

Isyarat dan Sistem

(TKU212141)

D. Dony Ariananda

(dyonisius.dony@ugm.ac.id)

Lab. Sistem Frekuensi Tinggi

Departemen Teknik Elektro dan Teknik Informatika

Universitas Gadjah Mada

Referensi

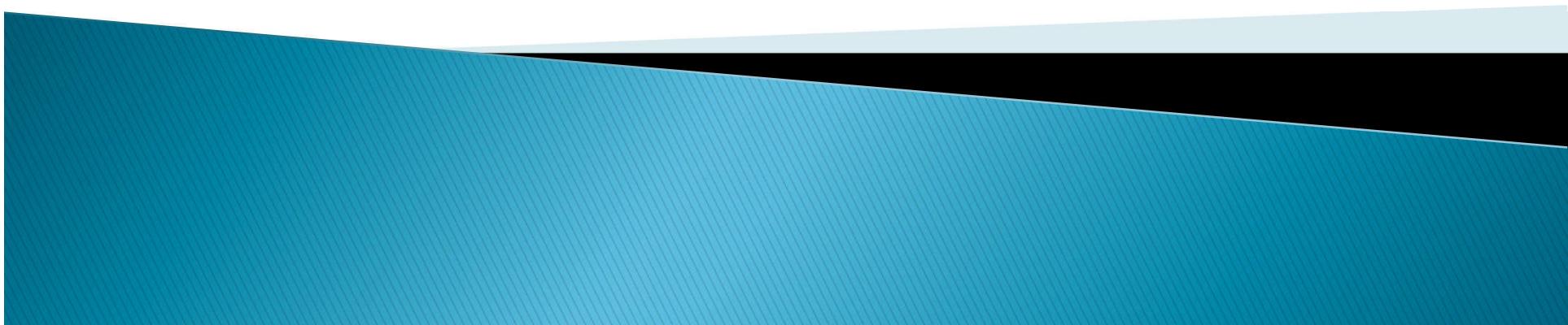
► Main Reference (Sebelum UTS)

- Signals and Systems (Oppenheim, Willsky, & Hamid Nawab, 2nd edition)
- Signal, System and Inference (Oppenheim & Verghese)



Pengenalan Isyarat dan Sistem

Sumber Bacaan:
Signal and System, Oppenheim,
Willsky, & Hamid Nawab, Bab 1



Pengenalan Isyarat

- ▶ Isyarat dapat menggambarkan berbagai **fenomena fisik**.
- ▶ Pola variasi dalam bentuk isyarat menggambarkan informasi **perubahan dari besaran fisik tersebut**.

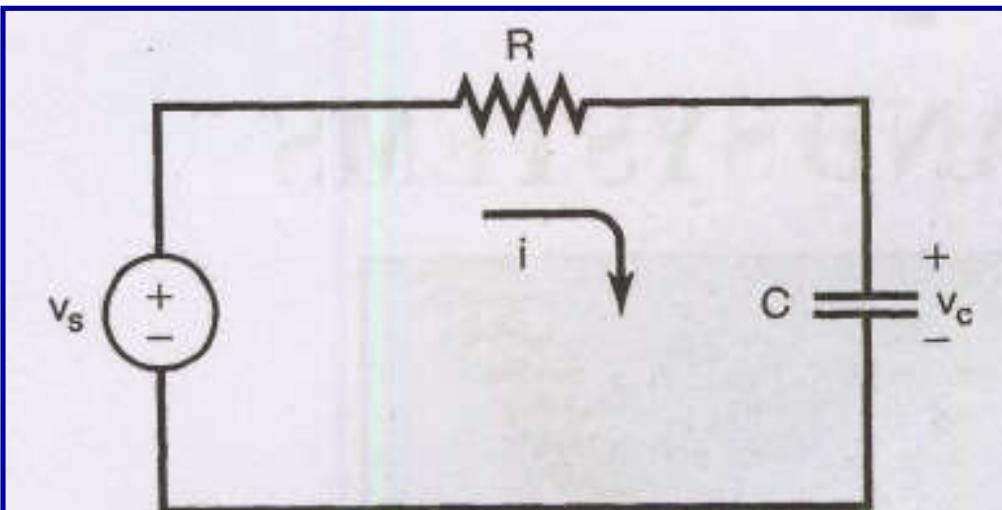


Figure 1.1 A simple RC circuit with source voltage v_s and capacitor voltage v_c .

From: Signal & System,
Oppenheim & Willsky,
1997 page 2)

Pengenalan Isyarat

- ▶ Pada gambar di atas, variasi perubahan nilai **tegangan sumber** (v_s) dan nilai **tegangan kapasitor** (v_c) seiring dengan perubahan waktu => contoh isyarat.
- ▶ **Contoh lain:** perubahan **gaya** yang dikenakan pada mobil (f) serta **kecepatan mobil** yang dihasilkan (v) pada gambar berikut.

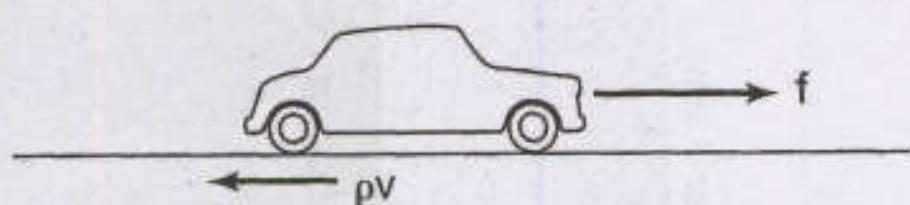


Figure 1.2 An automobile responding to an applied force f from the engine and to a retarding frictional force pV proportional to the automobile's velocity v .

From: Signal & System,
Oppenheim & Willsky,
1997 page 2)

Pengenalan Isyarat

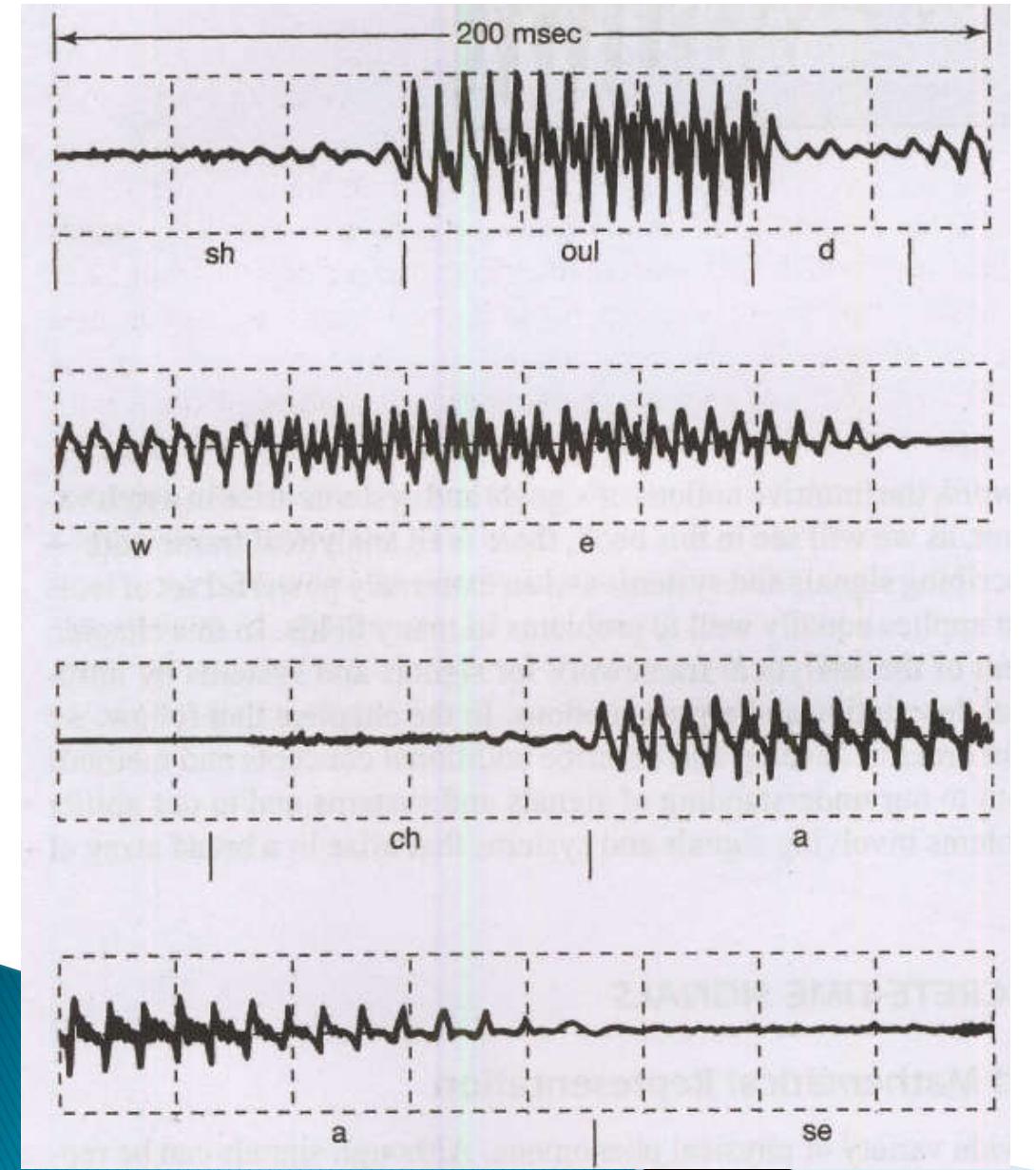


Fig. 1.3 of Signal & System, Oppenheim & Willsky, 1997 page 2)

- ▶ Gambar di samping adalah potongan isyarat suara
- ▶ Isyarat ini merepresentasikan **variasi tekanan akustik** sebagai fungsi waktu untuk kalimat “should we chase”

Pengenalan Isyarat

- ▶ Pada gambar di atas, tampak bahwa bunyi yang berbeda ternyata direpresentasikan dengan **pola variasi tekanan akustik** yang berbeda.



- ▶ Untuk **gambar monochrome** (seperti gambar di samping), yang bisa dianggap sebagai **isyarat 2-dimensi**, variasi nilai isyarat menggambarkan tingkat keterangan (brightness) dari gambar.

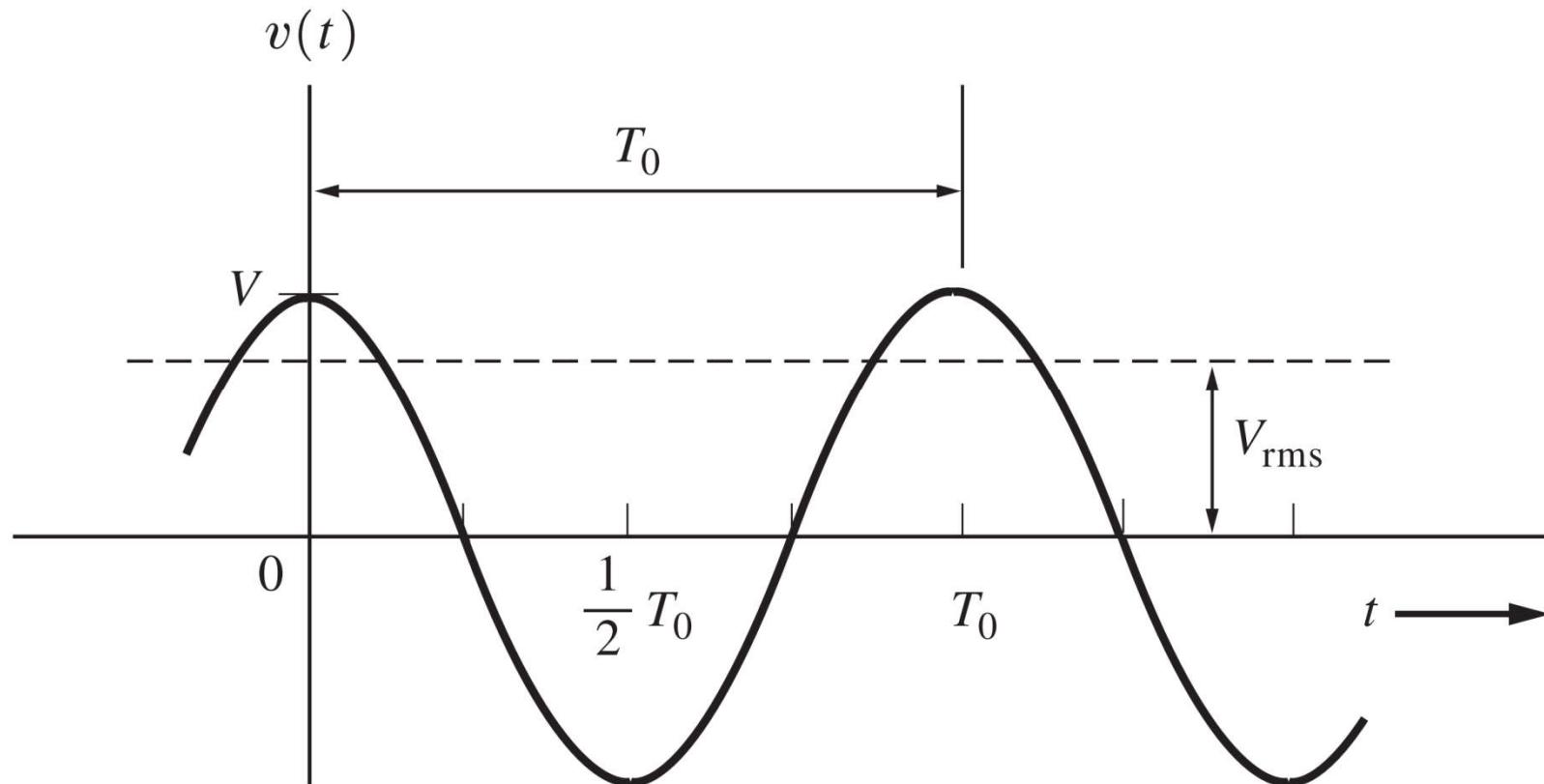
Isyarat dan Variabel Bebas (Independent Variables)

- ▶ Secara matematis, isyarat direpresentasikan sebagai **fungsi dari satu atau lebih variabel bebas**.
- ▶ Untuk isyarat tegangan v_c dan v_s pada gambar 1.1 di atas, variabel bebas berupa waktu => isyarat menggambarkan variasi nilai tegangan sebagai fungsi waktu.

