הפקולטה
למדעי המחשב

ת.ז הסטודנט/ית:____________________

מס' חדר:________ מס' נבחן:_______

דוגמת מבחן 2 בקורס: מבוא לאופטימיזציה

קוד נושא: 160003

תאריך הבחינה:

שנה"ל: תשפ"ד סמסטר: ב' מועד:

שם המרצה: פרופ' שמואל איציקוביץ

שם המתרגלת: גב' עליזה לרנר

משך הבחינה: 80 דקות

הוראות לנבחנים:

א. לפניך 5 שאלות ברירה.
ב. בכל שאלה ישנם 5 היגדים כשאחד מהם מקנה את מירב הנקודות (25 נקודות) ושאר ההיגדים מקנים ניקוד חלקי, אם בכלל
ג. בכל שאלה עליך לסמן את התשובה המקנה את מירב הנקודות (25 נקודות) מבין 5 האפשרויות הרשומות.
ד. כל השאלות שוות במשקלן.
ה. יש למלא **בכתב יד ברור** במקומות המיועדים **בחציו הימני של דף הקידוד** את שם ביה"ס, חדר המבחן, מספר הנבחן, שם הקורס, תאריך הבחינה, שם המרצה, מספר תעודת הזהות (מספר בן תשע ספרות, כולל ספרת ביקורת ועם אפס מקדים באם נדרש) ואת מספר השאלון (המופיע בצדו השמאלי העליון של השאלון)
ו. ***** חשוב מאוד**:
בדף הקידוד יש לרשום ולקדד את מספר השאלון מימין לשמאל (להוסיף אפסים משמאל במידת הצורך).
ז. בכל שאלה יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר ולסמנה במקום המיועד בצידו השמאלי של דף הקידוד, **בעט שחור או כחול בלבד ובאופן ברור ומודגש**
ח. אין לסמן את התשובות על גבי דף הקידוד במַדְגֵּשׁ (מַרְקֶר) זוהר!
ט. רק דף הקידוד ייבדק!

- יש לענות על כל השאלות
- הבחינה עם חומר עזר–

- **מותר שימוש בדף אישי אחד בלבד ובו סיכומים ונוסחאות שהנבחן/ת בחר/ה לרשום. הדף הוא לשימושו/ה של הנבחן/ת בלבד ואינו ניתן להעברה. על הדף יירשם מספר תעודת זהות של הנבחן/ת והדף יימסר למשגיחים בסיום המבחן.**

- שימוש במחשבון כיס: כן – **Casio fx 991 EX בלבד!**
- בתום המבחן יש להחזיר את טופס המבחן ואת הדף האישי

בהצלחה !!!

<u>שאלה 1:</u>

<u>נתון</u>: $f(x_1, x_1) = 2|x_1| + 2|x_2|;$ וְ- $\vec{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

יש למצוא את $\vec{x}_{k+1}$ בשיטת תת הגרדיינט כאשר $\alpha_k = \frac{1}{k^{3/4}}$.

מי מהטענות הבאות נכונה? מי מהטענות הבאות נכונה?

1. אם f היא פונקציה קמורה ותת הגרדיינט $\vec{g}$ מקיים: $\|\vec{g}\| \leq G$ אזי מספר האיטרציות הדרוש לדיוק $\epsilon > 0$ בשיטת ה- $Subgradient\ Method$ עם צעד קבוע הוא: $\Omega\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$
2. $\partial f(0,1)^T = \{(a,2)^T | a\varepsilon[-2,2]\};\ \vec{g}_k = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \varepsilon \partial f(0,1)^T$
3. $\vec{g}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \varepsilon \partial f(0,1)^T \Longrightarrow \vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1/k^{3/4} \\ (k^{3/4} - 2)/k^{3/4} \end{bmatrix}$
4. אם f היא פונקציה $L-$חלקה וקמורה במובן החזק מודולו m , אזי בשיטת נסטרוב מספר האיטרציות הדרוש לדיוק $\epsilon > 0$ הוא: $\Omega\left(\left(\frac{L}{m}\right) \cdot ln\frac{1}{\epsilon}\right)$.
5. אם f היא פונקציה קמורה, תת הגרדיינט $\vec{g}$ מקיים: $\|\vec{g}\| \leq G$ אזי מספר האיטרציות הדרוש לדיוק $\epsilon > 0$ בשיטת ה- $Subgradient\ Method$ עם צעד קבוע הוא: $\Omega\left(\frac{L}{\epsilon}\right)$

