I Décrire une droite

Remarque n°1.

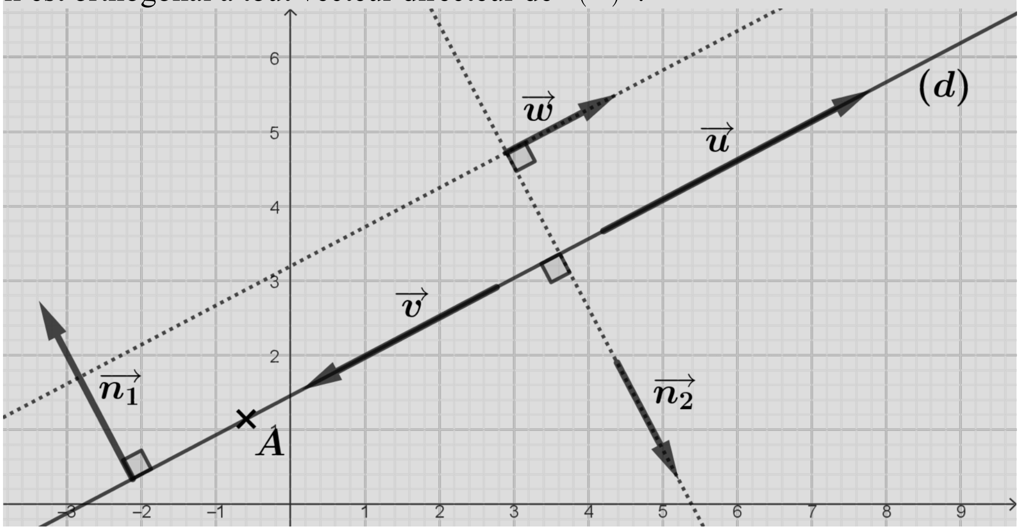
Nous savons déjà (voir ce cours) décrire une droite de plusieurs façons :
avec un vecteur directeur et un point, avec une équation cartésienne ou encore avec une équation réduite. Cette fois-ci, au lieu d'utiliser la colinéarité comme avec le vecteur directeur, nous allons utiliser l'orthogonalité…

Définition n°1. Vecteur normal à une droite

Un vecteur $\vec{n}$ est appelé vecteur normal à une droite (d) si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur directeur de (d) .

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de (d)

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des vecteurs normaux à (d)



Propriété n°1.

Soit un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ et soit a , b et c des nombres réels.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d) dont une équation cartésienne est $a\,x + b\,y + c = 0$.

preuve :

Préliminaires

On sait que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et que tout vecteur directeur de (d) est colinéaire à $\vec{u}$ (voir le cours de seconde).

λ se lit *lambda*

C'est à dire que si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d) alors il existe un réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$.

Le vif du sujet

Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d)
On a :

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{v} &= \vec{n}\cdot(\lambda\,\vec{u}) \\ &= \lambda\,\vec{n}\cdot\vec{u} \\ &= \lambda\times(a\times(-b)+b\times a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à : $\vec{n}\perp\vec{v}$ *cqfd*

Méthode n°1. ***Vecteur normal à une droite (d) grâce à une équation cartésienne***

▪ Si on a une équation cartésienne de (d) : $ax+by+c=0$

alors un vecteur normal à (d) est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple n°1.

Énoncé

On donne la droite (d) dont une équation cartésienne est $-7x+3y-5=0$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (d).

Réponse

L'équation cartésienne donnée est du type $ax+by+x=0$ avec
$a=-7$, $b=3$ et $c=-5$

On en déduit qu'un vecteur normal possible est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}}$.

Méthode n°2. ***Vecteur normal à une droite (d) grâce à une équation réduite***

▪ Si on a l'équation réduite de (d) : $x=k$ ou $y=mx+p$
alors on se ramène au cas précédent :

▫ $x=k \Leftrightarrow 1x+0y-k=0$ d'où $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

▫ $y=mx+p \Leftrightarrow mx-1y+p=0$ d'où $\vec{n}\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}$

Exemple n°2.

Énoncé

On donne les droites (d_1) et (d_2) d'équation réduite respectives :
$x=6$ et $y=4x-9$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chaque droite.

Réponse

Notons $\vec{n_1}$ un vecteur directeur de (d_1) et $\vec{n_2}$ un vecteur directeur de (d_2) .

▫ Pour la droite (d_1) :

$\boxed{\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$ (*c'est évident, pas la peine d'en écrire plus*)

▫ Pour la droite (d_2) :

$y=4x-9 \Leftrightarrow 4x-y-9=0$

La dernière équation du type $ax+by+x=0$ avec
$a=4$, $b=-1$ et $c=-9$

On en déduit qu'un vecteur normal possible est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\vec{n_2}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}}$.

Méthode n°3. ***Vecteur normal à une droite (d) grâce à un vecteur directeur.***

▪ Si on a un vecteur directeur de (*d*) : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

alors $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ est obtenu en prenant par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple n°3.

Énoncé

On donne la droite (d) passant par $A(7\ ,\ 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (*d*).

Réponse

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

On prend l'opposé

$\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

Vérifions que $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) :

$\vec{n}\cdot\vec{u}\ =\ -3\times5\ +\ 5\times3\ =\ 0$

Ainsi un vecteur normal possible à (d) est $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}}$.