- ▶ Pada kasus **gambar monochrome**, variabel bebas berupa 2 buah variabel ruang (**variabel spasial**).
- ▶ Kedua variabel spasial merepresentasikan koordinat lokasi tertentu pada gambar.
- ▶ Isyarat gambar monochrome merupakan variasi brightness (derajat keterangan) sebagai fungsi kedua variabel spasial.

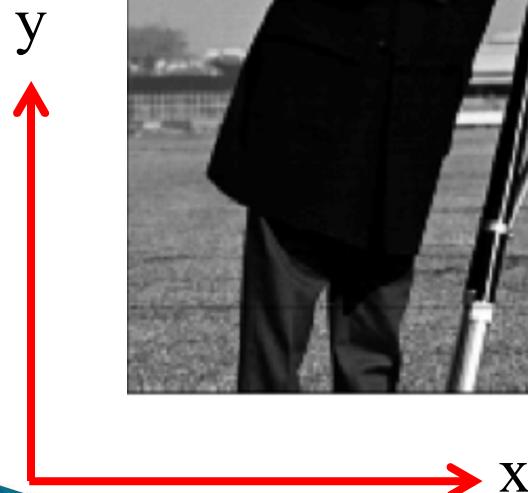
Isyarat dan Variabel Bebas

Contoh Isyarat Tegangan sebagai Fungsi Waktu



From Digital and Analog Communication System, L.W.Couch

Isyarat dan Variabel Bebas



- ▶ Isyarat menggambarkan **tingkat brightness** sebagai fungsi lokasi pada **gambar** yang digambarkan **variabel spasial x** dan **y**

Isyarat dan Variabel Bebas

- ▶ Di bidang geofisika, variasi nilai **tahanan listrik** sebagai fungsi **kedalaman tanah** adalah **isyarat 1 dimensi** dengan kedalaman tanah sebagai **variabel bebas**.
- ▶ Variasi tekanan udara atau **kecepatan angin** sebagai fungsi **ketinggian** (altitude) juga merupakan isyarat 1 dimensi dengan **ketinggian sebagai variabel bebas**.

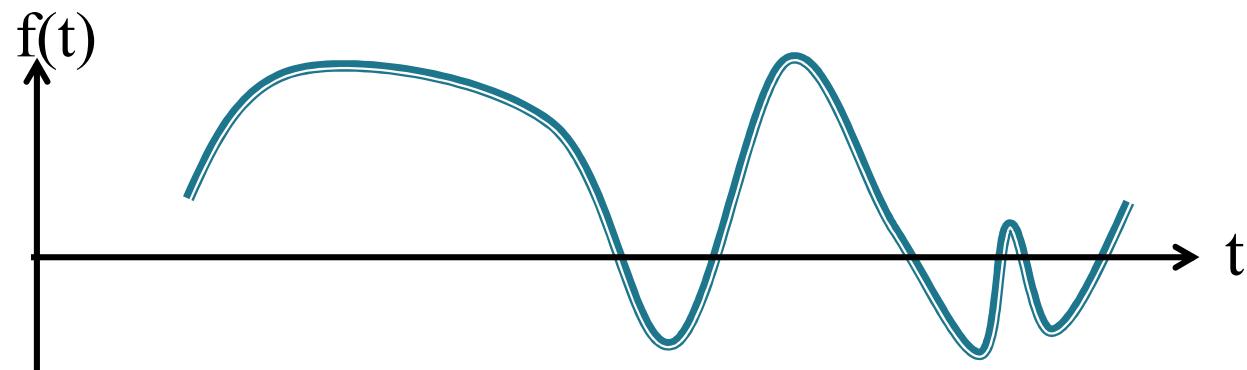
- ▶ Fokus Matakuliah ini: [Isyarat Satu Dimensi](#)
- ▶ Jumlah **Variabel Bebas: 1.**
- ▶ Contoh-contoh yang diberikan biasanya melibatkan variabel bebas yang berupa **besaran waktu**.
- ▶ Semua bahasan bisa diaplikasikan untuk kasus **variabel bebas yang bukan waktu**: ketinggian, kedalaman tanah, dll

Isyarat Kontinu dan Isyarat Diskret

- ▶ **Fokus kita:** variabel bebas waktu \Rightarrow kita sebut isyarat waktu kontinu (continuous-time signal) dan isyarat waktu diskret (discrete-time signal)

- ▶ **Isyarat Waktu Kontinu:**

- Variabel bebas waktu merupakan variabel yang kontinu
- Nilai isyarat didefinisikan untuk seluruh nilai variabel yang kontinu tadi.



Isyarat Kontinu dan Isyarat Diskret

Isyarat Waktu Diskret

- ▶ Variabel bebas hanya didefinisikan untuk seperangkat nilai yang diskret
- ▶ Nilai isyarat didefinisikan untuk variabel bebas yang diskret di atas

- ▶ Isyarat waktu diskret $x[n]$ bisa diperoleh dari isyarat waktu kontinu $x(t)$ melalui proses pencuplikan (sampling)
- ▶ Di sini $x[n] = x(nT)$: Artinya isyarat diskret diperoleh dengan mencuplik isyarat waktu kontinu pada saat $t = nT$, dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ dan T adalah selang waktu pencuplikan.

Contoh Isyarat Diskret

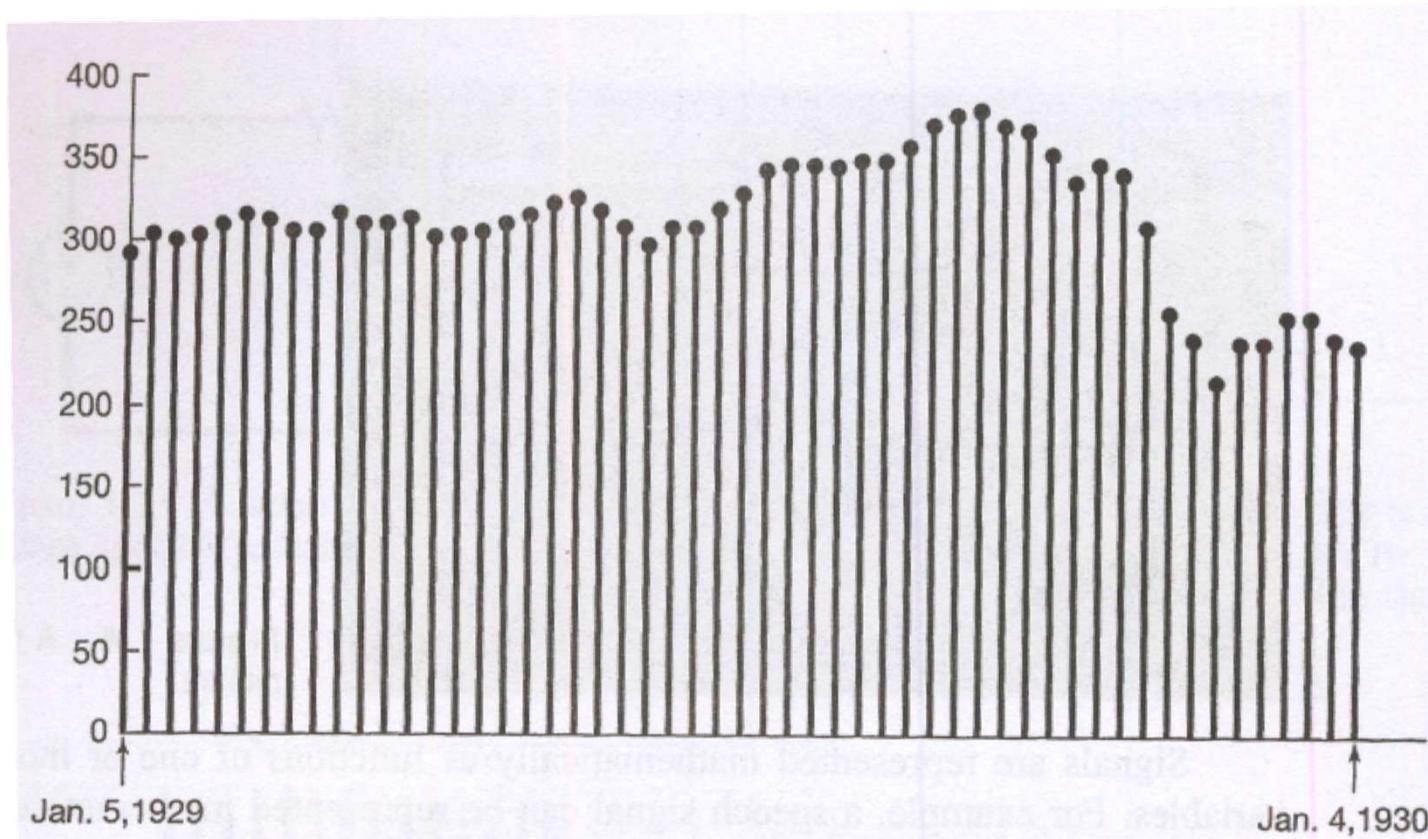


Fig. 1.6 of Signal & System, Oppenheim & Willsky, 1997 page 4)

Contoh Isyarat Diskret

- ▶ Isyarat di atas menggambarkan **Rerata nilai indeks pasar saham Dow Jones per minggu** mulai 5 Januari 1929 hingga 4 Januari 1930.
- ▶ Perhatikan bahwa variabel bebas adalah **indeks minggu** (minggu ke-1, ke-2, dan seterusnya)
- ▶ Satu tahun ada 52 minggu.
- ▶ Variabel bebas berupa **variabel diskret**: berupa **titik waktu** yang jumlahnya berhingga dan bisa dicacah.



