Sifat-Sifat Sistem LTI

Sumber Bacaan:
Signal and System, Oppenheim, Willsky, & Hamid Nawab, Sub-Bab 2.3

Konvolusi: Review

- Sebelumnya telah dibahas bagaimana menemukan keluaran atau tanggapan sistem LTI ($y[n]$ untuk diskret maupun $y(t)$ untuk kontinu) untuk suatu isyarat diskret $x[n]$ atau kontinu $x(t)$ jika tanggapan terhadap impuls satuan ($h[n]$ untuk sistem diskret dan $h(t)$ untuk sistem kontinu) diketahui.

- Representasi keluaran sistem LTI ($y[n]$ untuk diskret maupun $y(t)$ untuk kontinu) diperoleh melalui operasi jumlahan konvolusi (sistem diskret) atau integral konvolusi (sistem kontinu).

Konvolusi: Review

- Operasi Jumlahan Konvolusi (Convolution Sum) untuk Sistem Diskret:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

- Operasi Integral Konvolusi (Convolution Integral) untuk Sistem Kontinu:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

- Selanjutnya kita akan membahas sifat atau properti dari operasi konvolusi di atas.

Sifat Komutatif (Sistem LTI Diskret)

- Operasi konvolusi untuk sistem LTI waktu diskret memenuhi sifat komutatif, yang berarti:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Bukti:

- Ingat bahwa:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (1)$$

- Kita perkenalkan variabel baru: $r = n - k$, yang berarti $k = n - r$. Jika kita substitusi k pada persamaan (1) dengan r maka akan diperoleh:

Sifat Komutatif (Sistem LTI Diskret)

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r]$$
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[n-r] = h[n] * x[n]$$

- Dengan demikian berlaku:

$$\boxed{x[n] * h[n] = h[n] * x[n]}$$

Sifat Komutatif (Sistem LTI Kontinu)

- Operasi konvolusi untuk sistem LTI waktu kontinu memenuhi sifat komutatif, yang berarti:

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

Bukti:

- Ingat bahwa:

$$\boxed{x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2)}$$

- Kita perkenalkan variabel baru: $u = t - \tau$, yang berarti $\tau = t - u$. Jika kita substitusi τ pada persamaan (2) dengan u maka akan diperoleh $du = -d\tau$ dan

Sifat Komutatif (Sistem LTI Kontinu)

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)h(u)(-du)$$

- Perhatikan bahwa jika rentang integral kita balik maka rentang menjadi -∞ ke ∞ dan kita dapat mengganti *–du* dengan *du*:

$$x(t) * h(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)h(u)(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du = h(t) * x(t)$$

- Dengan demikian berlaku:

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

Sifat Komutatif (Sistem LTI)

- Konsekuensi untuk Sistem LTI Kontinu:

- Konsekuensi untuk Sistem LTI Diskret:

- Dengan demikian, keluaran suatu sistem LTI diskret dengan masukan $x[n]$ dan tanggapan impuls $h[n]$ **identik** dengan keluaran sistem LTI diskret yang memiliki masukan $h[n]$ dan tanggapan impuls $x[n]$.

Sifat Komutatif (Sistem LTI)

- Konvolusi antara isyarat masukan $x[n]$ dengan tanggapan impuls sistem LTI diskret $h[n]$ bisa dilakukan dengan
  - Lakukan proses *shifting* dan *reflection* pada $h[k]$ untuk hasilkan $h[n-k]$.
  - Lalu kalikan $x[k]$ dengan $h[n-k]$ dan jumlahkan $x[k]h[n-k]$ untuk seluruh nilai k.
  - Atau: Lakukan proses *shifting* dan *reflection* pada $x[k]$ untuk hasilkan $x[n-k]$.
  - Lalu kalikan $h[k]$ dengan $x[n-k]$ dan jumlahkan $h[k]x[n-k]$ untuk seluruh nilai k.

Sifat Komutatif (Sistem LTI)

- Analogi dengan kasus diskret, keluaran suatu sistem LTI kontinu dengan masukan $x(t)$ dan tanggapan impuls $h(t)$ **identik** dengan keluaran sistem LTI kontinu yang memiliki masukan $h(t)$ dan tanggapan impuls $x(t)$.

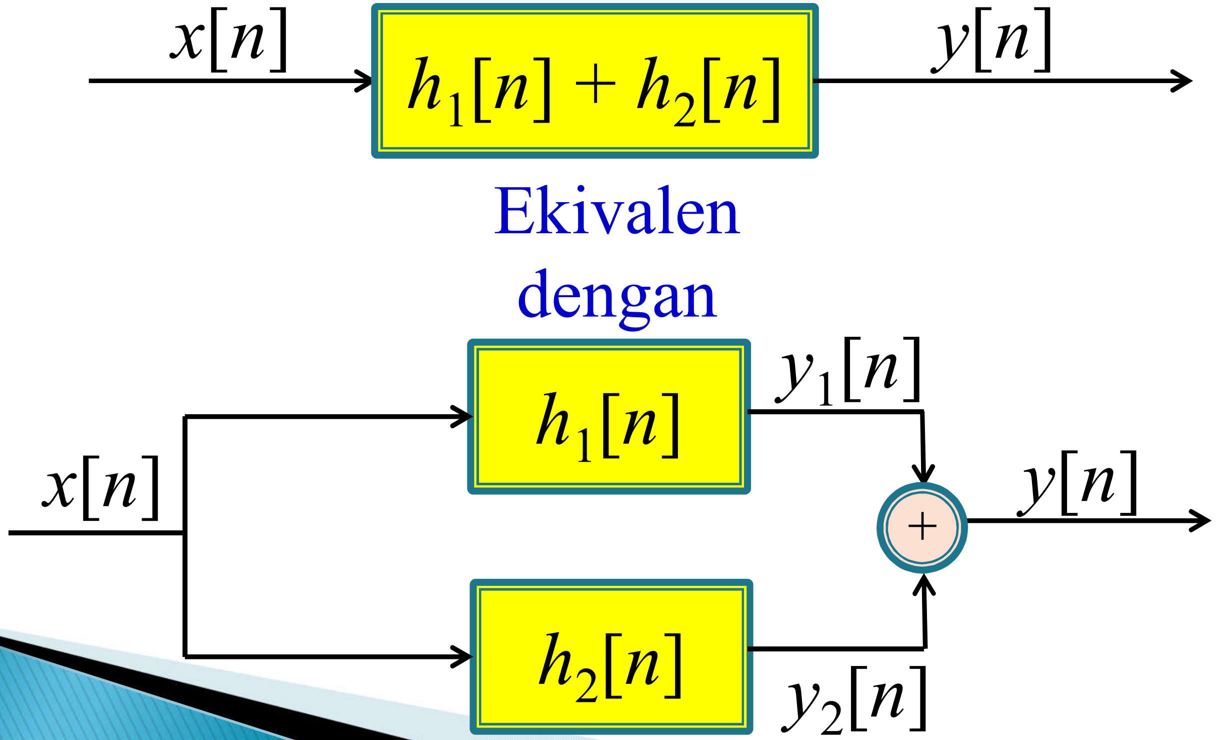
- Konvolusi antara isyarat masukan $x(t)$ dengan tanggapan impuls sistem LTI kontinu $h(t)$ bisa dilakukan dengan
  - Lakukan proses *shifting* dan *reflection* pada $h(\tau)$ untuk hasilkan $h(t-\tau)$. Kalikan $x(\tau)$ dengan $h(t-\tau)$ dan integralkan $x(\tau)h(t-\tau)$ terhadap τ.
  - Atau: Lakukan proses *shifting* dan *reflection* pada $x(\tau)$ untuk hasilkan $x(t-\tau)$. Kalikan $h(\tau)$ dengan $x(t-\tau)$ integralkan $h(\tau)x(t-\tau)$ terhadap τ.

