $y[n]$ adalah isyarat keluaran sistem LTI saat masukannya adalah $x[n]$ dan mengingat:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Maka dengan mempertimbangkan pers. (1), $y[n]$ diberikan oleh:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Operasi antara $x[n]$ dan $h[n]$ di atas dikenal dengan jumlahan **konvolusi** dan sering disimbolkan dengan operasi *:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2)$$

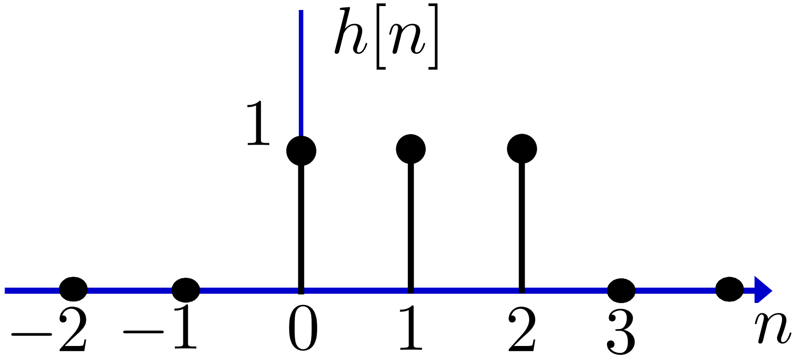
Tanggapan Sistem LTI Diskret

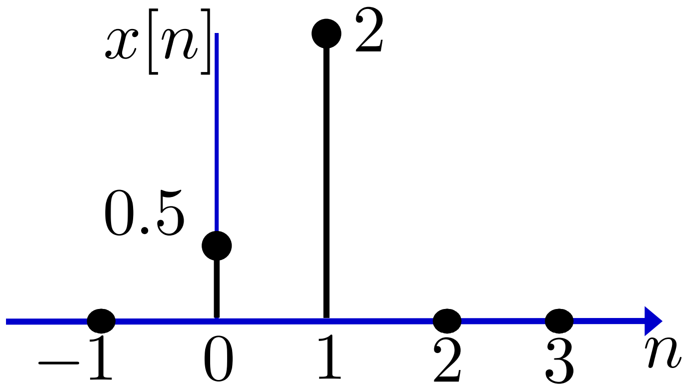
- Tampak bahwa persamaan (2) menjabarkan ekspresi sistem LTI terhadap sembarang input dengan berbasiskan pada tanggapan sistem tersebut terhadap impuls satuan.

- Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa karakter sistem LTI sepenuhnya didefinisikan oleh tanggapannya terhadap impuls satuan.
- Karena dengan mengamati tanggapan sistem LTI terhadap impuls satuan, kita bisa menemukan **keluaran** atau tanggapan sistem LTI saat **masukan**nya berupa sembarang isyarat.

Contoh 1

- Diketahui sistem LTI dengan tanggapan impuls $h[n]$ dan isyarat masukan $x[n]$ berikut ini:





- Tentukan keluaran dari sistem di atas.
- Ingat bahwa:

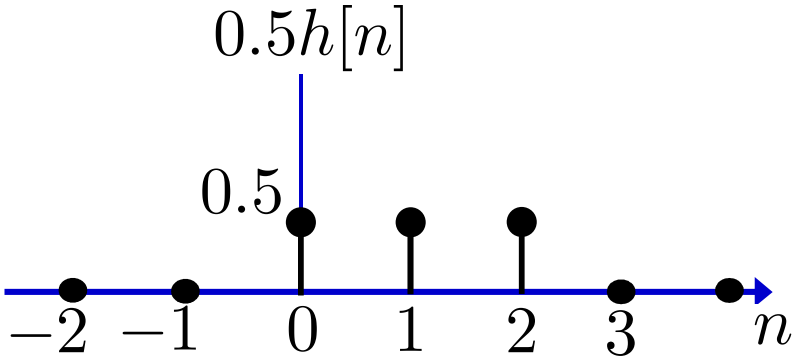
$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

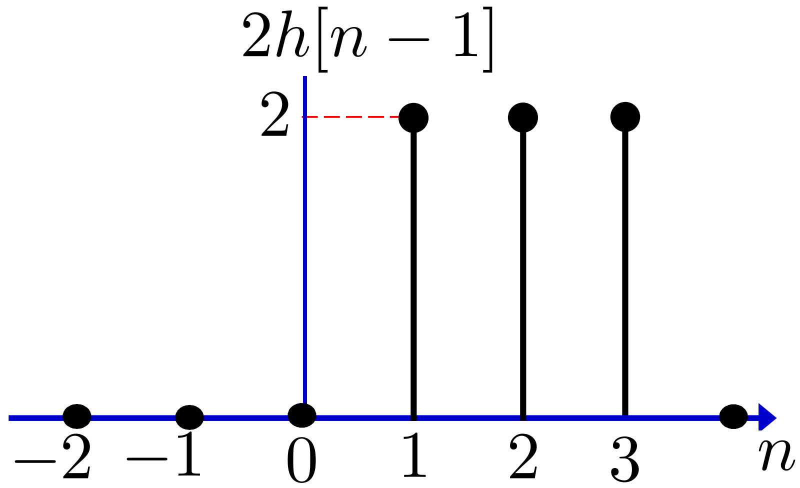
- Berhubung hanya $x[0]$ dan $x[1]$ yang bernilai tidak nol:

$$\boxed{y[n] = x[0]\,h[n\text{-}0] + x[1]\,h[n\text{-}1] = 0{,}5h[n] + 2h[n\text{-}1]}$$

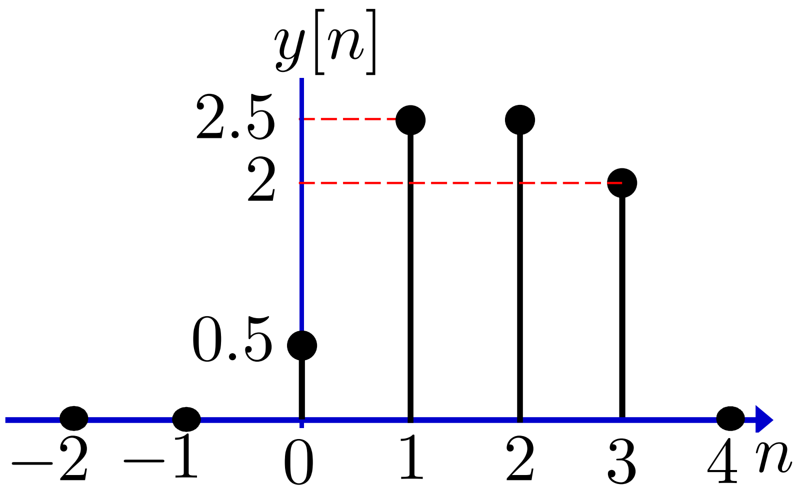
Contoh 1

- Bisa digambarkan:





- Dengan demikian, $y[n] = 0{,}5h[n] + 2h[n\text{-}1]$



Contoh 2

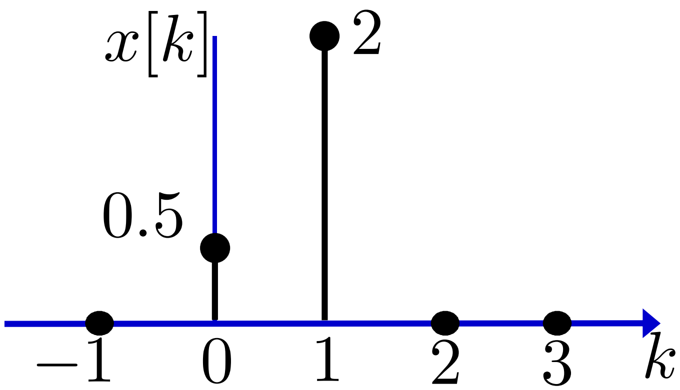
- Kita masih mengacu pada permasalahan konvolusi pada Contoh 1 namun fokus kita adalah pada setiap suku pada ruas kanan dari:

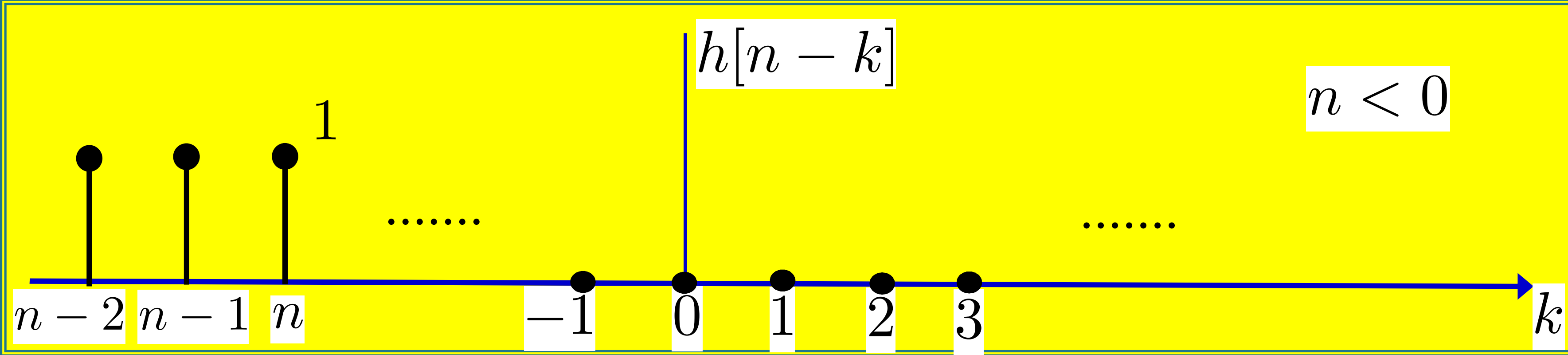
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Untuk nilai n tertentu pada $y[n]$, kita akan melakukan:
  - Fokus pada perkalian antara $x[k]$ dan $h[n-k]$: $g[k]=x[k]h[n-k]$
  - Lakukan di atas untuk setiap nilai k
  - Jumlahkan $g[k]$ untuk seluruh k
  - Ulangi ketiga langkah di atas untuk nilai n berikutnya.