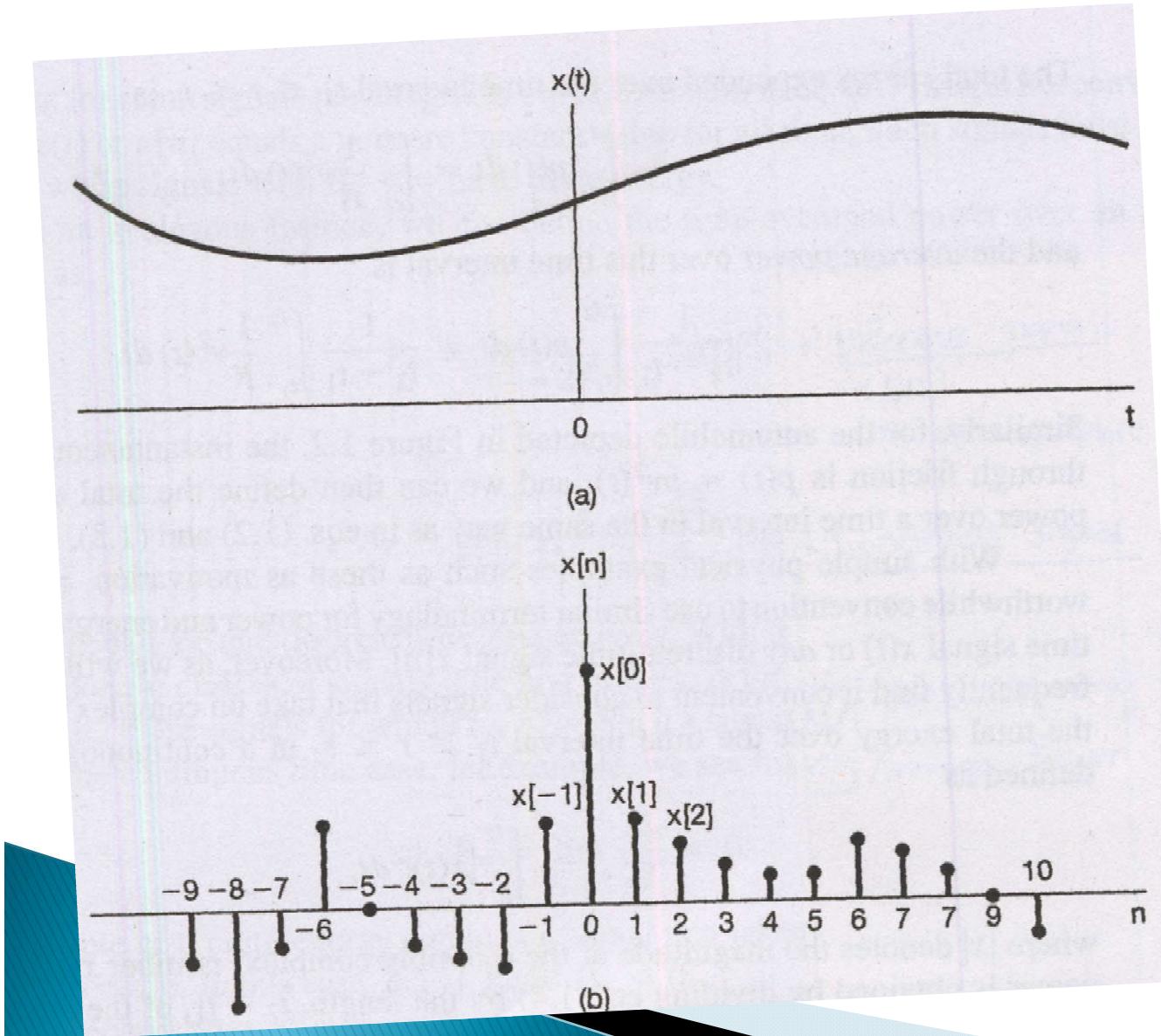
Notasi Isyarat Diskret dan Kontinu

- ▶ Simbol t dipakai untuk merepresentasikan **variabel bebas waktu kontinu**
- ▶ Simbol n untuk **variabel bebas waktu diskret**
- ▶ Representasi isyarat waktu kontinu menggunakan (\cdot)
- ▶ Representasi isyarat waktu diskret menggunakan $[\cdot]$

- ▶ Contoh representasi **isyarat waktu kontinu:** $x(t)$
- ▶ Contoh representasi **isyarat waktu diskret:** $x[n]$

- ▶ Konvensi: $x[n]$ didefinisikan hanya untuk **n yang bernilai integer** (bilangan bulat)

Representasi Isyarat Diskret dan Kontinu



Representasi grafis dari
(a) isyarat waktu kontinu; dan
(b) isyarat waktu diskret

Fig. 1.7 Oppenheim & Willsky, 1997 page 5)

Transformasi Variabel Bebas

- ▶ Transformasi atau **modifikasi isyarat** merupakan konsep yang cukup penting dalam analisis isyarat dan sistem.
- ▶ Misal pada sistem audio:
 - Isyarat masukan dapat berupa **isyarat suara yang direkam** dalam CD
 - Isyarat ini dapat dimodifikasi (misal komponen frekuensi tingginya (treble) atau frekuensi rendahnya (bass)) melalui perangkat audio.

- ▶ Transformasi dilakukan pada suatu isyarat untuk mendapatkan isyarat final yang diinginkan

Transformasi Variabel Bebas

- ▶ Fokus kali ini: **Transformasi isyarat sederhana**
- ▶ Hanya sekedar memodifikasi variabel bebas
- ▶ **Modifikasi pada sumbu waktu** (t untuk kontinu, n untuk diskret)

- ▶ **Modifikasi pada sumbu waktu** yang dibahas:
 - Pergeseran waktu (Time Shift)
 - Pembalikan waktu (Time Reversal)
 - Penyekalaan Waktu (Time Scaling)

Time Shift

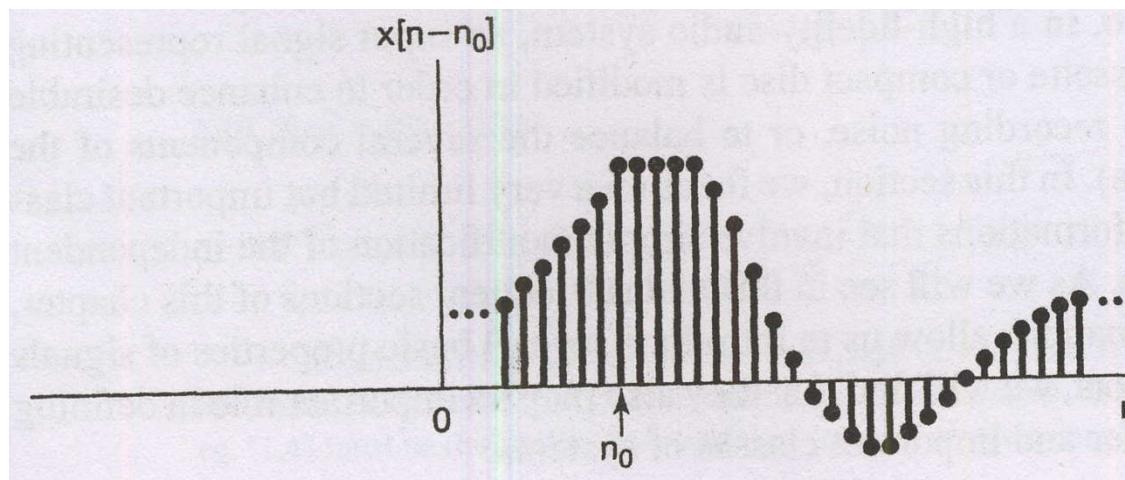
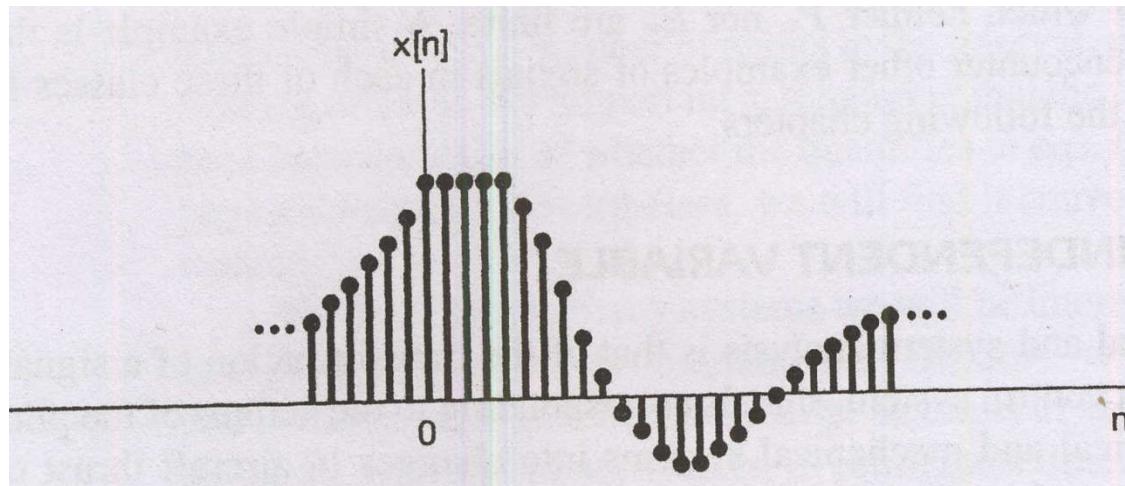


Figure 1.8 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997): Discrete-time signals related by a time-shift. In this figure $n_0 > 0$, so that $x[n-n_0]$ is a delayed version of $x[n]$ (i.e. each point in $x[n]$ occurs later in $x[n-n_0]$)

Time Shift

- ▶ Tampak bahwa dua isyarat diskret di atas, yaitu $x[n]$ dan $x[n-n_0]$ memiliki **bentuk yang sama**.
- ▶ Isyarat $x[n-n_0]$ tidak lain adalah isyarat $x[n]$ yang alami **penundaan** sebesar n_0 indeks waktu (n_0 bernilai positif)
- ▶ n_0 negatif \Rightarrow $x[n-n_0]$ adalah **advanced version** dari $x[n]$

- ▶ Hasil pergeseran pada **isyarat waktu kontinu** $x(t)$ direpresentasikan sebagai $x(t-t_0)$
- ▶ t_0 positif \Rightarrow $x(t-t_0)$ adalah **versi tunda** dari $x(t)$ (**delayed version of $x(t)$**)
- ▶ t_0 negatif \Rightarrow $x(t-t_0)$ adalah **percepatan** dari $x(t)$ (**advanced version of $x(t)$**)

Time Shift

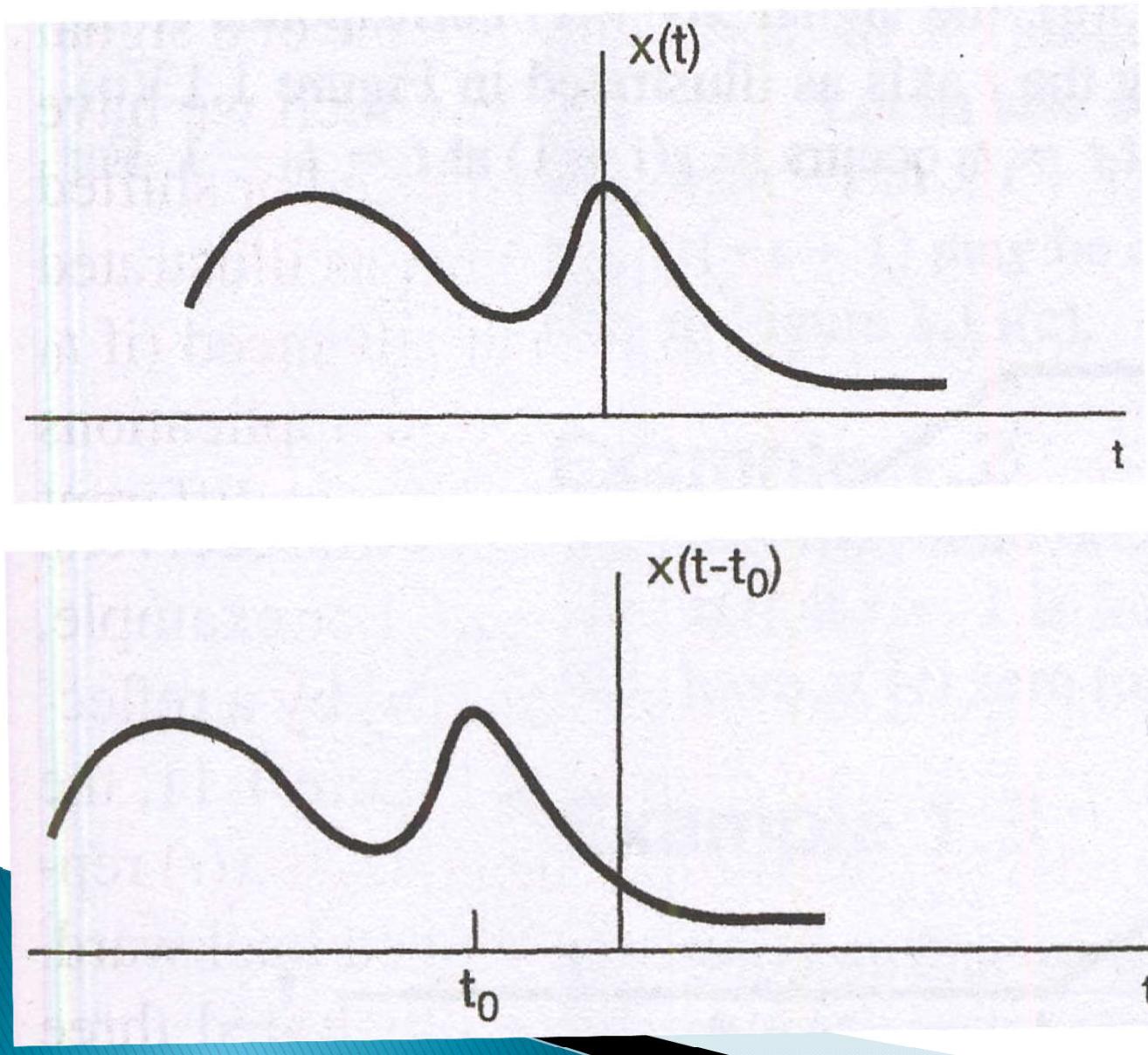


Figure 1.9 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997): **Continuous-time signals related by a time-shift**. In this figure $t_0 < 0$, so that $x(t-t_0)$ is an **advanced version** of $x(t)$ (i.e. each point in $x(t)$ occurs at an earlier time in $x(t-t_0)$)

