

ALJABAR LINIER MATRIKS

Objective

- Mahasiswa mampu menjelaskan matriks
- Mahasiswa mampu menggunakan notasi matriks
- Mahasiswa mampu menyelesaikan persamaan 2 matriks

DEFINISI MATRIKS

Matriks adalah : kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung.

Aljabar linear adalah bidang studi matematika yang mempelajari sistem persamaan linear dan solusinya, vektor, serta transformasi linear. Matriks dan operasinya juga merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear.

Notasi Matriks

- ❑ **Nama matriks** menggunakan huruf besar
- ❑ Anggota-anggota matriks dapat berupa huruf kecil maupun angka
- ❑ Digunakan kurung biasa atau kurung siku

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

- ❑ **Ordo matriks** atau ukuran matriks merupakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Notasi Matriks

□ Jadi, suatu matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berordo atau berukuran m x n.

Notasi $A = (a_{ij})$

□ Memudahkan menunjuk anggota suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dengan} \\ i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

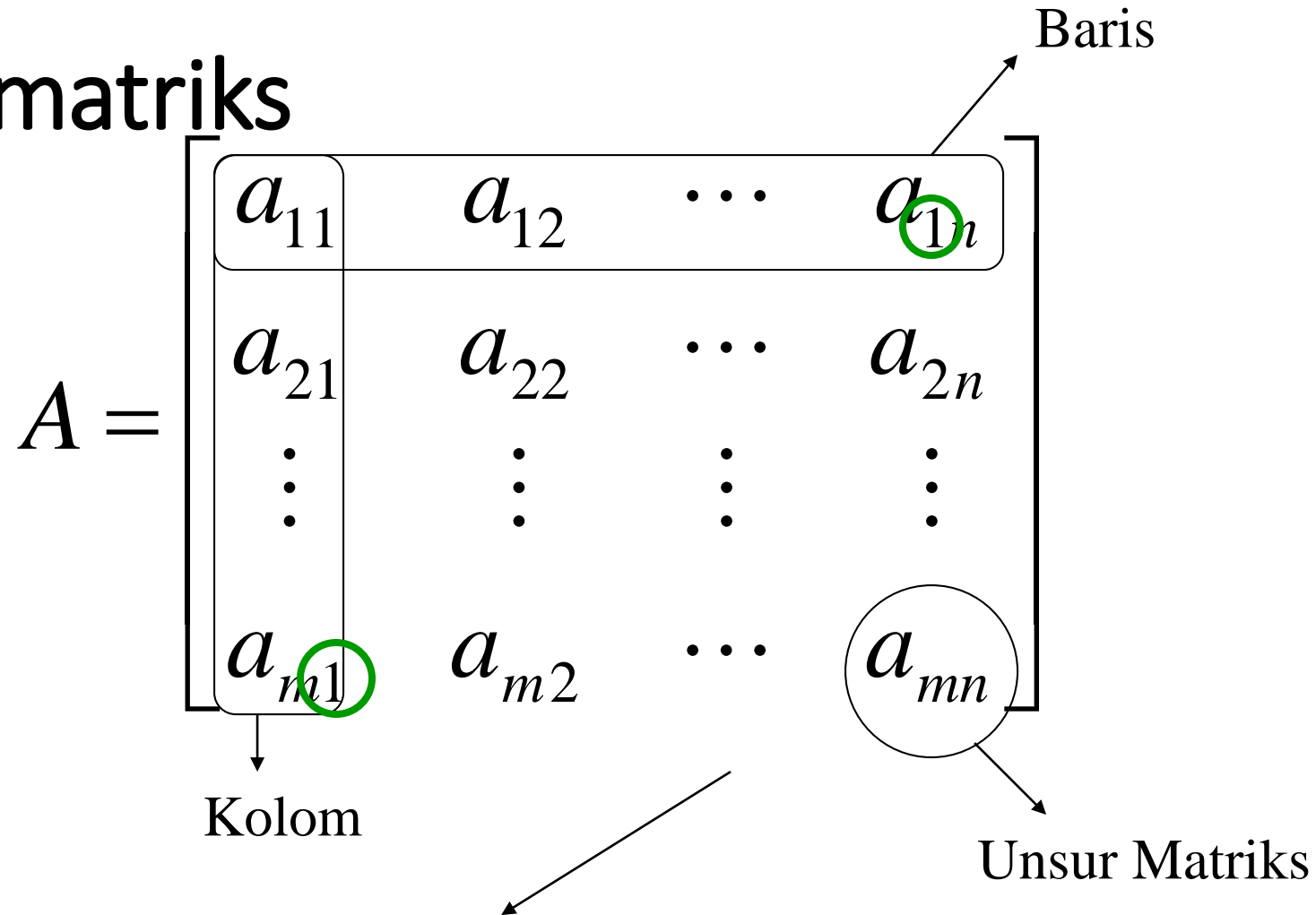
Matriks

❑ Contoh : Matriks A merupakan matriks berordo 4x2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

❑ Bilangan-bilangan yang terdapat dalam sebuah matriks dinamakan entri dalam matriks atau disebut juga **elemen** atau **unsur**.

