Aljabar Linier

- Mata kuliah ini berisi pengelolaan data berupa angka menjadi informasi ke dalam bentuk tabel dan matrik, menyajikan informasi dalam bentuk tabel, matrik, dan grafik.

Materi

1. Vektor Ruang Euclidis, Ruang Vektor Umum, Ruang Bagian
2. Bebas Linear, Tak Bebas Linear,
3. Basis dan Dimensi, Ruang Baris dan Kolom Matrik,
4. Ruang Hasil Kali Dalam, Panjang dan Sudut pada Ruang Hasil Kali Dalam,
5. Basis Ortonomal, Koordinat dan Perubahan Basis,
6. Transformasi Linear
7. Nilai dan Vektor Eigen

Aljabar Linier

Vektor

Oleh: Chaerul Anwar, MTI

Objective

- Mahasiswa memahami besaran vektor dan besaran skalar
- Mahasiswa mampu menggambarkan vektor dan menghitung operasi terhadap vektor seperti penjumlahan dan pengurangan vektor

Definisi

- Besaran skalar: besaran yang hanya memi-liki besar (kuantitas) saja, (satu dimensi yaitu nilai). Misalkan suhu , tinggi, berat .
- Besaran vektor: besaran fisis yang memiliki dua pengertian dasar yaitu *besar* (kuantitas) dan *arah*. Misalkan gerakan mobil

Contoh:

Vektor:

1. Kecepatan
2. Gaya
3. Perpindahan
4. Percepatan

Skalar:

1. Tinggi Badan
2. Jumlah Siswa dalam kelas
3. Panjang sebuah meja
4. Volume bangun Ruang

NOTASI DAN BENTUK VEKTOR

$$\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$$

P Q

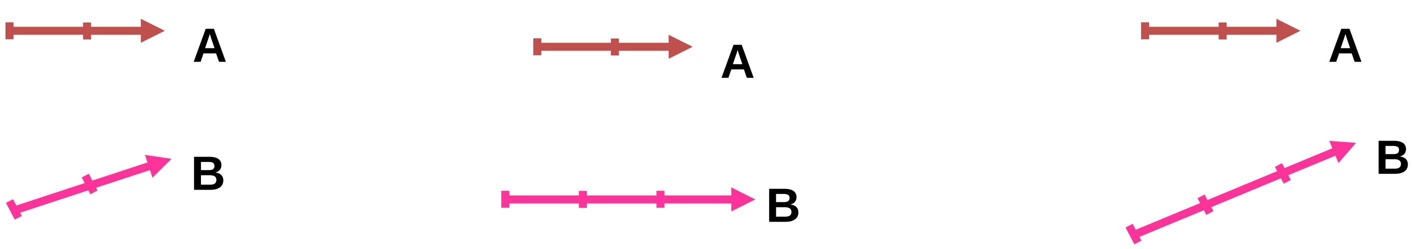
- Titik P : Pangkal vektor
- Titik Q : Ujung vektor
- Tanda panah : Arah vektor
- Panjang PQ = |PQ| : Besarnya (panjang) vektor