Time Reversal

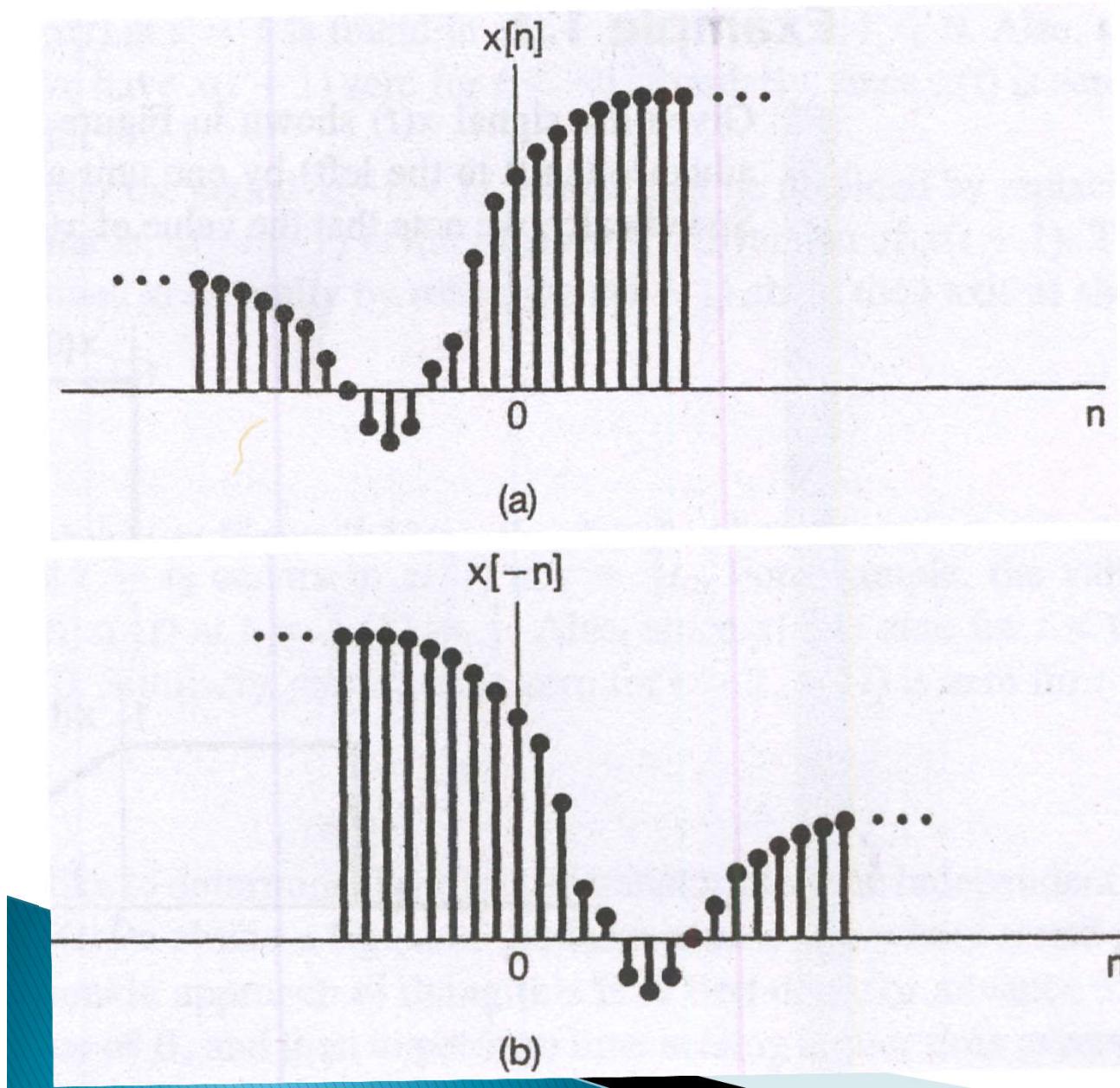


Figure 1.10 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997):
(a) Isyarat waktu diskret $x[n]$
(b) Hasil pencerminan $x[n]$ (yaitu $x[-n]$) terhadap titik $n=0$.

Time Reversal

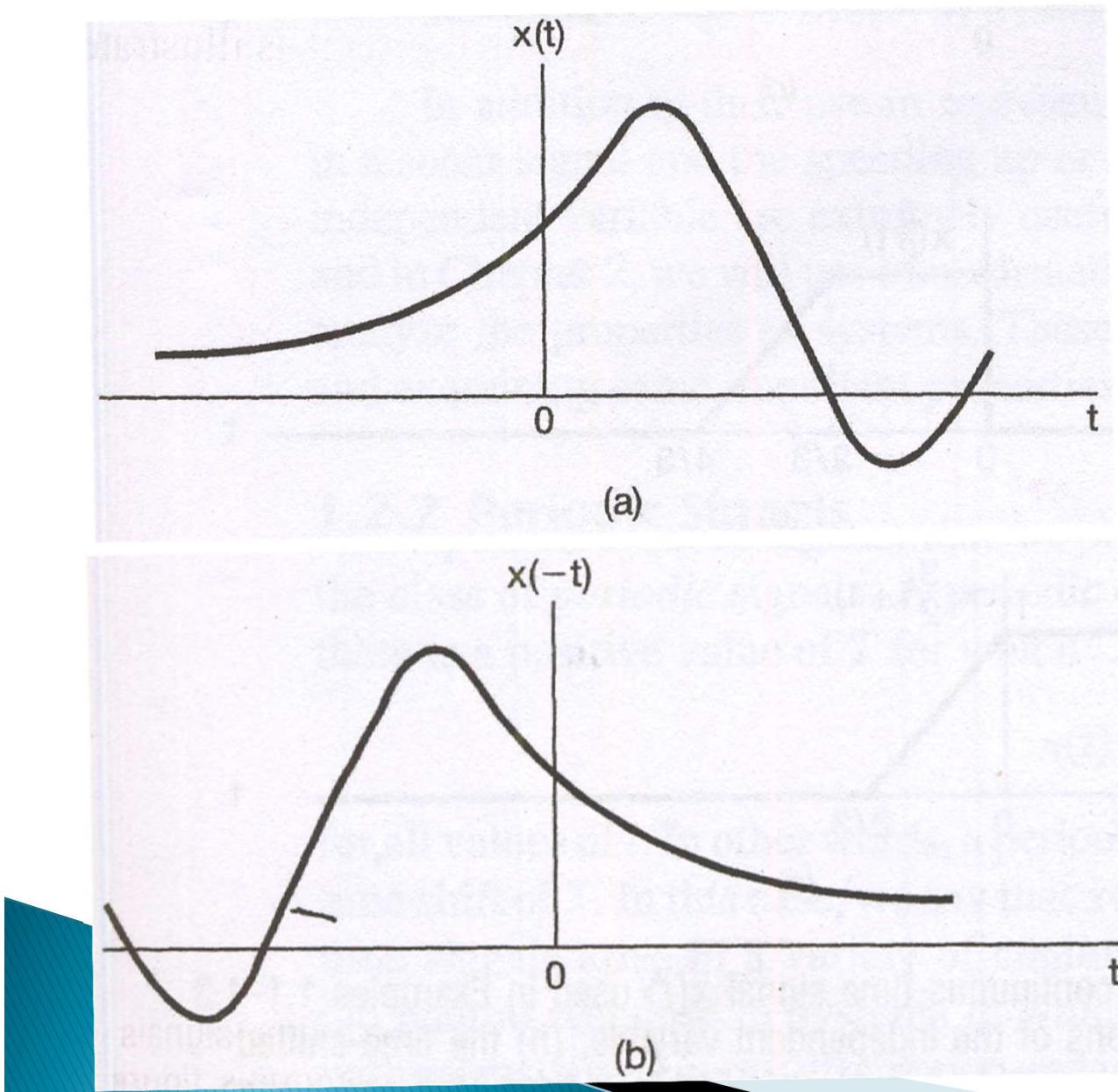


Figure 1.11 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997):
(a) Isyarat waktu kontinu $x(t)$
(b) Hasil pencerminan $x(t)$ (yaitu $x(-t)$) terhadap titik $t=0$.

Time Reversal

- ▶ Pada dasarnya membalik (reverse) sumbu waktu.
- ▶ Isyarat dicerminkan terhadap titik origin yaitu titik $t=0$ (isyarat waktu kontinu) atau $n=0$ (isyarat waktu diskret)

- ▶ Isyarat ditampilkan dengan indeks waktu terbalik.
- ▶ Contoh: Kaset audio diputar dengan arah pemutaran terbalik (backward)



Time Scaling

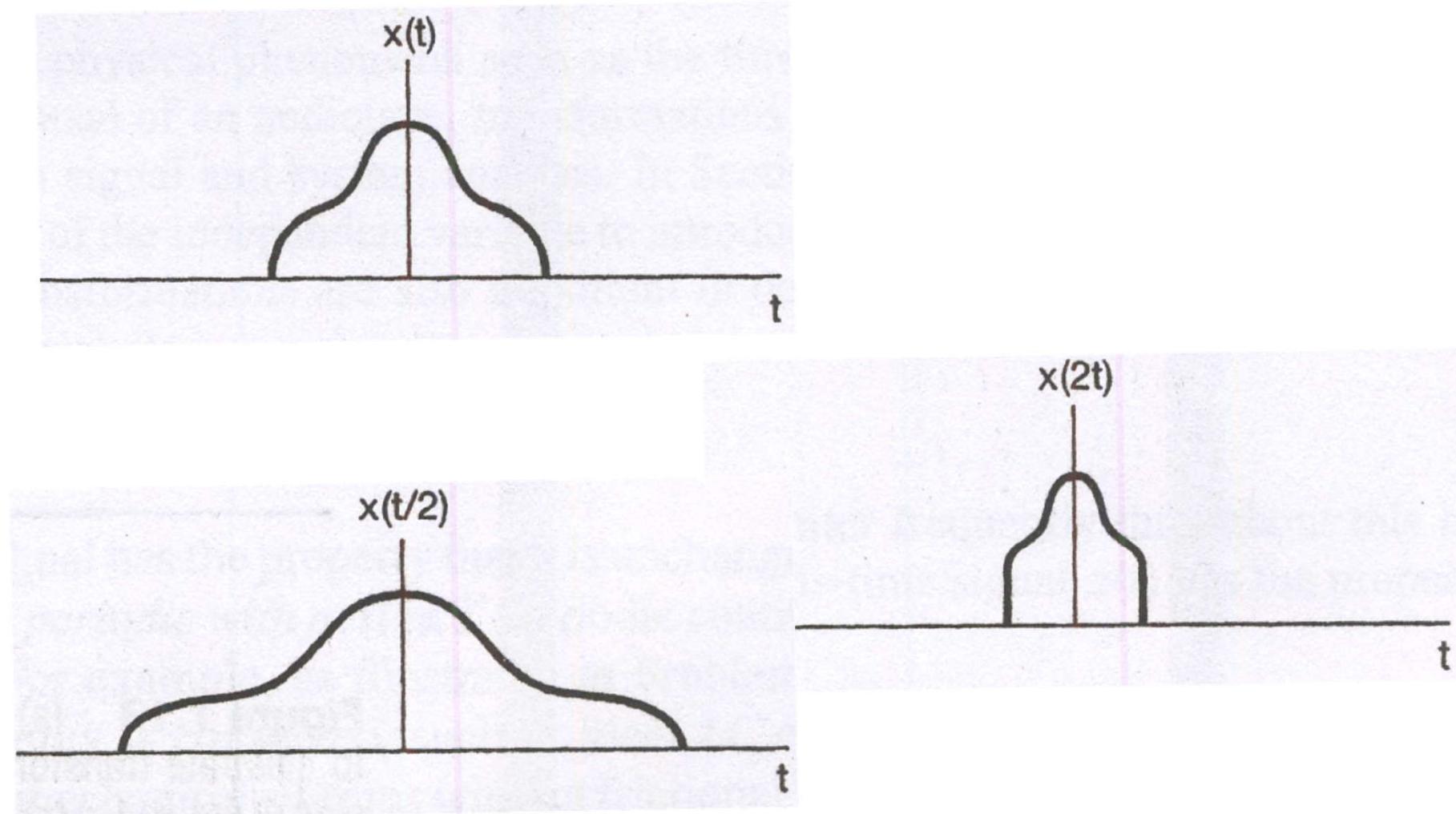


Figure 1.12 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997):
Isyarat waktu kontinu $x(t)$ dan hasil proses time-scaling

Time Scaling

- ▶ $x(at)$ adalah hasil **proses time scaling** pada isyarat $x(t)$
- ▶ Bentuk isyarat $x(at)$ **tidak berbeda** dengan $x(t)$
- ▶ Yang terjadi adalah proses **peregangan waktu (stretching)** dan **pemampatan waktu (shrinking)**

