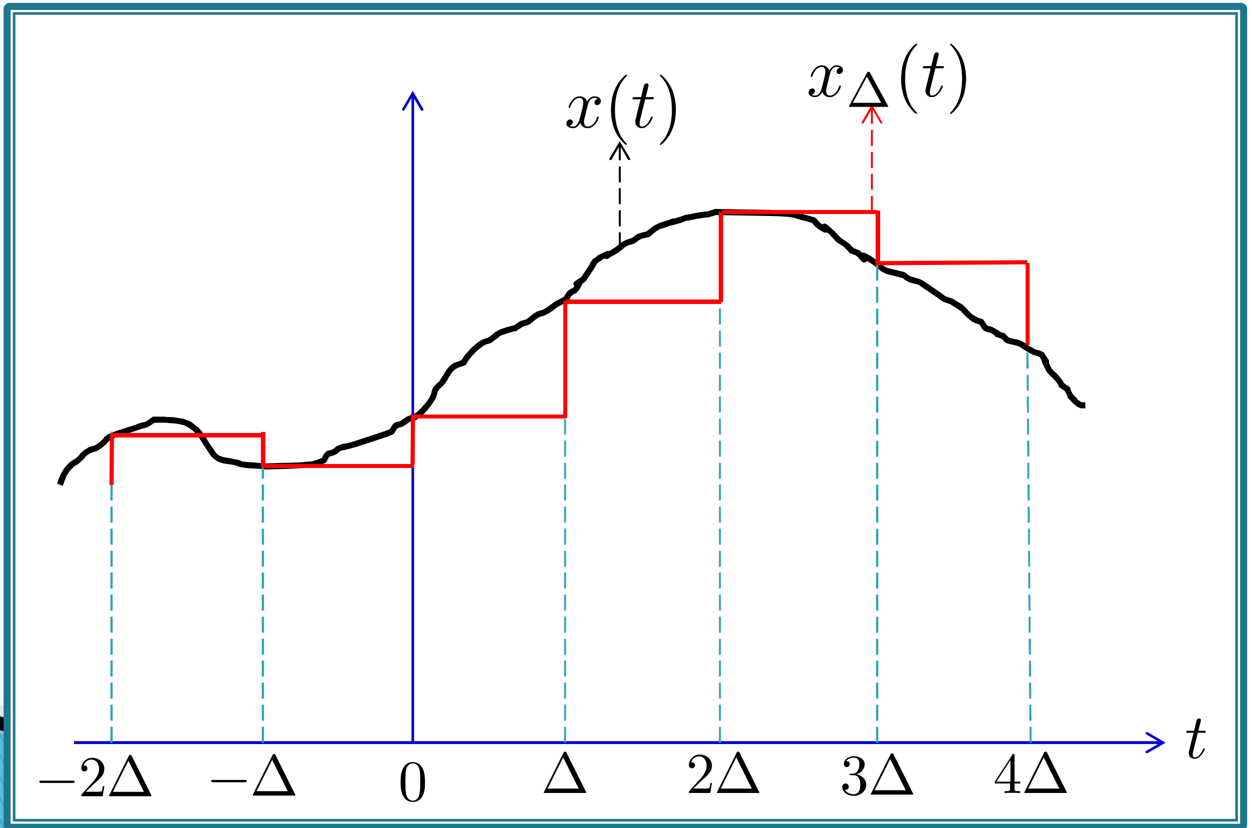
Sistem Linear Time Invariant (LTI) Kontinu

Sumber Bacaan:
Signal and System, Oppenheim, Willsky, & Hamid Nawab, Sub-Bab 2.2

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

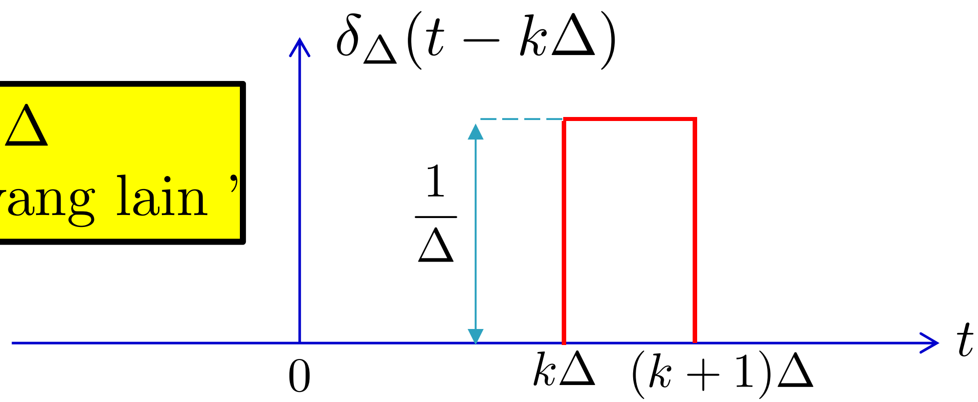
- Untuk bisa memberikan perlakuan yang mirip dengan yang telah dikenakan pada isyarat diskret, kita mulai dengan melakukan pendekatan berundak ("staircase") terhadap isyarat kontinu.



Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Sekarang kita ingat kembali isyarat pulsa $\delta_\Delta(t)$ yang kemarin kita gunakan untuk mendekati isyarat impuls satuan $\delta(t)$:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{untuk nilai t yang lain} \end{cases},$$



- Dengan demikian, isyarat pendekatan berundak $x_\Delta(t)$ di atas bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear atau weighted sum dari sekumpulan isyarat pulsa $\delta_\Delta(t - k\Delta)$.
- Berhubung amplitudo dari $\Delta\delta_\Delta(t)$ adalah 1 maka:

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \quad (1)$$

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Contoh Ilustrasi:

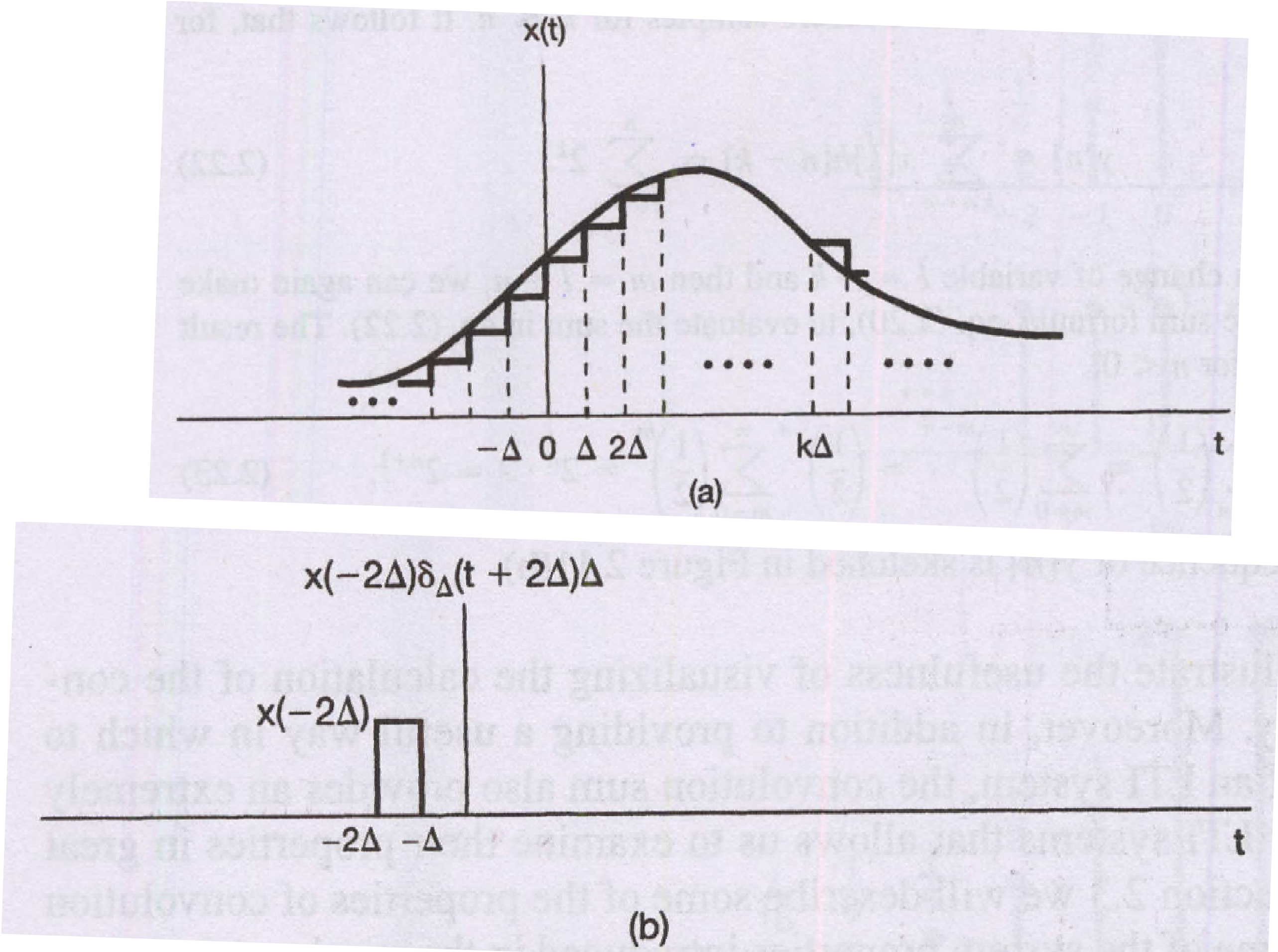


Fig 2.12 of Oppenheim & Willsky: Staircase approximation to Continuous-Time Signal

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

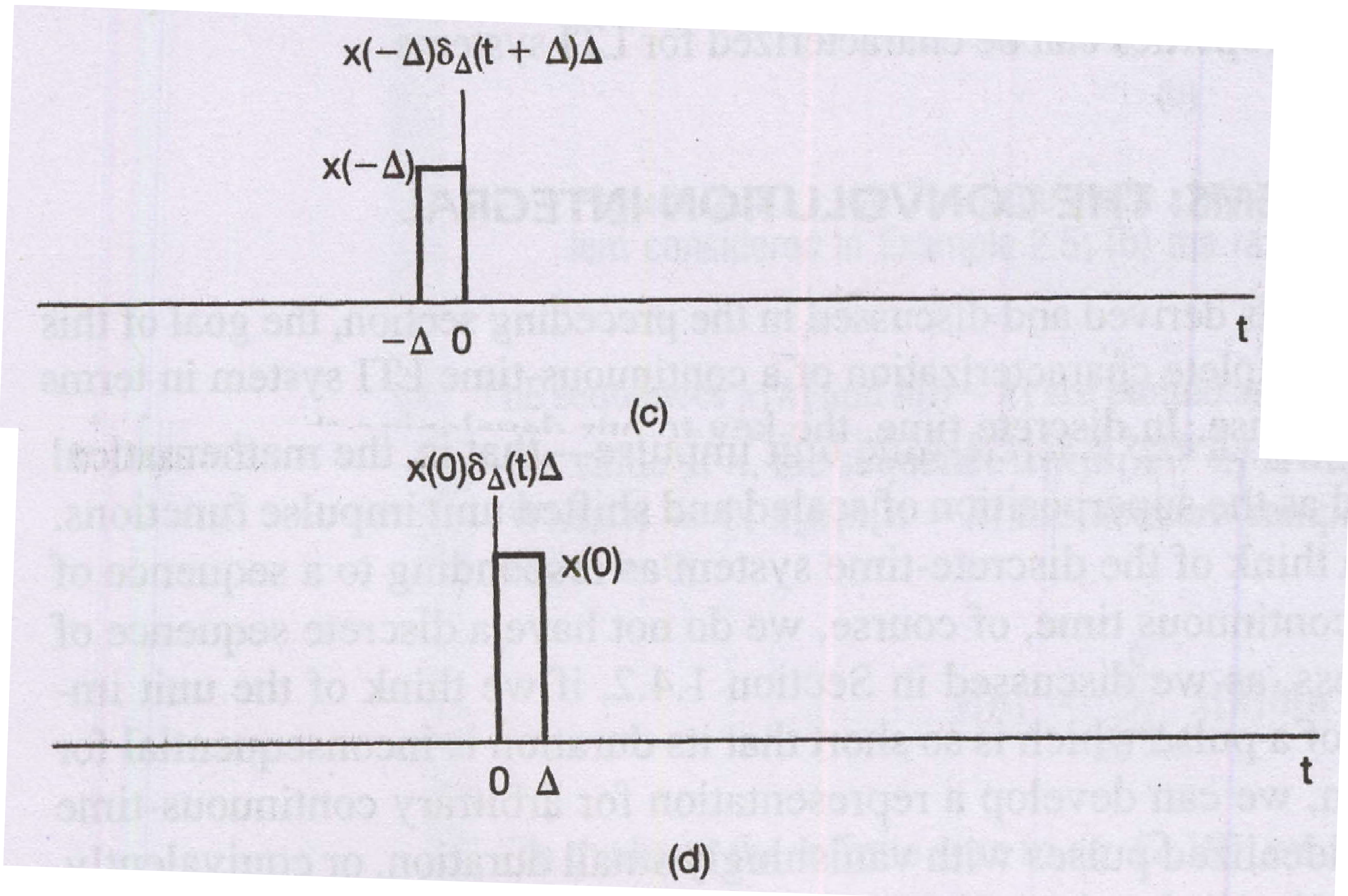


Fig 2.12 of Oppenheim & Willsky: Staircase approximation to Continuous-Time Signal (Continued)

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

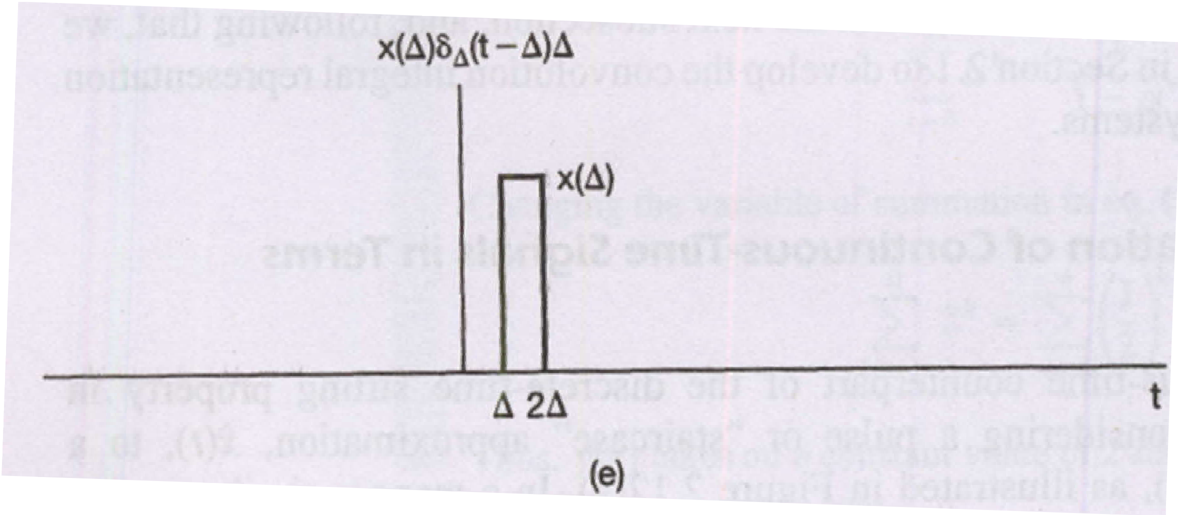


Fig 2.12 of Oppenheim & Willsky: Staircase approximation to Continuous-Time Signal (Continued)

- Dari gambar 2.12 di atas tampak bahwa pendekatan terhadap isyarat x(t) diberikan oleh:

$$\cdots + x(-2\Delta)\delta_\Delta(t+2\Delta)\Delta + x(-\Delta)\delta_\Delta(t+\Delta)\Delta$$
$$+x(0)\delta_\Delta(t)\Delta + x(\Delta)\delta_\Delta(t-\Delta)\Delta + \ldots$$

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Tampak bahwa untuk nilai t tertentu, hanya satu suku pada jumlahan di ruas kanan (1) yang bernilai tidak nol.
- Isyarat $x_\Delta(t)$ di atas akan semakin mendekati $x(t)$ seiring Δ mendekati 0. Dengan demikian,

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} x_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \qquad (2)$$

- Ilustrasi mengenai hal ini tampak pada gambar 2.13 berikut.
- Pada gambar tersebut diilustrasikan $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t-\tau)$, beserta hasil perkalian antara $x(\tau)$ dengan $\delta_\Delta(t-\tau)$.
- Tampak pada gambar 2.13c bahwa luas daerah yang diarsir semakin mendekati luasan di bawah kurva $x(\tau)\delta_\Delta(t-\tau)$ seiring Δ mendekati 0.