EQUIVALENSI

- Dua vektor dikatakan sama jika besar dan arahnya sama

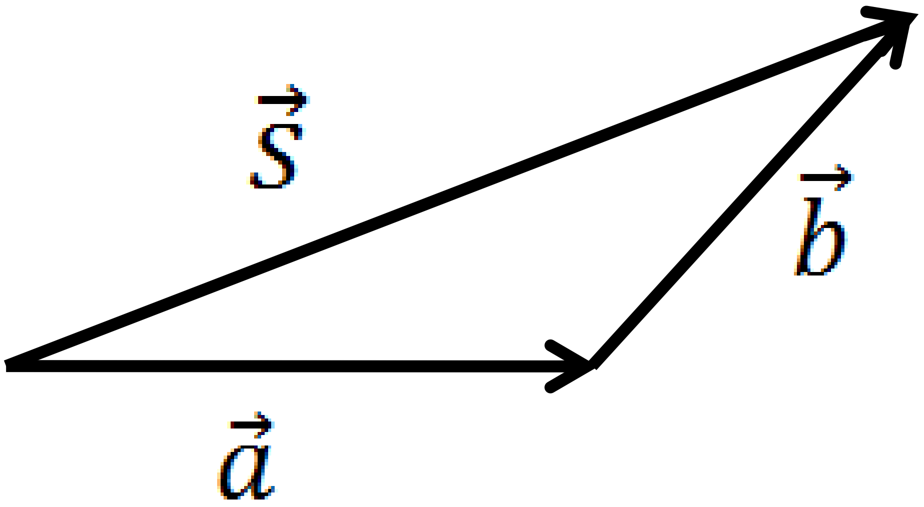
A = B

- Dua vektor dikatakan tidak sama jika paling tidak salah satu dari besar atau arahnya tidak sama



