# Projekt A

Aditya Fadhillah (hjg708) - Hold 1

May 10, 2022

# 1

## 1.a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] -\frac{a}{2}r_1 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] -\frac{a}{2}r_1 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \tag{1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 2-a & \frac{3a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2-a & \frac{3a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] \frac{1}{(2-a)}r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{2(2-a)} & \frac{1-\frac{a^2}{2}}{2-a} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] \frac{2}{(8-a)}r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{2(2-a)} & \frac{1-\frac{a^2}{2}}{2-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(1-\frac{a^2}{2})}{8-a} \end{array}\right] -\frac{3a}{(4-2a)}r_3 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-\frac{a^2}{2}}{2-a} - \frac{6a(1-\frac{a^2}{2})}{(4-2a)(8-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(1-\frac{a^2}{2})}{8-a} \end{array}\right] \tag{4}$$

## 1.b

Hvad er løsningen til ligningssystemet når $a = 8$ ?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{2}r_1 = r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right] -8r_1 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right] -8r_1 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & -6 & 12 & -31 \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \tag{6}$$

Der er ikke noget løsning til ligningssystemet når a = 8. Dette skyldes at en nulrække kan ikke give andre resultat end 0. Hvis man ser på Rank af totalmatricen og koefficientmatricen, vil man se at Rank $A <$ Rank $M$. Og når Rank $A <$ Rank $M$ gælder, betyder det at der ikke er noget løsning til et ligningssystem.

## 1.c

Hvad er løsningen til ligningssystemet når a = 2 ?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] -r_2 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -r_1 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}r_1 = r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{3}r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{8}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{2}r_2 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

Her ser man at række $n$ er større end Rank $A$. Det betyder at der er uendelige mange løsninger til ligningssystemet når $a = 2$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Hvilke betyder at $x_1, x_2, x_3$ er:

$$x_1 = \frac{7}{6} - t\,, \qquad x_2 = t\,, \qquad x_3 = -\frac{1}{3} \tag{11}$$

Det oplyses, at den reducerede rækkeechelonform af totalmatricen, for $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$, er givet ved.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2a^2+4a-5}{a-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(a^2-2)}{a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2-2}{a-8} \end{array}\right] \tag{12}$$

Jeg vil gerne se om man kan bruge den reducerede rækkeechelonform af totalmatricen til at finde løsninger til ligningssystemet når $a = 2$. Vi sætter så $a = 2$ ind på den givet reducerede rækkeechelonform af totalmatricen.
$x_1 = -\frac{2\cdot 2^2+4\cdot 2-5}{2-8} = \frac{11}{6}$
$x_2 = \frac{2(2^2-2)}{2-8} = -\frac{4}{6}$
$x_3 = \frac{2^2-2}{2-8} = -\frac{2}{6}$

Den tidligere definition af $x_1$ siger at $x_1 = \frac{7}{6} - t$. Vi sætter $x_2$ ind på $t$s plads for at som det giver det samme som den reducerede rækkeechelonform.
$x_1 = \frac{7}{6} - (-\frac{4}{6}) = \frac{11}{6}$
$x_2 = -\frac{4}{6}$
$x_3 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$
Her ser man at resultatet er det samme. Dvs. ved brug af den rækkereducerede totalmatrix kan man finde en løsning til $a = 2$. Men man kan dog ikke finde alle løsninger til ligningssystemet med den.

## 1.d

Antag, at $a = 0$. Bestem den inverse matrix til koefficientmatricen $A$ for ligningssystemet, og udregn

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Vi finder først den inverse matrix til koefficientmatricen $A$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Jeg danner så en totalmatrix ud fra de tre ligningssytemer der fremkommer ud fra udsagnet ovenover. Jeg rækkereducerede derefter totalmatricen.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}r_2 = r_2 \rightsquigarrow \tag{15}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{4} r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] - 2r_2 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \tag{16}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] - r_3 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2} r_1 = r_1 \rightsquigarrow \tag{17}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

Den inverse matrix til koefficientmatrix $A$ er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Jeg beregne så $A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Dvs. $A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

# 2

## 2.a

I en invertible $n$ x $n$ matrix, der har rank $A = n$ og elementære matricer $E_1, E_2, ..., E_k$, som svarer til sekvenser af rækkeoperationer ERO, som ændrer $A$ til $I_n$. Vil det gælde at :

$$E_k E_{k-1} ... E_2 E_1 A = I_n \tag{21}$$

Dette gælde fordi i en $n$ x $n$ matrix, vil den inverse af $A$ vil blive givet som produkt af elementære matricer:

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} ... E_2 E_1 \tag{22}$$

Og produktet når man ganger $A$ med dens inverse $A^{-1}$ vil være enhedsmatricen $I_n$.

$$A^{-1} A = I_n \tag{23}$$

Dette må betyde at matrixproduktet $E_4 E_3 E_2 E_1 A$ er enhedsmatricen.
Da matrixen er en $n$ x $n$ matrix vil den både have en venstre- og højre inverse, og de to inverse vil være det samme matrix. Altså;

$$A^{-1} A = A A^{-1} \tag{24}$$

Dvs. matrixproduktet $A E_4 E_3 E_2 E_1$ er også enhedsmatricen.

### 2.b

Bestem for hvert $i = 1, 2, 3, 4$ den elementære matrix $E_i^{-1}$ og brug disse til at bestemme $A$.

I en $n$ x $n$ matrix, vil den inverse af $A$ vil blive givet som produkt af elementære matricer:

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} ... E_2 E_1 \tag{25}$$

Og da det er en invertibel matrix, må det gælde:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} \tag{26}$$

Jeg skal derfor finde den inverse af hvert $i = 1, 2, 3, 4$ den elementære matrix $E_i$.

$$E_1 E_1^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] 3r_1 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{27}$$

$$E_2 E_2^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - \frac{1}{3} r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \tag{28}$$

$$E_3 E_3^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{29}$$

$$E_4 E_4^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - 5r_3 + r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{30}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Jeg sætter derefter de inverse elementære matricer ind på $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$E_3^{-1} E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$E_2^{-1}(E_3^{-1} E_4^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$E_1^{-1}(E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Dvs. $A$ er $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

## 2.c

Lad $X$ bestå af række nummer to og tre i matricen $E_4E_3E_2E_1$ og sæt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

For at vise at $X$ er en venstre-invers til $B$. Kan man gange $X$ og $B$ Med hinanden for at se om de giver enhedsmatricen.

$$XB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Så $XB$ giver enhedsmatricen, dvs. at $X$ er en venstre-invers til $B$. For at bestem alle venstre-inverse til B. Kan man anvende lineær system. For at finde alle venstre-inverse lad jeg $X$ være en 2 x 3 matrix med ukendte værdier.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Dvs. $B$ ganger med $X$ vil give;

$$XB = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 & -5x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 + 3x_5 & -5x_5 - \frac{1}{3}x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Vi kan derefter bruge disse variabler i en 4 x 6 lineær system;

$$(S) \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ -5x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \\ -5x_5 - \dfrac{1}{3}x_6 = 1 \end{cases} \tag{40}$$

Jeg laver så en augmenteret matrix for $(S)$. Som jeg derefter reducerer.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] - \frac{1}{5}r_2 = r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] - 3r_2 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \tag{41}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] - \frac{1}{5}r_4 = r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] - 3r_4 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \tag{42}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Hvilke betyder at $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ er;

$$x_1 = 1 + \frac{1}{5}t\,, \qquad x_2 = -\frac{1}{15}t\,, \qquad x_3 = t\,, \qquad x_4 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}u\,, \qquad x_5 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u\,, \qquad x_6 = u \tag{45}$$

Det betyder at matricen $X$ vi se ud som følge:

$$X = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{5}t & -\frac{1}{15}t & t \\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}u & -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u & u \end{bmatrix} \tag{46}$$

Man ganger så matrix $B$ med matrix $X$ for at se om det giver enhedsmatricen.

$$XB = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{5}t & -\frac{1}{15}t & t \\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}u & -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u & u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$x_1 \quad = \quad 1 \cdot (1 + \frac{1}{5}t) + 3 \cdot (-\frac{1}{15}t) + 0 \cdot t \quad = \quad 1 + \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}t \quad = \quad 1 \tag{48}$$

$$x_2 \quad = \quad 0 \cdot (1 + \frac{1}{5}t) + (-5) \cdot (-\frac{1}{15}t) + (-\frac{1}{3}) \cdot t \quad = \quad \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t \quad = \quad 0 \tag{49}$$

$$x_3 \quad = \quad 1 \cdot (\frac{3}{5} + \frac{1}{5}u) + 3 \cdot (-\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u) + 0 \cdot u \quad = \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5}u - \frac{3}{5} - \frac{1}{5}u \quad = \quad 0 \tag{50}$$

$$x_3 \quad = \quad 0 \cdot (\frac{3}{5} + \frac{1}{5}u) + (-5) \cdot (-\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u) + (-\frac{1}{3}) \cdot u \quad = \quad 1\frac{1}{3}u - \frac{1}{3}u \quad = \quad 1 \tag{51}$$

$$XB = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{5}t & -\frac{1}{15}t & t \\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}u & -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

De to matricer ganges med hinanden giver enhedsmatricen, dette betyder at der er uendelige mange venstre inverse for matricen $B$.

Matricen $B$ har dog ikke en højre inverse. Kun en n x n matrix kan både have en venstre- og højre inverse. Men da matrix $B$ er en n x m matrix kan den kun have en inverse. I den her tilfælde har matrix $B$ venstre invers, og ikke en højre invers.

# 3

## 3.a

Bestem nabomatricen (eng. adjacency matrix) $N$ for denne orienterede graf. Angiv antallet af veje fra knude 4 til knude 1 af længde netop 5. Det oplyses, at

$$N^4 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$N^4$ er et matrix der angiver antallet af veje fra en knude til en anden af længden netop 4. Så for at finde antallet af veje fra knude 4 til knude 1 af længde netop 5, skal man først finde $N^5$. $N^5$ fås ved at gange $N^4$ med $N$.

$$N^5 = NN^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 13 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 17 & 5 & 17 & 7 & 7 \\ 9 & 2 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Dvs. $N^5 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 13 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 17 & 5 & 17 & 7 & 7 \\ 9 & 2 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.
Og ud fra matricen kan man aflæse at antallet af veje fra knude 4 til knude 1 af længden 5 er 17 veje.

## 3.b

Opskriv linkmatricen $A$ for grafen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

## 3.c

Bestem en vektor $x \neq 0$ som opfylder ligningen $Ax = x$ og foretag på grundlag af dette en rangordning af siderne i webbet.

$$Ax = x \tag{56}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right] 4r_n = r_n \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] - 1r_1 = r_1 \rightsquigarrow \tag{58}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] - \frac{1}{2}r_1 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] - \frac{1}{2}r_1 + r_4 = r_4 \rightsquigarrow \tag{59}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] -1 * r_2 = r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{2} r_2 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \tag{60}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{2} r_2 + r_5 = r_5 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 0 \end{array}\right] -2 \cdot r_3 = r_3 \rightsquigarrow \tag{61}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 0 \end{array}\right] r_3 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{2} r_3 + r_4 = r_4 \rightsquigarrow \tag{62}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 0 \end{array}\right] r_4 + r_5 = r_5 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{4} r_n = r_n \rightsquigarrow \tag{63}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\frac{8}{3} r_4 = r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{5}{4} r_4 + r_1 = r_1 \rightsquigarrow \tag{64}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{4} r_4 + r_2 = r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] r_4 + r_3 = r_3 \rightsquigarrow \tag{65}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{66}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{25}{6} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$x_1 = \frac{16}{3}t\,, \quad x_2 = \frac{2}{3}t\,, \quad x_3 = \frac{25}{6}t\,, \quad x_4 = \frac{8}{3}t \quad og \quad x_5 = t \tag{68}$$

$$\text{Side } 1 : \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}, \quad \text{Side } 2 : \frac{2}{3}, \quad \text{Side } 3 : \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}, \quad \text{Side } 4 : \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}, \quad \text{Side } 5 : 1 \tag{69}$$

Rangordning af siderne i webbet:
1. Side 1
2. Side 3
3. Side 4
4. Side 5
5. Side 2