Analisis Fourier Bagian Ketiga: Transformasi Fourier untuk Isyarat Waktu Kontinu

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Apakah kita bisa melakukan ekstensi konsep representasi isyarat periodik dengan Deret Fourier ke isyarat aperiodik?
- Sebagian besar isyarat aperiodik bisa juga direpresentasikan melalui kombinasi linear isyarat eksponensial kompleks.

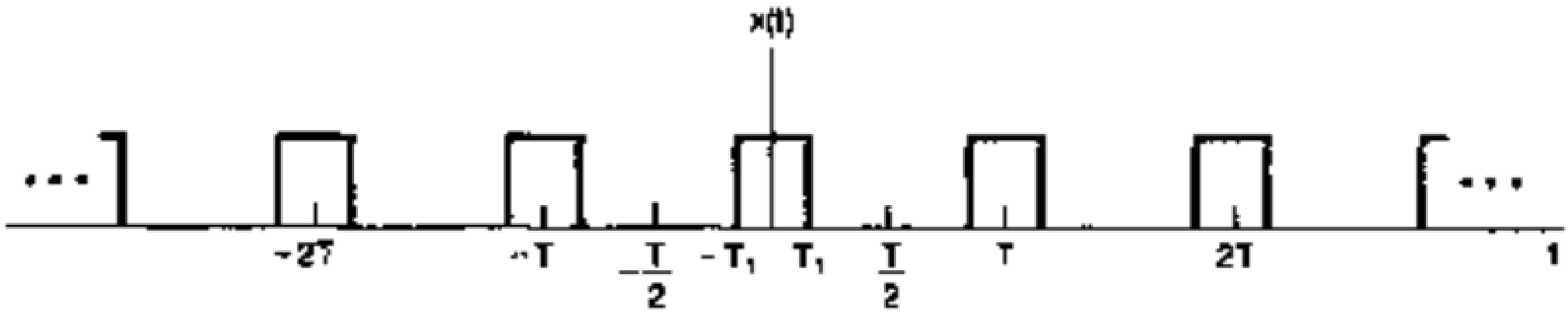
- Untuk isyarat periodik, isyarat eksponensial kompleks yang menjadi basis sifatnya **harmonically related**.
- Untuk isyarat aperiodik, isyarat eksponensial kompleks yang menjadi basis bisa memiliki **frekuensi yang sangat berdekatan** (infinitesimally close)

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Untuk lebih jelasnya, tinjau kembali **isyarat kotak periodik** pada Contoh 3.5 Buku Oppenheim (cek Contoh pada PPT materi lalu)

- $x(t)$ memiliki periode T. Definisi $x(t)$ untuk 1 perioda pada contoh tsb

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



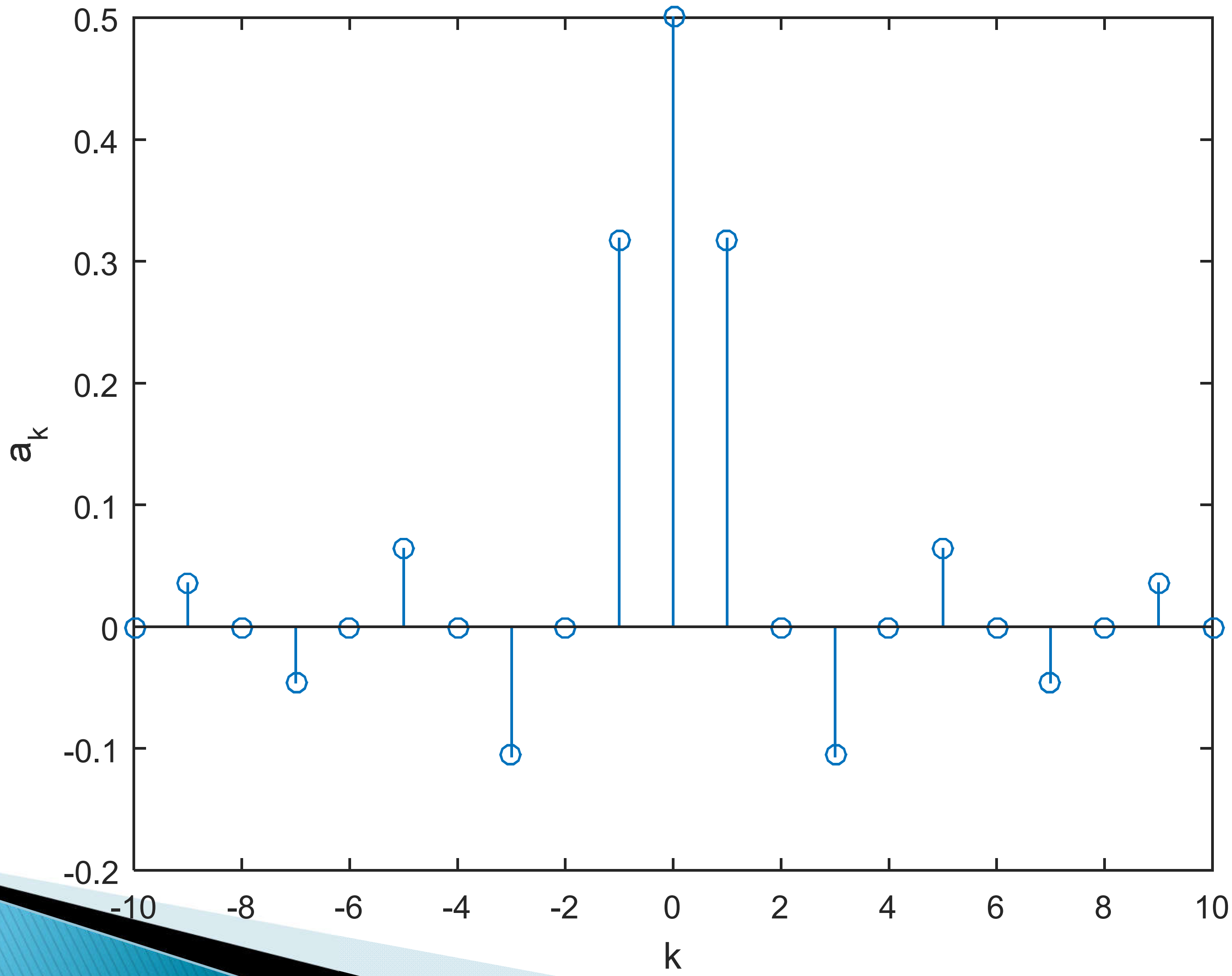
Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Telah diperoleh dari materi sebelumnya bahwa **koefisien deret Fourier** bagi $x(t)$ di atas:

$$\boxed{a_0 = \frac{2T_1}{T}} \qquad \boxed{a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad k \neq 0 \quad (1)}$$

- Di mana $\omega_0 = 2\pi/T$.
- Plot dari a_k untuk $T = 4T_1$ ditunjukkan pada gambar pada slide berikut.