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

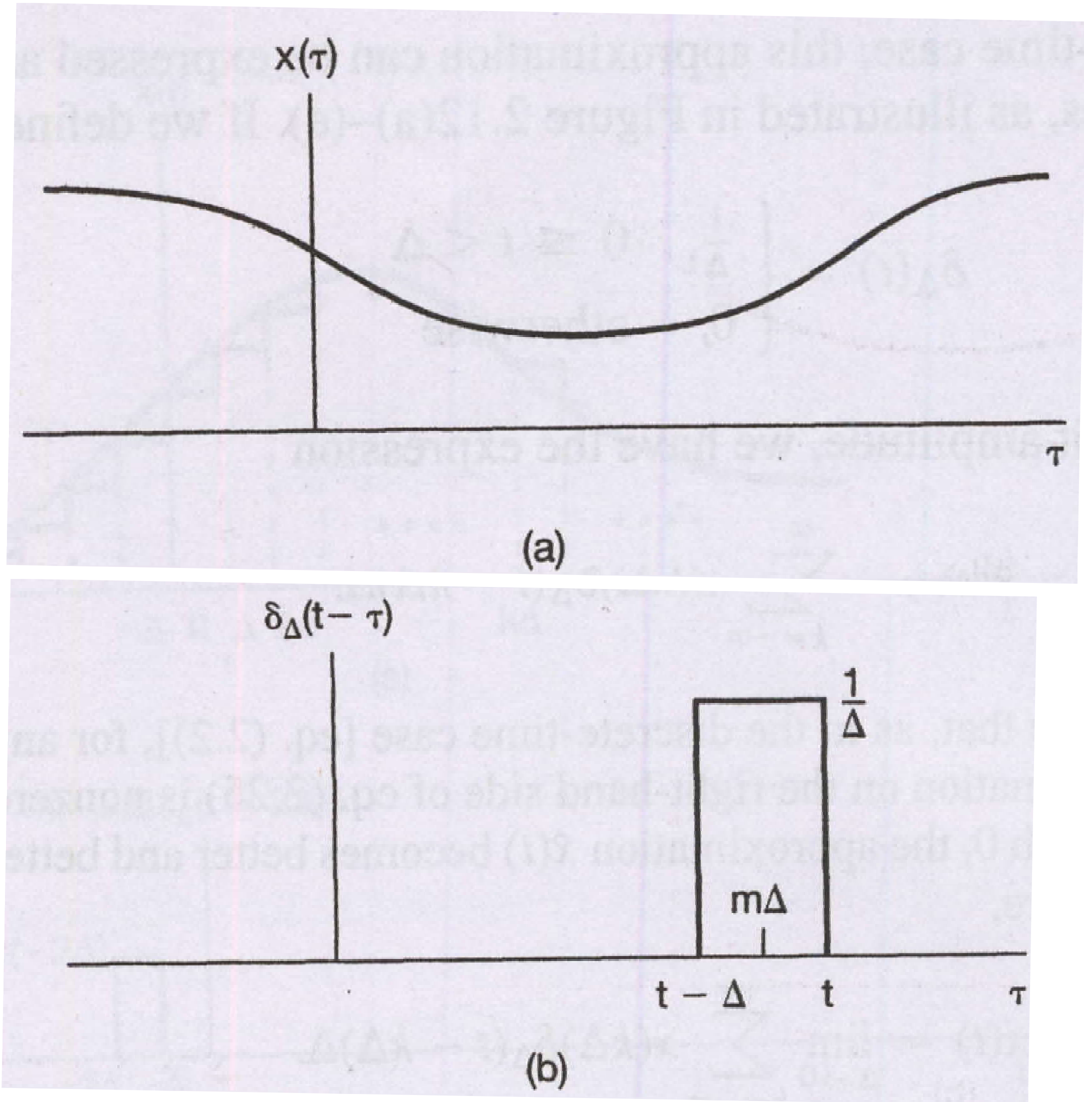


Fig 2.13 of Oppenheim & Willsky

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

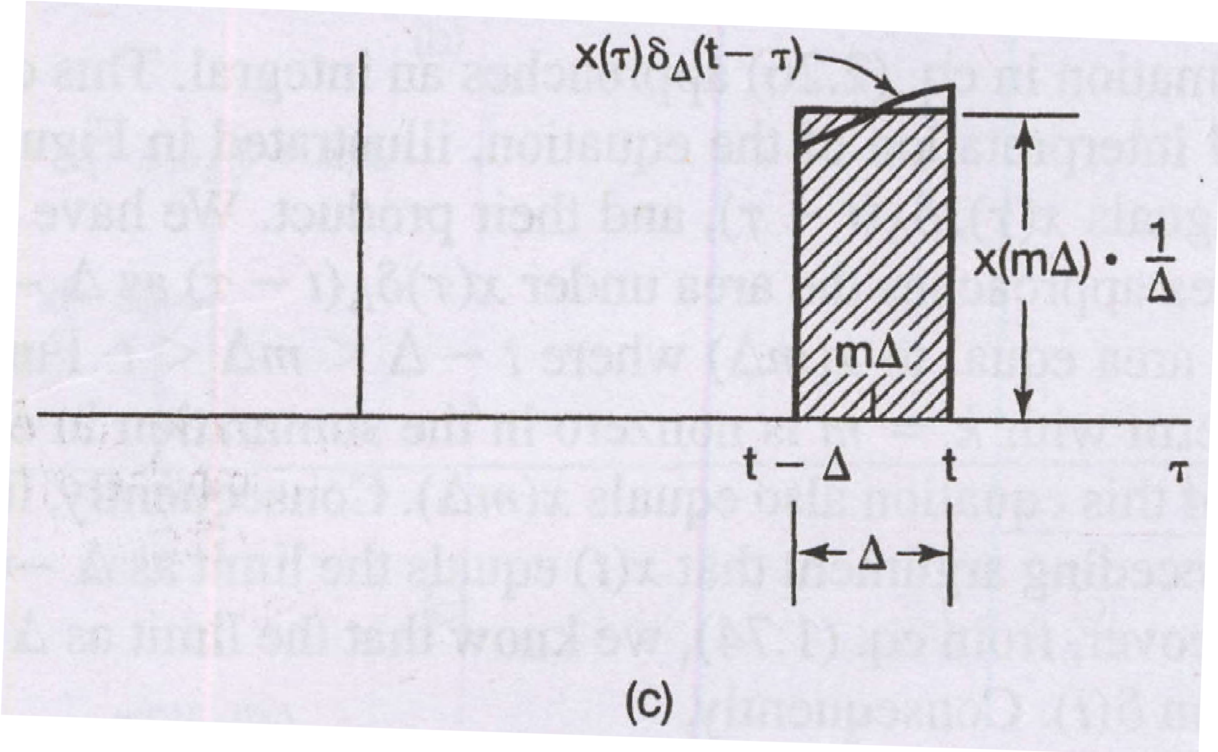


Fig 2.13 of Oppenheim & Willsky (Continued)

- Tampak pada gambar 2.13c bahwa luas daerah yang diarsir diberikan oleh $x(m\Delta)$ di mana $t - \Delta < m\Delta < t$ mengingat di titik $\tau = m\Delta$ inilah kedua kurva pada gambar berpotongan.

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

Saat Δ semakin mendekati 0 hingga **cukup amat kecil** nilainya ($\Delta \to 0$):

- Nilai $x(t)$ makin mendekati luasan di bawah kurva $x(\tau)\delta_\Delta(t-\tau)$
- $\delta_\Delta(t)$ makin mendekati fungsi impuls satuan $\delta(t)$
- Jumlahan pada persamaan (2) di atas mendekati integral

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa $x(t)$ bisa direpresentasikan sebagai kombinasi linear (weighted integration) dari seperangkat fungsi **impuls satuan**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Sebagai contoh saat $x(t)$ berupa fungsi undak satuan ($x(t) = u(t)$), dapat diperoleh dari (3) bahwa:

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

- Berhubung $u(t) = 1$ saat $t \geq 0$ dan $u(t) = 0$ saat $t < 0$, maka:

$$\boxed{u(t) = \int_{0}^{\infty} 1\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau}$$

- Formula di atas tidak lain adalah formula yang pada pertemuan sebelumnya telah diberikan saat kita mencoba merelasikan hubungan antara impuls satuan dan undak satuan $u(t)$.

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Untuk lebih memahami maksud dari persamaan (3), kita bisa mulai dari ruas kanan persamaan (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Jika kita memandang integrasi (terhadap τ) di atas sebagai jumlahan luasan maka tampak bahwa semua suku bernilai nol <u>**kecuali**</u> pada suku yang berasosiasi dengan τ = t, yaitu x(t)δ(t-t).
- Sehingga tidak akan mengubah arti bila integrasi di atas kita tuliskan sebagai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

- Dengan demikian,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

- Di mana tanda "= " pada langkah terakhir memanfaatkan fakta bahwa $\delta(t-\tau)$ bernilai 0 saat $\tau \neq t$ dan memiliki nilai luasan 1 saat $\tau = t$
- Ilustrasi hasil perkalian antara $x(\tau)$ dengan $\delta(t-\tau)$ ditunjukkan pada Gambar 2.14 berikut.

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

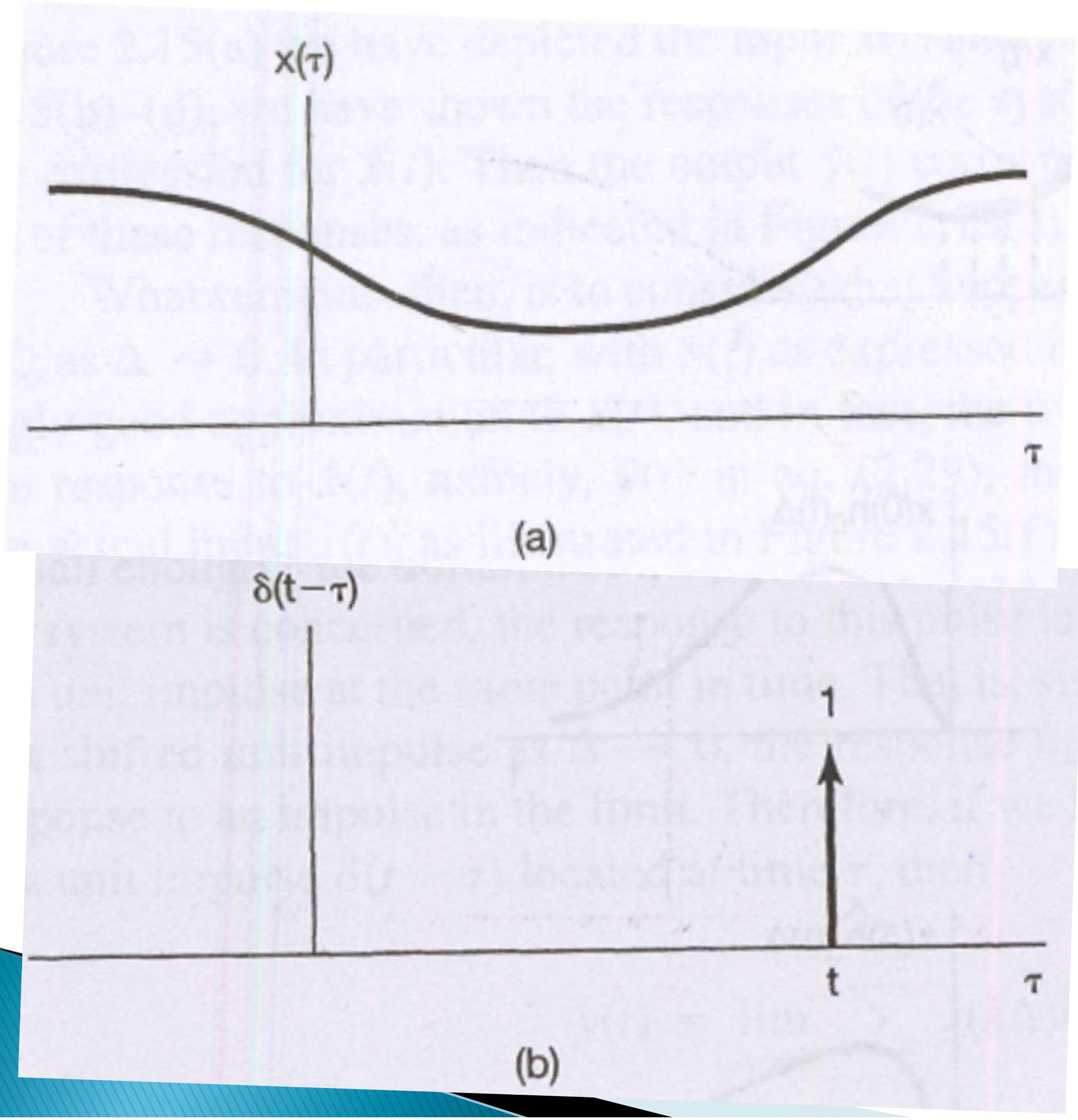


Fig 2.14 of Oppenheim & Willsky: (a) isyarat $x(\tau)$; (b) impuls $\delta(t-\tau)$ sebagai fungsi dari τ dengan t fixed

Representasi Isyarat Waktu Kontinu

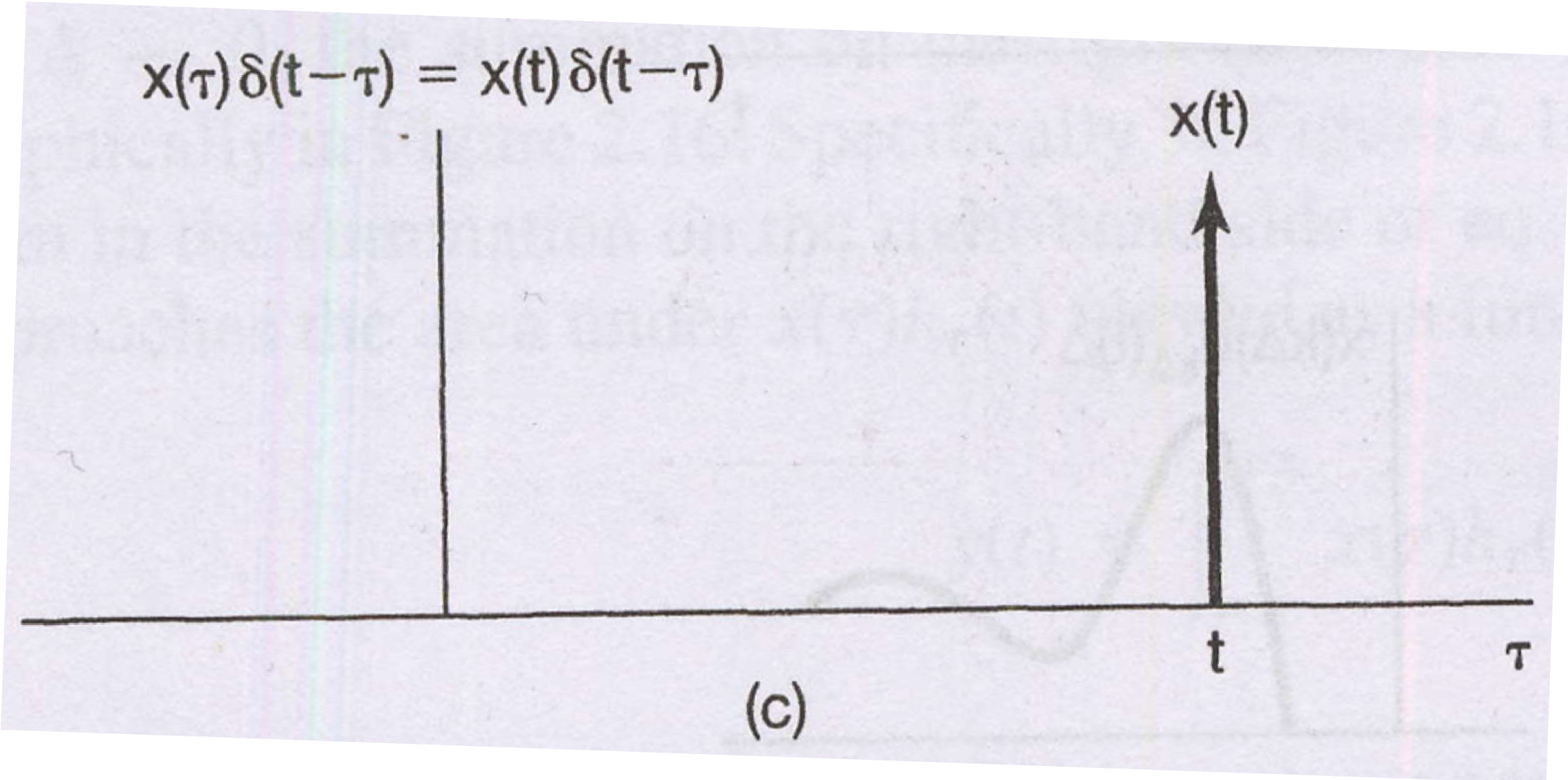
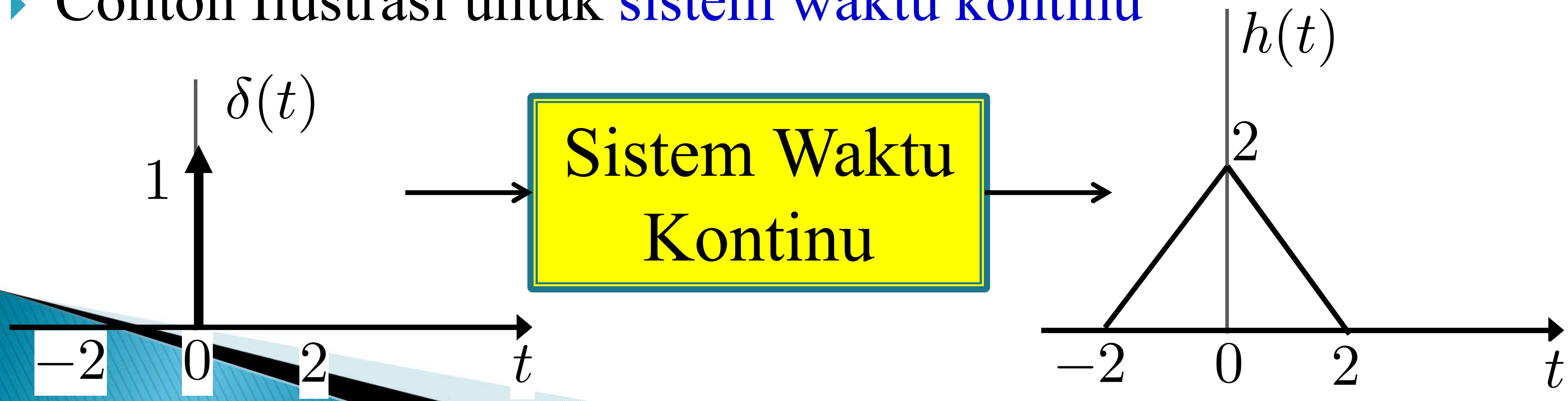


Fig 2.14 of Oppenheim & Willsky: (c) Perkalian antara isyarat x(τ) pada gambar (a) dengan impuls δ(t- τ) sebagai fungsi dari τ pada gambar (b)

Tanggapan Impuls Sistem LTI Kontinu

- Ingat kembali bahwa:
  - Tanggapan impuls sistem **LTI diskret** $h[n]$ adalah keluaran sistem saat masukan sistem berupa impuls satuan $\delta[n]$
  - Tanggapan impuls sistem **LTI kontinu** $h(t)$ adalah keluaran sistem saat masukan sistem berupa impuls satuan $\delta(t)$

- Contoh Ilustrasi untuk sistem waktu kontinu



Tanggapan Impuls Sistem LTI Kontinu

- Apabila sistem kontinu di atas time invariant (TI)

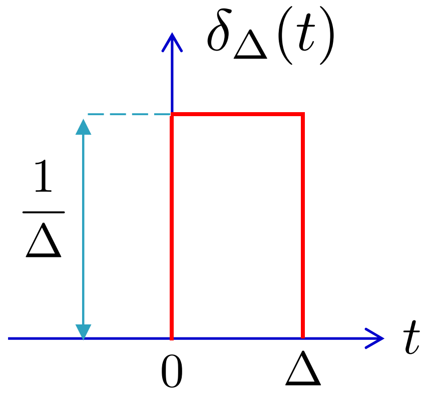
- Apabila sistem kontinu di atas linear time invariant (LTI)

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Sekarang akan ditinjau bagaimana tanggapan atau keluaran sistem LTI Kontinu, saat masukan berupa sembarang isyarat $x(t)$.