בחר/י בתשובה הנכונה:

א. רק טענות 3 וְ- 4 נכונות

ב. רק טענות 2 וְ- 3 נכונות

ג. רק טענות 1 , 2, 3 וְ- 4 נכונות

ד. רק טענות 2 , 3, 4 וְ-5 נכונות

ה. רק טענות 1 וְ- 4 נכונות

שאלה 2

הבעיה: יש למצוא מינימום לפונקציה

$$f: R^3 \to R\ ;\ \ f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T Q\vec{x} - \vec{c}^T\vec{x} + d; d\varepsilon R$$

כאשר $Q \succ 0$, בכפוף לאילוץ: $\Omega = \left\{\vec{x}\middle|A\vec{x} = \vec{b}\right\}$; $\vec{x}\varepsilon\Omega$.

נתון: $\vec{x}_k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};\ \vec{b} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix};\ \vec{c} = \begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix};\ A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix};\ Q = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

יש למצוא את $\vec{x}_{k+1}$ באלגוריתם היטל המורד התלול ביותר .

מי מהטענות הבאות נכונה?

1. $\vec{g}_k = \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix};\ P_{N(A)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
2. $\alpha_k = \frac{1}{2};\ P_{N(A)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 2 & 2\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
3. $\alpha_k = \frac{1}{2};\ \vec{p}_k = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$
4. $\vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix}3/2\\1\\1/2\end{bmatrix}$
5. $\vec{x}_{k+1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix};\ \alpha_k = \frac{1}{4}$

בחר/י את התשובה הנכונה

א. רק טענות 3 וְ- 4 נכונות
ב. רק טענות 1 וְ- 4 נכונות
ג. רק טענות 1 , 3 וְ- 4 נכונות
ד. רק טענות 2 , 3 וְ- 5 נכונות
ה. רק טענות 3, 4 וְ-5 נכונות

שאלה 3

נתון: $f(\vec{x}) := \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{b}^T\vec{x};$ כאשר;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} ; \alpha = \frac{1}{16} \; ; \; \beta = \frac{3}{5}; \;\; \vec{x}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \vec{x}_k = \begin{bmatrix} 17/16 \\ 9/8 \\ 5/16 \end{bmatrix}$$

יש למצוא את $\vec{x}_{k+1}$ בשיטת המומנטום ($(Heavy\ Ball)$) ובשיטת נסטרוב לפונקציה קמורה במובן החזק. מי מהטענות הבאות נכונה?

1. בשיטת $Heavy\ Ball$:

$$\nabla^T f(\vec{x}_k) = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 50 \end{bmatrix}; \; \vec{x}_{k+1} = \frac{1}{1280}\begin{bmatrix} 1413 \\ 1561 \\ 890 \end{bmatrix}$$

2. בשיטת נסטרוב :

$$\vec{y}_k = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}; \; \vec{x}_{k+1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 171 \\ 185 \\ 100 \end{bmatrix}$$

3. בשיטת נסטרוב :

$$\nabla^T f(\,\vec{y}_k) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -20 \end{bmatrix}$$