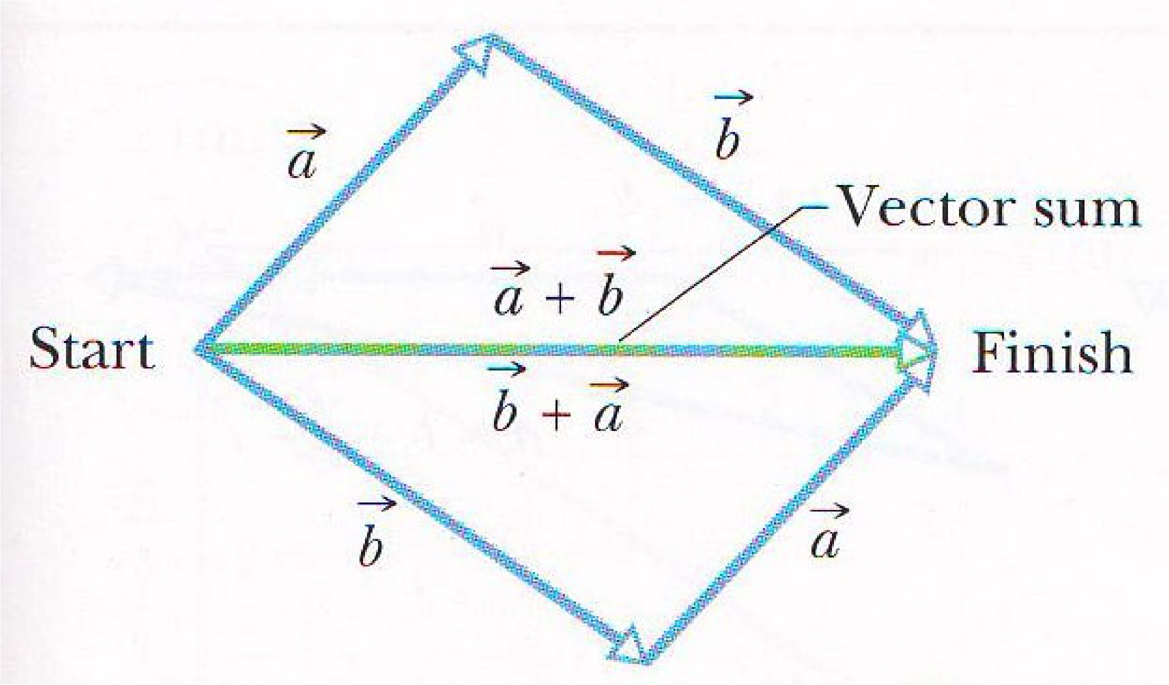
PENJUMLAHAN VEKTOR

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$



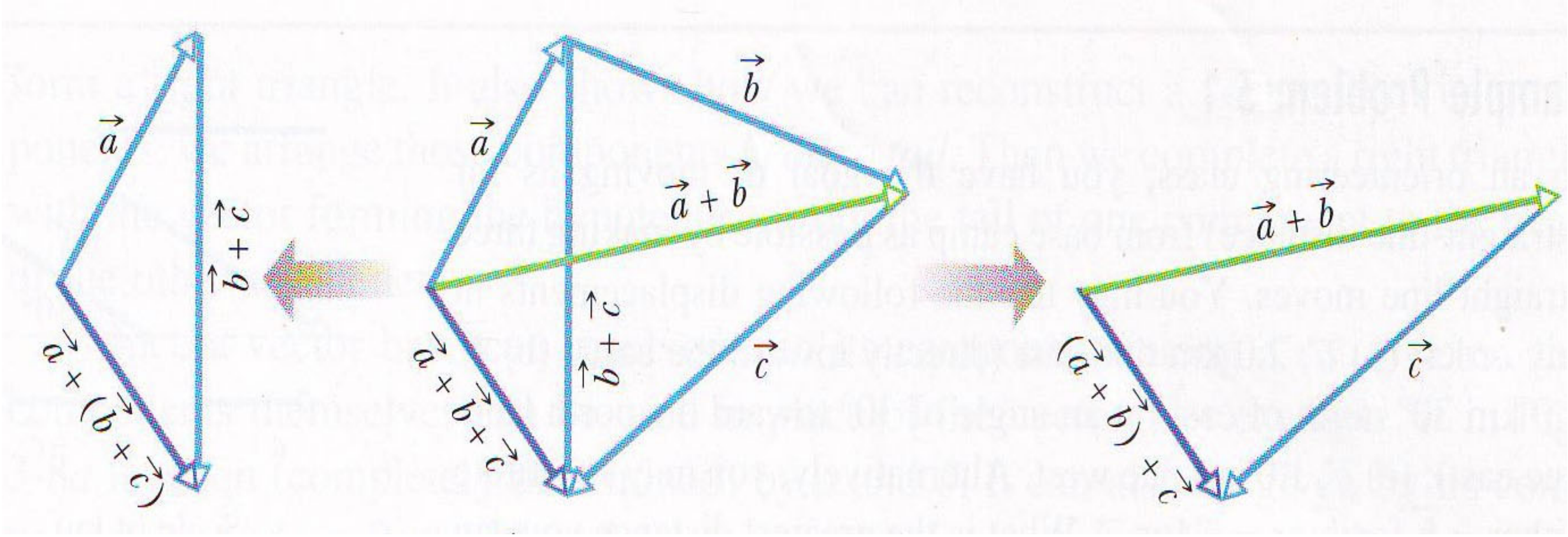
HUKUM KOMUTATIF PENJUMLAHAN

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



HUKUM ASOSIATIF PENJUMLAHAN

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



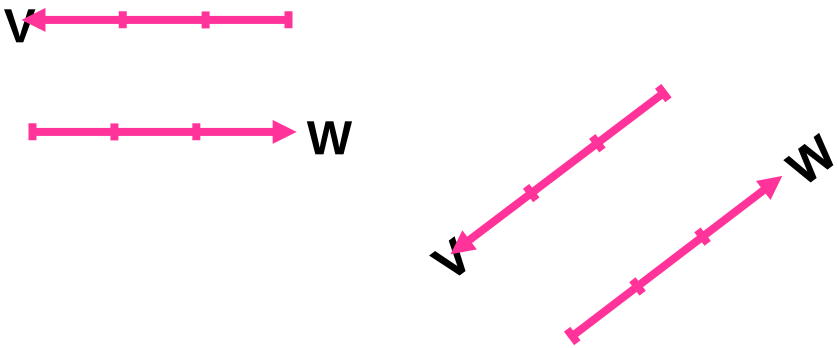
VEKTOR NOL

- Vektor nol adalah vektor yang memiliki panjang = 0

- $0 + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + 0 = \overrightarrow{v}$

