Sortering

Denne uge: Insertion sort, merge sort

Senere i kurset: Heap sort, counting sort, radix sort, bucket sort

Mikkel Abrahamsen

Sortering

Givet array A af n tal, byt om på rækkefølgen sådan at

$$A[0] \leq A[1] \leq \ldots \leq A[n-1].$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Sortering

Givet array A af n tal, byt om på rækkefølgen sådan at

$$A[0] \leq A[1] \leq \ldots \leq A[n-1].$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Ønsket resultat:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	18	25	28	33	45	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	18	25	28	33	45	7	12	36	1	47	42	50	16	31

$$key = 7$$

Insertion sort

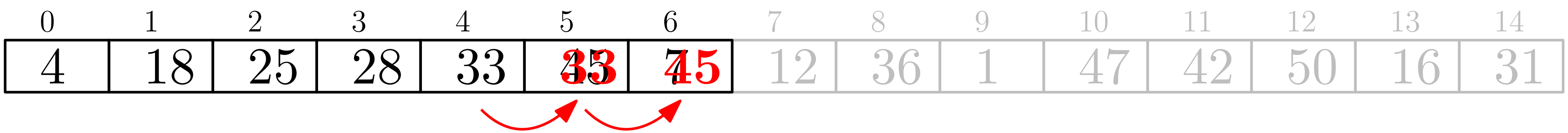
Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	18	25	28	33	45	7 **45**	12	36	1	47	42	50	16	31

$$key = 7$$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.



$$key = 7$$

Insertion sort

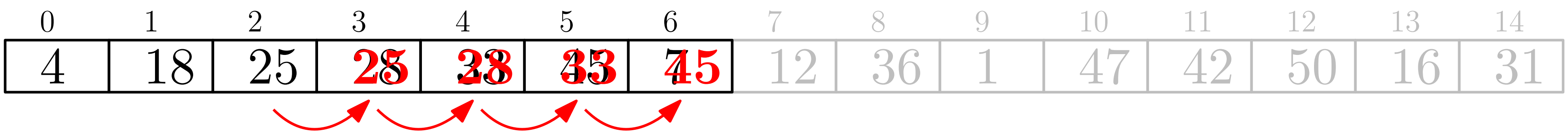
Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	18	25	28	33 **28**	45 **33**	7 **45**	12	36	1	47	42	50	16	31

$key = 7$

Insertion sort

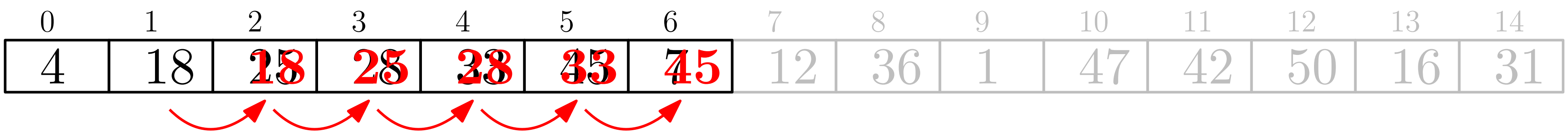
Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.



$key = 7$

Insertion sort

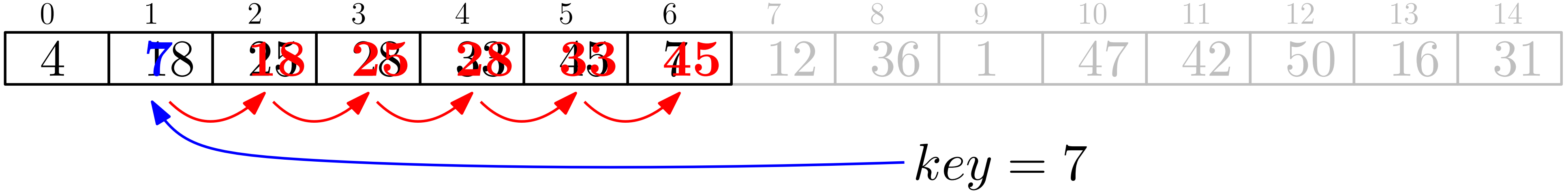
Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.



$key = 7$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.



Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

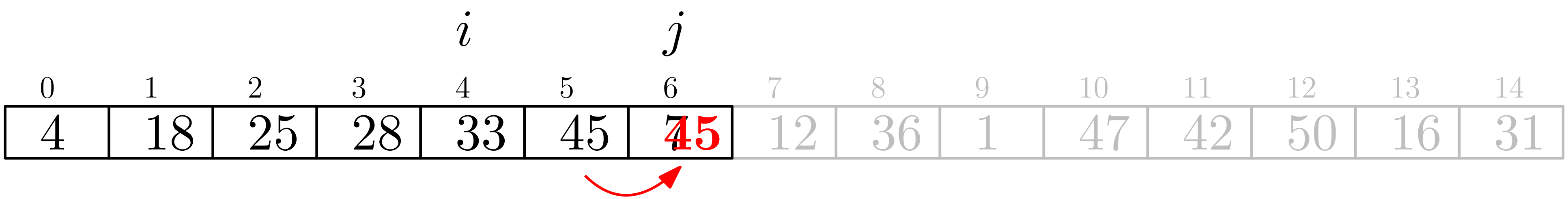
					i	j								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	18	25	28	33	45	7	12	36	1	47	42	50	16	31

$$key = 7$$

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i + 1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i + 1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

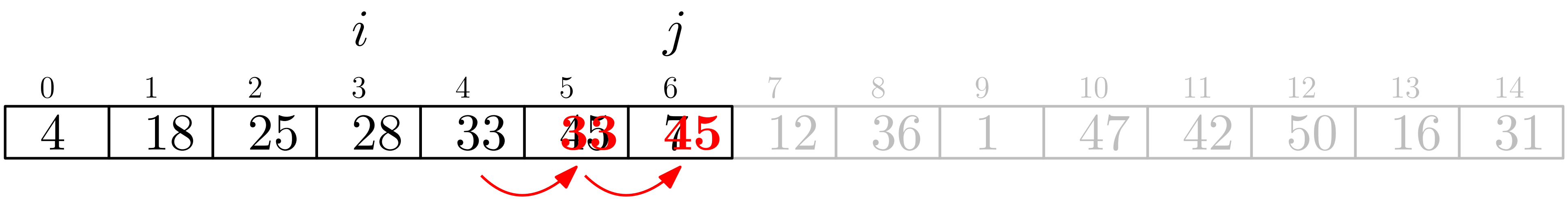


$key = 7$

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
  $A[i+1] = A[i]$
  $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.



$key = 7$

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i \geq 0$ and $A[i] > key$

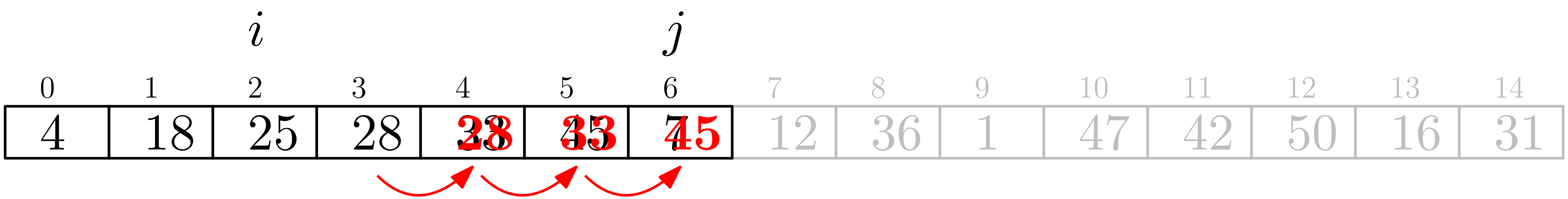
$\quad A[i+1] = A[i]$

$\quad i = i - 1$

$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

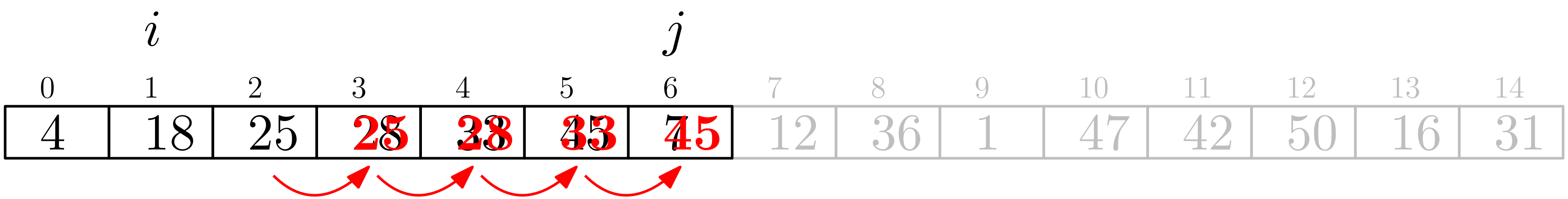


$key = 7$

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i+1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

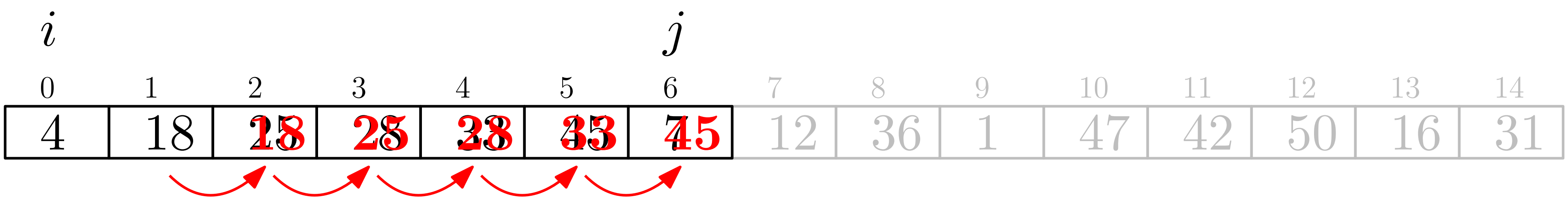


$key = 7$

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i+1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

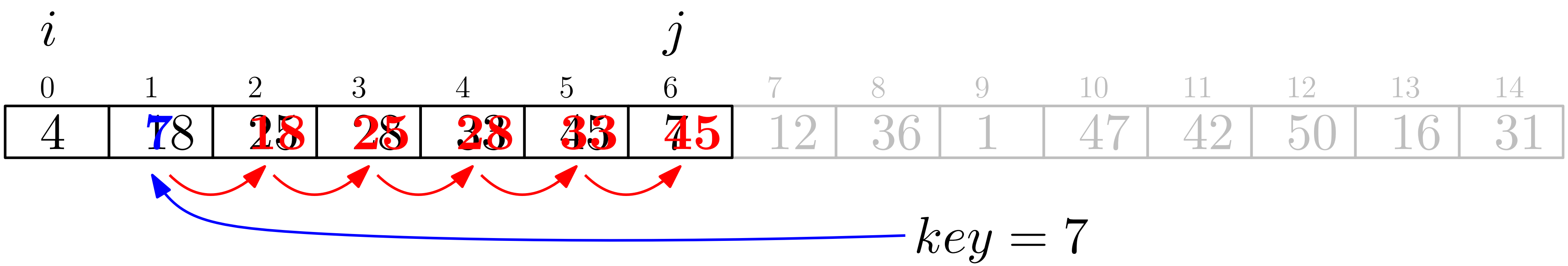


$key = 7$

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
  $A[i+1] = A[i]$
  $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

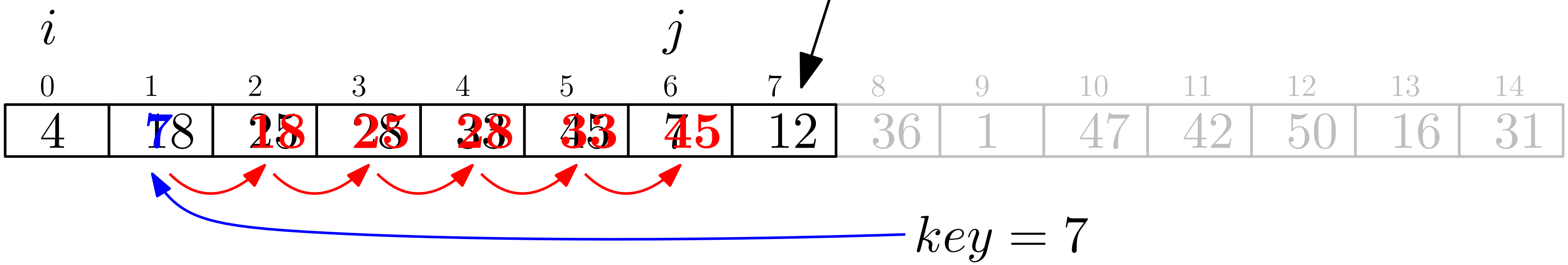


$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i+1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

Hvad med det næste tal?