Contoh 2

- Kita plot $x[k]$ (sebagai fungsi k) pada Contoh 1 dan $h[n\text{-}k]$ (sebagai fungsi k juga (n fixed)).
- $h[n\text{-}k]$ diperoleh dengan melakukan time-shift dan time-reverse pada $h[k]$



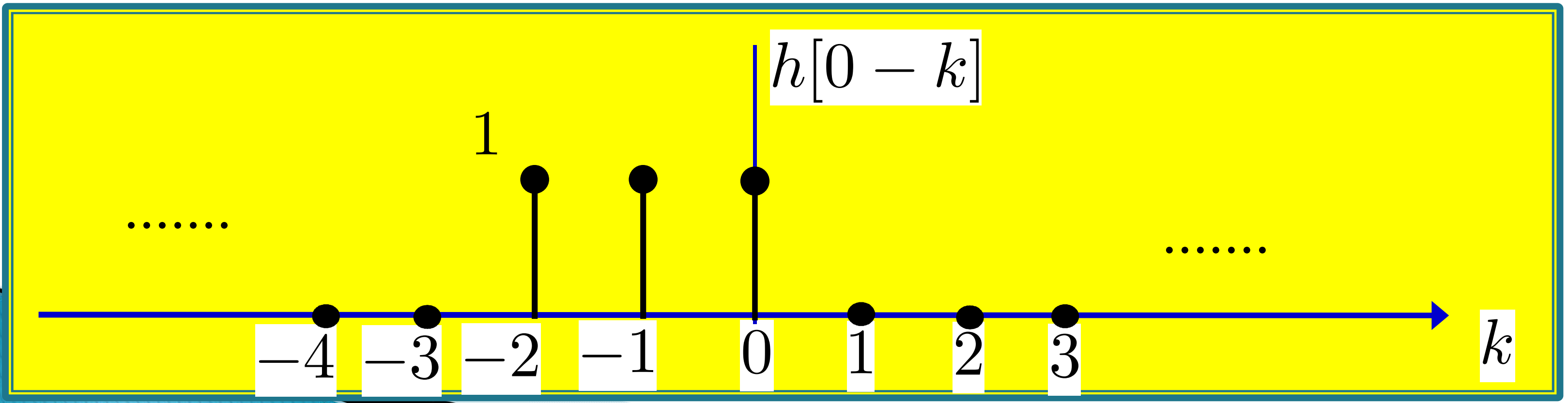


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan $n<0$ di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[n\text{-}k] = 0$ untuk seluruh nilai k.
- Dengan demikian,

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0 \text{ untuk } n < 0.}$$

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 0$:

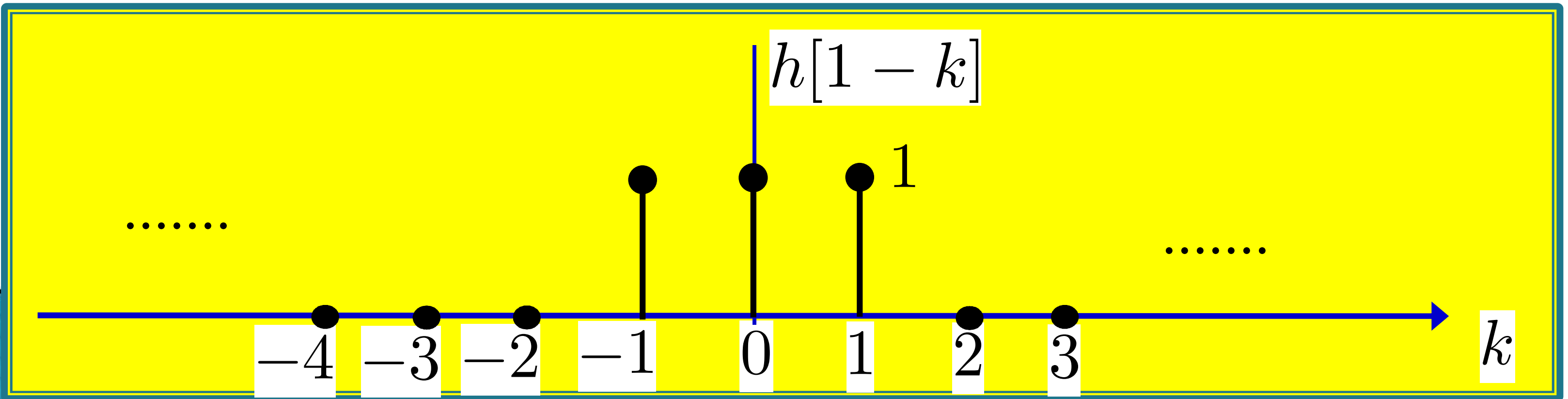


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan n=0 di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[-k] = 0$ kecuali saat $k = 0$
- Dengan demikian,

$$\boxed{y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = x[0]h[0] = \frac{1}{2}}$$

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 1$:

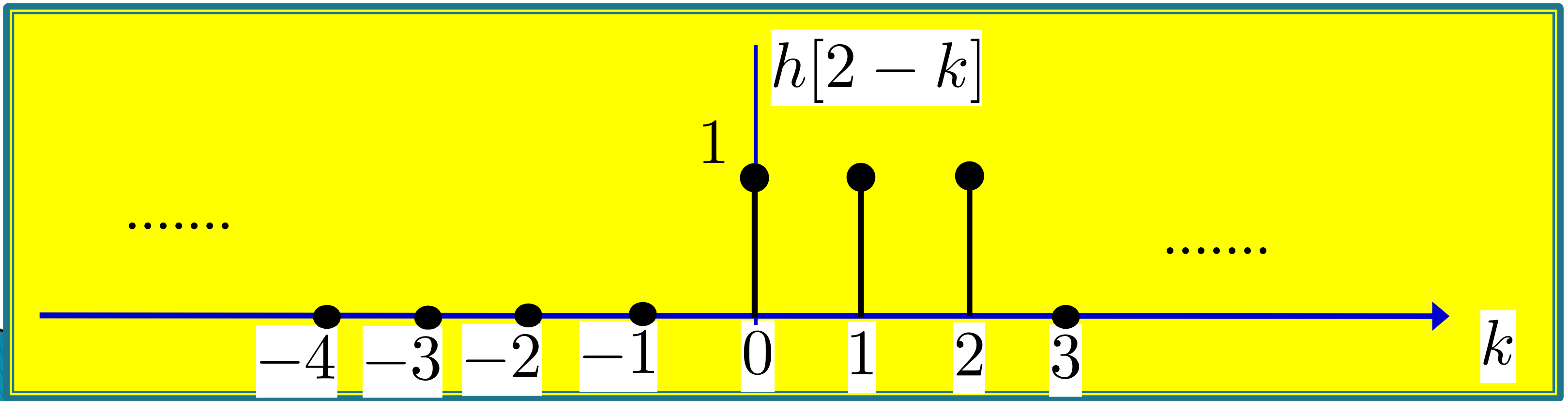


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan $n=1$ di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[1\text{-}k] = 0$ kecuali saat $k = 0$ dan $k=1$
- Dengan demikian,

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = x[1]h[0] + x[0]h[1] = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 2$:

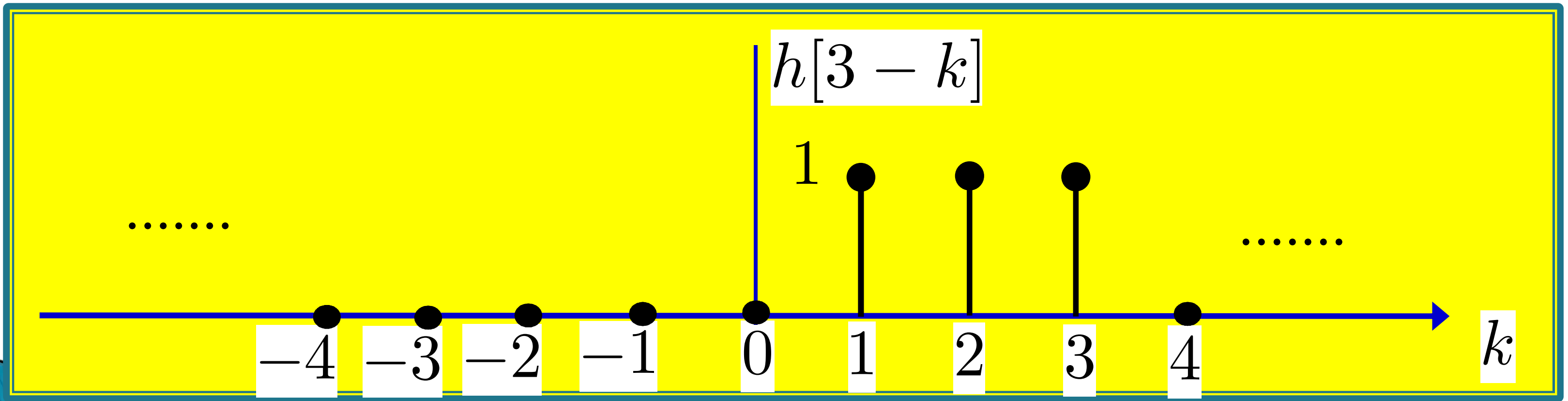


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan n=2 di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[2\text{-}k] = 0$ kecuali saat $k = 0$ dan k=1
- Dengan demikian,

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = x[1]h[1] + x[0]h[2] = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 3$:

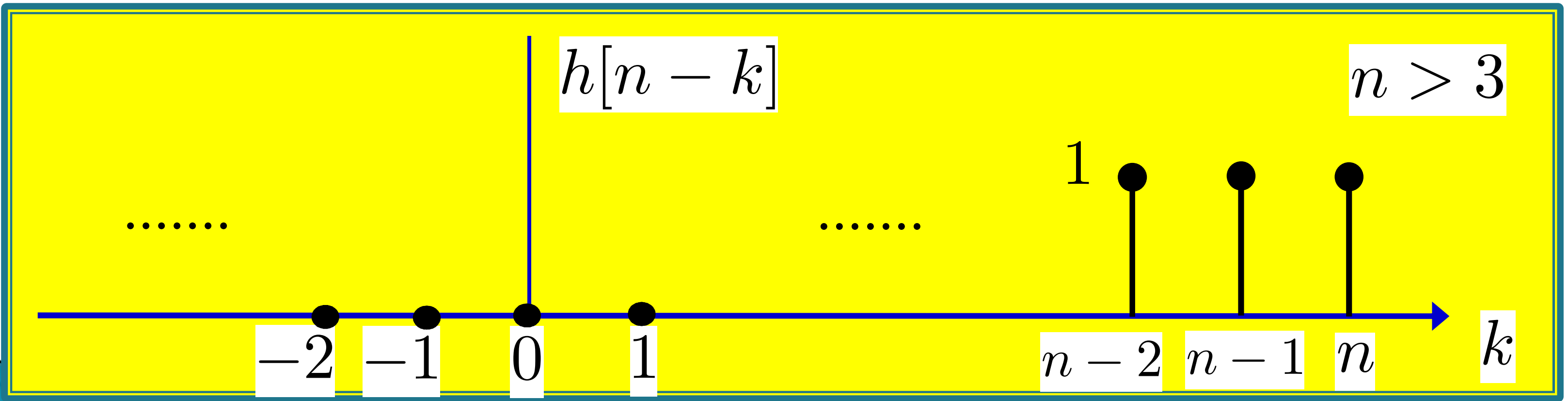


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan n=3 di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[3\text{-}k] = 0$ kecuali saat k=1
- Dengan demikian,

$$\boxed{y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = x[1]h[2] = 2}$$

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n > 3$:

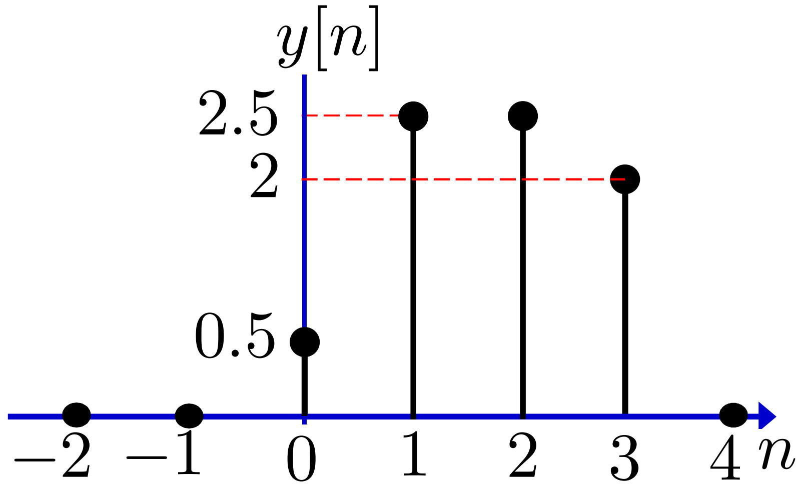


Contoh 2

- Dari plot $x[k]$ dan $h[n-k]$ dengan $n>3$ di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[n-k] = 0$ untuk seluruh nilai k.
- Dengan demikian,

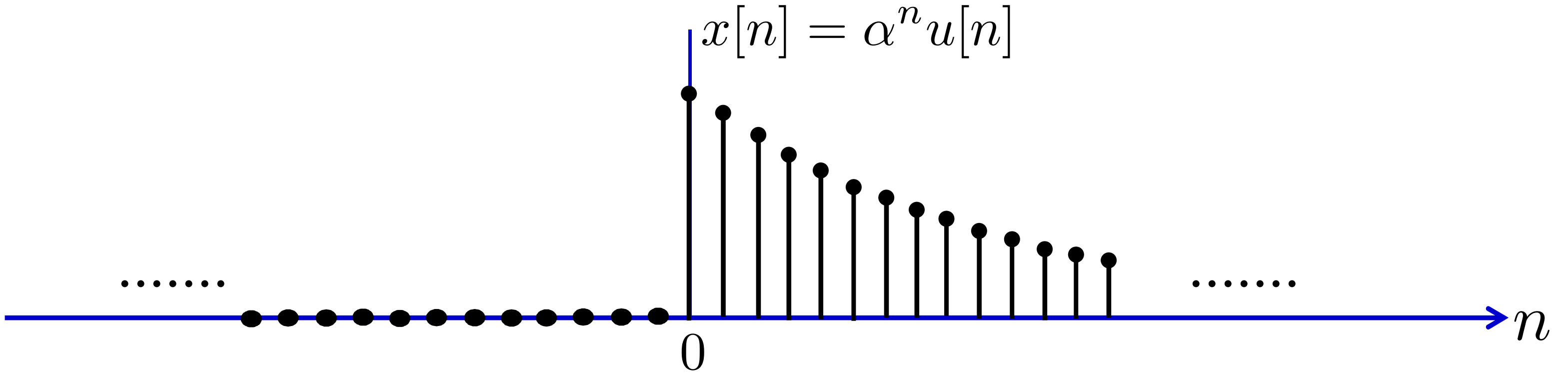
$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0 \text{ untuk } n > 3.}$$

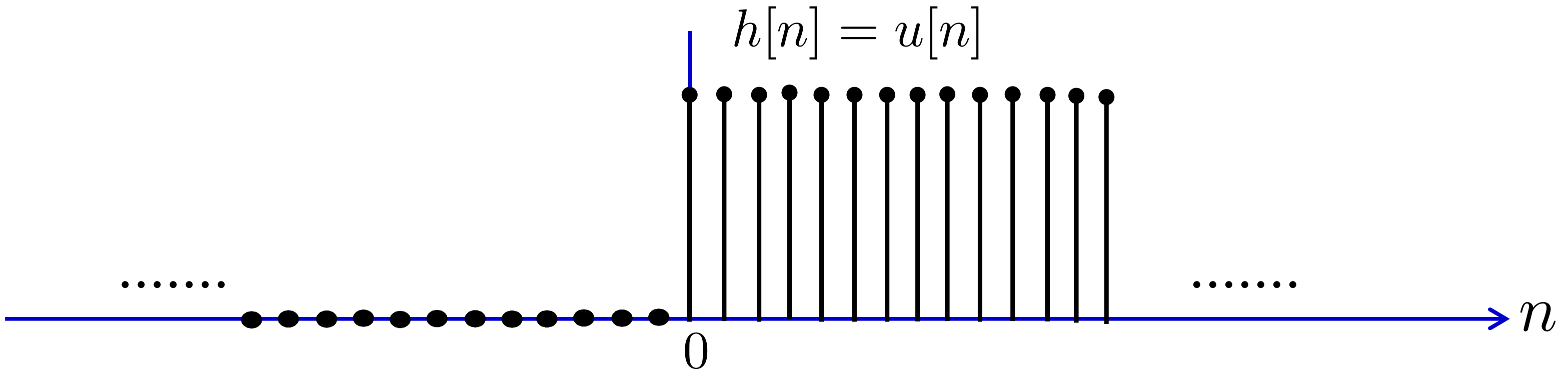
- Jadi diperoleh hasil yang sama dengan **Contoh 1**:



Contoh 3

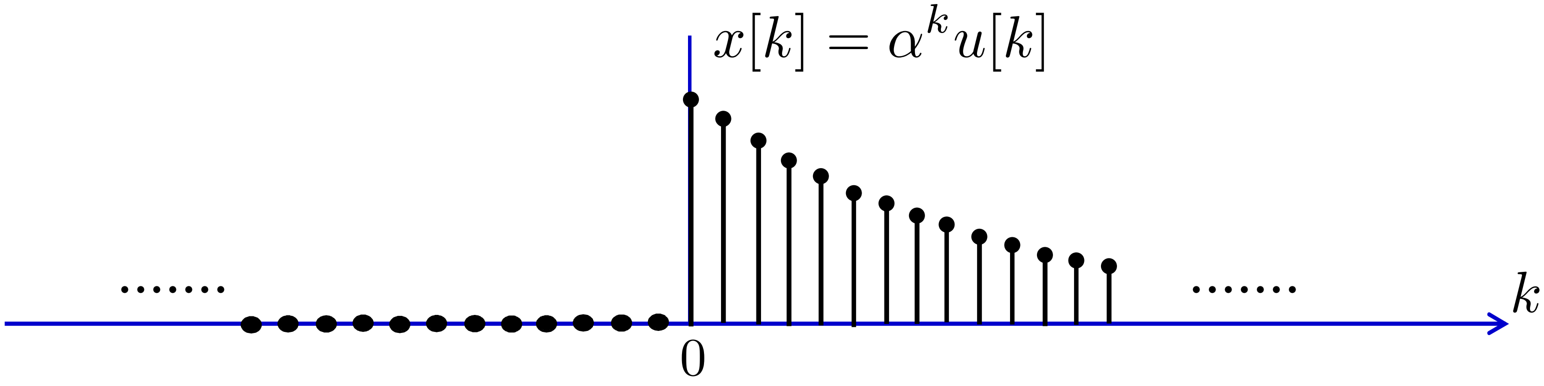
- Diketahui sistem LTI dengan **isyarat masukan** $x[n] = \alpha^n u[n]$, dengan $0 < \alpha < 1$ dan **tanggapan impuls** $h[n] = u[n]$.

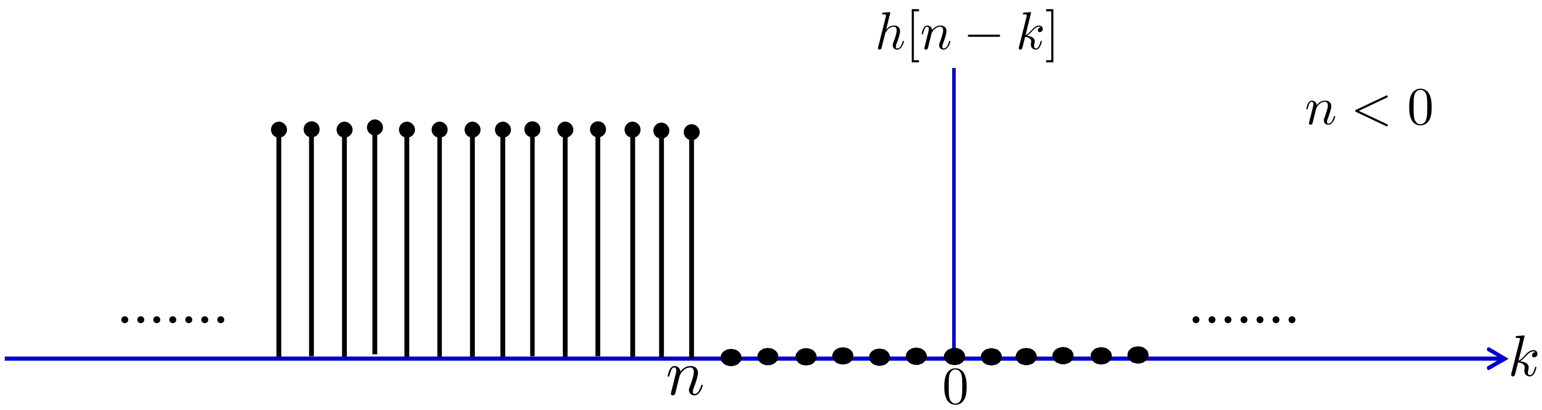




- Kita plot $x[k]$ (sebagai fungsi k) dan $h[n-k]$ (sebagai fungsi k juga (n fixed)). Kita mulai dengan nilai $n < 0$.

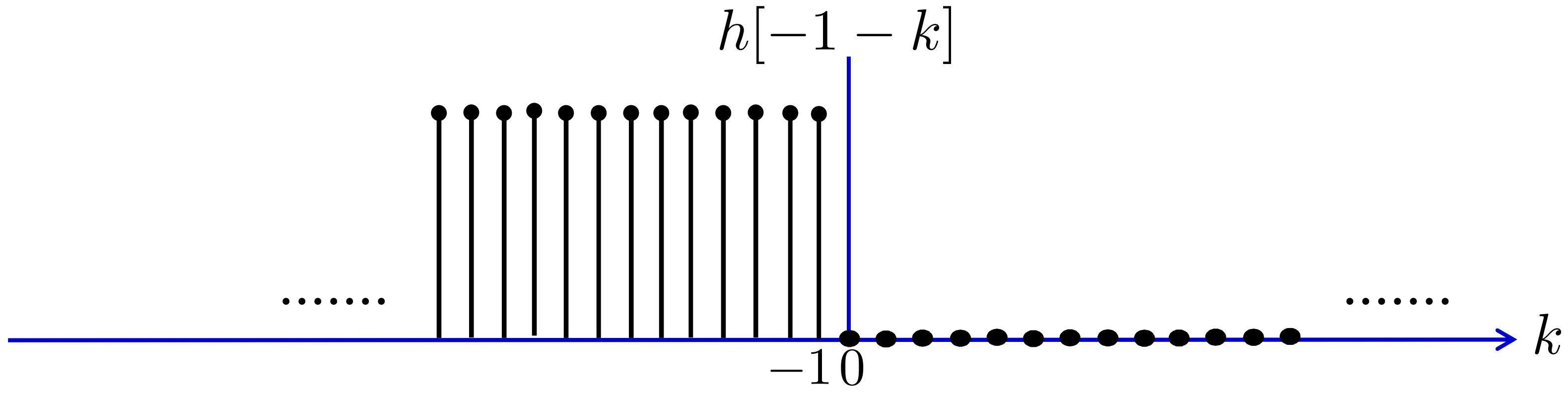
Contoh 3





- Untuk lebih jelasnya kita sediakan juga plot $h[n\text{-}k]$ dengan n = -1 berikut ini.

Contoh 3

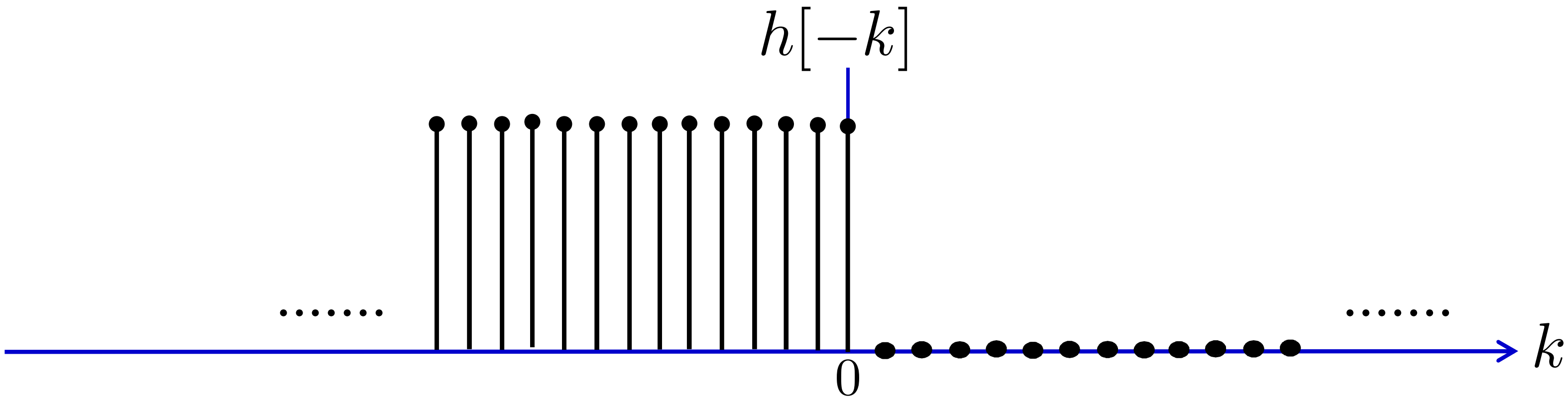


- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan $n<0$ di atas (termasuk untuk n = -1), kita bisa melihat bahwa $x[k]h[n\text{-}k] = 0$ untuk seluruh nilai k.
- Karena tidak ada overlap antara komponen tidak nol dari $x[k]$ dan komponen tidak nol dari $h[n\text{-}k]$ sebagai fungsi k.
- Jadi:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0 \text{ untuk } n < 0.}$$