Propriété n°2. ***Équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal***

Si on a un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de (*d*) et un point $A(x_A\ ,\ y_A)\in(d)$.

alors on obtient une équation cartésienne de (*d*) en posant :

$ax+by+c=0$ où $c=-a\,x_A-b\,y_A$.

preuve :

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal à (*d*) , on sait que (*d*) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$. Il reste à trouver la valeur de *c*.

Or, $A(x_A\ ,\ y_A)\in(d)$

donc $a\,x_A+b\,y_B+c=0$

En isolant *c*, on obtient le résultat. *cqfd*

Exemple n°4.

Énoncé

On donne la droite (d) passant par le point $A(-2\ ,\ 3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (*d*).

Déterminer une équation cartésienne de (*d*).

Réponse

▪ $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de (d), on sait que cette droite admet une équation cartésienne de la forme $5x+7y+c\ =\ 0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

▪ Or $A(-2\ ,\ 3)\in(d)$

Donc $5\times(-2)+7\times3+c\ =\ 0$

On en déduit que $c=-11$

▪ Ainsi (*d*) admet comme équation cartésienne : $\boxed{5x+7y-11=0}$

II Décrire un cercle

II.1 Trouver une équation cartésienne d'un cercle

Propriété n°3. Obtenir une équation cartésienne d'un cercle avec le centre et le rayon

Dans un repère orthonormé, soit $I(x_I\ ,\ y_I)$ un point et r un nombre réel positif.
Un point $M(x_M\ ,\ y_M)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r si et seulement si : $(x_M-x_I)^2+(y_M-y_I)^2 = r^2$

preuve :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow MI = r \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = r \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\|^2 = r^2 \qquad (\text{car } \|\overrightarrow{MI}\|\geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow (x_M-x_I)^2+(y_M-y_I)^2 = r^2 \end{aligned}$$

cqfd

Exemple n°5.

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\ ,\ 3)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2.

Réponse

Soit $M(x\ ,y)$ un point du plan.

▪ On sait que :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \underbrace{(x-(-1))^2+(y-3)^2 = 2^2}_{\text{pas nécessaire sur une copie}} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2 = 4$$

▪ On en déduit l'équation cartésienne suivante pour $\mathcal{C}$:

$$\boxed{x^2+2x+y^2-6y+6 = 0}$$

Remarque n°2.

Cette propriété nous permet donc d'obtenir une équation cartésienne d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon.
Si on connaît un diamètre, on utilisera plutôt la suivante que l'on connaît déjà.

Propriété n°4. Obtenir une équation cartésienne d'un cercle avec un diamètre

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

preuve :

Voir la propriété n°13 du cours sur le produit scalaire…

Exemple n°6.

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\ ,\ 3)$ et $B(4\ ,\ 5)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Réponse

Soit $M(x\ ,y)$ un point du plan.

▪ On a : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4-x\\5-y\end{pmatrix}$

▪ On sait que :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (-1-x)(4-x)+(3-y)(5-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-3x-4+y^2-8y+11=0 \end{aligned}$$

▪ On en déduit l'équation cartésienne suivante pour $\mathcal{C}$:

$$\boxed{x^2-3x+y^2-8y+11=0}$$

II.2 Reconnaître une équation cartésienne d'un cercle et trouver son centre et son rayon.

Méthode n°4.

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on donne l'équation de courbe suivante :
$x^2-3x+y^2-8y+11 = 0 \quad (E)$.
Montrer que (E) est une équation cartésienne d'un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

L'idée

On veut obtenir une équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$
Ainsi, la propriété n°3 nous dira qu'on a bien un cercle de $I(a\ ,\ b)$ et de rayon r .
Pour cela, on utilise la méthode de complétion du carré (voir l'exercice n°4 de la fiche FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ M01)

Réponse

Soit $M(x\ ,\ y)$ un point du plan.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
▫ les coordonnées de M vérifient l'équation (E)
▫ $x^2-3x+y^2-8y+11 = 0$
▫ $\underbrace{(x-1{,}5)^2-2{,}25}_{pour\ x^2-3x}+\underbrace{(y-4)^2-16}_{pour\ y^2-8y}+11 = 0$
▫ $(x-1{,}5)^2+(y-4)^2 = 7{,}25$
▫ $(x-1{,}5)^2+(y-4)^2 = \left(\sqrt{7{,}25}\right)^2$

On reconnaît une équation cartésienne du
$\boxed{\text{cercle de centre } I(1{,}5\ ,\ 4) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}\sqrt{29}}$.

Remarque n°3.

Le quatrième « ▫ » nous assure que l'ensemble de points n'est pas vide : si on avait obtenu une valeur négative à la place de 7,25 alors aucun point du plan n'aurait pu satisfaire la condition donnée par (E) .

Remarque n°4.

Hé mais ça sort d'où $\frac{1}{2}\sqrt{29}$?… Grr on pose pas ce genre de question !

$$\sqrt{7{,}25} = \sqrt{\frac{725}{100}} = \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{25\times 29} = \frac{1}{10}\times 5\sqrt{29} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$$

Remarque n°5.

On fera le lien avec l'exemple n°6.
Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont…
et la longueur AB vaut…