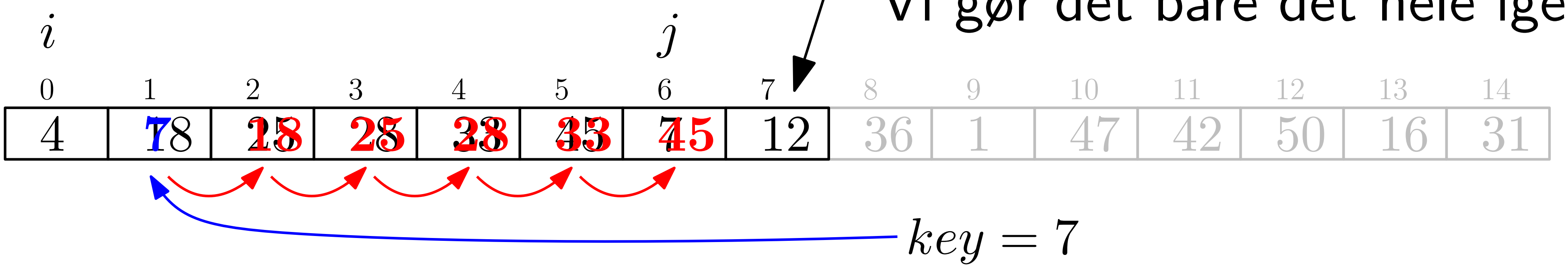
$$key = A[j]$$
$$i = j - 1$$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
$$\quad A[i+1] = A[i]$$
$$\quad i = i - 1$$
$$A[i+1] = key$$

Insertion sort

Antag alle tal pånær det sidste er i sorteret rækkefølge.

Hvad med det næste tal?

Vi gør det bare det hele igen!



$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i+1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Sortering

Vi begyndte med:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    $A[i+1] = A[i]$
    $i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Sortering

Vi begyndte med:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

```
Insertion-Sort(A, n)
  for j = 1 to n − 1
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i ≥ 0 and A[i] > key
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Sortering

Vi begyndte med:

$$key = 4$$

i (over index 0), j (over index 1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

```
Insertion-Sort(A, n)
  for j = 1 to n − 1
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i ≥ 0 and A[i] > key
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Sortering

Vi begyndte med:

$key = 4$

i		j													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	33	**33**	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Insertion-Sort(A, n)
  for $j = 1$ to $n - 1$
    $key = A[j]$
    $i = j - 1$
    while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
      $A[i + 1] = A[i]$
      $i = i - 1$
    $A[i + 1] = key$

Sortering

Vi begyndte med:

$key = 4$

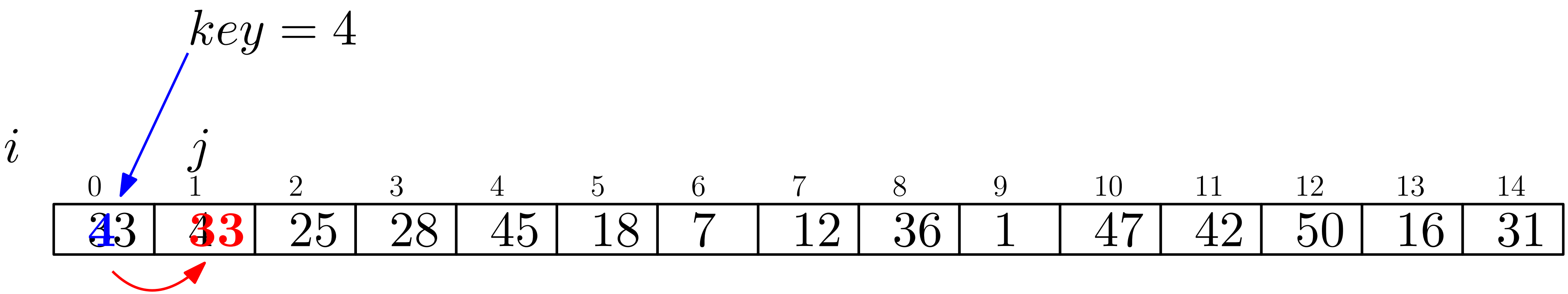
i $\quad$ j

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33 4	4 **33**	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Insertion-Sort(A, n)
- for $j = 1$ to $n - 1$
  - $key = A[j]$
  - $i = j - 1$
  - while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    - $A[i + 1] = A[i]$
    - $i = i - 1$
  - $A[i + 1] = key$

Sortering

Vi begyndte med:



Insertion-Sort(A, n)
  for $j = 1$ to $n - 1$
    $key = A[j]$
    $i = j - 1$
    while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
      $A[i+1] = A[i]$
      $i = i - 1$
    $A[i+1] = key$

OBS: I CLRS bruger denne algoritme 1-indeksering. Derfor en lille forskel.

Køretidsanalyse

	skridt	max. gange
Insertion-Sort(A, n)		
for $j = 1$ to $n - 1$	c_1	n
$key = A[j]$		
$i = j - 1$		
while $i \geq 0$ and $A[i] > key$	c_2	j
$A[i+1] = A[i]$		
$i = i - 1$		
$A[i+1] = key$	c_3	n

Køretidsanalyse

Insertion-Sort(A, n)	skridt	max. gange

for $j = 1$ to $n-1$
   $key = A[j]$
   $i = j - 1$
	c_1	n

while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
     $A[i+1] = A[i]$
     $i = i - 1$
	c_2	j

$A[i+1] = key$	c_3	n

Køretid: $T(n) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_2(n-1)$
$= c_1 n + c_3 n + c_2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2}$
$= c_2/2 \cdot n^2 + (c_1 + c_3 - c_2/2) \cdot n$

Køretidsanalyse

Insertion-Sort(A, n)	skridt	max. gange
for $j = 1$ to $n-1$		
$\quad key = A[j]$	c_1	n
$\quad i = j-1$		
$\quad$ while $i \geq 0$ and $A[i] > key$		
$\quad\quad A[i+1] = A[i]$	c_2	j
$\quad\quad i = i-1$		
$\quad A[i+1] = key$	c_3	n

Køretid: $T(n) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_2(n-1)$

$= c_1 n + c_3 n + c_2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2}$

$= c_2/2 \cdot n^2 + (c_1 + c_3 - c_2/2) \cdot n$

$= \boxed{\Theta(n^2)}$

Asymptotisk notation: Vi udelader langsomt voksende led og konstanter.

Interesseret i hvordan køretiden vokser som funktion af n.

Køretidsanalyse

Insertion-Sort(A, n)
- for $j = 1$ to $n - 1$
  - $key = A[j]$
  - $i = j - 1$
  - while $i \geq 0$ and $A[i] > key$
    - $A[i+1] = A[i]$
    - $i = i - 1$
  - $A[i+1] = key$

skridt	max. gange
c_1	n
c_2	j
c_3	n

Køretid: $T(n) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_2(n-1)$

$= c_1 n + c_3 n + c_2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = c_1 n + c_3 n + c_2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$

$= c_2/2 \cdot n^2 + (c_1 + c_3 - c_2/2) \cdot n$

$= \boxed{\Theta(n^2)}$

Asymptotisk notation: Vi udelader langsomt voksende led og konstanter.
Interesseret i hvordan køretiden vokser som funktion af n.

Udfordring: Kan vi sortere hurtigere?

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	i								j						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B															

Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	i									j					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1														

Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

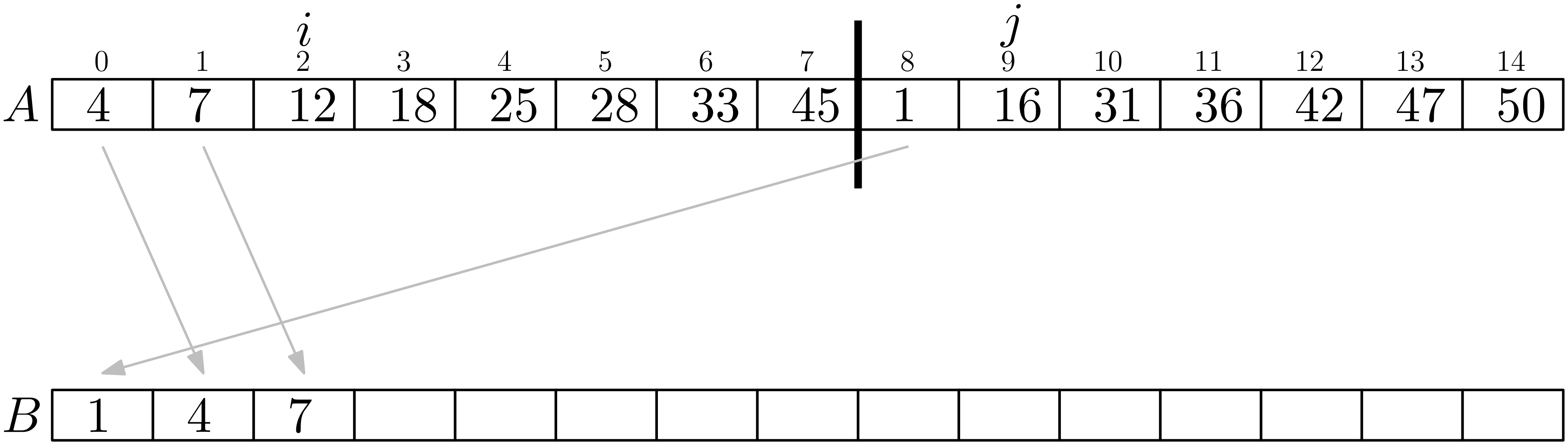
		i								j					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4													

Nyt array B.

Merge sort

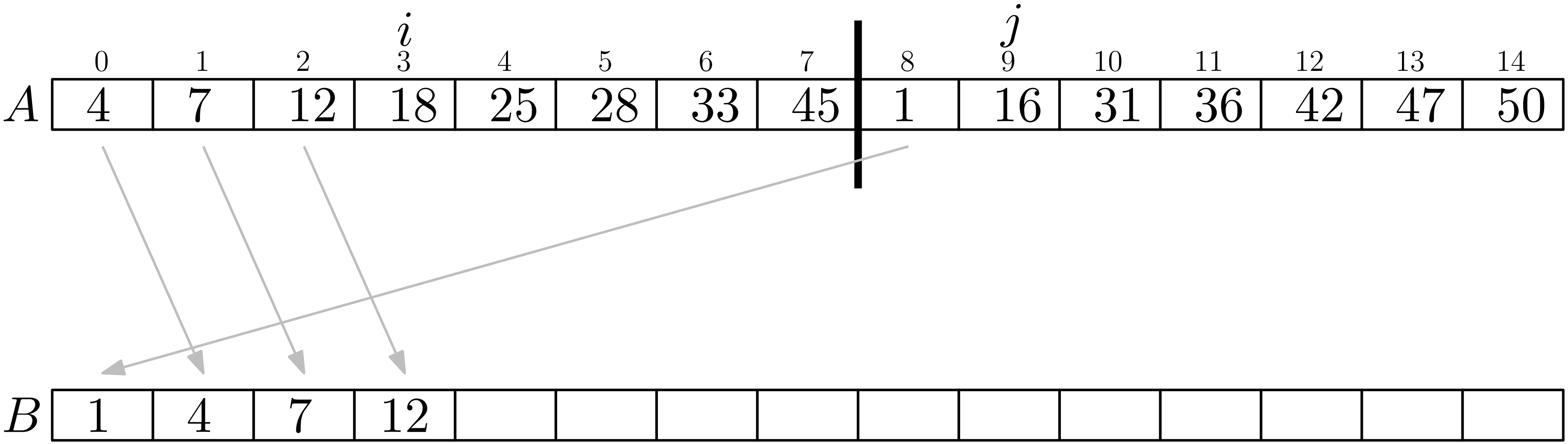
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