Koefisien Deret Fourier Isyarat Kotak $(T = 4T_1)$



Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Pada tahap ini bayangkan suatu fungsi sinc yang diberikan oleh

$$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} \qquad (1a)$$

- Dari persamaan (1) mengenai deret Fourier bisa dituliskan

$$Ta_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}, \quad k \neq 0 \qquad (1b)$$

- Dengan mempertimbangkan (1a)-(1b), koefisien Deret Fourier pada (1) di atas bisa diterjemahkan sebagai sampel-sampel dari suatu **fungsi envelope (selubung)** pada (1a).

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Koefisien Deret Fourier pada pers. (1) di atas bisa diterjemah-kan sebagai sampel-sampel dari suatu **fungsi envelope (selubung)** yang bisa dituliskan:

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0} \qquad (2)$$

- Dengan demikian pada (2):
  - ω dapat dipandang sebagai variabel kontinu
  - Fungsi $(2 \sin \omega T_1) / \omega$ merepresentasikan **envelope (selubung)** bagi Ta_k pada (2)
  - Sedangkan a_k (atau Ta_k) tidak lain adalah sampel-sampel dari selubung dengan jarak sampel yang seragam.
  - Proses sampling dilakukan pada frekuensi-frekuensi $\omega = k\omega_0$

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Tampak bahwa untuk nilai T_1 yang tetap, fungsi selubung bagi Ta_k yaitu $(2 \sin\omega T_1) / \omega$ tidak bergantung pada T
- Pada Gambar 4.2 Buku Oppenheim (lihat slide berikut), koefisien deret Fourier a_k bagi gelombang kotak periodik dikalikan dengan Faktor T => digambarkan sebagai **sampel-sampel dari fungsi selubung** bagi Ta_k.

- Tampak pada gambar bahwa seiring naiknya T:
  - **Fungsi selubung** tidak berubah (cukup jelas! Mengapa?)
  - Frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ **turun**
  - Sampel-sampel dalam selubung semakin banyak dan semakin dekat jaraknya

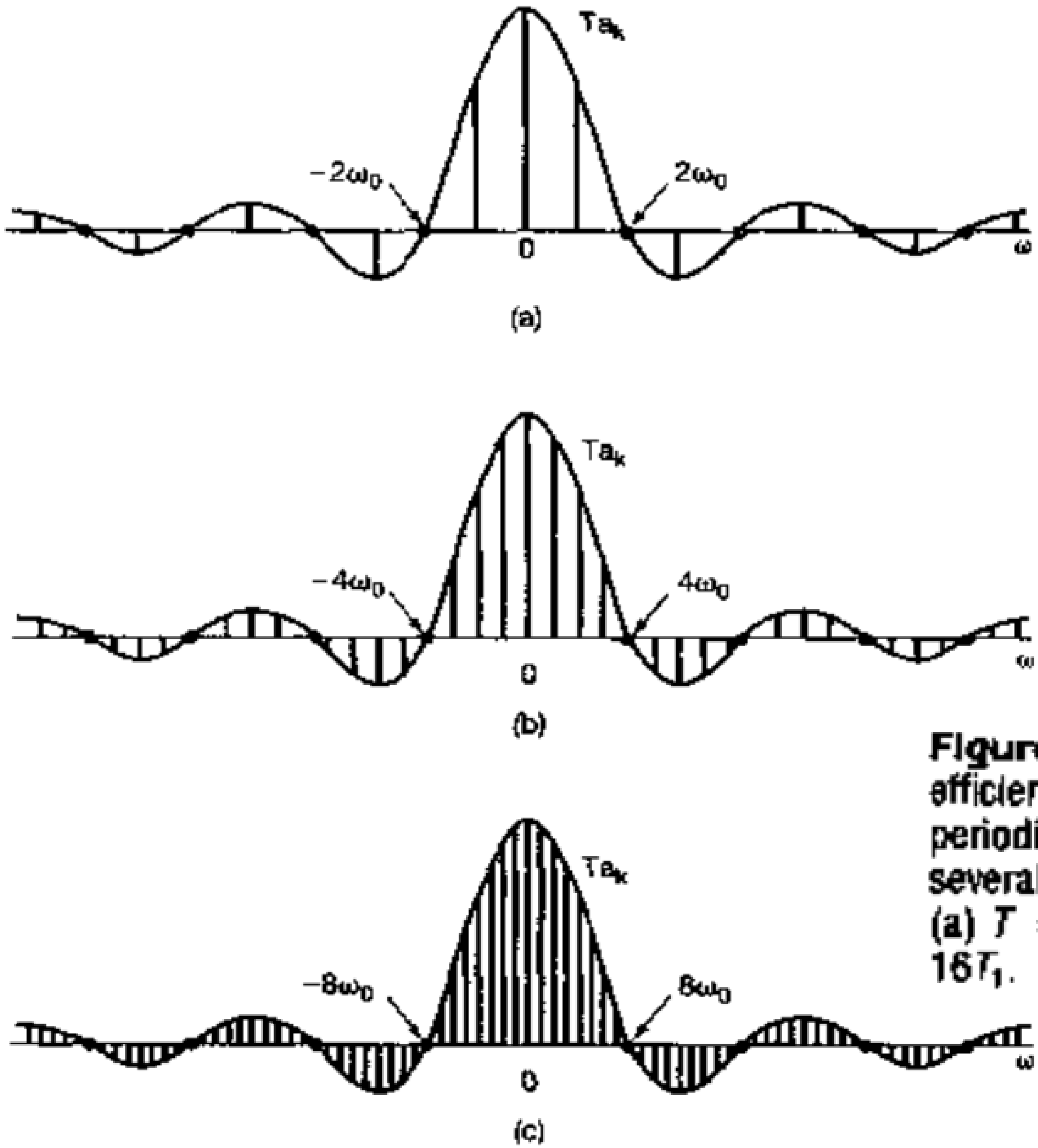


Figure 4.2 The Fourier series coefficients and their envelope for the periodic square wave in Figure 4.1 for several values of T (with T_1 fixed). (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Seiring T terus meningkat mendekati ∞:
  - Frekuensi fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ mendekati nol
  - Otomatis **komponen frekuensi harmonik** (kelipatan dari ω_0), yaitu $k\omega_0$ (dengan k = ± 2, ± 3, dst) juga semakin kecil.
  - Akibatnya di kawasan frekuensi, jarak antar komponen harmonik semakin berdekatan satu sama lain.
  - Isyarat kotak periodik seolah menjadi isyarat kotak tunggal yang tidak periodik karena jarak antara kotak yang satu dan yang lain mendekati tak hingga.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Seiring T terus meningkat mendekati ∞:
  - Sampel-sampel pada **fungsi selubung** yang tak lain adalah Koefisien Deret Fourier a_k dikalikan T (Ta_k) semakin **banyak dan berdekatan** hingga jarak satu sama lain mendekati nol
  - Saat $T \to \infty$, Koefisien deret Fourier dikalikan T (Ta_k) **mendekati fungsi selubung** itu sendiri.
  - Di kawasan waktu, Isyarat kotak periodik menjadi isyarat kotak aperiodik karena periode isyarat ∞, jarak antar kotak menjadi ∞ pula

- Contoh di atas memberikan gambaran dasar mengenai representasi bagi isyarat aperiodik

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Isyarat aperiodik dapat digambarkan sebagai isyarat periodik dengan limit periode mendekati ∞.
- Seiring dengan makin dekatnya periode dengan nilai ∞, kita bisa mengevaluasi apa yang terjadi pada representasi deret Fourier bagi isyarat periodik ini.

