EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer
Fredag den 29. maj 2020, kl. 9.00–11.00
Institut for Datalogi, Naturvidenskabelige Fakultet, Aarhus Universitet
Tilladte hjælpemidler: Alle
Kommunikation med andre om eksamensopgaverne er ikke tilladt under eksamen
Studienummer:
Navn:

Vejledning og pointgivning

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver.

Opgaverne besvares på opgaveformuleringen som afleveres.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist ét rigtigt svar.

For hvert delspørgsmål må du vælge <u>max ét svar</u> ved at afkrydse den tilsvarende rubrik.

Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- $\bullet\,$ Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt v% og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

Opgave 1 (Asymptotisk notation, 6%)

I det følgende angiver $\log n$ 2-tals-logaritmen af n.

$$n^5$$
 er $O(3^n)$
 A
 B

 $n^3/\log n$ er $O(n^2)$
 A
 B

 $n^2/2$ er $O(\log n)$
 A
 B

 3^3 er $O(\sqrt{n})$
 A
 B

 $2^{3\log n}$ er $O(3^n)$
 A
 B

 n^2 er $O(n \cdot \log n)$
 A
 B

 $n \cdot \log n + (\log n)^3$ er $O(\sqrt{n} \cdot \log n)$
 A
 B

 $5 \cdot 2^{\log n} + \sqrt{n}$ er $O(n^{3/2})$
 A
 B

 $n^{0.1}/7 + n^{3/2}$ er $O(n^{2/3})$
 A
 B

 $(\log n)^2 + 2^{3\log n}$ er $\Omega(n!)$
 A
 B

 \sqrt{n} er $\Theta(2^n)$
 A
 B

 $\log(n!)$ er $\Omega(n^2)$
 A
 B

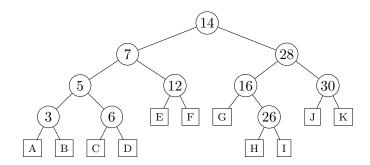
Opgave 2 (Analyse af løkker, 6%)

$$\begin{array}{lll} \textbf{Algoritme} \ \mathsf{loop1}(n) & \textbf{s} = 1 \\ \textbf{for} \ i = 1 \ \textbf{to} \ n \\ \textbf{for} \ j = 1 \ \textbf{to} \ n + 1 - i \\ s = s + 1 & \textbf{for} \ i = 1 \ \textbf{to} \ n \\ s = s + 1 & \textbf{for} \ i = 1 \ \textbf{to} \ n \\ s = s + 1 & \textbf{for} \ j = i \ \textbf{to} \ 2 * i \\ \hline \\ \textbf{Algoritme} \ \mathsf{loop3}(n) & \textbf{Algoritme} \ \mathsf{loop4}(n) \\ i = 0 & i = 1 \\ j = 0 & \textbf{while} \ i \leq n * n \\ \textbf{while} \ i \leq n * n \\ j = 1 & \textbf{k} = 1 \\ j = j + 1 & \textbf{while} \ k \leq i \\ k = k + j \\ j = 0 & j = j + 1 \\ i = i + 1 & i = 2 * i \\ \hline \end{array}$$

Angiv for hver af ovenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i Θ -notation.

	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\sqrt{n})$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(\sqrt{n}\log n)$	$\Theta(n^3)$	$\Theta((\log n)^2)$
loop1	A	В	C	D	E	F	G	H
loop2	A	В	C	D	E	F	G	H
loop3	A	В	C	D	E	F	G	H
loop4	A	В	C	D	E	F	G	H

Opgave 3 (Indsættelser i søgetræer, 4%)



Angiv i hvilke blade A–K i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 21, 13, 27, 4 og 19 skal indsættes (det antages at før hver indsættelse indeholder træet kun ovenstående ti elementer).

Opgave 4 (Max-Heap-Insert, 4%)

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 13, 6, 11, 10, 12, 14 og 3 i den givne rækkefølge med MAX-HEAP-INSERT, startende med den tomme heap.