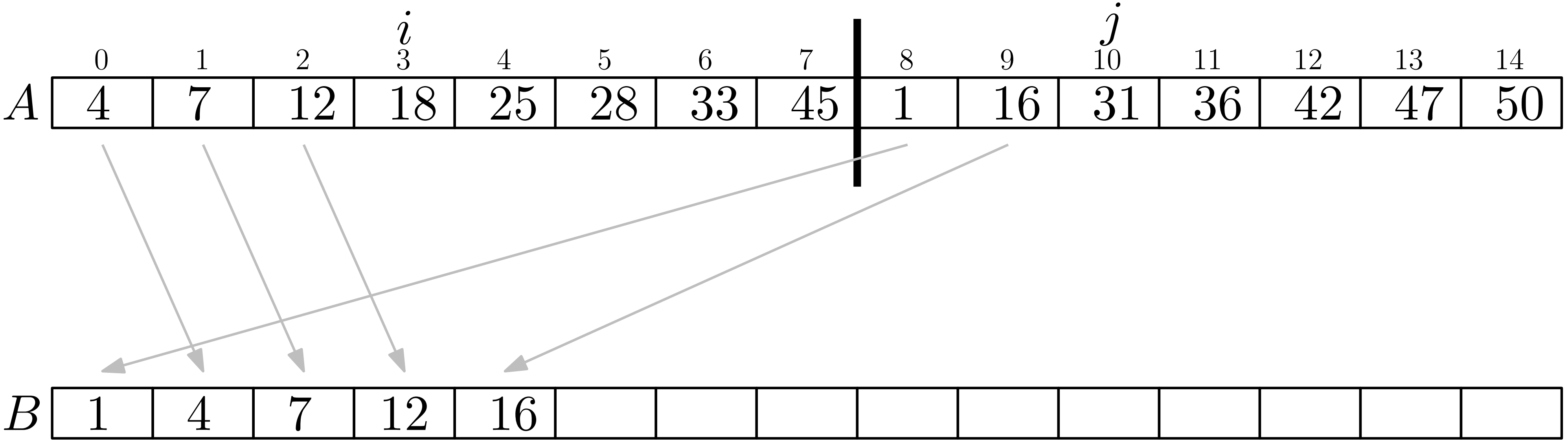
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

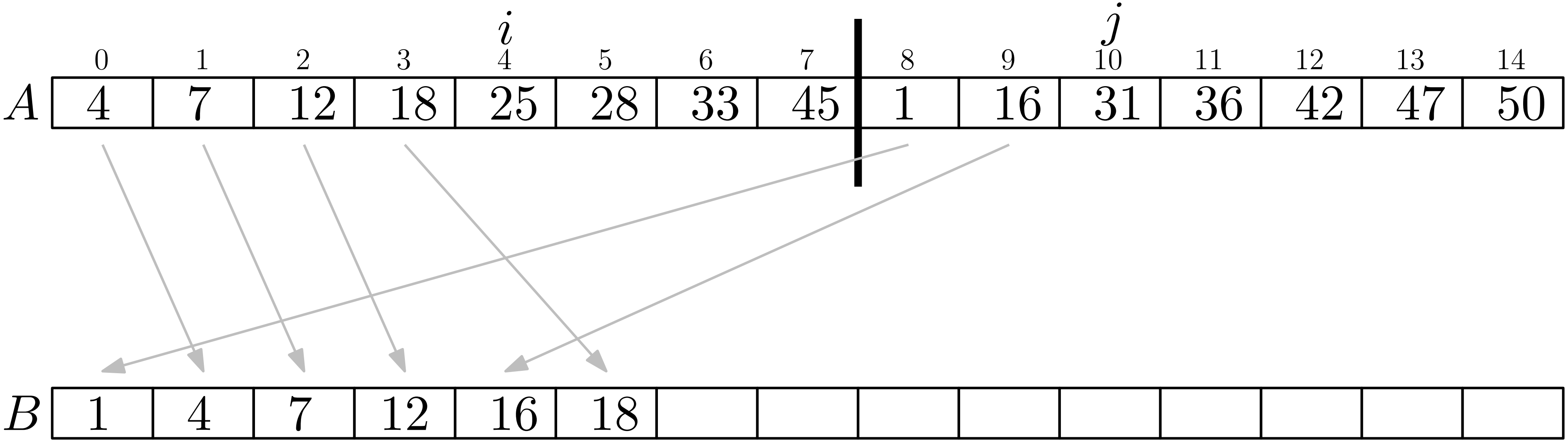
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

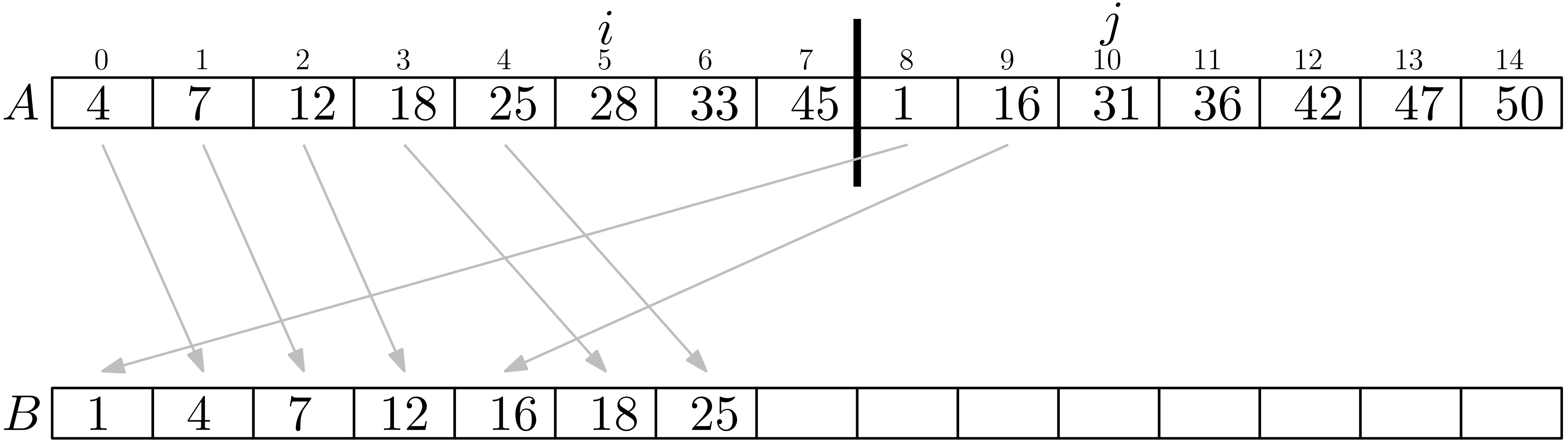
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

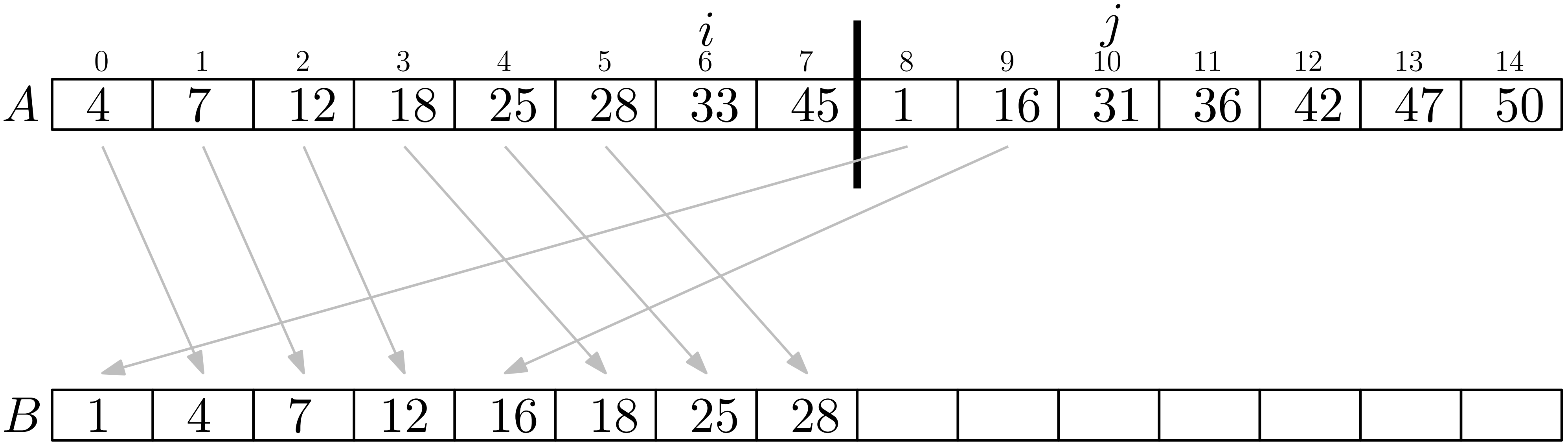
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

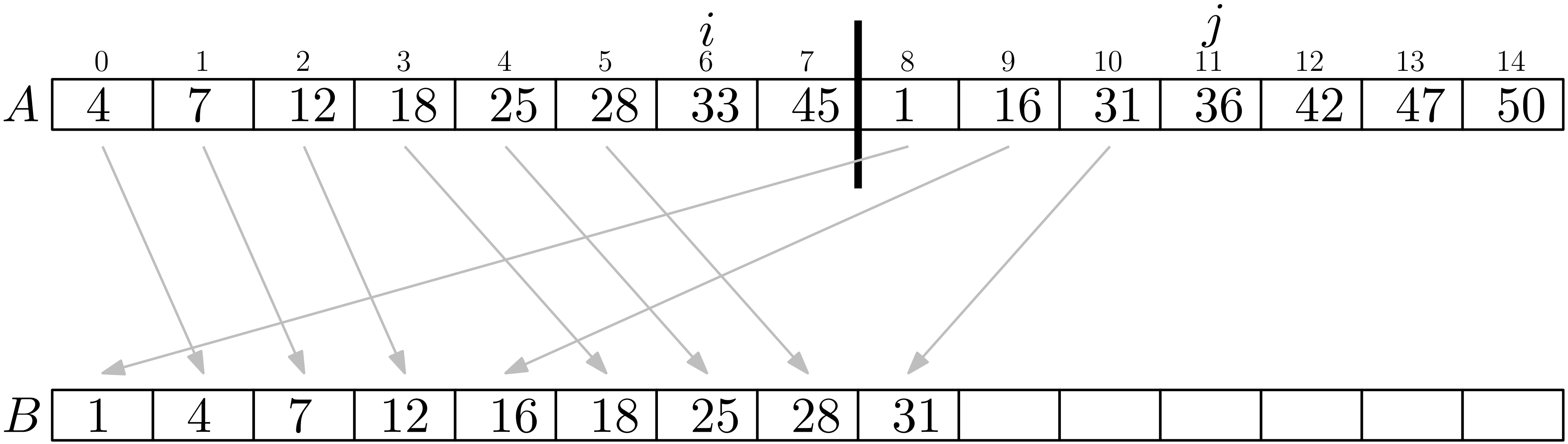
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

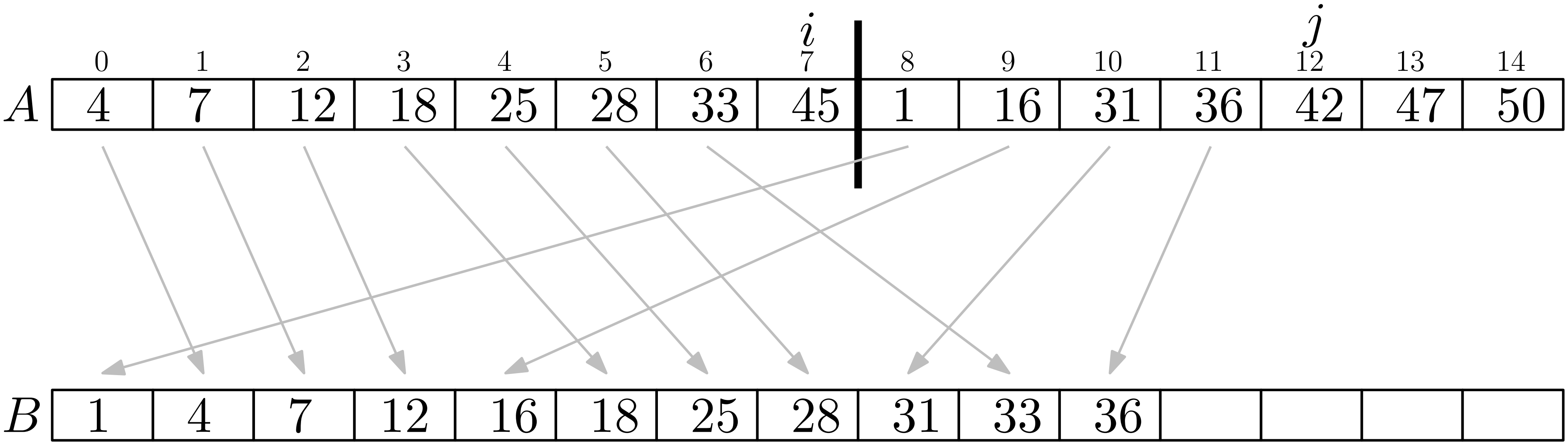
								i				j			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33					

Nyt array B.