- Perhatikan isyarat aperiodik $x(t)$ pada gambar di slide berikut
- Tampak bahwa $x(t) = 0$ untuk $|t| > T_1$.

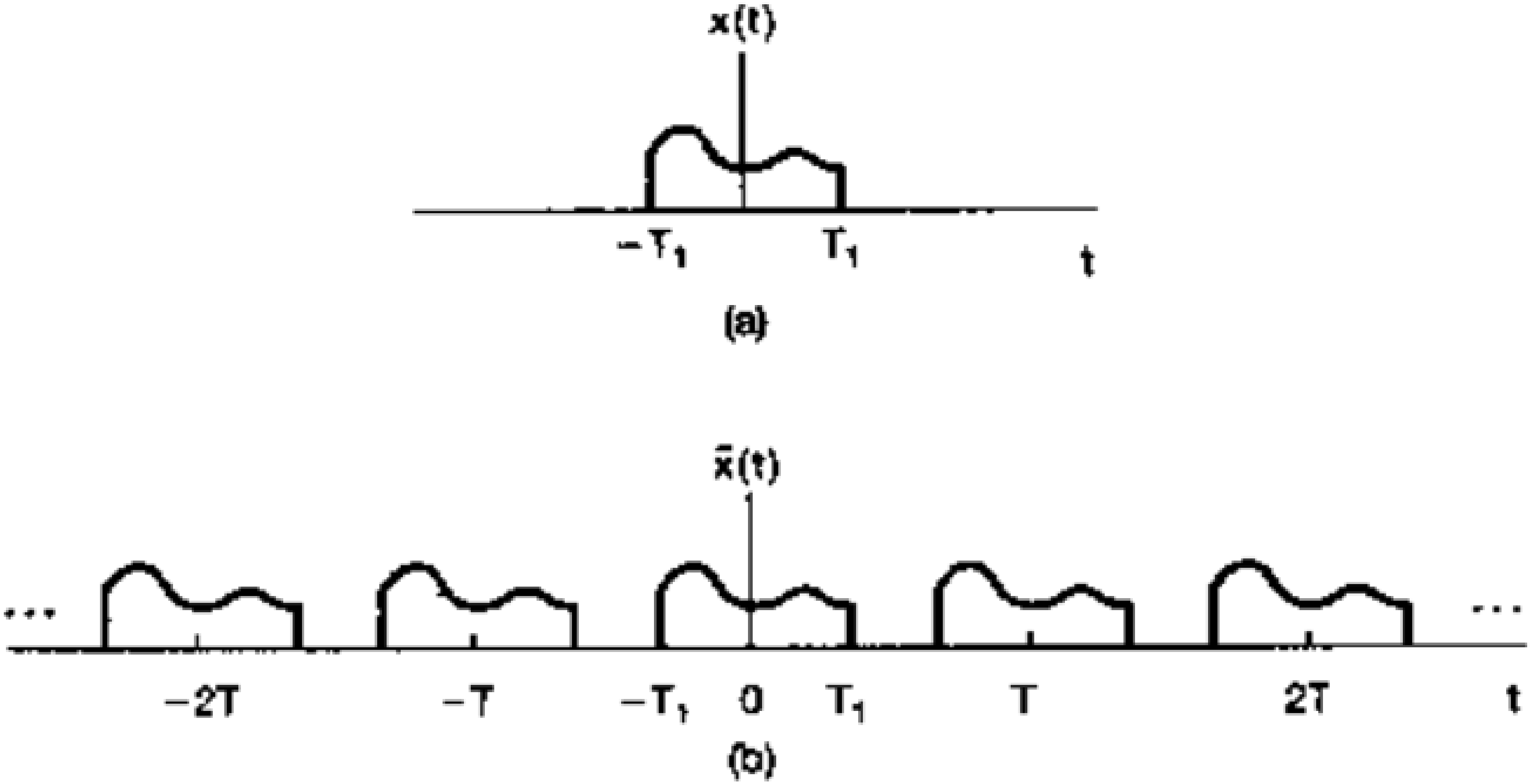


Figure 4.3 (a) Aperiodic signal $x(t)$; (b) periodic signal $\tilde{x}(t)$, constructed to be equal to $x(t)$ over one period.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Tampak bahwa untuk isyarat aperiodik $x(t)$ pada gambar (a) dapat dikonstruksi isyarat periodik $\tilde{x}(t)$ pada gambar (b) sedemikian hingga $x(t)$ adalah **versi 1 periode** dari $\tilde{x}(t)$.
- Saat periode T mendekati tak hingga, $\tilde{x}(t)$ akan identik dengan $x(t)$.

- Karena $\tilde{x}(t)$ pada Gambar 4.3 periodik maka $\tilde{x}(t)$ bisa direpresentasikan dalam deret Fourier (asumsi Kondisi Dirichlet terpenuhi)
- Pertanyaannya bagaimana efeknya terhadap representasi deret Fourier bagi $\tilde{x}(t)$, jika T makin besar dan akhirnya mendekati ∞.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Dengan mengingat persamaan analisa dan sintesa untuk Deret Fourier, representasi untuk isyarat periodik $\tilde{x}(t)$ pada Gambar 4.3 bisa dituliskan (dengan $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (3)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad (4)$$

- Berhubung $\tilde{x}(t) = x(t)$ untuk $|t| < T/2$ dan $x(t) = 0$ untuk $|t| > T/2$, maka (4) bisa dituliskan sebagai:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5)$$

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Tampak dari (5) bahwa

$$\boxed{Ta_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad (5a)}$$

- Jika didefinisikan fungsi selubung bagi Ta_k pada (5a) (layaknya selubung bagi Ta_k pada isyarat kotak pada contoh sebelumnya) sebagai $X(j\omega)$ yaitu:

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (6)}$$

- Maka tampak dari (5), (5a), dan (6) bahwa:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0) \quad (7)}$$

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Dengan mensubstitusikan a_k pada (7) ke (3), maka $\tilde{x}(t)$ dapat diekspresikan sebagai fungsi $X(j\omega)$ sebagai

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \qquad (8)$$

- Mengingat $\omega_0 = 2\pi/T$, maka (8) menjadi:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0. \qquad (9)$$

- Saat $T \to \infty$, $\tilde{x}(t)$ mendekati $x(t)$. Artinya, pada limit $T \to \infty$, representasi (9) juga mendekati representasi untuk $x(t)$.

