线性代数

中南民族大學
SOUTH-CENTRAL UNIVERSITY FOR NATIONALITIES

第一章 n阶行列式

线性代数

中南民族大学
SOUTH-CENTRAL UNIVERSITY FOR NATIONALITIES

1.1 二阶与三阶行列式

行列式的起源与发展

莱布尼兹（德国）
（1646-1716）

1693年，德国数学家莱布尼茨在解线性解方程组时将常数分离出来用以表示未知量，便有了行列式最初的概念.

行列式的起源与发展

克拉默（瑞士）
（1704-1752）

1750年，瑞士数学家克拉默在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义给出了比较完整、明确的阐述，并给出了解线性方程组的克拉默法则.

行列式的起源与发展

法国数学家范德蒙（1735-1796）

在行列式发展史上，第一个对行列式理论做出连贯的逻辑阐述，并把行列式理论独立于线性方程组之外的人是法国数学家范德蒙，他对行列式理论做了专门研究，建立了行列式的展开法则.

行列式的起源与发展

柯西（法国）
(1789-1857)

继范德蒙之后，在行列式理论方面又一位做出突出贡献的是另一位法国数学家柯西，1815年，柯西在一篇论文中给出了行列式的乘法定理，他也是第一个提出对行列式中的元素采用双下标记号的人，这种表示法沿用至今.直至19世纪末，行列式理论基本形式.

二阶与三阶行列式

1 二阶行列式

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$a_{ij}, i = 1,2; j = 1,2$ 系数

$b_i, i = 1,2$ 右端常数

由消元法可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

二阶与三阶行列式

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

方程组有唯一解，且唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

二阶与三阶行列式

二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{ij}, i = 1,2; j = 1,2$ 称为行列式的 (i,j) 元

i 是行标, j 是列标

二阶与三阶行列式

二阶行列式的计算——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

副对角线

主对角线

二阶与三阶行列式

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

系数行列式

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{vmatrix} = D_1,$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} \end{vmatrix} = D_2,$$

二阶与三阶行列式

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当系数行列式 $D \neq 0$ 时，有唯一解，且解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

二阶与三阶行列式

2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

二阶与三阶行列式

三阶行列式的计算

对角线法则

$$(-)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (+)$$

二阶与三阶行列式

中南民族大学 SOUTH-CENTRAL UNIVERSITY FOR NATIONALITIES

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

二阶与三阶行列式

中南民族大学
SOUTH-CENTRAL UNIVERSITY FOR NATIONALITIES

有唯一解，且

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D}$$

二阶与三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

思考：对于上述线性方程组是否有与三元线性方程组类似的结论呢?