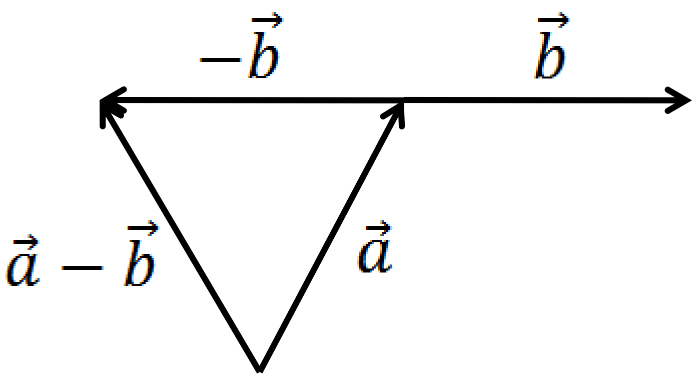
VEKTOR NEGATIF

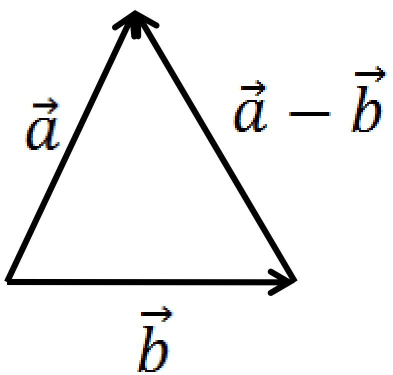
- Vektor $\vec{w}$ dikatakan negatif (invers iditif) dari vektor $\vec{v}$, jika vektor $\vec{w}$ memiliki besar yang sama dengan vektor $\vec{v}$, tetapi arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{v}$
- $\vec{W} = -\vec{V}$



SELISIH VEKTOR

- Selisih vektor a – b didapat dengan:
- a – b = a + (-b)

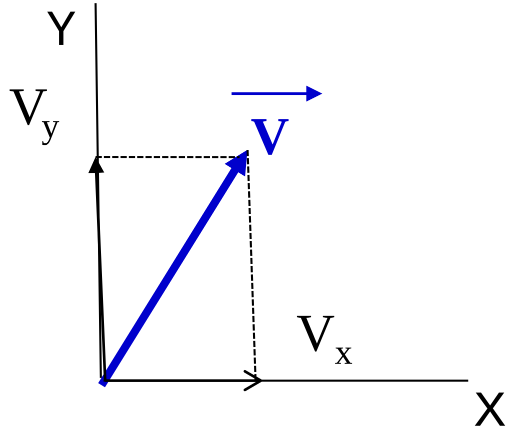




KOMPONEN-KOMPONEN VEKTOR (VEKTOR SATUAN)

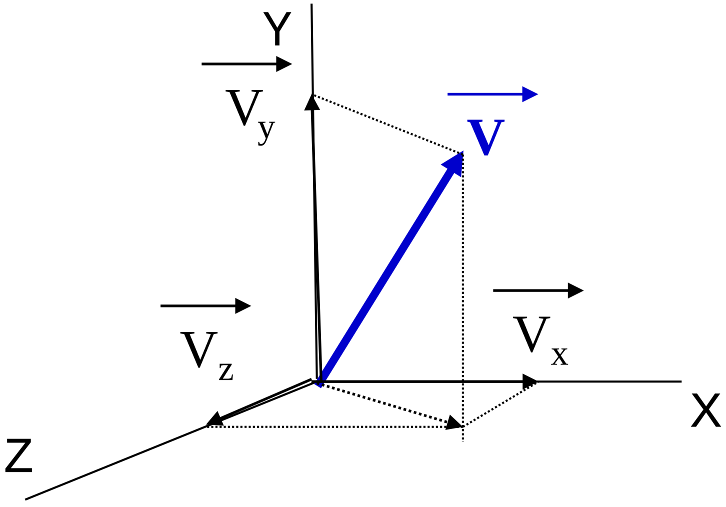
- Vektor di ruang 2

  $\vec{V} = (v_x, v_y)$



- Vektor di ruang 3

  $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$



BESAR VEKTOR

- Di ruang dua

$$|\vec{V}| = \sqrt[2]{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

- Di ruang tiga

$$|\vec{V}| = \sqrt[2]{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

PENJUMLAHAN & PENGURANGAN

- Ruang 2 dimensi

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y)$$

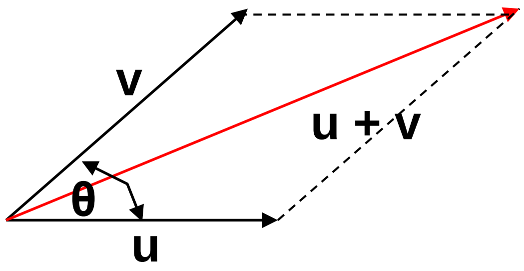
$$|\vec{V} + \vec{W}| = \sqrt[2]{(v_x + w_x)^2 + (v_y + w_y)^2}$$