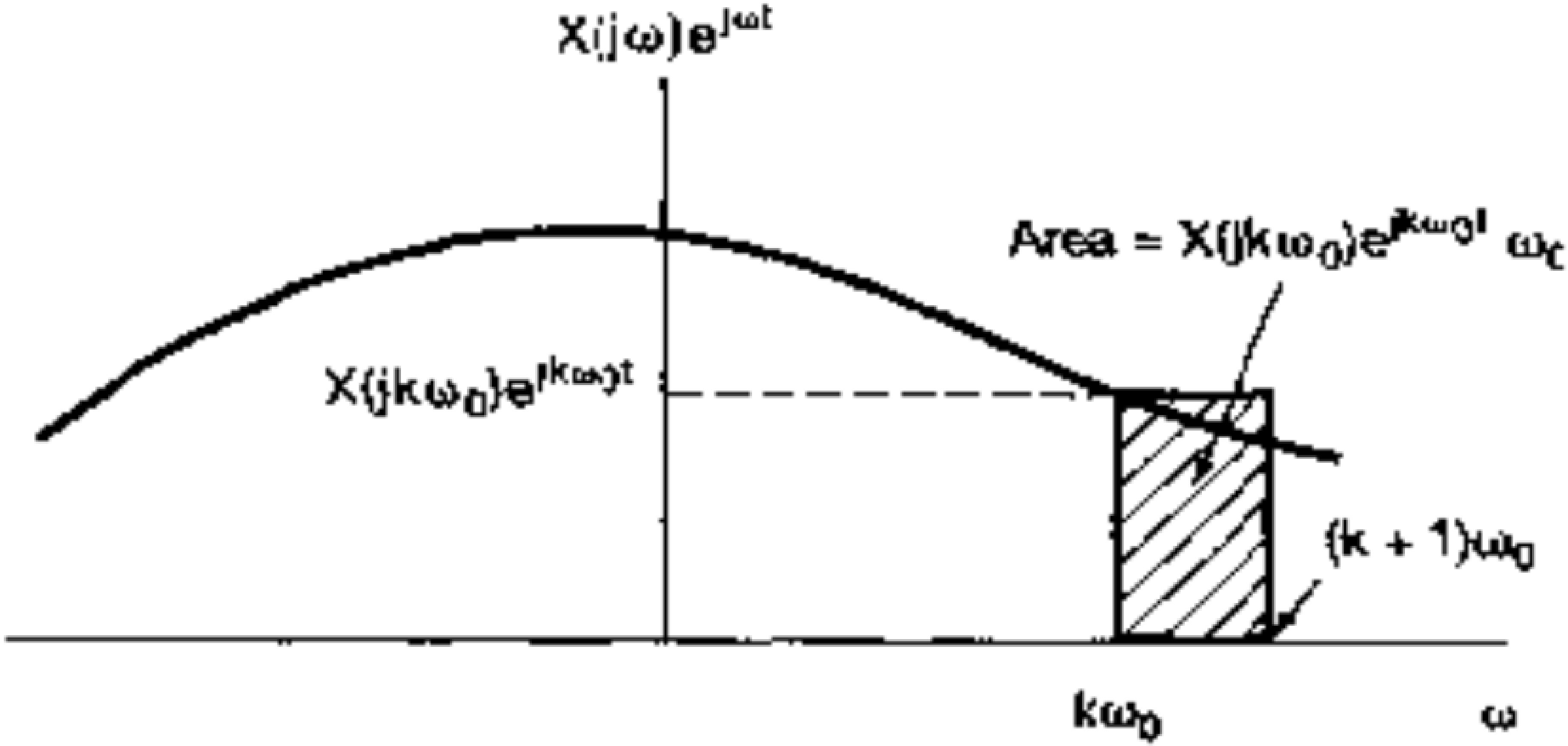
Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Di samping itu, saat $T \to \infty$ maka $\omega_0 \to 0$, sehingga operasi jumlahan pada ruas kanan persamaan (9) menjadi **operasi integral**.
- Hal ini cukup jelas pada gambar di slide berikut.

- Tampak setiap **suku pada jumlahan** di ruas kanan (9) memiliki kontribusi sebesar luasan persegi panjang dengan tinggi $X(jk\omega_0)\exp(jk\omega_0 t)$ dan lebar ω_0 sebagaimana ditunjukkan di slide berikut.
- Di sini nilai t diset tetap.

- Saat $\omega_0 \to 0$, operasi jumlahan pada (9) konvergen ke **operasi integral** terhadap $X(j\omega)e^{j\omega t}$.

Representasi Grafis untuk Pers. (9)



Diambil dari Signal & System, 2nd Edition, Oppenheim & Willsky

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Dengan menggunakan informasi bahwa seiring $T \to \infty$, maka $\tilde{x}(t) \to x(t)$, dapat disimpulkan bahwa persamaan (9) dan (6) berturut-turut menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (10)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11)$$

- Pasangan (10) dan (11) dikenal dengan pasangan Transformasi Fourier.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Pers. (11) dikenal dengan **Transformasi Fourier** dari $x(t)$
- Pers. (10) dikenal dengan **Invers Transformasi Fourier**

- Pers. (10) merupakan **persamaan Sintesis** (serupa dengan persamaan Sintesis pada kasus Deret Fourier)
- Pers. ini merepresentasikan **isyarat aperiodik** sebagai kombinasi linear dari isyarat-isyarat eksponensial kompleks.
- Bedanya eksponensial kompleks yang terlibat di sini seolah tidak hanya untuk eksponensial kompleks yang frekuensinya harmonically related.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Fungsi complex exponential yang dilibatkan dalam proses kombinasi linear pada persamaan sintesis (Invers Transformasi Fourier) meliputi isyarat complex exponential pada seluruh frekuensi kontinu.
- Tampak pada (10) bahwa bobot kombinasi linear untuk komponen isyarat berfrekuensi ω adalah $X(j\omega)d\omega/2\pi$ (bandingkan dengan a_k pada kasus deret Fourier)

- $X(j\omega)$ yang mengindikasikan bobot dari isyarat complex exponential berfrekuensi ω pada persamaan sintesis => sering disebut **spektrum dari** $x(t)$ atau representasi $x(t)$ pada kawasan Frekuensi.

Isyarat Aperiodik dan Transformasi Fourier

- Bentuk representasi kombinasi linear tidak lagi menggunakan notasi sum (sigma) melainkan integral.
- Hasil representasi spektrum dari koefisien dikenal dengan **Fourier Transform** (Transformasi Fourier).

Transformasi Fourier

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

Persamaan Sintesis (Inverse Fourier Transform)

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

Persamaan Analisis (Fourier Transform)

Kondisi untuk Transformasi Fourier

- Mirip dengan kasus isyarat periodik, isyarat aperiodik $x(t)$ dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linear isyarat complex exponential pada frekuensi kontinu jika dipenuhi **Kondisi Dirichlet**

- Kondisi Dirichlet-1: $x(t)$ harus absolutely integrable, artinya:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty}$$