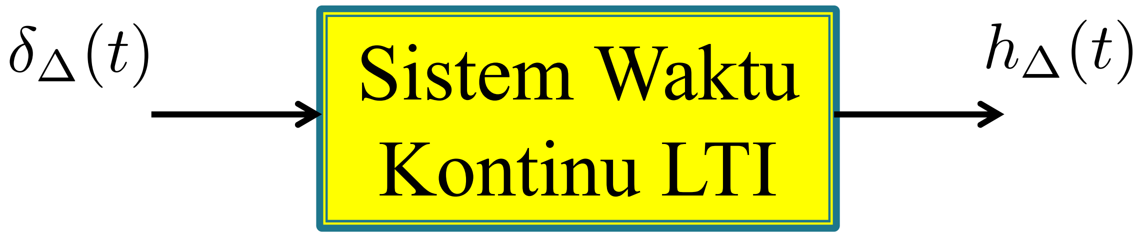
- Untuk keperluan ini tinjau kembali isyarat pulsa $\delta_{\Delta}(t)$ yang telah dibahas sebelumnya.

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{untuk nilai t yang lain} \end{cases},$$



- Jika keluaran suatu sistem LTI saat mendapatkan masukan $\delta_{\Delta}(t)$ adalah $h_{\Delta}(t)$, maka dapat kita gambarkan

Tanggapan Sistem LTI Kontinu



- Berhubung $\delta_\Delta(t)$ makin mendekati fungsi impuls satuan $\delta(t)$ saat Δ semakin kecil atau:

$$\boxed{\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)}$$

- Maka jelas bahwa pada saat itu pula $h_\Delta(t)$ makin mendekati tanggapan impuls $h(t)$:

$$\boxed{\text{Berhubung } \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t) \text{ maka } \lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = h(t) \qquad (4)}$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Kita kembali fokus ke isyarat $\delta_\Delta(t)$ beserta tanggapan sistem yang terkait yaitu $h_\Delta(t)$.
- Untuk sistem LTI, maka berlaku sifat time invariant yang artinya saat $\delta_\Delta(t)$ mengalami penundaan sebesar $k\Delta$ maka keluaran sistem yaitu $h_\Delta(t)$ juga mengalami besar penundaan yang sama:

- Untuk sistem LTI, berlaku sifat homogen yang artinya saat masukan dikalikan dengan faktor skala tertentu maka keluaran sistem pun juga mengalami hal yang sama.

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Ingat bahwa pulsa $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ bernilai $1/\Delta$ pada saat $k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta$.
- Dengan demikian, $\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta = 1$ pada saat $k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta$. Nilai $\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$ ini tidak lain mengacu pada luasan pulsa.

- Dengan memanfaatkan sifat homogen pada sistem LTI, maka diperoleh:

$$\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Waktu Kontinu LTI}} \longrightarrow h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Bila $\delta_\Delta(t\text{-}k\Delta)\,\Delta$ kita kalikan dengan faktor scalar sebesar $x(k\Delta)$, maka dengan memanfaatkan sifat homogen pada sistem LTI sekali lagi, diperoleh:

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Waktu Kontinu LTI}} \longrightarrow x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

- Berhubung untuk sistem LTI berlaku sifat additif, maka berbasiskan pada gambar di atas, kita bisa pula memperoleh:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Waktu Kontinu LTI}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Jika kita kenakan nilai limit Δ mendekati nol pada masukan untuk sistem di gambar di atas, maka nilai limit yang sama akan dikenakan pada sisi keluaran

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Waktu Kontinu LTI}} \longrightarrow \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

- Jika kita tinjau lagi persamaan (2) dan (3) di slide-slide sebelumya maka jelas bahwa, saat dikenakan limit $\Delta \to 0$, jumlahan pada masukan sistem di atas akan konvergen ke dalam bentuk integrasi.
- Pada situasi ini, masukan sistem di atas tidak lain adalah isyarat x(t) pada persamaan (3)

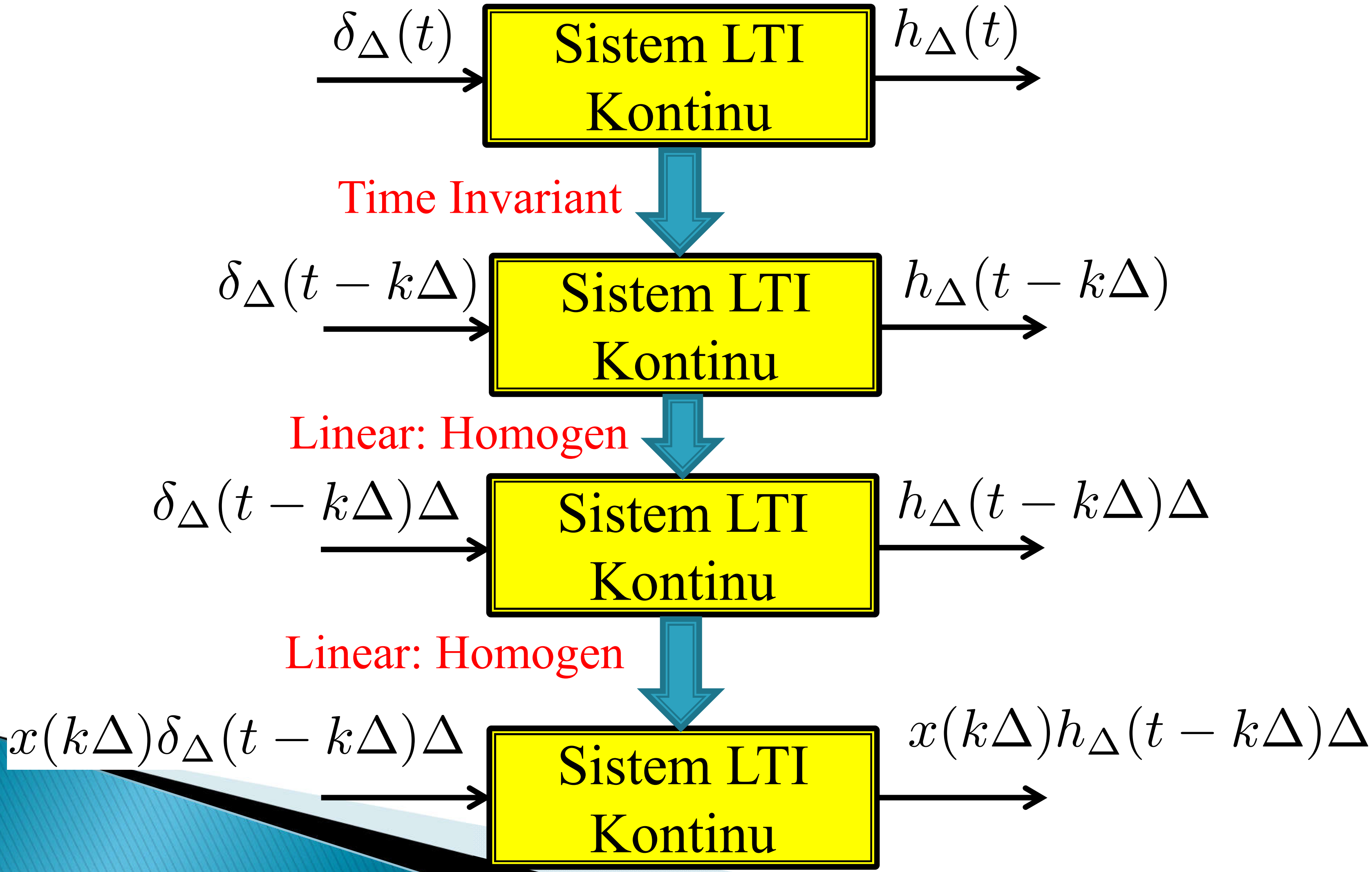
Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Pada situasi ini, jumlahan pada keluaran sistem di atas juga akan konvergen ke bentuk integrasi.
- Sehingga, berbasiskan pada gambar di atas, bisa kita gambarkan seperti berikut ini.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Waktu Kontinu LTI}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Secara ringkas, bisa digambarkan:



Tanggapan Sistem LTI Kontinu

Linear: Additif

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \rightarrow \boxed{\text{Sistem LTI Kontinu}} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

Limit $\Delta \rightarrow 0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \boxed{\text{Sistem LTI Kontinu}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Kita beri nama **keluaran ini** dengan $y(t)$ yaitu **keluaran** sistem LTI kontinu saat **masukannya** berupa sembarang isyarat $x(t)$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

Dengan demikian, bisa disimpulkan bahwa:

- jika suatu sistem LTI kontinu memiliki tanggapan impuls *h*(*t*) (yaitu keluaran sistem saat masukan berupa δ(t))
- Maka, saat sistem LTI kontinu tersebut mendapat masukan sembarang isyarat x(t) yang selalu bisa dijabarkan sebagai

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

- Akan diperoleh keluaran berupa isyarat *y*(*t*) yang diberikan oleh:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (5)}$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Operasi pada **ruas kanan** persamaan (5) di atas disebut dengan operasi **integral konvolusi** (convolution integral) antara x(t) dengan h(t).

- Operasi integral konvolusi sering juga disimbolkan dengan *, sehingga diperoleh:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (6)$$

Tanggapan Sistem LTI Kontinu

- Sebagaimana pada kasus LTI diskret, persamaan (6) menjabarkan ekspresi sistem LTI kontinu terhadap sembarang input dengan berbasiskan pada tanggapan sistem tersebut terhadap impuls satuan $\delta(t)$.

- Jadi sama dengan pada kasus diskret, bisa dikatakan bahwa karakter sistem LTI waktu kontinu sepenuhnya didefinisikan oleh tanggapannya terhadap impuls satuan $\delta(t)$.
- Artinya dengan mengamati tanggapan sistem LTI terhadap impuls satuan $\delta(t)$, kita bisa menemukan **keluaran** atau tanggapan sistem LTI saat **masukan**nya berupa sembarang isyarat $x(t)$

Contoh 1

- Diketahui isyarat $x(t)$ merupakan masukan bagi sistem LTI kontinu dengan tanggapan impuls $h(t)$ di mana:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

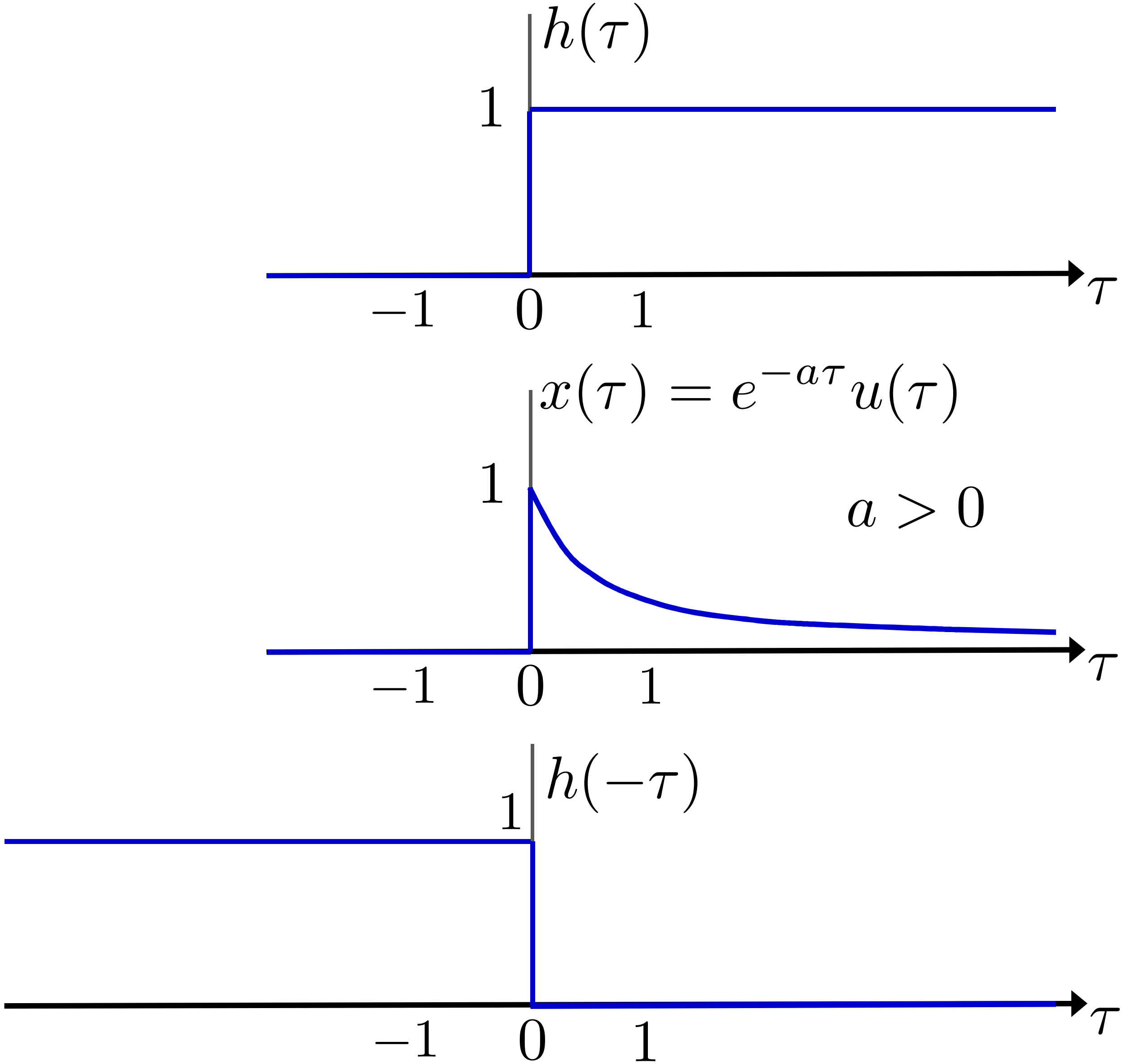
- Tentukan isyarat keluaran $y(t)$ dari sistem di atas

- Ingat bahwa isyarat keluaran adalah hasil konvolusi antara isyarat masukan dengan tanggapan impuls:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (6)$$