4. בשיטת $Heavy\ Ball$:

$$\nabla^T f(\vec{x}_k) = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 50 \end{bmatrix}; \; \vec{x}_{k+1} = \frac{1}{121}\begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5. בשיטת $Heavy\ Ball$: $\vec{x}_{k+1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 17 \\ 19 \\ 100 \end{bmatrix}$ ובשיטת נסטרוב : $\vec{x}_{k+1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

בחר/י את התשובה הנכונה

א. רק טענות 1, וְ- 2 נכונות
ב. רק טענות 1, 2 וְ- 3 נכונות
ג. רק טענות 1, 2 וְ- 4 נכונות
ד. רק טענות 2, 3 וְ- 5 נכונות
ה. רק טענה 1 נכונה

שאלה 4

יש לחשב את $\vec{x}_{k+1}$ בשיטת המראָה (Mirror Descent) כשנתון

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{b}^T\vec{x} \ ; A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \ \vec{b} = \begin{bmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 4/11 \end{bmatrix} \ ; \ m = 1;$$

$$L = 5 \ ; \ h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i ln x_i : \Omega$$

$$\Omega = \{\vec{x}^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i > 0; i = 1,2, \cdots n \ ; \ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

$$D_h(\vec{x}^*, \vec{x}_0) < R = 0.125 \ ; \ \vec{x}_k = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}; T = 3$$

מי מהטענות הבאות נכונה?

1. $\vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.399 \\ 0.389 \\ 0.212 \end{bmatrix}$

2. $\alpha = 0.05 \ ; \ \vec{y}_k = \begin{bmatrix} -0.21579 \\ -0.1808 \\ 0.05689 \end{bmatrix}$

3. $\alpha = 0.02 \ ; \ \vec{y}_k = \begin{bmatrix} -0.1158 \\ -0.0813 \\ 0.0569 \end{bmatrix}$

4. $\vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.299 \\ 0.309 \\ 0.392 \end{bmatrix}$

5. $\nabla^T f(\vec{x}_k) = \begin{bmatrix} 0.23636 \\ -0.46363 \\ 0.53636 \end{bmatrix} \ ; \ \nabla^T h(\vec{x}_k) = \begin{bmatrix} -0.20397 \\ -0.20397 \\ 0.08371 \end{bmatrix}$

בחר/י את התשובה הנכונה

א. רק טענות 2 וְ- 4 נכונות
ב. רק טענות 4 וְ- 5 נכונות
ג. רק טענות 3, 4 וְ- 5 נכונות
ד. רק טענות 1 , 4 וְ- 5 נכונות
ה. רק טענות 2, 4 וְ- 5 נכונות

שאלה 5

נתון: $h: R^3 \rightarrow R; h(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2$. יש לחשב את $Prox_{2h}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, בפרט עבור $\alpha = 2$.

מי מהטענות הבאות נכונה?

1. $Prox_{2h}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6/5\\0\\8/5\end{bmatrix}$
2. $\vec{u} = Prox_{\alpha h}(\vec{x}) = \begin{cases}\left(\frac{\|\vec{x}\|_2-\alpha}{\|\vec{x}\|_2}\right)\vec{x} & \|\vec{x}\|_2 > \alpha \\ \vec{0} & \|\vec{x}\|_2 \le \alpha\end{cases}$
3. $Prox_{2h}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \vec{0}$
4. $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{x}\|_2 \le \alpha$
5. $\vec{u} = Prox_{\alpha h}(\vec{x}) = \begin{cases}\left(\frac{\|\vec{x}\|_2+\alpha}{\|\vec{x}\|_2}\right)\vec{x} & \|\vec{x}\|_2 \le \alpha \\ \vec{0} & \|\vec{x}\|_2 > \alpha\end{cases}$

בחר/י את התשובה הנכונה

א. רק טענות 2 וְ- 4 נכונות
ב. רק טענות 3 וְ- 4 נכונות
ג. רק טענות 2, 3 וְ- 4 נכונות
ד. רק טענה 2 נכונה
ה. רק טענות 2, 4 וְ- 5 נכונות