Bebas linear dan tak bebas linear

Capaian Pembelajaran

- Mahasiswa mampu menjelaskan definisi Bebas Linear, Tidak Bebas Linear
- Mahasiswa mampu memberikan contoh ruang vektor yang mempunyai sifat Bebas Linear atau Tidak Bebas Linear
- Mahasiswa mampu menentukan apakah suatu ruang vektor adalah Bebas Linear atau Tidak Bebas Linear

Notasi

- V : Ruang vektor
- u; v; w , adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V
- K : himpunan bilangan skalar (*Field*)
- $a; b; c;$ atau k , bilangan skalar dalam K
- $a \in A$, a elemen dari himbunan A
- $a; b \in A$, a dan b elemen dari himbunan A
- $\forall x \in A$, untuk setiap x dalam himpunan A
- $\exists x \in A$, ada x dalam himpunan A
- $A \subseteq B$, A subset B
- $A \cap B$, Irisan A and B
- $A \cup B$, Union of A and B
- $\emptyset$ Empty set

Ruang Vektor

- *V* bukan himpunan kosong dengan 2 operasi :

(i) Pejumlahan vektor : untuk $u;v \in$ V, jumlah $u + v \in$ V.

(ii) Perkalian Skalar: untuk $u \in V$, $k \in K$ hasil $ku \in V$.

- *V* adalah ruang vektor atas K, untuk $u;v;w \in$ V memenuhi aksioma
  1. *V* tertutup terhadap operasi penjumlahan, jika u, v ∈ V maka u + v ∈ V
  2. Komutatif, u + v = v + u.
  3. Asosiatif, (u + v) + w = u + (v + w)
  4. Ada vektor nol, $\forall u \in V$, u + 0 = 0 + u = u
  5. Ada vektor negatif –u, sehingga u + (-u) = (-u) + u = 0
  6. $\forall u \in V$, $k \in K$ maka ku $\in V$
  7. k(lu) = (kl)u
  8. k(u + v) = ku + kv
  9. (k + l)u = ku + lu
  10. 1u = u

SubRuang (*subspace*) Vektor

- Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor *V*
- *W* dinamakan **subruang** (*subspace*) *V* jika *W* juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap *operasi penjumlahan* dan *perkalian dengan skalar*.
- Syarat *W* disebut subruang dari *V* adalah :
  1. $W \neq \emptyset$
  2. $W \subseteq V$
  3. Jika $u \in W$ maka ku $\in W$ ku $\in V$
  4. Jika $u;v$ d$\in$ W an , $k \in K$ maka k(u + v) $\in W$

Kombinasi linear

Sebuah vektor *u* dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

jika vektor – vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 \quad + \ \ldots + k_n v_n$

Dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$

Membangun suatu ruang vektor (*Spanning Space*)

Himpunan vector $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan **membangun (span)** ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor–vektor di *S*, notasi *V* = *span*(*S*)

Contoh:

S = { (1,0), (0,1) } membangun ruang vektor R^2 , karena setiap vektor dalam R^2 dapat dinyatakan kombinasi linear dari vektor–vektor di *S.*

$$\forall\, (a,b) \in R^2,\ (a,b) = a\,(1,0) + b\,(0,1)$$

Bebas linear dan tak bebas (bergantung) linear

Himpunan vektor $S = \{v_1 , v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan dalam ruang vektor V.

S dikatakan bebas linear (*linearly independent*) jika persamaan

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n\, v_n = 0$ mempunyai satu solusi (tunggal)

$k_1 = 0$, $k_2 = 0$, … , $k_n = 0$

Jika solusinya tidak tunggal (bergantung linear /*linearly dependent*) maka *S* kita namakan himpunan tak bebas linear.

Contoh: $S = \{ (1,3), (2,7)\}$, apakah *S* himpunan bebas linear ?

$k_1(1,3) + k_2(2,7) = 0$, terpenuhi untuk $k_1 = k_2 = 0$ atau kedua vektor tersebut tidak berkelipatan.

Maka *S* himpunan bebas linear .

Latihan

Apakah himpunan S berikut ini bebas linear atau bergantung linear ?

1. $S = \{\,(1,-2),(-3,2),(4,5)\}$
2. $S = \{\,(1,1,2),(1,0,1),(2,1,3)\}$
3. $S = \{\,(-1,2,4),(5,-10,-20)\}$
4. $S = \{\,(-3,0,4),(5,-1,2),(1,1,3\}$