ALJABAR LINIER
Sifat-sifat Matriks

Objective

- Mahasiswa mampu menjelaskan jenis matriks
- Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat matriks
- Mahasiswa mampu menjelaskan tentang Transpose matriks

Jenis Matriks

- MATRIKS NOL, adalah matriks yang semua elemennya nol
  - Sifat-sifat :
  - ✓ A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
  - ✓ A*0=0, begitu juga 0*A=0.
- MATRIKS BUJURSANGKAR, adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen a11, a22, a33, ….ann disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

  Contoh : Matriks berukuran 2x2 , 3x3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 10 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- MATRIKS DIAGONAL, adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

  Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- MATRIKS SATUAN/IDENTITY, adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

  Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sifat-sifat matriks identitas : A*I=A , I*A=A

- MATRIKS SKALAR, adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- MATRIKS SEGITIGA ATAS (UPPER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal elemennya = 0.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

➢ Matriks Transpose

Bila A $_{(m \times n)}$ maka transpose dari A dinyatakan dengan A^T adalah matriks berordo (n x m).

Dengan perkataan lain terjadi perubahan dari baris menjadi kolom , sedangkan kolom menjadi baris

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 12 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat Matriks

- $A^T + B^T = (A + B)^T$
- $(A B)^T = B^T A^T$
- $(k A)^T = k A^T$, $k = skalar$
- $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukan :a. $A^T + B^T$

b. $(A + B)^T$

c. $A^T \times B^T$

d. $(A \times B)^T$

e. $B^T \times A^T$

f. $(B + A)^T$

- MATRIKS SEGITIGA BAWAH (LOWER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya = 0.

A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

- MATRIKS SIMETRIS, adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

$$A = A^T$$

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A^T= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- MATRIK PARTISI : sebuah matrik dapat dibagi menjadi bagian yang lebih kecil dengan garis pemisah/partisi mendatar dan vertikal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

I adalah matrik identitas 3 x 3,

B adalah matrik 3 x 2

O adalah matrik nol 2 x 3

C adalah matrik 2 x 2

Dengan cara partisi tersebut, kita dapat lihat bahwa matrik A adalah sebagai matrik 2 x 2

- MATRIKS ANTISIMETRIS, adalah matriks yang trnsposenya adalah negatif dari matriks tersebut.

  Maka AT=-A dan aij=-aji,

  elemen diagonal utamanya = 0

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- MATRIK PANGKAT : $A^r A^s = A^{r+s}$; $(A^r)^s = A^{rs}$
  - ✓ Matrik Idempotent : matrik bujur sangkar yang berlaku A^2 = A atau A^n = A, dengan n = 2, 3, 4 .....

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ Tentukan } A^2!$$

Jawab

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

✓ Matrik Nilpotent : matrik bujur sangkar yang berlaku $A^3 = 0$ atau $A^n = 0$, dengan n = 3, 4 .....

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Contoh beberapa kasus pemangkatan matrik

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hitung A^2 dan A^3

jawab

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Disimpulkan

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \text{ untuk } n \geq 1$$

Untuk n = 1

$$A^1 = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Tentukan: B^2, B^3 dan B^4 !

jawab

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = B^3 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1	0		0	-1
0	1		1	0

0	-1
1	0

- Jadi B5 = B.
- Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pemangkatan B hingga B^n merupakan pengulangan dari B^4

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{B^2}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}, \underset{B^3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{B^4}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{B^5 = B}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Operasi Matriks

- **Penjumlahan Matriks**

  Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dijumlahkan

  Contoh =

a. $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Pengurangan Matriks**

  Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dkurangkan

  Contoh =

a. $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Perkalian Matriks**
  - ✓ Perkalian Skalar dengan Matriks

    Contoh :

$$k\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{pmatrix}$$

  - ✓ Perkalian Matriks dengan Matriks

    Misalkan A berordo pxq dan B berordo mxn

    Syarat : A X B haruslah q = m ,

    hasil perkalian AB , berordo pxn

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2x3)}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3x2)}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2x3)} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3x2)} = \begin{pmatrix} ap+br+dt & aq+bs+du \\ ep+fr+gt & eq+fs+gu \end{pmatrix}_{(2x2)}$$

Contoh

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.\ \text{Tentukan } A\times B \text{ dan } B\times A.$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4 & 1\\ -5 & 6 & 7 & 0\\ 5 & -3 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

Sedangkan B X A tidak dapat dikerjakan, karena jumlah kolom matrik B tidak sama dengan jumlah baris matrik A

Latihan

1. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   a. Hitung $B + C$!

   b. Hitung AB dan AC , kemudian tentukan $AB + AC$

   c. Dari perhitungan $B + C$ sebelumya, hitung $A (B + C)$ kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban dari b !

2. Jika

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Buktikan bahwa:

   (a) $(A + B) + C = A + (B + C)$

   (b) $(AB)C = A(BC)$

   (c) $A(B + C) = AB + AC$

   (d) $(A + B)C = AC + BC$

Tugas Sifat2 Matriks

1. Cari transpose dari matrik berikut ini

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = [1, -3, 5, -7], \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Tentukanlah diagonal dari matrik berikut ini,

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Carilah A + B dan 2A – 3B jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

4. Hitung

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad [2, -7] \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Terimakasih