Contoh 3

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 0$:

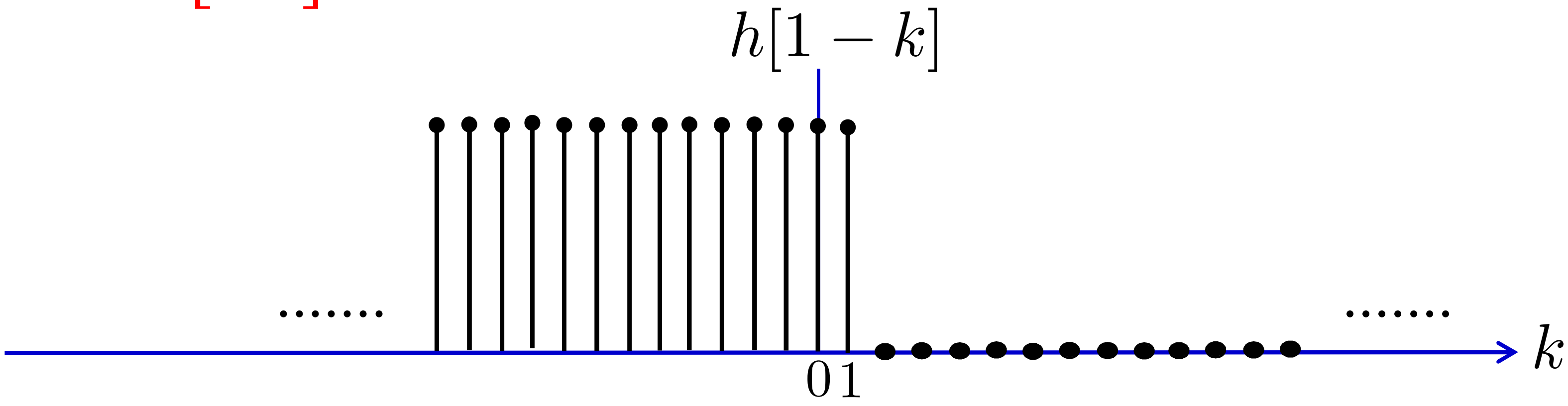


- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan n=0 di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[\text{-}k] = 0$ kecuali saat $k = 0$.
- Dengan demikian,

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = x[0]h[0] = \alpha^0 = 1$$

Contoh 3

- Plot $h[n\text{-}k]$ untuk $n = 1$:

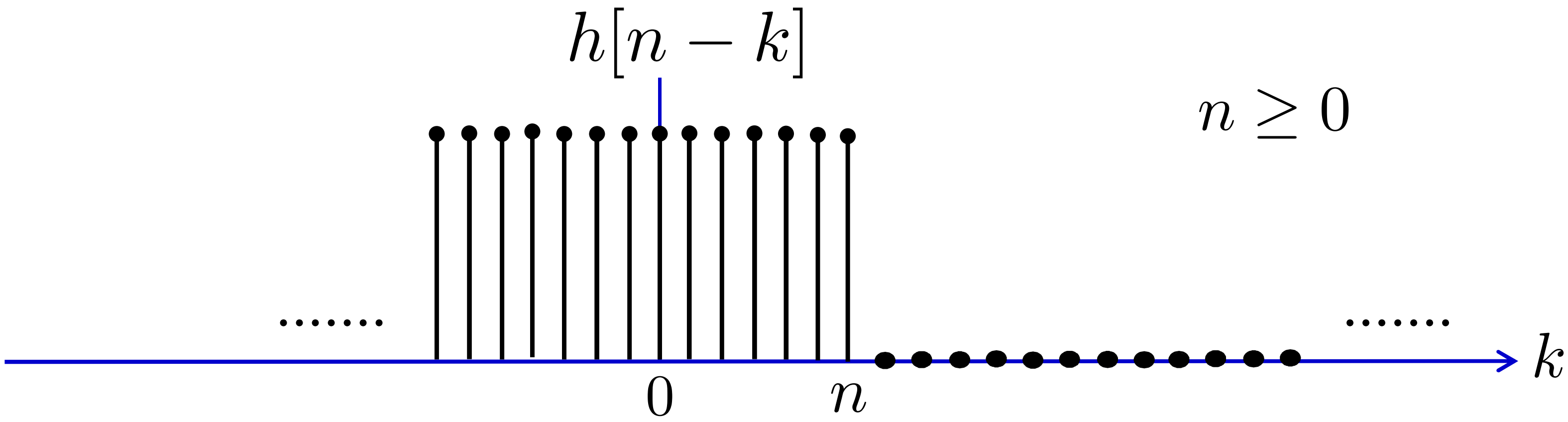


- Dari plot $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ dengan $n=1$ di atas, kita bisa melihat bahwa $x[k]h[1\text{-}k] = 0$ kecuali saat $k = 0$ dan k=1.
- Dengan demikian,

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = \alpha^0 + \alpha^1$$

Contoh 3

- Plot $h[n-k]$ untuk $n \geq 0$:



- Dari plot $x[k]$ dan $h[n-k]$ dengan $n \geq 0$ di atas, tampak bahwa

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{untuk nilai k yang lain} \end{cases}$$

Contoh 3

- Dengan demikian, untuk $n \geq 0$ dan berhubung $0 < \alpha < 1$, berlaku

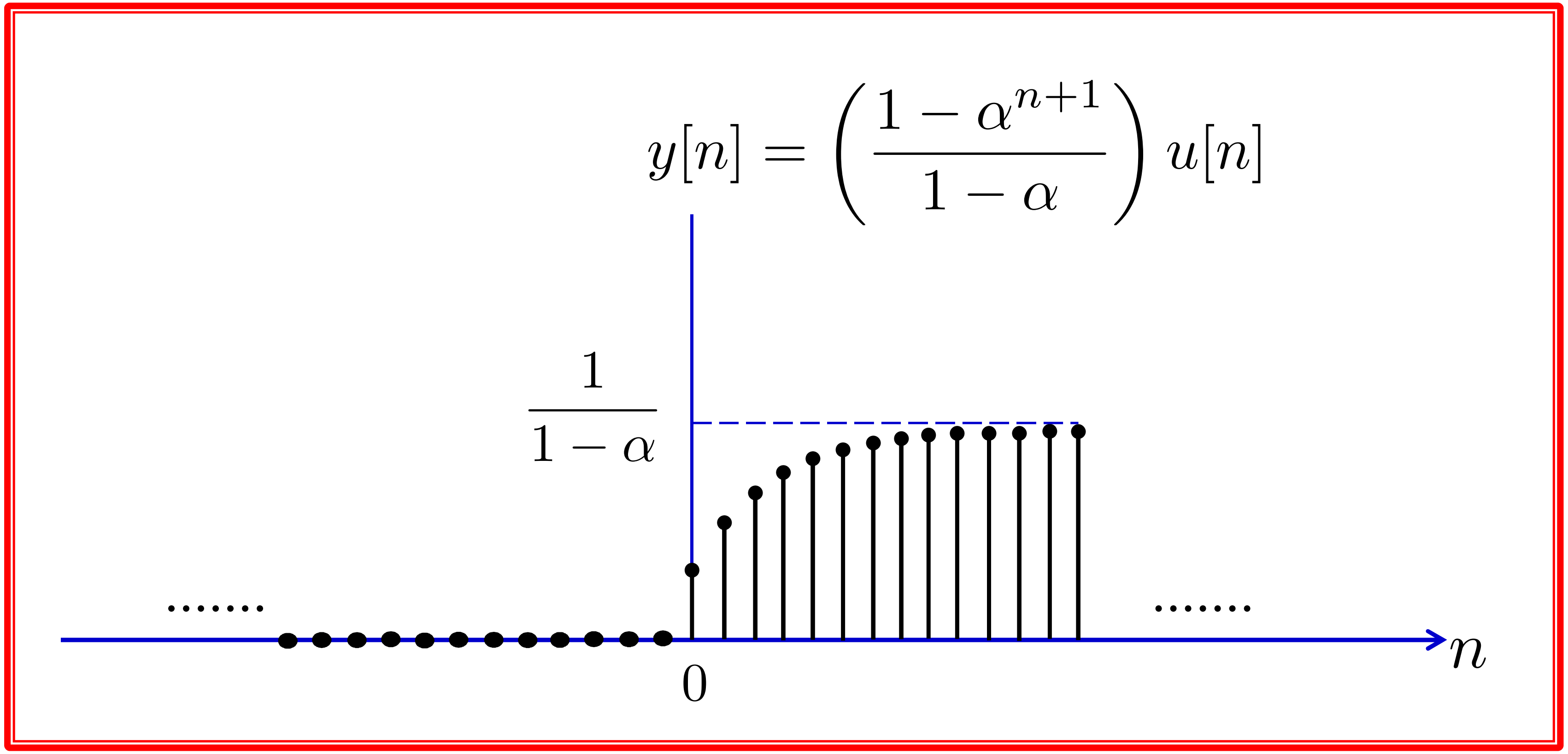
$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \quad n \geq 0}$$

- Nilai $y[n]$ untuk seluruh nilai n bisa dituliskan sebagai:

$$\boxed{y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right) u[n]}$$

- Plot $y[n]$ dapat dilihat pada slide berikut.

