Tutorial Isyarat dan Sistem #3

By: Cendikia I.S & Karunia Perjuangan

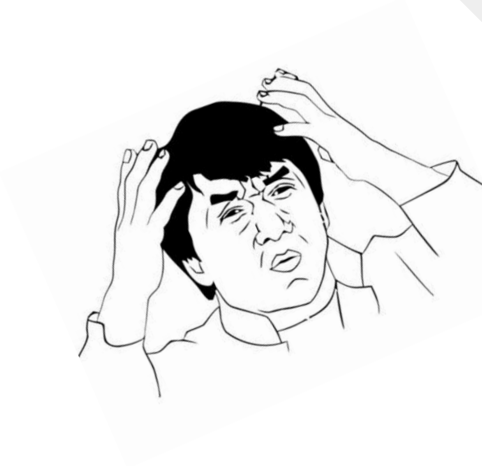
Konten Hari Ini

01.
Tanggapan Sistem LTI

02.
Konvolusi

03.
Sifat-Sifat Operasi Konvolusi

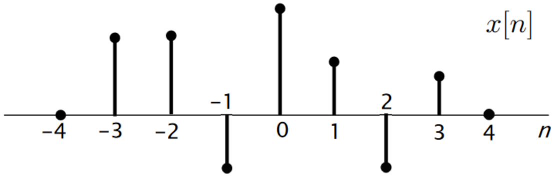
04.
Latihan Soal

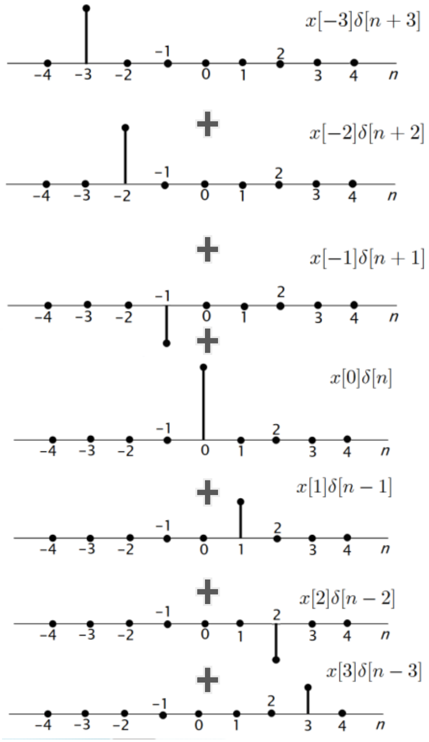


Tanggapan Sistem LTI

Tahukah Kamu?

Isyarat diskret bisa ditulis sebagai kumpulan isyarat impuls satuan yang dikenai delay dan scaling





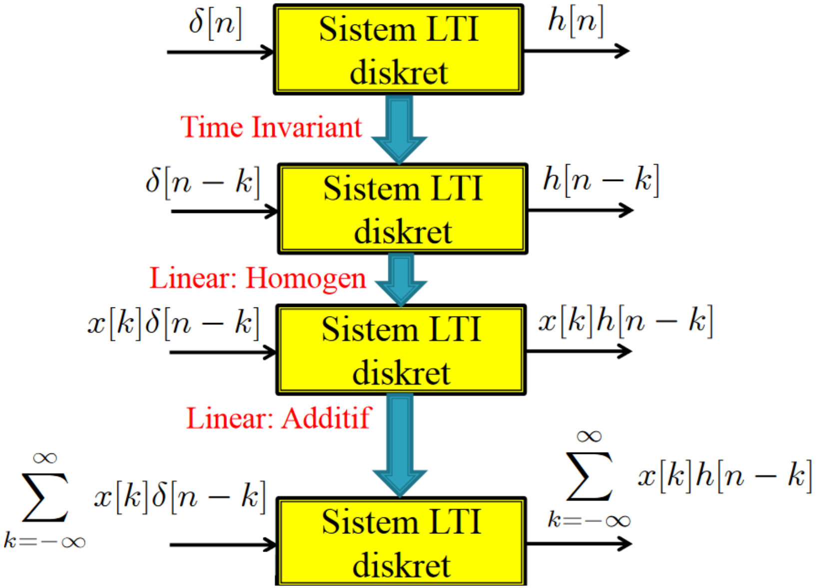
$$= x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Lah terus kenapa?

Artinya untuk sembarang isyarat diskret h[n] ada suatu sistem LTI yang inputnya sebuah impuls (δ[n]) dan outputnya isyarat diskret h[n] tadi.