Sifat Distributif (Sistem LTI Diskret)

- Untuk sistem LTI diskret berlaku:

$$\boxed{x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]}$$

- Konsekuensi

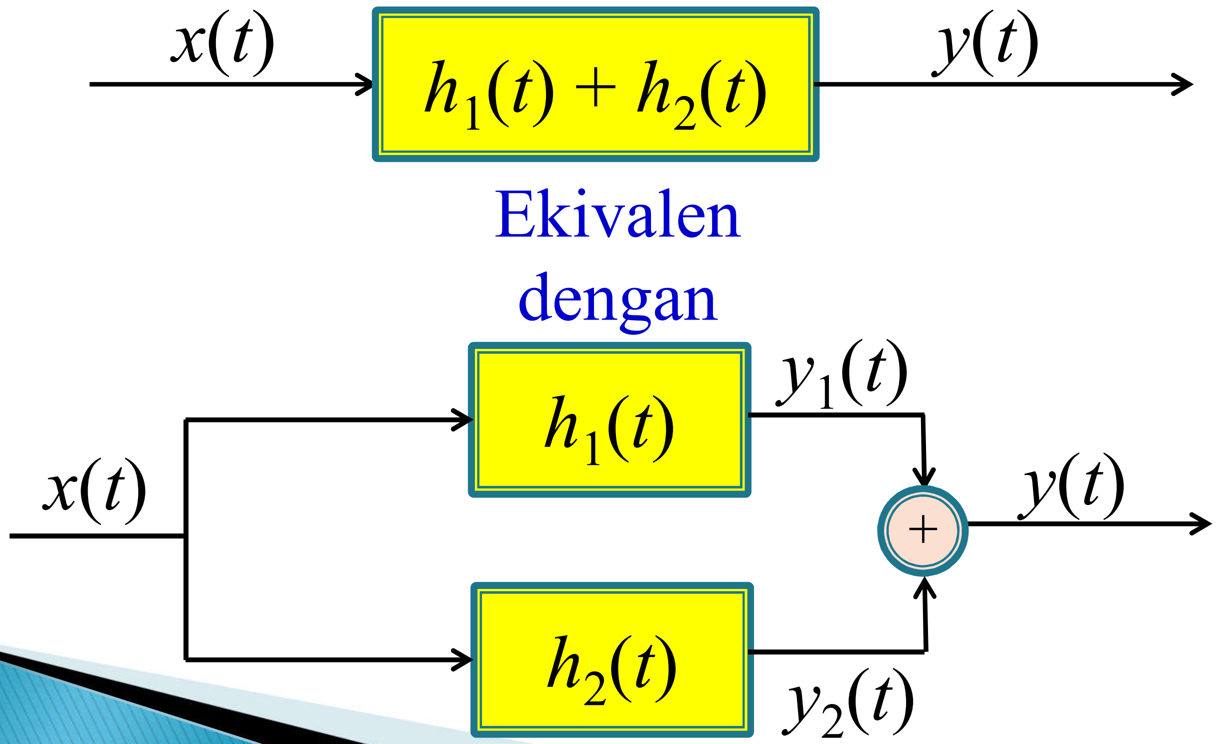


Sifat Distributif (Sistem LTI Kontinu)

- Untuk sistem LTI kontinu berlaku:

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

- Konsekuensi



Sifat Distributif (Sistem LTI)

Artinya, baik untuk sistem LTI diskret dan kontinu:

- Kombinasi paralel antara sistem-sistem LTI dapat digantikan oleh sebuah sistem LTI yang tanggapan impulsnya diberikan oleh jumlahan tanggapan impuls dari tiap-tiap sistem LTI yang diparalel di atas.

- Konsekuensi sifat distribusi dan komutatif pada operasi konvolusi pada sistem diskret:

$$\boxed{(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]}$$

- Artinya: Tanggapan sistem LTI diskret terhadap jumlahan 2 isyarat masukan sama dengan jumlahan tanggapan sistem terhadap tiap-tiap isyarat masukan tersebut secara terpisah.

Sifat Distributif (Sistem LTI)

- Konsekuensi sifat distribusi dan komutatif pada operasi konvolusi pada sistem kontinu:

$$\boxed{(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)}$$

- Sebagaimana pada kasus sistem diskret, tanggapan sistem LTI kontinu terhadap jumlahan 2 isyarat masukan sama dengan jumlahan tanggapan sistem terhadap tiap-tiap isyarat masukan tersebut secara terpisah.

