דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

חלק 1 - קבוצות של מספרים ממשיים

לחלק זה מצורפים פתרונות בודדים לדוגמה, אפשר לפנות לשאלות נוספות לסגל בשעות ייעוץ ובשעות תמיכה

i. **טבעיים** $\boldsymbol{N=\{1,2,3,\cdots\}}$

ii. **שלמים** $\boldsymbol{Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}}$

iii. **רציונאליים** $\boldsymbol{Q=\left\{\frac{m}{n}/\ \text{שלמים}\ m,n\ \text{וגם}\ n\neq 0\right\}}$

iv. **אי-רציונאליים כל המספרים הממשיים שאינם ב-** $\boldsymbol{Q}$.

הערה: בהרצאה ראינו כי $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי.

תרגיל1: נתונה קבוצה $A=\{2n\ :\ \text{מספר שלם}\ n\}$. **קבוצה זו נקראת קבוצת המספרים הזוגיים**. הראה כי

(1) סכום/הפרש של כל שני איברים מתוך A גם הוא איבר בקבוצה A

(2) מכפלת שני מספרים של A גם היא איבר ב-A

(3) לכל n טבעי ואיבר a של A גם a^n איבר ב- A.

(4) קיימים שני איברים ב- A שהמנה שלהם אינה איבר ב- A.

תרגיל2: נתון כי r,q הם שני מספרים רציונאליים ואילו a מספר ממשי אי-רציונאלי. הוכח כי

(1) $r\pm q$ מספר רציונאלי

(2) $r\cdot q$ מספר רציונאלי

(3) אם $q\neq 0$ אז $\frac{r}{q}$ מספר רציונאלי

(4) $a\pm q$ מספר אי-רציונאלי

(5) אם $q\neq 0$ אז $a\cdot q$ מספר אי-רציונאלי

(6) אם $q\neq 0$ אז $\frac{r}{q}$ מספר רציונאלי

תרגיל3: נתונה קבוצה $A=\{n\sqrt{2}\ :\ \text{מספר טבעי}\ n\}$ הראה כי

(1) בקבוצה A אין מספרים רציונאליים

(2) סכום/הפרש של כל שני מספרים מתוך A גם הוא איבר בקבוצה A

(3) מכפלת שני מספרים של A הינה מספר אינה איבר של הקבוצה A

תרגיל4: נתונה קבוצה $A=\{p+q\sqrt{2}\ :\ \text{מספים רציונאליים}\ p,q\}$ הראה כי

(1) סכום/הפרש של כל שני מספרים מתוך A גם איבר בקבוצה A

(2) מכפלת שני מספרים של A גם איבר בקבוצה A

(3) אם $p^2+q^2\neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

פתרונות נבחרים של חלק א:

תרגיל 3 (1) :

נתונה קבוצה $\{n$ מספר טבעי $: \; n\sqrt{2}\} = A$ הראה כי בקבוצה A אין מספרים רציונאליים.

פתרון:

נניח בשלילה כי קיים ב-A איבר $a = n\sqrt{2} \;\; (n \in N)$ שהוא רציונאלי. אז קיימים שני מספרים שלמים m, k כך ש- $k \neq 0$ ו- $a = \frac{m}{k}$.

מסקנה: $n\sqrt{2} = \frac{m}{k}$, כלומר, $\sqrt{2} = \frac{m}{kn}$. כיוון שבמכנה המספר kn שלם , יוצא שלפי הגדרה $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי (מנה של שני שלמים), בסתירה למשפט שהוכחנו (בכיתה).

לכן הנחת השלילה אינה נכונה, מה שאומר שאין בקבוצה A מספרים רציונאליים.

תרגיל 4 (3):

נתונה קבוצה $\{p, q$ מספים רציונאליים $: \; p + q\sqrt{2}\} = A$ הראה כי אם $p^2 + q^2 \neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A.

פתרון:

כדי להראות ש- $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ הוא איבר של A , צריך למצוא שני מספרים רציונאליים a, b כך שתתקיים המשוואה $\frac{1}{p+q\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$. נפתור את המשוואה הזו.

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(p + q\sqrt{2}\right) = 1$$

$$ap + 2bq + (aq + bp)\sqrt{2} = 1$$

כיוון ש- 1 הוא מספר רציונאלי, המשוואה מתקיימת אם ורק אם

$$\begin{cases} ap + 2bq = 1 \\ aq + bp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} apq + 2bq^2 = 1 \\ aqp + bp^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bq^2 - bp^2 = 1 \\ aq + bp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2q^2 - p^2} \\ a = -\dfrac{p}{q} \cdot b = -\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{1}{2q^2 - p^2} \end{cases}$$

נתון ש– p, q מספים רציונאליים , כדי שגם a, b יהיו רציונאליים, מספיק להראות ש-המכנה $2q^2 - p^2$ הינו מספר שונה מאפס. מה הם המקרים בהם $2q^2 - p^2 = 0$? זה קורה בשני מקרים:

1. $2q^2 = p^2 = 0$ בסתירה לנתון ש- $p^2 + q^2 \neq 0$
2. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, כלומר $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי (לפי תרגיל 2 (3) למעלה), מה שאינו נכון (הוכחנו בכיתה).