Contoh 3



Contoh 4

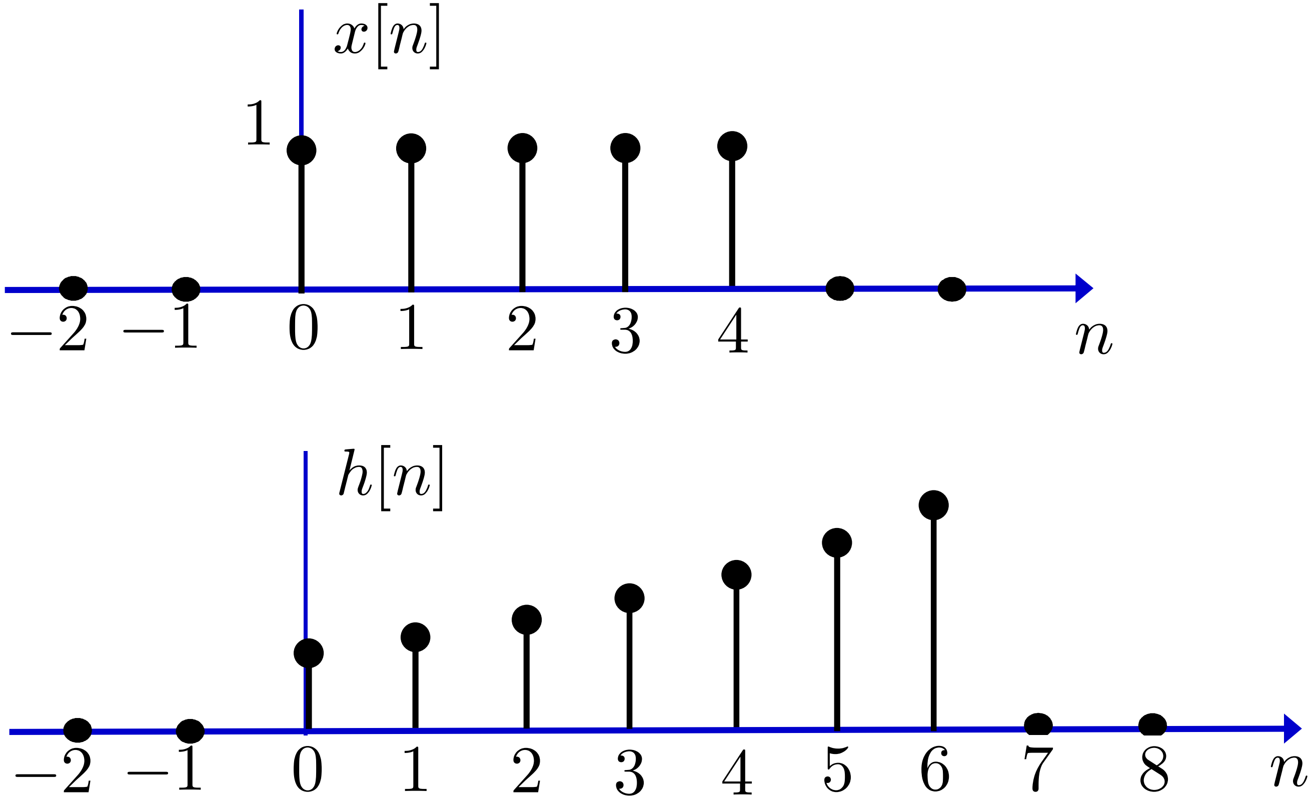
- Diketahui bahwa suatu sistem LTI dengan isyarat masukan $x[n]$ dan tanggapan impuls $h[n]$ berikut ini:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{untuk nilai n yang lain} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{untuk nilai n yang lain} \end{cases}$$

- Berikut adalah plot isyarat $x[n]$ dan tanggapan impuls $h[n]$ untuk nilai $\alpha > 1$

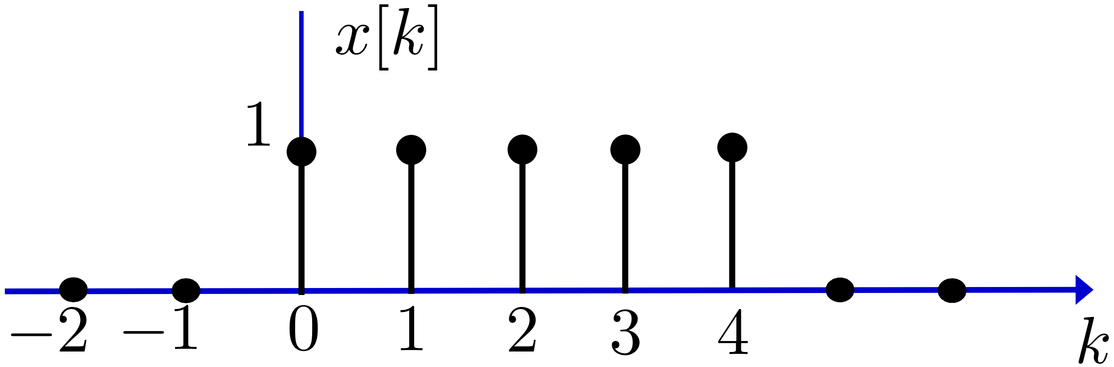
Contoh 4



- Untuk mencari hasil konvolusi antara $x[n]$ dengan $h[n]$, akan lebih mudah jika kita mengevaluasi 5 interval yang berbeda untuk n.

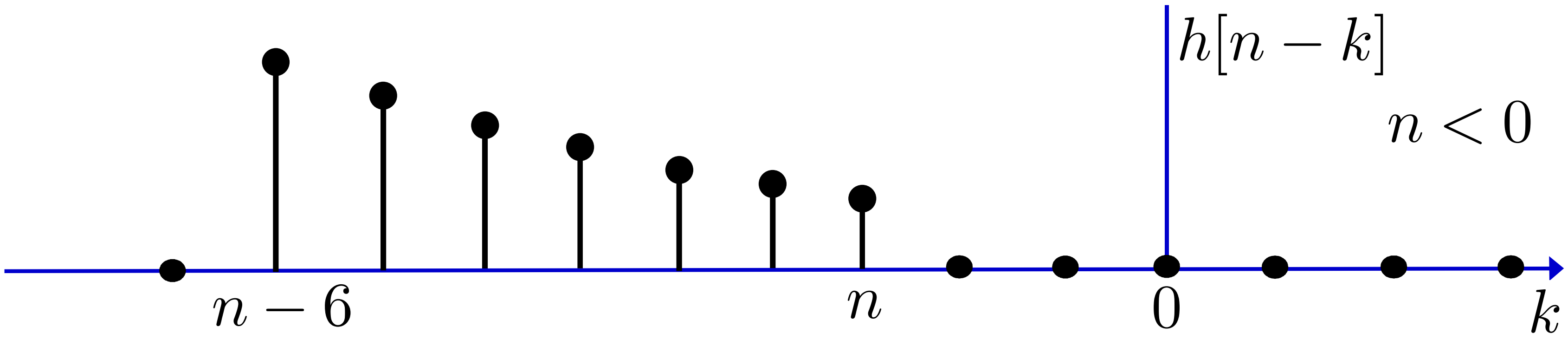
Contoh 4

- Pertama-tama kita plot $x[k]$



Interval 1: $n < 0$

- Kita plot $h[n\text{-}k]$ sebagai fungsi k untuk $n < 0$



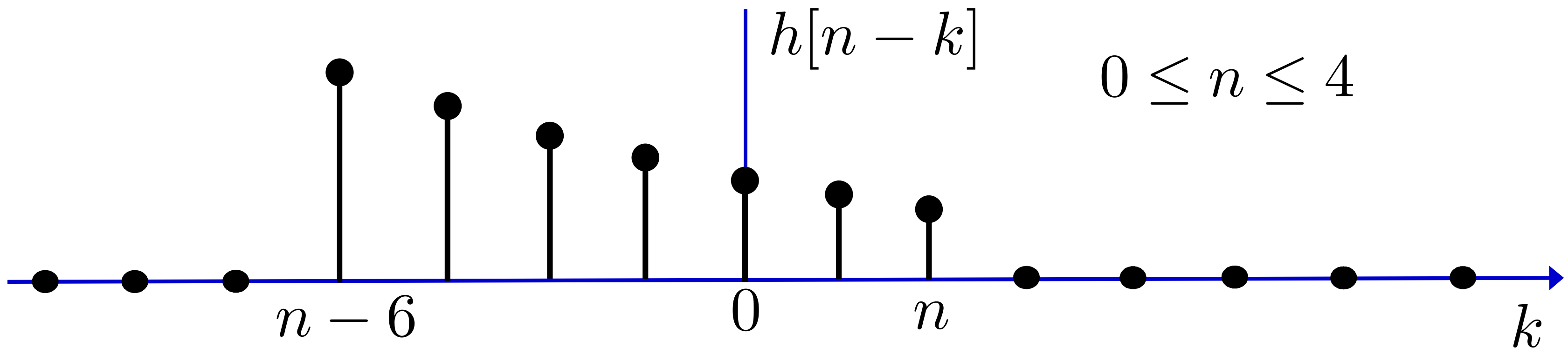
Contoh 4

- Tampak bahwa untuk $n < 0$, tidak terdapat overlap antara bagian isyarat $x[k]$ yang bernilai tidak nol dengan bagian $h[n\text{-}k]$ yang bernilai tidak nol.
- Dengan demikian,