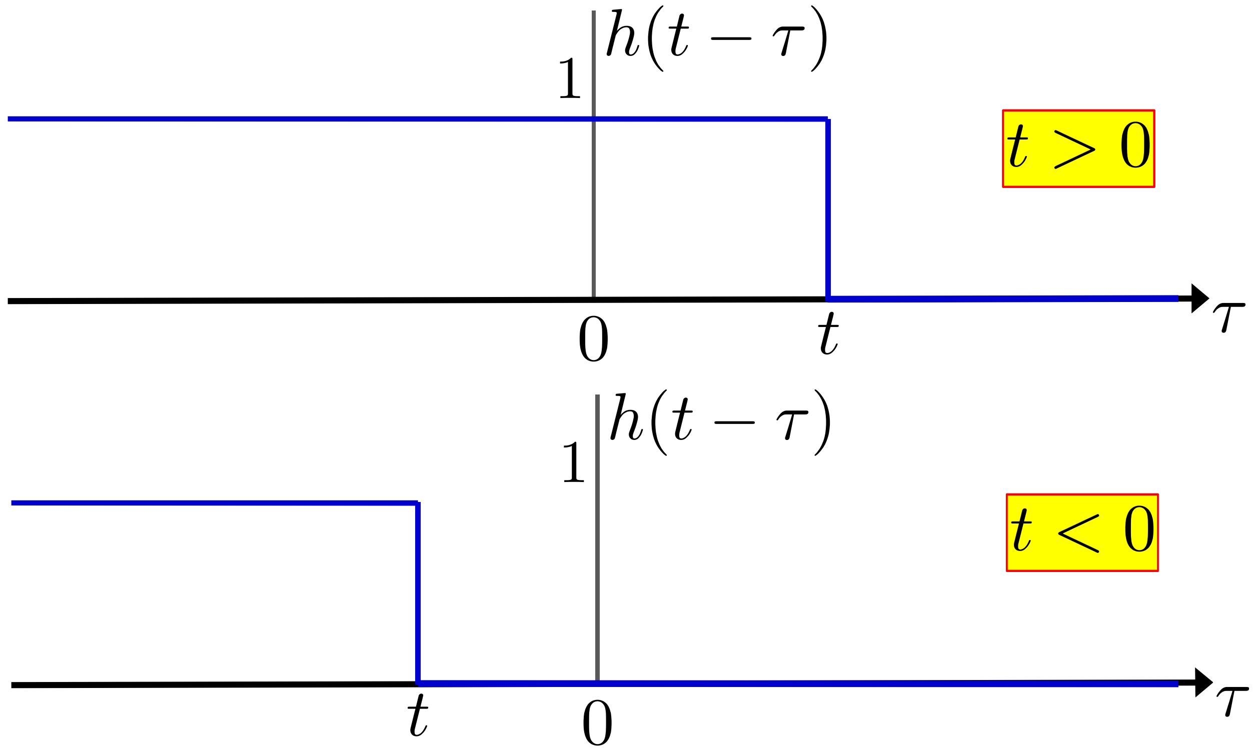
- Kita gambarkan isyarat masukan dan tanggapan impuls sebagai fungsi τ

Contoh 1



Contoh 1

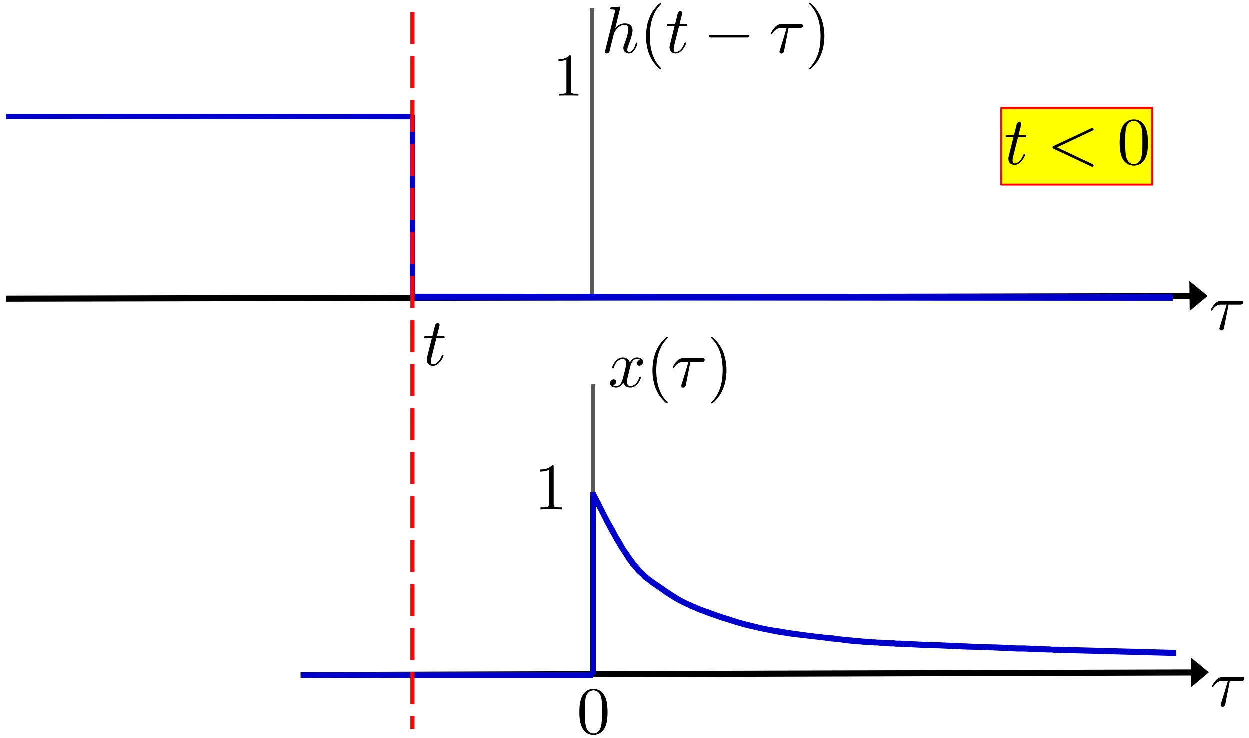
- Jika $h(-\tau)$ kita geser t satuan ke kanan (baik t positif ataupun negatif), kita dapatkan



- Untuk menghitung keluaran $y(t)$ untuk setiap nilai t, pertama-tama kita harus mengevaluasi hasil perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ (lihat pers (6)) untuk setiap nilai τ

Contoh 1

- Tampak bahwa saat $t < 0$, nilai perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ adalah 0 untuk semua nilai τ karena sama sekali tidak terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t-\tau)$ yang tidak nol.



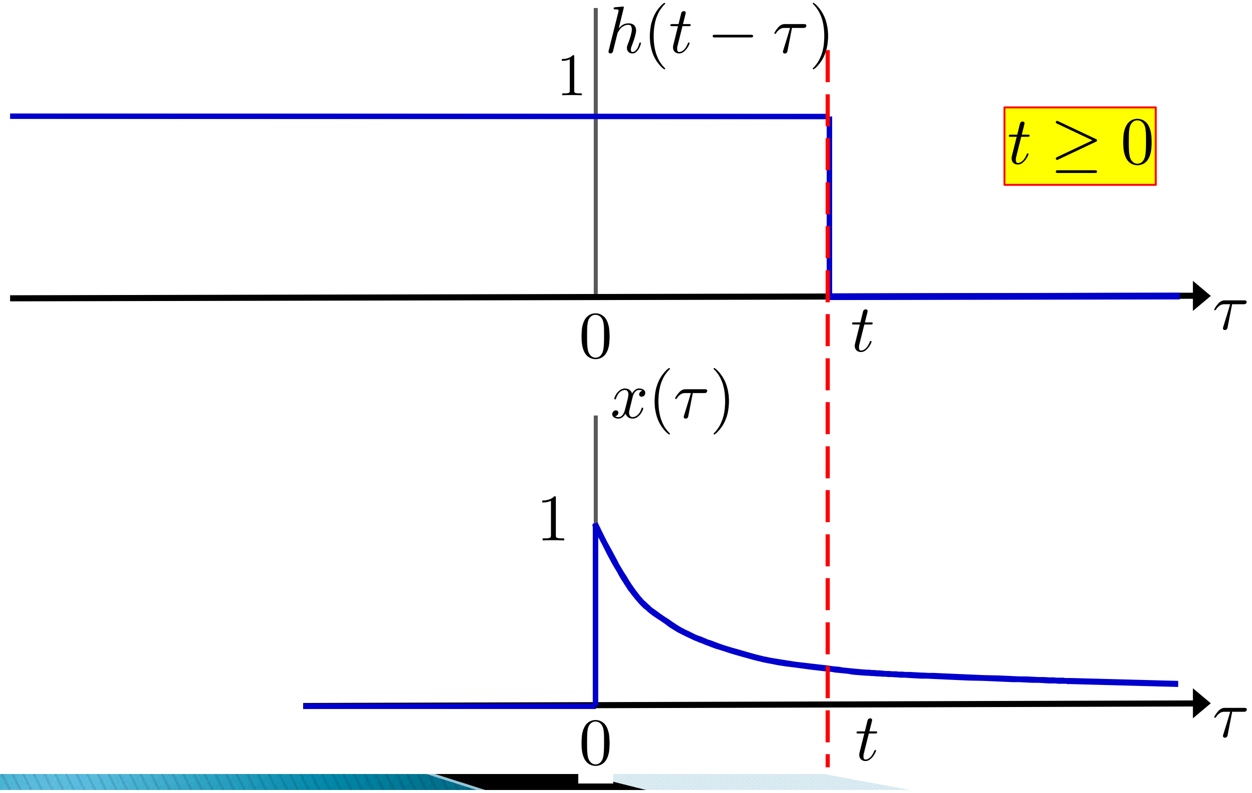
- Dengan demikian, saat $t < 0$, integrasi $x(\tau)h(t-\tau)$ terhadap seluruh nilai τ juga akan nol.

Contoh 1

- Dengan demikian,

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \text{untuk } t < 0}$$

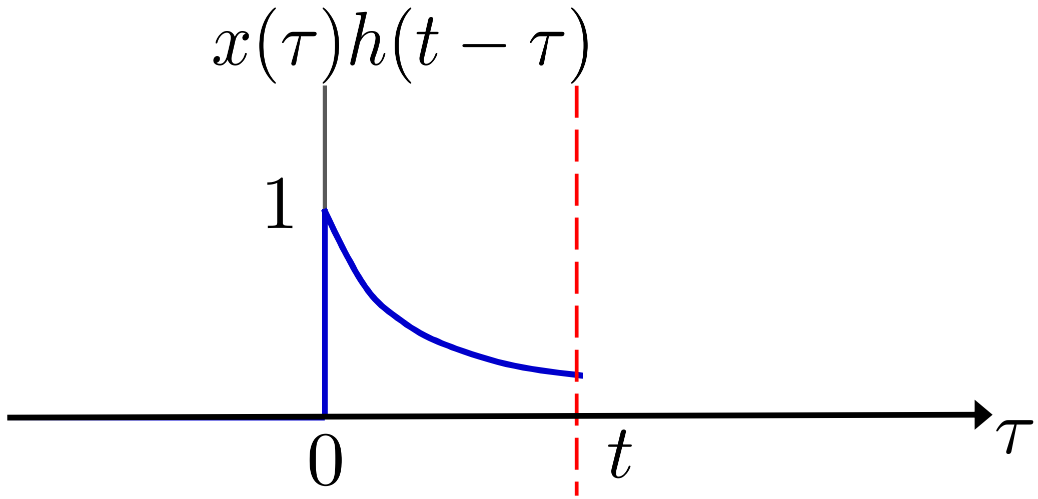
- Sebaliknya untuk $t \geq 0$



Contoh 1

- Dengan demikian, untuk $t \geq 0$

$$\boxed{x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ yang lain.} \end{cases}}$$



- Nilai $y(t)$, untuk $t \geq 0$, diberikan oleh:

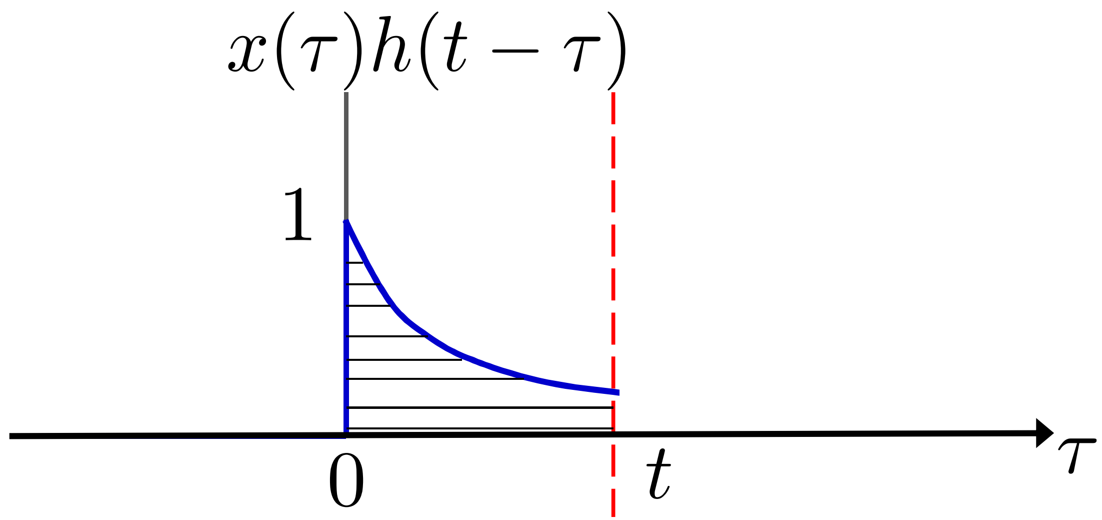
$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau}$$

Contoh 1

- Akhirnya nilai $y(t)$ untuk $t \geq 0$ dapat dituliskan:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)}$$

- Nilai $y(t)$ untuk $t \geq 0$ dilukiskan oleh luasan yang diarsir berikut ini



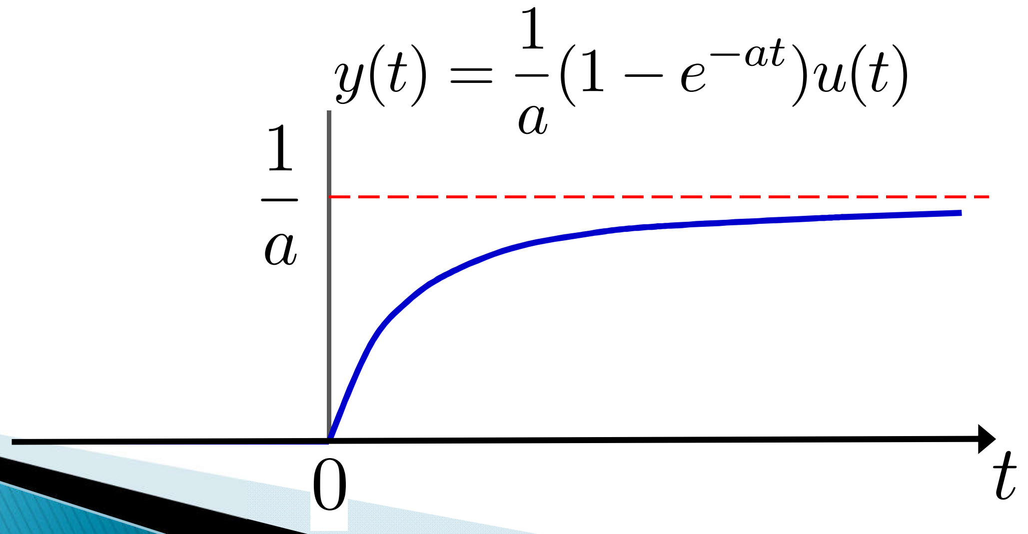
Contoh 1

- Dengan memperhitungkan baik interval $t < 0$ maupun $t \geq 0$, maka $y(t)$ dapat dituliskan sebagai:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}$$

- Atau:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) u(t)}$$

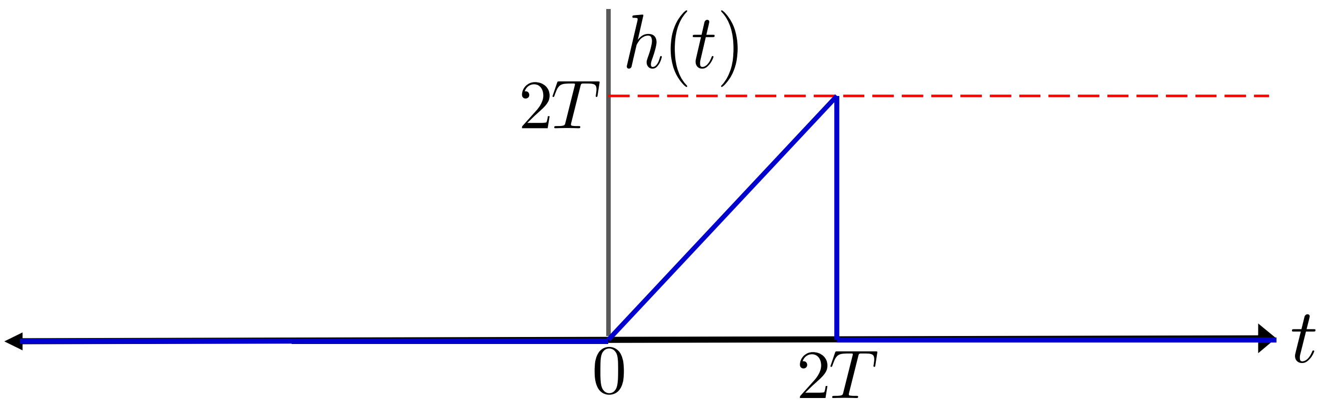


Contoh 2

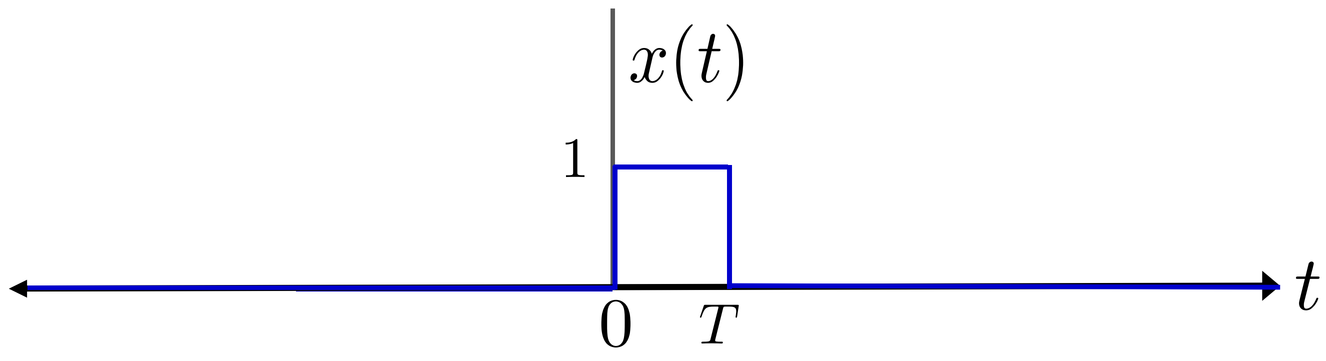
- Tentukan keluaran sistem LTI y(t), jika masukan sistem LTI berupa isyarat $x(t)$ dan sistem LTI ini memiliki tanggapan impuls $h(t)$ di mana:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{untuk nilai } t \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{untuk nilai } t \text{ lainnya} \end{cases}$$