- ▶ Jika $|a| > 1$: terjadi shrinking (kompresi)
- ▶ Jika $|a| < 1$: terjadi stretching
- ▶ Untuk $a < 0$: time reversal (on top of possible shrinking or stretching)



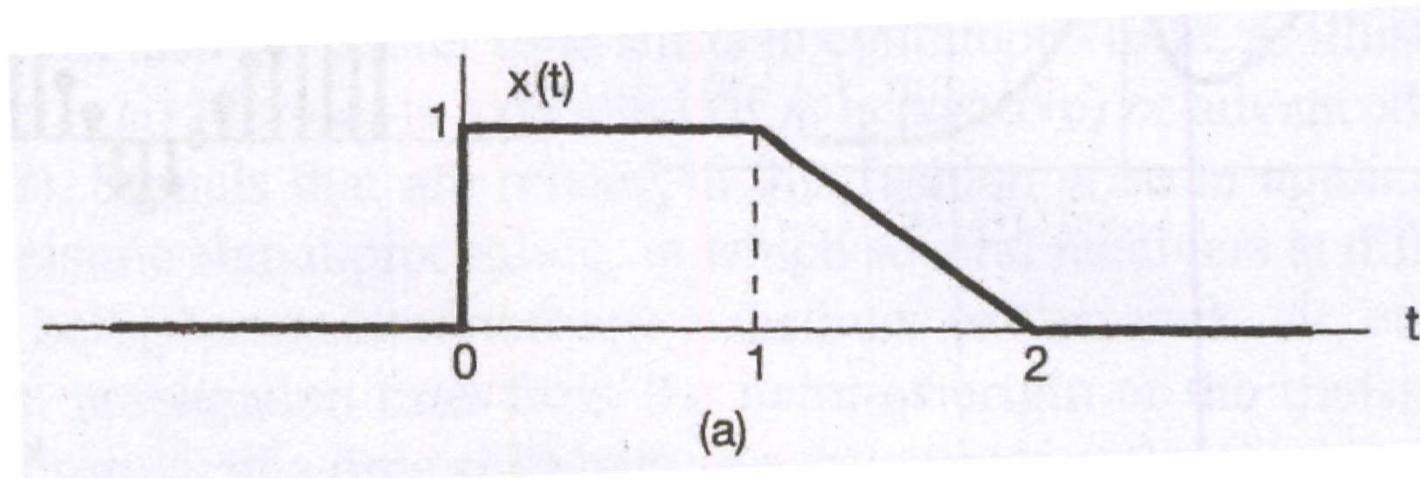
Transformasi Variabel Bebas

- ▶ Secara umum transformasi variabel bebas terhadap **isyarat waktu kontinu $x(t)$** bisa dituliskan sebagai $x(at+b)$
- ▶ Bentuk isyarat $x(at+b)$ sama dengan isyarat $x(t)$
- ▶ b mengilustrasikan pergeseran waktu.
- ▶ a mengilustrasikan **efek scaling** dan ada tidaknya time reversal.



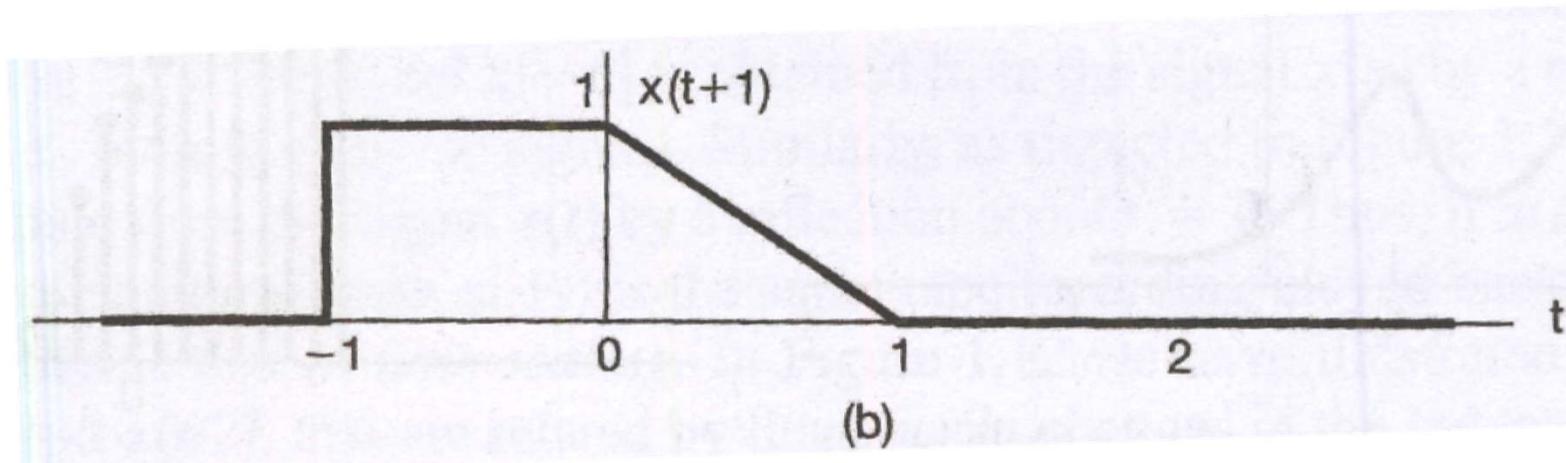
Contoh 1

- ▶ Diambil dari Fig 1.13 of Signal & System (Oppenheim & Willsky, 1997)
- ▶ Perhatikan **gambar isyarat waktu kontinu $x(t)$** berikut:



- ▶ Jika terjadi proses **pergeseran waktu** sebesar **1 unit satuan waktu** pada isyarat $x(t)$ di atas maka akan diperoleh isyarat $x(t+1)$ berikut ini.

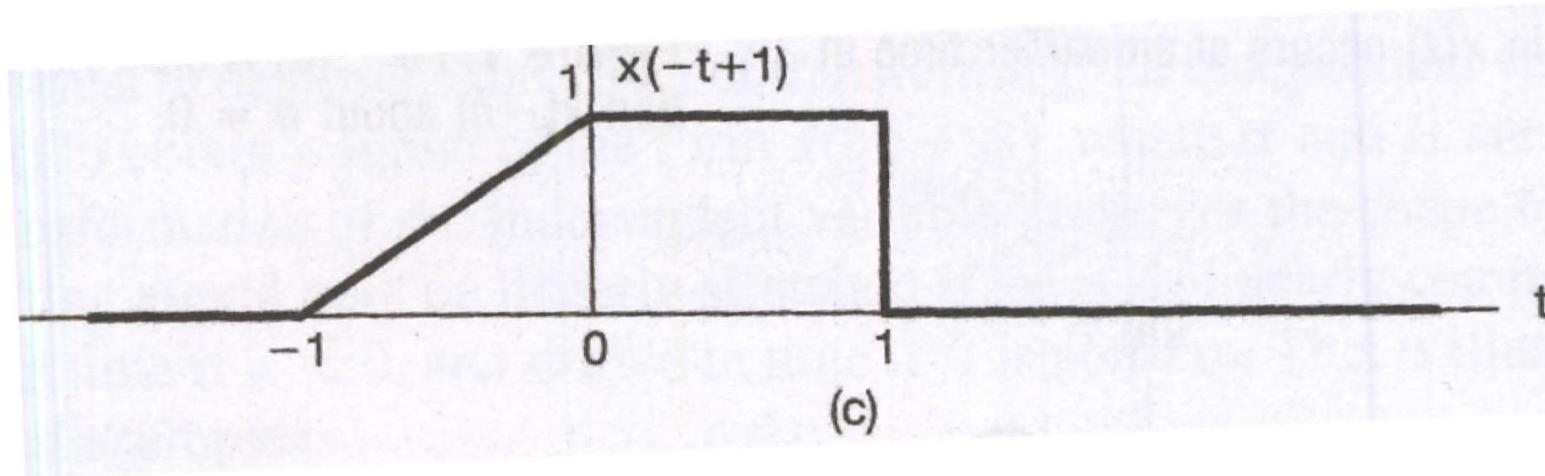
Contoh 1



- ▶ Tampak bahwa $x(t+1)$ adalah advanced version bagi $x(t)$ sebesar 1 satuan waktu
- ▶ Nilai $x(t)$ saat $t=t_0$ muncul pada isyarat $x(t+1)$ saat $t=t_0-1$.

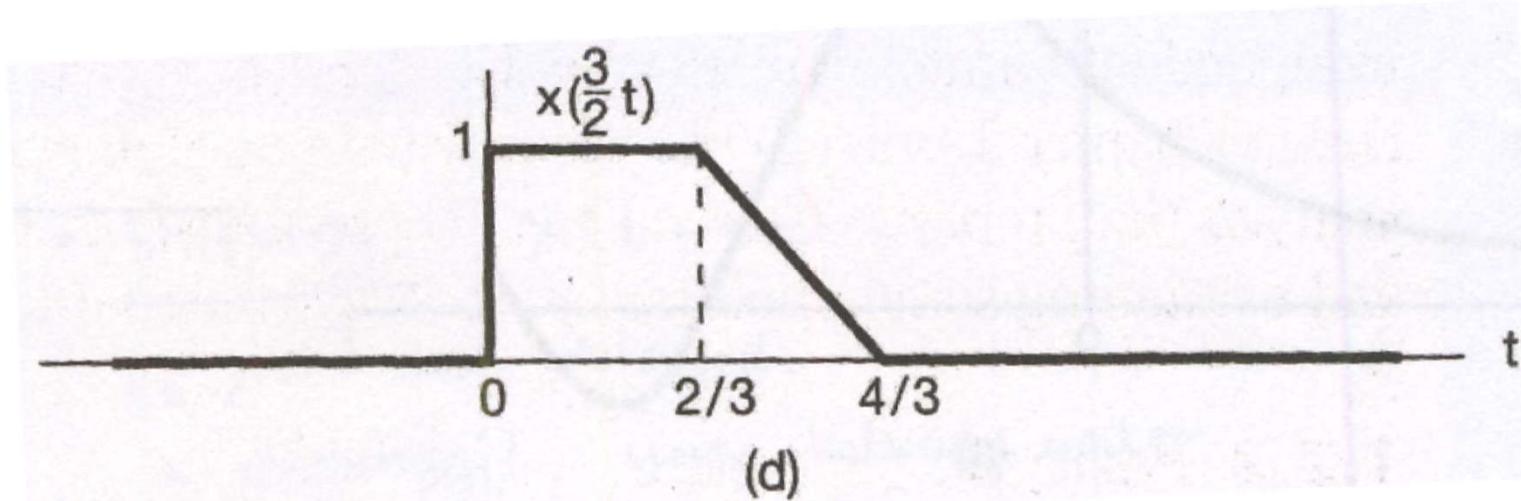
- ▶ Jika kita kenakan proses time reversal terhadap $x(t+1)$ atau dengan kata lain isyarat $x(t+1)$ dicerminkan terhadap titik asal $t=0 \Rightarrow$ diperoleh isyarat $x(-t+1)$ berikut.

Contoh 1



- ▶ Kemudian, Fokus kembali pada **isyarat $x(t)$** pada gambar a.
- ▶ Isyarat $x(3t/2)$ diperoleh dengan melakukan proses **kompresi (shrinking)** terhadap $x(t)$ dengan faktor $2/3$.
- ▶ Tinjau gambar berikut ini.

