Friedrich-Alexander-Universität
Technische Fakultät

Digitale Regelung

Vorlesung Sommersemester 2023


Dr.-Ing. Andreas Michalka

Zusammenfassung Vorlesung 1

1. Struktur digital realisierter Regelungen

1.1 Übergang von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten Regelungen

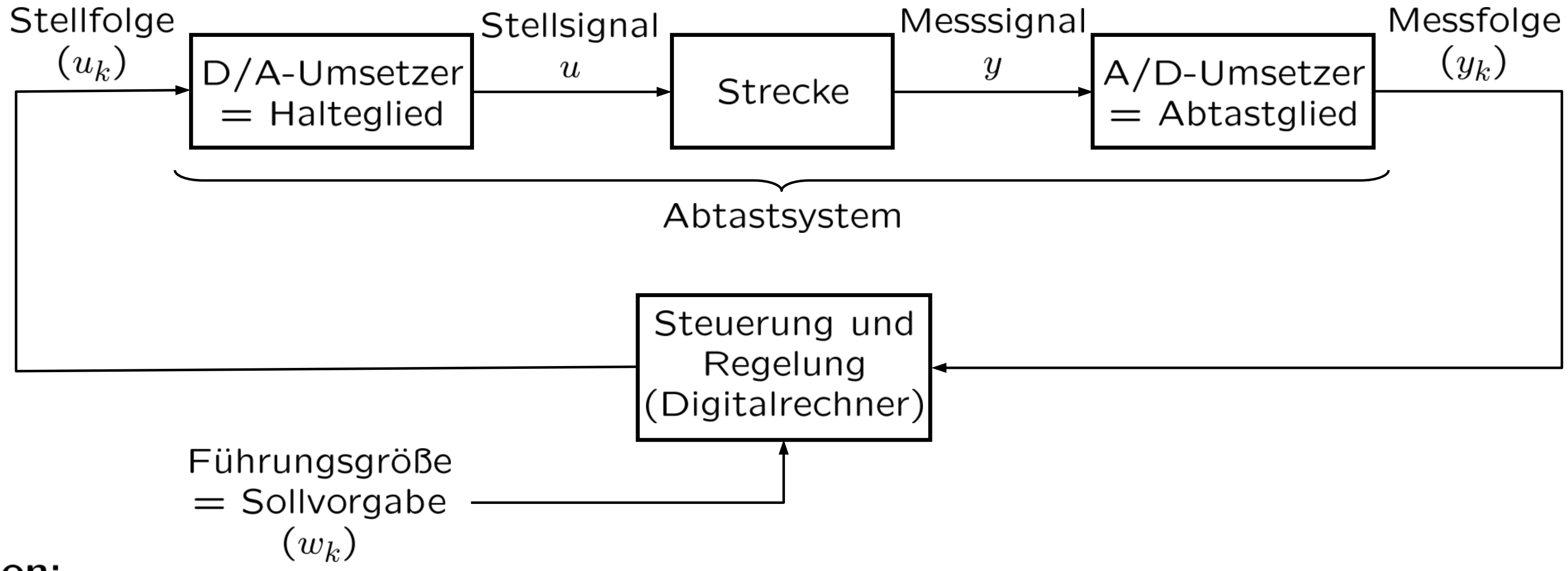
1.2 Übergang von lokalen zu örtlich verteilten Regelungen

1.3 Auswirkung der digitalen Reglerimplementierung

1.4 Prinzipielle Vorgehensweisen zum Reglerentwurf

2. Beschreibung von zeitdiskreten Systemen

betrachtete Regelkreisstruktur



Notation:

- $s(t)$: zeitkontinuierliches Signal (z.B. $u(t)$, $y(t)$, $w(t)$), ausgewertet zum Zeitpunkt t
- s: "kompletter Verlauf" eines zeitkontinuierlichen Signals, Kurzform für $(s(t))_{t\geq 0}$
- s_k: k-tes Glied einer Signalfolge (z.B. u_k, y_k, w_k)
- (s_k): "komplette" Signalfolge, Kurzform für $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$
- t_k: *Abtastzeitpunkt* $t_k = kT$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit *Abtastperiode* $T > 0$
- I_k: *Abtastintervall* $I_k = [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}_0$

Annahmen zum Verhalten der Strecke:

- Strecke ist linear und zeitinvariant
- Ein- und Ausgangssignale sind eindimensional, d.h. $u(t) \in \mathbb{R}, y(t) \in \mathbb{R}$

$\left.\right\}$ Eingrößen-LZI-System

- Ein zeitkontinuierliches Zustandsmodell ist verfügbar:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

mit

- $x \in \mathbb{C}^n$: Zustand mit $n =$ Systemordnung
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: Dynamikmatrix
- $b \in \mathbb{C}^n$: Eingangsvektor
- $c \in \mathbb{C}^n$: Ausgangsvektor

Annahmen zum Verhalten des Digitalrechners:

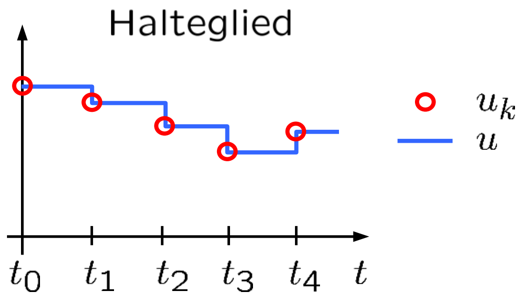
- Digitalrechner führt Reglerroutine an diskreten Zeitpunkten $t_k = kT$, $k \in \mathbb{N}_0$, aus
  $\Rightarrow$ periodisches, zeitgesteuertes Ablaufschema mit *Abtastperiode* $T > 0$
  $\Rightarrow$ Messgröße y wird nur an diskreten Zeitpunkten t_k einbezogen

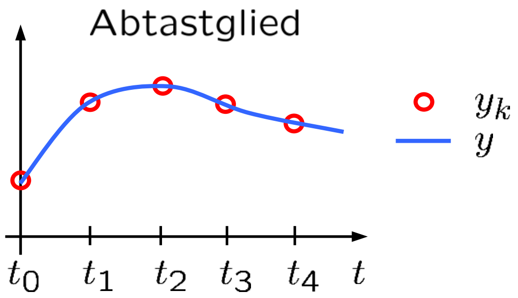
- Digitalrechner gibt neue Stellwerte u_k an diskreten Zeitpunkten t_k aus,
  idealisierende Annahme von “zero execution time”
  (Annahme wird später abgeschwächt)

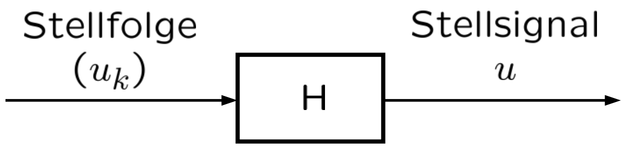
Annahmen zum Verhalten von Stell- und Abtastglied:

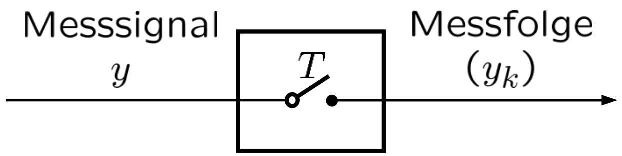
- in dieser Vorlesung: *Halteglied* 0-*ter Ordnung*,

  $\Rightarrow$ Stellsignal ist innerhalb der Abtastintervalle I_k konstant, d.h. $u(t) = u_k, \; \forall \, t \in I_k$
- Abtastglied liefert Momentaufnahme der Messgröße, d.h. $y_k = y(t_k), \; k \in \mathbb{N}_0$









Vorgehensweise zum Reglerentwurf

zeitkont. Streckenmodell

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

$\downarrow$ einbeziehen von Halte- und Abtastglied

zeitdiskretes Streckenmodell

$$x_{k+1} = A_d x_k + b_d u_k$$
$$y_k = c_d^T x_k$$

$\downarrow$ zeitdiskreter Reglerentwurf

zeitdiskretes Reglermodell = zeitdiskreter Regelalgorithmus

z.B. beobachterbasierter Zustandsregler

$$\hat{x}_{k+1} = (A_d - l c_d^T)\hat{x}_k + b_d u_k + l y_k$$
$$u_k = -k^T \hat{x}_k$$