לכן קיימים a, b רציונאליים כך ש- $\frac{1}{p+q\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$, ומכאן שאם $p^2 + q^2 \neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A.

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

חלק 2 – חסמים וקבוצות חסומות (תשובות ופתרונות מלאים בעמוד הבא)

א. נתונה הקבוצה $A=\left\{x\in R\middle|\ \frac{x-1}{x+2}\le 0\right\}$.

הוכח לפי הגדרות מתאימות כי

$\max A=1$, $m=-2$ הוא אינפימום של A, $\min A$ לא קיים.

ב. נתונה הקבוצה $A=\left\{x\in R\middle|x=\frac{(-1)^n}{n},\ n\in N\right\}$

- בדוק האם הקבוצה חסומה
- מצא המינימום, המקסימום, סופרמום ואינפימום של A , באם הם קיימים. נמק.

ג. נתונה הקבוצה $A=\left\{x\in R\middle|\ x=(-1)^n+\frac{n}{n+1},\ n\in N\right\}$

- בדוק האם הקבוצה חסומה
- מצא את המינימום, המקסימום, סופרמום ואינפימום של A , באם הם קיימים. נמק.

ד. $A=\left\{x\in R\middle|\ x=\frac{1}{n}+\cos(\pi n),\ n\in N\right\}$

- בדוק האם הקבוצה חסומה
- מצא את המינימום, המקסימום, סופרמום ואינפימום של A , באם הם קיימים. נמק.

ה. נתונה קבוצה: $A=\{x\in Q\ \mid\ 0<x<1\ \}$

- בדוק האם הקבוצה חסומה
- מצא את המינימום, המקסימום, סופרמום ואינפימום של A , באם הם קיימים. נמק.

ו. תהי נתונה קבוצה $A=\{a_n/n\in N\}$ כאשר $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.

- הוכח כי $m=1$ הוא המינימום של הקבוצה A.
- הוכח כי $M=2$ הוא חסם מלעיל של קבוצה A ואין ל-A מקסימום.

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

תשובות ופתרונות לחלק 2

א. **פתרון מלא**

ראשית נפתור את אי השוויון $\frac{x-1}{x+2}\le 0$: תחום הגדרת אי השוויון הנו $x\neq -2$

$$\frac{x-1}{x+2}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+2)\le 0\\ x\neq -2\end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 1$$

ולכן $A=(-2,1]$

הוכחה $\max A=1$:

נציין כי $1\in A$. בנוסף לכל $x\in A$, לפי הגדרת הקבוצה A בהכרח מתקיים $-2<x\le 1$ ובפרט $x\le 1$

. לכן לפי הגדרה $\max A=1$.

הוכחה $\min A$ לא קיים:

נניח בשלילה כי קיים מספר $a=\min A$. אזי לפי הגדרת המינימום $a\in A$.

מכאן לפי הגדרת הקבוצה A בהכרח מתקיים $-2<a\le 1$. מצד שני הממוצע של a ושל -2 הינו $0.5\cdot(a-2)\in A$ כי הוא מקיים $-2<0.5\cdot(a-2)<a$ בסתירה להנחה ש- $a=\min A$. מצאנו איבר

ולכן אף מספר לא יכול להיות מינימום לקבוצה A .

(הערה: למעשה, לפי משפט השלמות של ממשיים בין a ל- -2 ישנם אינסוף ממשיים)

מש"ל

הוכחה $m=-2$ **אינפימום של** A**:**

יהי $x\in A$, אזי לפי הגדרת הקבוצה A בהכרח מתקיים $-2<x\le 1$ לכן $m=-2$ חסם מלרע של A.

נניח בשלילה כי $m=-2$ אינו אינפימום, כלומר קיים $m_1>-2$ שהוא חסם מלרע של A. כיוון ש- $A=(-2,1]$ אם $m_1\ge 1$ כל האיברים $a\in A$ מקיימים $a<m_1$ ולכן m_1 אינו חסם מלרע ולכן אינו אינפימום. אחרת אם $1\ge m_1>-2$ אז לפי משפטי צפיפות קיים מספר ממשי $1\ge m_1>a>-2$ לכן $a\in A$ ו- m_1 אינו חסם מלרע ולכן אינו אינפימום. מכאן שחסם מלרע הגדול ביותר הינו $m=-2$ ולפי ההגדרה הוא האינפימום של A.