	1	2	3	4	5	6	7	
	13	6	11	10	12	14	3	A
,	-	0	2	4	1	C	7	ı
1	1	2	3	4	5	6	7	_
	13	12	14	10	6	11	3	В
	1	2	3	4	5	6	7	
	14	13	12	11	10	6	3	\mathbf{C}
	1	2	3	4	5	6	7	
	14	12	13	6	10	11	3	D
	1	2	3	4	5	6	7	
	14	12	13	10	6	11	3	E
							•	

Opgave 5 (Build-Max-Heap, 4%)

Hvad er resultat af BUILD-MAX-HEAP på ovenstående array?

Opgave 6 (Heap-Extract-Max, 4%)

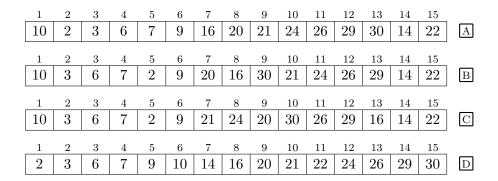
Hvad er resultat af HEAP-EXTRACT-MAX på ovenstående max-heap?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
21	19	17	12	15	16	2	1	9	8	11	13		A
1	-0	2	4	-	C	7		0	10	11	10	•	
1	2	3	4	5	6	7	- 8	9	10	11	12	1	
21	19	17	12	11	16	2	1	9	8	15	13		В
							•						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
21	19	17	12	11	16	2	1	9	8	13	15		\mathbf{C}
												'	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
21	19	17	12	11	16	2	1	9	8		13	15	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
21	19	15	17	16	12	1	9	8	11	13	2		\mathbf{E}

Opgave 7 (Partition, 4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	20	16	3	30	6	21	24	7	2	26	29	9	14	22

Angiv resultatet af at anvende Partition(A, 2, 13) på ovenstående array A.



Opgave 8 (Lineær probing, 4%)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	0	12					9			16	

I ovenstående hashtabel af størrelse 11 er anvendt linear probing med hashfunktionen $h(k) = 2k \mod 11$.

Angiv positionerne de fem elementer 1, 5, 6, 8 og 10 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 0, 9, 11, 12 og 16).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Insert(1)	A	В	$\overline{\mathbf{C}}$	D	Е	F	G	Η	I	J	K
Insert(5)	A	В	\Box	D	Е	F	G	Η	I	J	K
Insert(6)	A	В	\mathbf{C}	D	Ε	F	G	Η	I	J	K
Insert(8)	A	В	\mathbf{C}	D	Ε	F	G	Η	Ι	J	K
Insert(10)	A	В	\Box	D	Е	F	G	Η	Ι	J	K

Opgave 9 (Dobbelt hashing, 4%)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	0				19	17	20			

I ovenstående hashtabel af størrelse 11 er anvendt dobbelt hashing med hashfunktionerne $h_1(k) = 2k \mod 11$ og $h_2(k) = 1 + (2k \mod 10)$.

Angiv positionerne de fem elementer 2, 3, 5, 6 og 9 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 0, 11, 17, 19 og 20).

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Insert(2) A B C D E F GΗ I J $_{\rm K}$ Insert(3) A B C D E F G H I J Insert(5) A B C DE F G Η I J K Insert(6) A B C D E F \mathbf{G} Η INSERT(9) A B C D E F G H I J K

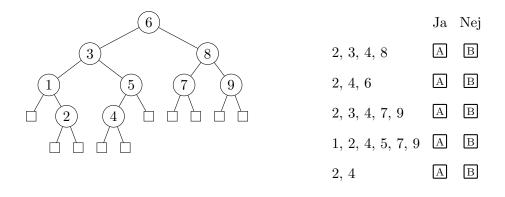
Opgave 10 (Rekursionsligninger, 4%)

Angiv løsningen for hver af nedenstående rekursionsligninger, hvor T(n) = 1 for $n \leq 1$.

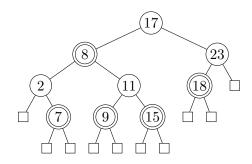
 $\Theta(\log n) \ \Theta(\sqrt{n}) \ \Theta(n) \ \Theta(n \log n) \ \Theta(n^2) \ \Theta(n^2 \log n) \ \Theta(n^3)$ $T(n) = 2 \cdot T(n/5) + n$ Α В \Box D E F G Α В \Box D \mathbf{E} F G $T(n) = 3 \cdot T(n/9) + 1$ $T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$ Α В \mathbf{C} D Ε F G Α В \mathbb{C} D Ε F G $T(n) = T(n-1) + \log n$ $T(n) = T(n-1) + n^2$ Α В \mathbb{C} Ε F G D

Opgave 11 (Rød-sort træ, 4%)

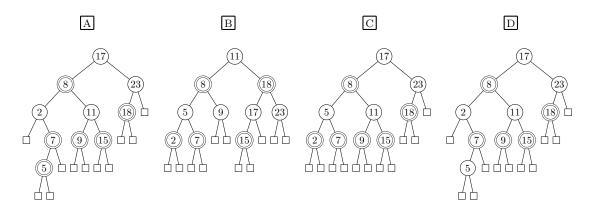
For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde.



Opgave 12 (Indsættelse i rød-sort træer, 4%)



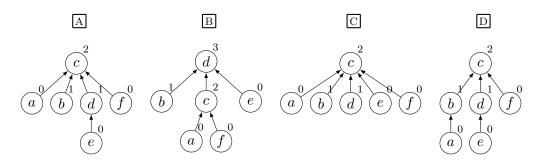
Angiv det resulterende rød-sorte træ når man indsætter 5 i ovenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



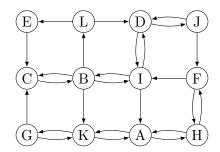
Opgave 13 (Union-find, 4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

 $\begin{array}{l} \operatorname{makeset}(a) \\ \operatorname{makeset}(b) \\ \operatorname{makeset}(c) \\ \operatorname{makeset}(d) \\ \operatorname{makeset}(e) \\ \operatorname{makeset}(f) \\ \operatorname{union}(a,b) \\ \operatorname{union}(f,c) \\ \operatorname{union}(a,f) \\ \operatorname{union}(e,d) \\ \operatorname{union}(a,e) \\ \operatorname{Find-Set}(b) \end{array}$



Opgave 14 (BFS, 4%)

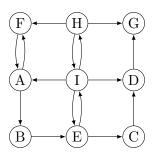


For et bredde først gennemløb (BFS) af ovenstående graf **startende i knuden A**, angiv rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. Det antages, at grafen er givet ved incidenslister, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

A B C D

AHKFGICDBJLE AHFIBCKGLDJE AHKFGICBDLJE AKHGFCIBDLJE

Opgave 15 (DFS, 4%)



Betragt et dybde først gennemløb (DFS) af ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i **knuden A**, hvor de udgående kanter til en knude besøges i alfabetisk rækkefølge. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne får tildelt **finishing time**.

A B C D

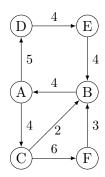
GDCFHIEBA FGHDICEBA GHDICEFBA FHIGDCEBA

Angiv for hver af nedenstånde kanter hvilken type kanten bliver i DFS gennemløbet.

Tree edge Back edge Cross edge Forward edge

Α В С D (I, D) D Α В \mathbf{C} (H, F) Α В \mathbf{C} D (I, E) Α В \mathbb{C} D (A, F)

Opgave 16 (Dijkstras algoritme, 4%)

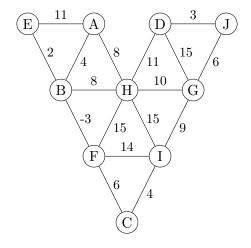


Antag Dijkstras algoritme anvendes til at finde korteste afstande fra **knuden A** til alle knuder i ovenstående graf. Angiv hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen i Dijkstra's algoritme.

A B C D

ACDBFE ACDBEF ACBFDE ACDEBF

Opgave 17 (Prims algoritme, 4%)



Antag Prims algoritme anvendes til at finde et minimum udspændende træ for ovenstående graf, og algoritmen starter i **knuden A**. Angiv hvilken rækkefølge knuderne bliver inkluderet i det minimum udspændende træ (taget ud af prioritetskøen i Prims algoritme).

A B C D

ABFECHIGJD ABFECHIGDJ ABFECIHGJD ABFCIGJDHE

Opgave 18 (Topologisk sortering, 4%)



Angiv for hver af nedenstående ordninger af knuderne i ovenstående graf om det er en lovlig topologisk sortering.

Ja Nej

ACBD A B

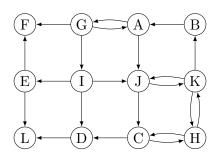
CBDA A B

DABC A B

CABD A B

CADB A B

Opgave 19 (Stærke sammenhængskomponenter, 4%)



Hvad er antallet af stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf?

ABCDEFGHIJKL

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Opgave 20 (Invariant, 4%)

Givet to ikke-negative heltal n og m, så beregner nedenstående algoritme $n \cdot m$.

```
 \begin{aligned} \textbf{Algoritme} & \text{Multiplikation}(n) \\ \text{Inputbetingelse} & : \text{Heltal } n \geq 0 \text{ og } m \geq 0 \\ \text{Outputkrav} & : r = n_0 \cdot m_0 \\ \text{Metode} & : r \leftarrow 0 \\ & \{I\} \text{ while } n > 0 \text{ do} \\ & \text{ if } n \text{ er ulige then} \\ & r \leftarrow r + m \\ & n \leftarrow n - 1 \\ & \text{else} \\ & m \leftarrow m * 2 \\ & n \leftarrow n/2 \end{aligned}
```

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for algoritmen Multiplikation, hvor n_0 og m_0 angiver værdierne for henholdsvis n og m i starten.

$$0 \le n \le n_0$$
 A
 B

 $0 \le m \le m_0$
 A
 B

 $r = m \cdot n$
 A
 B

 $n_0 \cdot m_0 = r + n \cdot m$
 A
 B

 $n_0 \cdot m_0 + r = n \cdot m$
 A
 B

Dynamisk programmering

De næste fire opgaver vedrører at løse LCS² problemet ved hjælp af dynamisk programmering.

Vi antager at vi har givet to strenge $A=a_0a_1\ldots a_{n-1}$ og $B=b_0b_1\ldots b_{m-1}$ af længde henholdsvis n og m. En fælles delsekvens er en sekvens af tegn der både er en delsekvens af A og B. F.eks. er ababb en fælles delsekvens for $A=\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\mathtt{c}\,\underline{\mathtt{b}}$ og $B=\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\mathtt{c}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{b}}$. En anden fælles delsekvens for $A=\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\mathtt{c}\,\underline{\mathtt{b}}$ og $B=\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\mathtt{c}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{b}}$ består af to sammenhængde blokke abc og b, af længde henholdsvis 3 og 1, fra både A og B. I LCS² problemet ønsker vi at finde en fælles delsekvens hvor summen af kvadraterne af blok-længderne er størst mulig, også betegnet LCS² scoren. I dette eksempel er $3^2+1^2=10$ den maksimale LCS² score. Bemærk at en fælles delsekvens, der opnår en maksimal LCS² score, er ikke nødvendigvis en længste fælles delsekvens.

Vi lader S(i,j) betegne den maksimale LCS² score for $a_i a_{i+1} \dots a_{n-1}$ og $b_j b_{j+1} \dots b_{m-1}$. S(i,j) kan bestemmes ved følgende rekursionsformel.

$$S(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = n \text{ eller } j = m \\ \max \left\{ S(i+1,j), \ S(i,j+1), \max_{\substack{0 < k \leq \min(n-i,m-j) \\ a_i \dots a_{i+k-1} = b_j \dots b_{j+k-1}}} (S(i+k,j+k) + k^2) \right\} & \text{ellers} \end{cases}$$

De følgende 4 opgaver består i at udfylde 4 blokke i følgende algoritmeskabelon.

Algoritme LCS2(A, B)

n = |A|

m = |B|

Opret tom tabel T[0..n, 0..m] til S(i, j)

Opret tom tabel K[0..n, 0..m] til back-tracking

for ...
$$\ll$$
 Opgave 21: iterer over $T \gg$

$$\ll$$
 Opgave 22: beregn $T[i,j] = S(i,j) \gg$

 \ll Opgave 23: udskriv LCS² scoren af A og $B \gg$

 $<\!<$ ${\bf Opgave~24}:$ udskriv delsekvens med maksimal LCS² score $>\!>$

Opgave 21 (4%)

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

Opgave 22 (4%)

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

```
\begin{array}{l} \textbf{if } i = n \textbf{ or } j = m \textbf{ then} \\ T[i,j] = 0 \\ \textbf{else} \\ \\ \text{Ja} \qquad & \\ \text{Nej } \\ \text{B} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} T[i,j] = \max(T[i+1,j],T[i,j+1]) \\ k = \min(n-i,m-j) \\ \textbf{while } k \geq 1 \textbf{ and } A[i+k-1] = B[j+k-1] \textbf{ do} \\ \textbf{if } k^2 + T[i+k,j+k] > T[i,j] \textbf{ then} \\ T[i,j] = k^2 + T[i+k,j+k] \\ K[i,j] = k \\ k = k-1 \end{array}
```

```
\begin{array}{l} \textbf{if } i = n \textbf{ or } j = m \textbf{ then} \\ T[i,j] = 0 \\ \textbf{else} \\ \\ \text{Ja} \quad \boxed{\mathbf{A}} \\ \text{Nej } \boxed{\mathbf{B}} \\ \end{array} \begin{array}{l} T[i,j] = \max(T[i+1,j],T[i,j+1]) \\ k = 1 \\ \textbf{while } k \leq \min(n-i,m-j) \textbf{ and } A[i+k-1] = B[j+k-1] \textbf{ do} \\ \textbf{if } k^2 + T[i+k,j+k] > T[i,j] \textbf{ then} \\ T[i,j] = k^2 + T[i+k,j+k] \\ K[i,j] = k \\ k = k+1 \end{array}
```

```
\begin{array}{l} \textbf{if } i = n \textbf{ or } j = m \textbf{ then} \\ T[i,j] = 0 \\ \textbf{else} \\ \\ \text{Nej } \\ \\ \text{Nej } \\ \\ \\ \text{Nig } \\ \\ \text{Elso} \\ \\ T[i,j] = \max(T[i+1,j],T[i,j+1]) \\ \textbf{ for } k = 1 \textbf{ to } \min(n-i,m-j) \\ \textbf{ if } A[i+k-1] = B[j+k-1] \textbf{ and } k^2 + T[i+k,j+k] > T[i,j] \textbf{ then} \\ T[i,j] = k^2 + T[i+k,j+k] \\ K[i,j] = k \end{array}
```

Opgave 23 (4%)

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

Opgave 24 (4%)

For hver af nedenstående stykker kode, angiv om det vil kunne føre til en korrekt løsning.

```
i = 0
j = 0
\text{Ma A} \qquad \text{while } i < n \text{ and } j < m \text{ do}
k = K[i, j]
\text{Print } a_i a_{i+1} \dots a_{i+k-1}
i = i + k
j = j + k
```

```
i=0 j=0 \mathbf{while}\ i < n\ \mathbf{and}\ j < m\ \mathbf{do} \mathbf{if}\ T[i,j] = T[i+1,j]\ \mathbf{or}\ T[i,j] = T[i,j+1]\ \mathbf{then} i=i+1 j=j+1 \mathbf{else} k=K[i,j] \mathbf{print}\ a_ia_{i+1}\dots a_{i+k-1} i=i+k j=j+k
```

```
i=0
j=0
\mathbf{while}\ i < n\ \mathbf{and}\ j < m\ \mathbf{do}
\mathbf{if}\ T[i,j] = T[i+1,j]\ \mathbf{then}
i=i+1
\mathbf{else}\ \mathbf{if}\ T[i,j] = T[i,j+1]\ \mathbf{then}
j=j+1
\mathbf{else}
k=K[i,j]
\mathbf{print}\ a_ia_{i+1}\dots a_{i+k-1}
i=i+k
j=j+k
```