Merge sort

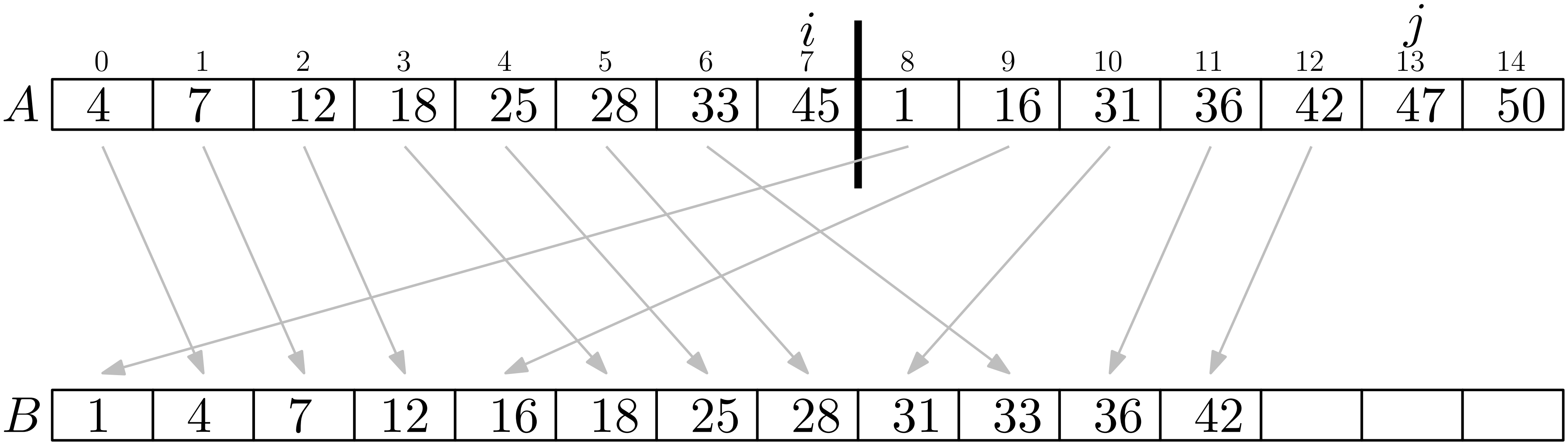
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

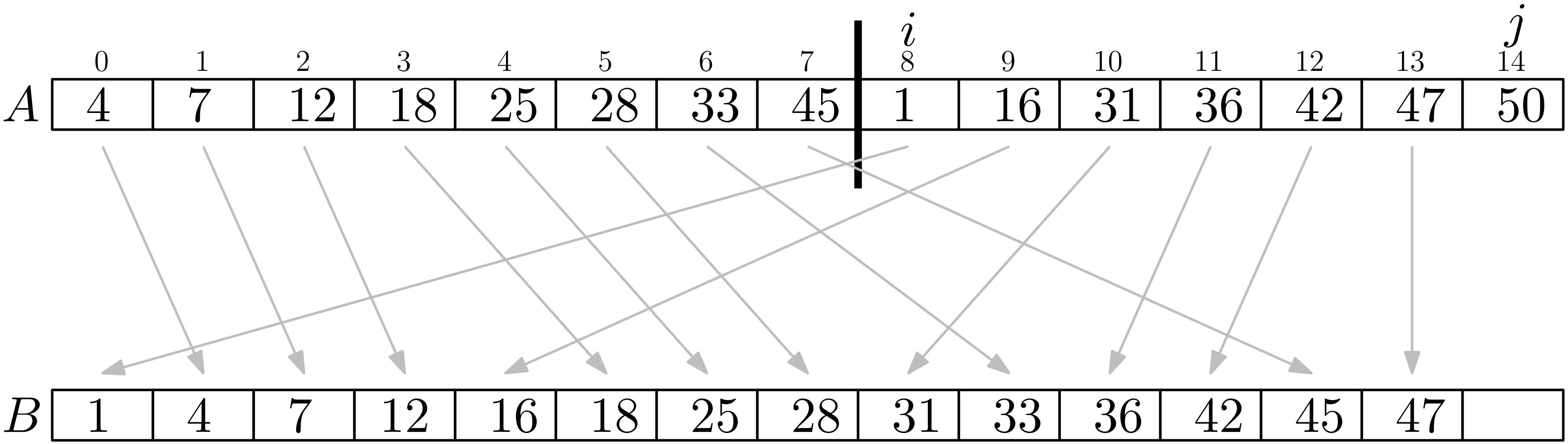
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

									i					j	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50
B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45		

Nyt array B.

Merge sort

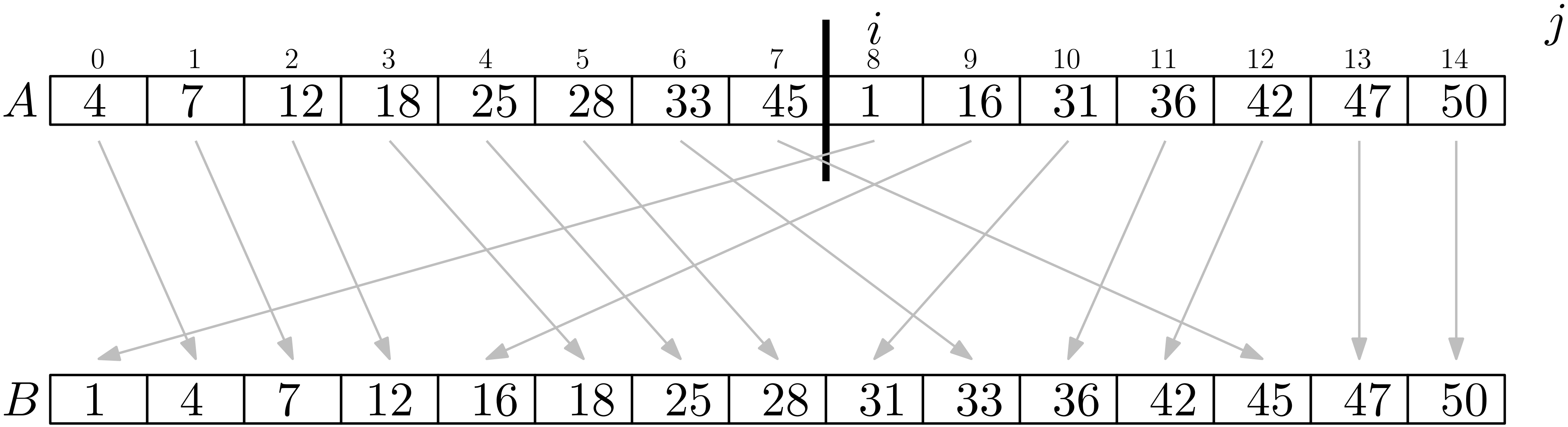
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

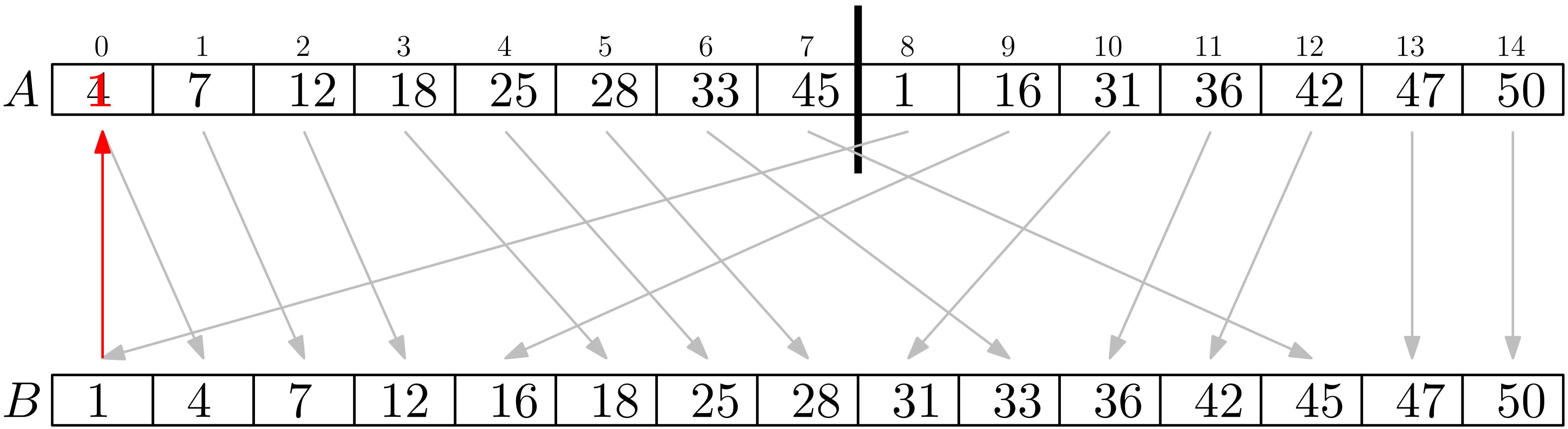
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

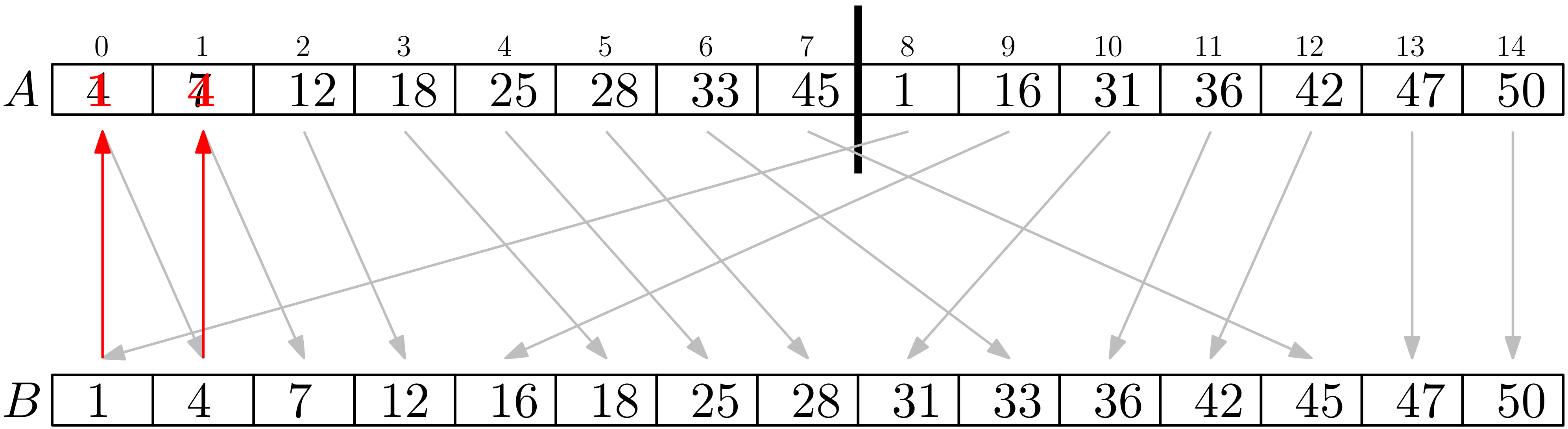
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