מש"ל

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

ב. פתרון מלא:

$A=\left\{x\in R \middle| x=\frac{(-1)^n}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}$ לכן אברי A מהצורה: $x=\frac{(-1)^n}{n}=\begin{cases}\frac{1}{n} & ; \text{ זוגי } n\\ -\frac{1}{n} & ; \text{ אי זוגי } n\end{cases}$

- מתקיים $1\le\frac{1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le-\frac{1}{n}\le-1$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מכאן שכל איבר $x\in A$ מקיים $-1\le x\le 1$ ולכן $-1,1$ הם חסמי מלעיל ולמלרע של A בהתאמה, מכאן ש-A חסומה לפי ההגדרה.
- נשים לב שהקבוצה A ניתנת להצגה כאיחוד של שתי קבוצות A_1, A_2 כך ש-A_1 קבוצת האיברים של A עבור כל n טבעי וזוגי ואילו A_2 קבוצת האיברים של A עבור כל n טבעי ואי-זוגי, כלומר:

$$A=\left\{\frac{1}{2k}\middle|k\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{-\frac{1}{2k-1}\middle|k\in\mathbb{N}\right\}=\underbrace{\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots\right\}}_{=A_1}\cup\underbrace{\left\{-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\cdots\right\}}_{=A_2}=A_1\cup A_2$$

- ראשית נראה כי: $\max A=\frac{1}{2}$
כל $x\in A$ מקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$.
אם $x\in A_1$ אז $0<x\le\frac{1}{2}$, אם $x\in A_2$ אז $-1\le x<0$ לכן כל $x\in A$ מקיים $x\le\frac{1}{2}$
וגם $\frac{1}{2}\in A$, ולפי ההגדרה $\max A=\frac{1}{2}$.
- כעת נראה כי: $\min A=-1$
כל $x\in A$ מקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$.
אם $x\in A_2$ אז $-1\le x<0$ אם $x\in A_1$ אז $0<x\le\frac{1}{2}$, ולכן לכל $x\in A$ מתקיים $x\ge-1$
וגם $-1\in A$, כלומר לפי ההגדרה $\min A=-1$.
- לפי המסקנה שלמדנו לכן גם $\min A=-1$ הוא האינפימום ו-$\max A=\frac{1}{2}$ הוא הסופרמום של A.

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

ג. תשובה

- A חסומה
- $\inf\ A = \min A = -\frac{1}{2}$, $\sup A = 2$, ואין מקסימום ל- A.

ד. תשובה

- A חסומה
- $\min A$ לא קיים, $m = -1$ הוא האינפימום של A , $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$

ה. תשובה

- A חסומה
- ל- A אין מינימום ואין מקסימום, $\inf\ A = 0$ $\sup A = 1$

ו. פתרון מלא

א. נוכיח באינדוקציה כי $1 \le a_n < 2$ לכל n טבעי.

שלב 1 – בדיקה $a_1 = 1 < 2$

שלב 2 – הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $n = k$ מתקיים $1 \le a_n < 2$ $(*)$

שלב 3 – הוכחת האינדוקציה: נוכיח כי עבור $n = k + 1$ מתקיים $1 \le a_n < 2$

מתקיים: $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \underset{\underset{(*) a_k < 2}{\uparrow}}{<} \sqrt{2+2} = 2$ וגם $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \underset{\underset{(*) a_k \ge 1}{\uparrow}}{\ge} \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \ge 1$

לכן המספר $M = 2$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה A.

בנוסף, לכל n טבעי מתקיים $1 = a_1 \le a_n$, לכן $m=1$ הוא המינימום של קבוצה A.

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים וחסמים (שימו לב: לדף זה 2 חלקים)

ב. נראה כי ל- A אין מקסימום.

- קודם נראה באינדוקציה כי $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי.

שלב 1 – בדיקה $a_1 = 1 < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} = a_2$

שלב 2 – הנחת האינדוקציה : נניח כי עבור $n = k$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$ $(*)$

שלב 3 – הוכחת האינדוקציה : נוכיח את הטענה עבור $n = k + 1$ $a_n < 2$

נעריך את $a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} + 2} \underset{\underset{(*)}{\uparrow}}{>} \sqrt{a_k + 2} = a_{k+1}$

לכן $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי.

- וכעת נניח בשלילה כי ל-A יש מקסימום ונסמן $\max A = C$.

אזי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_m = C \in A$ אבל הראינו באינדוקציה כי $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי. ובפרט, $a_{m+1} > a_m = C$ מכאן ש-C אינו מקסימום בסתירה להנחת השלילה. מכאן נובע של- A אין מקסימום.

משל"ל