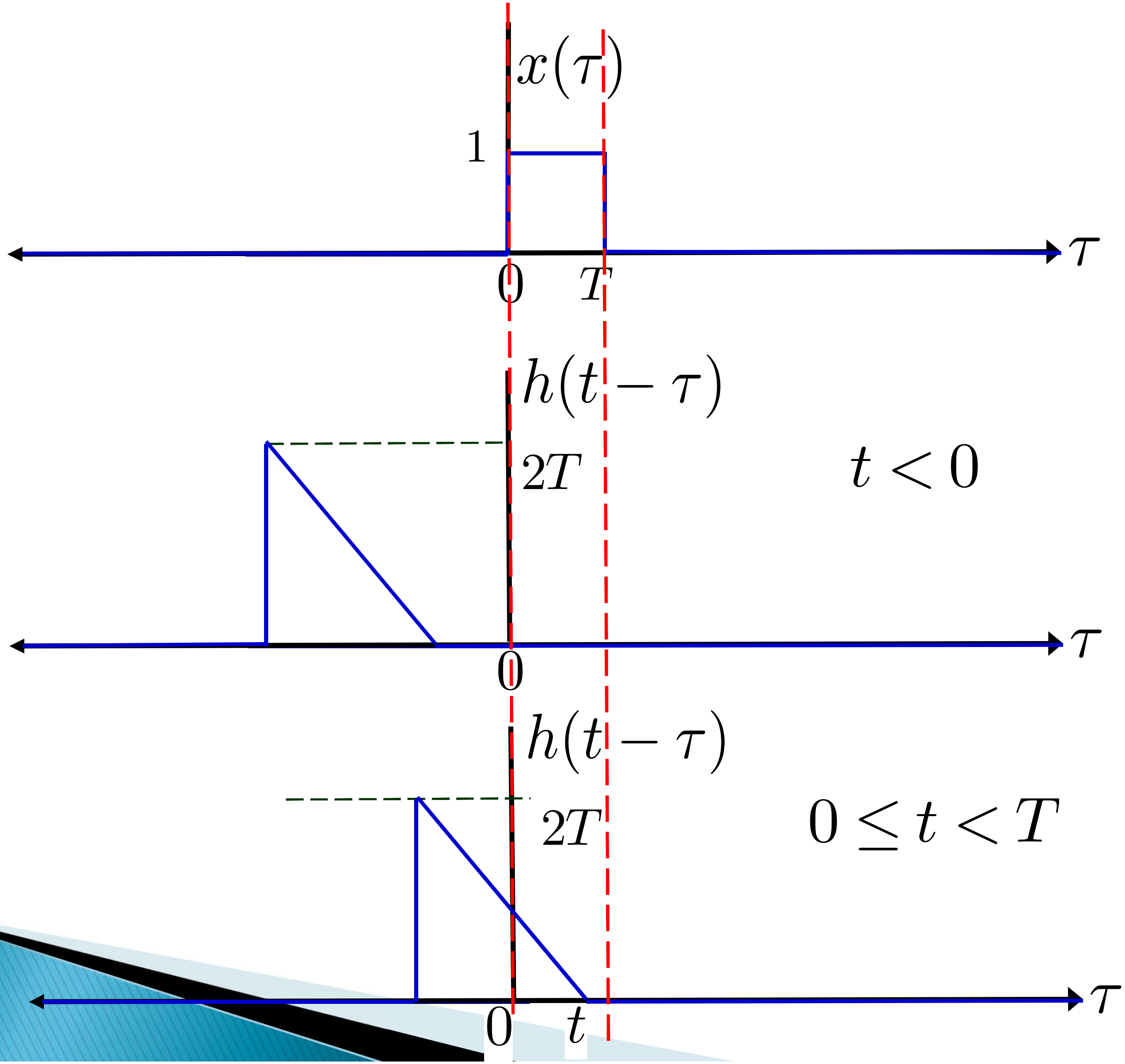


Contoh 2



- Pada situasi ini, akan lebih mudah jika kita mengevaluasi hasil perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ untuk beberapa interval.
- Tentunya kita harus memiliki intuisi terhadap jumlah interval dan interval mana saja yang akan menghasilkan bentuk kurva $x(\tau)h(t-\tau)$ yang secara signifikan berbeda.
- Berbasiskan pada bentuk $x(\tau)$ dan $h(t-\tau)$, untuk kasus ini akan ada 5 interval yang perlu dipertimbangkan yaitu $t < 0$, $0 \le t < T$, $T \le t < 2T$, $2T \le t < 3T$, dan $t \ge 3T$.

Contoh 2



Contoh 2

Interval I : t < 0

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $t < 0$, nilai perkalian $x(\tau)h(t- \tau)$ adalah 0 untuk semua nilai τ karena sama sekali tidak terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t- \tau)$ yang tidak nol.
- Jadi

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \text{untuk } t < 0}$$

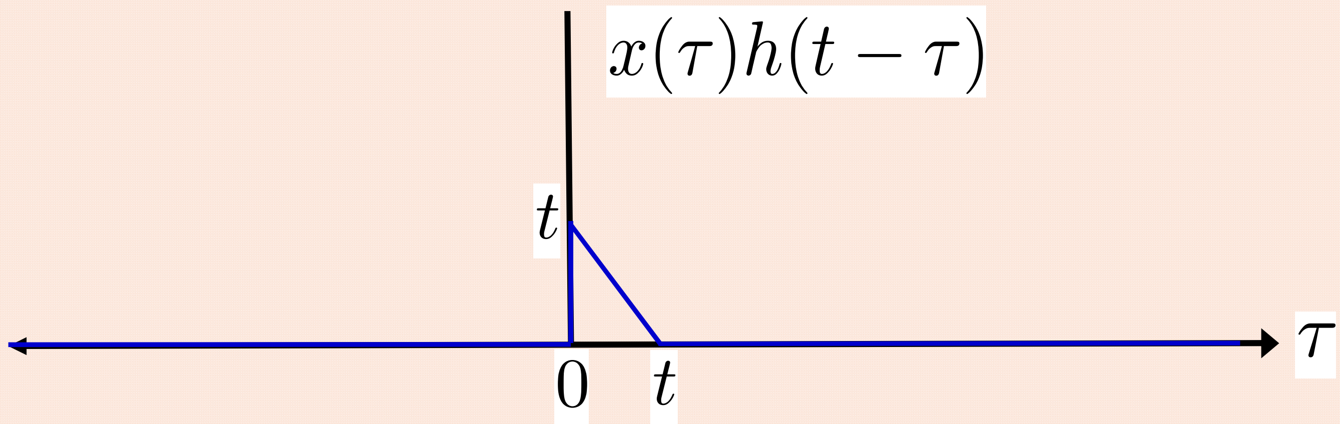
Interval II : $0 \leq t < T$

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $0 \leq t < T$, terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t- \tau)$ yang tidak nol, yaitu pada interval $0 \leq \tau \leq t$

Contoh 2

Interval II : 0 ≤ t < T

- Pada saat 0 ≤ t < T, berlaku:



$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} t-\tau & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} (t-\tau)d\tau$$

Contoh 2

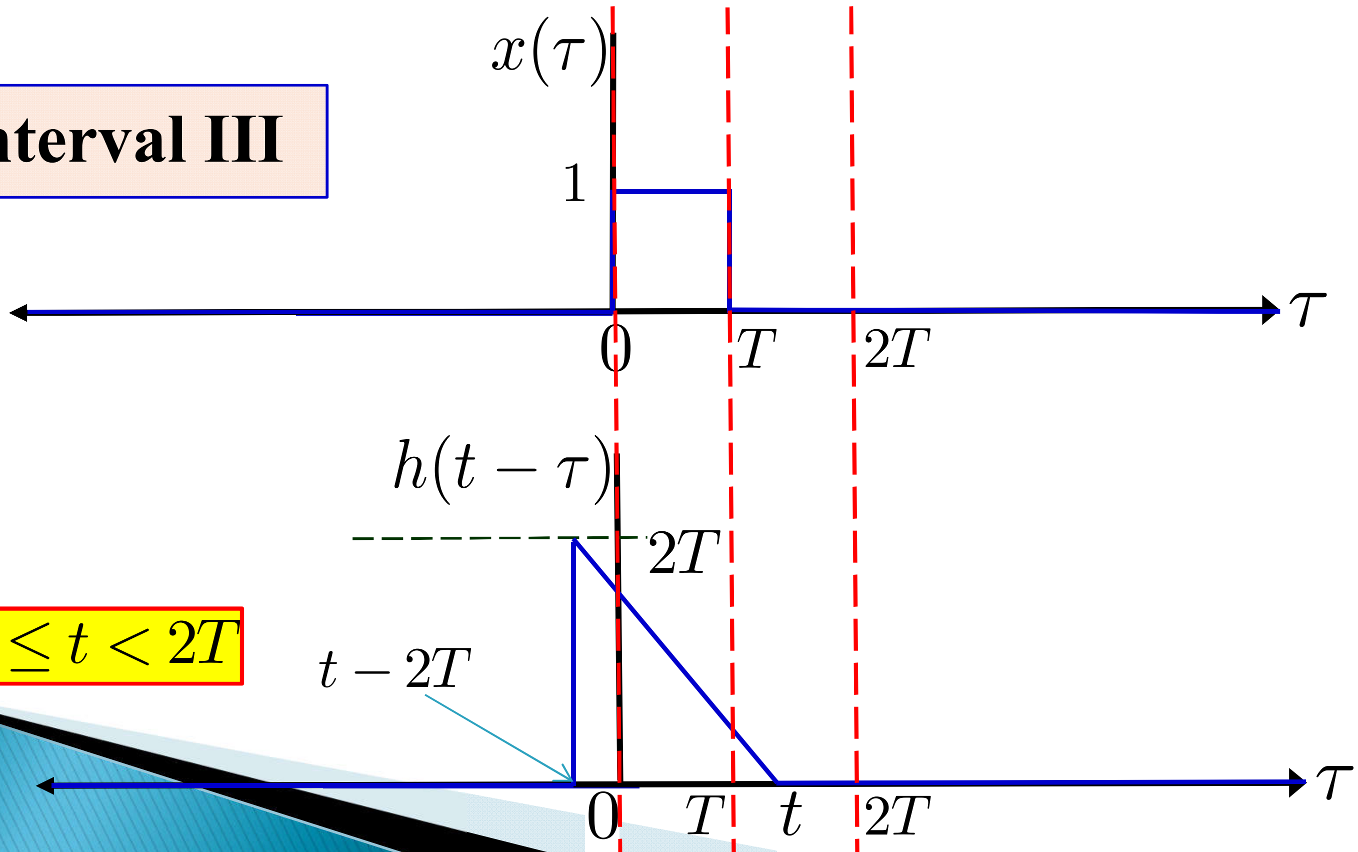
Interval II : $0 \leq t < T$

- Diperoleh

$$y(t) = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

Interval III

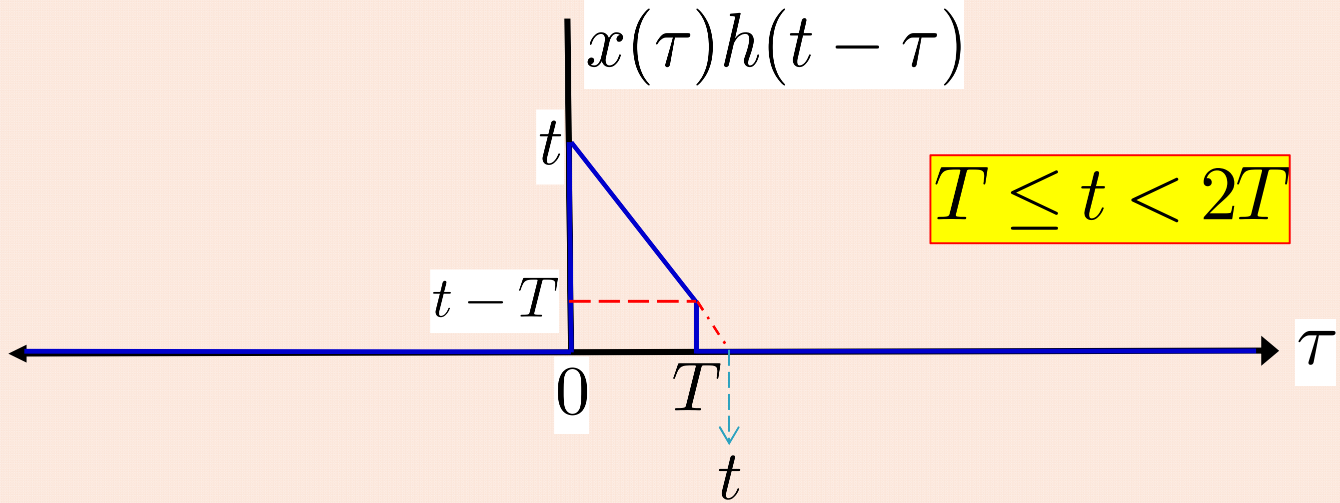
$T \leq t < 2T$



Contoh 2

Interval III : T ≤ t < 2T

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat T ≤ t < 2T, terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t - \tau)$ yang tidak nol, yaitu pada interval $0 \leq \tau \leq T$.
- Pada interval ini diperoleh:



$$T \leq t < 2T$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} t-\tau & 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 2

Interval III : T ≤ t < 2T

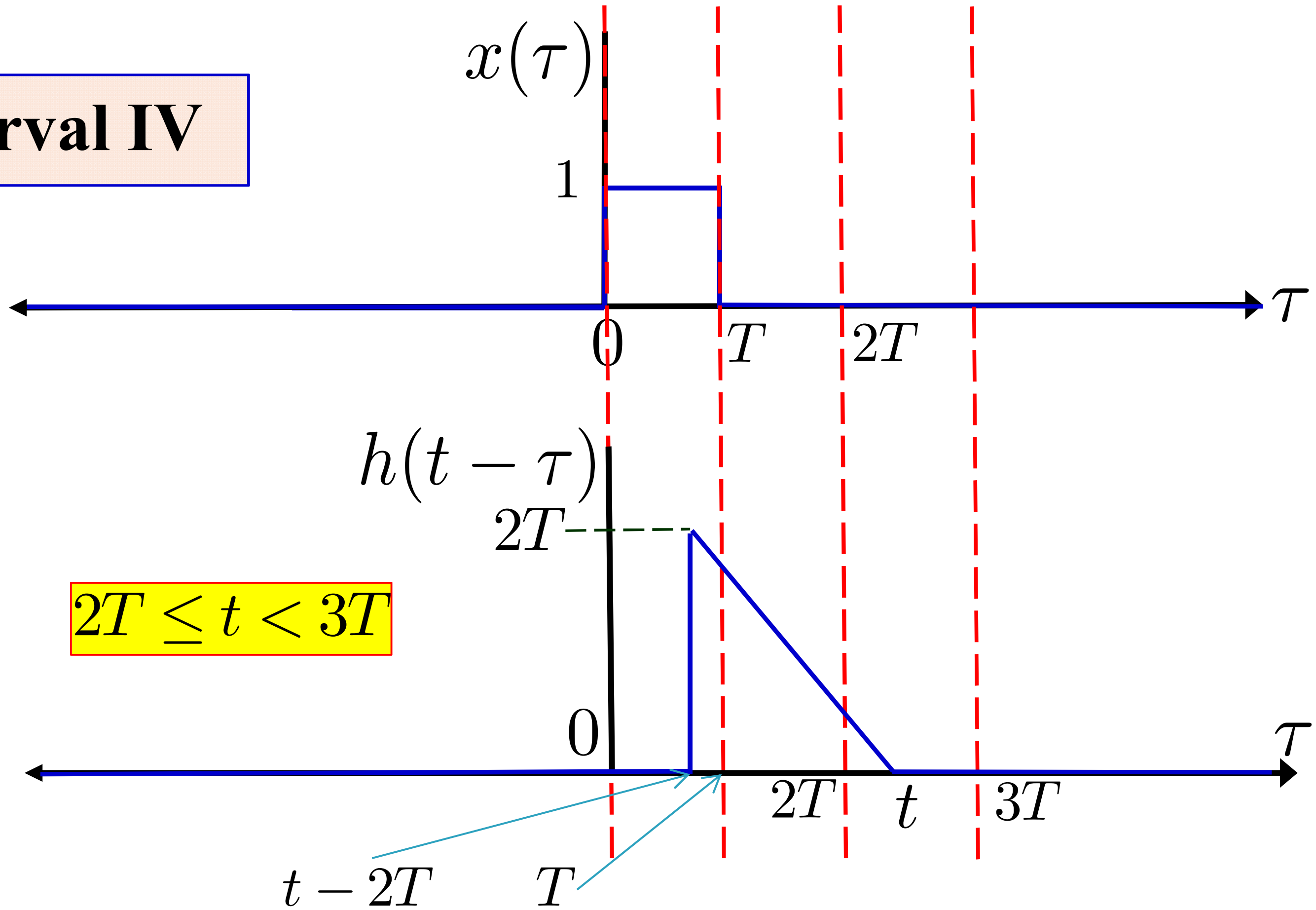
- Dengan demikian, diperoleh nilai y(t) untuk T ≤ t < 2T:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{T} (t-\tau)d\tau \\
&= \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^T = Tt - \frac{T^2}{2}
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Interval IV