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0 \text{ untuk } n < 0.}$$

Interval 2: $0 \le n \le 4$

- Plot $h[n\text{-}k]$ sebagai fungsi k untuk $0 \le n \le 4$:



Contoh 4

- Tampak bahwa untuk $0 \le n \le 4$:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{untuk nilai k yang lain} \end{cases}$$

- Dengan demikian untuk $0 \le n \le 4$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

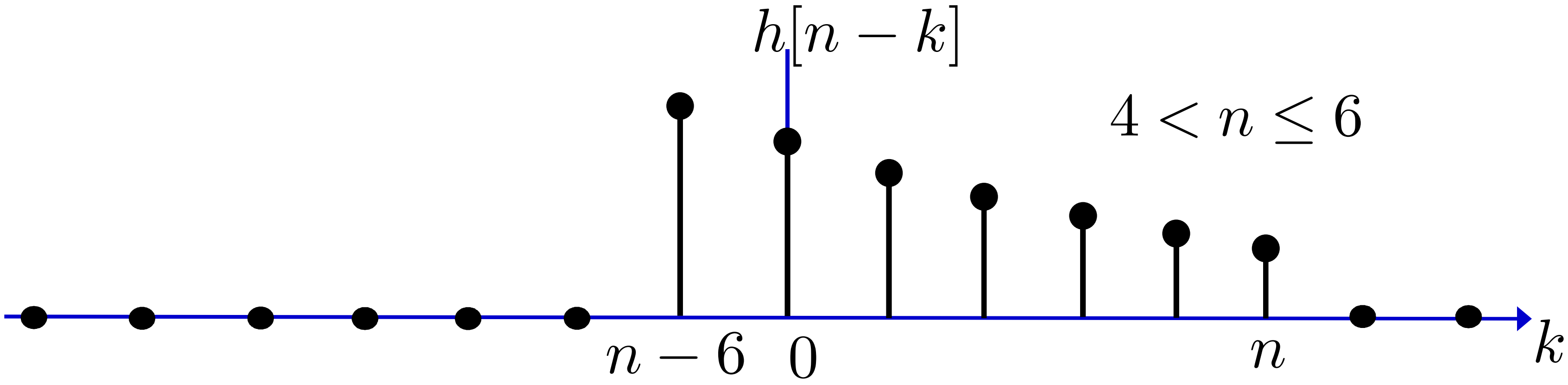
- Jika diperkenalkan $r = n - k$ maka:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Contoh 4

Interval 3: Untuk n > 4 dan n - 6 ≤ 0 ($4 < n \le 6$)

- Plot $h[n-k]$ sebagai fungsi k untuk $4 < n \le 6$:



- Tampak bahwa untuk $4 < n \le 6$:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le 4 \\ 0, & \text{untuk nilai k yang lain} \end{cases}$$

Contoh 4

- Dengan demikian untuk $4 < n \leq 6$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}$$

- Kita bisa juga menggunakan formula jumlahan deret geometri:

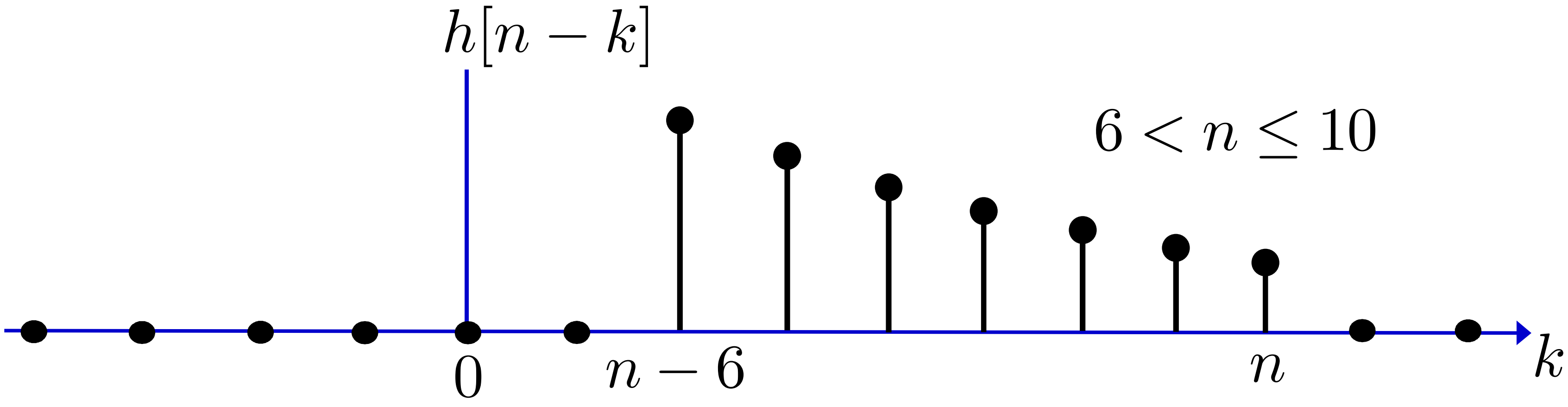
$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1-(\alpha^{-1})^5}{1-\alpha^{-1}}$$

$$= \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Contoh 4

Interval 4: Untuk n > 6 dan n - 6 ≤ 4 $(6 < n \leq 10)$

- Plot $h[n-k]$ sebagai fungsi k untuk $6 < n \leq 10$:



- Tampak bahwa untuk $6 < n \leq 10$:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{untuk nilai k yang lain} \end{cases}$$

Contoh 4

- Dengan demikian untuk $6 < n \le 10$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}$$

- Kita bisa juga menggunakan formula jumlahan deret geometri dengan memperkenalkan $r = k - n + 6$

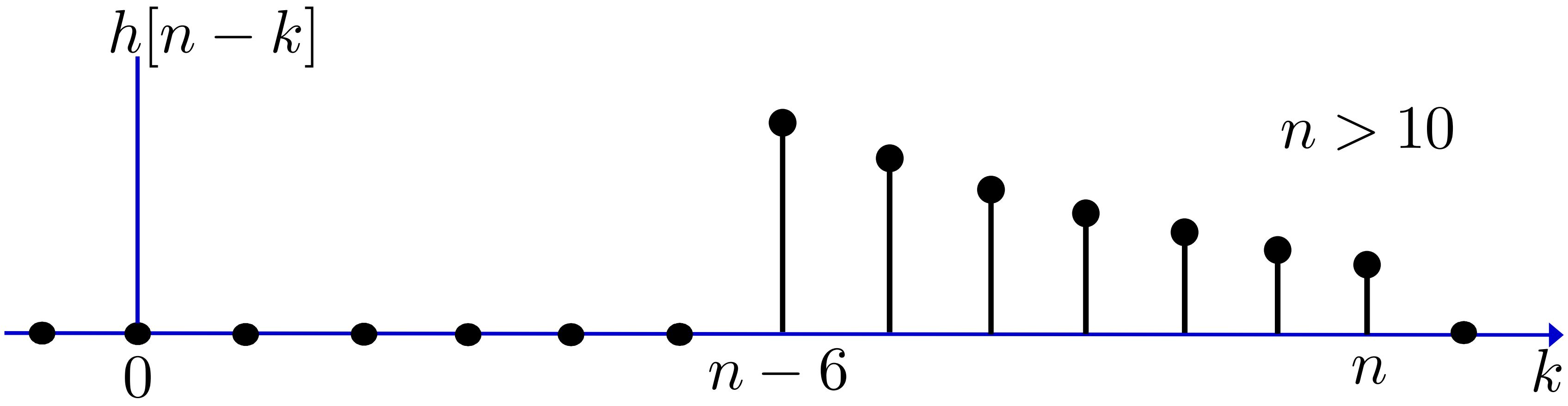
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^{6} \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^{r}$$

$$= \alpha^{6} \frac{(1-\alpha^{n-11})}{(1-\alpha^{-1})} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{7}}{1-\alpha}$$

Contoh 4

Interval 5: Untuk *n* - 6 > 4 ($n > 10$)

