Isyarat dan Sistem (TKIE162102)

D. Dony Ariananda
(dyonisius.dony@ugm.ac.id)
Lab. Sistem Frekuensi Tinggi
Departemen Teknik Elektro dan Teknik Informatika
Universitas Gadjah Mada

Referensi

- Main and Supplement Reference untuk Materi Analisis Fourier
  - Signals and Systems (Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, & S. Hamid Nawab, 2nd edition)
  - Digital Signal Processing (John G. Proakis & Dmitri K. Manolakis, 4th Edition)
  - Advanced Engineering Mathematics (E. Kreyzig, 10th Edition)

Analisis Fourier
Bagian Pertama:
Deret Fourier

Referensi:

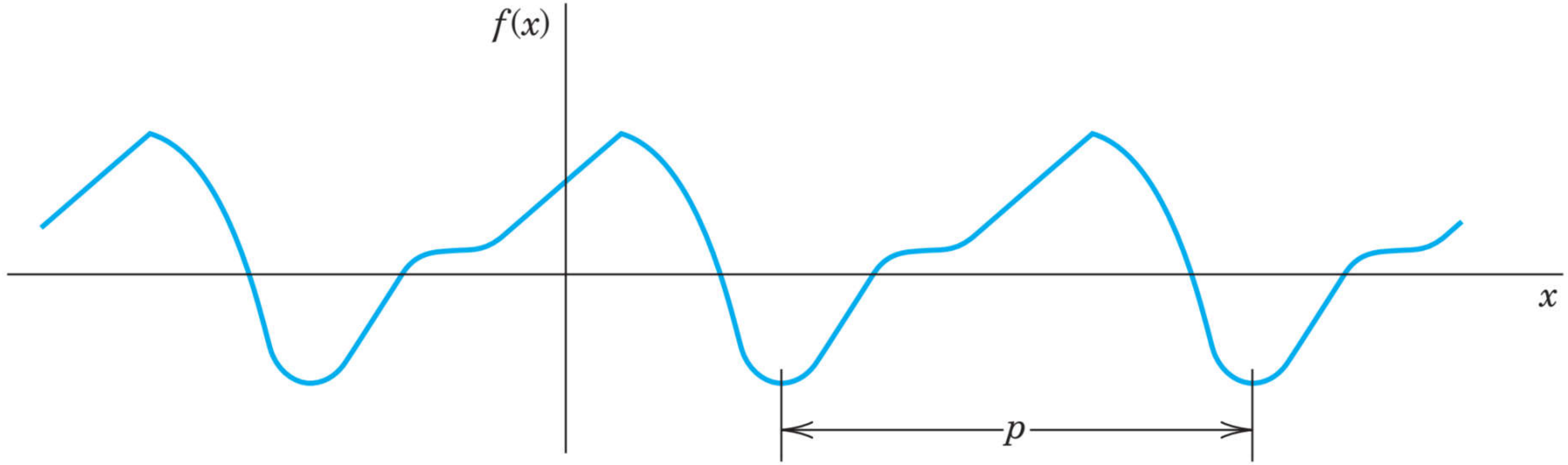
- Signal and System, Oppenheim, Wilsky, & Nawab (Bab 3)
- Digital Signal Processing, Proakis & Manolakis (Bab 4.1)

Deret Fourier (Permasalahan)

- Fokus: Isyarat Periodik
- Problem: Mungkinkah suatu isyarat periodik direpresentasikan sebagai kombinasi linear (weighted sum) dari isyarat-isyarat dasar (basis) yang frekuensinya berbeda-beda?

- Isyarat basis yang dipilih? => ada kaitannya dengan Tanggapan Sistem LTI (Linear Time Invariant)

Isyarat (Sinyal) Periodik



Gambar: Isyarat periodik *f*(*x*) dengan periode sebear *p* (Kreyzig, 2011)

- Isyarat $x(t)$ disebut periodik, jika untuk nilai positif minimum T, berlaku:

$$x(t) = x(T + t), \text{ untuk semua t.}$$

T: Fundamental Period $\omega_0 = 2\pi/T$: Fundamental Frequency

Isyarat (Sinyal) Periodik

- Contoh Sinyal Periodik: Sinyal Sinusoidal

$$x(t) = \cos\omega_0 t$$
$$x(t) = \sin\omega_0 t$$

- Contoh Sinyal Periodik: Sinyal **Eksponential Kompleks**

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\ \omega_0 t + j\ \sin\ \omega_0 t}$$

Dari isyarat **Eksponential Kompleks** di atas:

- Bisa didefinisikan seperangkat atau sekumpulan isyarat yang dikenal dengan set of harmonically related complex exponentials.

Set of Harmonically Related Complex Exponentials

- Terdiri atas:
  - Sebuah isyarat eksponensial kompleks dengan frekuensi yang disebut **frekuensi fundamental**
  - Beserta isyarat-isyarat eksponensial kompleks yang frekuensinya adalah **kelipatan bilangan bulat** dari frekuensi fundamental.

- Set of Harmonically Related Complex Exponential

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Linear Combination of Harmonically Related Complex Exponentials

- Terhadap seperangkat isyarat yang tergabung dalam set of harmonically related complex exponentials, bisa dilakukan operasi kombinasi linear (superposisi).

- Kombinasi linear (weighted sum) dari **Harmonically Related Complex Exponentials**:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad (1).}$$

Isyarat $x(t)$ di atas juga periodik dengan periode yang sama dengan **periode fundamental** yaitu T.

Linear Combination of Harmonically Related Complex Exponentials

Pada persamaan (1) di atas:

- Suku dengan $k = 0$: konstanta,
- Suku dengan $k = \pm 1$: **fundamental components** atau **komponen harmonik pertama** (karena frekuensinya adalah frekuensi fundamental),
- Suku dengan $k = \pm N$: **komponen harmonik ke – N** (frekuensinya adalah N x frekuensi fundamental dan periodenya adalah $(1/N)$ x periode fundamental).

- Ingat bahwa komponen real dan imajiner dari isyarat eksponensial kompleks $e^{jk\omega_0 t}$ adalah isyarat sinusoidal (isyarat $\cos(k\omega_0 t)$ dan $\sin(k\omega_0 t)$)

Contoh: Superposisi Tiga Isyarat Sinusoidal

- Untuk lebih mudah membayangkan superposisi dari sekumpulan isyarat eksponensial kompleks yang harmonik, kita fokus dulu pada superposisi dari sekumpulan isyarat sinusoidal yang saling harmonik.