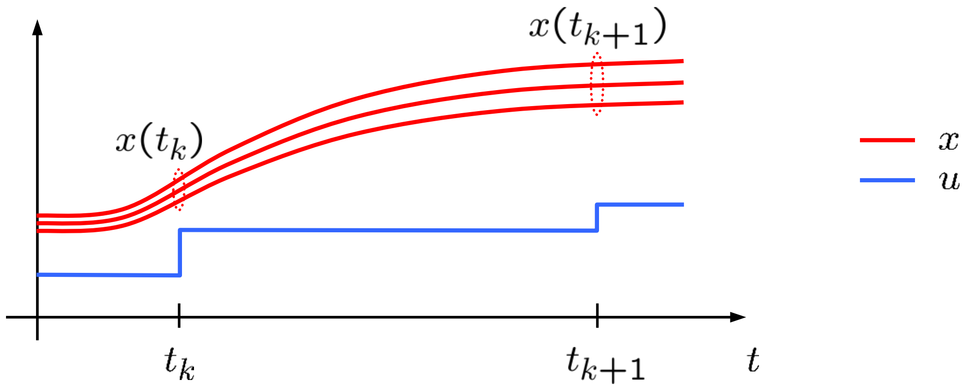
Ziel: Bestimmung eines zeitdiskreten Modells als Basis für Reglerentwurf

- Modell beschreibt Verhalten an den diskreten Zeitpunkten t_k der Reglerausführung, da Messgröße y an übrigen Zeitpunkten vom Regler ignoriert wird.
- Einbeziehung von Halteglied und Abtastglied
  $\Rightarrow$ Modellierung des *Abtastsystems* = *Strecke* + *Halteglied* + *Abtastglied*

D.h. es wird gesucht:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= A_d x(t_k) + b_d u_k \\ y_k &= c_d^T x(t_k) \end{aligned}$$

mit
- $A_d \in \mathbb{C}^{n\times n}$: Dynamikmatrix
- $b_d \in \mathbb{C}^{n}$: Eingangsvektor
- $c_d \in \mathbb{C}^{n}$: Ausgangsvektor



Berechnung von $x(t_{k+1})$

2.1 Zustandsmodelle von Abtastsystemen

einführen der *Zustandsfolge* $x_k := x(t_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, führt auf:

zeitdiskretes Eingrößen-LZI-System

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= A_d x_k + b_d u_k \\
y_k &= c_d^T x_k
\end{aligned}
\qquad \text{mit}
$$

- $A_d = e^{AT}$
- $b_d = \int\limits_0^T e^{A\tau} d\tau \, b$
- $c_d = c$

Bemerkung:

Für den Übergang von zeitkontinuierlichem zu zeitdiskretem Modell wird ausgenutzt, dass der Regler innerhalb der Abtastintervalle I_k keinen Einfluss auf u hat.
Es reicht daher, innerhalb I_k das gesteuerte Verhalten zu betrachten.
Auf diese Weise ist die zeitdiskrete Beschreibung von Abtastsystemen auch für allgemeinere Systemklassen möglich.

Berechnung von $A_d = e^{AT}$

- Fall 1: A hat Diagonalgestalt:

D.h.
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dann gilt:
$$A_d = \begin{bmatrix} e^{a_{11}T} & & & 0 \\ & e^{a_{22}T} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{a_{nn}T} \end{bmatrix}$$

Vorsicht: Für $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ gilt im Allgemeinen *nicht* $A_d = \begin{bmatrix} e^{a_{11}T} & \dots & e^{a_{1n}T} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{a_{n1}T} & \dots & e^{a_{nn}T} \end{bmatrix}$

- Fall 2: A hat nicht Diagonalgestalt, aber ist diagonalähnlich:

  D.h. A hat n linear unabhängige Eigenvektoren v_i

$$A v_i = \lambda_i v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Eigenwerte

Eigenvektoren

Dann hat A die Darstellung $A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$ mit $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$

und es gilt $A_d = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 T} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n T} \end{bmatrix} V^{-1}$

Berechnung von $b_d = \int\limits_0^T e^{A\tau} d\tau \, b$

- Fall 1: A ist regulär:

  Dann gilt $$b_d = A^{-1}(A_d - I)\, b$$

- Fall 2: A ist diagonalähnlich, d.h. $A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$

  Dann gilt $$b_d = V \begin{bmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{bmatrix} V^{-1}\, b$$

  mit $$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i}(e^{\lambda_i T} - 1) & \text{für } \lambda_i \neq 0 \\ T & \text{für } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