- Ruang 3 dimensi

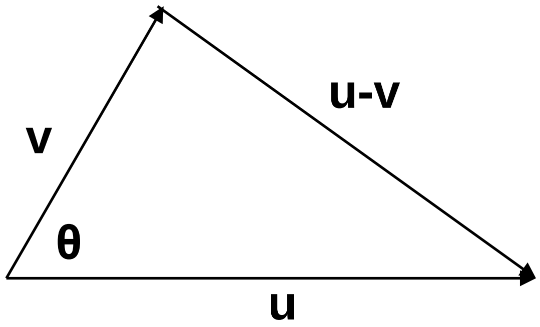
$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

$$|\vec{V} + \vec{W}| = \sqrt[2]{(v_x + w_x)^2 + (v_y + w_y)^2 + (v_z + w_z)^2}$$

PENJUMLAHAN & PENGURANGAN



$$|u+v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta}$$



$$|u-v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta}$$

PERKALIAN DENGAN SKALAR

- Jika $\vec{V} = (v_x, v_y)$, dan k adalah sembarang skalar, maka:

  $\overrightarrow{kv} = (kv_x, kv_y)$ → di ruang 2

  $\overrightarrow{kv} = (kv_x, kv_y, kv_z)$ → di ruang 3

- **Mengalikan k dengan setiap komponen vektor**

OPERASI-OPERASI ARITMATIKA

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + 0 = 0 + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$
- $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

VEKTOR DAN TITIK

- Misal titik pusat koordinat adalah O (0,0) dan terdapat titik P_1 (x_1,y_1) dan P_2 (x_2,y_2), maka vektor yang berasal dari titik P_1 menuju titik P_2 adalah
- $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

SOAL

- Misalkan $\vec{u} = (1, -3, 2)$ dan $\vec{v} = (1, 1, 0)$

  Tentukan:
  - $|\vec{u}|$ dan $|\vec{v}|$
  - $|\vec{u} + \vec{v}|$
  - Tentukan sudut antara vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$
- Misalkan $\vec{u} = (1, 2, 3)$ dan $\vec{v} = (2, -3, 1)$. Cari komponen dari $3(\vec{u} - 7\vec{v})$

SOAL

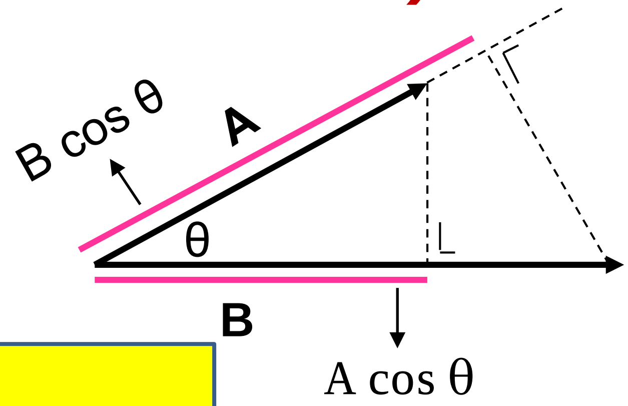
- Carilah komponen-komponen dari vektor yang mempunyai permulaan P_1 (6, 5, 8) dan titik terminal P_2(8, -7, 3). Tentukan juga besarnya!

- Perlihatkan bahwa tidak ada skalar untuk c_1, c_2, dan c_3 sehingga
  $c_1(1, 2, -3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, -2) = (4, 5, 0)$

- Carilah titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan titik P(2,3,-2) dan Q(7, -4, 1)

PERKALIAN TITIK (DOT PRODUCT)

- $\vec{A} \bullet \vec{B} = C$
- C adalah bilangan skalar



$C = |\vec{A}||\vec{B}| \text{ Cos } \theta$; jika A dan B $\neq 0$

$C = 0$; jika A = 0 atau B = 0

$C = \vec{A} \bullet \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ → R3

$C = \vec{A} \bullet \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ → R2

BESAR DAN ARAH DALAM PERKALIAN DOT PRODUCT

- Besar sudut dapat dihitung dengan

$$\cos\gamma = \frac{a \bullet b}{|a||b|} = \frac{a \bullet b}{\sqrt{a \bullet a}\sqrt{b \bullet b}}$$

SIFAT DOT PRODUCT

- Komutatif : $A \bullet B = B \bullet A$
- Distributif : $A \bullet (B+C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
- Jika A dan B saling tegak lurus, maka $A \bullet B = 0$
- $k(A \bullet B) = kA \bullet B$

VECTOR ORTOGONAL

- Teorema
  - Hasil perkalian dot product antara dua vektor bukan-nol adalah nol jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut saling tegak lurus
- Vektor **a** disebut ortogonal thd vektor **b** jika $a \bullet b = 0$, dan vektor **b** juga ortogonal thd vektor **a**.
- Vektor nol **0** ortogonal terhadap semua vektor.
- Untuk vektor bukan-nol
  - $a \bullet b = 0$ jika dan hanya jika $\cos \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 90^o = \pi/2$

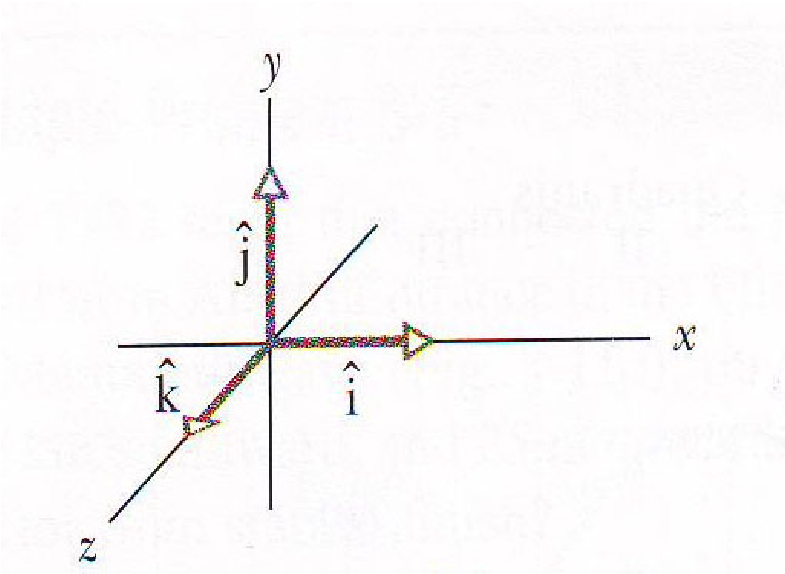
SOAL

- Jika diketahui u = (2, -1, 1) dan v = (1,1,2)
  tentukan u • v
  hitung sudut antara vektor u dan v

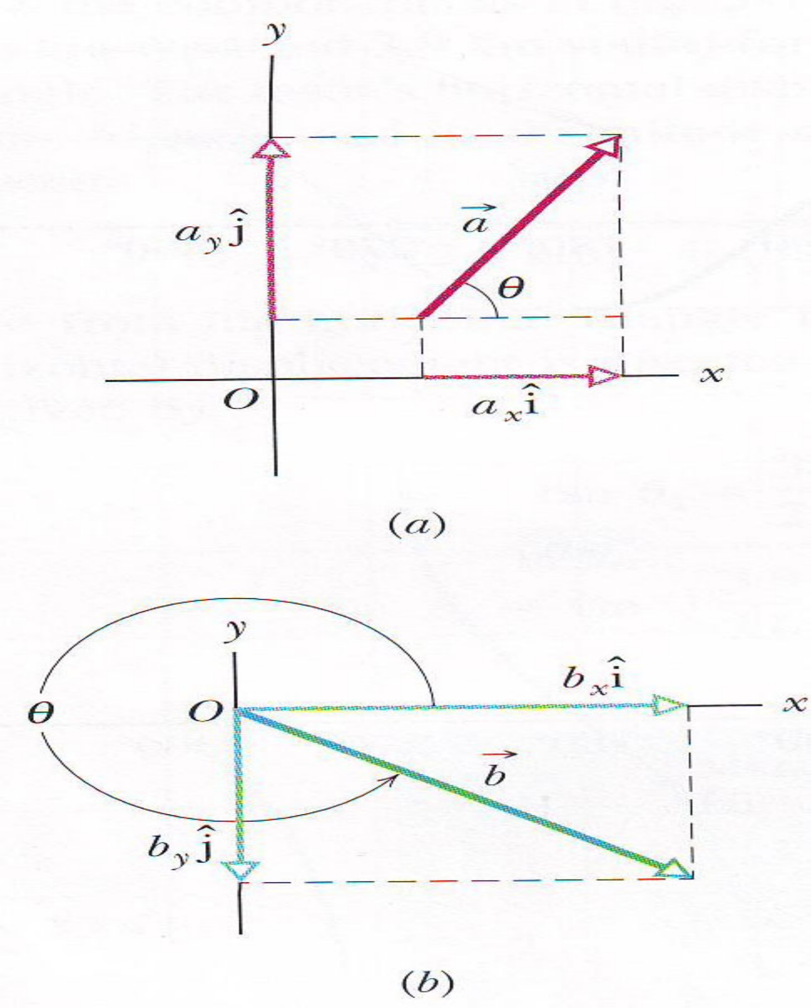
- a = [1,2,0] dan b = [3,-2,1]
  Hitung sudut antara dua vektor tsb