$2T \le t < 3T$

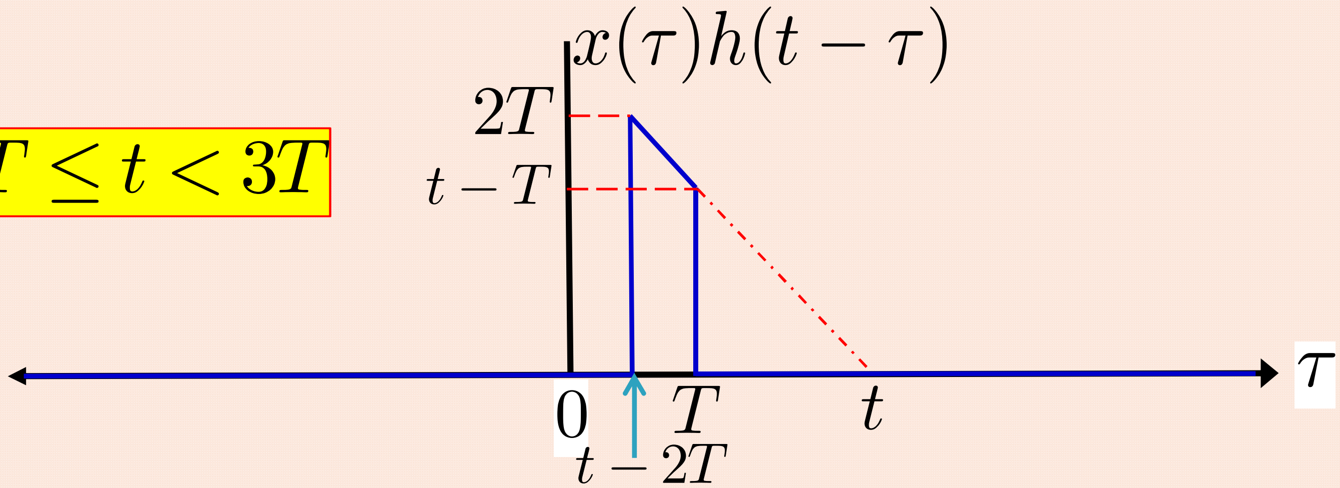


Contoh 2

Interval IV : 2T ≤ t < 3T

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat 2T ≤ t < 3T, terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t-\tau)$ yang tidak nol, yaitu pada interval t-2T ≤ τ ≤ T.
- Pada interval ini diperoleh:

$2T \leq t < 3T$



$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} t-\tau & t-2T < \tau < T \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 2

Interval IV : 2T ≤ t < 3T

- Dengan demikian, diperoleh nilai y(t) untuk 2T ≤ t < 3T:

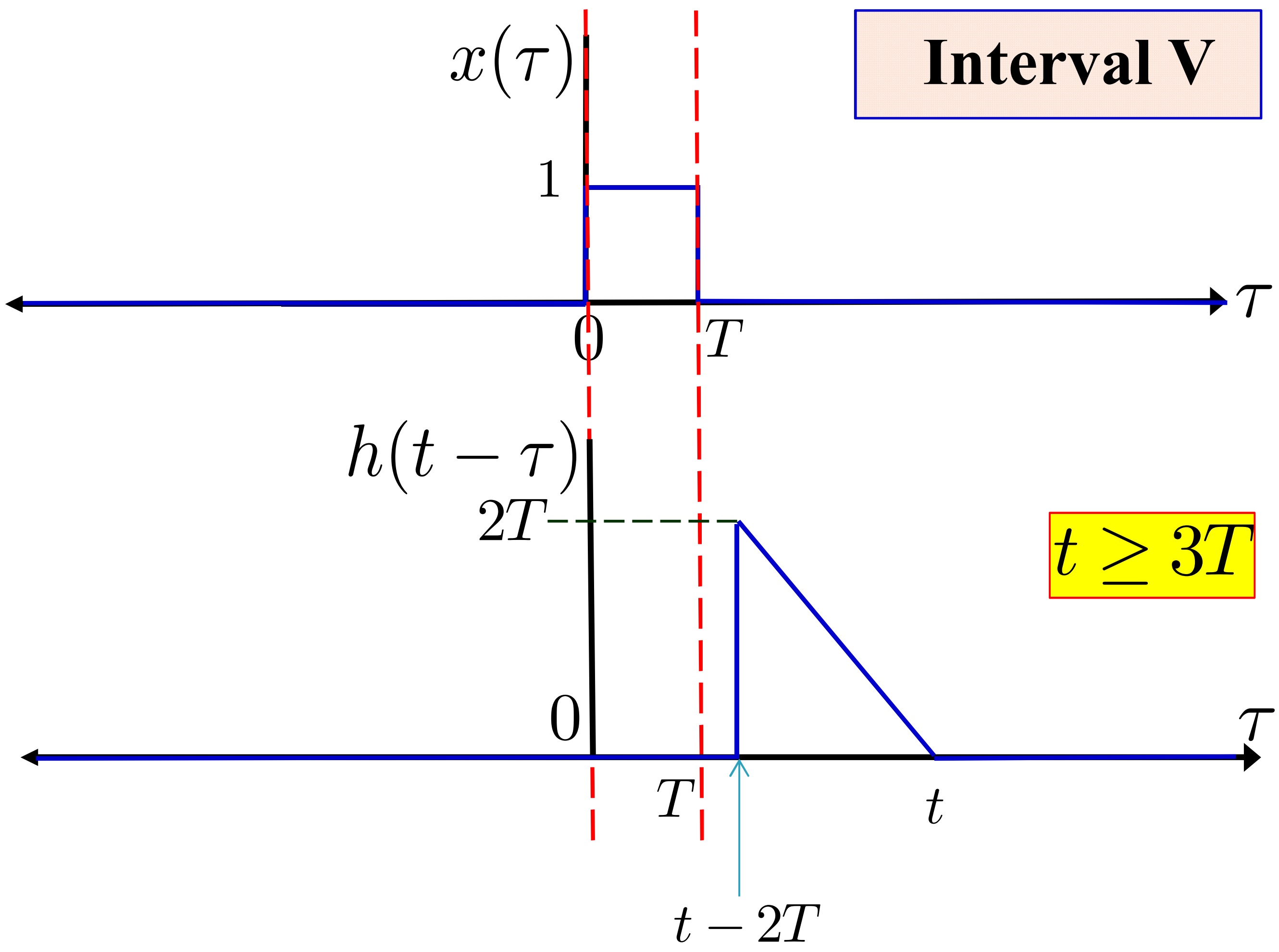
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2T}^{T} (t-\tau)d\tau$$

$$= \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2T}^{T}$$

$$= Tt - \frac{T^2}{2} - (t(t-2T)) + \frac{(t-2T)^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2$$

Contoh 2



Contoh 2

Interval V : t ≥ 3T

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $t \geq 3T$, nilai perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ adalah 0 untuk semua nilai τ karena sama sekali tidak terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t-\tau)$ yang tidak nol.
- Jadi

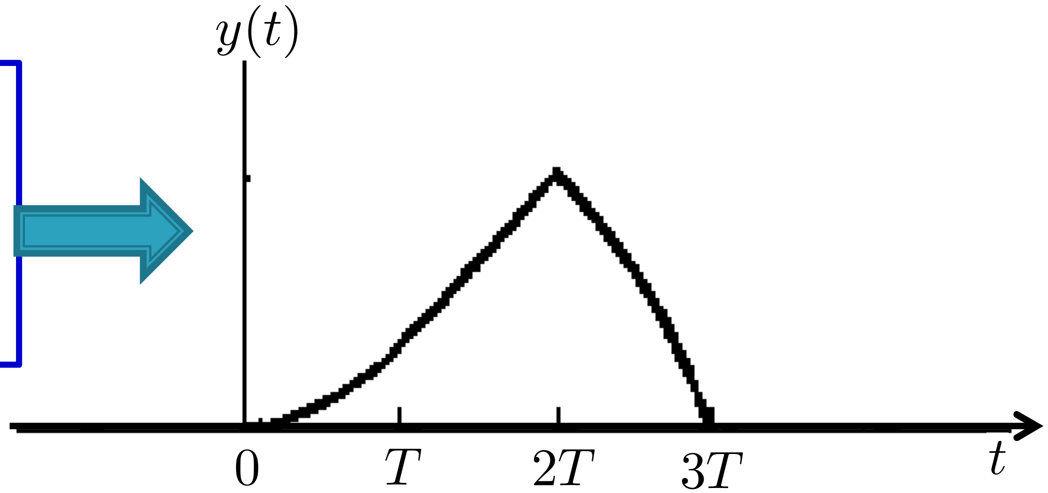
$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \text{untuk } t \geq 3T}$$

Contoh 2

Dengan demikian, keluaran sistem y(t) diberikan oleh:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 \leq t < T \\ Tt - \frac{T^2}{2} & T \leq t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2 & 2T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases}$$

Berikut adalah plot y(t) untuk Contoh 2 di atas.

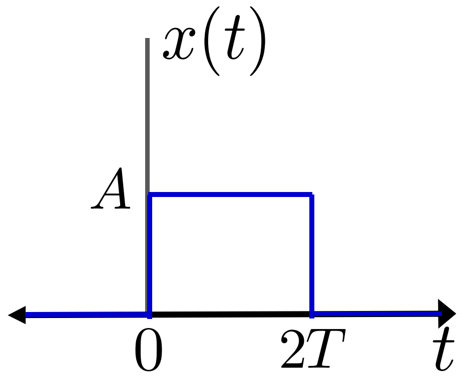


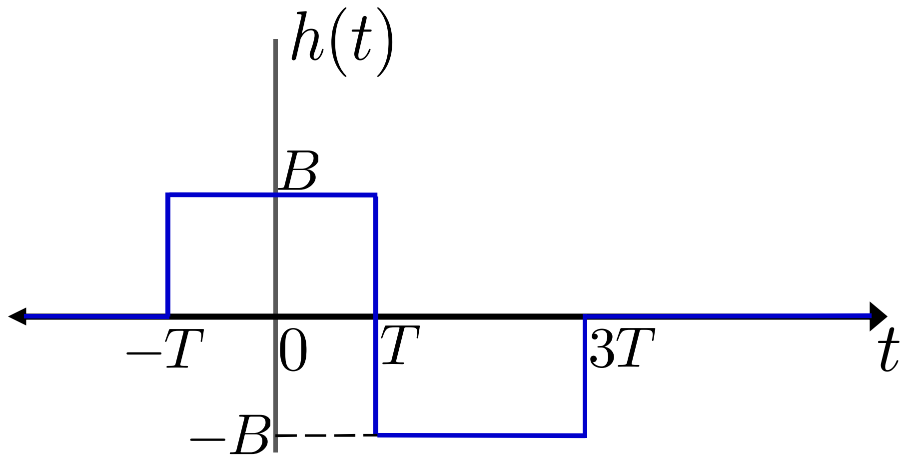
Contoh 3

- Tentukan keluaran sistem LTI waktu kontinu $y(t)$ apabila masukan sistem $x(t)$ dan tanggapan impuls $h(t)$ diberikan berikut ini.

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{nilai } t \text{ lainnya} \end{cases}$$

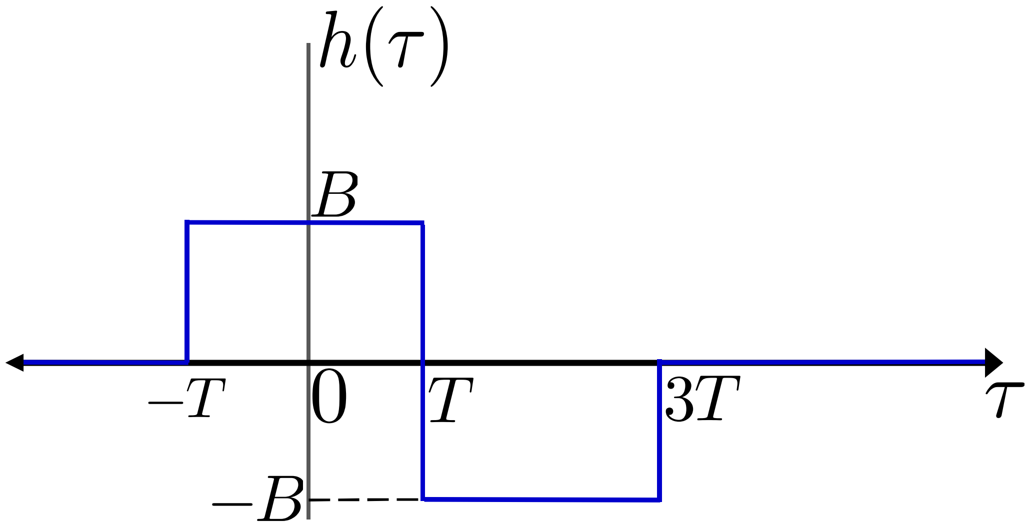
$$h(t) = \begin{cases} B & -T < t < +T \\ -B & +T < t < 3T \\ 0 & \text{nilai } t \text{ lainnya} \end{cases}$$





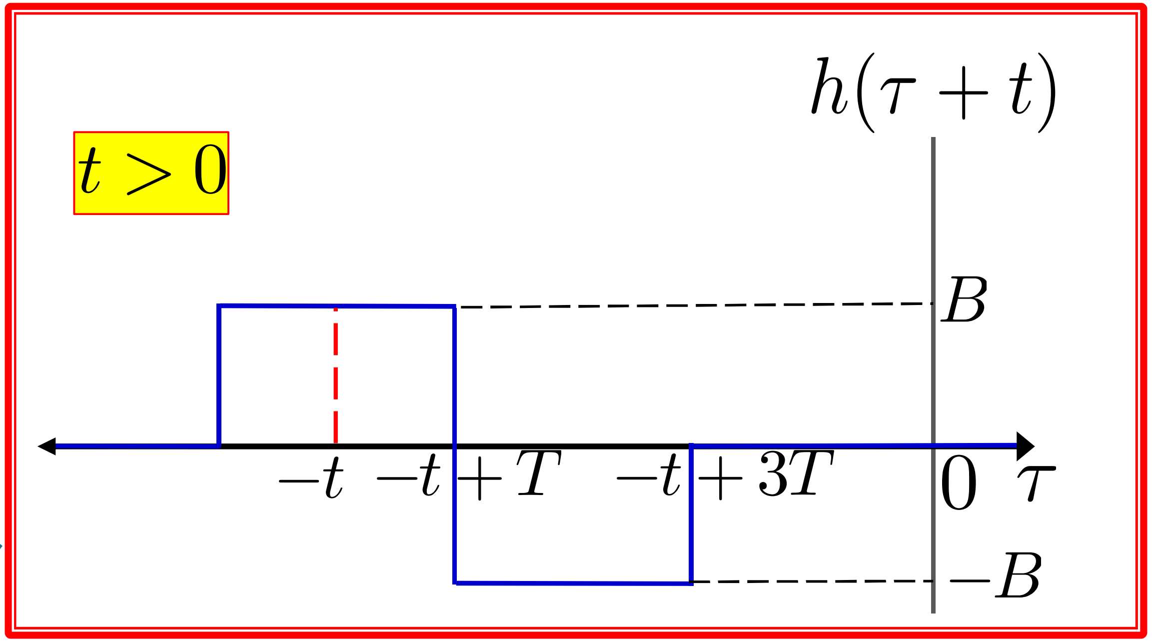
Contoh 3

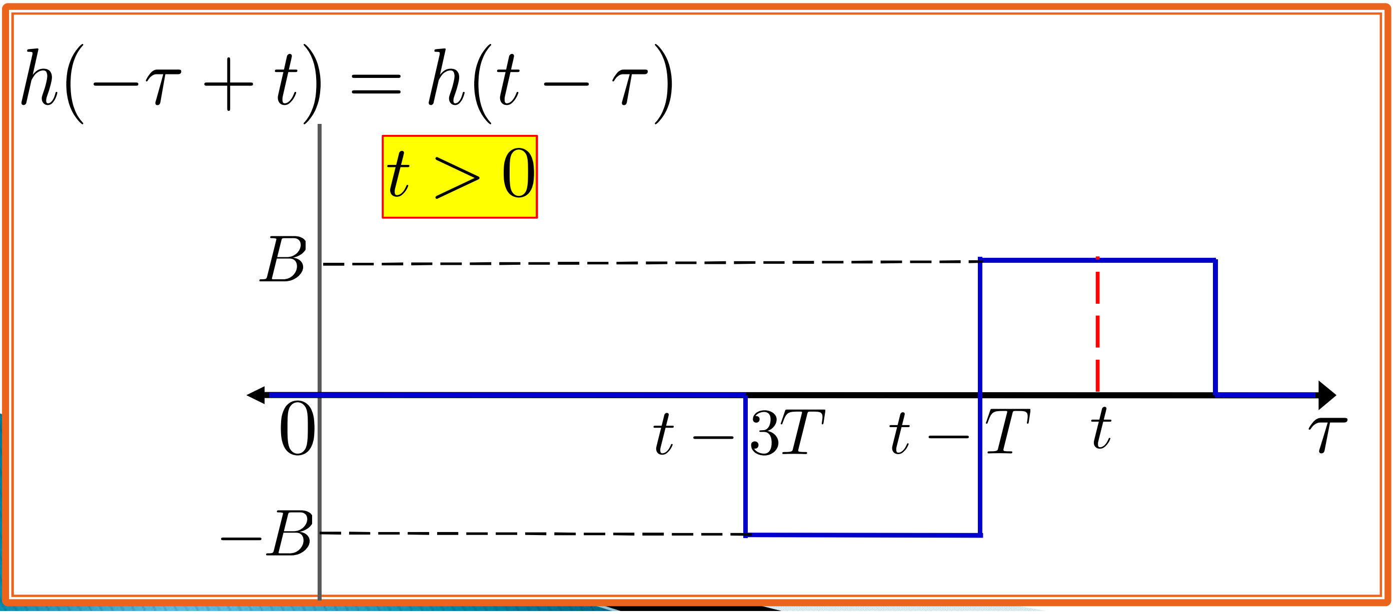
- Berhubung kita akan mengevaluasi hasil perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ sebagai fungsi τ dan untuk berbagai nilai t: kita coba dapatkan plot $h(t-\tau)$ sebagai fungsi τ untuk t positif dan t negatif.