Contoh 1



- ▶ Tampak bahwa nilai $x(t)$ saat $t=1$ muncul pada isyarat $x(3t/2)$ pada saat $t=2/3$.
- ▶ Berhubung $x(t) = 0$ saat $t < 0$, maka $x(3t/2)=0$ saat $t < 0$
Dan berhubung $x(t) = 0$ saat $t > 2$, maka $x(3t/2)=0$ saat $t > 2 \times (2/3) = 4/3$

Contoh 1

Jika kita ingin mencari tahu efek transformasi terhadap variabel bebas t pada isyarat $x(t)$ sedemikian hingga dihasilkan isyarat $x(at-b)$, maka langkah yang harus dilakukan:

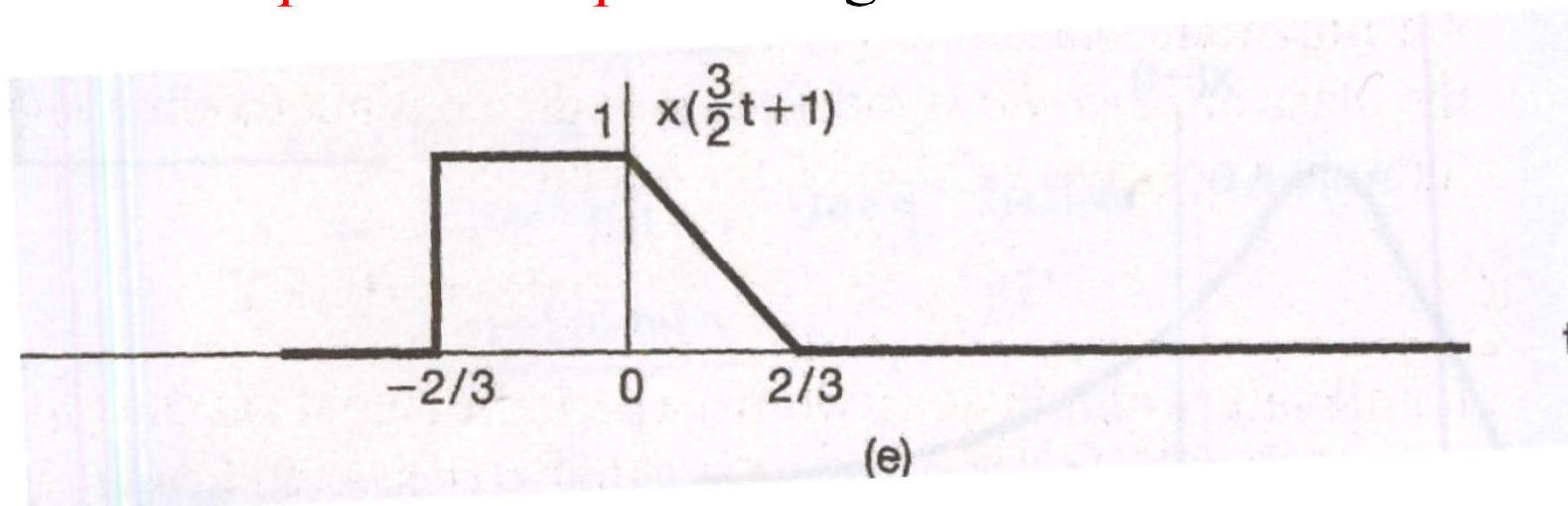
- ▶ Pertama-tama lakukan proses **pergeseran waktu** terhadap $x(t)$ sebesar b (**tunda sebesar b** jika b positif atau **advance sebesar b** jika b negatif).
- ▶ Lalu lakukan proses **time scaling** dan/atau **time reversal** sesuai dengan nilai dari a .

- ▶ Jika diperoleh isyarat $x(3t/2 + 1)$ dari isyarat $x(t)$ di atas, efek apa saja yang dialami?

Contoh 1

Tampak pada gambar berikut bahwa isyarat $x(3t/2+1)$ dihasilkan dengan melakukan:

- ▶ Proses **pergeseran maju (advance)** pada sumbu waktu sebesar $b=1$ satuan waktu
- ▶ Diikuti **proses kompresi** dengan faktor $2/3$



- ▶ Tidak terjadi proses time reversal karena **a positif**.

Isyarat Periodik

- ▶ Isyarat waktu **kontinu** $x(t)$ dikatakan sebagai **isyarat periodik** jika terdapat suatu nilai **positif** T sedemikian hingga untuk setiap t berlaku:

$$x(t) = x(t+T)$$

- ▶ Nilai $x(t)$ **tidak mengalami perubahan** jika dikenakan pergeseran waktu (**time shift**) sebesar T .

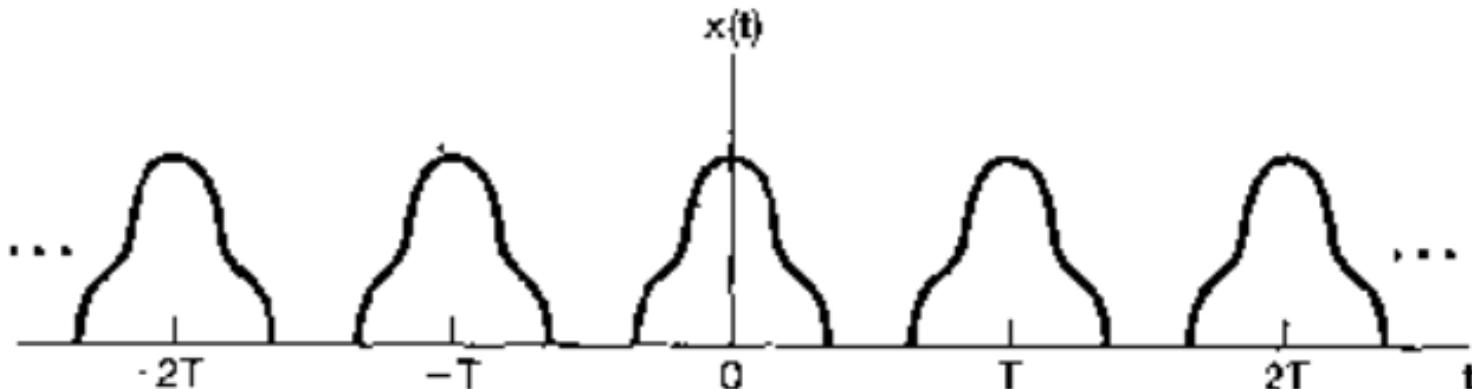


Figure 1.14 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997):
Contoh Isyarat Periodik Waktu Kontinu $x(t)$

Isyarat Periodik

- ▶ Tampak dari gambar 1.14 bahwa jika $x(t)$ **periodik** dengan periode T , maka berlaku pula

$$x(t) = x(t+mT)$$

untuk **setiap** t dan **integer** (bilangan bulat) m .

- ▶ Artinya $x(t)$ juga **periodik** dengan periode $2T$, $3T$, $4T$,
- ▶ Ada istilah periode fundamental T_0 : Nilai **T terkecil** sedemikian hingga $x(t) = x(t+T)$ berlaku.



Isyarat Periodik

- ▶ Isyarat waktu diskret $x[n]$ dikatakan sebagai **isyarat periodik** dengan **periode N** , dengan N adalah integer positif, bila untuk **setiap n** berlaku:

$$x[n] = x[n+N]$$

- ▶ Pada situasi di atas, $x[n]$ juga otomatis **periodik** dengan periode $2N$, $3N$, $4N$
- ▶ **Periode fundamental N_0** : **Nilai positif terkecil** dari N sedemikian hingga $x[n] = x[n+N]$ berlaku.

Isyarat Periodik

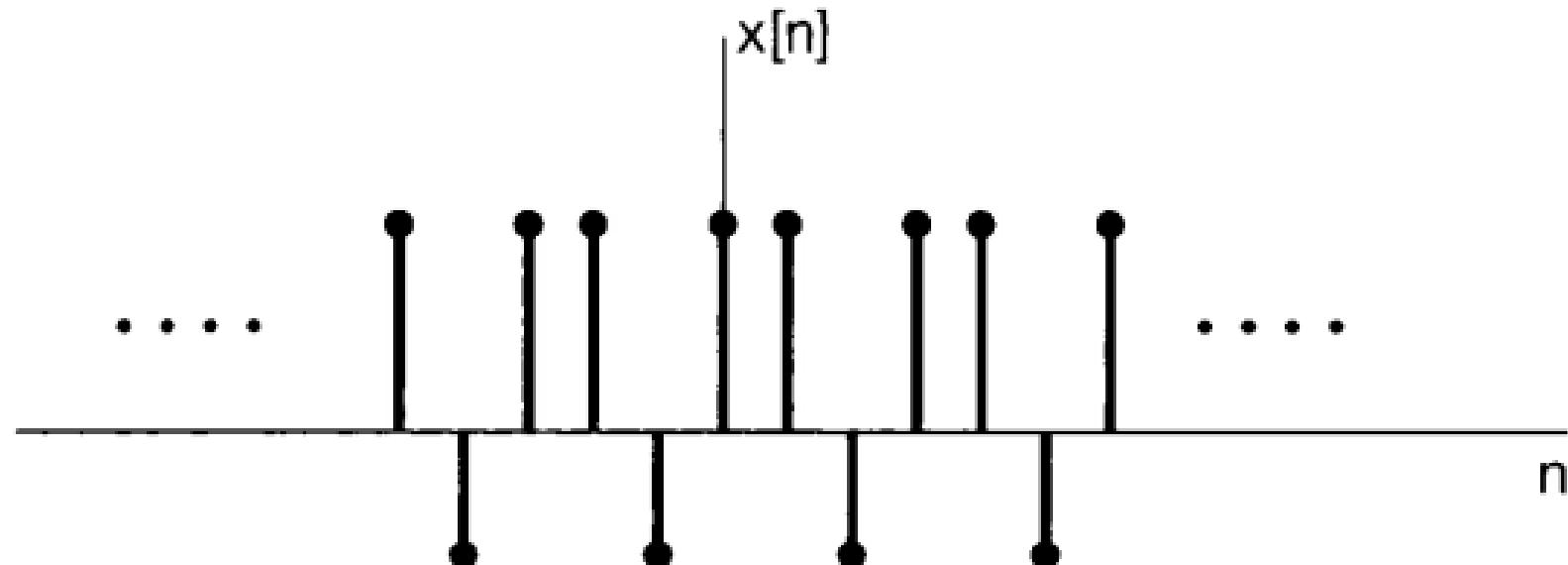


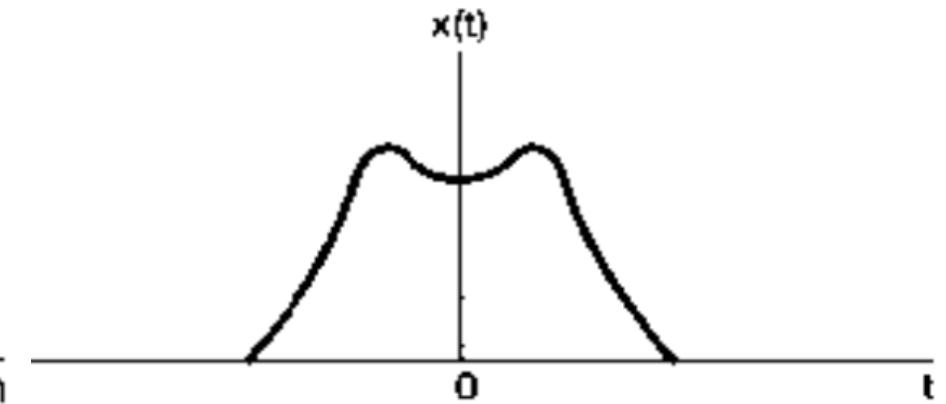
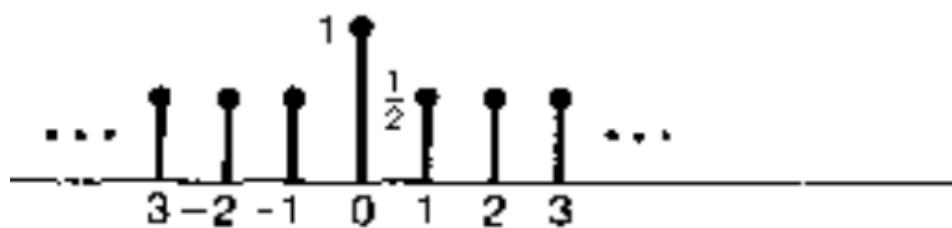
Figure 1.15 of Signals and Systems (Oppenheim & Willsky, 1997): Contoh Isyarat Periodik Waktu Diskret $x[n]$ dengan periode fundamental $N_0=3$.

