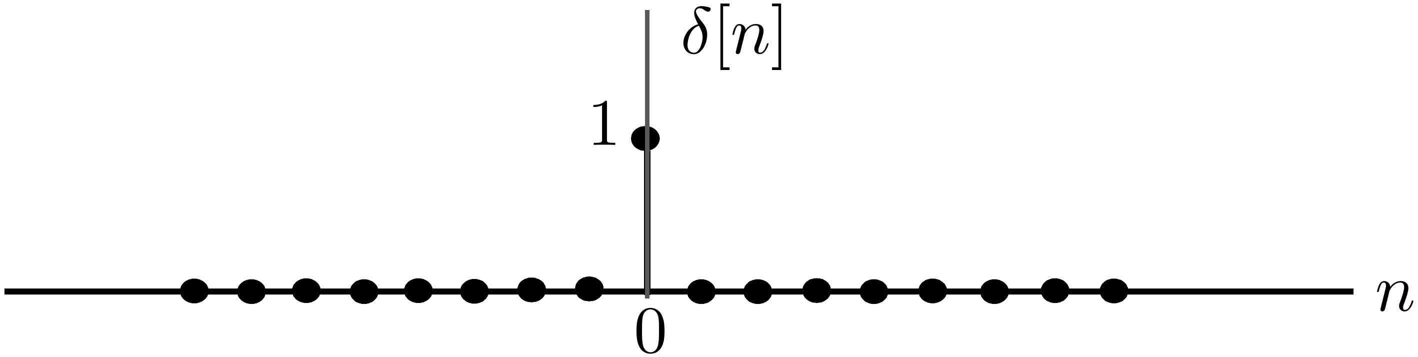
Pengenalan Isyarat dan Sistem (Bagian II)

Sumber Bacaan:
Signal and System, Oppenheim, Willsky, & Hamid Nawab, Bab 1

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

- Isyarat impuls satuan (unit impulse) untuk kasus diskret bisa didefinisikan:

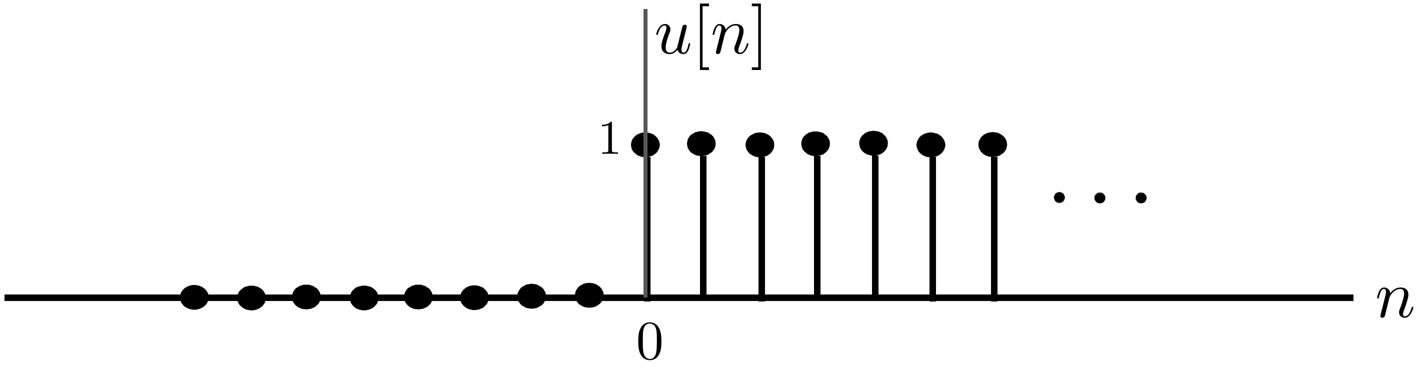
$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}.}$$



Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

- Isyarat undak satuan (unit step) untuk kasus diskret bisa didefinisikan:

$$\boxed{u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}.}$$



Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

- Salah satu cara untuk menuliskan relasi antara impuls satuan δ[n] dan undak satuan u[n]:

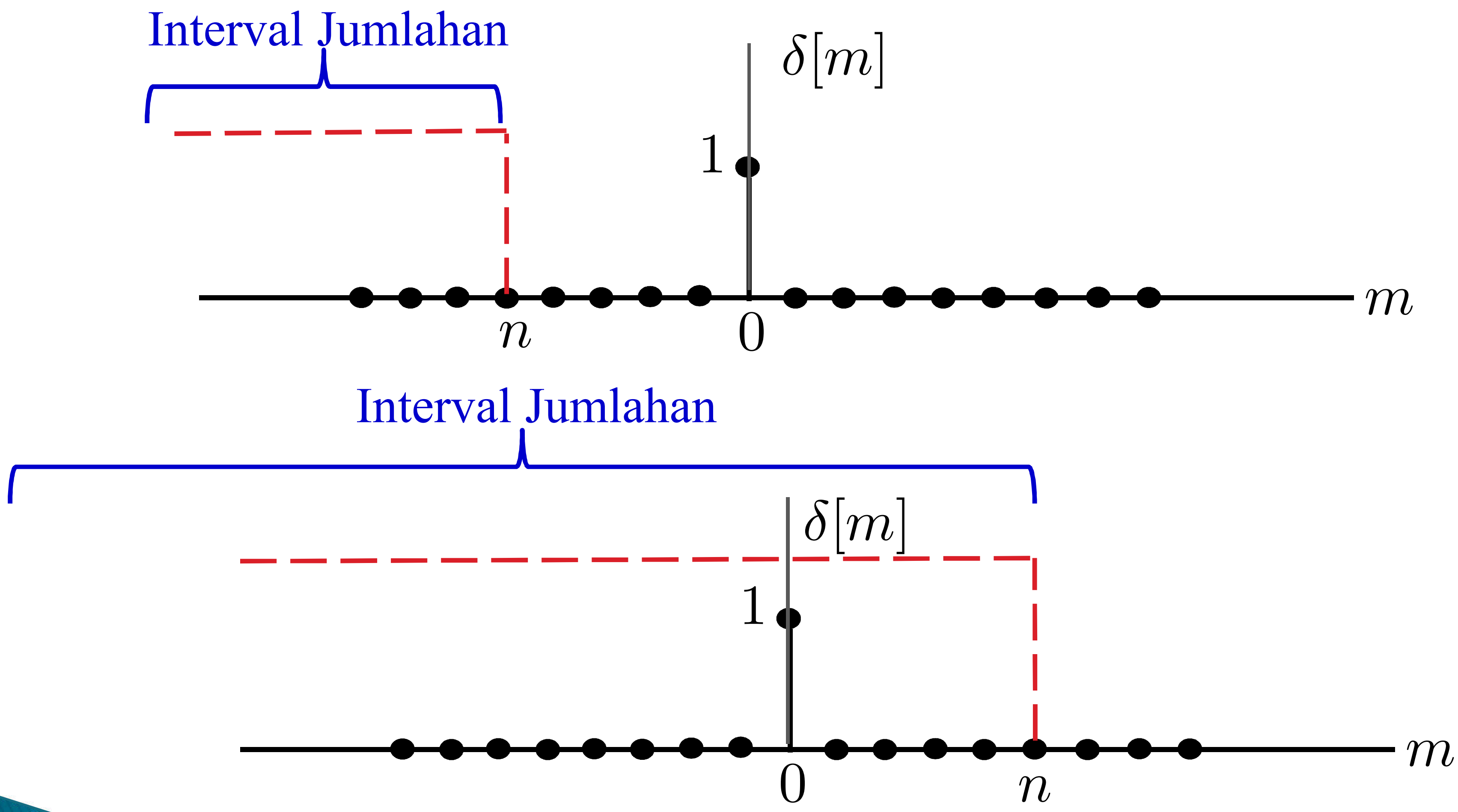
$$\boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$

- Sebaliknya nilai u[n] dapat diperoleh dari δ[m] dengan melakukan jumlahan terhadap nilai δ[m] mulai dari m=-∞ hingga m=n:

$$\boxed{u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]}$$

- Sering dikatakan bahwa u[n] dapat diperoleh dari running sum dari δ[n].

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)



Proses Running Sum terhadap δ[n] guna mendapatkan u[n] untuk kasus n < 0 (gambar atas) dan n > 0 (gambar bawah)

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

- Gambar di atas merupakan salah satu ilustrasi proses running sum terhadap impuls satuan guna mendapatkan undak satuan.
- Relasi proses running sum di atas bisa juga dituliskan dengan cara yang berbeda.

- Tinjau ulang persamaan berikut

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \quad (1)$$

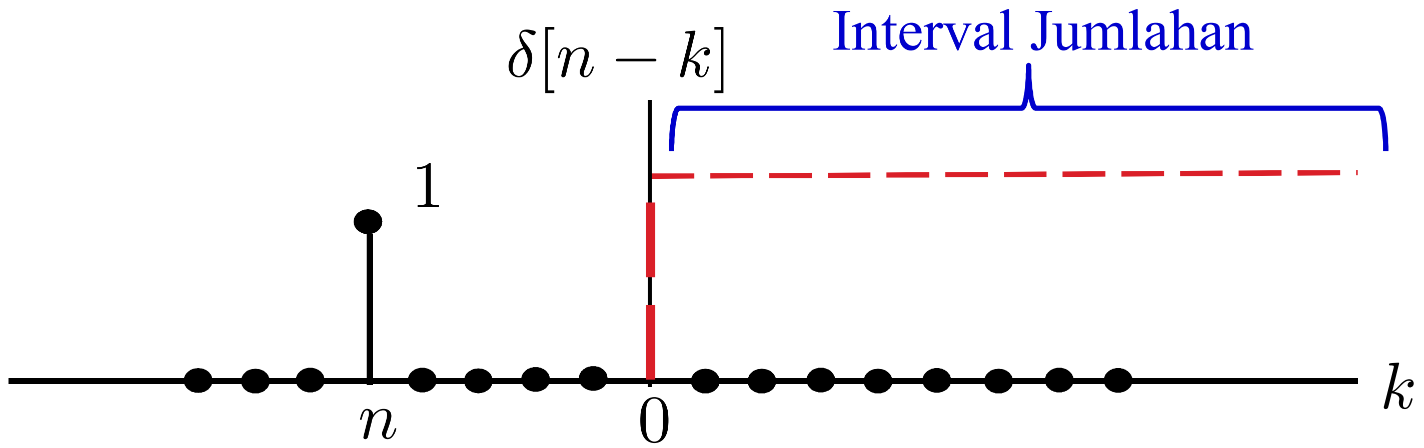
- Kita substitusi variabel jumlahan m dengan $k = n - m$

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

- Dengan demikian, fungsi undak satuan bisa dituliskan sebagai:

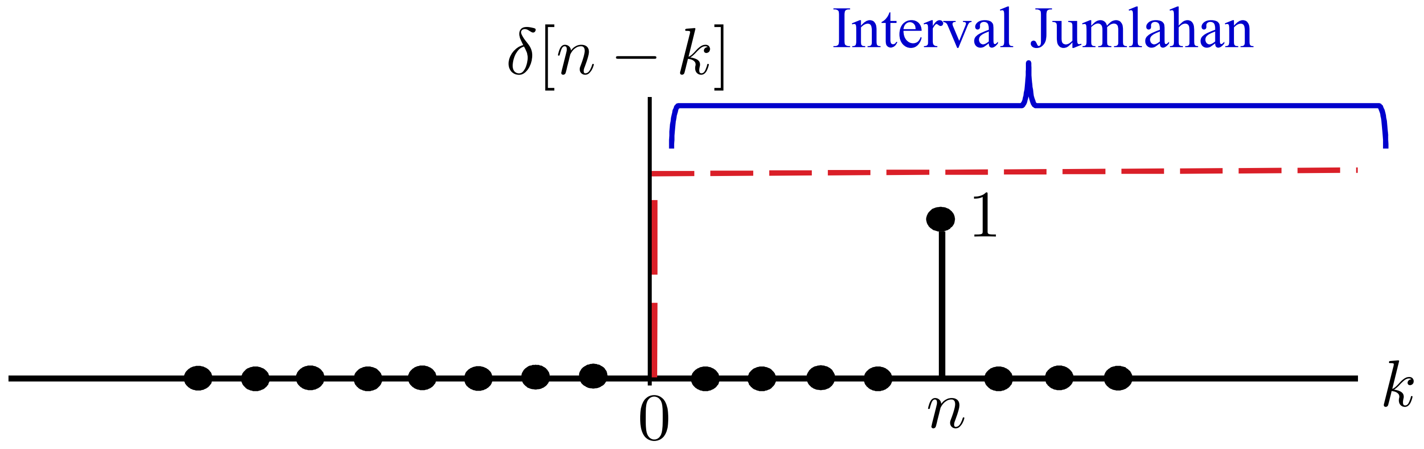
$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (2)$$

- Artinya ilustrasi perolehan u[n] dari impuls satuan δ[n] dapat pula digambarkan sebagai berikut untuk n < 0.



Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

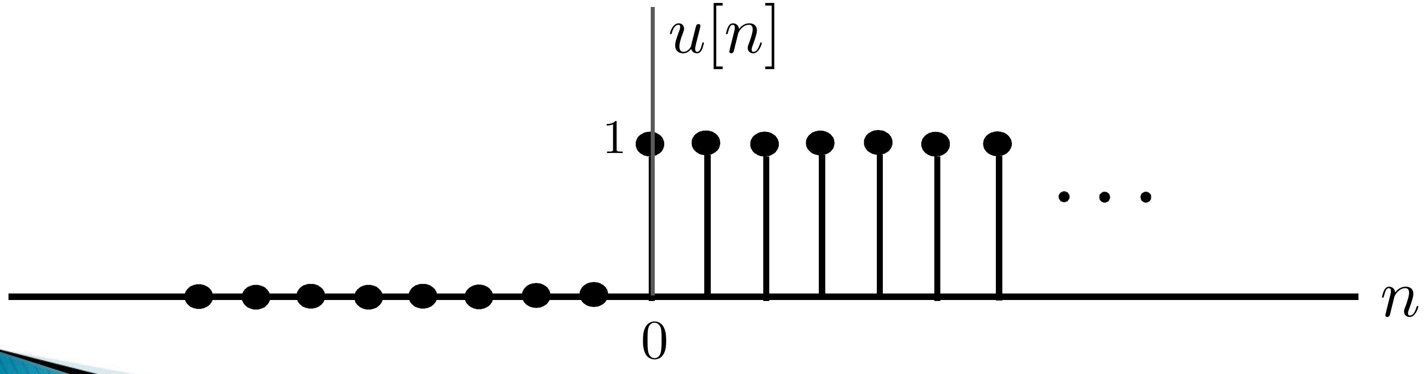
- Ilustrasi perolehan u[n] dari impuls satuan δ[n] untuk n > 0:



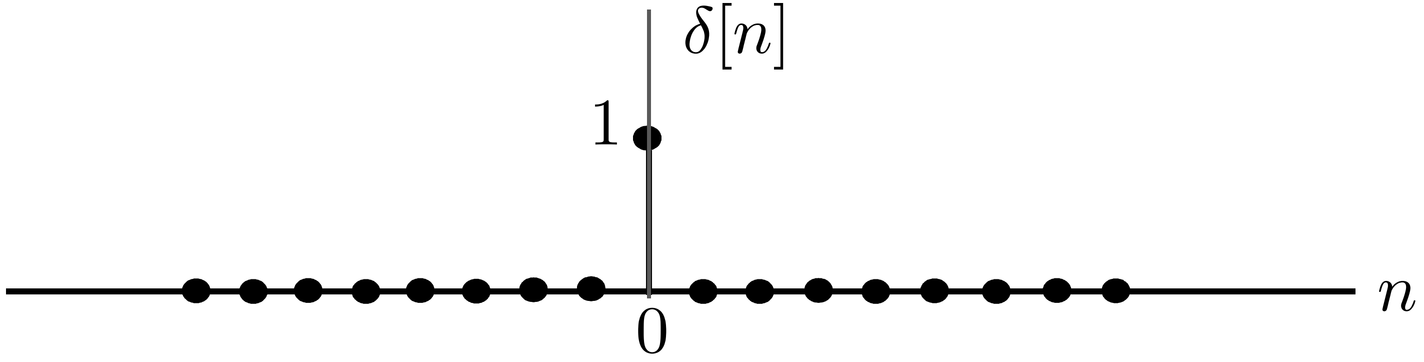
- Dari kedua gambar di atas tampak bahwa, berbeda dengan ilustrasi menurut persamaan (1), pada ilustrasi (2) rentang penjumlahan tidak bergantung pada nilai n pada u[n], namun lokasi impuls satuan bebeda-beda untuk nilai n yang berbeda.

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Diskret)

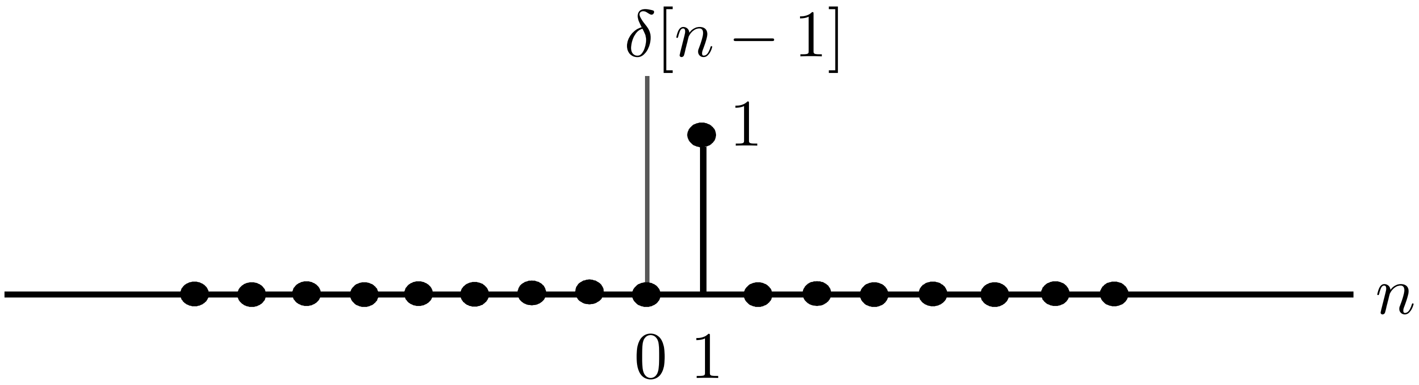
- Kita juga bisa menggunakan persamaan (2) untuk menggambarkan perolehan u[n] sebagai jumlahan fungsi-fungsi impuls satuan δ[n-k] untuk nilai k yang berbeda-beda.
- Ini adalah ilustrasi yang ketiga.



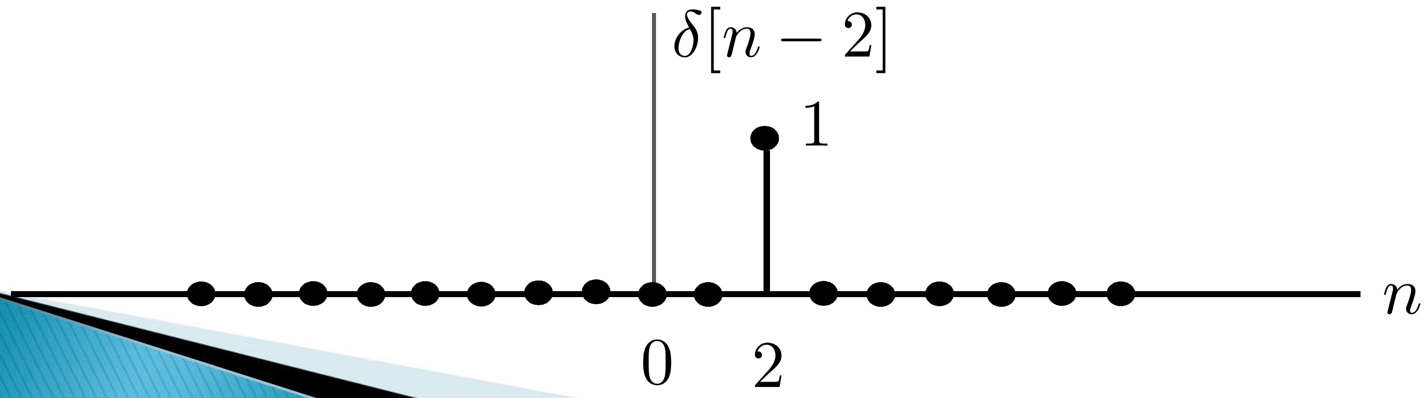
$=$



$+$



$+$

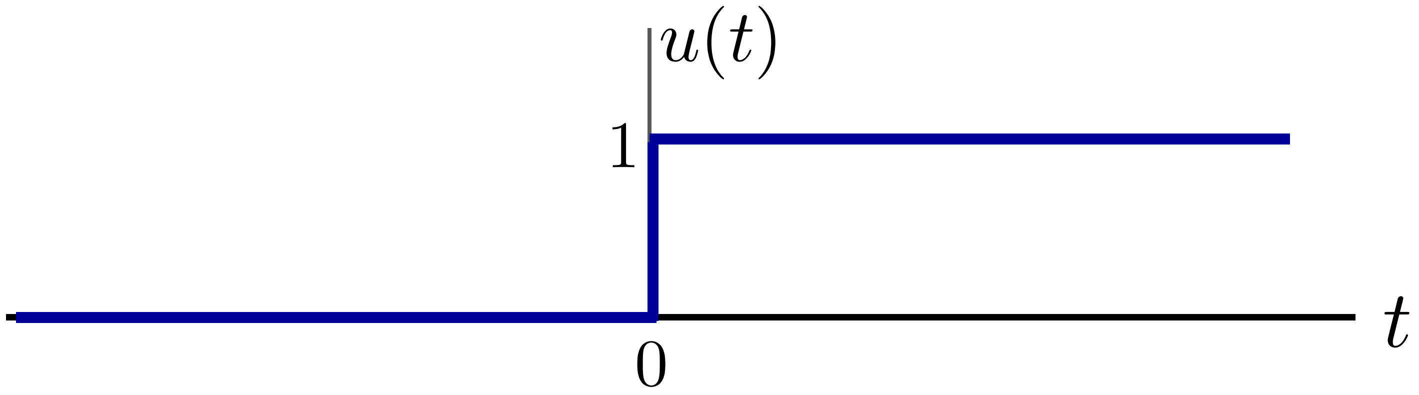


$+ \ldots.$

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Fungsi undak satuan untuk kasus waktu kontinu dapat didefinisikan sebagai:

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.}$$



- Tampak bahwa terdapat diskontinuitas pada u(t) di titik $t=0$.

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Relasi antara u(t) dengan fungsi impuls satuan δ(t) **mirip** dengan kasus diskret.
- Fungsi undak satuan u(t) bisa diperoleh dari proses running integral pada fungsi impuls satuan δ(t):

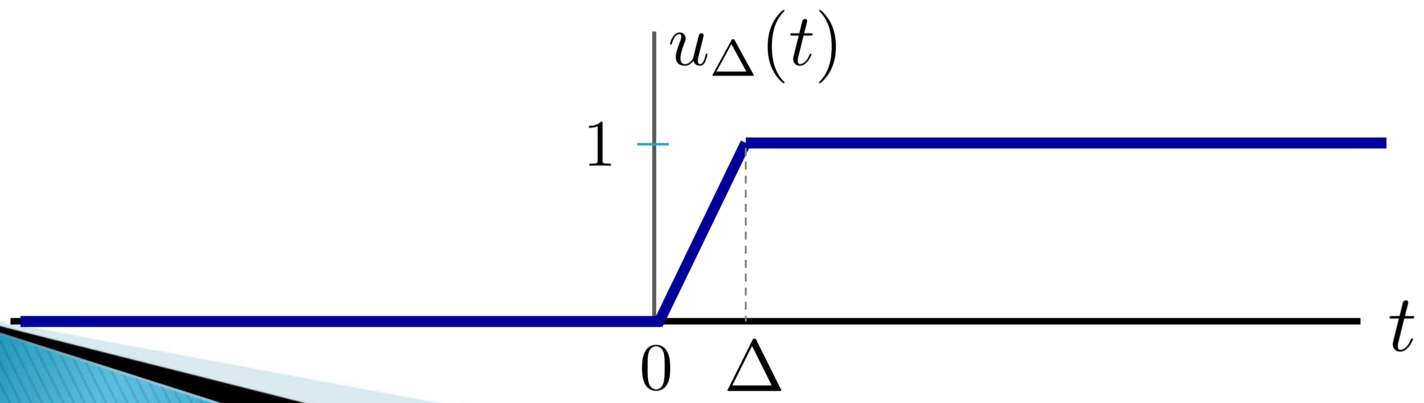
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

- Artinya fungsi impuls satuan δ(t) adalah turunan pertama (first derivative) dari fungsi undak satuan u(t) :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad (3)$$

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Terdapat kejanggalan pada definisi (3) karena:
  - u(t) adalah fungsi yang tidak kontinu pada t=0
  - padahal suatu fungsi hanya dapat didifferensialkan jika fungsi tersebut kontinu.
- Kita coba mendekati u(t) dengan $u_\Delta(t)$ berikut yang mengalami kenaikan nilai (tidak mendadak) dari 0 ke 1 dalam interval pendek Δ.



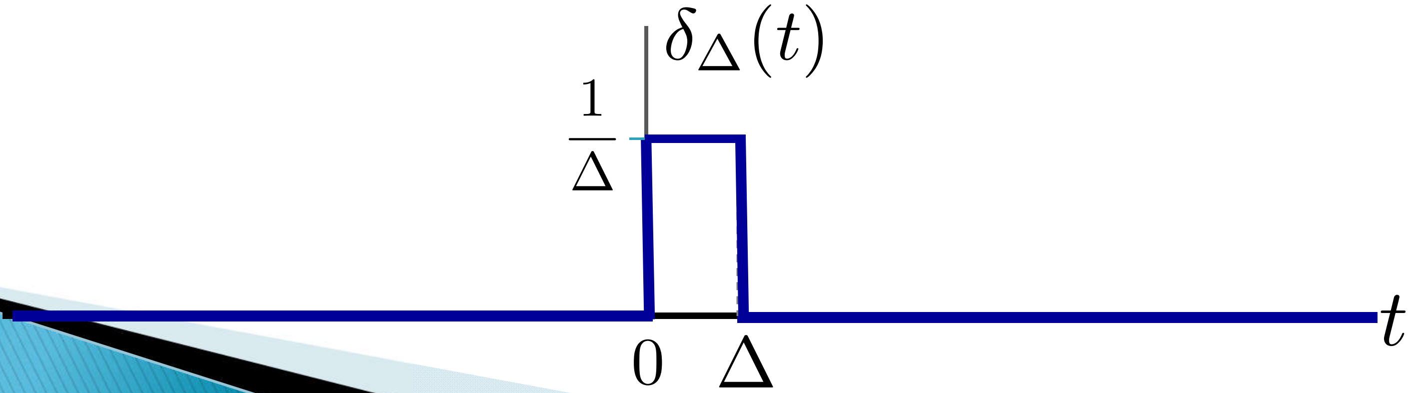
Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Fungsi undak satuan u(t): bentuk ideal dari $u_\Delta(t)$ dengan Δ sedemikian pendek atau:

$$\boxed{u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)}$$

- Kita kenakan operasi derivatif pada $u_\Delta(t)$ terhadap waktu:

$$\boxed{\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}}$$



Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Tampak bahwa $\delta_\Delta(t)$ adalah pulsa pendek dengan lebar/ durasi Δ, dan luasan sebesar 1 untuk berbagai nilai Δ
- Seiring $\Delta \to 0$, $\delta_\Delta(t)$ semakin sempit namun semakin tinggi guna mempertahankan agar luasannya tetap 1.

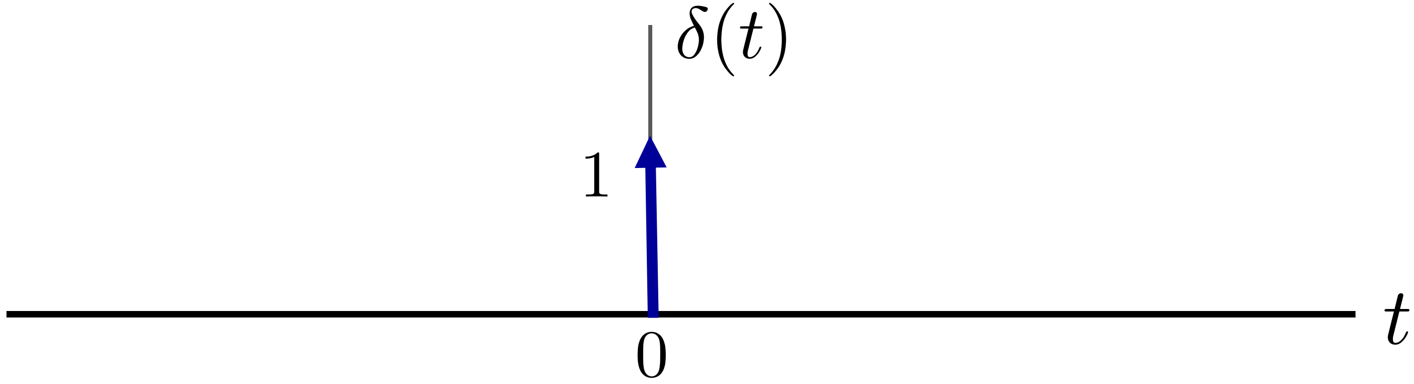
- Definisikan $\delta(t)$ sebagai bentuk ideal dari $\delta_\Delta(t)$ saat nilai lebar Δ terus berkurang hingga nilainya tak signifikan.

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)}$$

- Dengan demikian, secara teoritis $\delta(t)$ tidak memiliki lebar atau durasi namun memiliki luasan 1 => **tinggi** $\delta(t)$ **<u>tak berhingga</u>**!

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

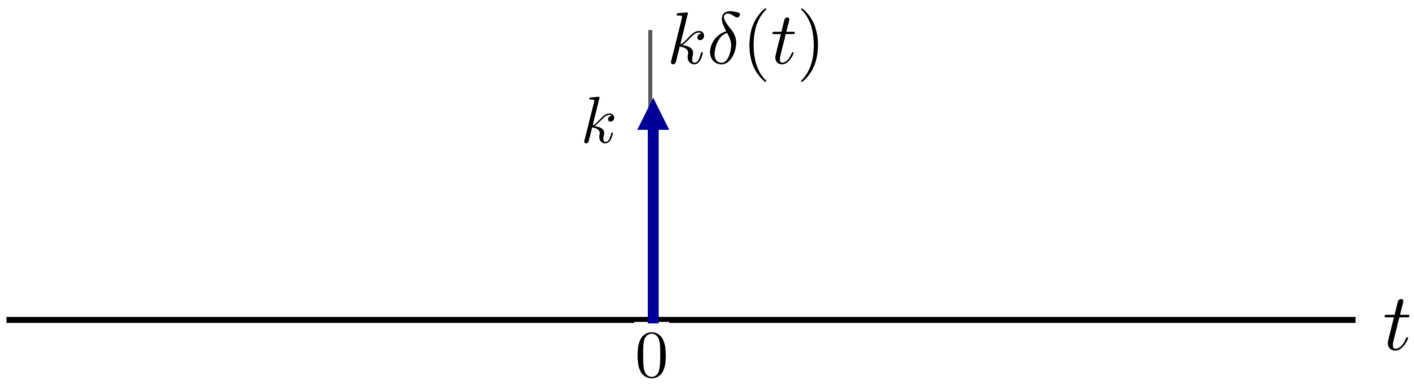
- Kita dapat menggambarkan notasi δ(t) seperti pada gambar berikut:



- Pada gambar di atas, **panah** pada t=0 mengindikasikan bahwa **area pulsa** seluruhnya **terkonsentrasi** pada titik t=0 dan pada ketinggian dari panah tersebut.
- Angka 1 di samping panah mengindikasikan bahwa **Luasan pulsa** atau impuls tersebut adalah 1.

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Bisa pula dikenakan proses scaling terhadap unit impuls di atas => $k\delta(t)$ adalah unit impuls yang memiliki luasan k dan **terkonsentrasi** di titik t=0.

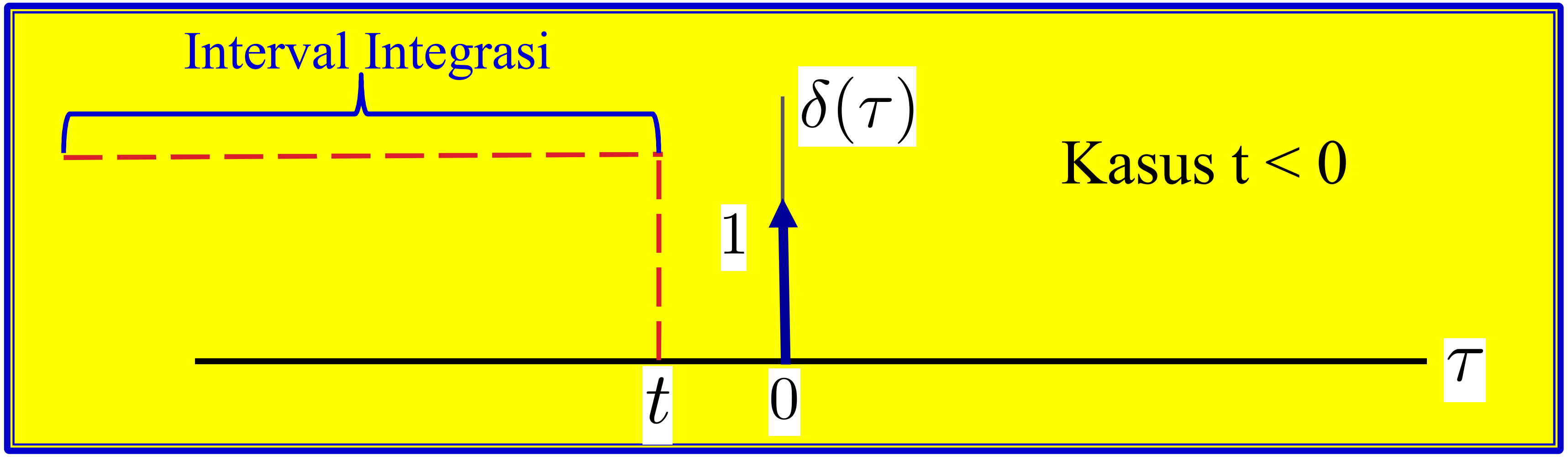


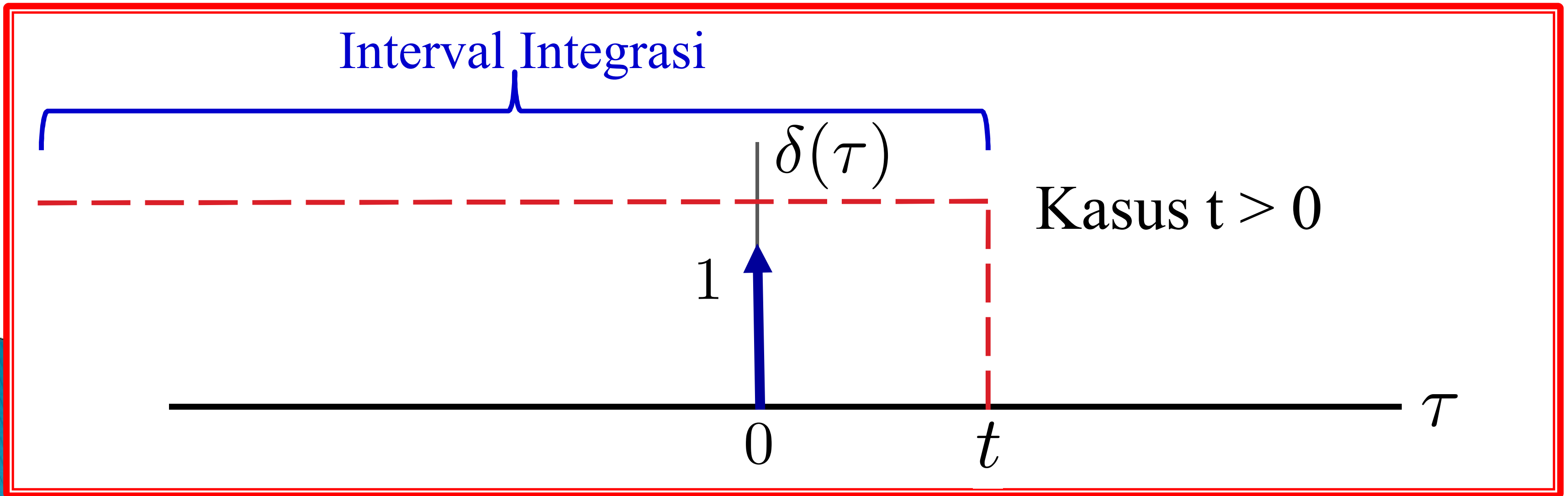
- Tinjau kembali proses **running integral** untuk memperoleh fungsi undak satuan u(t) dari fungsi impuls satuan $\delta(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \qquad (3)$$

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

- Ilustrasi proses running integral di atas:





Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

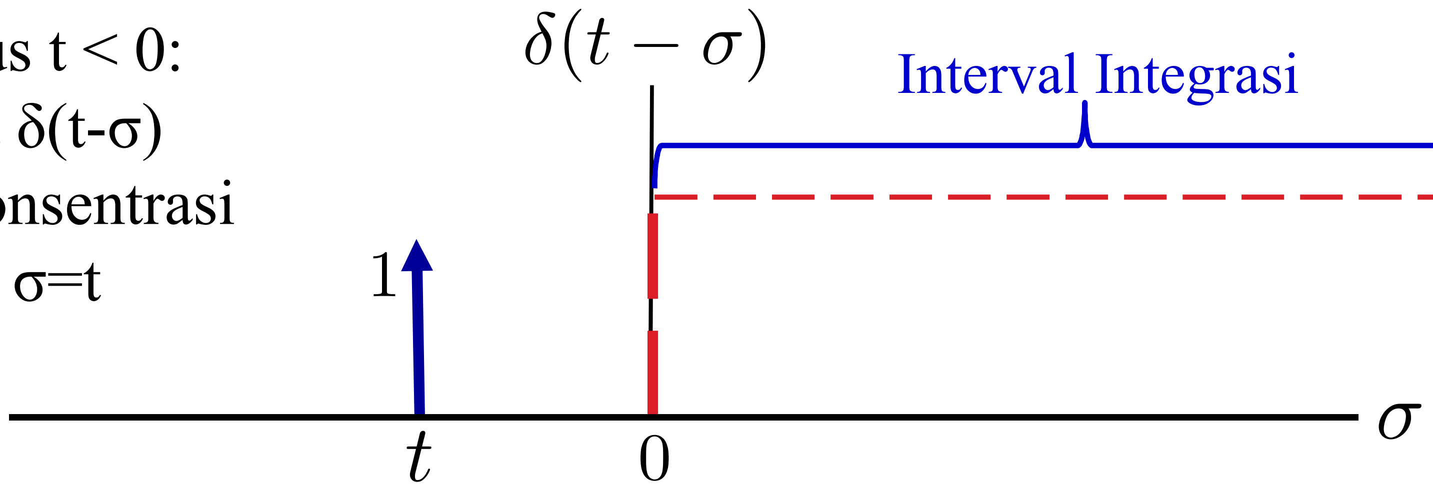
- Relasi proses running integral di atas bisa juga dituliskan dengan cara yang berbeda dengan mengubah variabel integrasi dari τ ke σ = t – τ:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-d\sigma)$$
$$= \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma \quad (4)$$

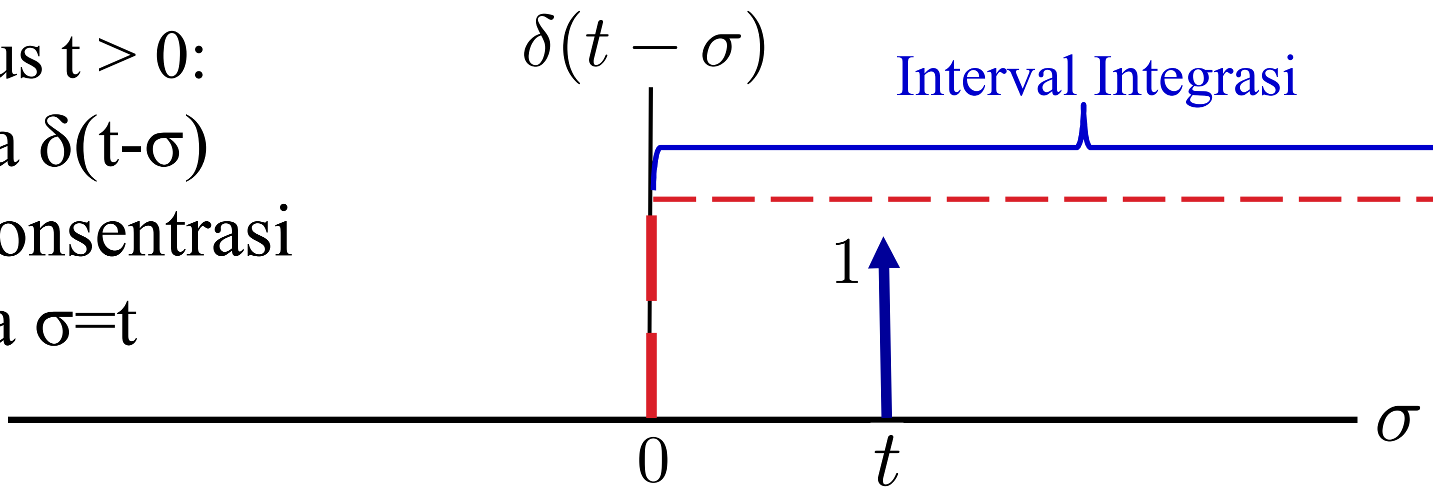
- Dari kedua gambar berikut tampak bahwa, berbeda dengan ilustrasi menurut persamaan (3), pada ilustrasi (4) rentang integrasi tidak bergantung pada nilai t pada u(t), namun lokasi impuls satuan berbeda-beda untuk t yang berbeda.

Impuls Satuan dan Undak Satuan (Kasus Kontinu)

Kasus t < 0:
Area δ(t-σ)
terkonsentrasi
pada σ=t

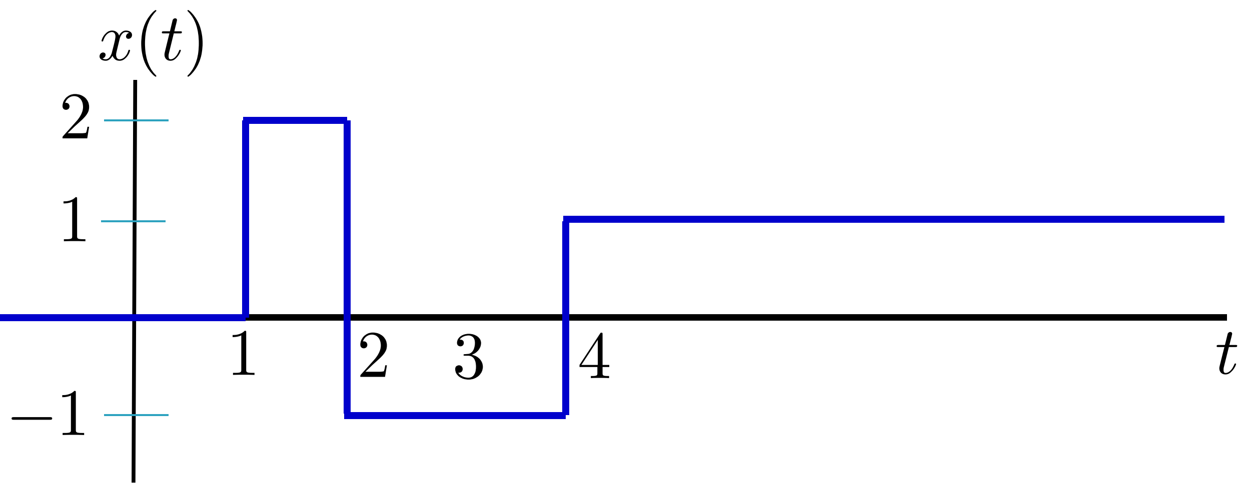


Kasus t > 0:
Area δ(t-σ)
terkonsentrasi
pada σ=t



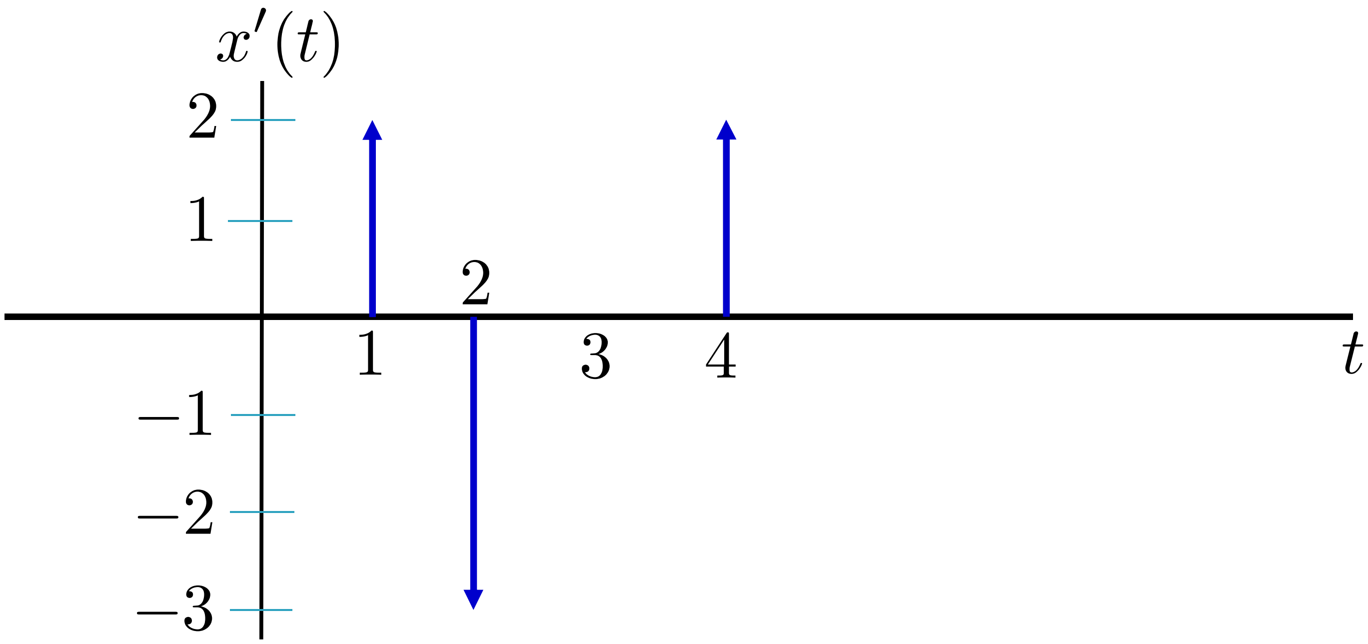
Contoh

- Perhatikan isyarat diskontinu x(t) berikut ini:



- Kita bisa menggambarkan turunan dari x(t) di atas (beri notasi x'(t)).
- Impuls satuan (beserta scaled versionnya) muncul pada lokasi terjadinya diskontinuitas (ingat kasus derivatif pada u(t) guna mendapatkan δ(t))

Contoh



- Di lokasi terjadinya diskontinuitas dengan ukuran k pada x(t), muncul impuls satuan dengan luasan k pada x'(t).
- Plot isyarat x(t) dapat diperoleh kembali dari x'(t) dengan menerapkan running integral pada x'(t):

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{t} x'(\tau)\,d\tau}$$

Sistem

- Sistem: Interkoneksi antara komponen-komponen yang saling bekerja sama untuk mencapai tujuan tertentu dan mempunyai karakteristik tertentu.
- Dalam sistem, suatu proses dikenakan pada isyarat masukan:
  - Isyarat masukan tersebut mengalami transformasi
  - Hasilnya berupa isyarat keluaran.

- Rangkaian listrik:
  - nilai tegangan sumber: isyarat masukan
  - nilai tegangan salah satu komponen (resistor atau kapasitor): isyarat keluaran
- High Fidelity Audio System:
  - rekaman isyarat suara: isyarat masukan
  - Keluaran speaker: isyarat keluaran

Sistem Waktu Kontinu

- Isyarat waktu kontinu sebagai masukan sistem
- Keluaran: Isyarat waktu kontinu hasil transformasi oleh sistem.
- Notasi:

$$\boxed{x(t) \longrightarrow y(t)}$$

Sistem Waktu Diskret

- Sistem ini mentransformasikan isyarat masukan yang berupa isyarat waktu diskret menjadi isyarat keluaran yang berupa isyarat waktu diskret pula.
- Notasi:

$$\boxed{x[n] \longrightarrow y[n]}$$

Contoh Sistem Sederhana 1

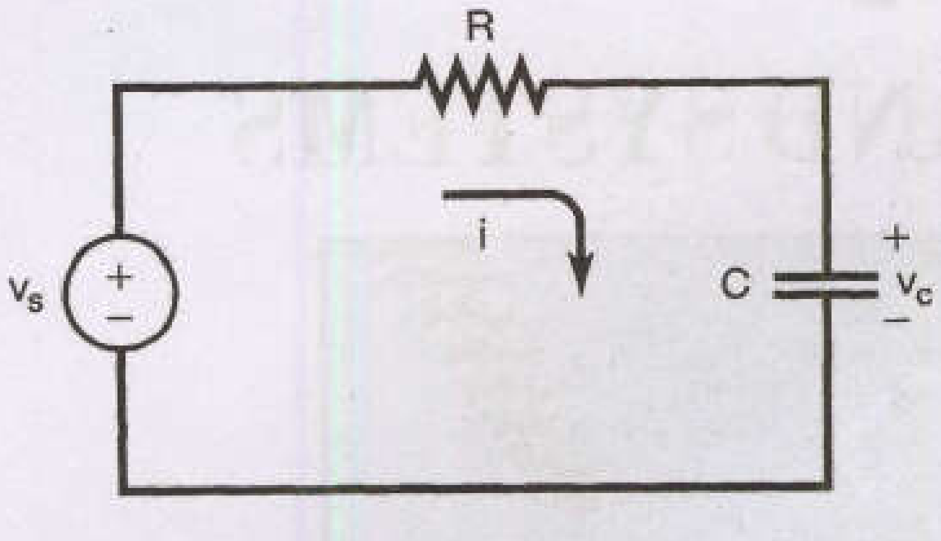


Figure 1.1 A simple *RC* circuit with source voltage v_s and capacitor voltage v_c.

From: Signal & System, Oppenheim & Willsky, 1997 page 2)

- Asumsikan tegangan sumber $v_s(t)$ adalah isyarat masukan dan tegangan kapasitor $v_c(t)$ adalah isyarat keluaran
- Ingat kembali Hukum Kirchoff Tegangan

Contoh Sistem Sederhana 1

$$\boxed{-v_s(t) + i(t)R + v_c(t) = 0}$$

- Dengan demikian,

$$\boxed{i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R} \quad (5)}$$

- Arus *i*(*t*) yang sama diterima pada kapasitor.
- Hubungan *i*(*t*) dan tegangan kapasitor $v_c(t)$:

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \quad (6)}$$

Contoh Sistem Sederhana 1

- Substitusikan (6) pada (5):

$$C\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

- Kelompokkan unsur yang mengandung isyarat keluaran $v_c(t)$ pada ruas kiri persamaan
- Unsur yang mengandung isyarat masukan $v_s(t)$ pada ruas kanan persamaan.
- Didapatkan **persamaan differensial** yang menggambarkan hubungan isyarat masukan $v_s(t)$ dan isyarat keluaran $v_c(t)$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Contoh Sistem Sederhana 2

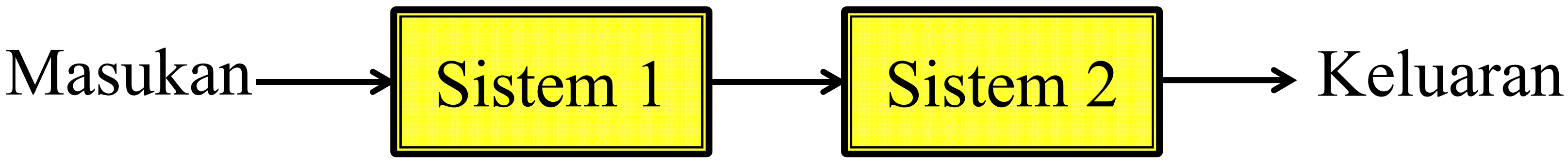
- Asumsikan bahwa y[n] adalah jumlah penduduk suatu negara pada akhir tahun ke-n.
- Sebagai contoh, jumlah penduduk dari tahun ke tahun berubah menurut persamaan berikut ini:

$$\boxed{y[n] = 1,02y[n-1] + x[n]}$$

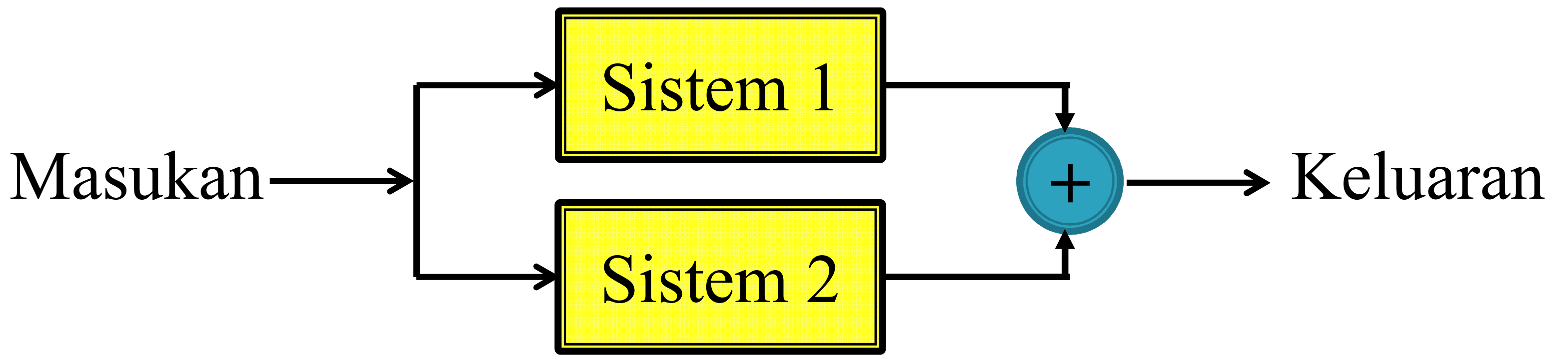
- Di sini 0,02 dapat menggambarkan pesat pertumbuhan penduduk setelah mempertimbangkan pesat kelahiran dan pesat kematian
- Sedangkan x[n] adalah jumlah bersih dari proses migrasi (jumlah penduduk yang pindah masuk ke- dikurangi dengan jumlah penduduk yang meninggalkan negara tersebut).

Interkoneksi antar Sistem

- Series (Cascade) Interconnection

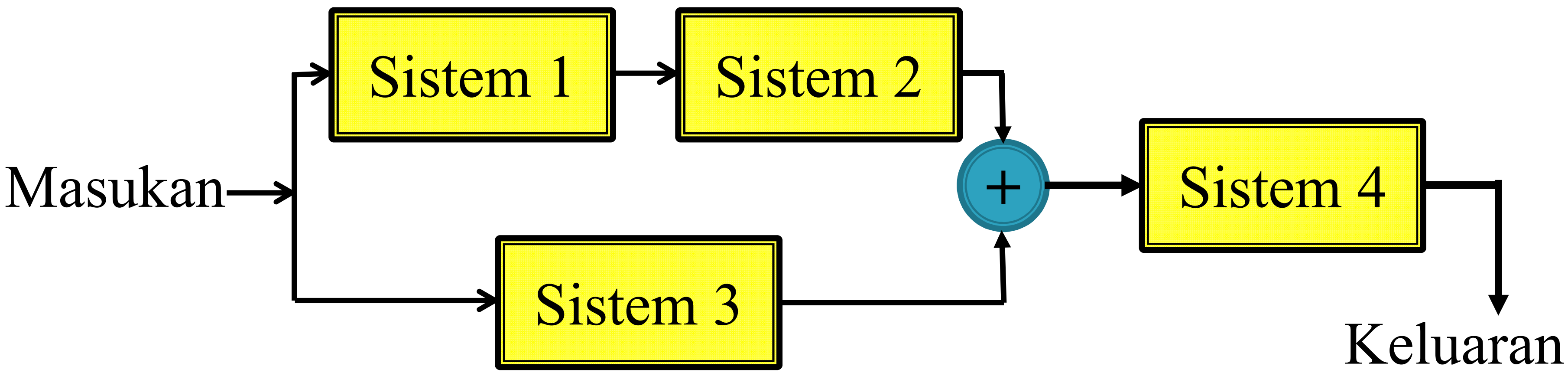


- Paralel Interconnection

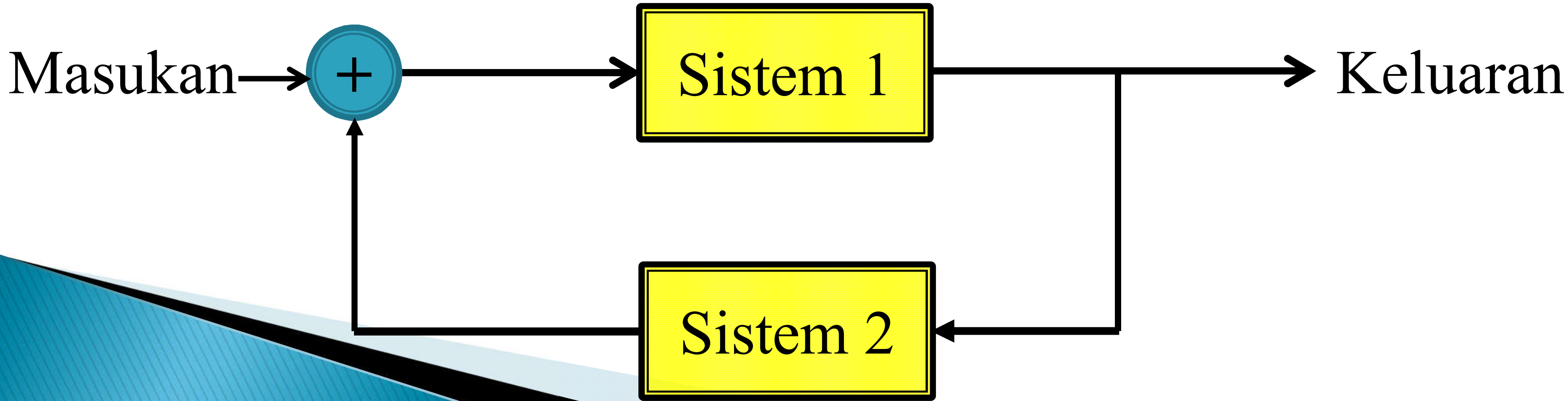


Interkoneksi antar Sistem

- Series-Paralel Interconnection



- Feedback Interconnection



Sifat Sistem Dasar

1. Sistem dengan dan tanpa memory
2. Invertibility dan Sistem Invers
3. Causality
4. Kestabilan
5. Time Invariance
6. Linearitas

Sistem Tak Bermemori

- Sistem tak bermemori (memoryless): adalah sistem yang keluarannya pada setiap saat hanya tergantung pada masukan pada saat atau waktu yang sama.
- Contoh untuk kasus diskret:

$$\boxed{y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2}$$

$$\boxed{y[n] = x[n]}$$

- Contoh untuk kasus kontinu: Resistor

$$\boxed{v_R(t) = Ri(t)}$$

- Di sini arus $i(t)$ yang melalui resistor berperan sebagai masukan dan tegangan jatuh pada resistor $v_R(t)$ berperan sebagai keluaran.
- Contoh lain: $y(t) = x(t)$ => sistem identitas.

Sistem Bermemori

- Sistem bermemori : adalah sistem yang keluarannya pada setiap saat bergantung tidak hanya pada masukan pada waktu yang sama namun juga pada saat atau waktu sebelumnya.

- Contoh untuk kasus diskret: Akumulator atau Penjumlah

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n]}$$

- Tampak bahwa untuk mendapatkan output pada saat n, akumulator harus mengingat keluaran pada saat n-1.

- Contoh lain kasus diskret: Proses Delay

$$\boxed{y[n] = x[n-1]}$$

Sistem Bermemori

- Contoh Kasus Kontinu: Kapasitor
- Jika arus $i(t)$ yang masuk ke kapasitor dianggap isyarat masukan dan tegangan pada kapasitor $v_c(t)$ dipandang sebagai isyarat keluaran, maka:

$$\boxed{v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau}$$

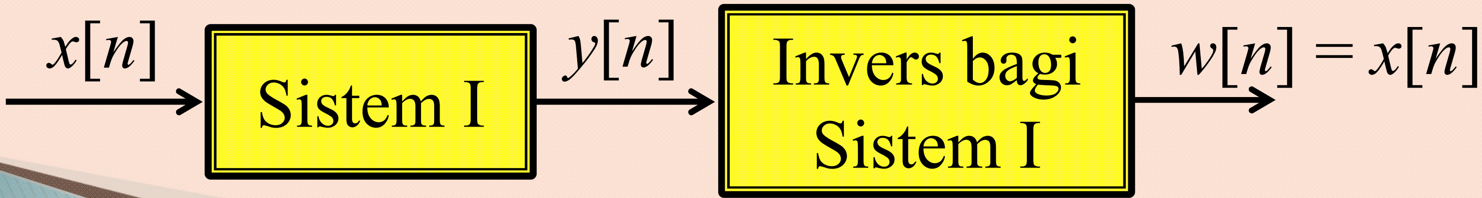
- Contoh Kasus Kontinu yang lain: Delay/Tunda

$$\boxed{y(t) = x(t-1)}$$

Invertibility dan Sistem Invers

- Suatu sistem disebut terbalikkan ("invertible") jika masukan berbeda menghasilkan keluaran berbeda
- Dengan mengamati keluaran, isyarat masukan dapat diketahui.

- Jika Sistem-I bersifat terbalikkan:
  - Terdapat suatu **sistem invers** bagi Sistem-I tersebut
  - Jika Sistem-I dirangkai **secara seri** dengan sistem inversnya maka hubungan seri tersebut akan **ekivalen** dengan sebuah **sistem identitas**.



Invertibility dan Sistem Invers

- Contoh Kasus Kontinu:

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{y(t) = kx(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{w(t) = \frac{1}{k} y(t)} \xrightarrow{w(t) = x(t)}$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{y(t) = x(t-1)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{w(t) = y(t+1)} \xrightarrow{w(t) = x(t)}$$

- Contoh Kasus Diskret:

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\begin{aligned} w[n] &= y[n] \\ &\quad -y[n-1] \end{aligned}} \xrightarrow{w[n]=x[n]}$$

- Contoh Sistem Tak Terbalikkan:

$$\boxed{y(t) = x^2(t) \rightarrow x(t) = ?}$$

$$\boxed{y(t) = |x(t)| \rightarrow x(t) = ?}$$

Ketersebaban (Causality)

- Sistem disebut kausal (tak antisipatif) jika keluaran pada saat ini hanya bergantung pada masukan saat ini dan masukan masa lalu.
- Keluaran tidak mendahului masukan

- Contoh: Rangkaian RC (tegangan kapasitor hanya bereaksi atau merespon nilai tegangan sumber saat ini dan nilai sebelumnya).
- Contoh lain:

$$\boxed{y(t) = x(t-1)} \qquad \boxed{y(t) = kx(t)}$$

Ketersebaban (Causality)

- Sistem disebut **tak kausal** (antisipatif) jika keluaran pada saat ini dipengaruhi oleh masukan pada titik waktu mendatang.
- Keluaran mendahului masukan
- Contoh: $\boxed{y[n] = x[n] - x[n+1]}$

$$\boxed{y(t) = x(t+1)}$$

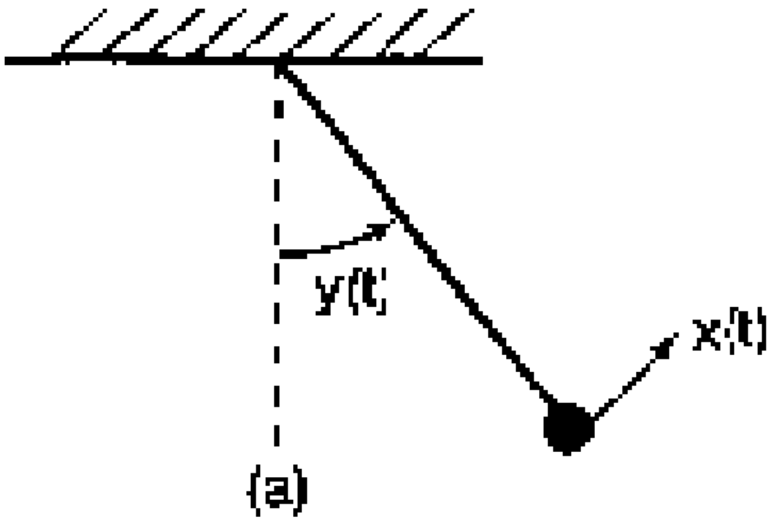
- Sistem tak kausal bisa muncul terutama pada isyarat-isyarat yang variabel bebasnya bukan waktu! (ingat kembali bahasan tentang variabel bebas)
- Contoh: Isyarat gambar
- Bisa pula muncul pada isyarat-isyarat yang sebelumnya telah direkam.

Kestabilan (Stability)

- Sistem stabil: Masukan terbatas => keluaran juga terbatas (Bounded Input Bounded Output (BIBO))
- Dalam ketiadaan ("absence") masukan, dari sembarang keadaan, sistem menuju istirahat (keluaran = 0)
- Pada sistem stabil, masukan yang kecil **tidak akan** menghasikan respon atau keluaran sistem yang divergen.

Contoh: Sistem Pendulum.

- Masukan berupa gaya x(t)
- Keluaran berupa deviasi sudut y(t)



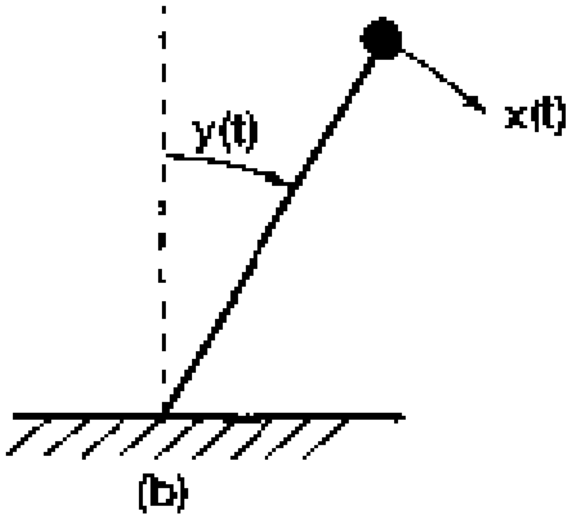
Kestabilan (Stability)

- Sistem pendulum di atas stabil: Jika gaya x(t) kecil, maka simpangan y(t) yang dihasilkan juga kecil akibat keberadaan gaya gravitasi yang cenderung mengembalikan pendulum ke posisi semula (vertikal).

- Sistem tak stabil: Masukan terbatas dapat menimbulkan keluaran yang divergen atau tak terbatas.
- Contoh: Pendulum terbalik

Pendulum Terbalik

- Gaya gravitasi cenderung mendorong terjadinya deviasi terhadap arah vertikal



Kestabilan (Stability)

- Akibatnya, bila dikenakan gaya x(t) yang kecil terhadap pendulum terbalik => terjadi simpangan sudut y(t) yang besar => pendulum roboh.

- Contoh sistem tak stabil: Akumulator (Penjumlah)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

- Misal: saat masukan berupa u[n] yang nilainya bounded (yaitu 1) untuk setiap $n \geq 0$ akan diperoleh:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n]$$

- y[n] akan naik tanpa batas seiring dengan naiknya n

Ketakubahan Waktu (Time Invariance)

- Sistem Time Invariant (Tak Ubah Waktu): Jika masukan ditunda dengan tunda waktu tertentu, keluaran juga akan tertunda dengan **tunda waktu yang sama**.
- Sifat dan karakteristik sistem tetap sepanjang waktu.
- Bila bentuk isyarat masukan sama (walau diberikan ke sistem pada titik waktu yang berbeda): bentuk isyarat keluaran juga sama (hanya sekedar tertunda saja)

- Ilustrasi Sistem Time Invariant :

Kasus Kontinu: Jika $x(t) \longrightarrow y(t)$ maka $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

Kasus Diskret: Jika $x[n] \longrightarrow y[n]$ maka $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$

Ketakubahan Waktu (Time Invariance)

- Sistem Time Varying (Ubah Waktu):

Kasus Kontinu: Jika $x(t) \rightarrow y(t)$

Umumnya $x(t-t_0) \not\rightarrow y(t-t_0)$

Kasus Diskret: Jika $x[n] \rightarrow y[n]$

Umumnya $x[n-n_0] \not\rightarrow y[n-n_0]$

- Apakah sistem, yang masukan dan keluarannya mematuhi relasi berikut, time invariant ataukah time varying:
  1. $y(t) = \sin\{x(t)\}$
  2. $y[n] = n\, x[n]$

Ketakubahan Waktu (Time Invariance)

- Untuk Soal 1: $y(t) = \sin\{x(t)\}$
- Asumsikan sembarang masukan $x_1(t)$ pada sistem sedemikian hingga keluarannya adalah $y_1(t)= \sin\{x_1(t)\}$
- Ciptakan input baru dengan menunda $x_1(t)$

$$x_2(t)= x_1(t-t_0)$$

- Jelas bahwa keluaran sistem saat masukan berupa $x_2(t)$:

$$y_2(t) = \sin\{x_2(t)\} = \sin\{x_1(t-t_0)\}$$

- Namun jika kita tunda $y_1(t)$ dengan nilai tunda yang sama

$$y_1(t-t_0)= \sin\{x_1(t-t_0)\} = y_2(t)$$

- Dengan demikian, jika $x_2(t)= x_1(t-t_0)$ maka $y_2(t)= y_1(t-t_0)$: **Sistem Time Invariant**!

Ketakubahan Waktu (Time Invariance)

- Untuk Soal 2: $y[n] = n\, x[n]$
- Cara yang digunakan pada Soal 1 bisa dipakai di sini.
- Atau bisa digunakan counter example jika kita sudah punya intuisi bahwa sistem ini time varying.

- Ambil $x_1[n] = \delta[n]$ sebagai isyarat masukan
- Keluaran sistem jadi: $y_1[n] = n\, x_1[n] = n\delta[n] = 0$ (karena $\delta[n] \neq 0$ **hanya saat** $n = 0$)
- Bila diperkenalkan $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1]$
- Keluaran sistem jadi: $y_2[n] = n\, x_2[n] = n\, \delta[n-1] = 1\, \delta[n-1] = \delta[n-1]$ (karena $\delta[n-1] \neq 0$ **hanya saat** $n = 1$)

Ketakubahan Waktu (Time Invariance)

- Namun jika kita tunda $y_1[n]$ dengan nilai tunda yang sama yaitu 1:

$$y_1[n-1] = 0 \neq y_2[n]$$

- Dengan demikian, ada situasi di mana saat $x_2[n] = x_1[n-n_0)$ kita dapatkan $y_2[n] \neq y_1[n-n_0]$: **Sistem Time Varying**!

Linearitas Sistem

- Sistem disebut sebagai sistem linear jika memenuhi **sifat additif** dan **sifat scaling** atau **homogen**.
- Katakanlah $y_1(t)$ adalah tanggapan atau keluaran sistem waktu kontinu saat input berupa $x_1(t)$ dan $y_2(t)$ adalah tanggapan sistem waktu kontinu saat input berupa $x_2(t)$.

- Maka sistem disebut linear jika:
  - Tanggapan untuk masukan $x_1(t) + x_2(t)$ adalah $y_1(t) + y_2(t)$ => **sifat additif**
  - Tanggapan untuk $ax_1(t)$ adalah $ay_1(t)$ dengan a konstanta yang dapat bernilai kompleks => **sifat homogen**

- Cara yang sama dapat dikenakan untuk Sistem Waktu Diskret.

Linearitas Sistem

- Karena sifat additif dan sifat homogen merupakan ciri sistem linear maka kombinasi keduanya (yaitu sifat super-posisi) juga merupakan **ciri sistem linear**.

- Sifat **superposisi**: Suatu sistem adalah sistem linear jika saat

$$\boxed{x_1(t) \longrightarrow y_1(t)} \qquad \boxed{x_2(t) \longrightarrow y_2(t)}$$

- Maka berlaku pula (dengan a dan b konstanta kompleks):

$$\boxed{ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)}$$

- Cara yang sama dapat dikenakan untuk Sistem Waktu Diskret.

Contoh

- Tunjukkan bahwa sistem yang masukan ($x(t)$) dan keluarannya ($y(t)$) memenuhi relasi $y(t) = tx(t)$ adalah sistem linear!

- Asumsikan dua buah input $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ yang berturut-turut menghasilkan keluaran sistem $y_1(t)$ dan $y_2(t)$:

$$\boxed{x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)}$$

$$\boxed{x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)}$$

- Jika $x_3(t)$ diberikan oleh

$$\boxed{x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)}$$

Contoh

- Maka bila $x_3(t)$ adalah inputan bagi sistem di atas:

$$\boxed{x_3(t) \longrightarrow y_3(t) = tx_3(t)}$$

- Tampak bahwa:

$$\boxed{\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}}$$

- Dengan demikian sistem di atas adalah sistem linear.

Sistem Tak Linear

- Sistem Tak Linear **TIDAK** memenuhi sifat superposisi (additif dan homogen)
- Contoh: Bisa ditunjukkan bahwa $y(t) = x^2(t)$ bukan sistem linear

- Semisal: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ dan

$$\boxed{x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)} \qquad \boxed{x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)}$$

- Maka berlaku:

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) = x_3^2(t) &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Sistem Tak Linear

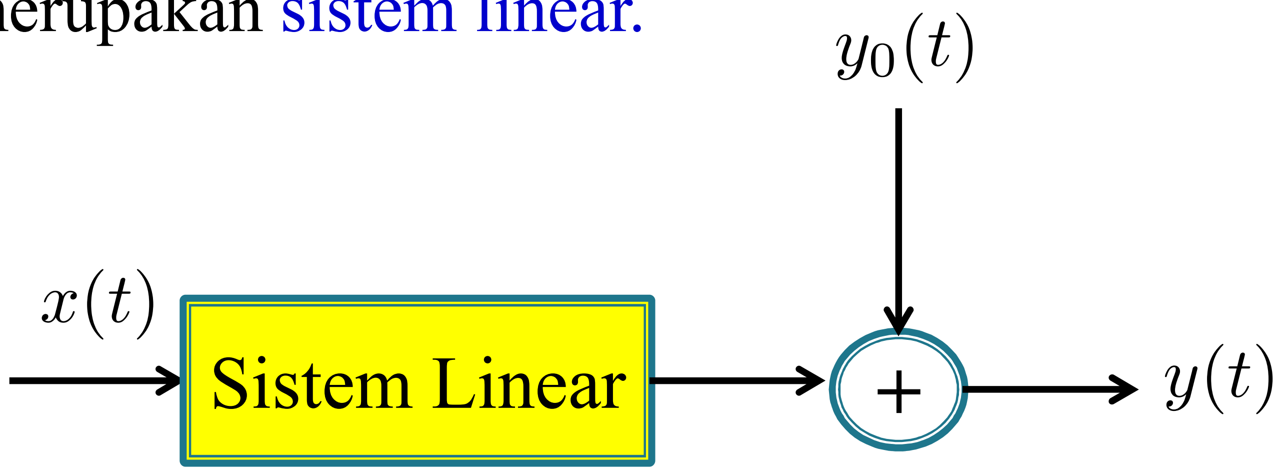
$$y_3(t) = a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2ab x_1(t) x_2(t)$$

- Jelas bahwa pada umumnya $y_3(t) \neq ay_1(t) + by_2(t)$
- Hal ini bisa ditunjukkan dengan memilih $x_1(t)=1$, $x_2(t)=0$, $a=2$, dan $b=0$.
- Dengan demikian sistem di atas **tidak linear**.

- Fokus matakuliah ini: **Sistem LTI (Linear and Time Invariant)**

Pekerjaan Rumah-1

- Tunjukkan bahwa sistem yang sering dikenal dengan sistem "incrementally linear" berikut ini **bukan** merupakan sistem linear.



- Anda bisa menggunakan sembarang relasi linear antara input dan output pada blok sistem linear (blok kuning) di atas

Pekerjaan Rumah-2

- Apakah sistem berikut ini merupakan sistem linear (jika x(t) adalah masukan sistem dan y(t) adalah keluaran sistem sedangkan α dan β adalah konstanta)?

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \beta x(t)}$$