Contoh 3

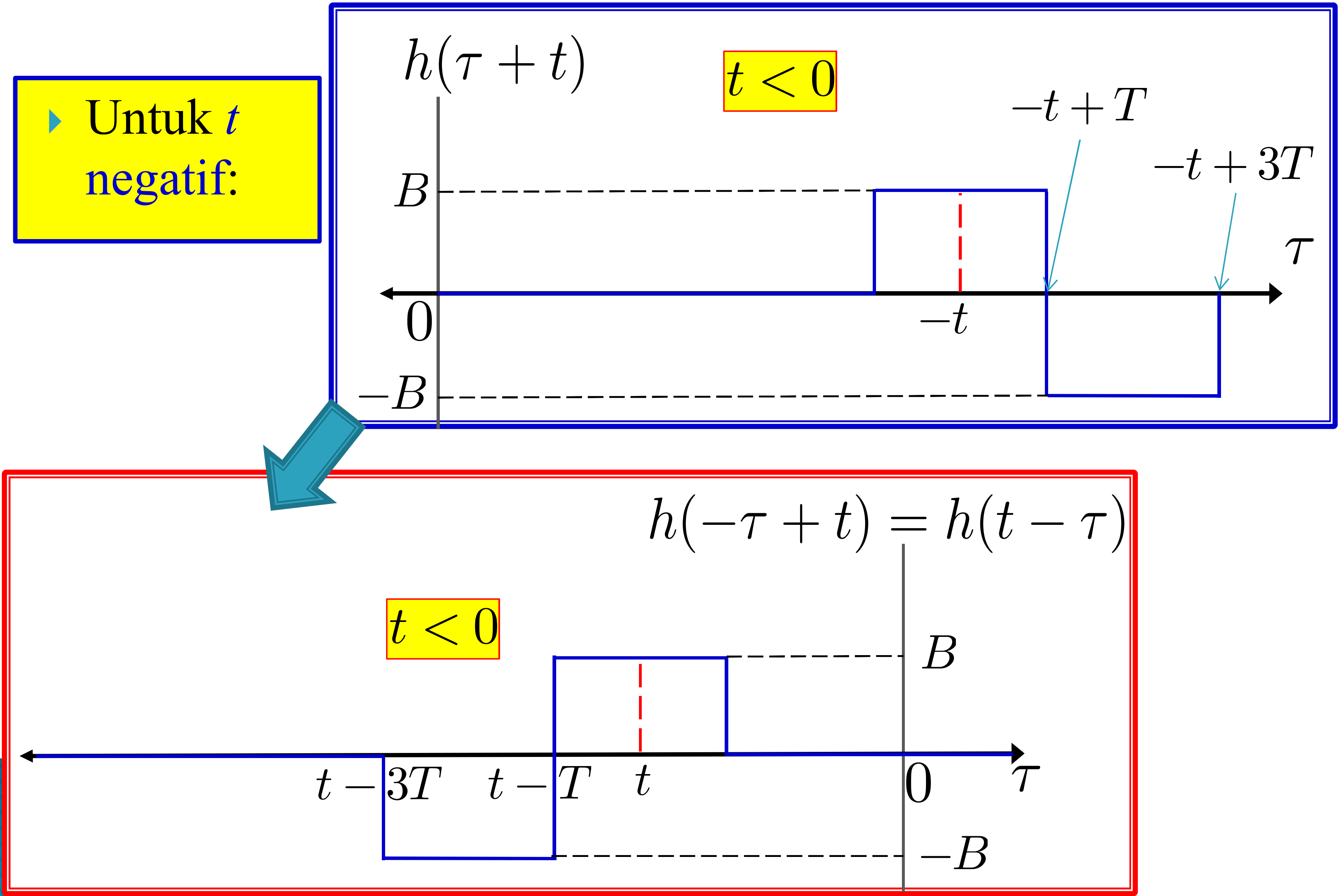
- Untuk *t* positif:





Contoh 3

- Untuk t negatif:



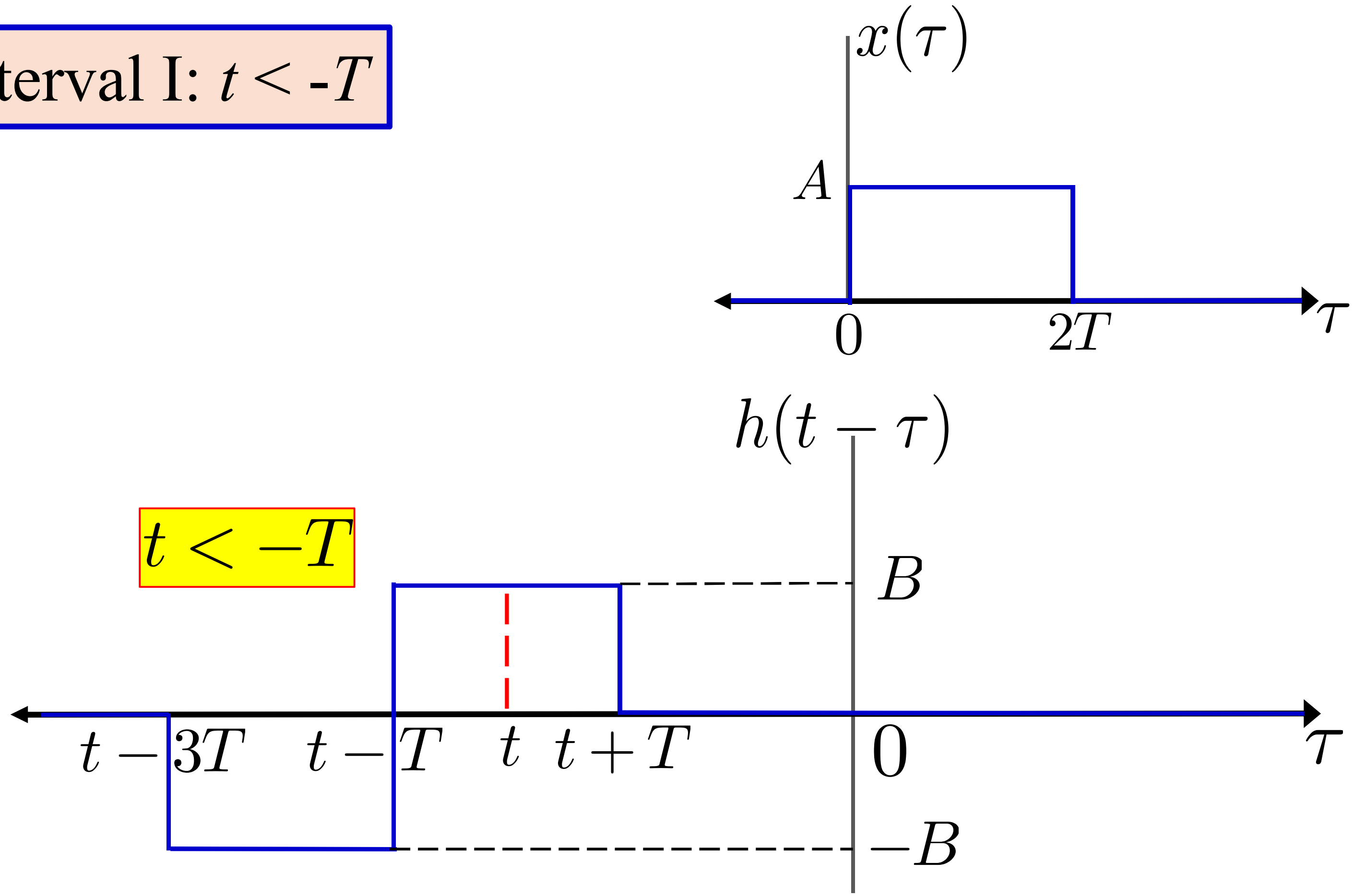
Contoh 3

- Sebagaimana pada contoh sebelumnya, akan lebih mudah jika kita mengevaluasi hasil perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ untuk beberapa interval.
- Artinya, sekali lagi kita harus memiliki intuisi terhadap jumlah interval dan interval mana saja yang akan menghasilkan bentuk kurva $x(\tau)h(t-\tau)$ yang secara signifikan berbeda.

- Berbasiskan pada bentuk $x(\tau)$ dan $h(t-\tau)$, untuk kasus ini akan ada 5 interval yang perlu dipertimbangkan yaitu $t < -T$, $-T \leq t < T$, $T \leq t < 3T$, $3T \leq t < 5T$, dan $t \geq 5T$.

Contoh 3

Interval I: $t < -T$



Contoh 3

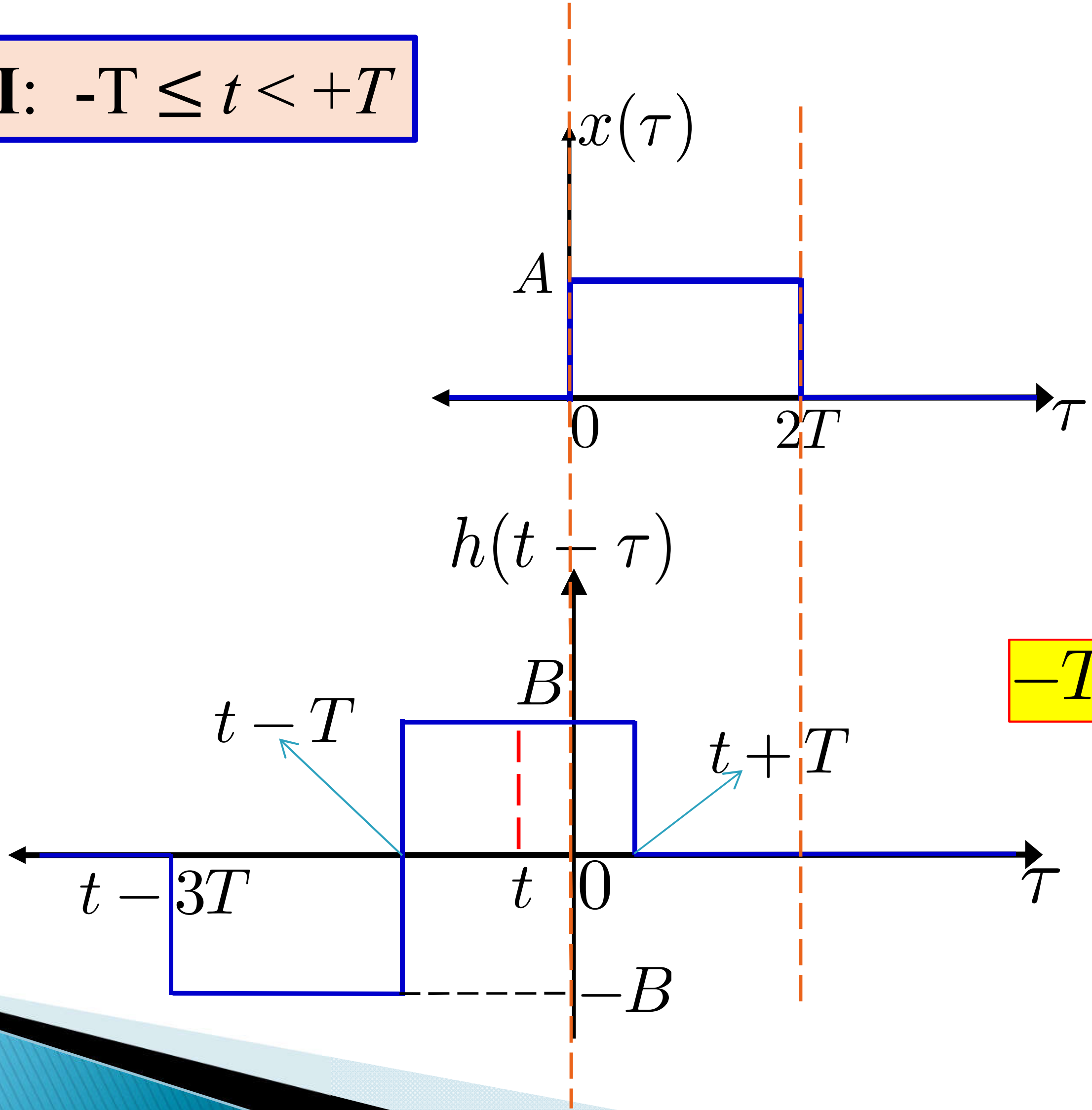
Interval I : $t < -T$

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $t < -T$ maka $t + T < 0$. Pada situasi ini, nilai perkalian $x(\tau)h(t- \tau)$ adalah 0 untuk semua nilai τ karena sama sekali tidak terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t- \tau)$ yang tidak nol.
- Pada situasi ini:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \text{untuk } t < -T}$$

Contoh 3

Interval II: -T ≤ $t < +T$



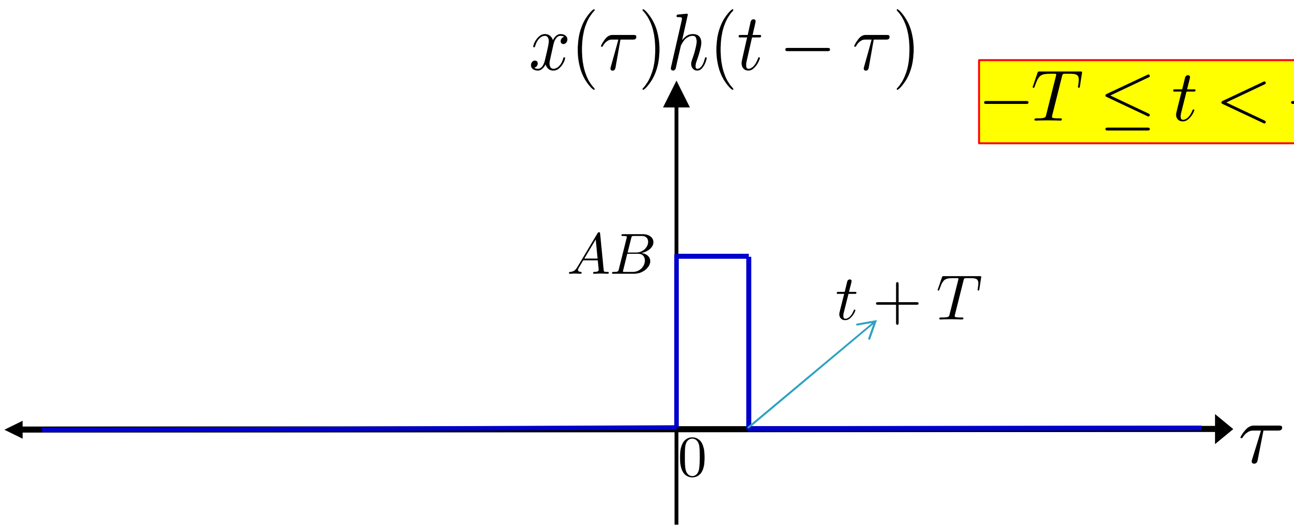
$-T \leq t < +T$

Contoh 3

Interval II: -T ≤ t < T

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat -T ≤ t < T, terdapat overlap antara bagian *x*(τ) yang tidak nol dengan bagian *h*(*t*- τ) yang tidak nol, yaitu pada interval 0 ≤ τ ≤ t + T

- Pada interval ini berlaku:



$-T \leq t < +T$

Contoh 3

Interval II: -T ≤ t < T

Dengan demikian untuk interval ini berlaku:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} AB & 0 \le \tau \le t+T \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