Isyarat Genap

- ▶ Isyarat kontinu $x(t)$ atau **diskret $x[n]$** dikategorikan sebagai **isyarat genap** jika isyarat tersebut **identik** dengan hasil **proses time reversal**-nya (hasil pencerminannya terhadap garis vertikal yang melalui titik $t=0$ atau $n=0$):

$$x[-n] = x[n]$$

$$x(-t) = x(t)$$



Contoh isyarat waktu diskret genap (kiri) dan isyarat waktu kontinu genap (kanan)

Isyarat Ganjil

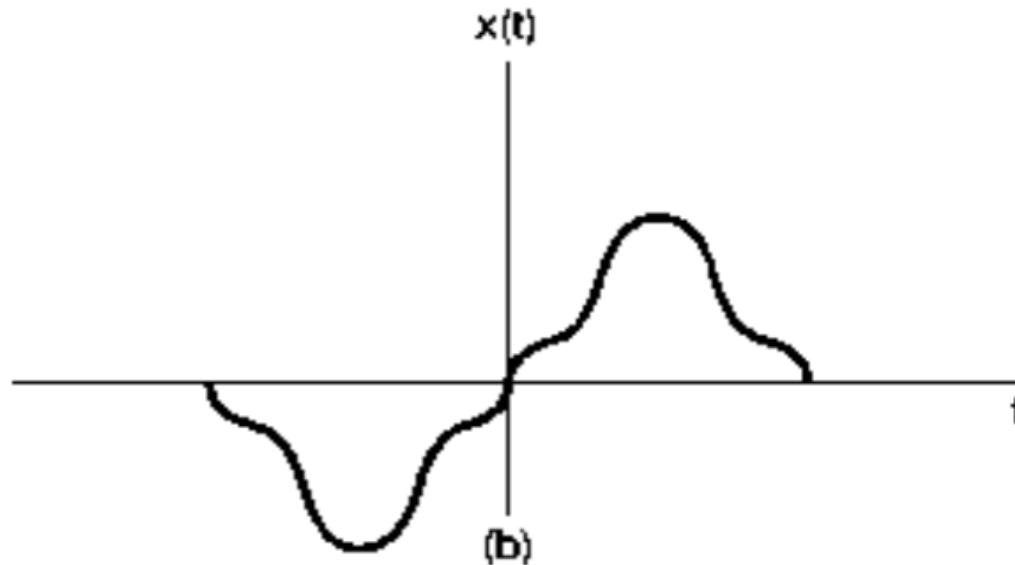
- ▶ Isyarat kontinu $x(t)$ atau $\text{diskret } x[n]$ dikategorikan sebagai **isyarat ganjil** jika berlaku:

$$x[-n] = -x[n], \text{ untuk isyarat diskret } x[n]$$

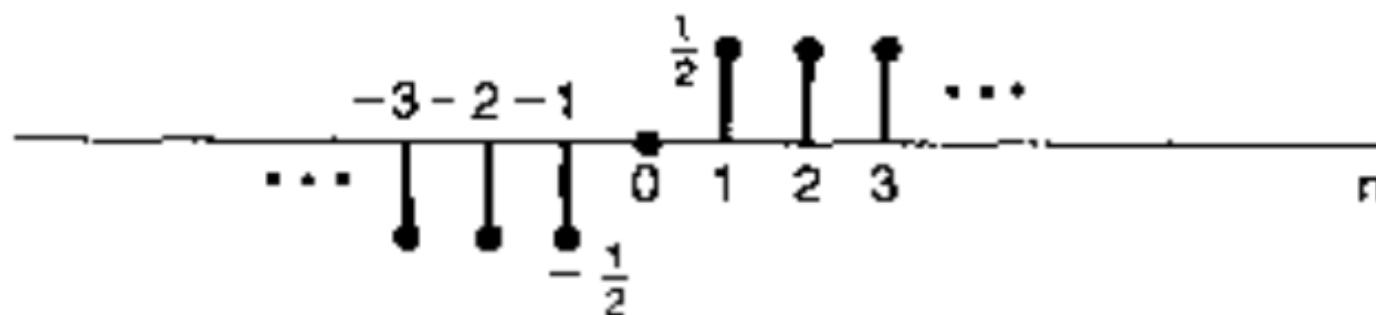
$$x(-t) = -x(t), \text{ untuk isyarat kontinu } x(t)$$

- ▶ Jelas bahwa, jika $x(t)$ dan $x[n]$ adalah **isyarat ganjil** maka **isyarat tersebut bernilai 0** saat $t=0$ atau $n=0$ mengingat perlunya dipenuhi $x[-0] = -x[0]$ dan $x(-0) = -x(0)$.
- ▶ Berikut adalah contoh isyarat kontinu dan diskret yang berupa isyarat ganjil.

Isyarat Ganjil



Contoh isyarat waktu kontinu ganjil



Contoh isyarat waktu diskret ganjil

Pemecahan dan Sintesa Isyarat

- ▶ Setiap isyarat dapat diuraikan sebagai hasil jumlahan dari isyarat ganjil dan isyarat genap.
- ▶ Hal ini dapat dibuktikan dengan mempertimbangkan isyarat kontinu $x(t)$.

- ▶ Kita susun **isyarat $x_e(t)$** dari isyarat $x(t)$:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

- ▶ Tampak bahwa $x_e(t)$ adalah **isyarat genap** karena

$$x_e(-t) = \frac{1}{2}[x(-t) + x(t)] = x_e(t)$$

Pemecahan dan Sintesa Isyarat

- ▶ Kita susun **isyarat $x_o(t)$** dari isyarat $x(t)$:

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

- ▶ Tampak bahwa $x_o(t)$ adalah **isyarat ganjil** karena

$$x_o(-t) = \frac{1}{2}[x(-t) - x(t)] = -x_o(t)$$

- ▶ Jika kita jumlahkan $x_e(t)$ dan $x_o(t)$ kita dapatkan kembali $x(t)$:

$$x_o(t) + x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = x(t)$$

Pemecahan dan Sintesa Isyarat

- ▶ Dengan demikian, setiap **isyarat kontinu** $x(t)$ bisa dituliskan sebagai **jumlahan komponen isyarat ganjil** dan **isyarat genap** seperti langkah di atas.
- ▶ Cara yang sama dapat dilakukan untuk **isyarat waktu diskret** $x[n]$ berikut ini:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Pemecahan dan Sintesa Isyarat

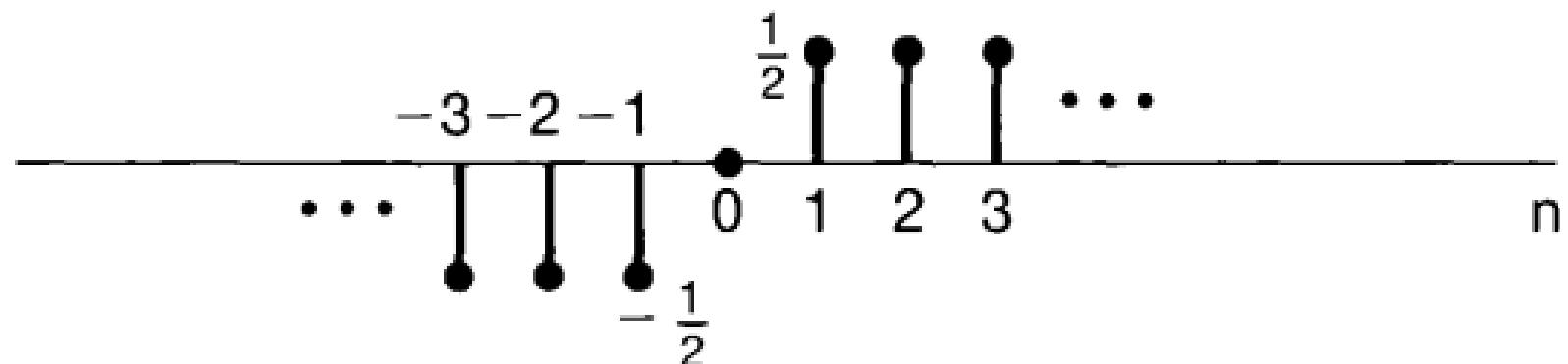
- ▶ Isyarat diskret $x[n]$ di atas bisa diuraikan sebagai **jumlahan isyarat genap dan isyarat ganjil** berikut (caranya sama dengan kasus isyarat kontinu $x(t)$ di atas)

$$\text{Even}(x[n]) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$



Pemecahan dan Sintesa Isyarat

$$\text{Odd}(x[n]) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$

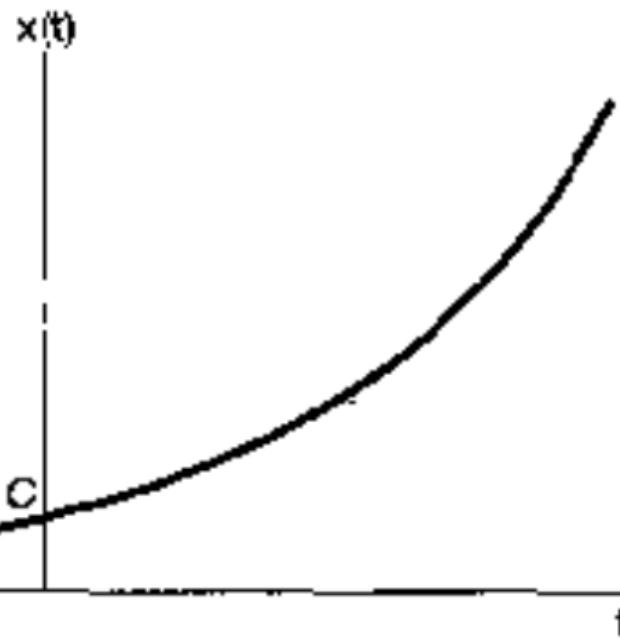


Isyarat Eksponensial Real

- ▶ Isyarat eksponensial real kontinu $x(t)$ bisa dituliskan sebagai:

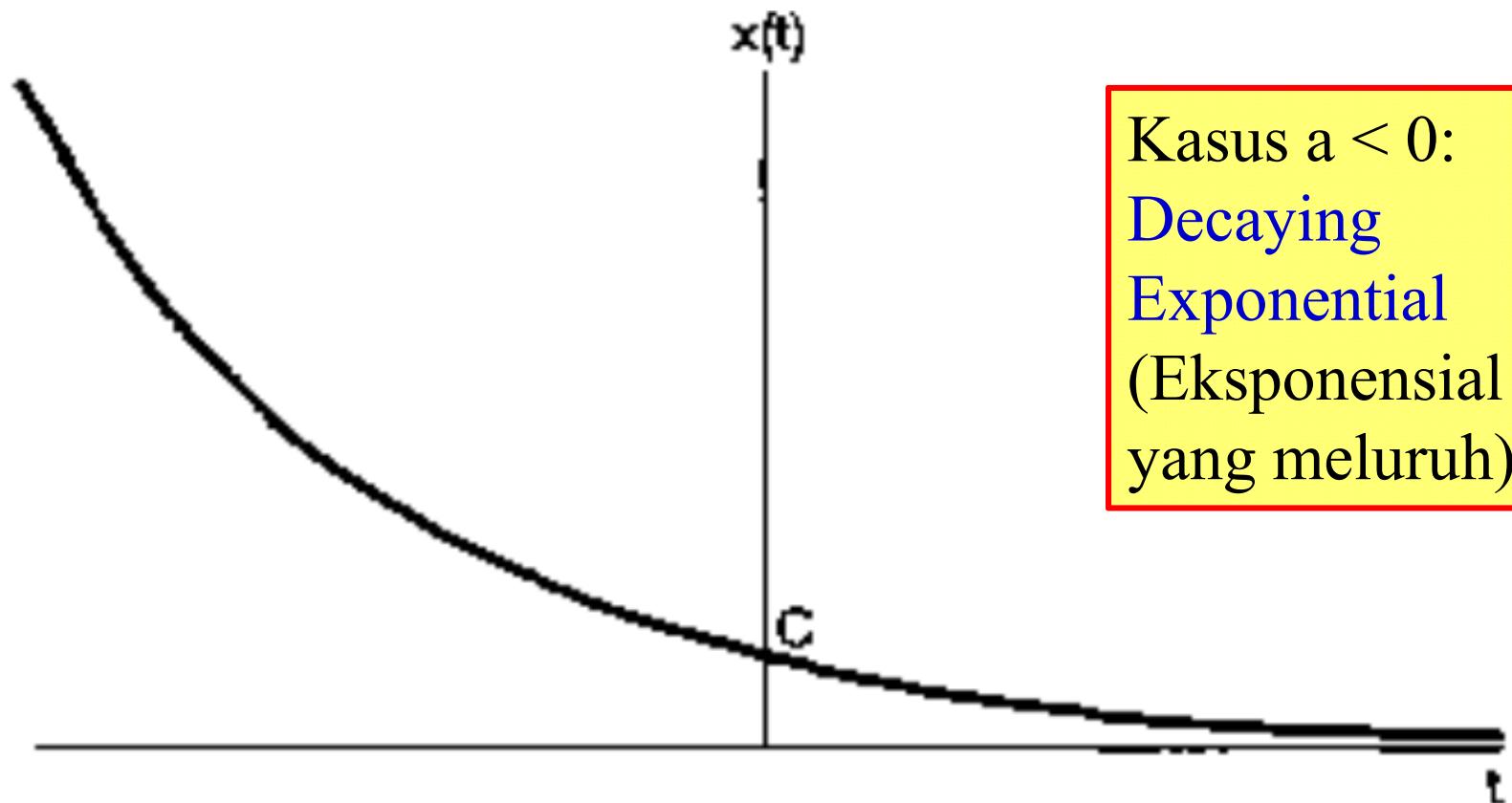
$$x(t) = Ce^{at}$$

dengan C dan a bilangan real.



Kasus $a > 0$:
Growing
Exponential

Isyarat Eksponensial Real



- ▶ Untuk $a = 0$, $x(t)$ berupa **isyarat konstan** $x = C$.