Contoh 1

- Tentukan isyarat keluaran $y[n]$ dari sistem LTI yang memiliki tanggapan impuls $h[n]$ dan isyarat masukan $x[n]$ berikut:

$$\boxed{h[n] = u[n]}$$

$$\boxed{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n]}$$

- Tampak bahwa $x[n]$ bernilai tidak nol di sepanjang sumbu waktu n yang mengakibatkan evaluasi konvolusi $x[n] * h[n]$ secara langsung mungkin lebih rumit.
- Alternatif definisikan:

$$\boxed{x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]} \qquad \boxed{x_2 = 2^n u[-n]}$$

Contoh 1

- Sehingga bisa kita tuliskan

$$y[n] = x[n] * h[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]$$

- Dengan memanfaatkan hukum distributif diperoleh:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

- Di mana

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \qquad y_2[n] = x_2[n] * h[n]$$

- Lihat Slide Pertemuan sebelumnya yang berjudul **Sistem Linear Time Invariant (LTI) Diskret.**
- Tinjau **Contoh 3** pada Slide di atas dan fokus pada:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad h[n] = u[n]$$

Contoh 1

- Dari Contoh 3 tsb tampak bahwa jika $x[n] = \alpha^n u[n]$, dengan $0 < \alpha < 1$ dan $h[n] = u[n]$, maka

$$\boxed{y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right) u[n] \quad (3)}$$

- Dengan demikian, nilai $y_1[n] = x_1[n] * h[n]$ di atas bisa diperoleh dengan menset nilai α pada persamaan (3) dengan $\alpha = 1/2$. Jadi:

$$\begin{aligned} y_1[n] = x_1[n] * h[n] &= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} * u[n] \\ &= \left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) u[n] = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) u[n] \end{aligned}$$

Contoh 1

- Kemudian tinjau Contoh 5 pada **Sistem Linear Time Invariant (LTI) Diskret** dan fokus pada

$$\boxed{x_2 = 2^n u[-n]} \qquad \boxed{h[n] = u[n]}$$

- Dari Contoh 5 tsb tampak bahwa jika $x_2[n] = 2^n u[-n]$, dan $h[n] = u[n]$, maka

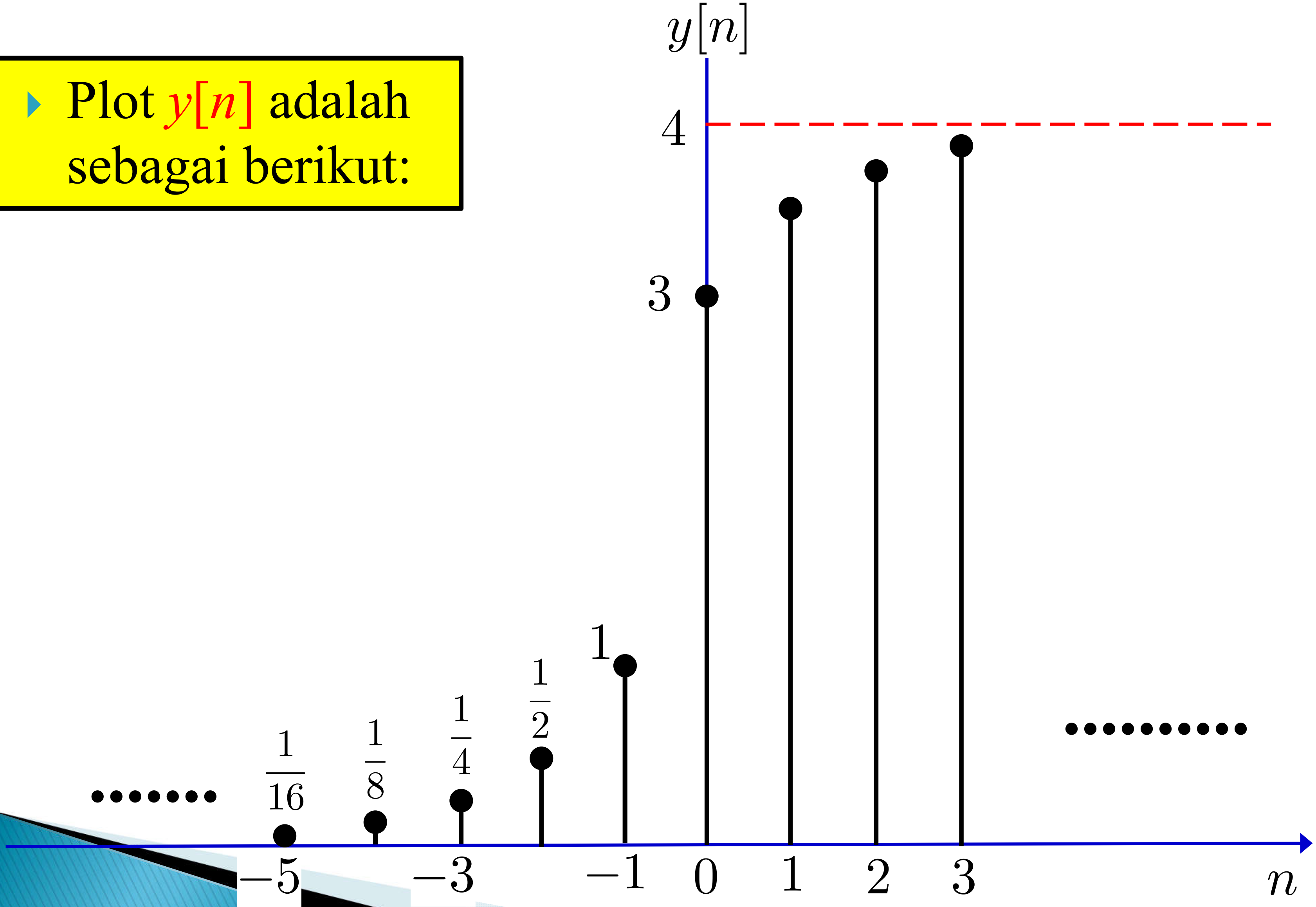
$$\boxed{y_2[n] = \begin{cases} 2, & n \geq 0, \\ 2^{n+1}, & n < 0 \end{cases}}$$

- Maka, dari $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$, diperoleh:

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2^n}, & n \geq 0, \\ 2^{n+1}, & n < 0 \end{cases}}$$

Contoh 1

- Plot $y[n]$ adalah sebagai berikut:



Sifat Asosiatif (Sistem LTI)