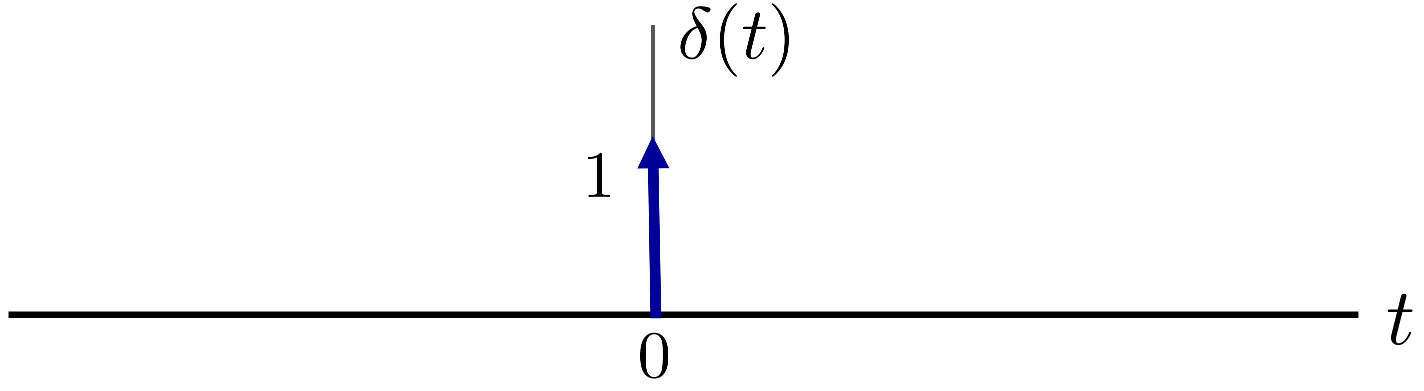
Kondisi untuk Transformasi Fourier

- Kondisi Dirichlet-2: Pada setiap interval waktu yang terbatas (any finite interval of time), jumlah variasi $x(t)$ terbatas. Artinya jumlah titik puncak (maksima dan minima) pada setiap finite interval harus terbatas.

- Kondisi Dirichlet-3: Pada setiap interval tertentu, jumlah diskontinuitas harus terbatas. Kemudian, ukuran masing-masing diskontinuitas tersebut harus terbatas pula.

Contoh 1

- Tentukan transformasi Fourier (atau dengan kata lain representasi pada kawasan frekuensi) dari impuls satuan (diract atau delta function)



- Ingat bahwa, secara teoritis, δ(*t*) tidak memiliki lebar atau durasi namun memiliki luasan 1 => **tinggi** δ(*t*) **<u>tak berhingga</u>**!

Contoh 1

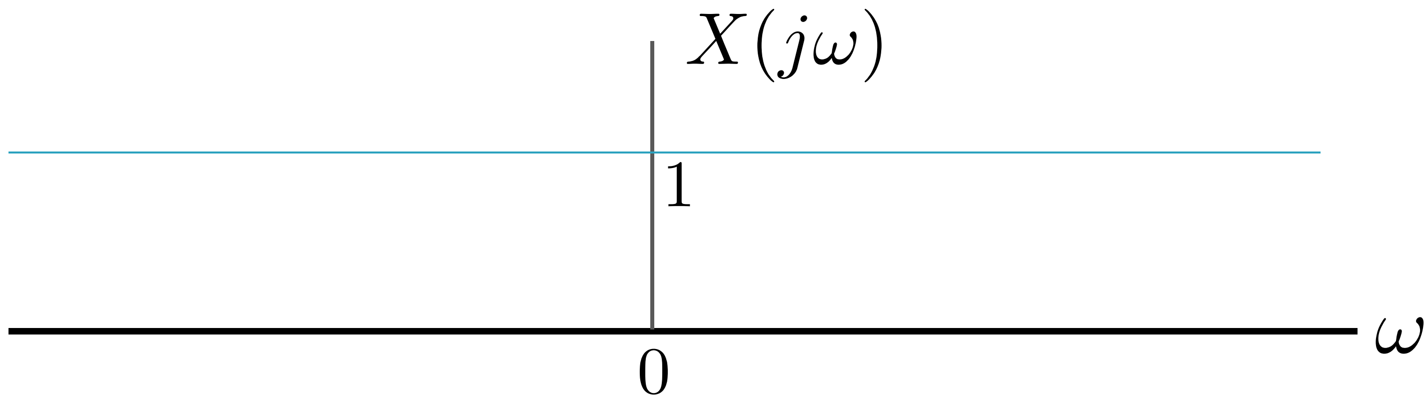
- Kita kenakan persamaan analisis (11) (Transformasi Fourier) pada fungsi di atas.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

- Hasil di atas diperoleh mengingat $\delta(t)$ adalah fungsi bernilai luasan 1 saat $t = 0$ dan 0 saat $t \neq 0$.
- Dengan demikian, saat impuls satuan direpresentasikan sebagai kombinasi linear eksponensial kompleks, maka seluruh eksponensial kompleks dengan berbagai frekuensi harus memberikan kontribusi yang sama yaitu 1.

Contoh 1

- **Representasi di kawasan frekuensi** (X(*j*ω)) bagi isyarat impuls satuan δ(*t*) di atas digambarkan sebagai berikut



- Dengan demikian, arti kata representasi di kawasan frekuensi adalah gambaran seberapa besar kontribusi tiap-tiap eksponensial kompleks dengan frekuensi tertentu dalam menyusun isyarat di kawasan waktu *x*(*t*)
- Pada kasus isyarat δ(*t*), kontribusi tiap frekuensi sama besar.

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Pada bahasan sebelumnya kita sudah membahas representasi Transformasi Fourier untuk isyarat aperiodik.
- Sedangkan untuk isyarat periodik, kita menggunakan representasi deret Fourier.

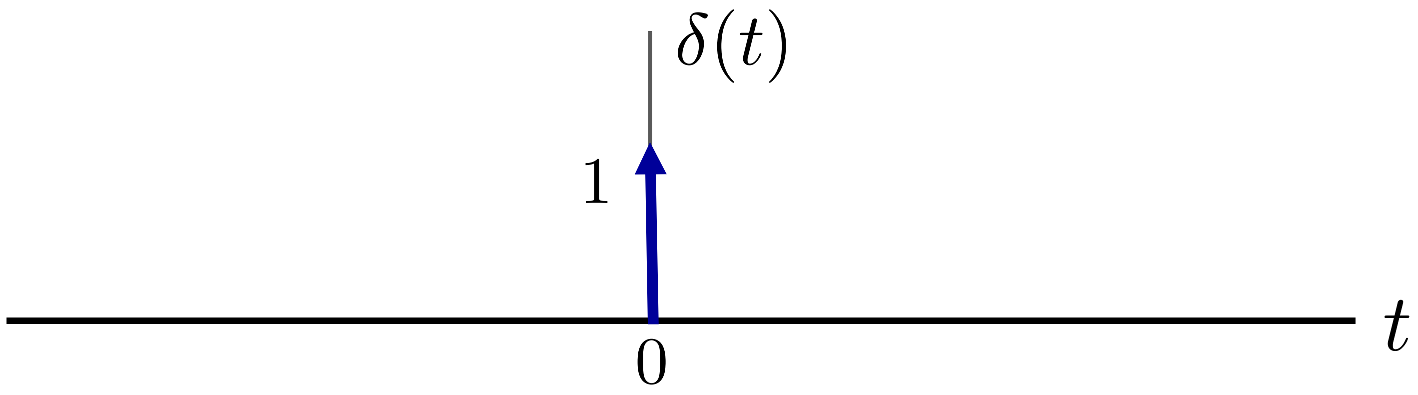
- Untuk isyarat periodik pun kita bisa menggunakan representasi Transformasi Fourier sehingga baik isyarat periodik **maupun** aperiodik bisa diperlakukan dengan konteks yang sama.

- Transformasi Fourier untuk isyarat periodik bisa **diperoleh secara langsung** dari representasi Deret Fourier bagi isyarat periodik tersebut!!