Isyarat Exponensial Kompleks Periodik

- ▶ Isyarat eksponensial kompleks yang paling dasar adalah

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

- ▶ Isyarat di atas adalah isyarat yang **periodik** => untuk mengetahui **nilai periodenya**, bisa kita kenakan **syarat periodicity**:

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(T+t)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

- ▶ Tampak **syarat periodicity** terpenuhi jika:

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

Isyarat Exponensial Kompleks Periodik

- ▶ Ingat bahwa:

$$e^{jk2\pi} = 1$$

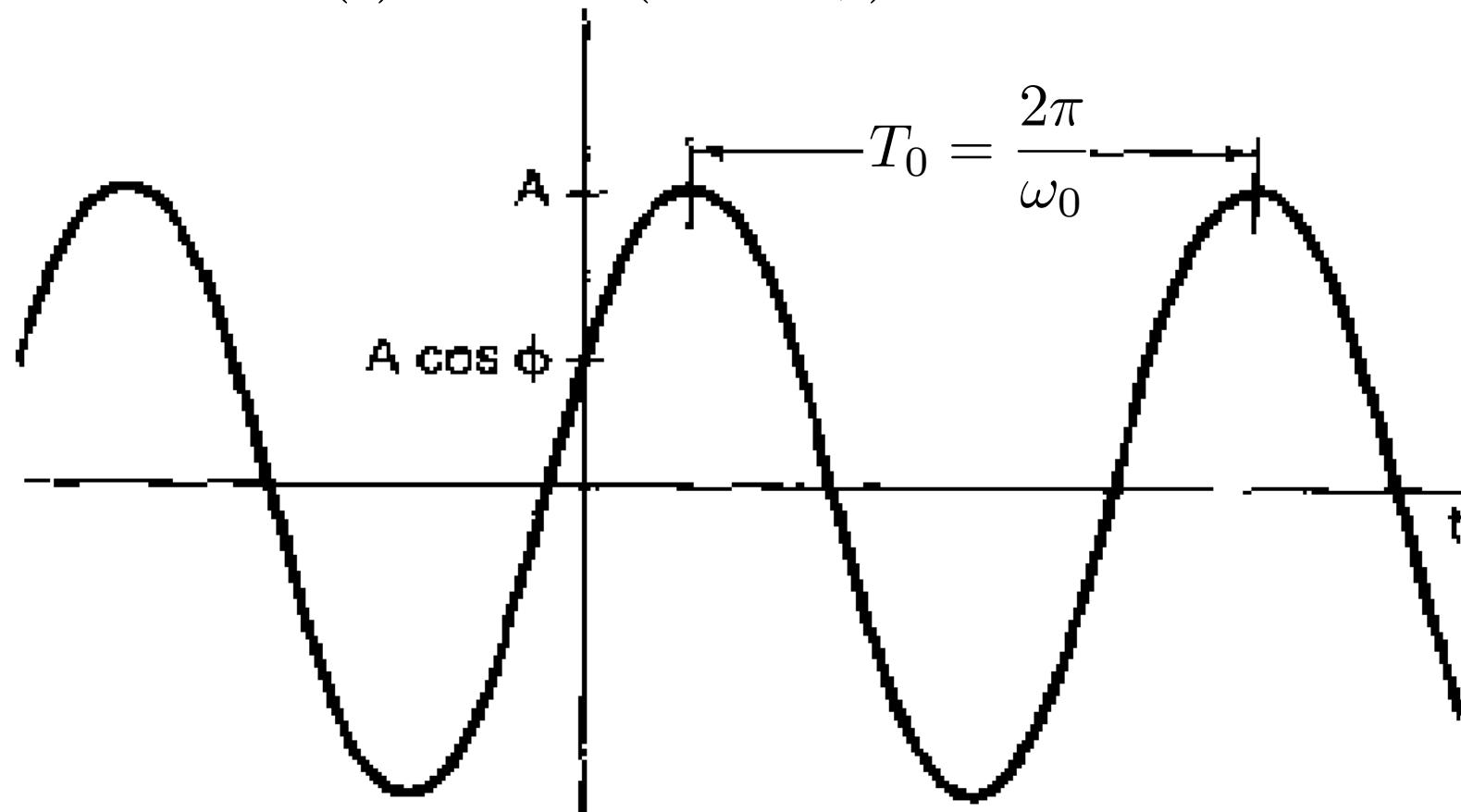
untuk setiap **bilangan bulat k**. Mengapa? Ingat pelajaran **bidang kompleks** atau **formula Euler**.

- ▶ Dengan demikian, $\omega_0 T = k 2\pi$.
- ▶ Jika $\omega_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 1 \Rightarrow$ periodik untuk setiap nilai T.
- ▶ Jika $\omega_0 \neq 0$ maka **periode fundamental T_0** untuk x(t) adalah nilai T positif terkecil sedemikian hingga $\omega_0 T = k 2\pi$ terpenuhi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

Isyarat Sinusoidal

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$



- ▶ Pada isyarat $x(t)$ di atas: t dalam detik, ω_0 dalam radian per detik, ϕ dalam radian.

Isyarat Sinusoidal

- ▶ Frekuensi sudut ω_0 bisa dituliskan sebagai $\omega_0 = 2\pi f_0$, dengan satuan f_0 adalah siklus per detik atau **Hertz**.
- ▶ Tampak bahwa isyarat **sinusoidal** pada gambar di atas periodik dengan **periode fundamental**:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

- ▶ Tampak frekuensi sudut ω_0 berbanding terbalik dengan periode fundamental $T_0 \Rightarrow \omega_0$ sering disebut **frekuensi (sudut) fundamental**.

Isyarat Sinusoidal

- ▶ Relasi antara **isyarat eksponensial kompleks** dan **sinusoidal** dengan **periode fundamental** yang sama:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

- ▶ Isyarat **sinusoidal** pada gambar di atas bisa dituliskan pula dalam fungsi **eksponensial kompleks** (dengan **periode fundamental** yang sama):

$$\begin{aligned} A\cos(\omega_0 t + \phi) &= \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{A}{2}e^{j(\phi+\omega_0 t)} + \frac{A}{2}e^{-j(\phi+\omega_0 t)} \end{aligned}$$

Isyarat Sinusoidal

- ▶ Atau karena

$$Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

- ▶ Bisa dituliskan:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega_0 t + \phi)} \right\}$$

$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Im} \left\{ e^{j(\omega_0 t + \phi)} \right\}$$

- ▶ Dengan $\operatorname{Re}\{s\}$ dan $\operatorname{Im}\{s\}$ berturut-turut merepresentasikan komponen real dan komponen imajiner dari bilangan kompleks s.

General Complex Exponential Signals

- ▶ Diketahui **isyarat eksponensial kompleks** Ce^{at} , dengan C dan a adalah **bilangan kompleks**.
- ▶ Bilangan kompleks bisa dituliskan dalam bentuk koordinat polar maupun koordinat **rectangular**.

- ▶ Kita tuliskan **bilangan kompleks C** dalam **notasi koordinat polar**:

$$C = |C|e^{j\theta}$$

Dengan $|C|$ adalah **magnitude** dari C dan θ adalah **fase** dari C.



General Complex Exponential Signals

- ▶ Kita tuliskan **bilangan kompleks a** dalam **notasi koordinat rectangular**:

$$a = r + j\omega_0$$

Dengan r dan ω_0 adalah **komponen real** dan **imajiner** dari a.

- ▶ Dengan demikian dan dengan memanfaatkan **relasi Euler**:

$$\begin{aligned} Ce^{at} &= |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\theta+\omega_0 t)} \\ &= |C|e^{rt}\cos(\theta + \omega_0 t) + j|C|e^{rt}\sin(\theta + \omega_0 t) \end{aligned}$$

General Complex Exponential Signals

- ▶ Jika nilai $r = 0$, komponen **real dan imajiner** dari Ce^{at} di atas adalah isyarat sinusoidal biasa (cosinus dan sinus).
 - ▶ Untuk $r > 0$, komponen **real dan imajiner** berupa **isyarat sinusoidal** yang **dikalikan** dengan isyarat eksponential real yang membesar (**growing exponential**)
-
- ▶ Untuk $r < 0$, komponen real dan imajiner berupa **isyarat sinusoidal** yang **dikalikan** dengan isyarat eksponential real yang meluruh (**decaying exponential**)
-
- ▶ Sebagai ilustrasi, berikut adalah plot isyarat $x(t)$ yang menggambarkan **komponen real** dari isyarat Ce^{at} di atas.

General Complex Exponential Signals

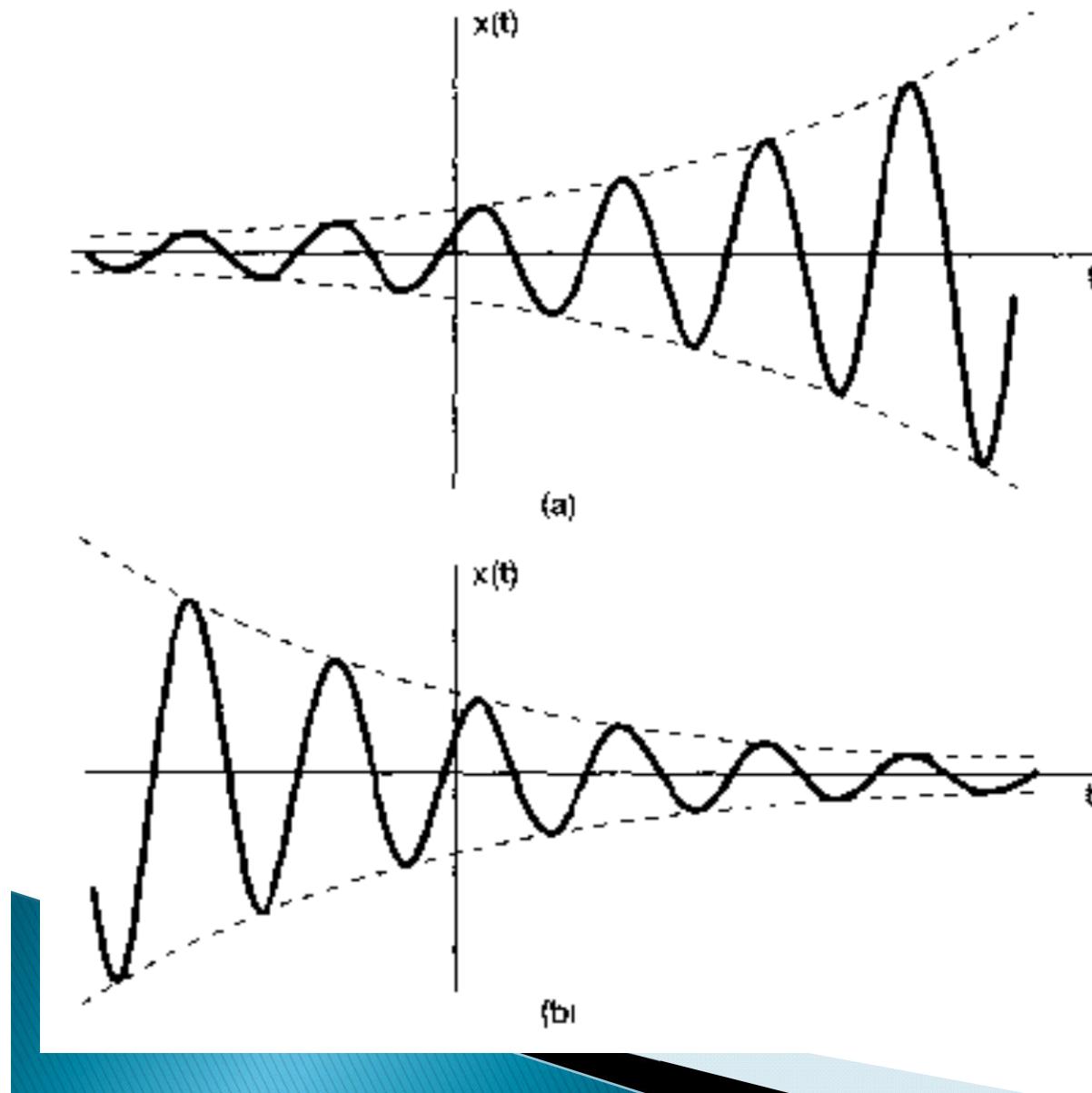


Figure 1.23 of Signals and Systems
(Oppenheim & Willsky, 1997):
(a) Growing sinusoidal signal $x(t)=|C|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)$, $r > 0$;
(b) Decaying sinusoidal signal $x(t)=|C|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)$, $r < 0$

General Complex Exponential Signals

- ▶ Garis putus-putus pada gambar mengilustrasikan fungsi $\pm|C|e^{rt}$ mengingat bahwa $|C|e^{rt}$ adalah magnitude dari isyarat sinusoidal.
- ▶ Keberadaan faktor e^{rt} membuat amplitudo isyarat sinusoidal naik atau meluruh (tergantung pada nilai r) seiring dengan perubahan indeks waktu t .

- ▶ Seluruh bahasan mengenai isyarat eksponensial dan sinusoidal telah dilakukan untuk konteks isyarat kontinu.
- ▶ Analisis serupa bisa juga dilakukan untuk konteks isyarat diskret.