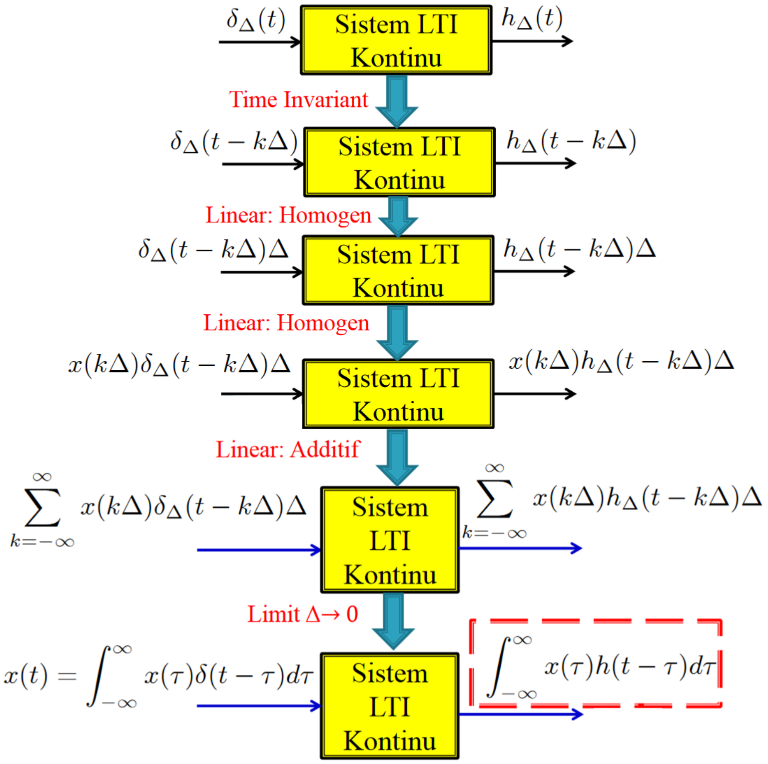
h[n] itu disebut **tanggapan impuls** sistem LTI kalo dia merupakan output sistem LTI saat inputnya impuls.

Kenapa harus Sistem LTI?



Jika kita tahu sebuah tanggapan impuls sistem LTI, kita bisa tahu output sistem tersebut untuk APAPUN inputnya (bodo amat sama isi sistem tersebut)

Hal yang sama juga berlaku untuk isyarat kontinu



Gimana cara cari tahu outputnya kalo tahu input dan tanggapan impuls sistemnya?

Konvolusi

Operasi konvolusi antara dua buah isyarat akan menghasilkan isyarat lain yang bisa digambarkan sebagai integrasi atau jumlahan (tergantung jenis isyaratnya) perkalian dua isyarat tadi.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Step-by-step konvolusi (kontinu)

1. Ganti variabel t menjadi τ untuk x(t) dan h(t) sehingga menjadi x(τ) dan h(τ)
2. Balik arah fungsi h(τ) menjadi h(-τ)
3. Jumlahkan -τ dengan t pada saat itu sehingga menjadi h(t-τ) (hanya memajukan/mendelay fungsi yang sudah dibalik sebelumnya sebanyak t)
4. Integralkan perkalian antara x(τ) dan h(t-τ) pada batas di mana pola tersebut berlaku
5. Kalo masih bingung cek contoh di akhir aja

Step-by-step konvolusi (diskret)

1. Ganti variabel n menjadi k untuk x[n] dan h[n] sehingga menjadi x[k] dan h[k]
2. Balik arah fungsi h[k] menjadi h[-k]
3. Jumlahkan -k dengan n pada saat itu sehingga menjadi h[n-k] (hanya memajukan/mendelay fungsi yang sudah dibalik sebelumnya sebanyak n)
4. Jumlahkan seluruh hasil perkalian antara x[n] dan h[n-k] di bagian di mana hasil perkalian tersebut tidak 0
5. Kalo masih bingung cek contoh di akhir aja

#Intermezzo
Aplikasi Konvolusi

Filter Citra

Citra Asli

Gaussian Blur

Edge Detection

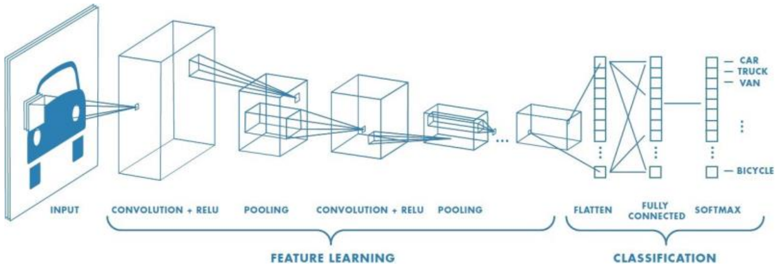
Sharpen

Filter citra yang sederhana sebenarnya merupakan operasi konvolusi 2 dimensi antara gambar input x[x,y] dan fungsi kernel h[x,y]. Contoh kernel ada di https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_(image_processing)

#Intermezzo
Aplikasi Konvolusi

CNN

Convolutional Neural Network (CNN) hampir sama dengan Neural Network biasa (Feed Forward NN). Kalo di NN biasa kita pake perkalian matriks yang isinya perkalian dan penjumlahan skalar, di CNN hampir sama, namun setiap skalar di NN biasa diganti dengan matriks dan operasi perkaliannya diganti jadi konvolusi #CMIIW



Sifat-Sifat Operasi Konvolusi

Sifat-Sifat Operasi Konvolusi

Konvolusi ≈ Perkalian (serupa tapi tak sama)

$$f\left(t\right)*g\left(t\right)=g\left(t\right)*f\left(t\right)$$

$$f\left(t\right)*\left(g\left(t\right)*h\left(t\right)\right)=\left(f\left(t\right)*g\left(t\right)\right)*h\left(t\right)$$

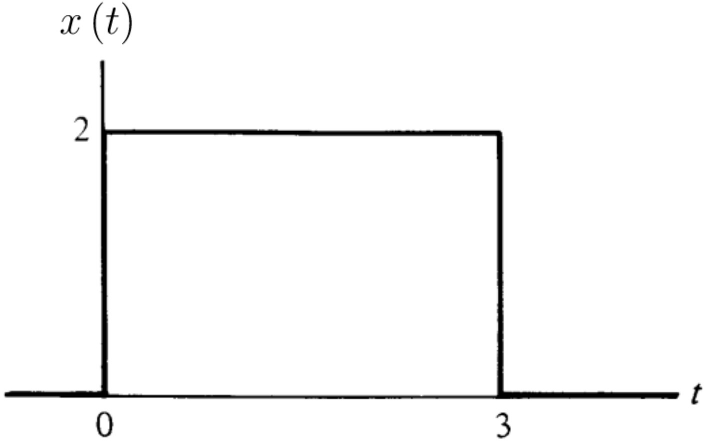
$$f\left(t\right)+\left(g\left(t\right)*h\left(t\right)\right)=f\left(t\right)*g\left(t\right)+f\left(t\right)*h\left(t\right)$$

$$f\left(t\right)*\delta\left(t-t_0\right)=x\left(t-t_0\right)$$

Kasih contoh konvolusi deh biar ga bingung

Contoh soal konvolusi

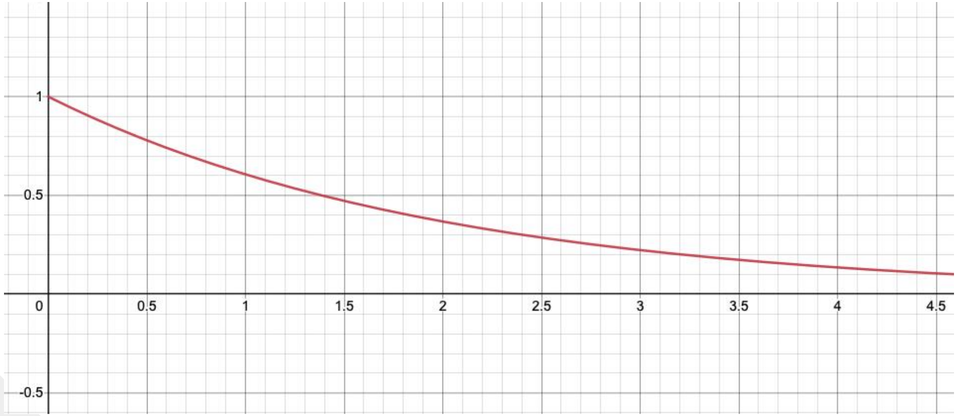
Diberikan $h(t) = e^{-\frac{t}{2}} u(t)$ dan suatu masukkan $x(t)$



Berapakah keluaran $y(t)$?

Contoh soal konvolusi

Gimana sih bentuknya $h(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ itu? Bentuknya gini:



Atau kalau ditulis dalam bentuk matematika jadi:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}}, & t \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

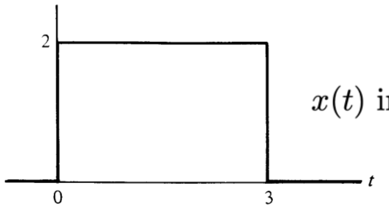
Contoh soal konvolusi

Lalu kita lakukan konvolusi dengan rumus:

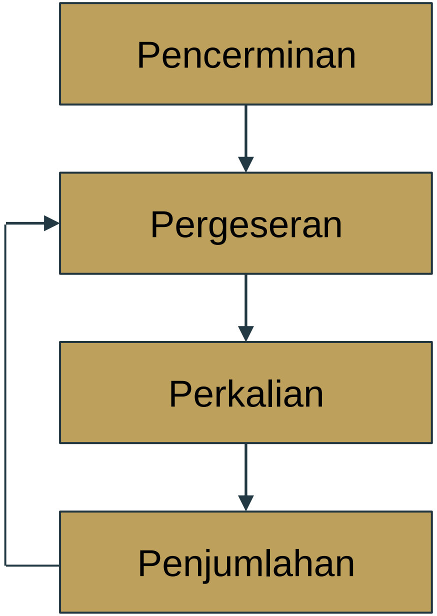
$$y(t) = \int_T x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Kenapa gak $y(t) = \int_T x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$?

Karena: $y(t) = \int_T x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_T x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

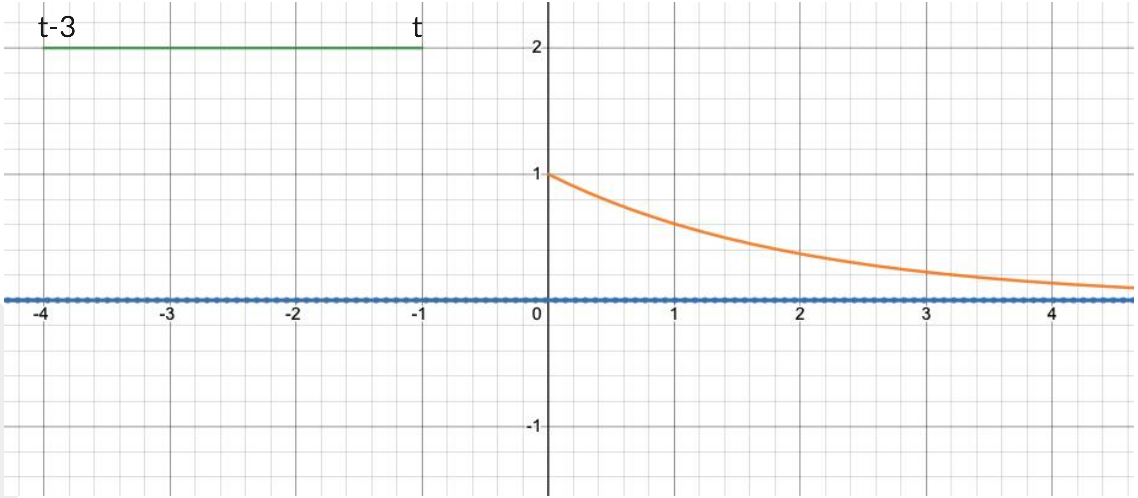


$x(t)$ ini lebih mudah buat dicerminkan jadi $x(t-\tau)$



Contoh soal konvolusi

$t \leq 0$

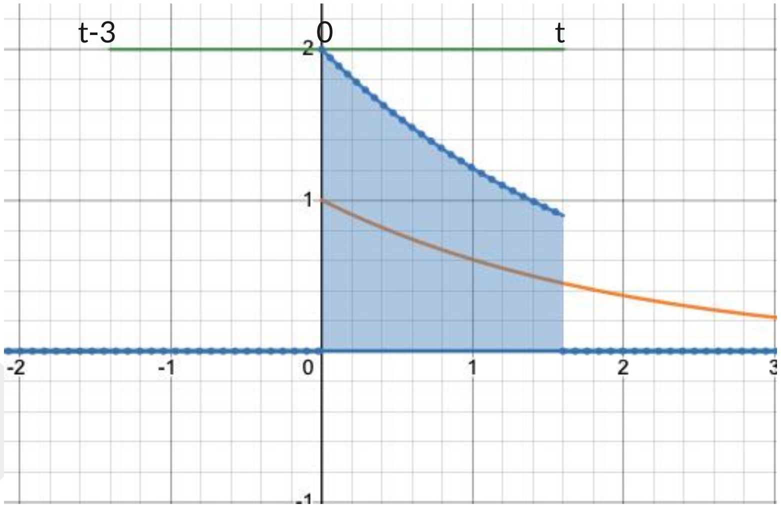


$y(t) = 0$

Karena gaada yang “overlap”

Contoh soal konvolusi

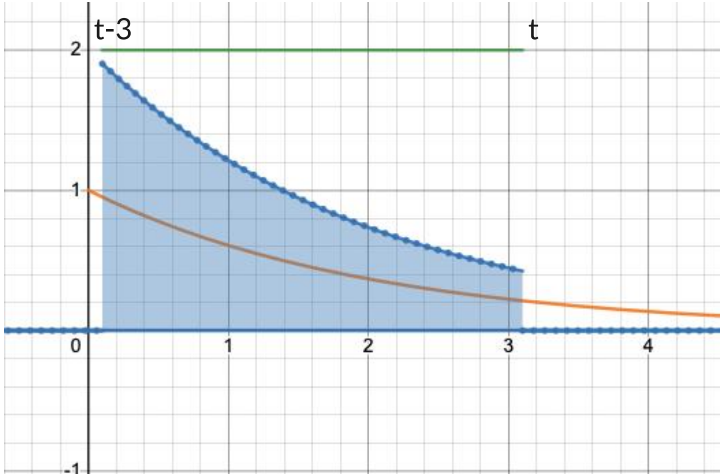
$0 < t \leq 3$



$$
\begin{aligned}
y\left(t\right) &= 2\int_0^t e^{-\frac{\tau}{2}}\,d\tau \\
&= -4e^{-\frac{-\tau}{2}}\Big|_0^t \\
&= 4\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Contoh soal konvolusi

$t > 3$

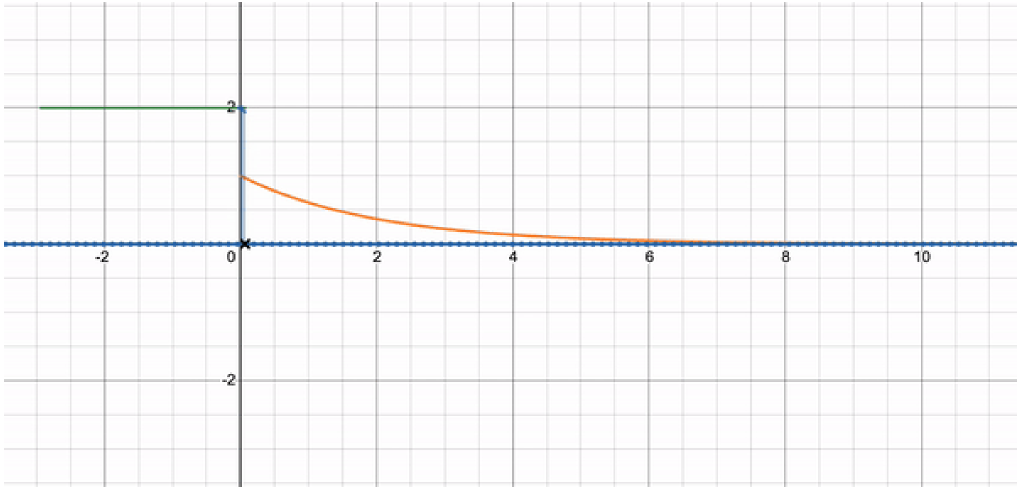


$$y(t) = 2\int_{t-3}^{t} e^{-\frac{\tau}{2}}\, d\tau$$
$$= -4e^{-\frac{-\tau}{2}}\Big|_{t+3}^{t}$$
$$= 4e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{-\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Cara nentuin batas integral:
Lihat dari mana sampe mana yang “overlap”

Contoh soal konvolusi

Kalau dianimasikan kurang lebih kaya gini:



Jadi, y(t) adalah:

$$y(t) = \begin{cases} 4\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) & 0 < t \leq 3 \\ 4e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) & t > 3 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

Total luasan (diarsir biru) itu adalah nilai y(t)

Kalau mau liat secara langsung ilustrasinya:
https://www.desmos.com/calculator/lvijdhkpwq