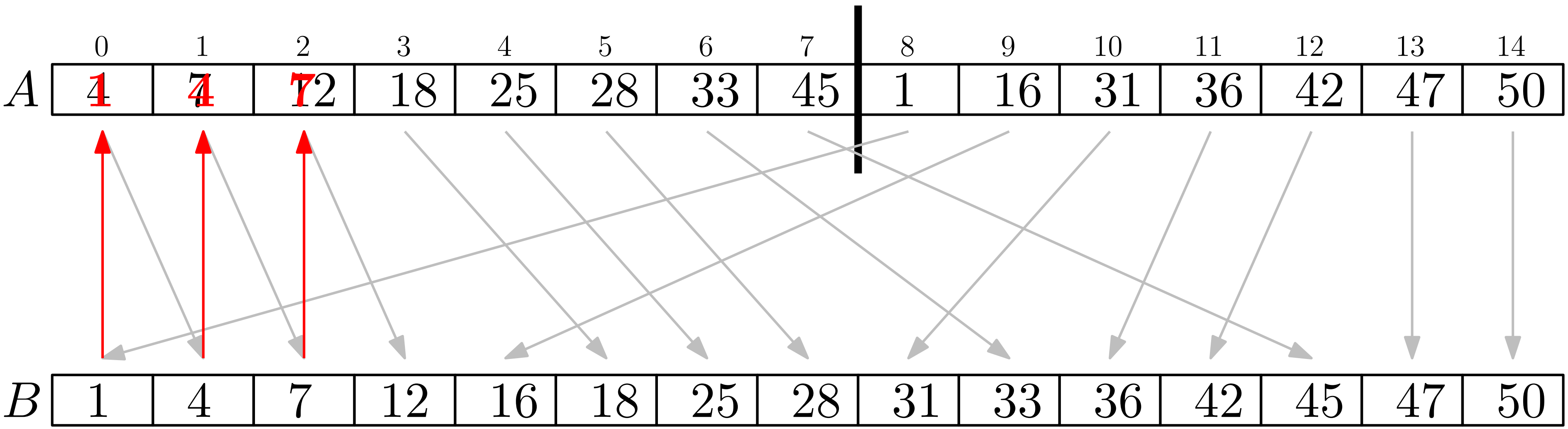
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

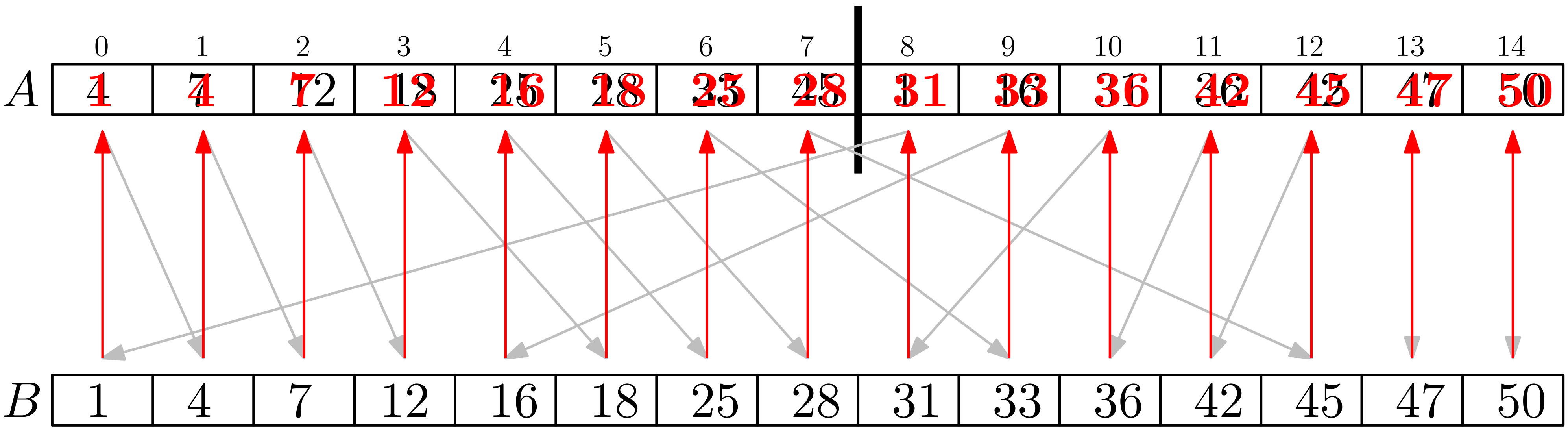
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

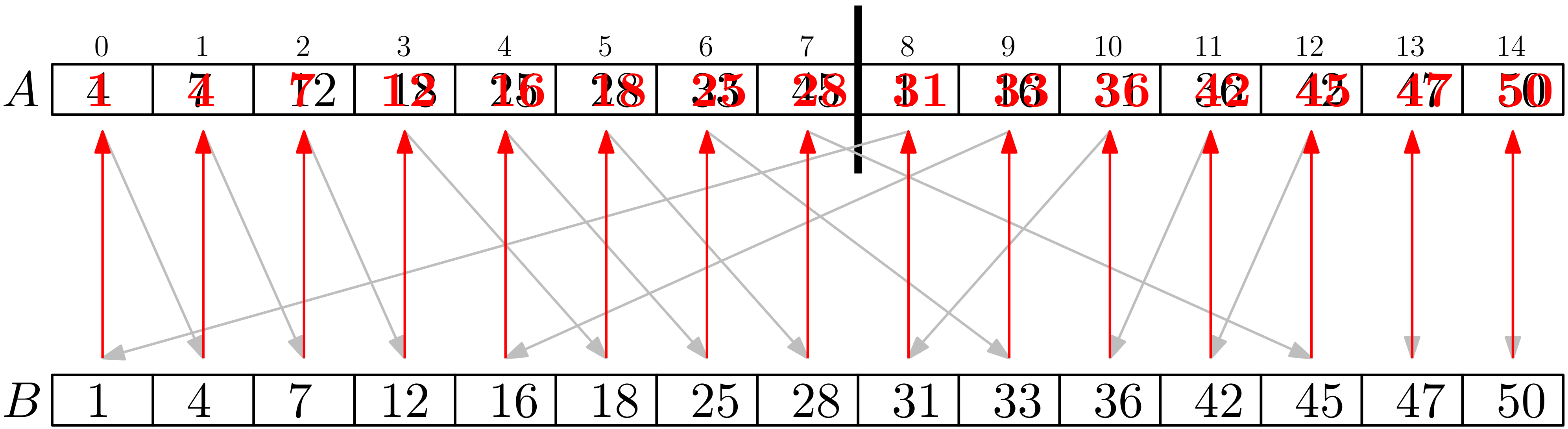
Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

NB: Lidt anderledes i CLRS: kopiér først halvdelene over i to andre arrays og merge tilbage i A.