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Hasil Transformasi Fourier yang diperoleh nantinya berupa sederetan impuls (impuls satuan) di kawasan frekuensi dengan **area tiap impuls** sebanding dengan koefisien deret Fourier untuk frekuensi yang bersesuaian!

- Ingat kembali dari materi UTS tentang fungsi impuls satuan (unit impulse atau diract atau delta function) $\delta(t)$



Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

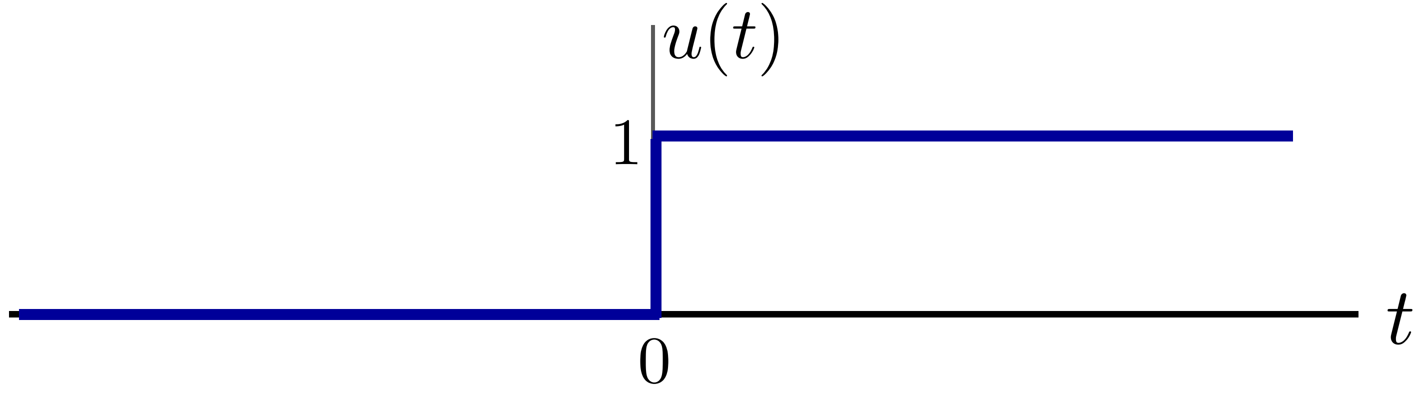
- Ingat bahwa, secara teoritis, $\delta(t)$ tidak memiliki lebar atau durasi namun memiliki luasan 1 => **tinggi** $\delta(t)$ **tak berhingga**!

- Pada gambar di atas, **panah** pada t=0 mengindikasikan bahwa **area pulsa** seluruhnya **terkonsentrasi** pada titik t=0 dan pada ketinggian dari panah tersebut.
- Angka 1 di samping panah mengindikasikan bahwa **Luasan pulsa** atau impuls tersebut adalah 1.

- Mengapa seperti ini?

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Hal ini karena impuls satuan merupakan derivative dari fungsi undak satuan (*unit step*) $u(t)$ berikut ini:



- Diskontinuitas pada $u(t)$ di titik t=0 menyebabkan lonjakan nilai pada turunannya ($\delta(t)$) pada titik t=0 pula.

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

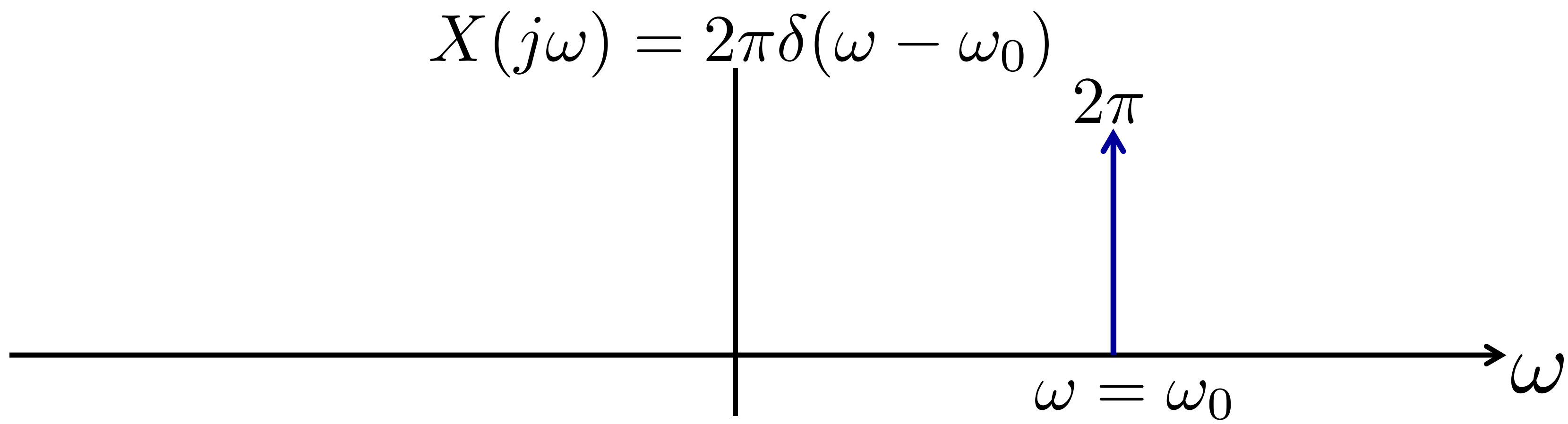
- Untuk mengevaluasi transformasi Fourier untuk isyarat periodik, **asumsikan** suatu isyarat $x(t)$ (belum tahu isyaratnya seperti apa) yang jika dikenakan operasi Transformasi Fourier maka hasil transformasi Fourier-nya adalah

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \qquad (12)$$

- Tampak bahwa hasil Transformasi Fourier $X(j\omega)$ pada (12) berupa impuls di kawasan frekuensi yang terletak pada frekuensi $\omega = \omega_0$ dengan luasan impuls sebesar 2π.

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Gambar dari hasil transformasi Fourier $X(j\omega)$ pada (12) diperlihatkan pada gambar berikut



- Sekarang kita ingin mencek isyarat $x(t)$ macam apa yang hasil Transformasi Fouriernya adalah $X(j\omega)$ pada (12) yang digambarkan pada gambar di atas.

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Untuk keperluan ini kita perlu mengenakan persamaan sintesis (10) atau yang dikenal dengan Inverse Fourier Transform pada $X(j\omega)$ pada (12) guna mendapatkan $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Tampak bahwa ternyata isyarat $x(t)$ yang hasil transformasi Fourier-nya berupa impuls dengan bobot 2π yang terletak pada frekuensi $\omega=\omega_0$ adalah isyarat eksponensial kompleks $x(t) = \exp(j\omega_0 t)$

- Bagaimana jika diketahui bahwa hasil transformasi Fourier isyarat $x(t)$ adalah $X(j\omega)$ yang diberikan oleh persamaan berikut ini:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (13)$$

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Tampak dari (13) bahwa $X(j\omega)$ berupa kombinasi linear dari impuls-impuls yang berjarak sama di sumbu frekuensi ω.
- Di samping itu, nilai bobot dari impuls yang berada di frekuensi $\omega = k\omega_0$ diberikan oleh $2\pi a_k$.