Notasi matriks



Matriks berukuran $m \times n$
atau berorde $m \times n$

Matriks Baris dan Kolom

- ❑ **Matriks baris** adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris

$$C = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 4]$$

- ❑ **Matriks kolom** adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Penjumlahan Matriks

- Apabila A dan B merupakan dua matriks yang ukurannya sama, maka hasil penjumlahan $(A + B)$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.
- Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$



Penjumlahan Matriks

□ Contoh Soal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 2-4 \\ -1+2 & 3+1 \\ 2+1 & -2-2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Pengurangan Matriks

- ❑ A dan B adalah suatu dua matriks yang ukurannya sama, maka $A-B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.
- ❑ Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat dikurangkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

Pengurangan Matriks

□ Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-1 & -1-1 \\ 2+1 & 2-2 & -3-4 \\ 3-3 & 4-4 & 0-2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan k buah matriks

- Jumlah dari k buah matriks A adalah suatu matriks yang berordo sama dengan A dan besar tiap elemennya adalah k kali elemen A yang seletak.
- Definisi: Jika k sebarang *skalar* maka $kA = A k$ adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara mengalikan setiap elemennya dengan k .
- Negatif dari A atau $-A$ adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara mengalikan semua elemennya dengan -1 . Untuk setiap A berlaku $A + (-A) = 0$.

Asosiasiatif dan Komutatif dalam penjumlahan matriks

- Hukum yang berlaku dalam penjumlahan matriks :
 - a.) $A + B = B + A$
 - b.) $A + (B + C) = (A + B) + C$
 - c.) $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, $k = \text{skalar}$
- Hasil kali matriks A yang ber-ordo $m \times p$ dengan matriks B yang berordo $p \times n$ dapat dituliskan sebagai matriks $C = [c_{ij}]$ berordo $m \times n$ dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

Kesamaan 2 matriks

❑ Dua buah matriks A dan B dikatakan sama ($A = B$) apabila A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama (berordo sama) dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

❑ $a_{ij} = b_{ij}$ dimana

- a_{ij} = elemen matriks A dari baris i dan kolom j
- b_{ij} = elemen matriks B dari baris i dan kolom j

❑ $A = B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❑ $A \neq B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Kesamaan 2 Matriks

- Bila dua matriks di atas dinyatakan sama, maka berlaku :
a = p; b = q; c = r
d = s; e = t; f = u
g = v; h = w; l = x

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$$

Latihan

Jika diketahui matriks A dan B seperti di bawah ini, maka tentukanlah hubungan antara $B + A$ dan $A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$$

Pembahasan :

Sudah sangat jelas bahwa pada operasi penjumlahan matriks berlaku sifat komutatif sehingga $B + A = A + B$.

Latihan

Sebuah matriks P ordo 2×2 memenuhi persamaan seperti di bawah ini, tentukanlah matriks P .

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 3P = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Pembahasan :

Misalkan elemen-elemen matriks P adalah a , b , c , dan d

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Latihan

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$7 - 3a = -5 \rightarrow -3a = -12 \rightarrow a = 4$$

$$1 - 3b = 10 \rightarrow -3b = 9 \rightarrow b = -3$$

$$-4 - 3c = 8 \rightarrow -3c = 12 \rightarrow c = -4$$

$$3 - 3d = 9 \rightarrow -3d = 6 \rightarrow d = -2$$

Jadi matriks P adalah :

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Latihan

Tentukanlah nilai x dan z yang memenuhi persamaan matriks berikut ini :

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 4 & z+1 \end{bmatrix}$$

Pembahasan :

$$-1 + 6 = 2 + 2x$$

$$5 = 2 + 2x$$

$$3 = 2x$$

$$x = 3/2$$

$$3 + 2 = 3 + z + 1$$

$$5 = 4 + z$$

$$z = 1$$

Latihan

Diketahui persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -a & b+4 \\ c-2 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & b+c \\ 10 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & b-2 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks

- **Penjumlahan Matriks**

Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dijumlahkan

Contoh =

$$\text{a.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\text{b.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Pengurangan Matriks**

Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dkurangkan

Contoh =

a.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Perkalian Matriks**

- ✓ Perkalian Skalar dengan Matriks

Contoh :

$$k \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{pmatrix}$$

- ✓ Perkalian Matriks dengan Matriks

Misalkan A berordo $p \times q$ dan B berordo $m \times n$

Syarat : $A \times B$ haruslah $q = m$,

hasil perkalian AB , berordo $p \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2 \times 3)}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3 \times 2)}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2 \times 3)} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3 \times 2)} = \begin{pmatrix} ap + br + dt & aq + bs + du \\ ep + fr + gt & eq + fs + gu \end{pmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Tentukan } A \times B \text{ dan } B \times A.$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 6 & 7 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Sedangkan $B \times A$ tidak dapat dikerjakan, karena jumlah kolom matrik B tidak sama dengan jumlah baris matrik A

Carilah

$$1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad \text{(a)} \quad [8, -4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad [6, -1, 7, 5] \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad [3, 8, -2, 4] \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Soal 5 Matriks

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- Hitung $B + C$!
- Hitung AB dan AC , kemudian tentukan $AB + AC$
- Dari perhitungan $B + C$ sebelumnya, hitung $A (B + C)$ kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban dari b !

Soal 6 Matriks

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa:

- (a) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (b) $(AB)C = A(BC)$
- (c) $A(B + C) = AB + AC$
- (d) $(A + B)C = AC + BC$

Terimakasih

Tugas

- Apakah dalam perkalian matriks berlaku sifat asosiatif dan komutatif
Berikan contoh dalam perkalian matriks dengan ordo 3×3
- Buatlah contoh penjumlahan, pengurangan dan perkalian untuk 3 buah matriks dengan ordo 3×3