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

```
Merge(A, p, q, r)
   let B be an array of size r − p + 1
   i = p
   j = q + 1
   for k = 0 to r − p
      if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
         B[k] = A[i]
         i = i + 1
      else
         B[k] = A[j]
         j = j + 1
   copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$
Ovenstående kald:
Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	i								j						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B															

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	i									j					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1														

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
    let B be an array of size r − p + 1
    i = p
    j = q + 1
    for k = 0 to r − p
        if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
            B[k] = A[i]
            i = i + 1
        else
            B[k] = A[j]
            j = j + 1
    copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

		i								j					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4													

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

			i							j					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4	7												

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
   let B be an array of size r − p + 1
   i = p
   j = q + 1
   for k = 0 to r − p
      if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
         B[k] = A[i]
         i = i + 1
      else
         B[k] = A[j]
         j = j + 1
   copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

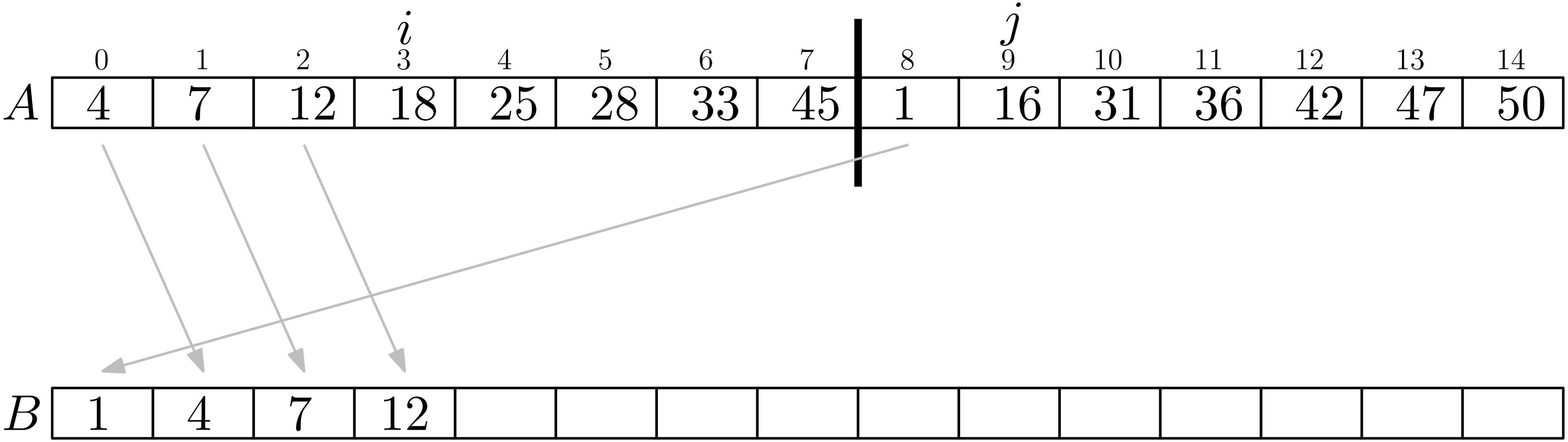
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or $(i \leq q$ and $A[i] \leq A[j])$
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \dots r]$

Venstre del: $A[p \dots q]$

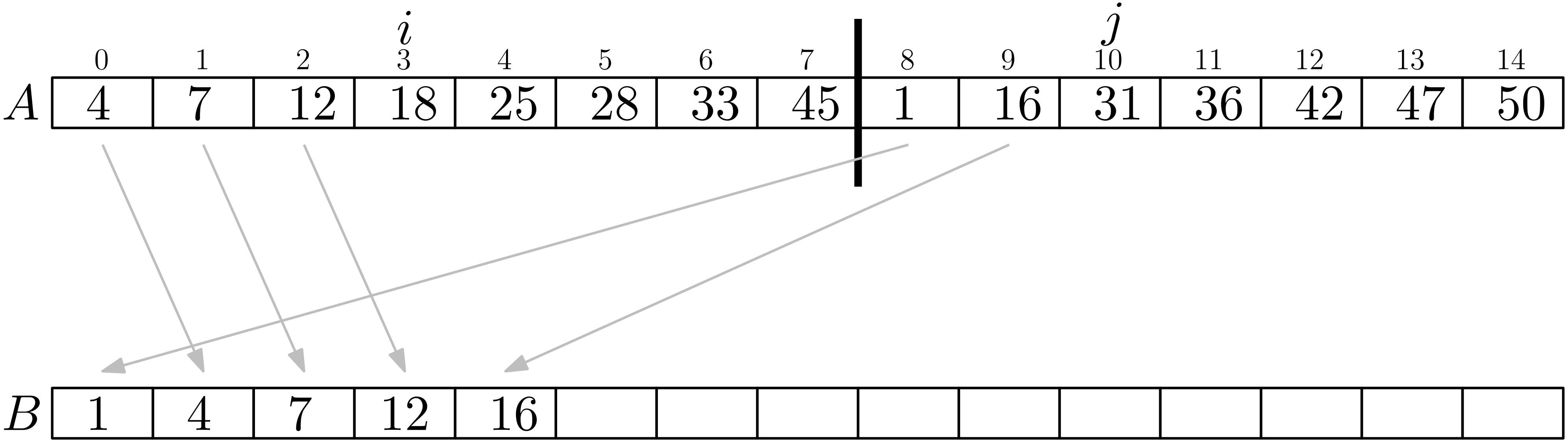
Højre del: $A[q + 1 \dots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
    let B be an array of size $r - p + 1$
    $i = p$
    $j = q + 1$
    for $k = 0$ to $r - p$
        if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
            $B[k] = A[i]$
            $i = i + 1$
        else
            $B[k] = A[j]$
            $j = j + 1$
    copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

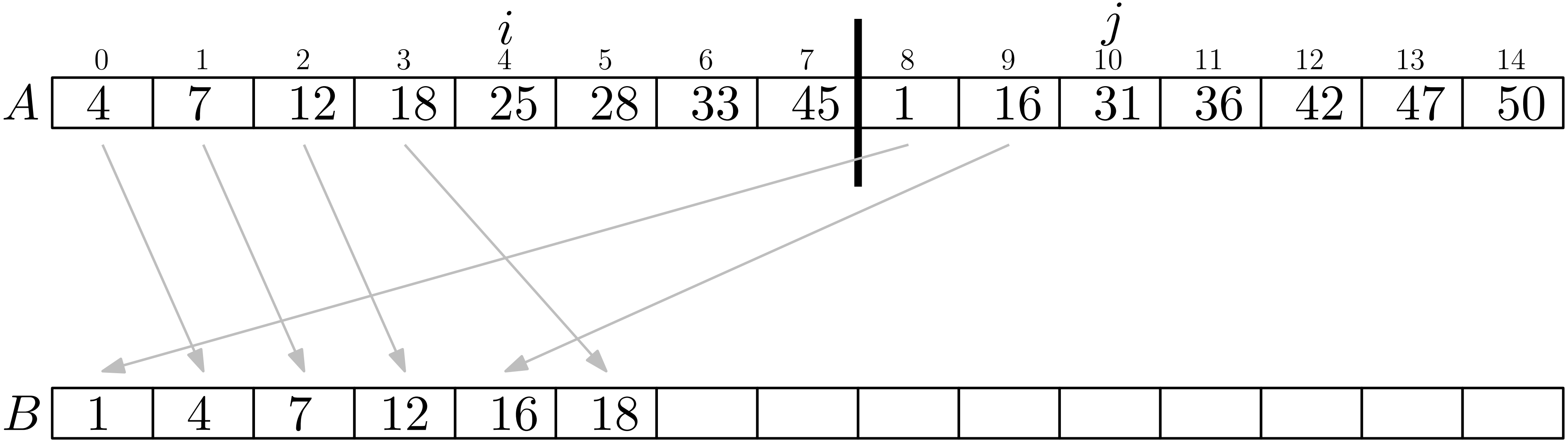
Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge($A, 0, 7, 14$)

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

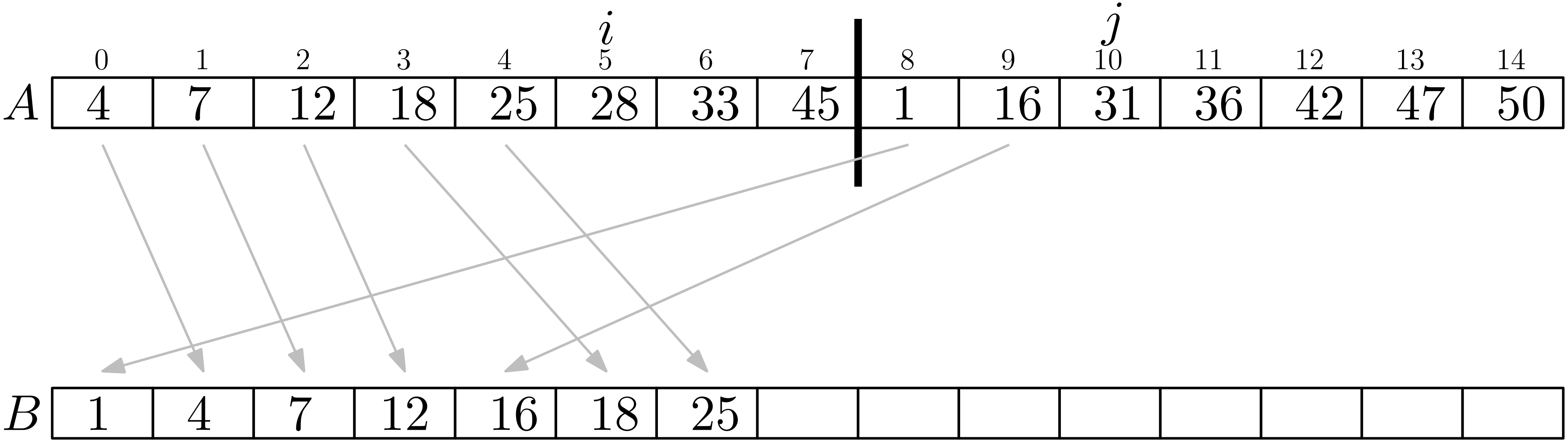
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge($A, 0, 7, 14$)

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6 (i)	7	8	9	10 (j)	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4	7	12	16	18	25	28							

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

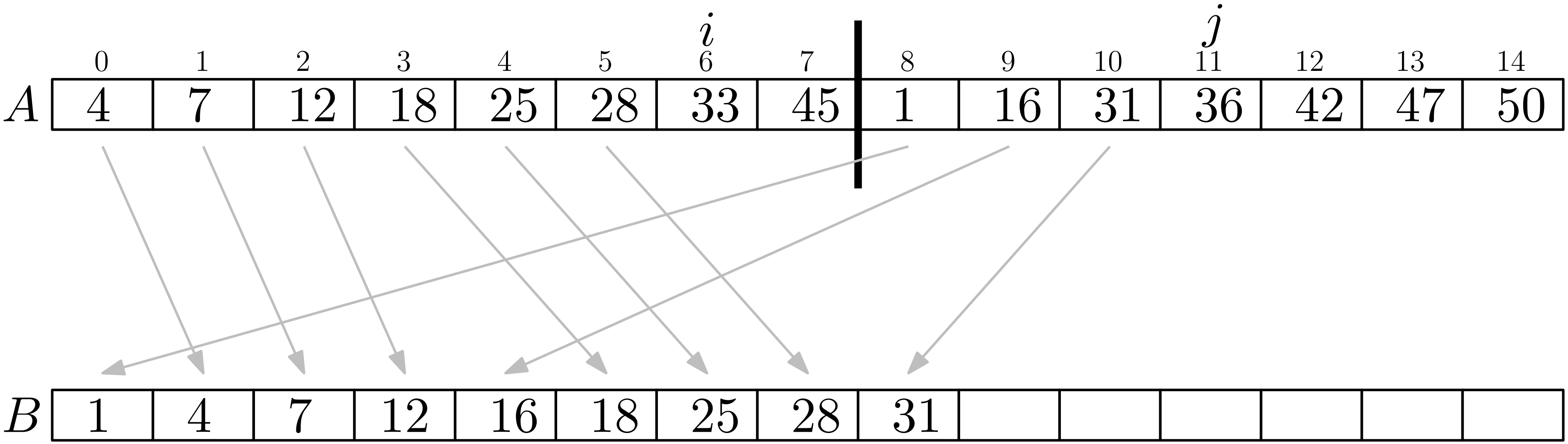
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge($A, 0, 7, 14$)

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6	7 (i)	8	9	10	11 (j)	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33					

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \dots q]$

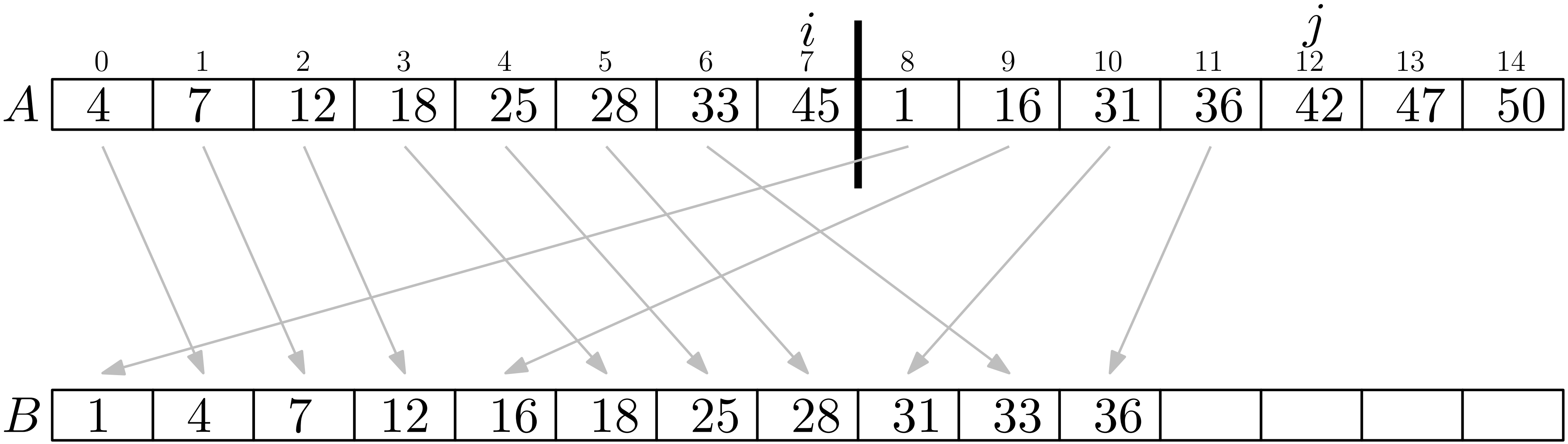
Højre del: $A[q+1 \dots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

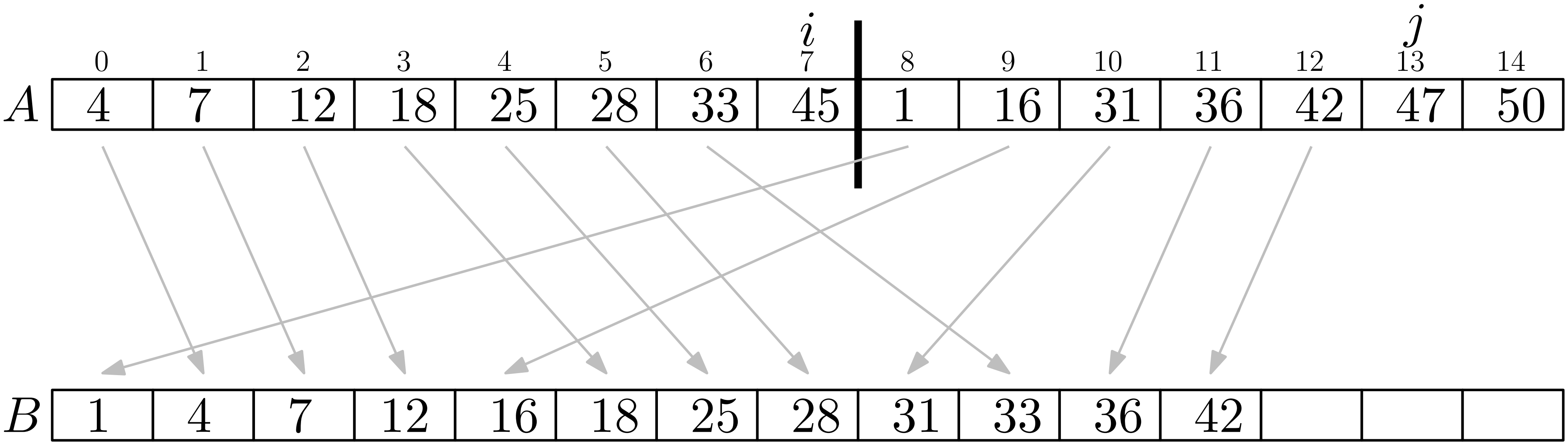
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

									i					j	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45		

Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
    let B be an array of size $r - p + 1$
    $i = p$
    $j = q + 1$
    for $k = 0$ to $r - p$
        if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
            $B[k] = A[i]$
            $i = i + 1$
        else
            $B[k] = A[j]$
            $j = j + 1$
    copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

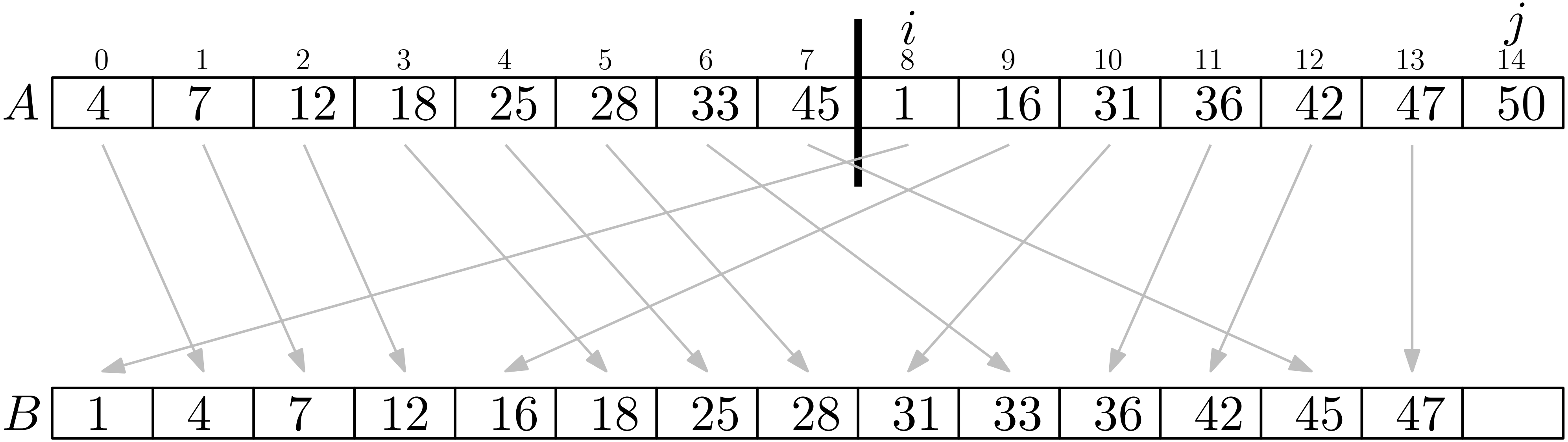
Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \dots q]$

Højre del: $A[q+1 \dots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

i (above index 8), j (after index 14)

B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p . . . r]
```

