DMA 2021

–Ugeopgave 5 –

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres onsdag den 13. oktober klokken 21:59 på Absalon.
- Ugeopgaven skal laves i **grupper** af 2-3 personer.
- Besvarelsen skal udarbejdes i LaTeX.

Del 1 Lad $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ være asymptotisk positive funktioner. Vi kan udtrykke definitionen af "$f(x)$ er $O(g(x))$" fra uge 3 ved hjælp af logiske operatorer og kvantorer som

$$\exists c > 0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \geq x_0 \ f(x) \leq cg(x) \tag{1}$$

(a) Skriv negationen af (1) ved at bruge logiske operatorer og kvantorer. Simplificer dit udtryk, så det ikke indeholder negationen ($\sim$). *Hint: Theorem 3 fra KBR 2.2 kan være til hjælp her.*

(b) Skriv en sætning på dansk, som svarer til dit udtryk fra (a).

Del 2 Lad $\odot$ være en logisk operator med følgende sandhedstabel:

P	Q	$P \odot Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

(a) Find et ækvivalent udtryk for $(\sim P)$ ved kun at bruge $\odot$.

(b) Find et ækvivalent udtryk for hver af de følgende udtryk ved kun at bruge $\sim$ (negation) og $\odot$. Du kan bruge P og Q så mange gange, du vil. Du kan også bruge parenteser til at specificere rækkefølgen af operationerne.

(i) $P \vee Q$

(ii) P `xor` Q (Se eksempelvis mandagens præsentation for en definition af XOR-operationen.)

Verificer dit svar ved at beregne en sandhedstabel for udtrykkene. (Se eksempelvis Example 5 i KBR 2.1.)

Del 3 Benyt følgende opskrift til at give et induktionsbevis for, at $3^n + 6n - 1$ er deleligt med 4 for ethvert helt tal $n > 0$.

(1) Bestem det relevante udsagn $P(n)$.

(2) Kontrollér at $P(n)$ er et sandt udsagn for alle n fra 1 til 4.

(3) Indfør en følge $b_n = 3^n + 6n - 1$, og skriv b_{n+1} som et udtryk, hvor b_n indgår.

(4) Antag nu, at $P(n)$ er sand for en eller anden bestemt værdi af $n > 0$. Gør rede for, at så er $P(n+1)$ også sand.

(5) Opstil en konklusion ved hjælp af induktionsprincippet.

Del 4 I denne opgave betragter vi algoritmen `MUL` defineret ved pseudokoden

```
MUL(a,b)
   x <- a
   y <- 0
   WHILE x>=b DO
      x <- x-b
      y <- y+1
   IF x=0 THEN
      RETURN(true)
   ELSE
      RETURN(false)
```

(1) Forklar i jeres egne ord hvad algoritmen gør når `MUL` kaldes med to tal $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Giv et eller flere illustrative eksempler.

(2) Bevis ved induktion at hvis x_n og y_n betegner den værdi variablerne x og y har efter n gennemløb af `WHILE`-løkken, så gælder der

$$x_n + by_n = a$$

(3) Vis at algoritmen fungerer som beskrevet i delopgave (1).