- Isyarat $x(t)$ yang hasil transformasi Fourier-nya berupa $X(j\omega)$ pada (13) dapat diperoleh dengan mengenakan persamaan sintesis (10) (Inverse Fourier Transform) pada $X(j\omega)$ pada (13).

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Dengan demikian, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)\right] e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{2\pi}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Integral pada persamaan di atas dapat kita evaluasi sebagaimana pada saat kita mencari solusi $x(t)$ saat diberikan hasil transformasi Fourier berupa $X(j\omega)$ pada persamaan (12) (yaitu saat $X(j\omega)$ hanya mengandung satu impuls saja).
- Dengan demikian diperoleh

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (14)}$$

- Persamaan (14) di atas tidak lain adalah ekspresi persamaan sintesis pada Deret Fourier.

Transformasi Fourier untuk Isyarat Periodik

- Berdasarkan uraian di atas, tampak bahwa isyarat periodik $x(t)$ yang bisa direpresentasikan dalam deret Fourier (seperti ditunjukkan pada (14)) akan memiliki hasil transformasi Fourier $X(j\omega)$ yang berupa sederetan impuls (delta function) yang muncul pada frekuensi $k\omega_0$ untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (frekuensi-frekuensi yang terkait secara harmonik).

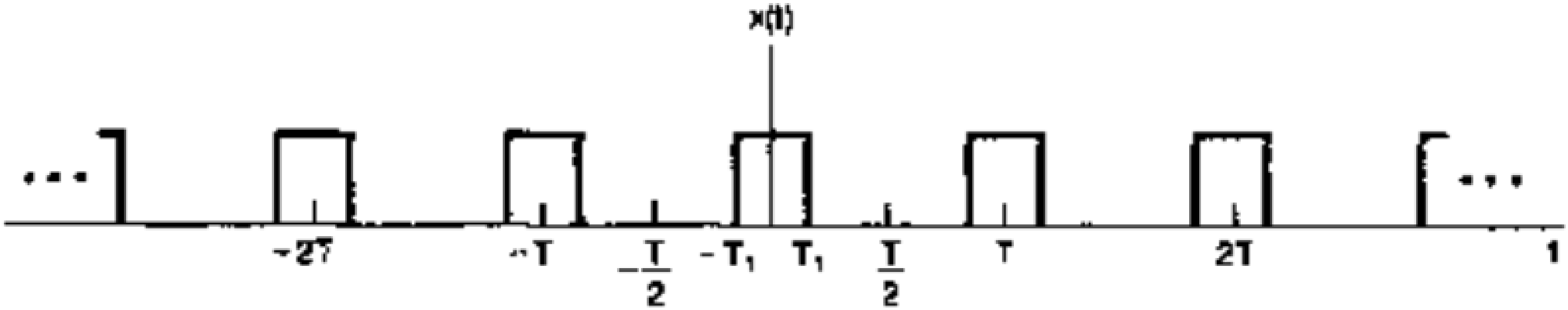
- Di mana bobot atau luasan impuls yang terletak pada frekuensi harmonik ke-k (yaitu $k\omega_0$) diberikan oleh hasil kali antara 2π dengan koefisien deret Fourier ke-k yaitu a_k.

Contoh 2

- Kita tinjau kembali contoh gelombang kotak periodik yang telah kita tinjau berkali-kali (Contoh 3.5 Buku Oppenheim, Contoh pada PPT Bagian Enam)

- $x(t)$ memiliki periode T. Definisi $x(t)$ untuk 1 perioda pada contoh tsb

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



Contoh 2

- Telah diperoleh dari materi-materi sebelumnya bahwa **koefisien deret Fourier** bagi $x(t)$ di atas:

$$\boxed{a_0 = \frac{2T_1}{T}} \qquad \boxed{a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad k \neq 0 \quad (1)}$$

- Berhubung $\omega_0 = 2\pi/T$ maka a_k pada (1) bisa ditulis:

$$\boxed{a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\frac{2\pi}{T}T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (1)}$$

- Pertanyaan: Bagaimanakah hasil transformasi Fourier bagi isyarat $x(t)$ di atas?

Contoh 2

- Dari relasi antara persamaan (13) dan (14) telah diperoleh bahwa jika

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (14)}$$

- Maka hasil Transformasi Fourier-nya akan diberikan oleh

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (13)}$$

- Untuk kasus gelombang kotak periodik $x(t)$ di atas dan dengan memperhatikan Persamaan (1) (termasuk nilai untuk a_0) maka diperoleh bahwa hasil Transformasi Fourier untuk $x(t)$ dapat dituliskan seperti berikut ini.

Contoh 2

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega - 0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = \frac{4\pi T_1}{T}\delta(\omega) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$

Contoh 2

- Untuk kasus khusus di mana $T = 4T_1$, maka diperoleh:

$$X(j\omega) = \frac{4\pi T_1}{4T_1}\delta(\omega) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2\sin\left(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)T_1\right)}{k}\delta(\omega - k\omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\left(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)T_1\right)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}\delta(\omega - k\omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$