Venstre del: $A[p \dots q]$

Højre del: $A[q+1 \dots r]$

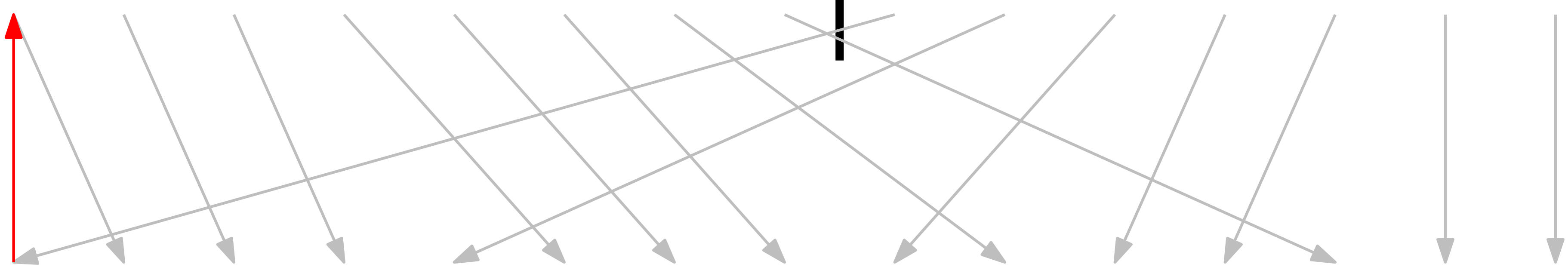
Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	~~4~~ 1	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50



B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p...r]
```

Venstre del: $A[p \ldots q]$

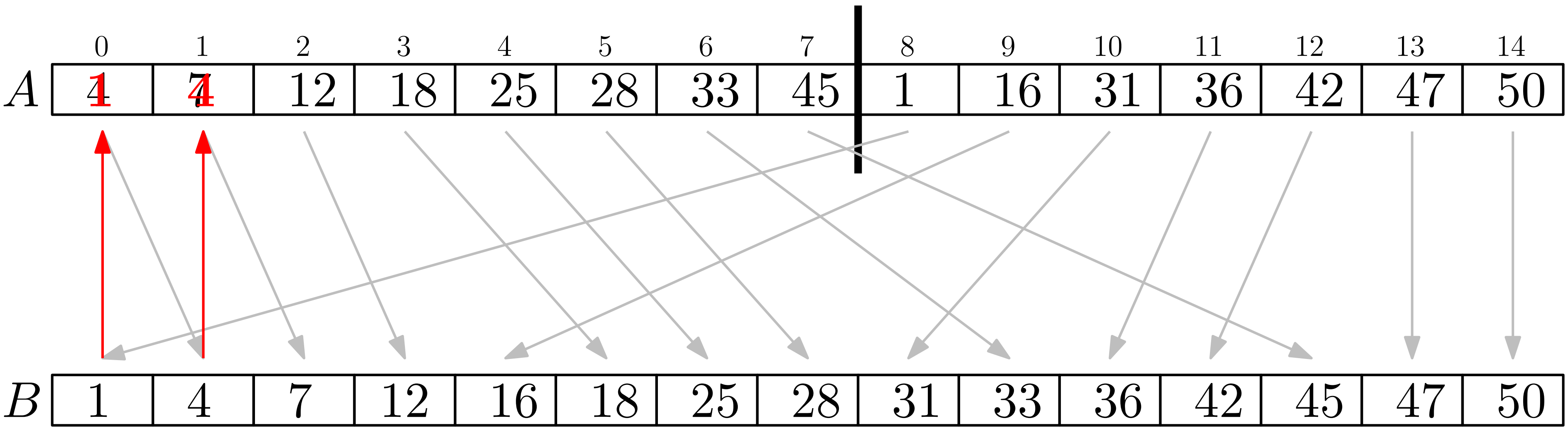
Højre del: $A[q+1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

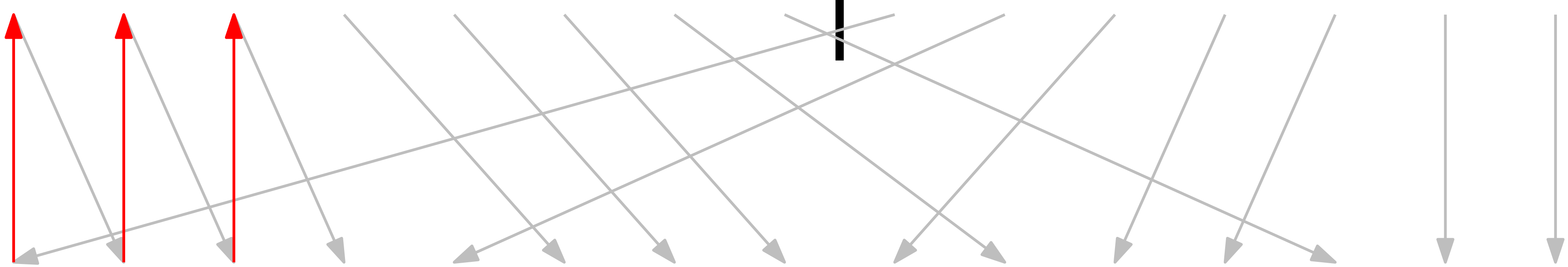
Ovenstående kald:

Merge($A, 0, 7, 14$)

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4 1	7 4	12 7	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50



B	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Nyt array B.

```
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size r − p + 1
  i = p
  j = q + 1
  for k = 0 to r − p
    if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
  copy B to A[p ... r]
```

Venstre del: $A[p \dots q]$

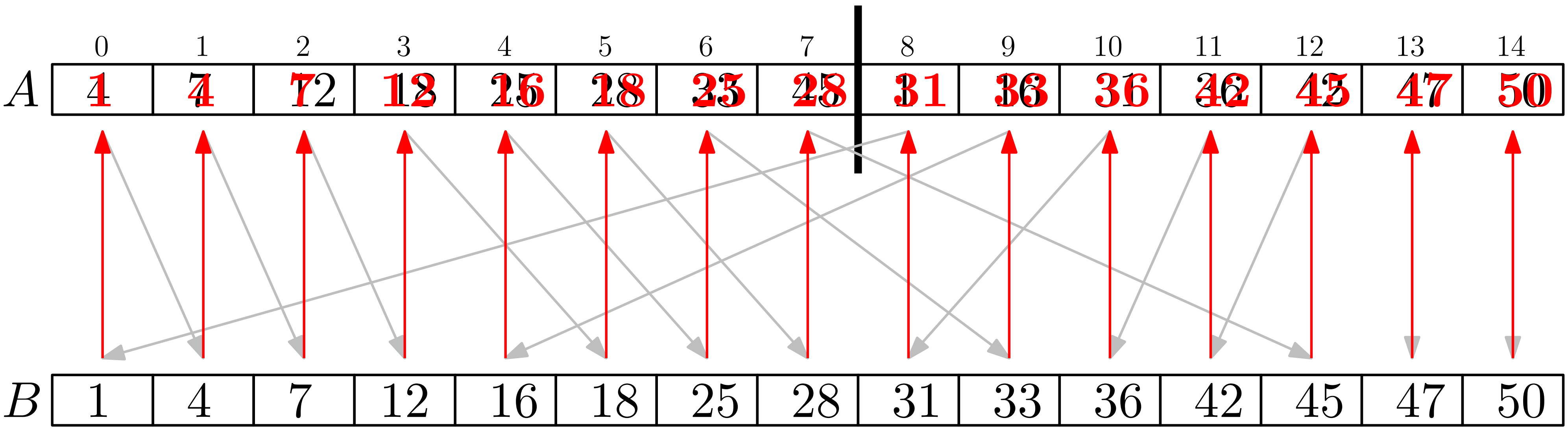
Højre del: $A[q+1 \dots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Merge sort

Antag hver halvdel af A er sorteret. Vi merger:



Nyt array B.

Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or ($i \leq q$ and $A[i] \leq A[j]$)
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \ldots r]$

Venstre del: $A[p \ldots q]$

Højre del: $A[q + 1 \ldots r]$

Ovenstående kald:

Merge$(A, 0, 7, 14)$

Køretid

```
Merge(A, p, q, r)
   let B be an array of size r − p + 1
   i = p
   j = q + 1
   for k = 0 to r − p
      if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
         B[k] = A[i]
         i = i + 1
      else
         B[k] = A[j]
         j = j + 1
   copy B to A[p . . . r]
```

Arbejde ved kald Merge$(A, 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1)$:

$n+1$ iterationer af for-løkke, hver konstant tid

n gange kopiering fra B til A

I alt: $\Theta(n)$ tid.

Køretid

```
Merge(A, p, q, r)
   let B be an array of size r − p + 1
   i = p
   j = q + 1
   for k = 0 to r − p
      if j > r or (i ≤ q and A[i] ≤ A[j])
         B[k] = A[i]
         i = i + 1
      else
         B[k] = A[j]
         j = j + 1
   copy B to A[p...r]
```

Arbejde ved kald Merge$(A, 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1)$:
$n+1$ iterationer af for-løkke, hver konstant tid
n gange kopiering fra B til A
I alt: $\Theta(n)$ tid.
Arbejde ved kald Merge(A, p, q, r):
$\Theta(n')$ tid, hvor $n' = r - p + 1$.

Merge Sort idé

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Merge Sort idé

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Merge Sort idé

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Sortér halvdele rekursivt

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

Merge Sort idé

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Sortér halvdele rekursivt

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

Merge

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Merge Sort idé

Merge-Sort(A, p, r)
  if $p < r$
    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$
    Merge-Sort(A, p, q)
    Merge-Sort$(A, q+1, p)$
    Merge(A, p, q, r)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	33	4	25	28	45	18	7	12	36	1	47	42	50	16	31

Sortér halvdele rekursivt

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	4	7	12	18	25	28	33	45	1	16	31	36	42	47	50

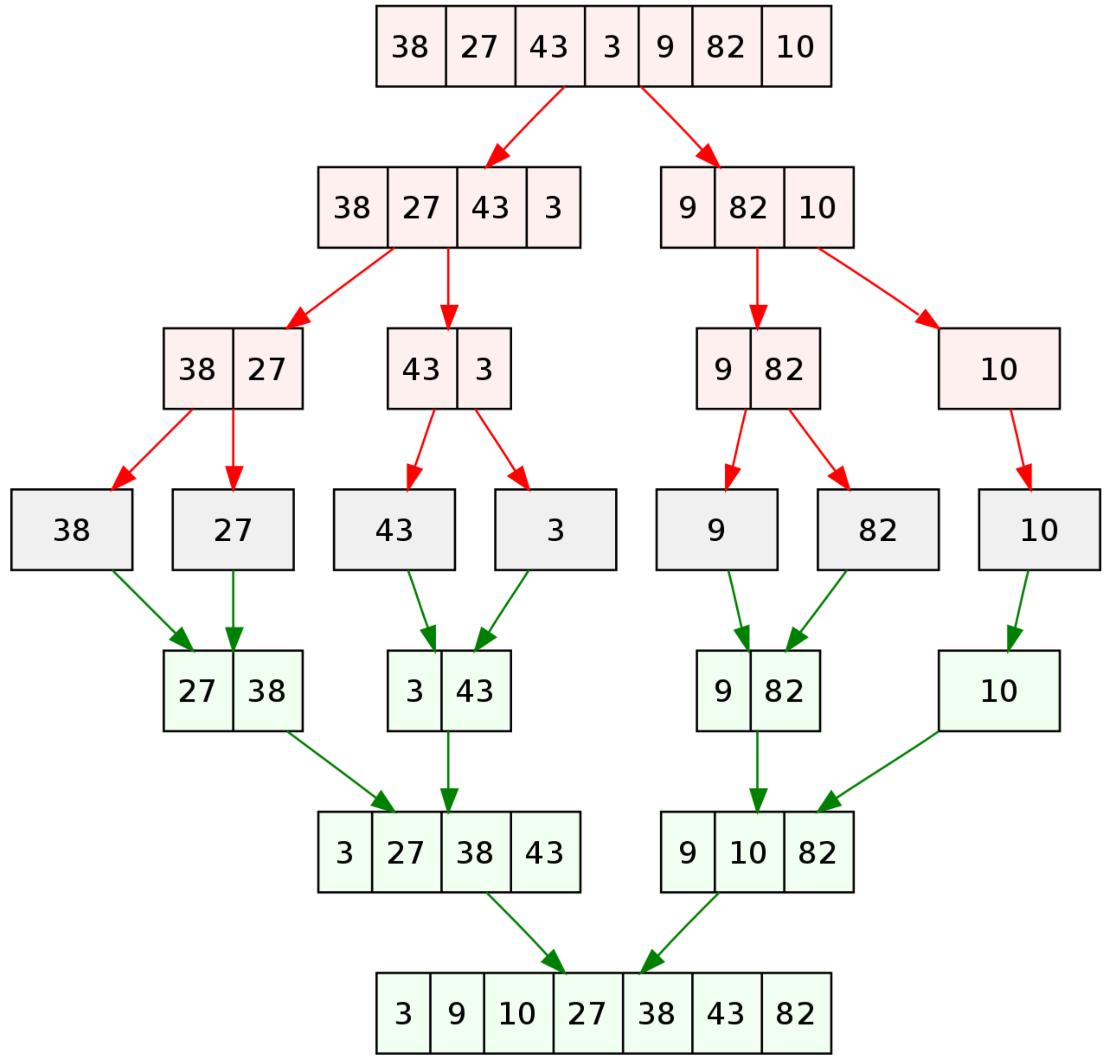
Merge

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	1	4	7	12	16	18	25	28	31	33	36	42	45	47	50

Eksempel

Merge-Sort(A, p, r)
  if $p < r$
    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$
    Merge-Sort(A, p, q)
    Merge-Sort$(A, q+1, p)$
    Merge(A, p, q, r)

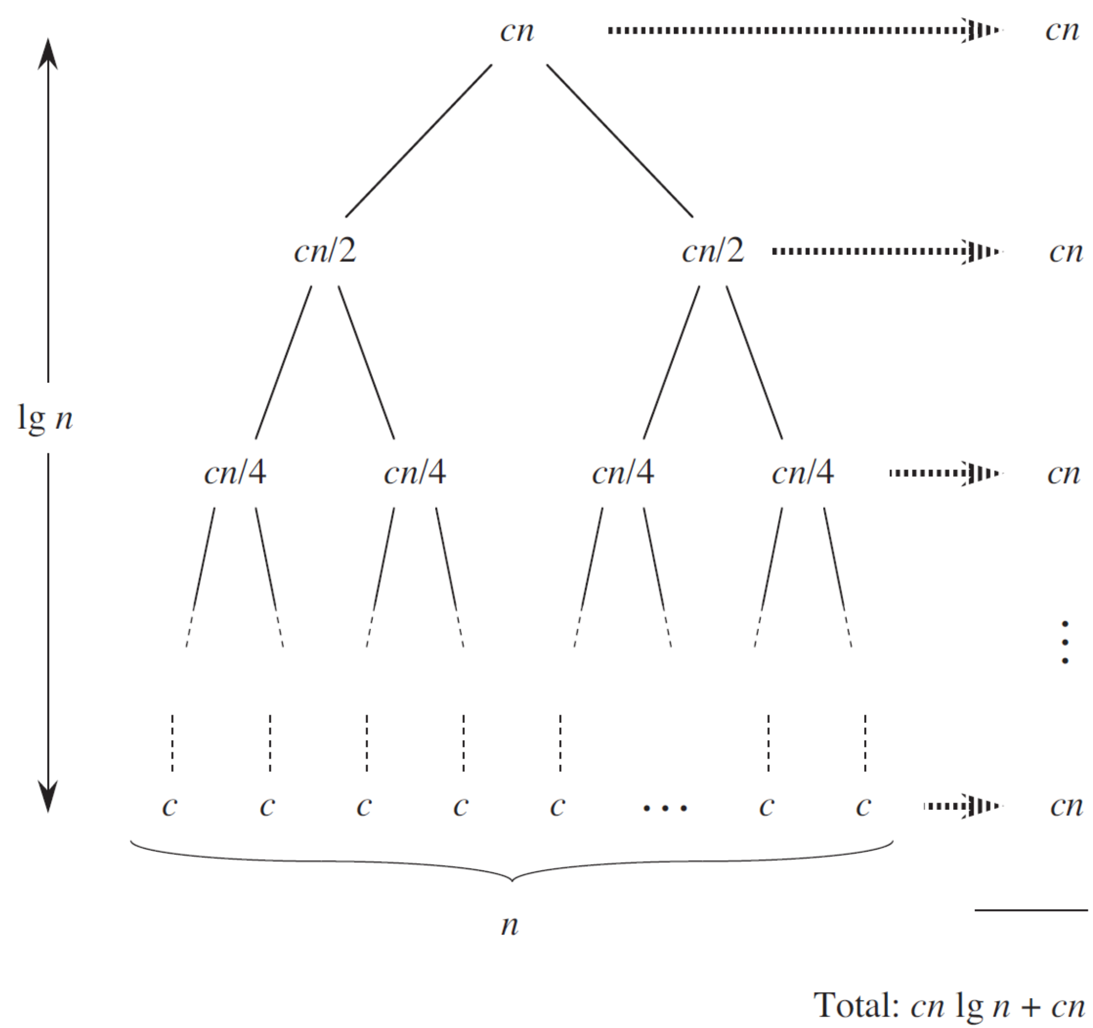
Merge(A, p, q, r)
  let B be an array of size $r - p + 1$
  $i = p$
  $j = q + 1$
  for $k = 0$ to $r - p$
    if $j > r$ or $(i \leq q$ and $A[i] \leq A[j])$
      $B[k] = A[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $B[k] = A[j]$
      $j = j + 1$
  copy B to $A[p \ldots r]$



Køretid

```
Merge-Sort(A, p, r)
  if p < r
    q = ⌊(p+r)/2⌋
    Merge-Sort(A, p, q)
    Merge-Sort(A, q + 1, p)
    Merge(A, p, q, r)
```

$$T(n) = \begin{cases} c, & n = 1 \\ 2T(n/2) + cn, & n > 1 \end{cases}$$



I alt: $T(n) = cn \lg n + cn$
$= \Theta(n \log n)$

Opsummering om sortering

Insertion sort: $\Theta(n^2)$ tid, kræver ikke ekstra plads.
Merge sort: $\Theta(n \log n)$ tid, kræver $\Theta(n)$ ekstra plads.

I DMA uge 4: Heap sort, bruger $\Theta(n \log n)$ tid, kræver ikke ekstra plads.
I DMA uge 6: Ikke muligt at komme under $\Theta(n \log n)$ tid hvis man kun må deducere vha. sammenligninger. Vi skal se på andre sorteringsalgoritmer som kommer under vha. smarte "snydetricks".

Hvorfor er asymptotisk køretid så praktisk?

Antag S1(A, n) og S2(A, n) begge sorterer array A af længde n.
S1 har køretid $T_1(n) = n^2$ og S2 har køretid $T_2(n) = 100 \cdot n \log_2 n$.
$T_1(n) = \Theta(n^2)$ og $T_2(n) = \Theta(n \log n)$.

Hvorfor er asymptotisk køretid så praktisk?

Antag S1(A, n) og S2(A, n) begge sorterer array A af længde n.
S1 har køretid $T_1(n) = n^2$ og S2 har køretid $T_2(n) = 100 \cdot n \log_2 n$.
$T_1(n) = \Theta(n^2)$ og $T_2(n) = \Theta(n \log n)$.

$n = 100$: $T_1(100) = 10000$ og $T_2(100) \approx 66400$, så

$$\frac{T_1(100)}{T_2(100)} \approx 0.15.$$

Hvorfor er asymptotisk køretid så praktisk?

Antag S1(A, n) og S2(A, n) begge sorterer array A af længde n.
S1 har køretid $T_1(n) = n^2$ og S2 har køretid $T_2(n) = 100 \cdot n \log_2 n$.
$T_1(n) = \Theta(n^2)$ og $T_2(n) = \Theta(n \log n)$.

$n = 100$: $T_1(100) = 10000$ og $T_2(100) \approx 66400$, så

$$\frac{T_1(100)}{T_2(100)} \approx 0.15.$$

$n = 5.8 \cdot 10^6$: $T_1(5.8 \cdot 10^6) \approx 3.4 \cdot 10^{13}$ og $T_2(5.8 \cdot 10^6) \approx 1.3 \cdot 10^{10}$, så

$$\frac{T_1(5.8 \cdot 10^6)}{T_2(5.8 \cdot 10^6)} \approx 2600.$$

Hvorfor er vi ligeglade med konstanter?

Hvis køretiden er $T(n) = 100n \log n$ skriver vi $T(n) = \Theta(n \log n)$.
Vi igorerer konstanten 100 fordi:

- Konstanten afhænger af præcis hvordan vi tæller skridt.
- I praksis er det forskelligt hvor lang tid de basale skridt tager.
- Når n bliver stor er det vigtigste den asymptotiske opførsel.
- "Will this scale?"
- Derfor ignorerer vi også langsomt voksende led.

Hvorfor er vi ligeglade med konstanter?

Hvis køretiden er $T(n) = 100n \log n$ skriver vi $T(n) = \Theta(n \log n)$.
Vi igorerer konstanten 100 fordi:

- Konstanten afhænger af præcis hvordan vi tæller skridt.
- I praksis er det forskelligt hvor lang tid de basale skridt tager.
- Når n bliver stor er det vigtigste den asymptotiske opførsel.
- “Will this scale?”
- Derfor ignorerer vi også langsomt voksende led.

P.S:

- I praksis kan vi ikke ignorere astronomiske konstanter.
- En asymptotisk langsommere algoritme kan foretrækkes hvis
  - n aldrig bliver meget stor, eller
  - den langsommere algoritme er meget simplere og hurtig nok.
- To algoritmer med samme asymp. køretid behøver ikke være lige gode.

Θ, Ω og O

Vi skriver:

- $T(n) = \Omega(n \log n)$ hvis

  vi underdriver

  $$c_1 \cdot n \log n \leq T(n)$$

  for en konstant $c_1 > 0$.
- $T(n) = O(n \log n)$ hvis

  vi overdriver

  $$T(n) \leq c_2 \cdot n \log n$$

  for en konstant $c_2 > 0$.
- $T(n) = \Theta(n \log n)$ hvis

  vi er præcise

  $$c_1 \cdot n \log n \leq T(n) \leq c_2 \cdot n \log n$$

  for konstanter $c_1, c_2 > 0$, dvs. $T(n) = \Omega(n \log n)$ og $T(n) = O(n \log n)$.

Skal gælde for alle store n. I praksis $n \geq 2$.