- Pada operasi konvolusi berlaku sifat asosiatif.
- Untuk sistem LTI diskret berlaku:

$$\boxed{x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]}$$

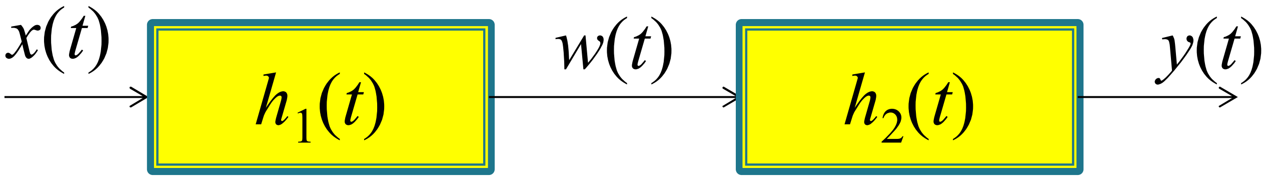
- Untuk sistem LTI kontinu berlaku:

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)}$$

- Baik pada sistem LTI diskret ataupun kontinu, pada dua operasi konvolusi yang ada di atas (depan dan belakang), tidak akan menjadi masalah apakah operasi konvolusi yang di depan atau yang di belakang yang dilakukan terlebih dulu.

Sifat Asosiatif (Sistem LTI Kontinu)

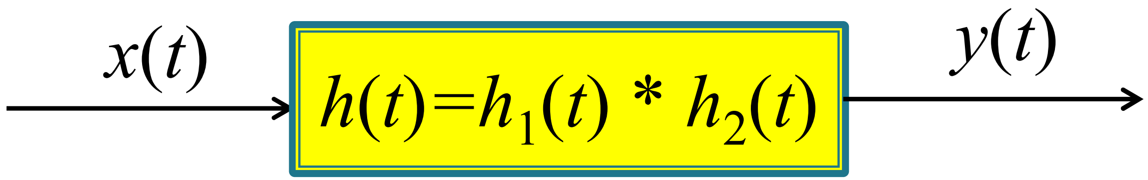
- Konsekuensi:



- Di mana tampak bahwa:

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

Ekivalen dengan

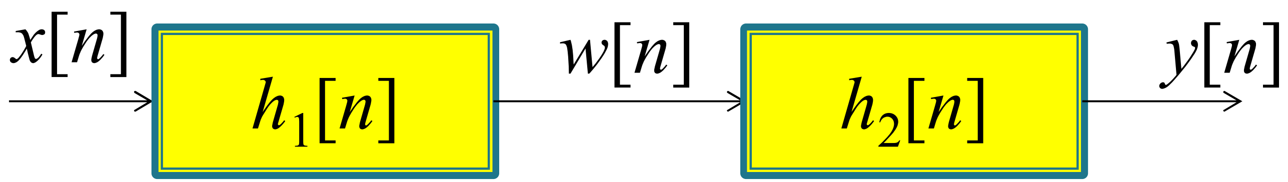


- Di mana tampak bahwa:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

Sifat Asosiatif (Sistem LTI Diskret)

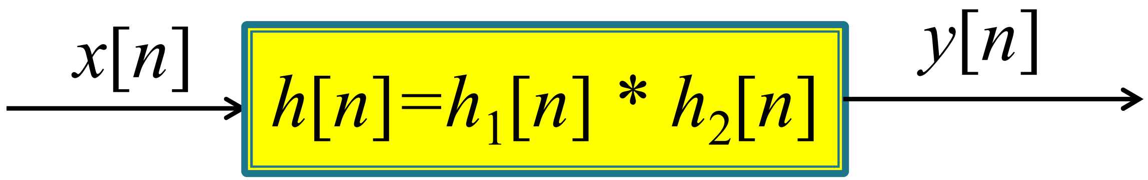
- Konsekuensi:



- Di mana tampak bahwa:

$$\boxed{y[n] = w[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]}$$

Ekivalen dengan



- Di mana tampak bahwa:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])}$$

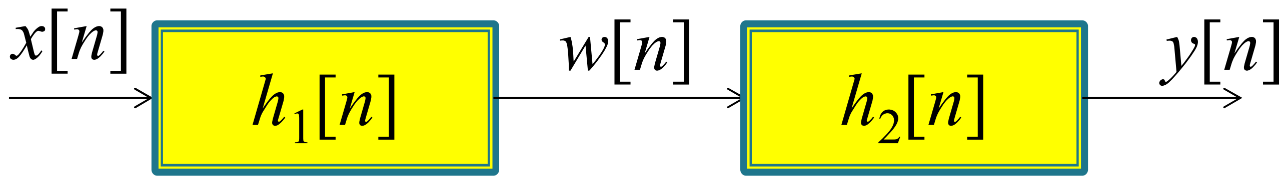
Sifat Asosiatif (Sistem LTI)

- Dengan demikian, hasil interkoneksi seri antara dua buah sistem LTI setara dengan sebuah sistem LTI yang tanggapan impulsnya merupakan konvolusi dari tanggapan impuls kedua sistem yang dihubung **seri**.
- Sifat asosiatif dan ekivalensi di atas bisa digeneralisasi untuk kasus 3 atau lebih sistem LTI yang dihubung **seri**.

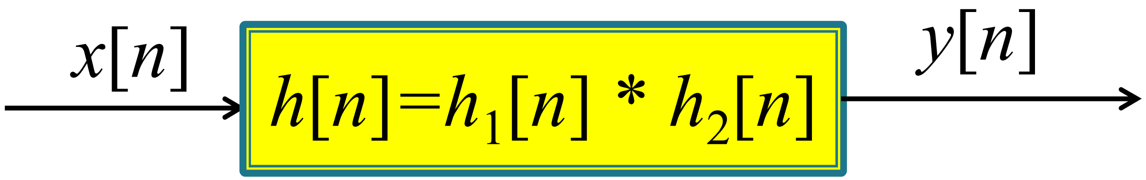
- Kombinasi antara sifat komutatif dan sifat asosiatif memberikan konsekuensi penting pada sistem LTI.
- Sifat komutatif: $h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$ => artinya urutan sistem yang dihubung seri dapat dipertukarkan **tanpa mempengaruhi** keluaran akhir sistem!