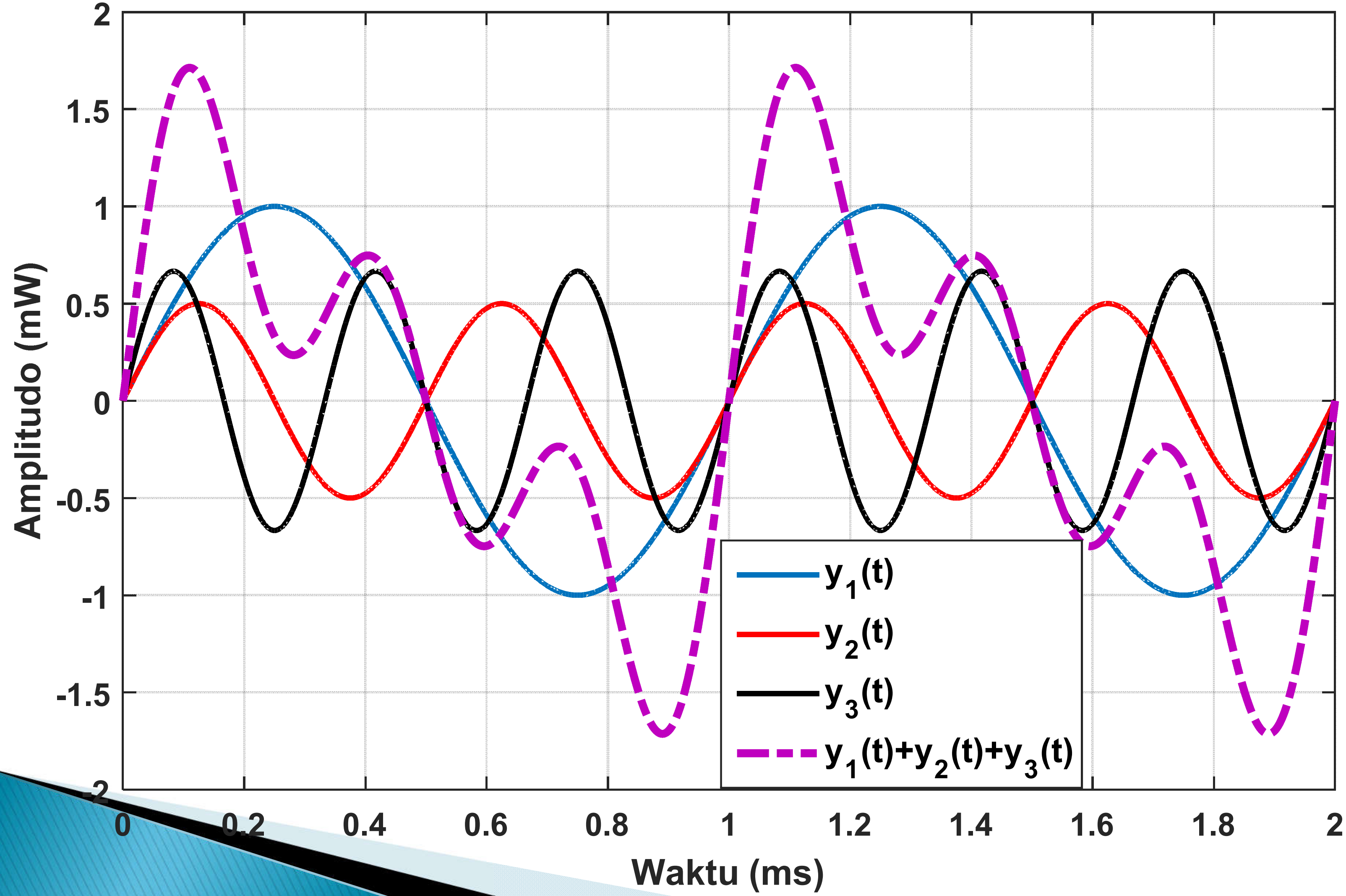
- Diketahui tiga isyarat sinusoidal (dengan $f = 1\text{KHz}$):

$$y_1(t) = \sin(2\pi f t),$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f)t), \qquad y_3(t) = \frac{2}{3}\sin(2\pi(3f)t)$$

- Gambar berikut mengilustrasikan isyarat $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ dan kombinasi linear ketiganya.

Superposisi Tiga Isyarat Sinusoidal



Superposisi Tiga Isyarat Sinusoidal

- Tampak pada isyarat di atas, bahwa $y_1(t)$ memiliki periode sebesar 1 ms.
- Sedangkan periode $y_2(t)$ adalah ½ periode $y_1(t)$ dan periode $y_3(t)$ adalah 1/3 periode $y_1(t)$
- Dengan demikian, $y_1(t)$ merupakan komponen fundamental bagi isyarat $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

- Periode $y_1(t)$ disebut periode fundamental
- $y_2(t)$ dan $y_3(t)$ merupakan komponen sinusoidal harmonik ke-2 dan ke-3.
- Periode dari isyarat $y(t)$ **sama dengan** periode fundamental (yaitu 1 ms)

Deret Fourier

Argumen Jean Baptiste Joseph Fourier:

- Seluruh isyarat periodik dapat direpresentasikan sebagai **kombinasi linear (weighted sum**) dari Harmonically Related Complex Exponentials ataupun isyarat sinusoidal
- Argumen ini tidak sepenuhnya tepat walau pada akhirnya ditemukan bahwa sifat di atas berlaku untuk **sebagian besar kelas isyarat periodik** (meskipun tidak semua)

Deret Fourier

Argumen Jean Baptiste Joseph Fourier (Lanjutan):

- Di sini jika isyarat $x(t)$ periodik dengan periode T maka **seluruh** isyarat-isyarat eksponensial kompleks yang saling harmonik dan yang kombinasi linearnya menyusun isyarat $x(t)$ juga akan periodik dengan periode T.

- Representasi sinyal periodik $x(t)$ sebagai kombinasi linear dari harmonically related complex exponential disebut **Deret Fourier (Fourier Series)** bagi isyarat $x(t)$.

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu

- Jika suatu sinyal periodik $x(t)$ bisa direpresentasikan dalam Deret Fourier, yaitu

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t},} \qquad (1)$$

- Maka koefisien deret Fouriernya diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad (2) \end{aligned}$$

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Asumsikan suatu isyarat periodik $x(t)$ dapat direpresentasikan sebagai superposisi dari isyarat-isyarat eksponensial kompleks yang saling harmonik sebagaimana ditunjukkan (1).
- Pada (1), periode $x(t)$ adalah T yang tidak lain adalah juga periode dari komponen fundamental (yaitu isyarat exp($-jk\omega_0 t$) dengan $k = \pm 1$).

- Maka kita bisa kalikan kedua ruas pada (1) dengan exp($-jn\omega_0 t$):

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Kemudian kita integralkan kedua ruas persamaan di atas dari 0 hingga periode isyarat $x(t)$ yaitu T.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

- Pertukarkan urutan jumlahan dan integral di ruas kanan:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \quad (2a).$$

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Fokus pada proses integrasi di dalam tanda [ ] dan kenakan formula Euler:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt + j\int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t)dt$$

- Saat $k \neq n$, $\cos((k-n)\omega_0 t)$ dan $\sin((k-n)\omega_0 t)$ adalah isyarat periodik dengan periode $(T/|k-n|)$
- Artinya, jika kedua isyarat sinusoidal di atas diintegralkan dengan interval $[0, T]$, maka panjang interval integrasi adalah $|k-n|$ kali periode isyarat sinusoidal tersebut.

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Dengan demikian, saat $k \neq n$, hasil integrasi untuk isyarat sinus dan cosinus di atas adalah 0 karena total luas area di bawah kurva dari isyarat sinus dan cosinus di atas pada interval $[0, T]$ adalah 0.

- Sebaliknya saat $k = n$, diperoleh bahwa:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-k)\omega_0 t} dt = \int_0^T 1 dt = T$$

- Dengan demikian, diperoleh

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \qquad (2b)$$

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Jika kita substitusikan hasil (2b) ke Pers. (2a) diperoleh:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right] = a_n T$$

- Dengan demikian, jelas bahwa:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n \quad (2c)$$

- Perhatikan bahwa hasil integrasi pada (2b) tidak berubah meski selang integrasi diubah dari $[0,T]$ menjadi $[t,T+t]$ untuk sembarang bilangan real t selama panjang selang integrasi sama dengan periode isyarat $x(t)$ yaitu T.

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu (Pembuktian)

- Dengan demikian, (2b) bisa dituliskan sebagai:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \qquad (2d)$$

- Operator integrasi di ruas kiri (2d) mengindikasikan bahwa integrasi bisa dilakukan pada sembarang selang selama panjang selang integrasi adalah T.
- Dengan demikian, jelas bahwa (2c) bisa dituliskan:

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n$$

Tidak lain adalah persamaan (2)

Penentuan Deret Fourier untuk Isyarat Periodik Kontinu: Kesimpulan

- Jika $x(t)$ adalah isyarat periodik kontinu yang dapat diuraikan sebagai kombinasi linear dari harmonically related complex exponentials, maka kedua persamaan berikut mendefinisikan deret Fourier bagi isyarat $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \qquad (1)$$

Persamaan Sintesis

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad (2)$$

Persamaan Analisis

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

- Khusus untuk isyarat real periodik kontinu, terdapat alternatif lain dalam menuliskan deret Fourier.
- Isyarat real periodik kontinu dapat dituliskan sebagai superposisi isyarat sinusoidal yang *harmonically related* alih-alih superposisi isyarat eksponensial kompleks yang *harmonically related*.