- Plot $h[n\text{-}k]$ sebagai fungsi k untuk $n > 10$:



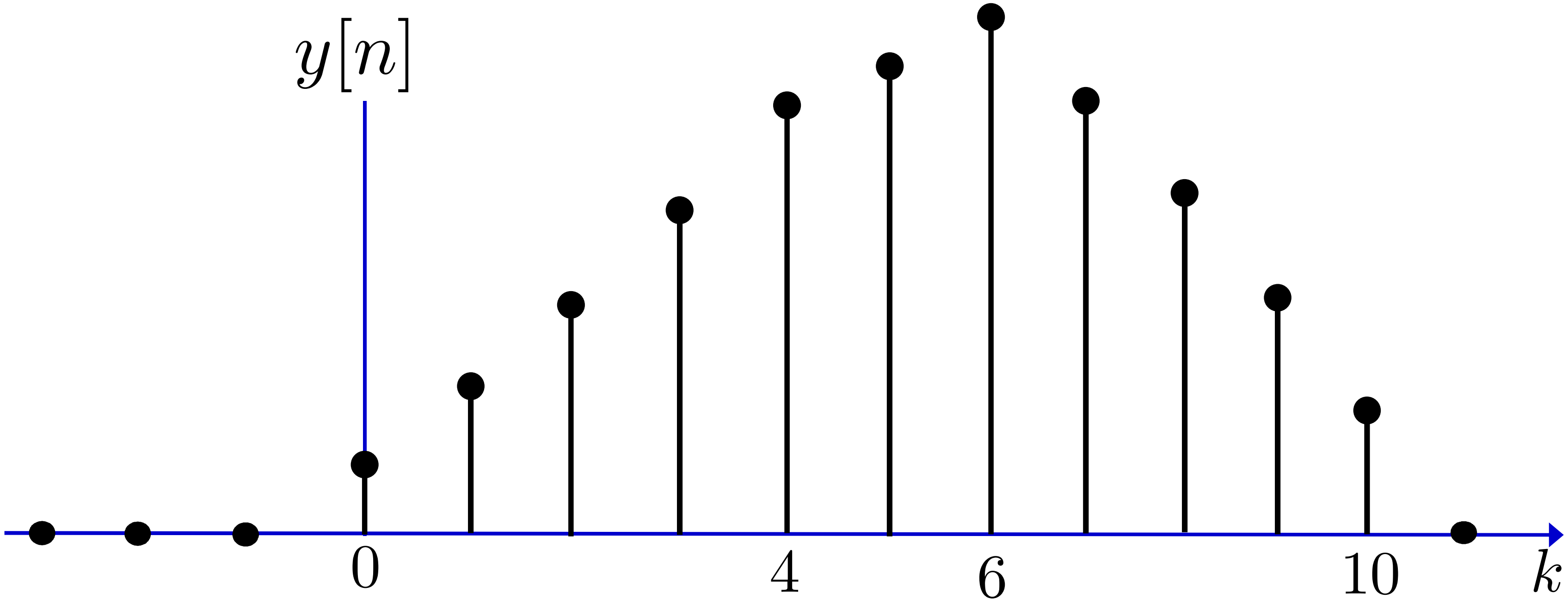
- Tampak bahwa untuk $n > 10$, tidak terdapat overlap antara bagian isyarat $x[k]$ yang bernilai tidak nol dengan bagian $h[n\text{-}k]$ yang bernilai tidak nol.
- Dengan demikian,

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0 \text{ untuk } n > 10.}$$

Contoh 4

- Dengan demikian, dapat diringkaskan dan digambarkan:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \leq n \leq 4, \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6, \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10, \\ 0, & n > 10 \end{cases}$$

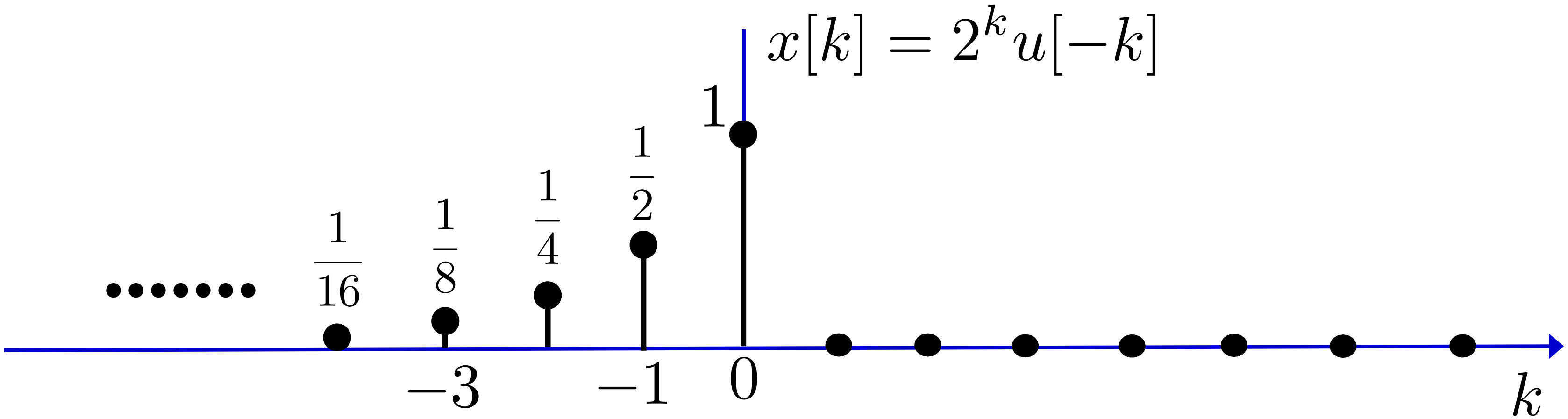


Contoh 5

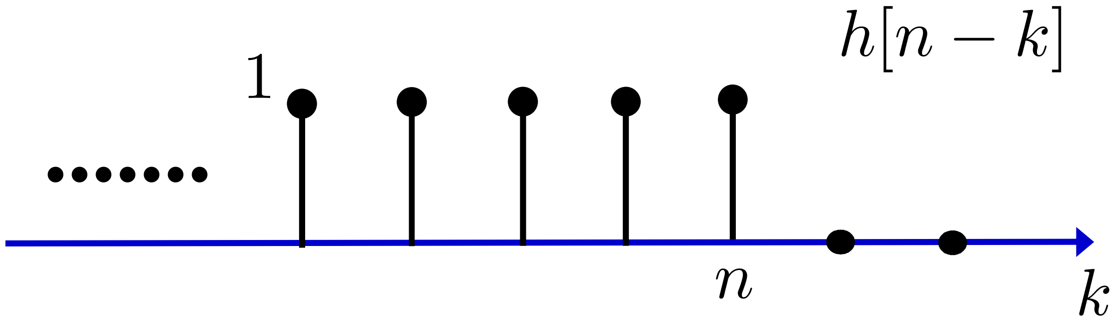
- Diketahui sistem LTI dengan masukan $x[n]$ dan tanggapan impuls $h[n]$ sebagai berikut:

$$x[n] = 2^n u[-n] \qquad\qquad h[n] = u[n]$$

- Plot untuk $x[k]$ dan $h[n\text{-}k]$ adalah sebagai berikut:



Contoh 5



- Tampak bahwa $x[k] = 0$ untuk $k > 0$ dan $h[n\text{-}k] = 0$ untuk $k > n$.
- Untuk setiap nilai n, nilai sampel-sampel $x[k]h[n\text{-}k]$, seiring dengan berubahnya nilai k, tidak selalu bernilai nol karena selalu ada overlap antara bagian $x[k]$ yang tidak bernilai nol dengan bagian $h[n\text{-}k]$ yang tidak bernilai nol.

Contoh 5

Interval 1: $n \geq 0$

- Pada saat $n \geq 0$, $x[k]h[n\text{-}k]$ memiliki sampel bernilai tidak nol hanya pada selang $k \leq 0$.
- Bisa diperoleh bahwa untuk $n \geq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- Dengan menggunakan formula jumlahan deret geometri tak hingga (infinite sum formula) yaitu:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1.}$$

Contoh 5

- Selanjutnya dapat diperoleh, bahwa untuk $n \geq 0$:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(1/2)} = 2}$$

Interval 2: *n* < 0

- Pada saat $n < 0$, $x[k]h[n\text{-}k]$ memiliki sampel bernilai tidak nol hanya pada selang $k \leq$ n.
- Bisa diperoleh bahwa untuk $n < 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k$$

- Kita perkenalkan variabel $l = -k$ dan $m = l+n$, sehingga persamaan di atas dapat dituliskan:

Contoh 5

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

- Dengan menggunakan infinite sum formula yang telah disebutkan sebelumnya, yaitu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1.$$

- Maka diperoleh, bahwa untuk $n < 0$:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) = 2^{n+1}$$

Contoh 5

- Dengan demikian,

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 2, & n \geq 0, \\ 2^{n+1}, & n < 0 \end{cases}}$$

- Plot untuk $y[n]$ adalah sebagai berikut: