אינפי 2מ'

הגדרות ומשפטים

אינטגרלים לא מסוימים

הגדרה : $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I אם לכל $x \in I$ מתקיים $F'(x) = f(x)$.

משפט : תהי F פונקציה קדומה של f בקטע I . אזי אוסף כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא : $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

סימון : $\int f(x)\,dx$

הערה : לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה.

כללים :
- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
- $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

משפט : **אינטגרציה בחלקים** $\int uv' = uv - \int u'v$ (עבור u, v גזירות)

אינטגרציה של פונקציות רציונליות:
- אם $\mathbf{deg}\,\boldsymbol{p} \geq \mathbf{deg}\,\boldsymbol{q}$: מנה של שני פולינומים $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q \neq 0$

אם $\mathbf{deg}\,\boldsymbol{p} < \mathbf{deg}\,\boldsymbol{q}$:
- המכנה מתפרק לגורמים ליניאריים שונים : **פירוק לשברים חלקיים** :
$$\frac{1}{xy} = \frac{A}{x} + \frac{B}{y} \Leftrightarrow 1 = Ay + Bx$$
- יש במכנה גורם ליניארי עם ריבוי :
$$\frac{p(x)}{x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} \Leftrightarrow p(x) = Ax + B$$
- יש במכנה גורם ריבועי אי-פריק : **השלמה לנגזרת** / **השלמה לריבוע**.
השלמה לריבוע : $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + (c - \frac{b}{4})^2$.
- במכנה גם גורם ליניארי וגם גורם ריבועי אי-פריק : **פירוק לשברים חלקיים** :
$$\frac{1}{(mx+n)(ax^2+bx+c)^2} = \frac{A}{mx+n} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^2}$$

משפט : **שיטת ההצבה** נניח שלפונקציה $f(x)$ יש פונקציה קדומה בקטע I . תהי $\varphi : J \to I$ גזירה והפיכה. אזי :
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

הצבה טריגונומטרית:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

הצבות שימושיות:

- עבור ביטוי המורכב מ- x ו- $\sqrt{a^2-x^2}$ כדאי לנסות $x = a\sin t$.
- עבור ביטוי המורכב מ- x ו- $\sqrt{a^2+x^2}$ כדאי לנסות $x = a\tan t$.
- עבור ביטוי המורכב מ- x ו- $\sqrt{x^2-a^2}$ כדאי לנסות $x = \frac{a}{\cos t}$.
- אם $\cos x$ ו- $\sin x$ מגיעות רק בחזקות זוגיות (ו- $\tan x$ בחזקה כלשהי) כדאי לנסות $t = \tan x$.

האינטגרל המסוים

הגדרה: חלוקה של קטע $[a,b]$ היא בחירה של נקודות $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

נסמן: חלוקה ע"י P.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ רוחב מלבן i.

$\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$ **פרמטר החלוקה**.

הגדרה: תהי P חלוקה של $[a,b]$ ותהי f חסומה בקטע $[a,b]$. נבחר נקודות $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

אזי הסכום $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ נקרא **סכום רימן** של f המתאים לחלוקה P ולבחירה c_i, $i = 1, \dots, n$.

- אם f חסומה ב- $[a,b]$, נניח $m \le f(x) \le M$ אז: $m(b-a) \le$ השטח מתחת לגרף $\le M(b-a)$.

נסמן: $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$

סכום דרבו תחתון $L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

סכום דרבו עליון $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

- לכל חלוקה P מתקיים $U(P) \ge L(P)$.

הגדרה: יהיו P, P' שתי חלוקות של $[a,b]$. אומרים ש- P' היא עידון של P אם כל x_i בחלוקה P שייך גם ל- P'.

- $U(P) \ge U(P')$

  $L(P) \le L(P')$

למה: לכל שתי חלוקות $P, \tilde{P}$ מתקיים $L(P) \le U(\tilde{P})$.

⇨ מסקנה: $\sup L(P,f) \le \inf U(P,f)$

הגדרה: תהי f חסומה על $[a,b]$. נאמר כי f **אינטגרבילית לפי רימן** אם $\sup\limits_P L(P,f) = \inf\limits_P U(P,f)$.

לערך המשותף נקרא **האינטגרל** של f בקטע $[a,b]$ ונסמנו $\int_a^b f(x)\,dx$.

משפט: תהי f חסומה על $[a,b]$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f אינטגרבילית לפי רימן
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת P כך ש- $U(P) - L(P) < \varepsilon$
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל P שמקיימת $\lambda(P) < \delta$ מתקיים $U(P) - L(P) < \varepsilon$

$$\omega(P) = U(P) - L(P)$$

משפט: תהי f חסומה על $[a,b]$. אם f מונוטונית אז f אינטגרבילית.

משפט: תהי f רציפה על $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית.

משפט: אם f רציפה פרט למספר סופי של נקודות אי-רציפות, אז f אינטגרבילית.

הגדרה: קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ נקראת בעלת **מידה 0** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרה של קטעים $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < \varepsilon$.

משפט: תהי f חסומה בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן $\Leftrightarrow$ אוסף נקודות האי-רציפות של f הוא ממידה 0.

משפט: f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ קיים מס' ממשי I (שהוא $\int_a^b f(x)\,dx$) כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P) < \delta$ מתקיים: $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$ לכל בחירה של c_i-ים.

הערות: - אם f אינטגרבילית, אז I יחיד.

- אם f מקיימת את התנאי שבמשפט אז f חסומה.

הגדרה: 1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_b^a f = -\int_a^b f$

משפטים:

- f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ⇐ אינטג' בכל תת קטע $[c,d] \subseteq [a,b]$.
- **(אדיטיביות)** f אינטגרבילית ב– $[a,b]$ וגם ב- $[b,c]$ ⇐ f אינטגרבילית ב– $[a,c]$ ומתקיים: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
- **(לינאריות)** g,f אינטגרביליות ב– $[a,b]$ ו– $\alpha \in \mathbb{R}$ ⇐ $\alpha f + g$ אינטג' ו– $\int_a^b \alpha f + g = \alpha\int_a^b f + \int_a^b g$.
- $f:[a,b] \to [c,d]$ אינטג' ו– g רציפה ב– $[c,d]$ ⇐ $g \circ f$ אינטג' ב– $[a,b]$.
- f אינטג' ⇐ f^n אינטג' ($n \in \mathbb{N}$).
- g,f אינטג' ב– $[a,b]$ ⇐ gf אינטג' (אבל <u>אין</u> נוסחא).

- f אינט' ב $[a,b]$ ⇐ $|f|$ אינט' ב $[a,b]$ ומתקיים: $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.
- f אינט' ב $[a,b]$ ו $f(x) \ge 0$ לכל $x \in [a,b]$ ⇐ $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

  f אינט' ב $[a,b]$ ו $f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$ ⇐ $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.
- **(מונוטוניות)** g, f אינט' ב $[a,b]$ ו $f \ge g$ ⇐ $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.
- f אינט' ב $[a,b]$ ו $m \le f(x) \le M$ ⇐ $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.
- **(ערך הביניים האינטגרלי)** תהי f רציפה ב $[a,b]$. אזי קיימת $a \le c \le b$ כך ש $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

  עבור $g \equiv 1$ מקרה פרטי של:
- f רציפה ב $[a,b]$ ו g אינט' בעלת סימן קבוע בקטע ⇐ יש $a \le c \le b$ כך ש $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.
- תהי f אינט' בקטע $[a,b]$ ותהי $\tilde{f}$ פונקציה ששונה מ- f במספר סופי של נקודות. אזי $\tilde{f}$ אינט' ו $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.

המשפט היסודי

משפט: תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ אינט'. נגדיר $F(x) = \int_a^x f$. אזי F רציפה ב $[a,b]$.

משפט: **המשפט היסודי של החדו"א**

תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. נגדיר $F(x) = \int_a^x f$. אזי F גזירה ו $F'(x) = f(x)$.

מסקנה: לכל f רציפה יש פונקציה קדומה.

הערה: הקדומה לא בהכרח אלמנטרית.

מסקנה: **נוסחאת ניוטון לייבניץ**

תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ותהי F פונקציה קדומה כלשהי של f. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

הערה: באופן כללי אם $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ כאשר f רציפה ו α, β גזירות, אז $G'(x) = f\big(\beta(x)\big)\beta'(x) = f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

משפט: **אינטגרציה בחלקים**

אם ל $u(x)$ ול $v(x)$ יש נגזרות רציפות ב $[a,b]$ אז:

$$\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

משפט: **שיטת הצבה**

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ גזירה ברציפות כך ש – $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

אינטגרלים מוכללים

הגדרה: תהי $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שלכל $a<M$ f אינט' בקטע $[a,M]$. נגדיר:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

בתנאי שהגבול קיים. אם הגבול לא קיים, אומרים שהאינטגרל מתבדר.

- באופן דומה: $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^a f(x)\,dx$ או $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\lim_{M\to-\infty}\int_M^a f(x)\,dx$
- אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אז לכל $a>b$: $\int_a^\infty f=\int_a^b f+\int_b^\infty f$
- אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אז: $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^a f+\int_a^\infty f$ בתנאי ששני האינט' באגף ימין מתכנסים (לא תלוי בבחירת a).

  אם זה לא קיים עבור איזשהו a אז זה לא קיים בכלל, לא משנה מה בחרנו.
- $\int_{-\infty}^\infty f$ לא מוגדר ע"י $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M f$.

משפט: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\Leftrightarrow \alpha>1$.

הגדרה: תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שלכל $\varepsilon>0$, f אינט' בקטע $[a,b-\varepsilon]$. נגדיר:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

בתנאי שהגבול קיים.

- עבור $(a,b]$ נגדיר: $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$
- עבור נקי' c בקטע כך ש- $[a,c)$, $(c,b]$: $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$

משפט: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\Leftrightarrow \alpha<1$.

מבחני התכנסות

משפט: **מבחן ההשוואה**

יהיו f,g פונקציות אי-שליליות ב- $[a,\infty)$ ואינט' ב- $[a,M]$ לכל $M>a$.

נניח $0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$. אזי:

$\int_a^\infty g(x)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)$ מתכנס.

משפט: **מבחן ההשוואה הגבולי**

יהיו f,g פונקציות אי-שליליות ב- $[a,\infty)$ ואינט' ב- $[a,M]$ לכל $M>a$.

נניח $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ $(0<L<\infty)$. אזי:

$\int_a^\infty f(x)$ ו- $\int_a^\infty g(x)$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הערה: אם $L=0$ אז $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

אם $L=\infty$ אז $\int_a^\infty f$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g$ מתכנס.

הגדרה: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל קטע $[a,M]$. נאמר כי $\int_a^\infty f$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אבל לא בהחלט, אומרים שהוא **מתכנס בתנאי**.

משפט: התכנסות בהחלט $\Leftarrow$ התכנסות בתנאי.

משפט: **מבחן אבל**

יהיו $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש- f רציפה, $\int_a^\infty f$ מתכנס, g מונוטונית, חסומה, וגזירה ברציפות.

אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

משפט: **מבחן דיריכלה**

יהיו $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש- g מונוטונית יורדת, גזירה ברציפות, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, ו- f רציפה ומקיימת $\int_a^x f$ חסומה.

אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

טורים

הגדרה: תהי a_n סדרה. מגדירים: $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.

מסמנים $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ וקוראים לזה **טור**.

אם S_n מתכנסת אומרים **שהטור מתכנס**.

סכום הטור הוא הגבול של S_n ול- S_n קוראים **סדרת הסכומים החלקיים**.

הערה: לכל טור הנדסי עם $|q|<1$ מתקיים: $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{a_1}{1-q}$.

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, אז:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס וסכומו סכום הטורים.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתכנס (לכל $c\in\mathbb{R}$) וסכומו $c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

טורים חיוביים

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ S_n חסומה. (כי בטור חיובי S_n עולה)

משפט: **מבחן ההשוואה**

אם $0 \leq a_k \leq b_k$ לכל k אז $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

משפט: **מבחן ההשוואה הגבולי**

אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים וקיים $L > 0$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ אז $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הערה: אם $L = 0$ אז $\sum b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

אם $L = \infty$ אז $\sum b_n$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתבדר.

משפט: **מבחן המנה**

יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ אזי:

- $q < 1$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס.
- $q > 1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.

משפט: **מבחן השורש**

יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ אזי:

- $q < 1$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס.
- $q > 1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.

משפט: תהי $a_n > 0$.

1. אם $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ לכל $n > N$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל $n > N$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

טענה: תהי a_n סדרה. $a_n \leq q < 1$ לכל $n > N$ $\Leftrightarrow$ $\limsup a_n < 1$.

משפט: **מבחן האינטגרל**

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת בקטע $[1,\infty)$. נגדיר $a_n = f(n)$. אזי:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

משפט: **מבחן הדלילות**

תהי a_n חיובית מונוטונית יורדת. אזי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

משפט: **מבחן ראבה**

תהי a_n חיובית. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) = q$ אז:

- $q < 1$ הטור מתבדר.
- $q > 1$ הטור מתכנס.

טורים כללים

הגדרה : נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. אם הטור מתכנס אבל לא בהחלט, הוא מתכנס בתנאי.

משפט : התכנסות בהחלט $\Leftarrow$ התכנסות.

משפט : **מבחן לייבניץ**

תהי a_n חיובית מונוטונית יורדת כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אזי הטור : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס. (טור לייבניץ)

המשך משפט : בנוסף, מתקיים : $0 < S < a_1$ כאשר S הוא סכום הטור, ו- $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| < a_{n+1}$.

משפט : **מבחן דיריכלה**

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חסום (Sn חסומה) ו- $b_n \to 0$ סדרה מונו' אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

משפט : **מבחן אבל**

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- b_n סדרה מונו' חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הערה : לייבניץ מקרה פרטי של דיריכלה כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ טור חסום.

משפט : 1. אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז כל טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר איברים מתכנס אף הוא בהחלט, ולאותו סכום.

2. (רימן) אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אז ניתן ע"י שינוי סדר איברים לקבל ממנו טור שמתכנס לכל סכום, או מתבדר.

משפט : אם $\sum a_n$ מתכנס (או מתבדר ל- $\pm\infty$) אז כל טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס לאותו סכום.

סדרות של פונקציות

הגדרה : תהי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בתחום D. נאמר כי $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ **נקודתית** אם לכל $x \in D$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש- $n > N \Leftarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

הגדרה : נאמר כי $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ **במידה שווה** (במ"ש) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש- $n > N \Leftarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in D$.

משפט : **תנאי קושי**

סדרה $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בתחום D $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים :

$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ לכל $x \in D$.

משפט : תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסות נקודתית ל- $f(x)$ בתחום D. נגדיר $M_n = \sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$. אזי :

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במ"ש $\Leftrightarrow M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

- אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במ"ש אז תכונות של fn נשמרות בגבול של f :
  - f_n רציפות $\Leftarrow$ f רציפה
  - $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$
  - $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$

משפט: יהיו $f_n(x)$ רציפות, $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$ במ"ש בתחום D $\Leftarrow$ $f(x)$ רציפה ב-D.

מסקנה: אם f_n רציפות אבל f לא רציפה, אז ההתכנסות היא לא במ"ש.

משפט: יהיו $f_n(x)$ אינט' בקטע $[a,b]$. בנוסף, נניח כי $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$ במ"ש ב- $[a,b]$. אזי: f אינט' ב- $[a,b]$ ו- $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

מסקנה: יהיו $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$ במ"ש ב- $[a,b]$, $f_n(x)$ אינט'. נגדיר $F_n(x) = \int_a^x f_n\, dt$, $F(x) = \int_a^x f\, dt$. אזי: $F \xrightarrow[n\to\infty]{} F_n$ במ"ש.

משפט: **דיני**

יהיו $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$ נקודתית בקטע סגור $[a,b]$. נניח שלכל $x \in [a,b]$ הסדרה $f_n(x)$ מונוטונית. בנוסף, נניח כי f, f_n רציפות.

אזי: $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$ במ"ש ב- $[a,b]$.

משפט: יהיו $f_n(x)$ בעלות נגזרות רציפות בקטע I כך ש:

(i) הסדרה $f_n{}'$ מתכנסת במ"ש בקטע I.

(ii) קיים x_0 שבו $f_n(x_0)$ מתכנסת.

אזי: f_n מתכנסת במ"ש בקטע I לפונקציה גזירה f, ומתקיים $f' \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n{}'$.

טורים של פונקציות

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ נקרא טור של פונקציות.

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ נקראת סדרת הסכומים החלקיים.

נאמר כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית/במ"ש אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n(x)$ מתכנסת נקודתית/במ"ש.

משפט: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע I. אם כל ה- f_n רציפות, אז גם f רציפה.

משפט: **אינטגרציה איבר-איבר**

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע I. אם כל ה- f_n אינט', אז גם f אינט' ומתקיים: $\int_a^b f =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$.

משפט: **דיני** (לטורים)

יהיו f_n רציפות <u>אי-שליליות</u> כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית בקטע סגור I לפונקציה f רציפה. אזי ההתכנסות היא במ"ש.

משפט: **גזירה איבר-איבר**

תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות עם נגזרות רציפות בקטע I כך ש:

(i) יש x_0 שבו $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ מתכנס במ"ש ב-I.

אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה גזירה f ומתקיים $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$.

משפט : **קריטריון קושי**

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{f_n}(\mathrm{x})$ מתכנס במ״ש בתחום D $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $N > n$ מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$ לכל P טבעי ולכל $x \in D$.

משפט : **משפט M של ויירשטראס**

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{f_n}(\mathrm{x})$ טור פונקציות. נניח שקיימת סדרה M_n כך ש :

(1) $|f_n(x)| \le M_n$ לכל n.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mathrm{x})$ מתכנס.

אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{f_n}(\mathrm{x})$ מתכנס במ״ש.

כלים לבדיקת התכנסות במ״ש של טור פונקציות:

1. התכנסות נקודתית – תנאי הכרחי להתכנסות במ״ש.
2. אם $U_k(x)$ סדרת פונקציות רציפות, אז גם סדרת סכומים חלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$ סדרה של פונקציות רציפות. לכן, אם יש התכנסות במ״ש אזי $\mathrm{S(x)}$ (פונקצית הסכום) רציפה.
3. תנאי הכרחי להתכנסות במ״ש של טור פונקציות : אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ מתכנס במ״ש בקטע I אז סדרת פונקציות $U_k(x)$ מתכנסת במ״ש בקטע I ל- $U(x) = 0$.

טורי חזקות

הגדרה : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נקרא טור חזקות.

הערה : גם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ נקרא טור חזקות.

הערות :
1. לכל x_0 שנציב נקבל טור מספרי.
2. a_n״ים נקראים המקדמים של הטור.
3. אפשר לחשוב על טור חזקות כפולינום ״אינסופי״.

הגדרה : אוסף ה-x״ים שבהם טור חזקות מתכנס נקרא **תחום ההתכנסות** של הטור.

משפט : יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אם הטור מתכנס עבור איזשהו $x_0 \neq 0$, אז הוא מתכנס בהחלט לכל x שמקיים $|x| < |x_0|$.

המשך משפט : בנוסף, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ״ש ב- $[-x, x]$ לכל $0 < x < |x_0|$.

משפט : יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אזי קיים R (ממשי או ∞) כך שלכל $|x| < R$ הטור מתכנס ולכל $|x| > R$ הטור מתבדר.

הגדרה : R נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

המשך משפט : בנוסף, הטור מתכנס במ״ש בכל קטע מהצורה $[-r, r]$ כאשר $0 < r < R$.

מציאת R:

משפט : **קושי-הדמר**

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אזי $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ בתנאי שהגבול קיים. (גרסא נוספת : $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$)

משפט: **דלמבר**

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אזי $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$ בתנאי שהגבול קיים.

הערות: אם הגבול הוא ∞ אז $R = 0$.

אם הגבול הוא 0 אז R הוא ∞.

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס $R > 0$. אזי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ היא פונקציה רציפה ב- $(-R, R)$.

אם הטור מתכנס גם ב- R או -R אז f רציפה גם שם.

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בתחום $(-R, R)$. נאמר כי f **ניתנת לפיתוח לטור חזקות** אם יש טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שמתכנס ל-f בתחום.

משפט: אם f ניתנת לפיתוח בקטע $(-R, R)$ אז הפיתוח הוא יחיד והמקדמים נתונים ע"י $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

הערות: 1. אלה מקדמי טיילור ולכן טורי חזקות נקראים גם טורי טיילור.

2. תנאי הכרחי לכך ש-f ניתנת לפיתוח לטור הוא גזירות ∞ פעמים.

3. (2) אינו תנאי מספיק!

משפט: תהי f גזירה ∞ פעמים בקטע $(-R, R)$ אזי f ניתנת לפיתוח לטור חזקות בקטע ⇔ לכל $x \in (-R, R)$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

($\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות $\quad S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ הסכומים החלקיים $\quad R_n(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$)

משפט: אם f גזירה ∞ פעמים ב- $[-r, r]$ וכל הנגזרות חסומות במשותף (כלומר קיים M כך ש- $|f^{(n)}(x)| < M$ לכל n ולכל x בקטע), אז f ניתנת לפיתוח לטור.

משפט: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שמתכנס ל- f ויהי R רדיוס ההתכנסות. אזי לכל $|x| < R$: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ ורדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות גם R.

הערה: יתכן שהטור של f מתכנס ב- $\pm R$ וטור הנגזרות לא.

משפט: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות המתכנס לפונקציה f ויהי $R > 0$ רדיוס ההתכנסות. אזי לכל $|x| < R$:

$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ורדיוס ההתכנסות נשאר R.

הערה: יתכן שטור האינטגרלים יתכנס ב- $\pm R$ למרות שהטור המקורי לא. (הפוך מגזירה)

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור המתכנס ל- $f(x)$ ויהי $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ טור המתכנס ל- $g(x)$. אזי:

(א) $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n$ מתכנס ל- $cf(x)$.

(ב) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ מתכנס ל- $f(x) + g(x)$ (בתחום ההתכנסות המשותף).

(ג) נגדיר $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ואז $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס ל- $f(x)g(x)$ (בפנים של תחום ההתכנסות המשותף).

(ד) בתנאים מסוימים: $f(g(x)) = \cdots$.

טורים שכדאי לזכור :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

$$\ln(1+x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

פונקציות במספר משתנים

הגדרה: מרחק (מטריקה) בין 2 נקודות: $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

הערה: הנוסחא הנ"ל באמת מגדירה מטריקה:

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$
- א"ש המשולש: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

הגדרה: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ עם המטריקה $d(x,y)$ שהגדרנו נקרא המרחב האוקלידי ה- n ממדי.

הגדרה: $B\left(\overrightarrow{x^0}, r\right) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | d(x,x^0) < r\}$ נקרא **כדור פתוח** ברדיוס r שמרכזו $\overrightarrow{x^0}$.

$B\left(\overrightarrow{x^0}, r\right) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | d(x,x^0) \leq r\}$ **כדור סגור**.

הגדרה: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

תיבה n-ממדית סגורה: $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i\}$

הערה: תיבת אחד-ממדית וכדור אחד-ממדי זה אותו דבר.

הגדרה: **ε – סביבה כדורית** של x^0: $B(x^0, \varepsilon)$.

ε – סביבה תיבתית של x^0: $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | {x^0}_i - \varepsilon \leq x_i \leq {x^0}_i + \varepsilon\}$ (ב- n=3 זו בעצם קוביה)

הערה: כל סביבה כדורית מוכלת בסביבה תיבתית ולהיפך.

הגדרות:

- x^0 נקראת **נקודה פנימית** של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם יש ל- x^0 ε-סביבה שמוכלת כולה ב-A.
- x^0 נקראת **נקודת שפה** של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם בכל ε-סביבה של x^0 יש גם נקודות מ-A וגם נקודות שאינן ב-A.
- אם כל נקודה של קבוצה A היא פנימית, אז A נקראת **פתוחה**.
- אם כל נקודות השפה של A שייכות ל-A, אז A נקראת **סגורה**.

סימונים: ∂A = אוסף נקודות **השפה של A**.

A^0 = אוסף נקודות **הפנים של A**.

$\bar{A} = A \cup \partial A$ **הסגור של A**.

הגדרות:

- קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם קיים כדור שמכיל אותה.
- קבוצה סגורה וחסומה נקראת קומפקטית.
- קבוצה A נקראת קשירה (מסילתית) אם לכל $x, y \in A$ ניתן לחבר ע"י עקום רציף שמוכל ב-A.

סדרות ב- $\mathbb{R}^n$

הגדרה: $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ (ב- $\mathbb{R}^k$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש- $n > N \Leftarrow d(x^n, L) < \varepsilon$. $(X^n = (x_1{}^n, \dots, x_k{}^n)$,$L = (L_1, \dots, L_k))$

משפט: $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \Leftrightarrow X_i{}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_i$ לכל $1 \le i \le k$.

כל אינפי 1מ עבור פונקציות/סדרות בנות משתנה אחד נכון עבור שני משתנים (ומעלה)!

הערות:
- קבוצה A היא סגורה $\Leftrightarrow$ לכל סדרה מתכנסת של נקודות מ-A גם הגבול שלה הוא ב-A.
- קבוצה A היא קומפקטית (סגורה וחסומה) $\Leftrightarrow$ לכל סדרה של נקי' מ-A יש תת-סדרה מתכנסת לנקי' ב-A.

גבולות

הגדרה: עקום ℓ במישור xy נקרא קו-גובה של הפונקציה $f(x,y)$ אם ערך הפונקציה על ℓ הוא קבוע c.

הגדרה: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Leftarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$.

הגדרה שקולה: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \delta$, $(x,y) \neq (a,b) \Leftarrow$ $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

הגדרה שקולה: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל סדרה $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b)$ מתקיים $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

משפטים:
- יחידות הגבול
- אריתמטיקה
- חסומה * שואפת ל-0
- סנדוויץ': יהיו $h(x,y) \le f(x,y) \le g(x,y)$ בסביבה של (a,b) ו- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$.
  אזי: $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L$.
- אלמנטריות

משפט: אם קיים $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אז ערכי הפונקציה שואפים ל-L לאורך כל מסלול (עקום) ששואף ל- (a,b).

מסקנה: אם ל- $f(x,y)$ יש גבולות שונים כאשר מתקרבים ל- (a,b) לאורך מסלולים שונים, אז הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ לא קיים.

הגדרה: $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ נקרא גבול נשנה.

משפט: אם הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ קיים וגם קיים אחד מהגבולות הנשנים, אז הם שווים.

הערה: יתכן גבול נשנה בלי קיום גבול, או קיום גבול נשנה אחד ולא השני.

משפט: תהי $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
נניח כי $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r)G(\theta)$ כאשר $G(\theta)$ חסומה ו- $F(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. אזי $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$.

הגדרה: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (a,b). נאמר כי f **רציפה בנקודה** (a,b) אם $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

הגדרה שקולה: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Leftarrow |f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$

הגדרה: $f(x,y)$ **רציפה בתחום** D אם היא רציפה בכל נקודה בתחום.

הערה: עבור נקודת שפה דורשים $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ רק עבור נקודות $(x,y)\in D$.

רציפות

משפט: **ויירשטראס**

תהי $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטי (סגור וחסום), רציפה. אזי:

1. f חסומה.
2. f מקבלת מינימום ומקסימום.

הגדרה: $\gamma(t)=\{\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\mid x_i=\varphi_i(t),\ i=1,2,\dots,n\ \ ,a\le t\le b\}$ זו **הצגה פרמטרית** של **עקום**. (רציף)

הגדרה: $A\in\mathbb{R}^n$ נקראת **קשירה** (מסילתית) אם כל 2 נקודות ב-A ניתן לחבר ע"י עקום רציף המוכל ב-A.

משפט: (הרכבה של רציפות – רציפה)

יהיו $x(t)$, $y(t)$ רציפות ב- $[a,b]$. יהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום (פתוח) המכיל את $\big(x(t),y(t)\big)$ לכל $t\in[a,b]$. תהי $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה. נגדיר $\varphi(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$. אזי: φ רציפה ב- $[a,b]$.

משפט: **ערך הביניים**

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום פתוח וקשיח. תהי $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה. יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. אזי לכל ערך z_0 בין $f(x_1,y_1)$ ל- $f(x_2,y_2)$ קיימת נק' $(x_0,y_0)\in D$ כך ש- $f(x_0,y_0)=z_0$.

גזירות

הגדרה: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0).

הנגזרת החלקית בכיוון x: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

הנגזרת החלקית בכיוון y: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

הערה: קיום נ"ח $\not\Leftarrow$ רציפות!

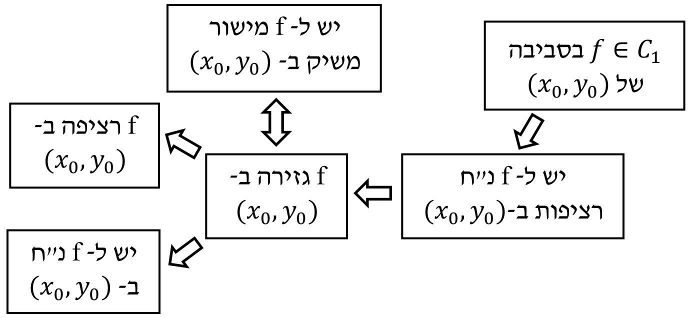
קיום נ"ח $\not\Rightarrow$ רציפות!

הגדרה: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0). נאמר כי f גזירה (דיפרנציאבילית) בנק' (x_0,y_0) אם קיימים A,B כך ש:

$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=Ah+Bk+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ כאשר $0 \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \alpha(h,k)$.

הגדרה שקולה: $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=Ah+Bk+\alpha(h,k)h+\beta(h,k)k$ כאשר:

$0\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}\alpha(h,k)$, $0\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}\beta(h,k)$.



<u>משפט</u>: אם $f(x,y)$ גזירה ב- (x_0,y_0) אז יש לה נ"ח בנקודה, ומתקיים $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

דרך נוספת לרשום הגדרת גזירות:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

<u>משפט</u>: אם f גזירה ב- (x_0,y_0) אז f רציפה ב- (x_0,y_0).

<u>משפט</u>: אם ל- $f(x,y)$ יש נ"ח רציפות ב- (x_0,y_0) אז f גזירה ב- (x_0,y_0).

הערות: 1. ההיפך לא נכון.

2. אם ל- f יש נ"ח רציפות בסביבה/בתחום אז אומרים ומסמנים $f\in C^1$.

<u>גאומטריה אנליטית במרחב</u>

<u>תזכורת</u>: משוואת משיק ל- $f(x)$ ב- x_0: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

נסמן: $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $z_0=f(x_0,y_0)$

ישר (1): $x=x_0 \Leftarrow z=B(y-y_0)+z_0 \Leftarrow \frac{z-z_0}{B}=\frac{y-y_0}{1} \Leftarrow \overrightarrow{a_1}=(0,1,B)$

ישר (2): $y=y_0 \Leftarrow z=A(x-x_0)+z_0 \Leftarrow \frac{z-z_0}{A}=\frac{x-x_0}{1} \Leftarrow \overrightarrow{a_2}=(1,0,B)$

נורמל למישור שפורשים הישרים (1) ו- (2):

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 1 & B\\ 1 & 0 & A\end{vmatrix}=(A,B,-1)$$

משוואת המישור: $A(x-x_0)+B(y-y_0)-(z-z_0)=0$

המועמד להיות המישור המשיק: $z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

הגדרת מישור משיק:

- הזוית בין מיתר מנקודה P_1 על הגרף לנקודת ההשקה P_0 לבין המישור שואפת ל-0 כאשר $P_1 \to P_0$.
- מישור המכיל את המשיק לכל עקום על הגרף שעובר דרך נקי' ההשקה.

משפט: יש ל- f מישור משיק ב- (x_0, y_0) ⇔ f גזירה ב- (x_0, y_0).

הגדרה: יהי $\hat{u} = (u_1, u_2)$ וקטור יחידה. ($u_1{}^2 + u_2{}^2 = 1$). הביטוי: $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hu_1, y_0+hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$

נקרא הנגזרת המכוונת של f בכיוון $\hat{u}$ בנקי' (x_0, y_0).

הערה: עבור $\hat{u} = (1,0)$ נקבל $\frac{\partial f}{\partial x}$, ועבור $\hat{u} = (0,1)$ נקבל $\frac{\partial f}{\partial y}$.

משפט: אם f גזירה ב- (x_0, y_0) אז הנגזרת המכוונת של f בכיוון $\hat{u} = (u_1, u_2)$ בנקי' (x_0, y_0) נתונה ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2.$$

הגדרה: הוקטור $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ נקרא הגרדיאנט של f ומסומן grad f או ∇f.

משפט: אם f גזירה אז $\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f \cdot \hat{u}$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = |\nabla f||\hat{u}| \cos \alpha = |\nabla f| \cos \alpha$$

<u>מסקנה</u>:
- $\frac{\partial f}{\partial u}$ מקבל ערך מקסימלי בכיוון הגרדיאנט. (כאשר הזוית ביניהם 0)
- $\frac{\partial f}{\partial u}$ מינימלי בכיוון המנוגד לגרדיאנט.
- $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ כאשר $\hat{u} \perp \nabla f$

<u>נ"ח מסדר גבוה</u>

סימונים:

$$f'_x = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

משפט: אם $f(x, y) \in C^2$ (נ"ח מסדר 2 רציפות) אז $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

כלל השרשרת:

משפט: תהי $f(x, y)$ בעלת נ"ח רציפות בתחום D. יהיו $x(t), y(t)$ גזירות בקטע I כך שלכל $t \in I$: $(x(t), y(t)) \in D$. נגדיר: $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$. אזי: $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. (מוגדר ב- $\big(x(t), y(t)\big)$)

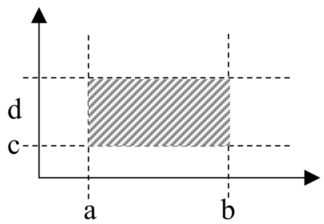
גרסא נוספת: $F(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$

משפט: אם $f(x,y)$, $x(u,v)$ ו- $y(u,v)$ כולן גזירות ברציפות, אז:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

אינטגרל פרמטרי



$[a,b]\times[c,d]$

הגדרה: $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ נקרא **אינטגרל פרמטרי**.

משפט: תהי $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. אזי F רציפה (ובמ"ש) ב- $[c,d]$.

משפט: **כלל לייבניץ – גזירה תחת סימן האינטגרל**

תהי $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$, ונניח כי קיימת $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ וגם היא רציפה במלבן. נגדיר $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$.

אזי: F גזירה בקטע $[c,d]$ ו- $F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

הערה: מספיק לדרוש ש- F מוגדרת בקטע $[c,d]$.

משפט: **הכללה של לייבניץ**

אם $f(x,y)$ גזירה ברציפות במלבן $[a,b]\times[c,d]$ ובנוסף $\alpha(y),\beta(y)$ גזירות בקטע $[c,d]$, אז:

$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ גזירה בקטע $[c,d]$ ומתקיים:

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

אינטגרלים נשנים

הגדרה: תהי $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ מוגדרת ואינט' ב- $[c,d]$. האינטגרל $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$ נקרא **אינטגרל נשנה**.

באופן דומה: $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$.

משפט: **פוביני**

תהי $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. אזי: $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$.

הגדרה: $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש (ב-y) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ ולכל y מתקיים:

$\left|\int_x^\infty f(x,y)dx\right| = \left|\int_a^\infty - \int_a^x\right| < \varepsilon$. (לא בחומר אבל כדאי לדעת)

משפט: **לייבניץ**

אם $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה ב- $[a,\infty)\times[c,d]$ ו- $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ מתכנס במ"ש, אז: $\frac{d}{dy}\left(\int_a^\infty f(x,y)dx\right) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

משפט: **פוביני**

אם $f(x,y)$ רציפה ב- $[c,d]\times[a,\infty)$ ו- $\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש, אז:

$\int_a^\infty\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^\infty f(x,y)dx\right)dy$.

אינטגרלים כפולים

נפח מתחת לגרף: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

סימונים ומושגים: P חלוקה

$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$

$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$

$R_{ij}=\{(x,y)|x_i\le x\le x_{i+1}, y_j\le y\le y_{j+1}\}$

$\lambda(P)$ = שטח המלבנצ'יק הכי גדול

$M_{ij}=\sup_{R_{ij}} f(x,y)$

$m_{ij}=\inf_{R_{ij}} f(x,y)$

$U(f,P)=\sum_{i,j}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$ סכום דרבו עליון

$L(f,P)=\sum_{i,j}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$ סכום דרבו תחתון

$\sum_{i,j}f(s_i,t_j)\Delta x_i\Delta y_j$ סכום רימן

הגדרה: אם $\inf_P U(P,f)=\sup_P L(P,f)$ אז נאמר כי $f(x,y)$ **אינטגרבילית רימן במלבן** D. את הערך המשותף נסמן $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

הגדרה שקולה: נאמר כי f אינט' רימן במלבן D אם קיים $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$ מתקיים: $\left|\sum_{i,j}f(s_i,t_j)\Delta x_i\Delta y_j-I\right|<\varepsilon$ לכל בחירה של s_i,t_jים. נסמן $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

תהי P חלוקה. סכום שטחי המלבנים שמוכלים ב-D = $S_1(D)$

סכום שטחי המלבנים שמכסים את D = $S_2(D)$

הערה: לכל חלוקה מתקיים $S_2(D)>S_1(D)$ ולכן $\inf_P S_2(D)\ge\sup_P S_1(D)$.

הגדרה: נאמר ש-D הוא **תחום בעל שטח** אם מתקיים $\inf_P S_2(D)=\sup_P S_1(D)$.

הגדרה: תחום D הוא **בעל שטח 0** אם לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי מלבנים של D ששטחו קטן מ- ε.

הערה: D בעל שטח $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש- $S_2(D)-S_1(D)<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ ∂D בעלת שטח 0.

הגדרה: יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום ובעל שטח. תהי $f(x,y)$ פונקציה חסומה על D. יהי A מלבן המכיל את D.

נסמן: $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in A\setminus D \end{cases}$

נגדיר: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$ בתנאי שקיים.

הערה: זה מוגדר היטב, כלומר לא תלוי בבחירה של A.

משפטים: (תכונות $\iint_D f$)

- אם $f(x,y)$ רציפה ב-D אז $f(x,y)$ אינט' ב-D.
- f אינט' ב-D ⇔ קבוצת נק' האי-רציפות של f היא בעלת שטח 0. (מידה 0)
- **לינאריות**: אם f ו- g אינט' ב-D אז:
  - $\iint_D f + g = \iint_D f + \iint_D g$
  - $\iint_D \alpha f = \alpha \iint_D f$
- **מונוטוניות**: $f \le g$ ב-D ⇐ $\iint_D f \ge \iint_D g$.
- g, f אינט' ב-D ⇐ fg אינט' ב-D.
- f אינט' ⇐ $|f|$ אינט' ומתקיים: $\left|\iint_D f\right| \le \iint_D |f|$.
- f אינט' ⇐ $S(D)\cdot m \le \iint_D f \le S(D)\cdot M$ כאשר $M = \sup_P S(D)$, $m = \inf_P S(D)$.
- **ערך הביניים**: אם $f(x,y)$ רציפה ו- D קשיר אז קיים $(x_0,y_0)\in D$ כך ש- $\iint_D f = f(x_0,y_0)\cdot S(D)$.
- **אדיטיביות**: אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2$ בעל שטח 0, אז $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$.

משפט: אם $D = [a,b]\times[c,d]$ מלבן, ו-f רציפה ב-D, אז: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

משפט: **פוביני**

תהי $f(x,y)$ אינט' במלבן $R = [a,b]\times[c,d]$. נניח כי $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ אינט' בקטע $[c,d]$.

אזי: $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

הערה: אם $f(x,y)$ רציפה, שני הנשנים שווים לכפול.

תחום פשוט

משפט: תהי $f(x,y)$ אינט' על תחום פשוט D. אם לכל $x\in[a,b]$ קיים $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ אז:

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$.

החלפת משתנים

משפט: תהי f אינט' בתחום D. יהיו $x(u,v), y(u,v)$ גזירות ברציפות, ונניח כי הן מגדירות העתקה הפיכה בין התחום D במישור xy לתחום E במישור uv. בנוסף, נניח כי: $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ לא מתאפס בתחום E. אז:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|\,du\,dv$$

אינטגרלים כפולים מוכללים

הגדרה: תהי $f(x,y)$ אי שלילית בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$. נניח כי f אינט' בכל תת-קבוצה בעלת שטח סגורה וחסומה $\widetilde{D} \subset D$. נגדיר:
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sup\limits_{\widetilde{D} \subset D} \iint_{\widetilde{D}} f(x,y)\,dx\,dy$ בתנאי שה-sup קיים.

הערה: אם ה-sup קיים נאמר שהאינטגרל מתכנס, ואחרת מתבדר.

משפט: תהי $f(x,y)$ אי שלילית בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$. תהי $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של תתי קבוצות (סגורות, חסומות ובעלות שטח) של D המתכנסת ל-D, כך ש- f אינט' על D_n לכל n. אזי: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ בתנאי שהגבול קיים.

הגדרה: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$. נסמן: $f^-(x,y) = \max\{-f,0\}$,$f^+(x,y) = \max\{f,0\}$. ונגדיר:
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f^+(x,y)\,dx\,dy - \iint_D f^-(x,y)\,dx\,dy$ בתנאי ששני האינטגרלים באגף ימין קיימים.