- Ingat kembali bahwa representasi isyarat periodik dalam kombinasi linear fungsi eksponensial kompleks yang *harmonically related* dapat dituliskan sebagai:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad (1)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

- Bila kita kenakan operasi konjugat pada kedua ruas pers. (1)

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \left(e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \qquad (3)$$

- Jika $x(t)$ adalah isyarat real maka berlaku $x^*(t) = x(t)$. Dengan demikian pers. (3) bisa dituliskan

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \qquad (3a)$$

- Jika kita bandingkan (1) dengan (3a) maka untuk isyarat real $x(t)$ berlaku:

$$a_k = a_{-k}^* \qquad (3b)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

- Untuk menurunkan bentuk alternatif deret Fourier bagi isyarat real $x(t)$, pers. (1) kita tuliskan ulang sebagai:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right], \qquad (3c)$$

- Substitusi (3b) ke dalam (3c) menghasilkan:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right], \qquad (3d)$$

- Dari (3d) diperoleh:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + \left(a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* \right], \qquad (3e)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

- Berhubung untuk bilangan kompleks $z = x + jy$ diperoleh bahwa $z + z^* = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$, (3e) bisa dituliskan sebagai

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}, \qquad (3f)}$$

- Sampai tahapan ini ada 2 kemungkinan: Koefisien kompleks a_k bisa dituliskan dalam notasi polar ataupun notasi rectangular
- Jika a_k dituliskan dalam notasi polar:

$$\boxed{a_k = A_k e^{j\theta_k}} \longrightarrow \text{dengan } A_k \text{ real positif}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

Kasus I: a_k dituliskan dalam **notasi polar** => pers. (3f) dapat ditulis sebagai

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}\right\} \\ &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \qquad (3g) \end{aligned}}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

Kasus II: a_k dituliskan dalam notasi rectangular

$$\boxed{a_k = B_k + jC_k,}$$

dengan B_k dan C_k adalah bilangan real, maka diperoleh dari (3f):

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left\{(B_k + jC_k)e^{jk\omega_0 t}\right\} \\
&= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{(B_k + jC_k)(\cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t))\right\} \\
&= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\right] \qquad (3h)
\end{aligned}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

- Pertanyaan: Jika diinginkan untuk merepresentasikan isyarat real $x(t)$ dalam representasi deret Fourier dengan fungsi sinusoidal yang harmonis seperti pada (3h):

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)\right] \qquad (3h)$$

- Bagaimana cara menemukan koefisien pada kombinasi linear di atas yaitu a_0, B_k, dan C_k?

- Jawaban: Ada dua cara!

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

Cara 1:

- Temukan a_0 dengan formula (2) dengan $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j(0)\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad (4)$$

- Yang tidak lain adalah nilai rerata $x(t)$ selama 1 periode (komponen konstanta atau komponen DC (direct current) dari $x(t)$)

- Temukan a_k dengan formula (2):

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

Lanjutan Cara 1:

- Kemudian B_k ditemukan dari **komponen real** dari a_k: $B_k = \text{Real}(a_k)$
- C_k ditemukan dari **komponan imajiner** dari a_k: $C_k = \text{Imaginer}(a_k)$.

Cara 2:

- Temukan a_0 dengan cara yang sama seperti pada Cara 1:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \quad (4)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik

Lanjutan Cara 2:

- Kemudian untuk B_k dan C_k pada pesamaan (3h) bisa dicari dengan menggunakan formula berikut:

$$B_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \quad (4a)$$

$$C_k = -\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = -\frac{1}{T}\int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt \quad (4b)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

Pembuktian Pers. (4a) pada Cara 2:

- Tinjau lagi Pers. (3h)

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos(k\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)] \quad (3h)$$

- Kalikan kedua ruas dengan $\cos(n\omega_0 t)$ dengan $n > 0$

$$x(t)\cos(n\omega_0 t) = a_0\cos(n\omega_0 t) +$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)]$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Integralkan kedua ruas terhadap waktu dengan panjang interval integrasi sama dengan periode isyarat $x(t)$ yaitu T (yang tidak lain adalah juga periode dari komponen fundamental (dalam hal ini $\cos(\omega_0 t)$ dan $\sin(\omega_0 t)$))
- Ingat $\omega_0 = 2\pi/T$

$$\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \int_0^T a_0\cos(n\omega_0 t)dt$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^T B_k\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt\right.$$
$$\left.-\int_0^T C_k\sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt\right] \quad (5)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi pertama di ruas kanan pers. (5):

$$\int_0^T a_0 \cos(n\omega_0 t)dt = a_0 \int_0^T \cos(n\omega_0 t)dt$$

- Berhubung $n \neq 0$, tampak bahwa nilai integrasi di atas adalah 0 karena:
  - $\cos(n\omega_0 t)$ periodik dengan periode $T/|n|$ mengingat $\omega_0 = 2\pi/T$.
  - Artinya $\cos(n\omega_0 t)$ pasti juga periodik dengan periode T.
  - Dengan demikian, $$\int_0^T a_0 \cos(n\omega_0 t)dt = 0 \text{ bila } n \neq 0 \quad (5a)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi kedua di ruas kanan pers. (5):

$$\int_0^T B_k \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = B_k \int_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad (5b)$$

- Gunakan identitas $\cos(\alpha)\cos(\beta) = 0{,}5\cos(\alpha+\beta) + 0{,}5\cos(\alpha-\beta)$ sehingga integrasi pada (5b) menjadi:

$$\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+n)\omega_0 t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt \quad (5c)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+n)\omega_0 t)dt = 0 \quad (5d)}$$

karena periode isyarat cosinus di atas adalah $T/|(k+n)|$. Artinya isyarat cosinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva cosinus pada selang $[0,T]$ adalah 0

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \quad (5e)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Hal ini karena pada saat $k \neq n$, periode isyarat cosinus di atas adalah $T/|(k-n)|$ => isyarat cosinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva cosinus pada selang $[0,T]$ adalah 0

- Mempertimbangkan (5c), (5d), dan (5e), integrasi (5b) bisa dituliskan:

$$\int_0^T B_k \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} \frac{B_n T}{2}, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \qquad (5f)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi ketiga di ruas kanan pers. (5):

$$\int_0^T C_k \sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = C_k \int_0^T \sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad (6)$$

- Gunakan identitas sin(α)cos(β) = 0,5sin(α+β) + 0,5sin(α–β) sehingga integrasi pada (6) menjadi:

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin((k+n)\omega_0 t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t)dt \quad (6a)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \sin((k+n)\omega_0 t)dt = 0 \quad (6b)}$$

karena periode isyarat sinus di atas adalah $T/|(k+n)|$. Artinya isyarat sinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva sinus pada selang $[0,T]$ adalah 0

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t)dt = 0 \quad (6c)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Hal ini karena pada saat $k \neq n$, periode isyarat sinus di atas adalah $T/|(k-n)|$ => isyarat sinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva sinus pada selang $[0,T]$ adalah 0.
- Sedangkan saat $k = n$, integrand dari proses integral di atas adalah $\sin((n-n)\omega_0 t) = \sin(0) = 0$.

- Mempertimbangkan (6a), (6b), dan (6c), integrasi pada (6) bisa dituliskan:

$$\boxed{\int_0^T C_k \sin(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0 \quad (6d)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Dengan mempertimbangkan hasil pada Pers. (5a), (5f), dan (6d), integrasi persamaan (5) menghasilkan

$$\boxed{\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = 2\left(\frac{B_n T}{2}\right) = B_n T}$$

- Substitusi variabel *n* dengan *k* dan pindahkan *T* ke ruas kiri untuk memperoleh :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = B_k}$$

yang tidak lain adalah persamaan (4a) (Pembuktian selesai)

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

Pembuktian Pers. (4b) pada Cara 2:

- Tinjau lagi Pers. (3h)

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)\right] \quad (3h)$$

- Kalikan kedua ruas dengan $\sin(n\omega_0 t)$ dengan $n > 0$

$$x(t)\sin(n\omega_0 t) = a_0\sin(n\omega_0 t) +$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\right]$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Integralkan kedua ruas terhadap waktu dengan panjang interval integrasi sama dengan periode isyarat $x(t)$ yaitu T (yang tidak lain adalah juga periode dari komponen fundamental (dalam hal ini $\cos(\omega_0 t)$ dan $\sin(\omega_0 t)$))

$$\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \int_0^T a_0 \sin(n\omega_0 t)dt$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^T B_k \cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt\right.$$
$$\left.-\int_0^T C_k \sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt\right] \quad (7)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi pertama di ruas kanan pers. (7):

$$\int_0^T a_0 \sin(n\omega_0 t)dt = a_0 \int_0^T \sin(n\omega_0 t)dt$$

- Berhubung $n \neq 0$, tampak bahwa nilai integrasi di atas adalah 0 karena:
  - $\sin(n\omega_0 t)$ periodik dengan periode $T/|n|$ mengingat $\omega_0 = 2\pi/T$.
  - Artinya $\sin(n\omega_0 t)$ pasti juga periodik dengan periode T.
  - Dengan demikian,

$$\boxed{\int_0^T a_0 \sin(n\omega_0 t)dt = 0 \text{ bila } n \neq 0 \quad (7a)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi kedua di ruas kanan pers. (7):

$$\int_0^T B_k \cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = B_k \int_0^T \cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad (7b)$$

- Gunakan identitas $\cos(\alpha)\sin(\beta) = 0{,}5\sin(\beta+\alpha) + 0{,}5\sin(\beta-\alpha)$ sehingga integrasi pada (7b) menjadi:

$$\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin((n+k)\omega_0 t)dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T \sin((n-k)\omega_0 t)dt \quad (7c)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Berhubung *k* dan *n* > 0:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \sin((n+k)\omega_0 t)dt = 0 \quad (7d)}$$

karena periode isyarat sinus di atas adalah $T/|(k+n)|$. Artinya isyarat sinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva sinus pada selang $[0,T]$ adalah 0

- Berhubung *k* dan *n* > 0:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \sin((n-k)\omega_0 t)dt = 0 \quad (7e)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Hal ini karena pada saat $k \neq n$, periode isyarat sinus di atas adalah $T/|n-k|$ => isyarat sinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva sinus pada selang $[0,T]$ adalah 0.
- Sedangkan saat $k = n$, integrand dari proses integral di atas adalah $\sin((n-n)\omega_0 t) = \sin(0) = 0$.

- Mempertimbangkan (7c), (7d), dan (7e), integrasi (7b) bisa dituliskan:

$$\int_0^T B_k \cos(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = 0 \quad (7f)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Fokus pada integrasi ketiga di ruas kanan pers. (7):

$$\int_0^T C_k \sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = C_k \int_0^T \sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad (8)$$

- Gunakan identitas sin(α)sin(β) = 0,5cos(α–β) – 0,5cos(α+β) sehingga integrasi pada (8) menjadi:

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+n)\omega_0 t)dt \quad (8a)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+n)\omega_0 t)dt = 0 \quad (8b)}$$

karena periode isyarat cosinus di atas adalah $T/|k+n|$. Artinya isyarat cosinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva cosinus pada selang $[0,T]$ adalah 0

- Berhubung k dan $n > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \quad (8c)}$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Hal ini karena pada saat $k \neq n$, periode isyarat cosinus di atas adalah $T/|k - n|$ => isyarat cosinus tsb periodik juga dengan periode T => luasan area di bawah kurva cosinus pada selang $[0,T]$ adalah 0.
- Sedangkan saat $k = n$, integrand dari proses integral di atas adalah $\cos((n-n)\omega_0 t) = \cos(0) = 1$.

- Mempertimbangkan (8a), (8b), dan (8c), integrasi pada (8) bisa dituliskan:

$$\int_0^T C_k \sin(k\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} \frac{C_n T}{2}, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases} \qquad (8d)$$

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Dengan mempertimbangkan hasil pada Pers. (7a), (7f), dan (8d), integrasi persamaan (7) menghasilkan

$$\boxed{\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = 2\left(\frac{-C_n T}{2}\right) = -C_n T}$$

- Substitusi variabel *n* dengan *k* dan pindahkan *T* ke ruas kiri untuk memperoleh :

$$\boxed{-\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = C_k}$$

yang tidak lain adalah persamaan (4b) (Pembuktian selesai)

Deret Fourier untuk Isyarat Real Periodik (Pembuktian)

- Perhatikan bahwa pembuktian di atas bisa pula dilakukan dengan memilih selang integrasi selain [0,T] (bisa dipilih selang integrasi [t,t+T] dengan $t \neq 0$ sepanjang panjang interval integrasi adalah T

- Itulah mengapa bisa pula kita tuliskan:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = B_k}$$

$$\boxed{-\frac{1}{T}\int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = C_k}$$

Contoh-1

Representasikan isyarat

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

dalam representasi deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks.

- Jawab: Isyarat di atas bisa diuraikan dengan formula Euler yaitu: $\sin(\alpha) = (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})/(2j)$ dan $\cos(\alpha) = 0,5(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$

$$x(t) = 1 + \frac{\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)}{2j} + \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) + \frac{e^{j\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2}$$

Contoh-1 (Lanjutan)

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}\right) e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}\right) e^{-j2\omega_0 t}$$

- Representasi di atas sudah merupakan representasi isyarat $x(t)$ dalam deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks.
- Jika kita bandingkan representasi di atas dengan Pers. (1)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (1)$$

Contoh-1 (Lanjutan)

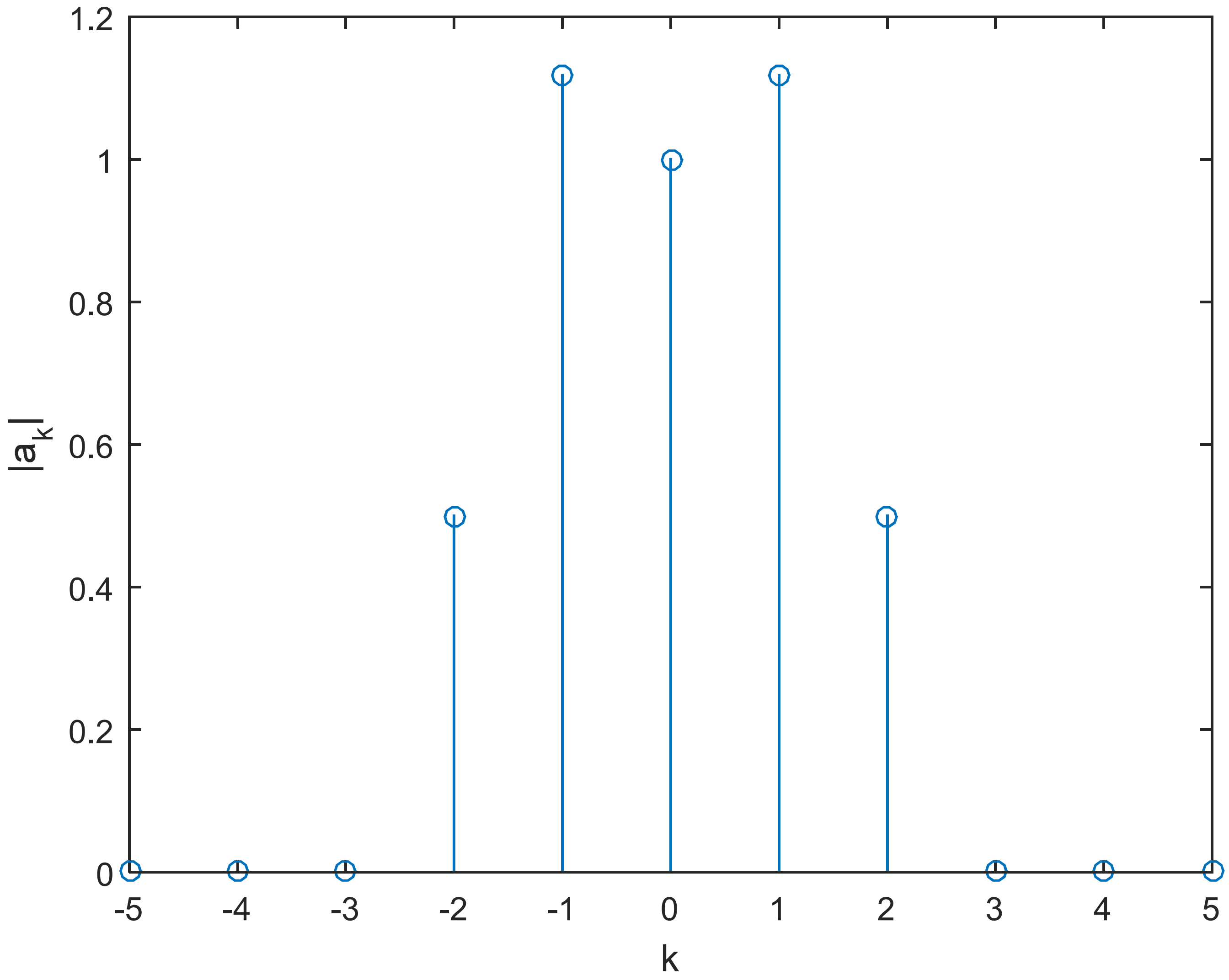
- Maka tampak bahwa koefisien deret Fourier untuk representasi $x(t)$ di atas diberikan oleh:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j$$
$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$$
$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$$
$$a_k = 0, \quad |k| > 2$$

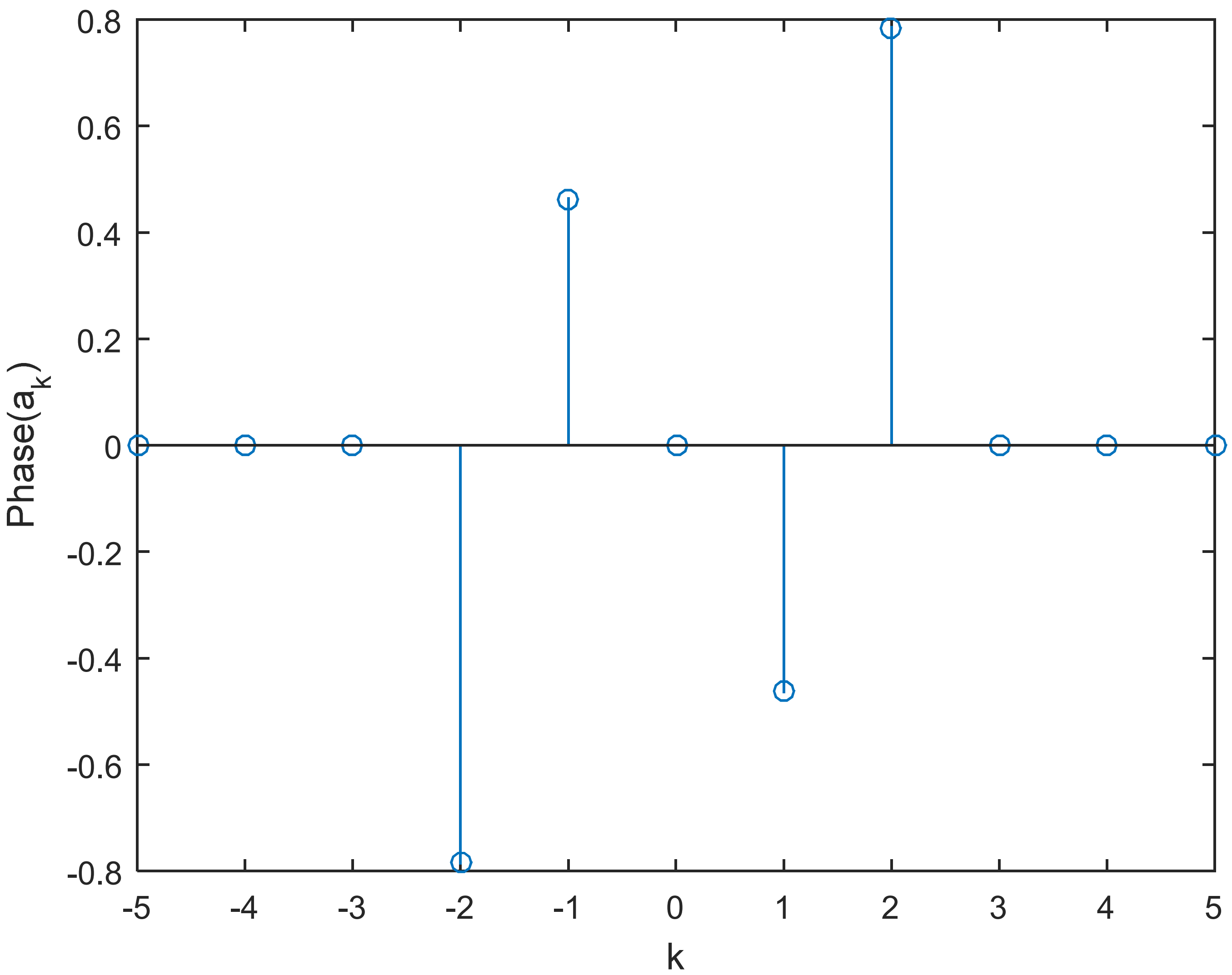
- Dua gambar berikut mengilustrasikan plot magnitude dan plot fase dari koefisien deret Fourier di atas.

Contoh 1 (Lanjutan)



Plot magnitude dari koefisien deret Fourier dengan Fungsi eksponensial kompleks untuk Contoh 1.

Contoh 1



Plot fase dari koefisien deret Fourier dengan Fungsi eksponensial kompleks untuk Contoh 1.

Contoh 1

- Magnitude koefisien deret Fourier a_k menggambarkan seberapa besar **kontribusi** komponen isyarat $\exp(jk\omega_0 t)$ dalam isyarat $x(t)$.

- Perhatikan bahwa jika yang diminta adalah representasi $x(t)$ dalam Deret Fourier dengan fungsi trigonometri seperti pada Pers. (3h) maka kita hanya perlu melakukan modifikasi pada soal yang diberikan.
- Tinjau lagi soal di atas:

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Bentuk $\cos(2\omega_0 t + \pi/4)$ bisa dijabarkan seperti di bawah ini:

Contoh 1

$$\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\omega_0 t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\omega_0 t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\omega_0 t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

- Dengan demikian, kita bisa tuliskan $x(t)$ sebagai

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\omega_0 t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

- Bila kita kaitkan dengan representasi Deret Fourier dengan fungsi Trigonometri pada pers (3h):

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t) - C_k\sin(k\omega_0 t)\right] \qquad (3h)$$

Contoh 1

- Maka jelas bahwa koefisien dari representasi deret di atas diberikan oleh:

$$a_0 = 1 \qquad B_1 = 1 \qquad C_1 = -\frac{1}{2}$$

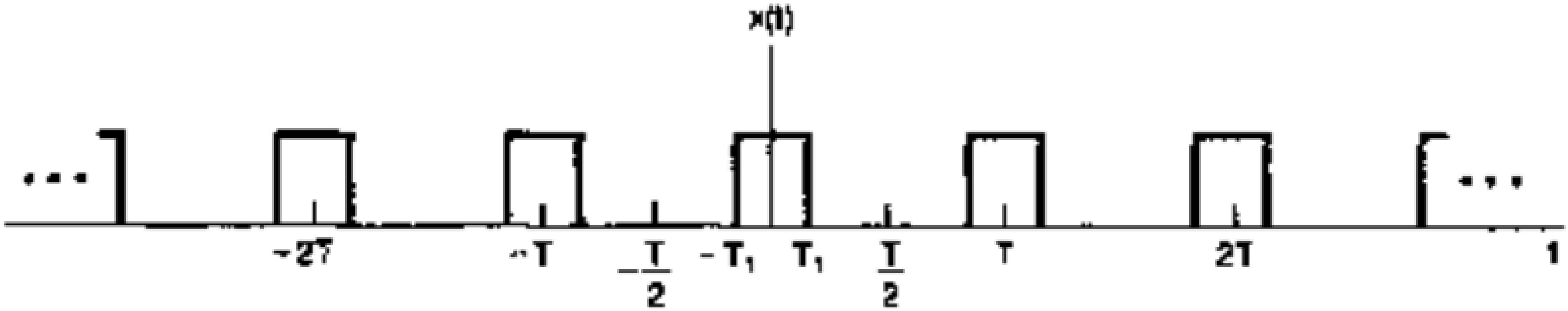
$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- Perhatikan bahwa pada Contoh 1 ini kita TIDAK menggunakan formula analysis pada Pers. (2) guna mencari koefisien deret Fourier.
- Hal ini karena $x(t)$ pada soal sudah dalam kombinasi linear fungsi trigonometri yang bisa dengan mudah diuraikan dalam bentuk eksponensial kompleks dengan Formula Euler.

Contoh 2

- Tentukan representasi deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks dari **gelombang kotak periodik** (lihat Fig 3.6 Signal & System, Oppenheim, 2ed) di mana definisi untuk 1 perioda adalah:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



Gambar: **Gelombang kotak periodik** (Fig 3.6 Signal & System, Oppenheim, 2ed)

Contoh-2

Solusi:

- Tampak bahwa $x(t)$ periodik dengan periode fundamental sebesar T sedangkan frekuensi fundamental dapat dituliskan sebagai $\omega_0 = 2\pi/T$.
- $x(t)$ simetris terhadap titik t=0 => fokus pada selang $-T/2 < t < T/2$ sebagai perioda.

- Koefisien deret Fourier untuk k=0 bisa diperoleh dengan mensubstitusikan k=0 ke persamaan analisis (2):

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1dt = \frac{2T_1}{T} \quad (9)}$$

Nilai rerata dari $x(t)$

Contoh-2

- Koefisien deret Fourier untuk $k \neq 0$ bisa diperoleh dengan persamaan analisis (2):

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} \\
&= \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] \\
&= \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \qquad (9a)
\end{aligned}
$$

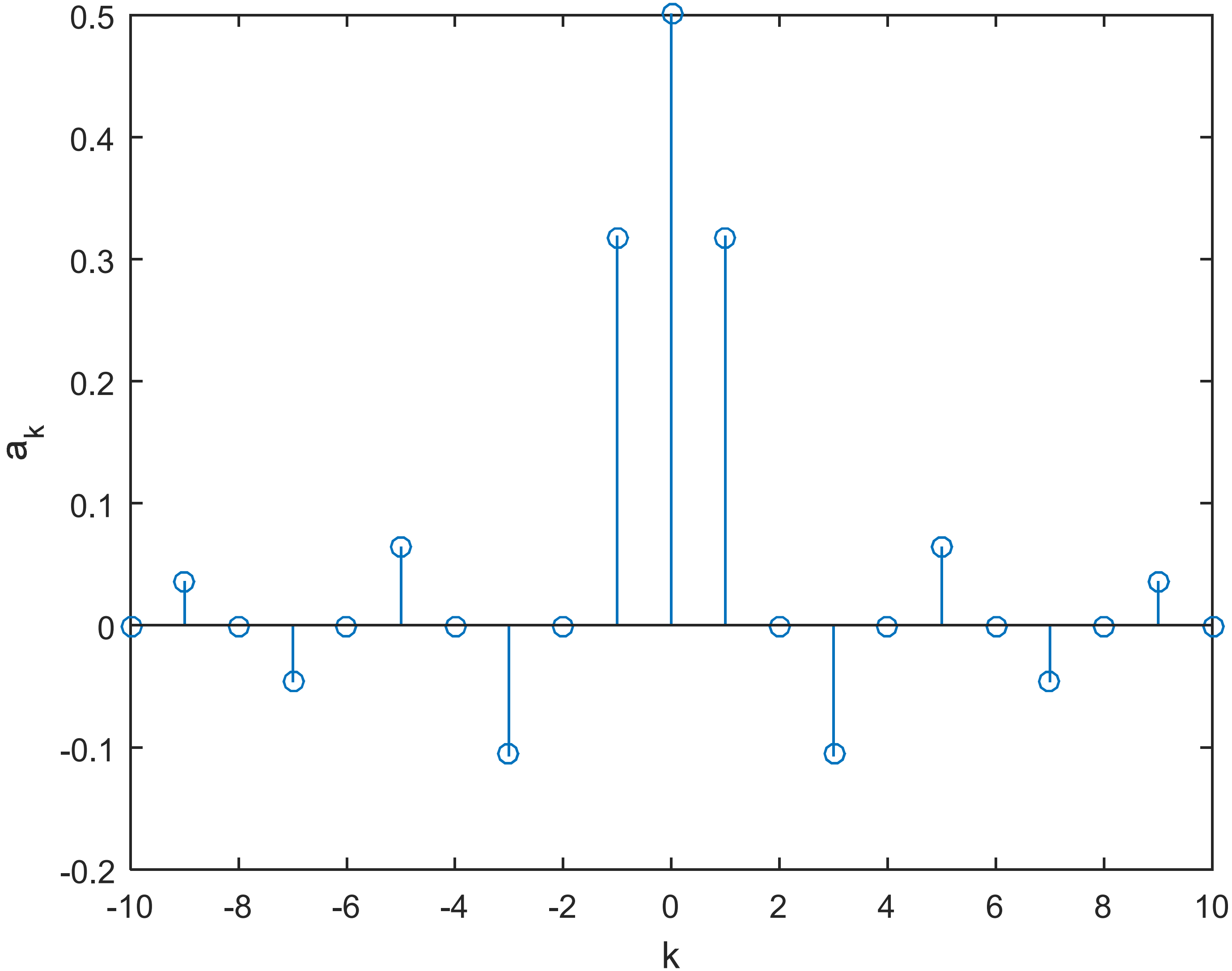
Contoh-2

- Di mana pada langkah terakhir kita memanfaatkan relasi $\omega_0 = 2\pi/T$
- Untuk kasus spesifik $T=4T_1$ kita dapatkan:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0}$$

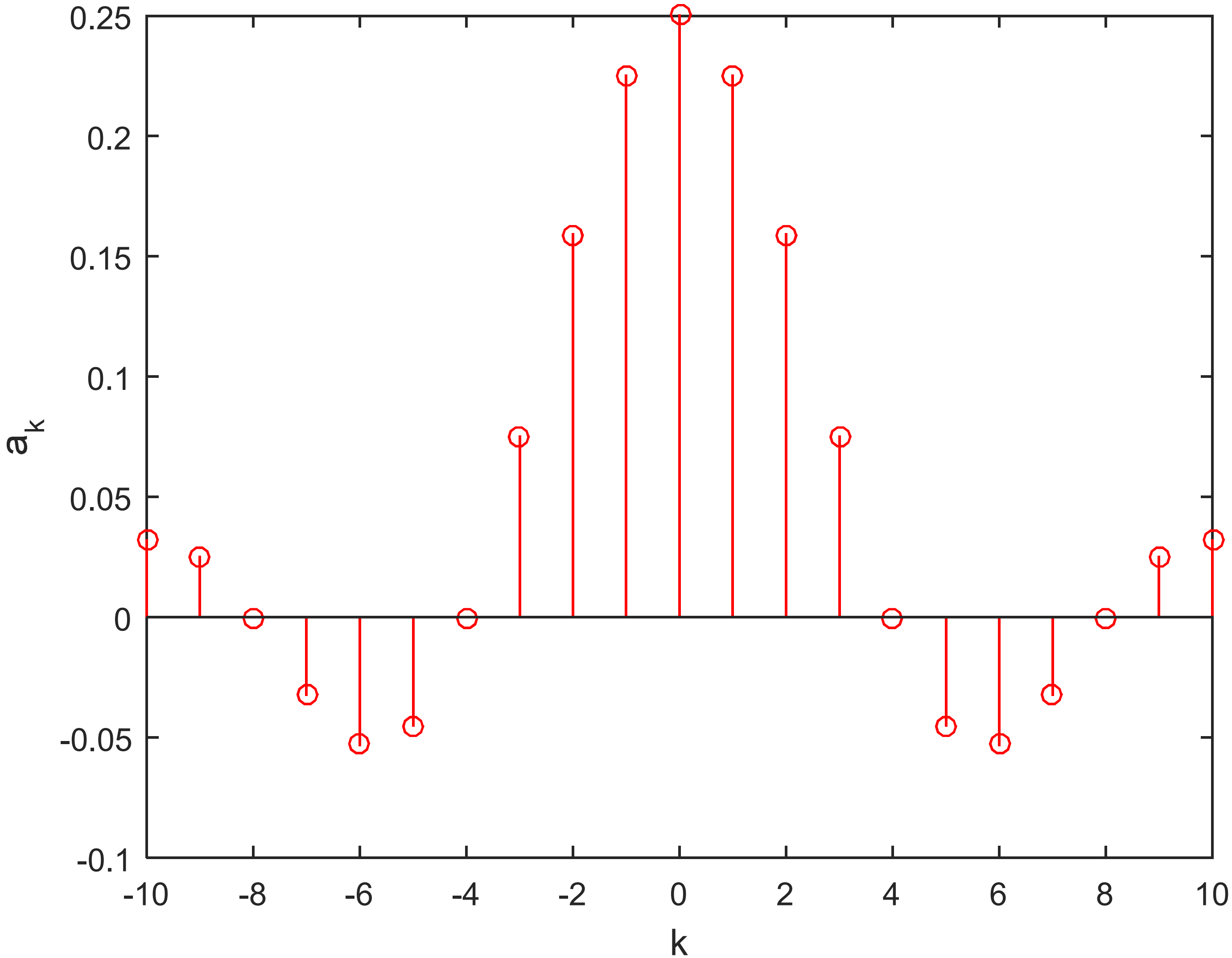
- Tampak bahwa untuk kasus gelombang kotak periodik di atas, a_k selalu bernilai real
- Dengan demikian, dalam memplot a_k kita tidak perlu memisahkan ke dalam plot magnitude dan plot fase dari a_k.
- Sebaliknya, kita cukup memplot nilai a_k untuk berbagai nilai k saja.

Contoh-2



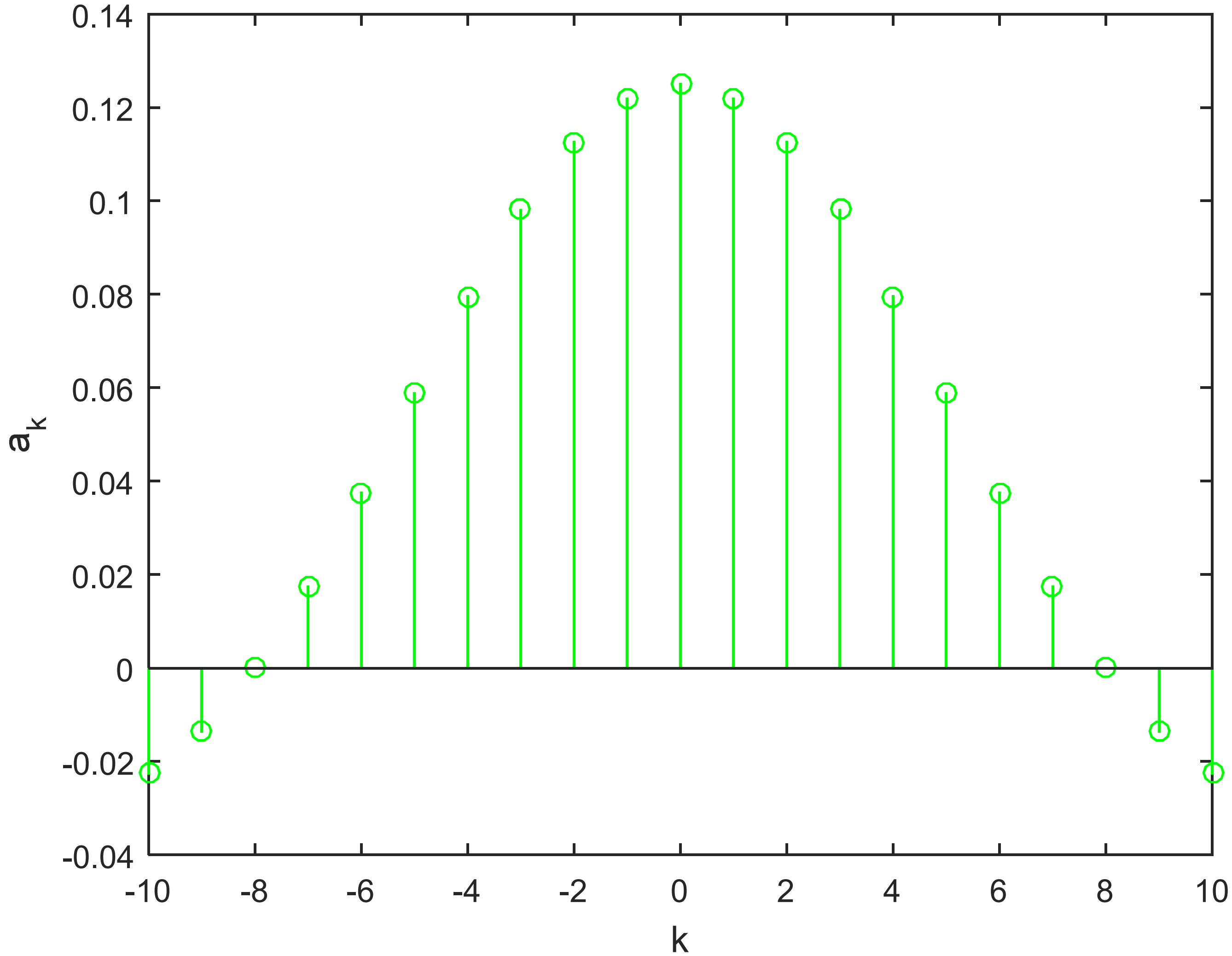
Gambar: Koefisien Deret Fourier a_k pada Contoh 2 untuk kasus $T = 4T_1$.

Contoh-2



Gambar: Koefisien Deret Fourier a_k pada Contoh 2 untuk kasus $T = 8T_1$.

Contoh-2



Gambar: Koefisien Deret Fourier a_k pada Contoh 2 untuk kasus $T = 16T_1$.

Contoh-2

- Bentuk kurva koefisien deret Fourier a_k yang dihasilkan pada ketiga gambar di atas sering disebut dengan kurva sinc (sinc function)
- Tampak bahwa seiring dengan semakin besarnya nilai T/T_1, ukuran main lobe pada fungsi sinc akan semakin gemuk namun ketinggiannya menurun.

- Perhatikan pula bahwa isyarat $x(t)$ pada contoh ini adalah isyarat real (tidak memiliki komponen imajiner).
- Artinya $x(t)$ bisa pula direpresentasikan dalam deret Fourier dengan fungsi Trigonometri (sinus dan cosinus) seperti pada Pers. (3h).

Contoh-2

- Ingat kembali bahwa pada representasi $x(t)$ dalam Deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks, koefisien deret Fourier diberikan oleh persamaan (9) dan (9a):

$$a_0 = \frac{2T_1}{T} \quad (9)$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (9a)$$

- Sebagaimana telah diuraikan di depan, saat $x(t)$ ingin direpresentasikan dalam Deret Fourier dengan fungsi trigonometri menurut (3h):

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (3h)$$

Contoh-2

- Maka koefisien B_k dan C_k bisa diperoleh dari a_k dengan cara:

B_k = Real(a_k):

$$= \text{Real}\left(\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\right) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

C_k = Imaginer(a_k):

$$= \text{Imaginer}\left(\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Contoh-2

- Dengan demikian, $x(t)$ bisa dituliskan dalam deret Fourier dengan fungsi Trigonometri sebagai:

$$x(t) = \frac{2T_1}{T} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t) \quad (9b)$$

- Sedangkan dalam deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks, $x(t)$ bisa dituliskan sebagai:

$$x(t) = \frac{2T_1}{T} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} e^{jk\omega_0 t} \quad (9c)$$

Contoh-2

- Untuk kasus di mana $T = 4T_1$, representasi $x(t)$ dalam deret Fourier dengan fungsi Trigonometri pada Pers. (9b) menjadi:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2T_1}{T} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\cos(k\omega_0 t) \\
&= \frac{2T_1}{4T_1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)T_1\right)}{k\pi}\cos\left(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)t\right) \\
&= \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi t}{2T_1}\right)
\end{aligned}
$$

Contoh-2

- Untuk kasus di mana $T = 4T_1$, representasi $x(t)$ dalam deret Fourier dengan fungsi Trigonometri, dengan memasukkan nilai k satu per satu, bisa dituliskan sebagai:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2T_1}\right) - \frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi t}{2T_1}\right) + \frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi t}{2T_1}\right) \pm \ldots$$

Contoh-2

- Sedangkan, untuk kasus di mana $T = 4T_1$, representasi $x(t)$ dalam deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks pada Pers. (9c) menjadi:

$$x(t) = \frac{2T_1}{T} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{2T_1}{4T_1} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)T_1)}{k\pi} e^{jk\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)T_1)}{k\pi} e^{jk\left(\frac{2\pi}{4T_1}\right)t}$$

Contoh-2

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{j\left(\frac{k\pi}{2T_1}\right)t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{j\left(\frac{k\pi}{2T_1}\right)t}$$

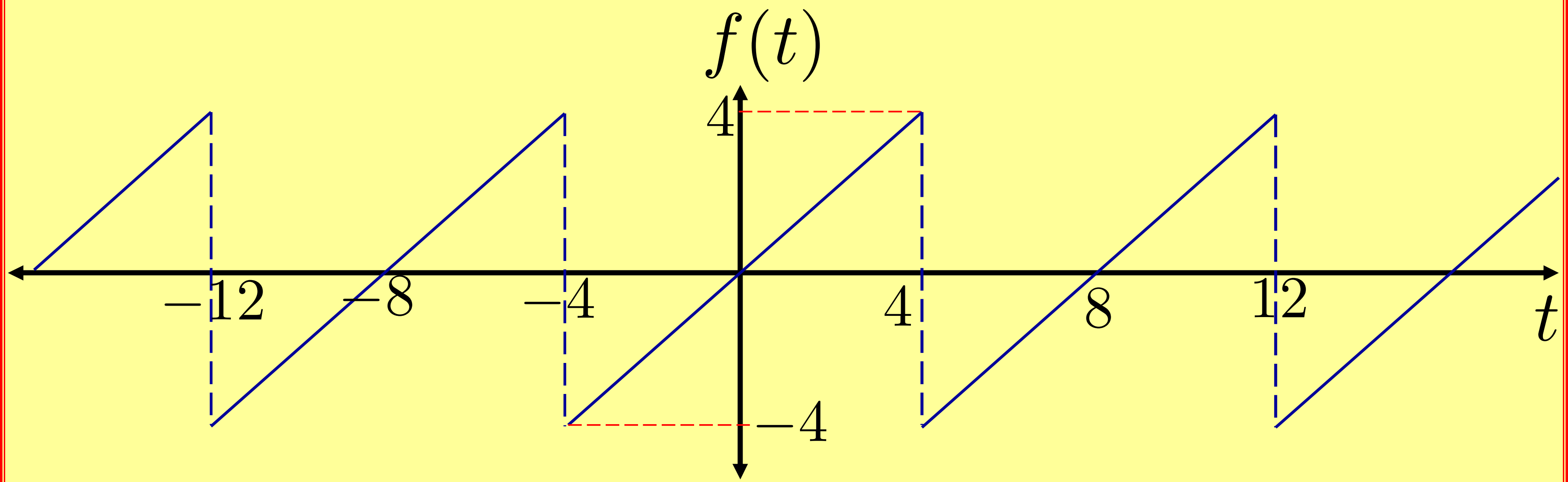
- Untuk kasus di mana $T = 4T_1$ di atas, jika nilai k kita masukkan satu per satu, maka representasi $x(t)$ dalam deret Fourier dengan fungsi eksponensial kompleks bisa dituliskan sebagai:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{\frac{j\pi t}{2T_1}} + \frac{1}{\pi} e^{\frac{-j\pi t}{2T_1}} - \frac{1}{3\pi} e^{\frac{j3\pi t}{2T_1}} - \frac{1}{3\pi} e^{\frac{-j3\pi t}{2T_1}}$$

$$+ \frac{1}{5\pi} e^{\frac{j5\pi t}{2T_1}} + \frac{1}{5\pi} e^{\frac{-j5\pi t}{2T_1}} - \frac{1}{7\pi} e^{\frac{j7\pi t}{2T_1}} - \frac{1}{7\pi} e^{\frac{-j7\pi t}{2T_1}} \pm \ldots$$

Contoh-3

- Tentukan deret Fourier bagi isyarat di kawasan waktu berikut ini:



- Tentukan representasi deret Fourier dalam fungsi trigonometri bagi isyarat $f(t)$ di atas.

Contoh-3

- Tampak $f(t)$ memiliki periode T=8 dengan definisi untuk 1 periode diberikan oleh $f(t) = t$ untuk $-4<t<4$.
- Akan dituliskan $f(t)$ dalam bentuk berikut ini

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

- Berhubung T=8 maka $\omega_0=2\pi/T=\pi/4$, maka

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right) - C_k \sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]$$

Contoh-3

- Di mana a_0 diberikan oleh Persamaan (4).

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt}$$

- Berhubung *f*(*t*) simetris terhadap sumbu vertikal, akan lebih mudah jika kita pilih selang integrasi sepanjang 1 periode mulai dari -4 hingga 4.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-4}^{4} f(t)dt = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} tdt = \frac{1}{8}\left[\frac{t^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(4^2 - (-4)^2) = 0$$

Contoh-3

- Kemudian B_k diberikan oleh Persamaan (4a).
- Berhubung $f(t)$ simetris terhadap sumbu vertikal, kita pilih juga selang integrasi sepanjang 1 periode mulai dari -4 hingga 4.

$$B_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} t\ \cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

- Sampai tahapan ini kita perlu menggunakan **integral parsial**.

Contoh-3

$$B_k = \frac{1}{8}\left[\left(t\frac{4}{k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4} - \frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\frac{4}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

$$B_k = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{16}{k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{4}(4)\right) - \left(\frac{-16}{k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{4}(-4)\right)\right]$$

$$+\left(\frac{1}{2k\pi}\right)\left(\frac{4}{k\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4}$$

- Berhubung *k* adalah bilangan bulat:

$$B_k = \frac{1}{8}[0-0] + \left(\frac{2}{k^2\pi^2}\right)[\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)] = 0$$

Contoh-3

- C_k diberikan oleh Persamaan (4b).
- Sekali lagi kita pilih juga selang integrasi sepanjang 1 periode mulai dari -4 hingga 4.

$$C_k = -\frac{1}{T}\int_T f(t)\sin(k\omega_0 t)dt = -\frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f(t)\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

$$= -\frac{1}{8}\int_{-4}^{4} t\,\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

- Sekali lagi kita perlu menggunakan integral parsial.

Contoh-3

$$C_k = -\frac{1}{8}\left[\left(t\frac{4}{k\pi}\right)(-1)\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4} + \frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\frac{4}{k\pi}(-1)\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

$$C_k = \frac{1}{2k\pi}\left[t\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4} - \frac{1}{2k\pi}\int_{-4}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right)dt$$

$$C_k = \frac{1}{2k\pi}\left[4\cos(k\pi) - (-4)\cos(-k\pi)\right] - \frac{1}{2k\pi}\left[\frac{4}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4}$$

Contoh-3

$$C_k = \frac{1}{2k\pi}\left[8\cos(k\pi)\right] - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]_{-4}^{4}$$

$$C_k = \frac{4}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right]$$

$$C_k = \frac{4}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[0-0\right] = \frac{4}{k\pi}\cos(k\pi)$$

- Tampak bahwa

$$C_k = \begin{cases} -\frac{4}{k\pi}, & \text{saat } k \text{ ganjil} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{saat } k \text{ genap} \end{cases} \qquad (10)$$

Contoh-3

- Kita akan tuliskan representasi deret Fourier dalam fungsi Trigonometri bagi $f(t)$:

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos\left(\frac{k\pi}{4}t\right) - C_k \sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right]$$

- Berhubung $a_0 = 0$ dan $B_k = 0$ untuk semua nilai $k = 1, 2, \ldots$, sedangkan C_k diberikan oleh persamaan (10) maka

$$\begin{aligned} f(t) &= -2\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k \sin\left(\frac{k\pi}{4}t\right)\right] \\ &= -2\left[-\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{4}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) - \frac{4}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\ldots\right] \end{aligned}$$

Contoh-3

- Dengan demikian,

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{4}t\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{6\pi}{4}t\right) \pm \ldots\right]$$