2. Beschreibung von zeitdiskreten Systemen

2.2 Beschreibung des E/A-Verhaltens durch z-Übertragungsfunktionen

Übertragungsfunktion zeitkontinuierlicher Systeme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

hier relevante Rechenregeln der Laplace-Transformation $\mathscr{L}$

- Linearität: $\mathscr{L}\{\alpha v + \beta w\} = \alpha \mathscr{L}\{v\} + \beta \mathscr{L}\{w\}$
- Differentiationsregel: $\mathscr{L}\{\dot{v}\} = s\mathscr{L}\{v\} - v(0)$

↓ Laplace-Transformation $\mathscr{L}$ anwenden

↓ Annahme $x(0) = 0$
$X(s) := \mathscr{L}\{x\},\ U(s) := \mathscr{L}\{u\},\ Y(s) := \mathscr{L}\{y\}$

$\downarrow$ zusammenfassen

Fazit:

- Anwendung der Laplace-Transformation führt auf *algebraischen* Zusammenhang für Ein-/Ausgangsverhalten (E/A-Verhalten), d.h. Differentialgleichung wird beseitigt
- Wesentlich dafür ist die Eigenschaft $\mathscr{L}\{\dot{x}\} = s\mathscr{L}\{x\} - x(0)$ der Laplace-Transformation

Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme

Ausgangspunkt:
$$x_{k+1} = A_d x_k + b_d u_k$$
$$y_k = c_d^T x_k$$

Ziel: algebraischer Zusammenhang für E/A-Verhalten, d.h. Rekursion wird beseitigt.

Lösung: Anwendung der *z-Transformation* $\mathscr{Z}\{(v_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{-k}$

hier wesentliche Rechenregeln der z-Transformation:

- Linearität: $\mathscr{Z}\{\alpha(v_k) + \beta(w_k)\} = \alpha\mathscr{Z}\{(v_k)\} + \beta\mathscr{Z}\{(w_k)\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- *Links-Verschiebung:* $\mathscr{Z}\{(v_{k+1})\} = z\mathscr{Z}\{(v_k)\} - zv_0$

$\Downarrow$

$$z\mathscr{Z}\{(x_k)\} - zx_0 = A_d\mathscr{Z}\{(x_k)\} + b_d\mathscr{Z}\{(u_k)\}$$
$$\mathscr{Z}\{(y_k)\} = c_d^T\mathscr{Z}\{(x_k)\}$$

$\downarrow$ Annahme $x_0 = 0$
$X(z) := \mathscr{Z}\{(x_k)\}$, $U(z) := \mathscr{Z}\{(u_k)\}$, $Y(z) := \mathscr{Z}\{(y_k)\}$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} zX(z) &= A_d X(z) + b_d U(z) \\ Y(z) &= c_d^T X(z) \end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \text{ zusammenfassen}$$

$$X(z) = (zI - A_d)^{-1} b_d U(z)$$

$$\boxed{Y(z) = \underbrace{c_d^T (zI - A_d)^{-1} b_d}_{\text{z-Übertragungsfunktion } G(z)} U(z)}$$

Fazit:

- Aufgrund der Eigenschaft $\mathscr{Z}\{(x_{k+1})\} = z\mathscr{Z}\{(x_k)\} - zx_0$ ergibt sich im Bildbereich der z-Transformation ein algebraischer Zusammenhang für das E/A-Verhalten.
- Deshalb besitzt die z-Transformation dieselbe Bedeutung für zeitdiskrete Systeme wie die Laplace-Transformation für zeitkontinuierliche Systeme.

Darstellungsformen der z-Übertragungsfunktion

Polynomform:
$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

⇩ Zähler und Nenner faktorisieren

Pol-Nullstellenform:
$$G(z) = k \frac{(z - n_1)(z - n_2) \cdot \cdots \cdot (z - n_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdot \cdots \cdot (z - p_n)}$$

mit
- $n_i \in \mathbb{C}$: Nullstellen
- $p_i \in \mathbb{C}$: Polstellen
- $k \in \mathbb{R}$: Verstärkung

$\left.\begin{array}{l} n_i \\ p_i \end{array}\right\}$ sind reell oder treten als konjugiert komplexe Paare auf

(Betrachtung der Zeitkonstantenform von z-Übertragungsfunktionen ist unüblich, da die zugehörigen Zeit- und Dämpfungskonstanten nicht dieselbe anschauliche Bedeutung haben wie bei zeitkontinuierlichen Systemen.)