Sifat Asosiatif (Sistem LTI Diskret)

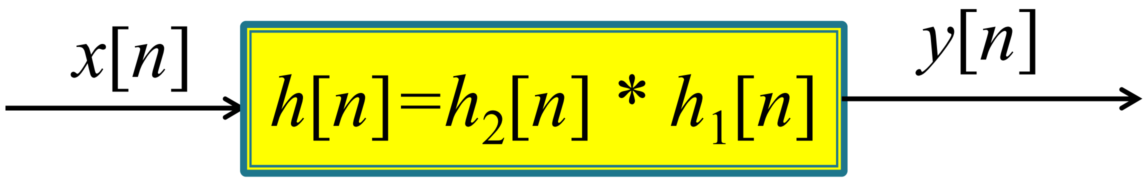
- Hal ini berarti untuk sistem diskret berlaku:



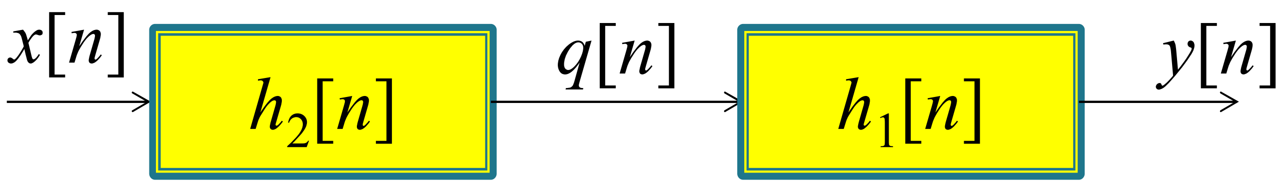
Ekivalen dengan



Ekivalen dengan

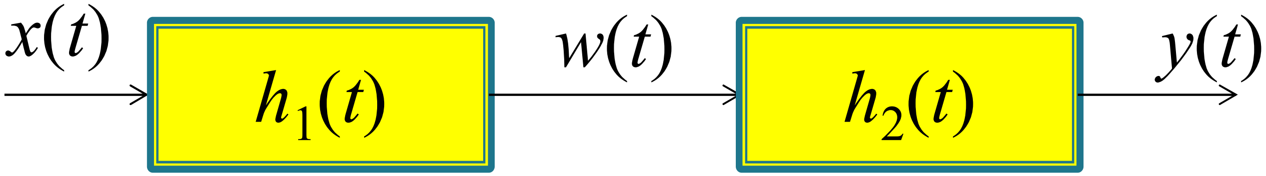


Ekivalen dengan

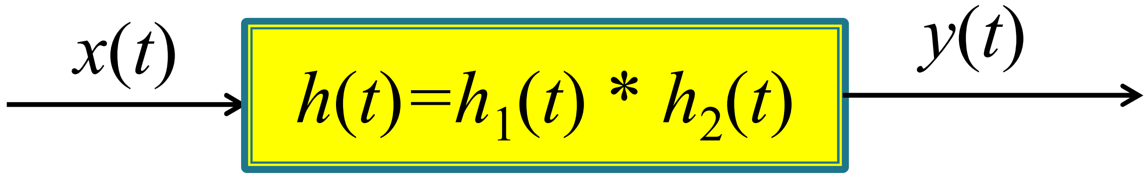


Sifat Asosiatif (Sistem LTI Kontinu)

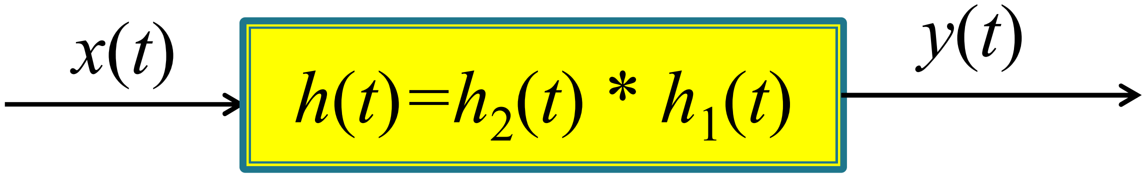
- Sedangkan untuk sistem kontinu berlaku:



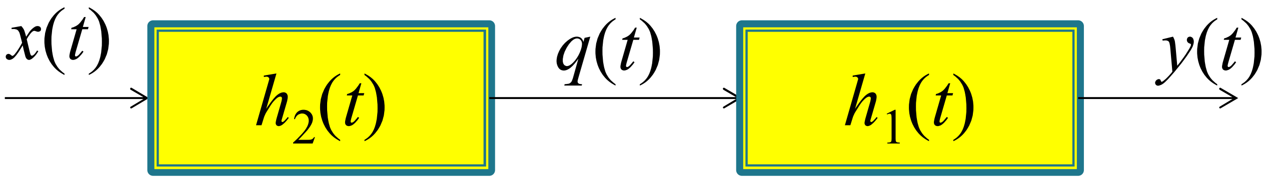
Ekivalen dengan



Ekivalen dengan



Ekivalen dengan



Sifat Asosiatif (Sistem LTI Kontinu)

- Dengan demikian, keluaran akhir dari dua buah sistem yang dihubung seri **<u>tidak bergantung</u>** pada urutan sistem dalam hubungan seri tersebut.

- Hal ini merupakan sifat yang spesifik selalu ada pada sistem Linear Time Invariant (LTI).
- Namun pada umumnya sifat ini **<u>belum tentu muncul</u>** pada kasus sistem yang bukan LTI (misalnya pada sistem non-Linear).

Sistem LTI Dengan dan Tanpa Memori

- Sistem disebut tanpa memori (memoryless) jika keluaran pada suatu waktu hanya bergantung pada masukan pada saat yang sama.