Contoh 2

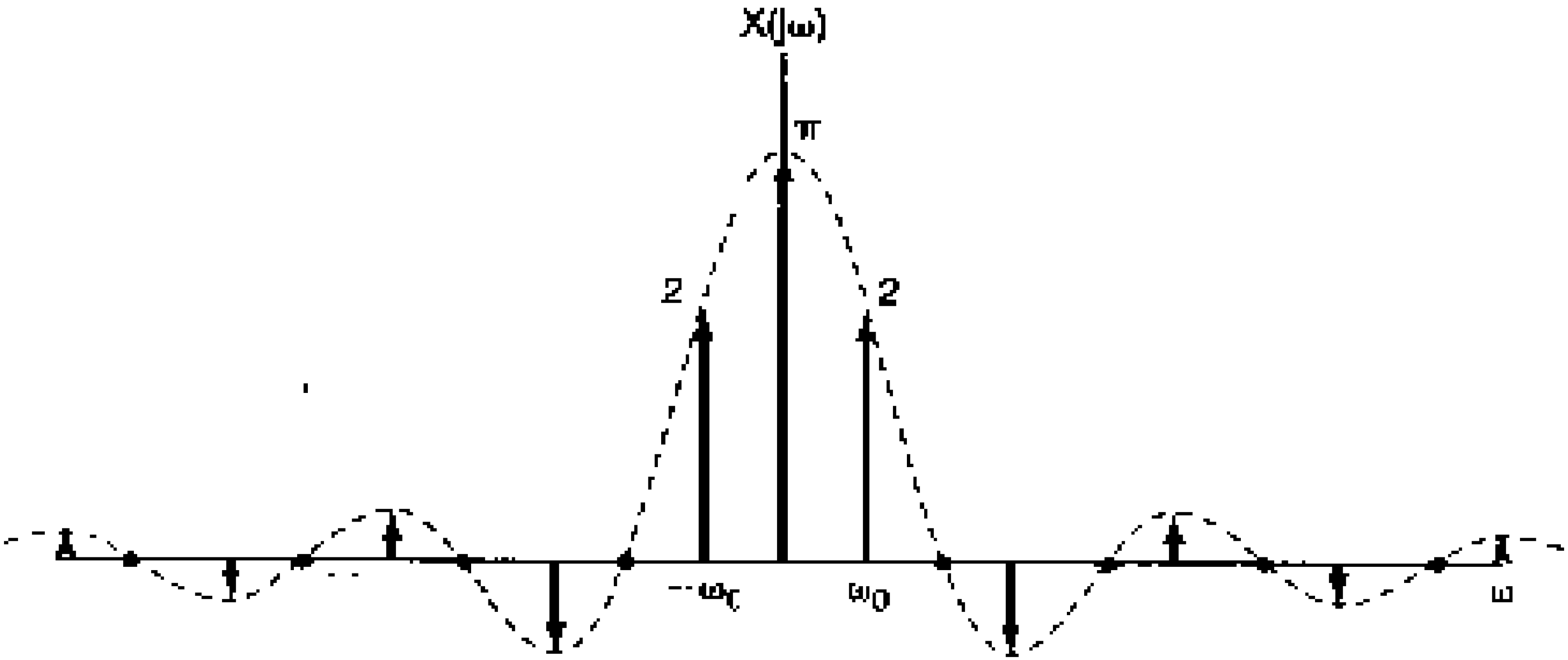


Figure 4.12 of Signal & System (Oppenheim, Willsky): Fourier transform of a symmetric periodic square wave (T=4T_1)

Contoh 2

- Gambar di atas memperlihatkan hasil Transformasi Fourier $X(j\omega)$ (representasi di kawasan frekuensi) bagi gelombang kotak periodik di atas dengan $T = 4T_1$.
- Jika dibandingkan dengan plot koefisien deret Fourier untuk kasus yang sama (gelombang kotak dengan $T=4T_1$ yang telah dibahas sebelumnya) ada beberapa perbedaan.

- Yaitu penggunaan representasi impuls yang terletak pada sumbu frekuensi ω pada titik frekuensi fundamental ω_0 beserta harmoniknya $k\omega_0$.
- Di samping itu ada faktor proporsionalitas 2π yang dikenakan pada tiap-tiap koefisien deret Fourier.

Contoh 2

- Hasil yang ditemukan pada Contoh ini mengilustrasikan ciri hasil Transformasi Fourier terhadap isyarat periodik.
- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik maka hasil Transformasi Fourier-nya (atau representasi $x(t)$ di kawasan frekuensi) **tidak** berupa kurva kontinu melainkan berupa runtun atau sederetan impuls (delta function) yang terletak pada frekuensi fundamental dan harmoniknya.

- Di sini, bobot atau luasan tiap-tiap impuls proporsional dengan nilai koefisien deret Fourier bagi tiap-tiap frekuensi (frekuensi fundamental dan harmoniknya).

Contoh 3a

- Tinjau isyarat $x(t) = \sin(\omega_0 t)$. Untuk mendapatkan koefisien deret Fourier bagi isyarat sinus ini kita bisa menggunakan formula Euler:

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right]$$

- Jika kita bandingkan dengan persamaan umum deret Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (14)$$

- Maka jelas bahwa untuk kasus isyarat sinus di atas, diperoleh berikut ini.

Contoh 3a

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$
$$a_k = 0, \text{ untuk } k \neq 1 \text{ dan } k \neq -1$$

- Dengan memanfaatkan relasi antara pers. (13) dan (14) yang menggambarkan transformasi Fourier untuk isyarat periodik, maka hasil transformasi Fourier untuk isyarat sinus di atas diberikan oleh:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= 2\pi \left\{ \frac{1}{2j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}\delta(\omega + \omega_0) \right\} \end{aligned}$$

Contoh 3a

- Dengan demikian representasi $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ diberikan oleh

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)}$$

- Yang digambarkan berikut ini:

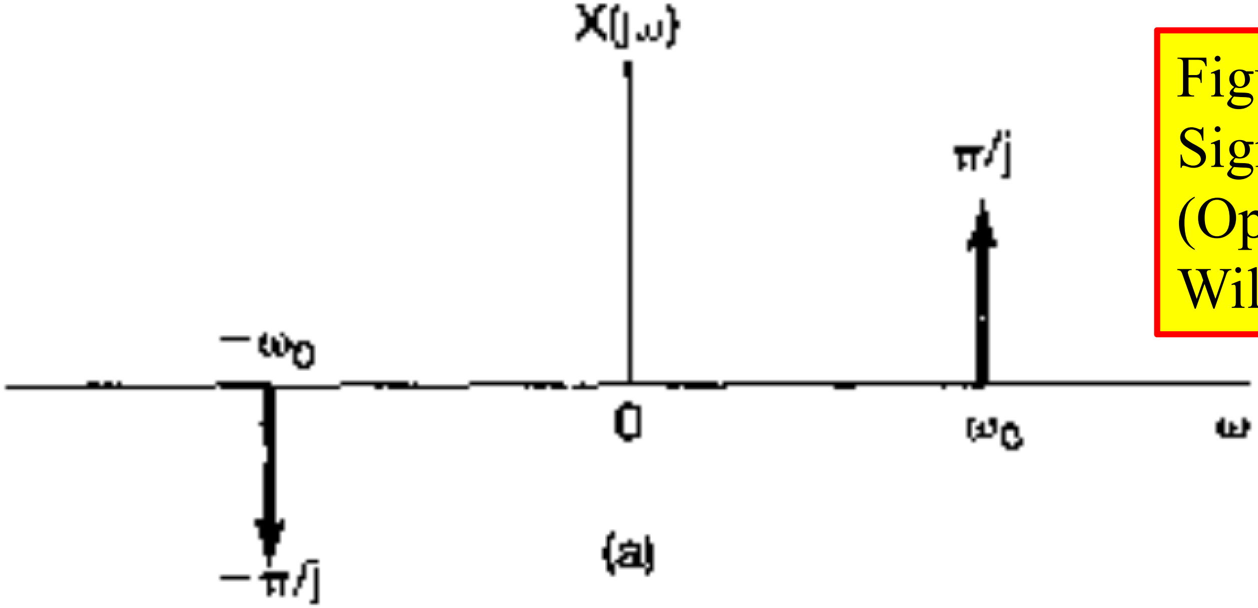


Figure 4.13a of Signal & System (Oppenheim, Willsky)

Contoh 3b

- Tinjau isyarat $x(t) = \cos(\omega_0 t)$. Untuk mendapatkan koefisien deret Fourier bagi isyarat cosinus ini kita bisa menggunakan formula Euler:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right]$$

- Jika kita bandingkan dengan persamaan umum deret Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (14)$$

- Maka jelas bahwa untuk kasus isyarat cosinus di atas, diperoleh berikut ini.

Contoh 3b

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0,\ \text{untuk } k \neq 1 \text{ dan } k \neq -1$$

- Dengan memanfaatkan relasi antara pers. (13) dan (14) yang menggambarkan transformasi Fourier untuk isyarat periodik, maka hasil transformasi Fourier untuk isyarat cosinus di atas diberikan oleh:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_0) \right\}$$

Contoh 3b

- Dengan demikian, representasi $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ diberikan oleh

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

- Yang digambarkan berikut ini:

Figure 4.13b of Signal & System (Oppenheim, Willsky)