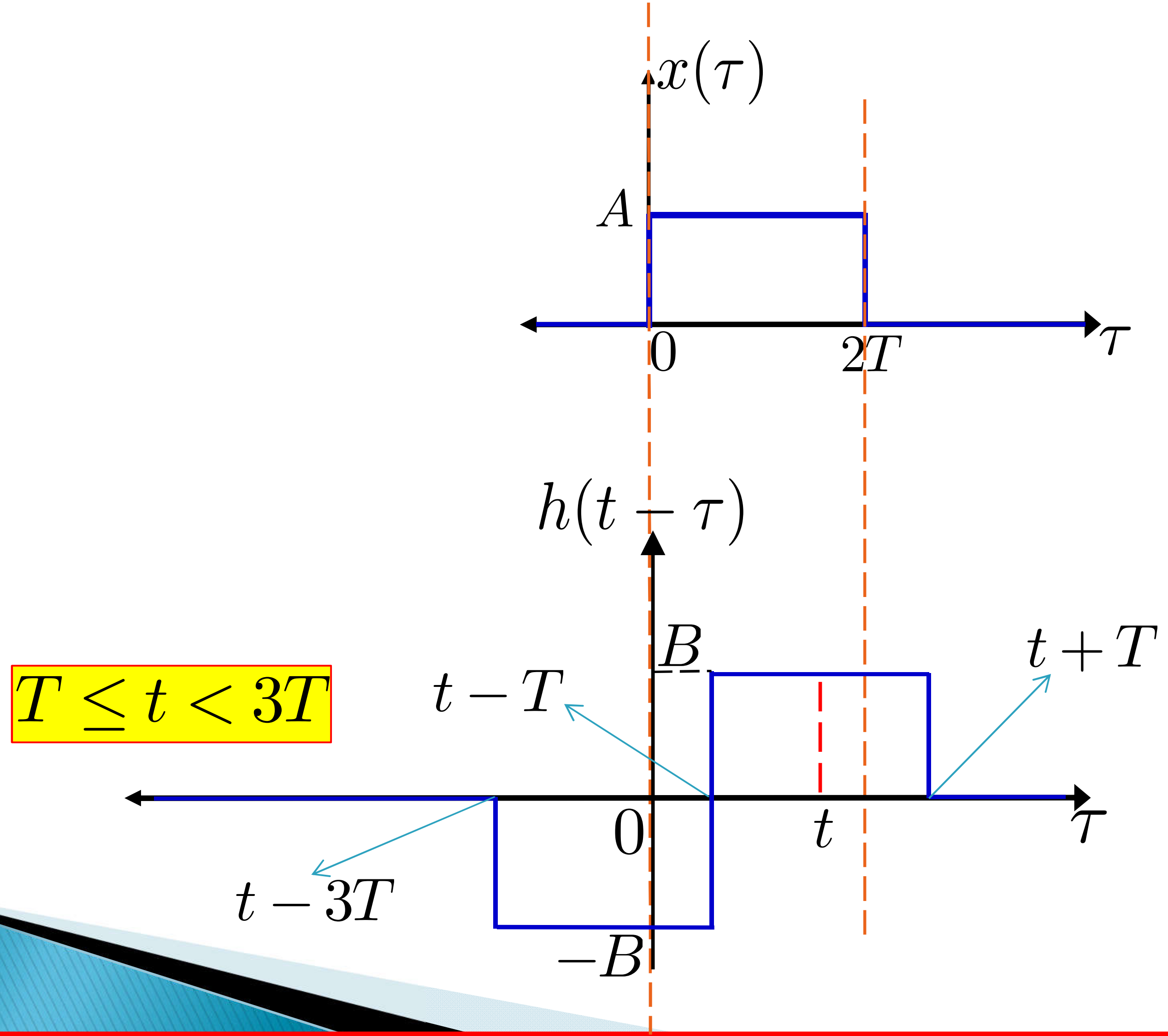
Sehingga diperoleh:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t+T} AB d\tau$$

$$= [AB\tau]_0^{t+T} = AB(t+T)$$

Contoh 3

- **Interval III:** $T \leq t < 3T$



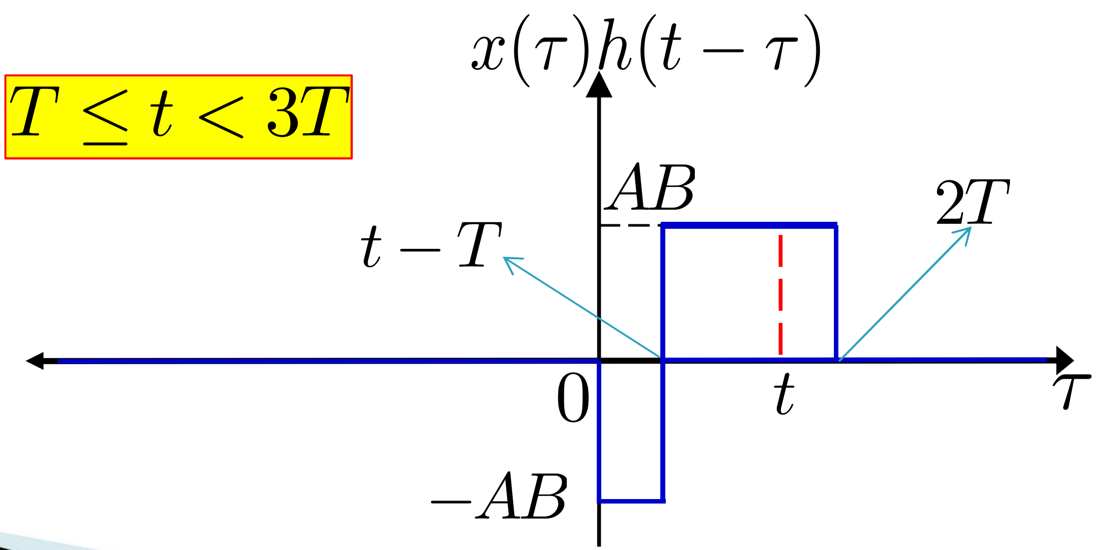
Contoh 3

Interval III: T ≤ t < 3T

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat T ≤ t < 3T, terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t-\tau)$ yang tidak nol, yaitu pada interval $0 \le \tau \le 2T$

- Pada interval ini berlaku:

$T \le t < 3T$



Contoh 3

Interval III: T ≤ t < 3T

Dengan demikian untuk interval ini berlaku:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -AB & 0 < \tau < t-T \\ AB & t-T < \tau < 2T \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

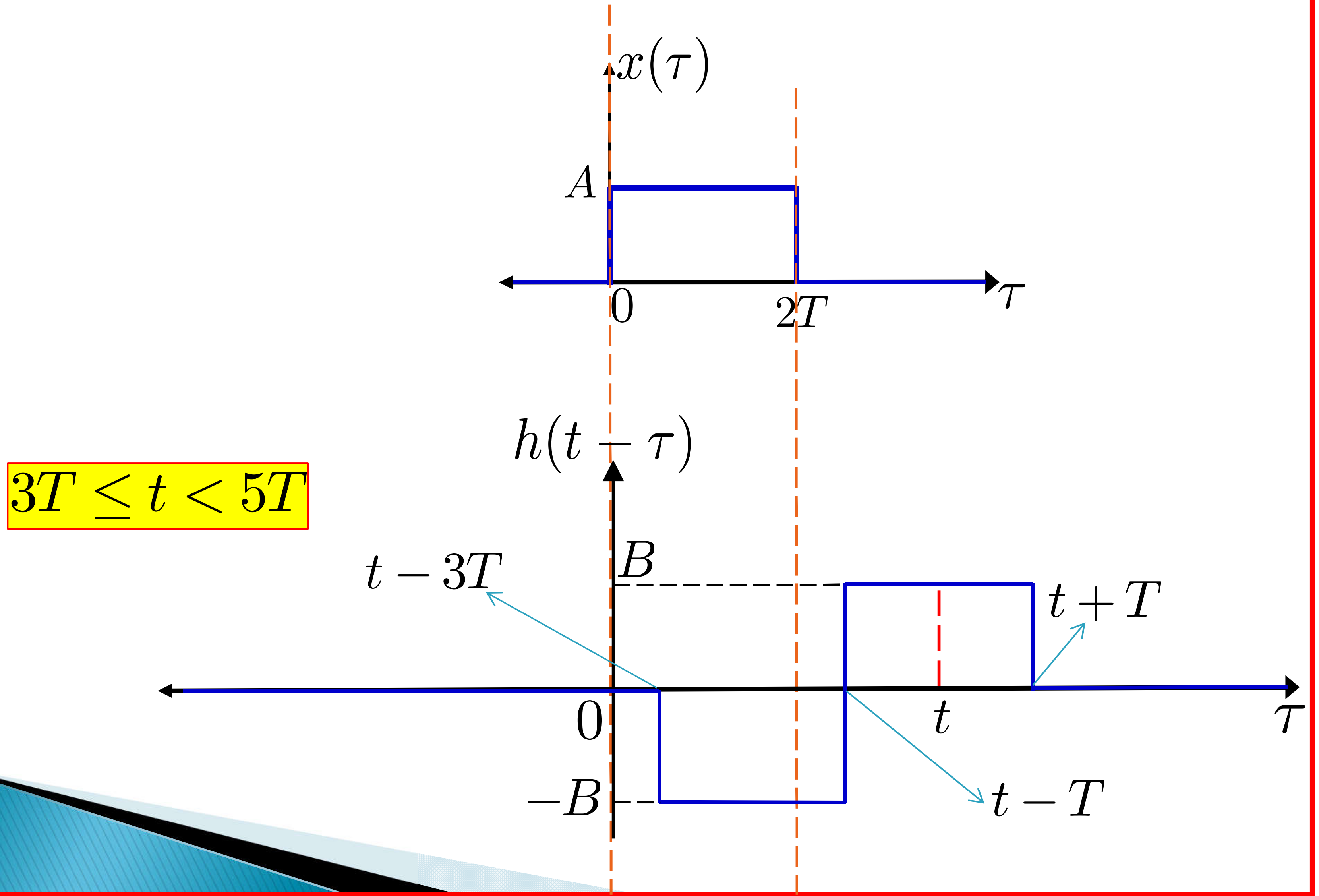
Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{t-T} (-AB)d\tau + \int_{t-T}^{2T} AB d\tau \end{aligned}$$

$$= (t-T)(-AB) + (2T-(t-T))AB = AB(4T-2t)$$

Contoh 3

- **Interval IV:** $3T \leq t < 5T$

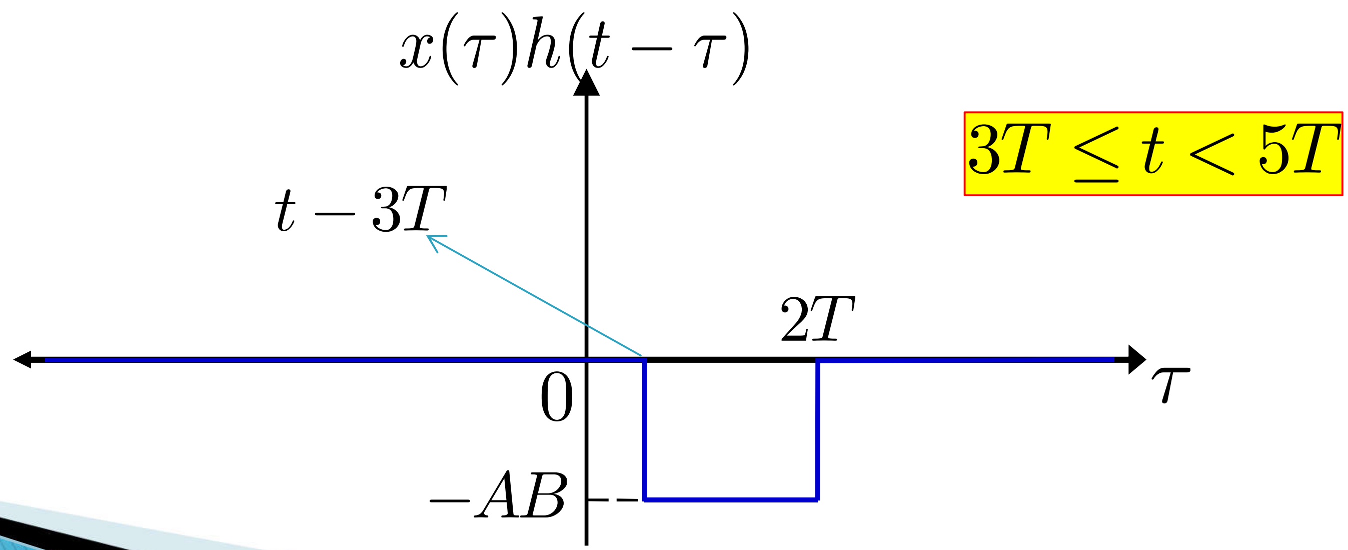


Contoh 3

Interval IV: $3T \leq t < 5T$

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $3T \leq t < 5T$, terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t- \tau)$ yang tidak nol, yaitu pada interval $t\text{-}3T \leq \tau \leq 2T$

- Pada interval ini berlaku:



Contoh 3

Interval IV: $3T \leq t < 5T$

Dengan demikian untuk interval ini berlaku:

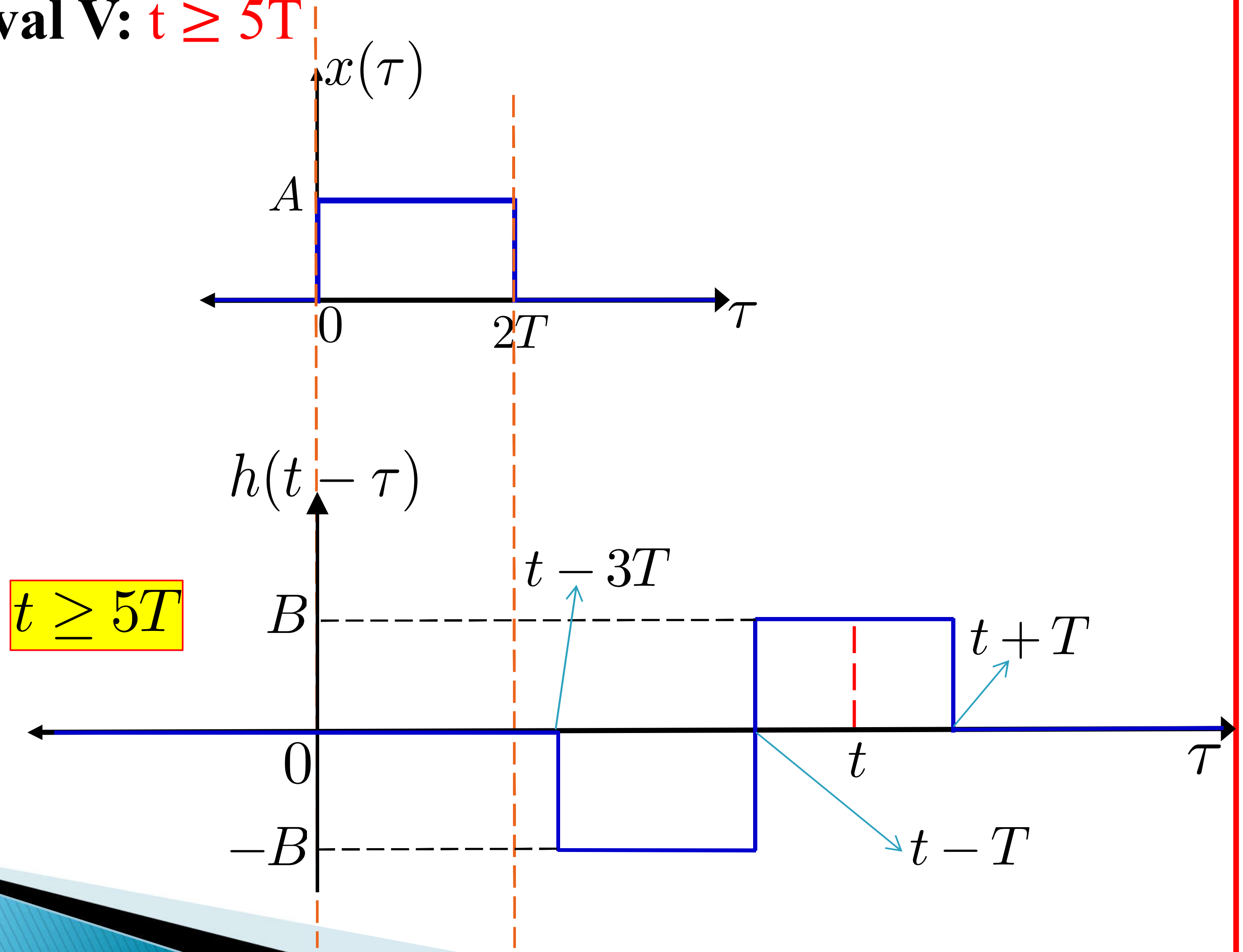
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -AB & t-3T \leq \tau \leq 2T \\ 0 & \text{untuk nilai } \tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-3T}^{2T} -AB d\tau \\ &= [-AB\tau]_{\tau=t-3T}^{\tau=2T} = -AB(2T-(t-3T)) \\ &= AB(t-5T) \end{aligned}$$

Contoh 3

- **Interval V:** $t \geq 5T$



Contoh 3

Interval V : $t \geq 5T$

- Tampak dari gambar di atas bahwa saat $t \geq 5T$ maka $t - 3T \geq 2T$. Pada situasi ini, nilai perkalian $x(\tau)h(t-\tau)$ adalah 0 untuk semua nilai τ karena sama sekali tidak terdapat overlap antara bagian $x(\tau)$ yang tidak nol dengan bagian $h(t-\tau)$ yang tidak nol.
- Pada situasi ini:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \text{untuk } t \geq 5T}$$

Contoh 3

Dengan demikian, keluaran sistem $y(t)$ diberikan oleh:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ AB(T+t) & -T \le t < T \\ AB(4T-2t) & T \le t < 3T \\ AB(t-5T) & 3T \le t < 5T \\ 0 & t \ge 5T \end{cases}$$