- Jika kita tinjau operasi jumlahan konvolusi untuk sistem LTI diskret:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

- Yang bisa ditulis ulang sebagai:

$$y[n] = \cdots + x[n-1]h[n-(n-1)] + x[n]h[n-n]$$
$$+x[n+1]h[n-(n+1)] + \ldots$$

Sistem LTI Dengan dan Tanpa Memori

- Atau dengan kata lain:

$$y[n] = \cdots + x[n-1]h[1] + x[n]h[0] + x[n+1]h[-1] + \ldots$$

- Maka tampak dari persamaan di atas bawa sistem LTI Diskret merupakan **sistem tanpa memori** hanya jika $h[n] = 0$ untuk **semua $n \neq 0$**.
- Apabila hal tersebut tidak dipenuhi (yaitu $h[n] \neq 0$ untuk beberapa $n \neq 0$) maka sistem LTI Diskret merupakan **sistem dengan memori**

Sistem LTI Dengan dan Tanpa Memori

- Hal yang sama juga berlaku untuk Sistem LTI Kontinu.
- Jika kita tinjau operasi integral konvolusi untuk sistem LTI kontinu:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

- Yang karena sifat komutatif bisa dituliskan juga sebagai:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)}$$

Sistem LTI Dengan dan Tanpa Memori

- Maka tampak dari persamaan di atas bawa sistem LTI Kontinu merupakan **<u>sistem tanpa memori</u>** hanya jika $h(t) = 0$ untuk **semua** $\boldsymbol{t \neq 0}$.
- Apabila hal tersebut tidak dipenuhi (yaitu $h[t] \neq 0$ untuk beberapa $t \neq 0$) maka sistem LTI Kontinu merupakan **<u>sistem dengan memori</u>**

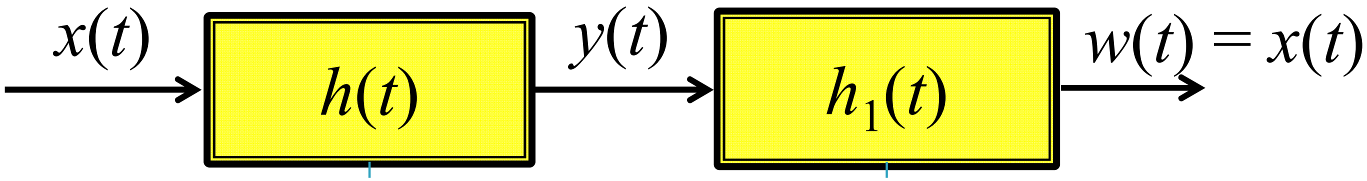
Sifat Keterbalikan

- Suatu sistem LTI Kontinu dengan tanggapan impuls $h(t)$ dikatakan memiliki sifat keterbalikan (invertible) hanya jika terdapat suatu sistem invers dengan tanggapan impuls $h_1(t)$ di mana jika sistem LTI di atas bersama sistem inversnya **dihubung seri** maka keluaran akhirnya akan sama dengan masukan di awal sistem.

- Definisi yang serupa berlaku pula untuk sistem LTI Diskret.

Sifat Keterbalikan

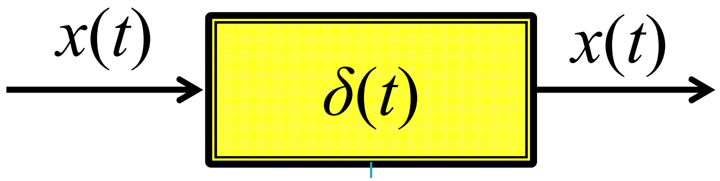
- Dengan demikian, untuk sistem LTI Kontinu berlaku:



Sistem 1

Invers bagi Sistem 1

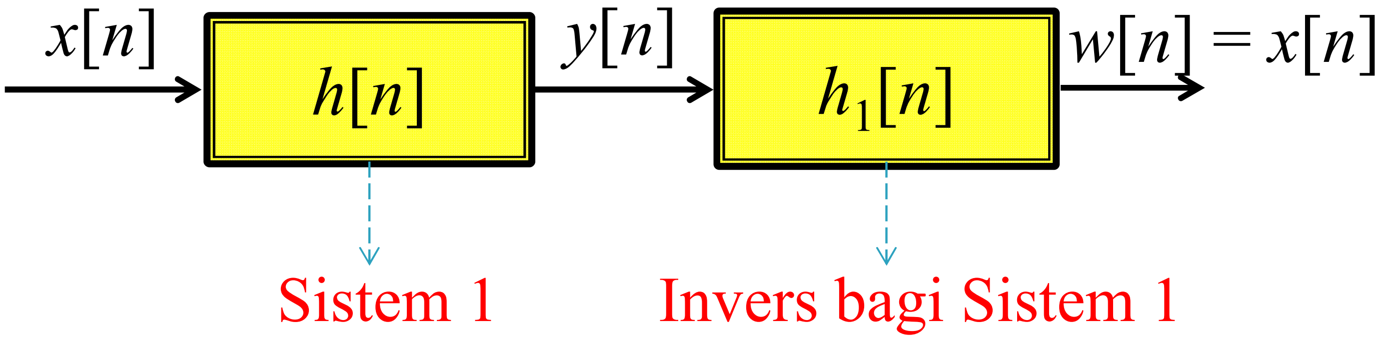
Ekivalen dengan



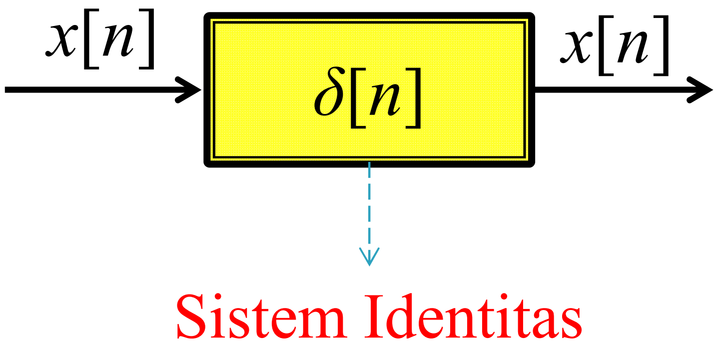
Sistem Identitas

Sifat Keterbalikan

- Sedangkan untuk sistem LTI Diskret berlaku:



Ekivalen dengan



Sifat Keterbalikan

- Jadi, Sistem LTI Diskret yang memiliki tanggapan impuls $h_1[n]$ merupakan **invers** bagi sistem LTI Diskret yang memiliki tanggapan impuls $h[n]$, jika dipenuhi:

$$\boxed{h_1[n] * h[n] = h[n] * h_1[n] = \delta[n]}$$

- Sedangkan, Sistem LTI Kontinu yang memiliki tanggap-an impuls $h_1(t)$ merupakan **invers** bagi sistem LTI Konti-nu yang memiliki tanggapan impuls $h(t)$, jika dipenuhi:

$$\boxed{h_1(t) * h(t) = h(t) * h_1(t) = \delta(t)}$$

Contoh 2

- Diketahui sistem LTI kontinu yang keluarannya hanya sekedar pergeseran waktu (time shift) dari masukan:

$$\boxed{y(t) = x(t - t_0)}$$

- Sistem di atas merupakan sistem tunda jika $t_0 > 0$ dan sistem advance jika $t_0 < 0$.
- Ingat: Tanggapan impuls adalah keluaran sistem saat masukan berupa isyarat $\delta(t)$.
- Dengan demikian, jika isyarat $x(t)$ kita gantikan dengan $\delta(t)$, maka akan kita dapatkan tanggapan impuls dari sistem di atas, yaitu:

$$\boxed{h(t) = \delta(t - t_0)}$$

Contoh 2

- Berhubung, keluaran sistem LTI merupakan **konvolusi** antara masukan sistem dengan tanggapan impuls maka:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \qquad (3a)}$$

- Untuk mendapatkan kembali masukan $x(t)$ dari keluaran sistem $y(t)$ maka kita perlu melakukan **invers** terhadap sistem.
- Untuk contoh di atas, secara intuitif, jelas bahwa hal ini cukup dilakukan dengan melakukan pergeseran waktu yang sifatnya melawan pergeseran waktu yang dilakukan sistem di atas.

Contoh 2

- Sistem invers ini yang sifatnya mengkompensasi **time shift** dari sistem LTI di atas akan memiliki tanggapan impuls:

$$\boxed{h_1(t) = \delta(t + t_0)}$$

- Hal ini bisa ditunjukkan dengan menghubung seri sistem invers ini dengan sistem LTI di atas di mana sistem resultan hasil hubung seri ini akan memiliki tanggapan impuls:

$$\boxed{\bar{h}(t) = h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0)}$$

- Berdasarkan persamaan (3a) jelas bahwa:

$$\boxed{\bar{h}(t) = \delta(t + t_0) * \delta(t - t_0) = \delta(t + t_0 - t_0) = \delta(t)}$$

yang merupakan tanggapan impuls sistem identitas.

Contoh 3

- Diketahui sistem LTI Diskret dengan tanggapan impuls $h[n] = u[n]$ (unit step function)
- Hubungan antara masukan dan keluaran sistem ini dapat dituliskan:

$$y[n] = x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]$$

- Berhubung $u[n-k] = 0$ untuk $n-k < 0$ dan $u[n-k] = 1$ untuk $n-k \geq 0$ maka persamaan di atas dapat dituliskan:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Contoh 3

- Tampak bahwa yang dilakukan oleh sistem adalah melakukan jumlahan terhadap seluruh isyarat masukan dari titik waktu paling awal ($k = -\infty$) hingga titik waktu sekarang (present time) ($k = n$).
- Sistem tersebut disebut dengan penjumlah atau akumulator.

- Jika diinginkan untuk mendapatkan kembali nilai masukan $x[n]$ dari keluaran $y[n]$ maka hal yang dapat dilakukan adalah mengurangi keluaran saat n dengan keluaran saat n - 1:

$$y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n]$$

Contoh 3

- Dengan demikian, **sistem invers** bagi sistem dengan tanggapan impuls $h[n]$ di atas (sistem akumulator) adalah sistem yang hubungan antara masukan ($x_1[n]$) dan keluarannya ($y_1[n]$) diberikan oleh:

$$\boxed{y_1[n] = x_1[n] - x_1[n-1]}$$

- Untuk mengetahui tanggapan impuls dari sistem invers ini, kita perlu melihat saat masukan sistem invers adalah $x_1[n] = \delta[n]$. Pada situasi ini diperoleh tanggapan impuls:

$$\boxed{h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]}$$

Contoh 3

- Dengan demikian, dinyatakan bahwa invers bagi sistem berikut:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]=u[n]} \longrightarrow y[n]$$

diberikan oleh:

$$x_1[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]} \longrightarrow y_1[n]$$

- Untuk mencek pernyataan di atas, kita dapat menghubung seri kedua sistem tersebut:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]=u[n]} \longrightarrow \boxed{h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]} \longrightarrow$$

Contoh 3

- Berdasarkan sifat asosiatif, hasil hubung seri adalah sebuah sistem berikut ini:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\tilde{h}[n] = h[n] * h_1[n]} \longrightarrow y[n]$$

- Tampak bahwa:

$$\begin{aligned}\tilde{h}[n] = h[n] * h_1[[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= (u[n] * \delta[n]) - (u[n] * \delta[n-1]) \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n]\end{aligned}$$

- Mohon anda cek sendiri langkah berikut dengan **formula jumlahan konvolusi**.

Contoh 3

- Dari langkah di atas jelas bahwa:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\tilde{h}[n] = h[n] * h_1[n] = \delta[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]$$

- Dengan demikian benar bahwa invers bagi sistem dengan tanggapan impuls $h[n] = u[n]$ adalah sistem yang memiliki tanggapan impuls $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Kausalitas pada Sistem LTI

- **Sistem Kausal:** Sistem yang keluaran pada waktu saat ini hanya bergantung pada nilai masukan saat ini dan pada masa lalu (tidak bergantung pada masukan di masa mendatang)

- Untuk Sistem LTI Diskret, kita tinjau formula jumlahan konvolusi:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

- Agar Sistem LTI Diskret merupakan sistem kausal maka $y[n]$ **tidak boleh** bergantung pada $x[k]$ untuk $k > n$.

Kausalitas pada Sistem LTI

- Dari persamaan di atas, jelas bahwa **sifat kausalitas** untuk sistem LTI diskret bisa diperoleh hanya jika nilai koefisien $h[n\text{-}k]$, yang merupakan pengali bagi $x[k]$ untuk $k > n$, bernilai nol.
- Hal ini berarti, sifat kausalitas diperoleh jika tanggapan impuls memenuhi:

$$\boxed{h[n-k] = 0 \text{ untuk } k > n}$$

yang ekivalen dengan:

$$\boxed{h[n] = 0 \text{ untuk } n < 0}$$

- Hal yang serupa berlaku pula untuk Sistem LTI Kontinu.

