Eksamen i Algoritmer og Datastrukturer (NDAA04010U)

Københavns Universitet

2024-04-08

Instruktioner

Du har 4 timer til at besvare 21 opgaver, beskrevet nedenfor. Karakteren baseres på det samlede antal point (vægten af hver opgave er angivet) og på en helhedsbedømmelse. Opgavesættet har 15 nummererede sider. CLRS refererer til kursets lærebog, Introduction to Algorithms, 4th edition. Visse opgaver refererer til digitale kapitler fra CLRS 3rd edition, der ikke indgår i 4th edition.

Skriftlige hjælpemidler samt brug af lokalt installeret software er tilladt. Det er *ikke* tilladt at tilgå internet eller at kommunikere med andre.

Multiple-choice opgaver besvares i ITX systemets multiple-choice modul. I hvert multiple-choice spørgsmål er det enten angivet at der er præcis ét korrekt svar eller at der er en *mængde* af ét eller flere korrekte svar. I begge tilfælde er det tilladt at vælge mere end ét svar. Ved retning af multiple-choice opgaver gives der negative point for forkerte svar. Eksempler:

- Opgave X har 8 svarmuligheder, hvoraf 4 er korrekte. Hvert kryds ved en korrekt svarmulighed giver 1 point, og hvert kryds ved en forkert svarmulighed giver -1 point. Hvis du fx sætter kryds ved alle de korrekte svarmuligheder og én forkert svarmulighed får du 3 point.

- Opgave Y har 5 svarmuligheder, hvoraf 1 er korrekt. Kryds ved den korrekte svarmulighed giver 4 point, og kryds ved en forkert svarmulighed giver -1 point.

Hvis du ikke sætter nogen krydser får du altid 0 point, og sætter du krydser ved alle svarmuligheder får du også altid 0 point.

Svar på skriftlige opgaver afleveres som et Word dokument i ITX systemet. Der er mulighed for at tegne og skrive på tablet, og indsætte i dokumentet. Efter forsiden skal der være *én side til hvert delspørgmål, i samme rækkefølge som i opgavesættet.* Kopiér gerne den udleverede skabelon ind i besvarelsen. Delspørgsmålets nummer og bogstav (fx 19.a) skal fremgå. Totalt skal Word dokumentet have 10 sider — hvis du ikke svarer på et delspørgsmål skal der være en tom side.

Multiple-choice

Dine svar skal indtastes i ITX-systemets multiple-choice modul.

1 Sortering (4%)

Betragt en variant af MERGE-SORT der deler input op i *tre* dele, der er lige store (op til afrunding), sorterer hver del rekursivt, og derefter fletter de tre dele sammen med to kald til MERGE (CLRS sektion 2.3). Pseudokoden ser således ud:

MERGE3-SORT(A, p, s)
if $p < s$
    $q = \lfloor (2 \cdot p + s)/3 \rfloor$
    $r = \lfloor (p + 2 \cdot s)/3 \rfloor$
    MERGE3-SORT(A, p, q)
    MERGE3-SORT$(A, q + 1, r)$
    MERGE3-SORT$(A, r + 1, s)$
    MERGE(A, p, q, r)
    MERGE(A, p, r, s)

Hvilken rekursionsligning beskriver køretiden $T(n)$ af MERGE3-SORT på et input af størrelse n (hvor $n = s - p + 1$)? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

1. $T(n) = T(n/2) + \Theta(n)$
2. $T(n) = T(2n/3) + \Theta(n)$
3. $T(n) = 2 \cdot T(n/3) + \Theta(n)$
4. $T(n) = 2 \cdot T(2n/3) + \Theta(n)$
5. $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$
6. $T(n) = 3 \cdot T(n/3) + \Theta(n)$

2 Rekursionsligninger (4%)

Hvilken af nedenstående rekursionsligninger, nummereret $i = 1, \ldots, 6$, har en løsning T_i hvor $T_i(n) = O(n^2)$? Antag at $T_i(n) = 1$ for $n \leq 1$. Vælg ét eller flere korrekte svar.

Eksempler. Hvis $T_0(n) = \Theta(n)$ gælder også $T_0(n) = O(n^2)$. Hvis $T_0(n) = \Theta(2^n)$ gælder *ikke* $T_0(n) = O(n^2)$.

1. $T_1(n) = T_1(n/2) + \Theta(n^2)$

2. $T_2(n) = 4 \cdot T_2(n/2) + \Theta(n^2)$

3. $T_3(n) = 3 \cdot T_3(n/2) + \Theta(n)$

4. $T_4(n) = T_4(n/3) + \Theta(n)$

5. $T_5(n) = 2 \cdot T_5(n/3) + \Theta(n)$

6. $T_6(n) = 2 \cdot T_6(n-2) + \Theta(n)$

3 Nedre grænser for sortering (4%)

Merge-Sort og (deterministisk) Quicksort som beskrevet i CLRS sektion 2.3 og 7.1 er eksempler på sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer (*eng., comparison sort algorithms*). Hvilke konklusioner kan drages som følge af den nedre grænse for sortering, Theorem 8.1 i CLRS? (Du skal ikke tage stilling til om konklusionen er sand, blot om den er en logisk konsekvens af Theorem 8.1.)

1. Der findes et input hvor Quicksort kører i tid $O(n \lg n)$ i værste fald
2. Der findes et input hvor Merge-Sort kører i tid $O(n \lg n)$ i værste fald
3. Der findes et input hvor Quicksort kører i tid $\Omega(n \lg n)$ i værste fald
4. Der findes et input hvor Merge-Sort kører i tid $\Omega(n \lg n)$ i værste fald
5. I gennemsnit over alle input kører Merge-Sort i tid $\Omega(n \lg n)$
6. I gennemsnit over alle input kører Quicksort i tid $O(n \lg n)$

4 Løkkeinvarianter (4%)

Betragt følgende funktion, i pseudo-kode notationen fra CLRS, hvor input A er et array af reelle tal og n er længden af A.

```
Variance(A, n)
1  r = 0
2  s = 0
3  for i = 1 to n
4        r = r + A[i] · A[i]
5        s = s + A[i]
6  return r/n − (s · s)/(n · n)
```

Eksempel: For $n = 4$ og $A = \langle \frac{1}{2}, 2, 0, -\frac{1}{2} \rangle$ returnerer Variance værdien 7/8.

Hvilke udsagn er gyldige løkke-invarianter, der er sande efter udførelsen af linje 5 i **for**-løkken? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. $s \leq r$
2. $s \geq 0$
3. $r \geq 0$
4. $i \geq 0$
5. $s = \sum_{j=1}^{n} A[j]$
6. $r = \sum_{j=1}^{i} A[j]^2$
7. $i \leq n$

5 Invarianter for dynamiske tabeller (4%)

Betragt dynamiske tabeller (*eng., dynamic tables*) som beskrevet i CLRS sektion 16.4.1, altså versionen *uden* en TABLE-DELETE operation. Hvilke af følgende er gyldige invarianter for algoritmen efter hver TABLE-INSERT operation? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. $T.size = 0$
2. $T.size \leq T.num$
3. $T.size \leq 2 \cdot T.num$
4. $T.num = T.size$
5. $T.num \leq T.size$
6. $T.num \leq 2 \cdot T.size$

6 Amortiseret analyse (4%)

Betragt dynamiske tabeller (*eng., dynamic tables*) som beskrevet i CLRS sektion 16.4.2, altså versionen *med* en TABLE-DELETE operation. Vi betragter potentialfunktionen defineret i CLRS ligning (16.5), hvor $\alpha(T) = T.num/T.size$:

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2(T.num - T.size/2) \text{ if } \alpha(T) \geq 1/2, \\ T.size - T.num \text{ if } \alpha(T) < 1/2 \ . \end{cases}$$

Hvilke af følgende udsagn er sande? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. En TABLE-INSERT operation øger altid værdien af $\Phi(T)$
2. En TABLE-DELETE operation øger altid værdien af $\Phi(T)$

3. En TABLE-INSERT operation mindsker altid værdien af $\Phi(T)$

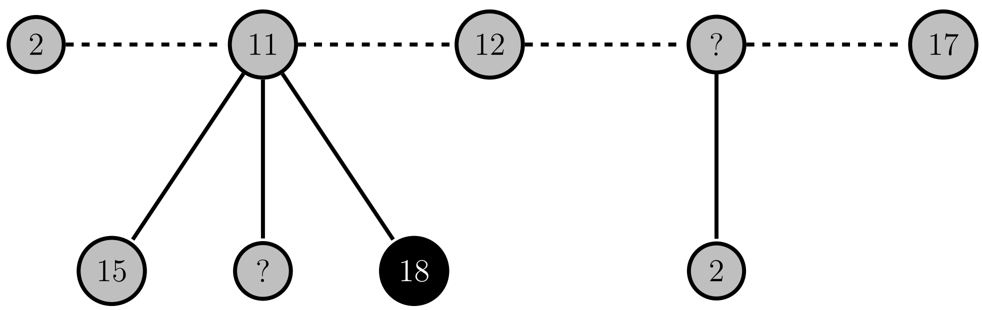
4. En TABLE-DELETE operation mindsker altid værdien af $\Phi(T)$

5. Værdien af $\Phi(T)$ er altid større eller lig med nul

6. Værdien af $\Phi(T)$ er altid mindre end eller lig med $T.size$

7 Fibonaccihobe (4%)

Denne opgave omhandler Fibonaccihobe (*eng., Fibonacci heaps*) som beskrevet i CLRS digitalt kapitel 19 (dvs. min-heap ordnede). Som i CLRS figur 19.2.a illustreres rodlisten med stiplede linjer og markerede knuder tegnes med sort. Hvilke nøgler er mulige på mindst én af knuderne markeret med spørgsmålstegn? Vælg ét eller flere korrekte svar.



1. 2

2. 6

3. 10

4. 14

5. 18

6. 22

8 Tidskompleksitet for Fibonaccihobe (4%)

Antag at der laves en FIB-HEAP-EXTRACT-MIN operation på en Fibonaccihob H(*eng., Fibonacci heap*) med n nøgler som beskrevet i CLRS digitalt kapitel 19. Før operationen har potentialfunktionen værdien $\Phi(H)$ og efter operationen har den værdien $\Phi(H')$, hvor H' er den nye Fibonaccihob. Hvad kan vi med sikkerhed sige om tidsforbruget af FIB-HEAP-EXTRACT-MIN operationen der omdanner H til H'? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. Tiden er $O(n)$
2. Tiden er $O(\lg n)$
3. Tiden er $O(\lg n + \Phi(H) - \Phi(H'))$
4. Tiden er $O(1 + \Phi(H) - \Phi(H'))$
5. Tiden er $O(1)$

9 Stavudskæring (4%)

Betragt algoritmen EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD, CLRS sektion 14.1, side 372. Lad $n = 6$ og $p = \langle 4, 4, 13, 40, 43, 49 \rangle$. Hvilke arrays r og s returnerer algoritmen når den kaldes på input (p, n)? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

1. $r = \langle 0, 4, 8, 13, 40, 44, 48 \rangle$ og $s = \langle 1, 1, 3, 4, 1, 4 \rangle$
2. $r = \langle 0, 4, 8, 13, 40, 44, 48 \rangle$ og $s = \langle 1, 1, 3, 4, 1, 6 \rangle$
3. $r = \langle 0, 4, 8, 13, 40, 44, 49 \rangle$ og $s = \langle 1, 1, 3, 4, 1, 4 \rangle$
4. $r = \langle 0, 4, 8, 13, 40, 44, 49 \rangle$ og $s = \langle 1, 1, 3, 4, 1, 6 \rangle$

10 Paradigmer (4%)

Betragt følgende pseudokode, der tager et array A og to indekser p, r som parametre.

```
MyAlgorithm(A, p, r)
if p < r
    q = ⌊(p + r)/2⌋
    x = MyAlgorithm(A, p, q)
    y = MyAlgorithm(A, q + 1, r)
    z = MyAlgorithm(A, p + 1, r)
    return x + y + z
else
    return A[p]
```

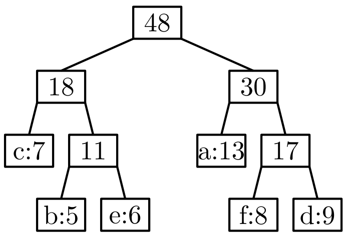
Hvilket af nedenstående paradigmer beskriver bedst MYALGORITHM? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

1. Del og kombiner (eng. *divide and conquer*)
2. Dynamisk programmering (eng. *dynamic programming*)
3. Grådige algoritmer (eng. *greedy algorithms*)

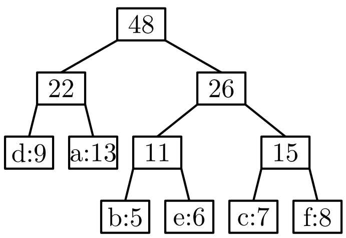
11 Huffman-koder (4%)

Betragt bogstaverne a, b, c, d, e, f og tilhørende frekvenser a:13, b:5, c:7, d:9, e:6, f:8. Vi kører Huffmans algoritme på frekvenserne, som beskrevet i CLRS afsnit 15.3. Hvilket træ får vi som resultat? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

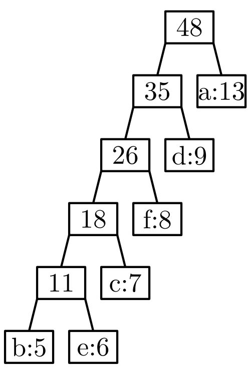
1.



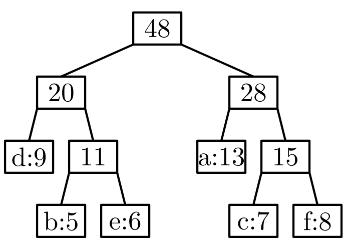
2.



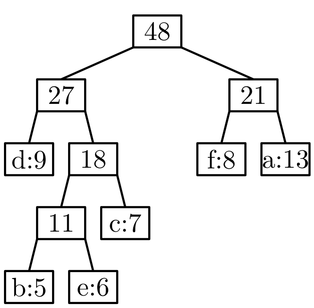
3.



4.

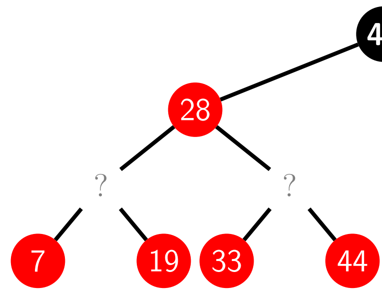


5.



12 Rød-sorte søgetræer (4%)

Betragt et rød-sort binært søgetræ T (eng. *red-black binary search tree*), som beskrevet i CLRS kapitel 13. Betragt nedenstående træ, hvor alle blade er udeladt (som på CLRS figur 13.1.c) og tre indre knuder er uspecificerede:

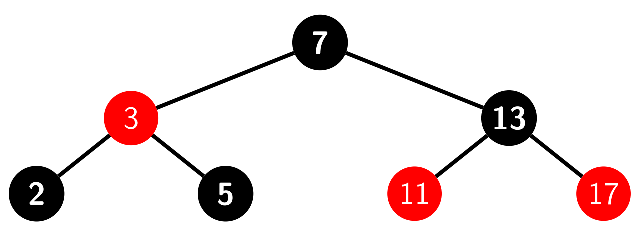


Hvilke knuder er mulige på mindst én af positionerne markeret med ?, hvis træet skal overholde invarianterne for et rød-sort binært søgetræ? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. En rød knude med nøglen 13
2. En sort knude med nøglen 17
3. En rød knude med nøglen 29
4. En sort knude med nøglen 37
5. En rød knude med nøglen 48
6. En sort knude med nøglen 84

13 Rotationer i rød-sorte søgetræer (4%)

Betragt dette rød-sorte binære søgetræ T (eng. *red-black binary search tree*), hvor bladene er udeladt på tegningen:



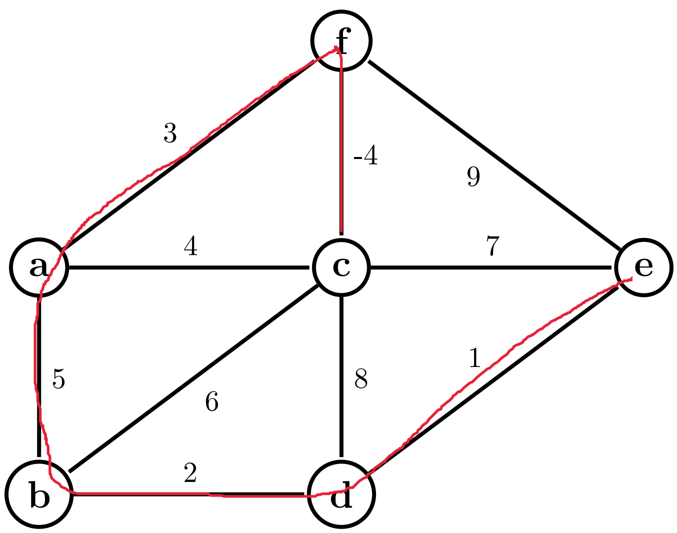
Antag at vi kører algoritmen LEFT-ROTATE$(T, 7)$ beskrevet i CLRS kapitel 13.2, altså med knuden 7 som input. Hvad sker med træet T? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. 3 bliver den nye rodknude og farves sort

2. 13 bliver den nye rodknude
3. Højden forbliver den samme
4. Højden stiger med 1

14 Mindste udspændende træ (4%)

Betragt mindste udspændende træ (eng. *minimum spanning tree*) problemet på denne graf:

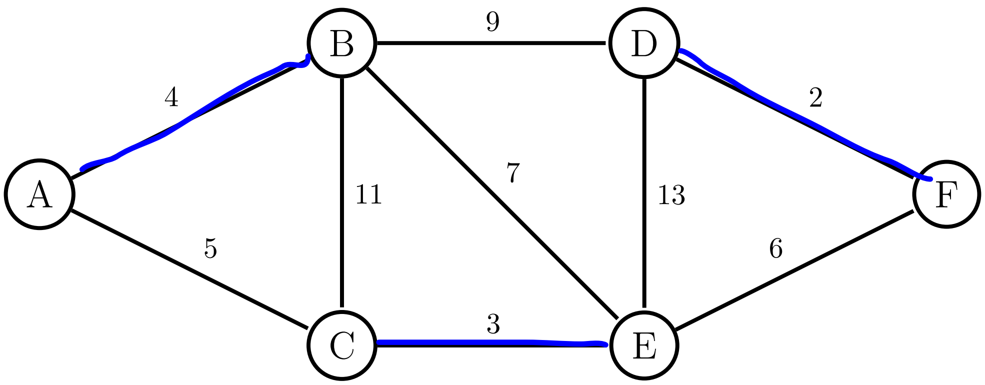


Hvilke kanter er med i det mindste udspændende træ (som er unikt)?

1. {a,b}
2. {a,c}
3. {a,f}
4. {b,c}
5. {b,d}
6. {c,d}
7. {c,e}
8. {c,f}
9. {d,e}
10. {e,f}

15 Snit og sikre kanter (4%)

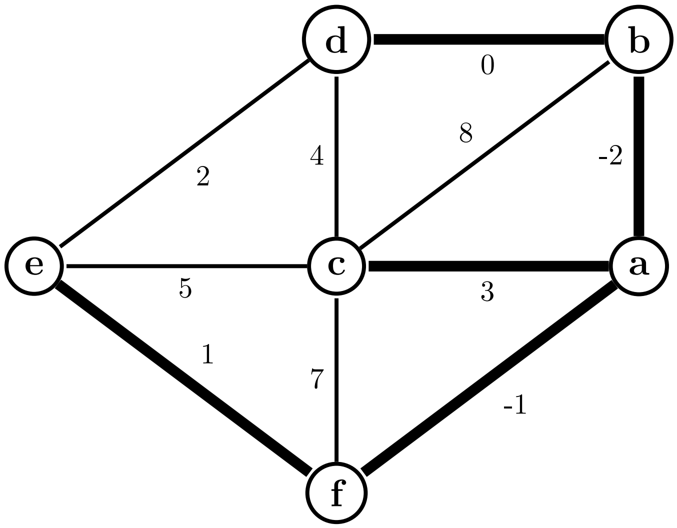
Betragt følgende ikke-orienterede, vægtede og sammenhængende graf $G = (V, E)$ med knudemængden $V = \{A, B, C, D, E, F\}$: Vi er interesserede i lette kanter (eng. *light edges*) for en kantmængde K i forskellige snit (eng. *cuts*). Hvilke af følgende udsagn er sande for kantmængden $K = \{\{D, F\}, \{C, E\}, \{A, B\}\}$? Vælg ét eller flere korrekte svar.



1. Snittet $(S_1, V - S_1)$ respekterer kantmængden K for $S_1 = \{A, B\}$
2. Snittet $(S_2, V - S_2)$ respekterer kantmængden K for $S_2 = \{C, D, E, F\}$
3. Snittet $(S_3, V - S_3)$ respekterer kantmængden K for $S_3 = \{A, B, F\}$
4. Snittet $(S_4, V - S_4)$ har $\{E, F\}$ som en let kant for $S_4 = \{A, B, C, E\}$
5. Snittet $(S_5, V - S_5)$ har $\{B, D\}$ som en let kant for $S_5 = \{C, D, E, F\}$
6. Snittet $(S_6, V - S_6)$ har $\{A, C\}$ som en let kant for $S_6 = \{A, B, D, F\}$

16 Kruskal's algoritme (4%)

Betragt følgende vægtede, uorienterede graf, hvor kanterne i det mindste udspændende træ (som er unikt) er markeret med fede linjer:

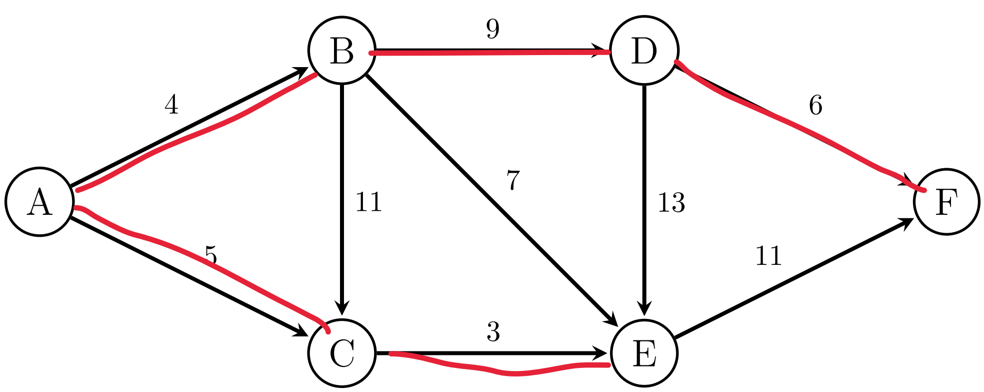


I hvilken rækkefølge bliver kanterne inkluderet i det mindste udspændende træ når Kruskal's algoritme køres på denne graf? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

1. {a,b}, {a,c}, {a,f}, {b,d}, {e,f}
2. {a,b}, {a,f}, {b,d}, {e,f}, {a,c}
3. {b,d}, {a,f}, {e,f}, {a,b}, {a,c}
4. {b,d}, {a,c}, {e,f}, {a,b}, {a,f}
5. {b,d}, {a,f}, {e,f}, {a,b}, {a,c}

17 Korteste veje (4%)

Betragt følgende orienterede, vægtede graf $G = (V, E)$:



Hvilke kanter er med i en korteste vej (eng. *shortest path*) fra knude A til *mindst* én af knuderne {B,C,D,E,F}? Vælg ét eller flere korrekte svar.

1. {A,B}
2. {A,C}
3. {B,C}
4. {B,D}
5. {B,E}
6. {C,E}
7. {D,E}
8. {D,F}
9. {E,F}

18 Valg af algoritmer og datastrukturer (4%)

Antag at du skal løse k-DIFFERENCE problemet, defineret således: Givet en parameter k og et array A med n heltal, afgør om der findes to tal i A med en difference på k.

Eksempel. Hvis $k = 4$ og $A = \langle 2, 7, 13, 3, 11, 17 \rangle$ er svaret "ja", fordi vi har $A[2] - A[4] = 7 - 3 = 4$. Hvis $k = 3$ og A er uændret er svaret "nej" da der ikke findes to tal i A med en difference på 3.

Hvilken af følgende algoritmer og datastrukturer er mest relevant som en del af en simpel og effektiv algoritme, der løser k-DIFFERENCE? Der er præcis ét korrekt svar, men det er tilladt at vælge flere svar hvis du er i tvivl.

1. Dijkstra's algoritme
2. Disjunkte mængder
3. Dynamiske tabeller
4. Merge-sort
5. Prim's algoritme

Skriftlige opgaver

19 Induktionsbeviser (7%)

Betragt følgende funktion, i pseudo-kode notationen fra CLRS, hvor input A er et array af heltal, n er længden af A, og b er en heltalsparameter.

HEAVYHITTER(A, n, b)

1 let $r[1:b]$ be a new array
2 **for** $i = 1$ **to** b
3 $\quad r[i] = 0$
4 **for** $j = 1$ **to** n
5 $\quad$ **if** $A[j] \geq 1$ and $A[j] \leq b$
6 $\quad\quad r[A[j]] = r[A[j]] + 1$
7 **return** $\max_{1 \leq \ell \leq b}(r[\ell])$

Eksempel: For $n = 6$, $b = 10$, $A = \langle 5, 1, 1, 7, 1, 3 \rangle$ returnerer HEAVYHITTER værdien 3.

a) Forklar i ord hvad HEAVYHITTER beregner. Skriv dit svar på side 2 i Word dokumentet.

b) Formulér en løkkeinvariant $I(j)$ der beskriver indholdet af r efter iteration j af **for**-løkken i linje 4–6. Argumentér ved induktion for at invarianten gælder efter j iterationer, for $j \geq 0$. Invarianten $I(n)$, der gælder når løkken afsluttes skal underbygge dit svar i spørgsmål **a)**. Skriv dit svar på side 3 i Word dokumentet.

20 Så længe som muligt (12%)

Vi betragter følgende variant af problemet aktivitetsudvælgelse (eng. *activity selection*) fra CLRS sektion 15.1. I stedet for at maksimere antallet af aktiviteter som i CLRS, vil vi vælge en mængde af aktiviteter, der samlet varer *så lang tid som muligt*. Vi er altså givet en mængde $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ af n elementer, hvor hver aktivitet a_i har en givet starttid s_i og en sluttid f_i, så $0 \leq s_i < f_i < \infty$. Antag at aktiviterne er sorteret efter sluttider, dvs. $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n$. Vi ønsker at vælge en mængde $A \subseteq S$ af ikke-overlappende aktiviteter som maksimerer $\sum_{a_i \in A}(f_i - s_i)$. At aktiviteterne i A er ikke-overlappende vil sige at hvis $a_i, a_j \in A$ hvor $i \neq j$, så gælder $[s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset$, dvs. det er tilladt at $f_i = s_j$ eller $f_j = s_i$.

a) Antag at aktiviteterne er $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ med starttider $s = \langle 0, 3, 1, 6 \rangle$ og sluttider $f = \langle 2, 4, 5, 8 \rangle$. Angiv en optimal løsning A. Skriv dit svar på side 4 i Word dokumentet.

For hvert $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, lad $S_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ være mængden bestående af de i første aktiviteter, dvs. $S_0 = \emptyset$, $S_1 = \{a_1\}$, $S_2 = \{a_1, a_2\}$, osv. Definér t_i til at være den samlede tid for aktiviteterne i en optimal løsning til S_i, hvor specielt $t_0 = 0$.

b) Betragt et fast indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$ og lad $j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ være det største indeks hvor $f_j \leq s_i$ (her definerer vi $f_0 = 0$). Argumentér for at

$$t_i = \max\{t_{i-1}, t_j + f_i - s_i\}.$$

Skriv dit svar på side 5 i Word dokumentet.

c) Skriv pseudokode til en algoritme som returnerer den samlede tid t_n af aktiviteterne i den optimale løsning til hele mængden S. Signaturen på din pseudokode skal være

$$\textsc{Activity-Selection-Max-Span}(s, f, n),$$

hvor s og f er arrays af længde n med hhv. start- og sluttider. For at få fuldt point skal algoritmen have køretid $O(n^2)$, men det er ikke nødvendigt at bevise grænsen for køretiden. Skriv dit svar på side 6 i Word dokumentet.

d) Forklar hvordan man kan lave en algoritme som løser problemet i $O(n \lg n)$ tid. Hvis din algoritme fra opgave c) allerede har denne køretid så argumentér for det. Skriv dit svar på side 7 i Word dokumentet.

21 Så mange som muligt (9%)

Vi betragter et array af n heltal $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, hvor x_i kan være positivt, negativt eller 0. Lad $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ være tallenes sum. Vi ønsker at løse LONGEST-SUBSET-SUM problemet: Find størrelsen på den største indeksmængde $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ hvor $\sum_{i \in I} x_i \leq S/2$.

Eksempel. For $X = \langle 1, 4, 2, 8 \rangle$, der har $S = 15$, kan vi finde en mængde I med 3 elementer, nemlig $I = \{1, 2, 3\}$. Dette er den størst mulige mængde der overholder $\sum_{i \in I} x_i \leq S/2$ for ingen løsning kan indeholde alle fire elementer.

a) Giv et eksempel på et array X hvor løsningen ikke er entydig, dvs. hvor der findes to *forskellige* indeksmængder I_1 og I_2 af højst mulige størrelse hvor $\sum_{i \in I_1} x_i \leq S/2$ og $\sum_{i \in I_2} x_i \leq S/2$. Skriv dit svar på side 8 i Word dokumentet.

Vi ser nu på følgende tilgang til at løse LONGEST-SUBSET-SUM: Start med summen af alle tal i X og fjern ét tal ad gangen i omvendt sorteret rækkefølge så længe summen er højere end $S/2$. Returnér antallet af elementer, der ikke er fjernet fra X.

Eksempel. For $X = \langle 4, -2, -3, 2, 5, 5 \rangle$, der har sum $S = 11$, fjerner vi de to største elementer 5 og 5, hvorefter summen af de fire resterende tal er 1, hvilket er mindre end eller lig med $S/2$. Derfor returneres 4.

b) Bevis at en optimal løsning til LONGEST-SUBSET-SUM kan konstrueres som beskrevet ovenfor. Skriv dit svar på side 9 i Word dokumentet.

c) Skriv pseudokode til en algoritme der løser LONGEST-SUBSET-SUM. Signaturen til din algoritme skal være

$$\textsc{Longest-Subset-Sum}(x, n),$$

hvor x er et array af længde n. Skriv dit svar på side 10 i Word dokumentet.