Notation zur z-Transformation

- Folgen werden durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet, z.B. (f_k).
- Der zugehörige Großbuchstabe bezeichnet die korrespondierende z-Transformierte, d.h. $F(z) = \mathscr{Z}\{(f_k)\}$.
- Abkürzend wird $F(z) \bullet\!\!-\!\!\circ \ (f_k)$ geschrieben.

Eigenschaften der z-Transformation

Linearität	$\alpha\,(f_k) + \beta\,(g_k) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha F(z) + \beta G(z), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$
Links-Verschiebung	$(f_k) = (g_{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) = zG(z) - zg_0$ $(f_k) = (g_{k+2})_{k\in\mathbb{N}_0} \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) = z^2G(z) - z^2g_0 - zg_1$
Rechts-Verschiebung	$(f_k) = (g_{k-1}) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) = z^{-1}G(z)$ mit $g_{-1} = 0$ $(f_k) = (g_{k-2}) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) = z^{-2}G(z)$ mit $g_{-1} = g_{-2} = 0$
Faltung	$(f_k) * (g_k) := \sum_{\nu=0}^{k} f_\nu\, g_{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} f_{k-\nu}\, g_\nu \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)\,G(z)$
Dämpfung	$(f_k) = (g_k e^{\alpha kT}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) = G\left(ze^{-\alpha T}\right)$
Anfangswertsatz	$g_0 = \lim\limits_{z\to\infty} G(z)$ (falls Grenzwert existiert)
Endwertsatz	$\lim\limits_{k\to+\infty} g_k = \lim\limits_{z\to 1^+} (z-1)\,G(z)$ (falls Grenzwert existiert)

z-Übertragungsfunktion als rationale Funktion

Adjunkte zu $zI - A_d$

Man kann zeigen:

- $G(z) = c_d^T (zI - A_d)^{-1} b_d = \dfrac{c_d^T \boxed{\mathrm{adj}(zI - A_d)}\, b_d}{\det(zI - A_d)}$
- $\det(zI - A_d)$ ist ein Polynom vom Grad n
- $c_d^T \mathrm{adj}(zI - A_d) b_d$ ist ein Polynom vom Grad $m \leq n - 1$

$\Rightarrow$ Differenzgrad ist i. Allg. $\delta = n - m \geq 1$

Jedoch gilt meist* $\delta = 1$

$\Rightarrow$ Wird im Weiteren stets angenommen

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$\Downarrow$ umstellen

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0) U(z)$$

$\Downarrow$ $: z^n$

$$(a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}) Y(z) = (b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \cdots + b_0 z^{-n}) U(z)$$

★ Dies gilt genau dann, wenn die Sprungantwort der zeitkontinuierlichen Strecke keinen Nulldurchgang bei $t = T$ besitzt.

Bestimmung der E/A-Differenzengleichung

$$(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n})Y(z) = (b_m z^{m-n} + b_{m-1}z^{m-1-n} + \cdots + b_0 z^{-n})U(z)$$

Bemerkung: E/A-Differenzengleichung ist das zeitdiskrete Analogon zur zeitkontinuierlichen E/A-Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

Kausalität: $\Updownarrow$ Realisierbarkeit

Umstellen der E/A-Differenzengleichung ergibt

$$\underbrace{y_k}_{\substack{\text{aktuelle}\\ \text{Ausgangsgröße}}} = \frac{1}{a_n}\underbrace{\left(-a_{n-1}y_{k-1} - \cdots - a_0 y_{k-n} + b_m u_{k-(n-m)} + \cdots + b_0 u_{k-n}\right)}_{\substack{\text{Ausgangs- und Eingangswerte aus der Vergangenheit,}\\ \text{da } n-m=1 \text{ für betrachtete Zustandssysteme}}}$$

$\Rightarrow$ aktuelle Ausgangsgröße wird durch Anregung in der Vergangenheit festgelegt, d.h. zukünftige Anregung geht nicht in y_k ein

$\Rightarrow$ betrachtete Systemklasse ist realisierbar