VEKTOR SATUAN

- Vektor satuan pada arah positif sumbu *x*, *y* dan *z* diberi tanda : $\hat{i}$, $\hat{j}$ dan $\hat{k}$



VEKTOR SATUAN



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

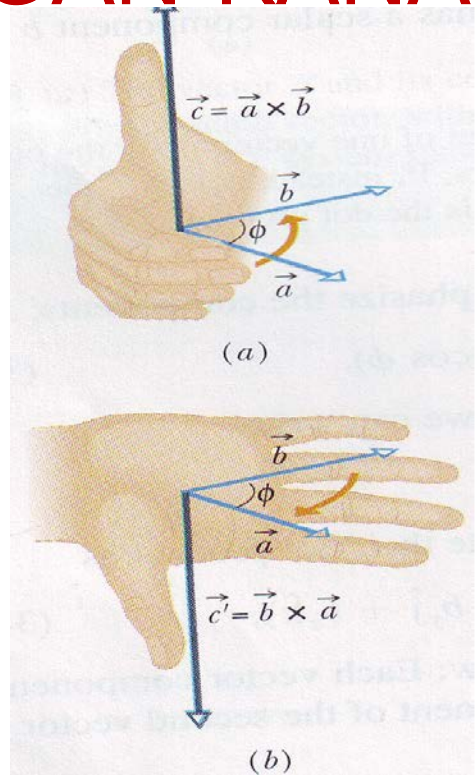
$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

PERKALIAN CROSS PRODUCT

- Perkalian cross product dinyatakan dengan
  $\vec{a} \text{ x } \vec{b} = \vec{c}$
- Dengan besar c adalah
  $c = ab \sin \phi$
- Besar c = 0, jika vektor a dan b sejajar
- Besar c mencapai maksimum jika a dan b tegak lurus

HUKUM TANGAN KANAN

- i x j = k
- j x k = i
- k x i = j
- j x i = -k
- k x j = -i
- i x k = -j



$$\vec{b} \text{ x } \vec{a} = -(\vec{a} \text{ x } \vec{b})$$

CROSS PRODUCT DALAM VEKTOR SATUAN

$$\vec{a} \text{ x } \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \text{ x } (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$a_x\hat{i} \text{ x } b_x\hat{i} = a_x b_x(\hat{i} \text{ x } \hat{i}) = 0$$

$$a_x\hat{i} \text{ x } b_y\hat{j} = a_x b_y(\hat{i} \text{ x } \hat{j}) = a_x b_y\hat{k}$$

- Hasil akhir:

$$\vec{a} \text{ x } \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

SOAL

$$\vec{a} = 1\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$$
$$\vec{b} = -1\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 2\,\hat{k}$$
$$\vec{c} = 3\,\hat{i} - 1\,\hat{j} - 3\,\hat{k}$$

- Hitung a x b
- Hitung sudut antara vektor a dan b