Kausalitas pada Sistem LTI

- Untuk Sistem LTI Kontinu, kita tinjau formula integral konvolusi:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

- Agar Sistem LTI Kontinu merupakan sistem kausal maka $y(t)$ **tidak boleh** bergantung pada $x(\tau)$ untuk $\tau > t$.

- Dari persamaan di atas, tampak bahwa **sifat kausalitas** untuk sistem LTI kontinu diperoleh hanya jika nilai koefisien $h(t-\tau)$, yang merupakan pengali bagi $x(\tau)$ untuk $\tau > t$, bernilai nol.

Kausalitas pada Sistem LTI

- Artinya, sifat kausalitas untuk Sistem LTI Kontinu diperoleh jika tanggapan impuls memenuhi:

$$\boxed{h(t-\tau) = 0 \text{ untuk } \tau > t}$$

yang ekivalen dengan:

$$\boxed{h(t) = 0 \text{ untuk } t < 0}$$

- Pada sistem LTI, sifat kausal **ekivalen dengan** kondisi initial rest.
- Kondisi initial rest adalah situasi di mana berlaku: Saat suatu masukan sistem bernilai nol hingga waktu tertentu, maka keluaran sistem juga akan bernilai nol hingga waktu tertentu tersebut.

Stabilitas Sistem LTI

- Suatu sistem dikatakan **stabil** jika setiap masukan yang berhingga (bounded input) akan menghasilkan keluaran yang berhingga pula (bounded output).
- Bagaimana spesifikasi sistem yang diperlukan agar sistem stabil?

- Asumsikan sistem LTI diskret dengan magnitude (besar) masukan $x[n]$ yang berhingga atau bounded dengan batas atas B:

$$\boxed{|x[n]| < B \text{ untuk seluruh nilai } n.}$$

Stabilitas Sistem LTI

- Jika sistem LTI diskret di atas memiliki tanggapan impuls $h[n]$, maka **magnitude** atau besar keluaran sistem dapat dituliskan:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \qquad (4).$$

- Berhubung magnitude dari jumlahan beberapa bilangan tidak pernah melebihi jumlahan dari magnitude masing-masing bilangan tersebut, maka berdasarkan (4), |y[n]| dapat dituliskan sebagai:

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$$

Stabilitas Sistem LTI

- Yang artinya: $$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \qquad (5).$$

- Berhubung $|x[n-k]| < B$ untuk seluruh nilai k dan n, maka dengan mempertimbangkan (5), bisa kita tuliskan bahwa:

$$|y[n]| \le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \;\; \text{untuk seluruh } n \qquad (6).$$

- Dari persamaan (6) tampak bahwa magnitude $y[n]$ akan berhingga atau bounded (yang artinya sistem akan stabil) jika dipenuhi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Stabilitas Sistem LTI

- Jadi agar sistem LTI diskret stabil, jumlah magnitude dari koefisien tanggapan impulsnya haruslah **berhingga** (*absolutely summable*).

- Cara yang sama bisa pula dikenakan pada sistem **LTI kontinu**.
- Asumsikan sistem LTI kontinu dengan magnitude (besar) masukan $x(t)$ yang berhingga atau bounded dengan batas atas B:

$$|x(t)| < B \text{ untuk seluruh nilai } t.$$

Stabilitas Sistem LTI

- Jika sistem LTI kontinu di atas memiliki tanggapan impuls $h(t)$, maka **magnitude** atau besar keluaran sistem dapat dituliskan:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \quad (7).$$

- Berhubung magnitude dari integrasi beberapa bilangan tidak pernah melebihi integrasi dari magnitude masing-masing bilangan tersebut, maka berdasarkan (7), $|y(t)|$ dapat dituliskan sebagai:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)d\tau|$$

Stabilitas Sistem LTI

- Yang artinya: $$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau \quad (8).$$

- Berhubung $|x(t-\tau)| < B$ untuk seluruh nilai t dan τ, maka dengan mempertimbangkan (8), bisa kita tuliskan bahwa:

$$|y(t)| \le B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau \text{ untuk seluruh } t \quad (9).$$

- Dari persamaan (9) tampak bahwa magnitude $y(t)$ akan berhingga atau bounded (yang artinya sistem akan stabil) jika dipenuhi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$$

Stabilitas Sistem LTI

- Jadi agar sistem LTI kontinu stabil, integrasi dari magnitude seluruh koefisien tanggapan impulsnya haruslah **<u>berhingga</u>** (absolutely integrable).

- Sebagai contoh: Sistem tunda baik untuk sistem LTI diskret maupun sistem LTI kontinu merupakan sistem yang stabil.
- Ingat bahwa sistem LTI tunda diskret memiliki tanggapan impuls: $h[n]=\delta[n-n_0]$ dengan n_0 besarnya tunda waktu.
- Tampak di sini bahwa:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 < \infty$$

Stabilitas Sistem LTI

- Sedangkan sistem LTI tunda kontinu memiliki tanggapan impuls: $h(t)=\delta(t-t_0)$ dengan t_0 besarnya tunda waktu.
- Tampak di sini bahwa:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t-t_0)|\, dt = 1 < \infty}$$

Contoh 4

- Pertimbangkan sistem LTI Diskret yang memiliki tanggapan impuls $h[n] = u[n]$.
- Ingat bahwa sistem semacam ini adalah sistem akumulator atau penjumlah.
- Akan dicek apakah sistem ini merupakan sistem stabil?

- Tampak bahwa:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty}$$

- Dengan demikian, sistem akumulator tidak stabil.

Contoh 4

- Pertimbangkan sistem LTI Kontinu berikut (yang sering dikenal dengan sistem integrator):

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$$

- Untuk mengevaluasi apakah sistem di atas stabil, kita perlu memperoleh tanggapan impuls $h(t)$ yang bisa diperoleh dengan mengganti masukan $x(t)$ pada persamaan di atas dengan impuls satuan $\delta(t)$:

$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau}$$

Contoh 4

- Berhubung dari bahasan minggu-minggu lalu telah diketahui bahwa:

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau}$$

- Maka jelas bahwa $h(t) = u(t)$ (unit step function). Dengan demikian:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)|\, d\tau = \int_{0}^{\infty} |1|\, d\tau = \infty}$$

- Artinya sistem di atas (integrator) tidak stabil.