ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^2+1$

1) Soient a et b deux réels tels que $3\leqslant a<b$

1.a) Démontrer que $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= (b-3)^2+1-[(a-3)^2+1] \\ &= (b-3)^2+1-(a-3)^2-1 \\ &= (b-3)^2-(a-3)^2 \qquad \text{On reconnaît la } 3^e \text{ indentité remarquable} \\ &= [(b-3)+(a-3)][(b-3)-(a-3)] \\ &= [b-3+a-3][b-3-a+3] \\ &= (b+a-6)(b-a) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

Si vraiment vous êtes coincés sur ce genre de question alors, au brouillon, vous développez et réduisez chaque membre (vous devez bien sûr trouver la même expression des deux côtés) ensuite, sur la copie :
« d'une part : (on recopie le 1^er le développement trouvé au brouillon)
d'autre part : (on recopie le 2^ème le développement trouvé au brouillon)
On constate l'égalité des deux expressions, ainsi... »
Cette méthode n'est pas la plus élégante, il ne faut donc pas en abuser...

1.b) Quel est le signe de $b+a-6$? Quel est le signe de $b-a$?

On sait que : $3\leqslant a<b$

- En particulier : $3\leqslant a$ et $3<b$

$3\leqslant a$ équivaut à $3+b\leqslant a+b$

$3<b$ équivaut à $3+3<b+3$ c'est à dire : $6<b+3$

On en déduit que $6 < 3+b \leqslant a+b$ que l'on peut simplifier en $6 < a+b$

Enfin

$6 < a+b$ équivaut à $6-6 < a+b-6$ c'est à dire : $0 < a+b-6$

Donc $a+b-6$ est strictement positive.

- En particulier : $a<b$

$a<b$ équivaut à $a-a<b-a$ c'est à dire $0<b-a$

Donc $b-a$ est strictement positive.

1.c) En déduire le signe de $f(b)-f(a)$

On sait que : $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

Les deux facteurs du membre de droite étant strictement positifs, la règle des signes nous indique que :

$f(b)-f(a)>0$

1.d) En utilisant la définition du sens de variation d'une fonction, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.

$f(b)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(b)>f(a)$

Et bien sûr $f(b)>f(a) \Leftrightarrow f(a)<f(b)$

À l'aide des questions précédentes, nous avons démontré que pour tous a et b appartenant à $[3\ ;\ +\infty[$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [3\ ;\ +\infty[}$

2) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$.

On nous a montré la méthode dans les questions précédentes, à nous de refaire le cheminement tout seul…

Soient a et b deux réels tels que $a<b\leqslant 3$

On est, cette fois ci, sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et plus sur $[3\ ;\ +\infty[$.

On sait que : $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

pas la peine de le redémontrer

▪ Déterminons le signe de chacun des facteurs.

On sait que $a<b\leqslant 3$

- En particulier : $a<b$

$a<b \Leftrightarrow 0<b-a$

- En particulier : $a<3$ et $b\leqslant 3$

$b+a<b+b\leqslant b+3$ d'où $b+a<b+3$

De plus

$b\leqslant 3 \Leftrightarrow b+3\leqslant 3+3$ c'est à dire $b\leqslant 3 \Leftrightarrow b+3\leqslant 6$

Ensuite, $b+a<b+3$ et $b+3\leqslant 6$ nous indique que $b+a<6$

Enfin $b+a<6 \Leftrightarrow b+a-6<6-6$ c'est à dire : $b+a-6<0$

- Le facteur $b-a$ est donc strictement positif et le facteur $b-a-6$ est strictement négatif.

▪ Déterminons le signe de $f(b)-f(a)$:

D'après ce qui précède et la règle des signes, on peut affirmer que $f(b)-f(a)<0$

▪ Conclusion :

$f(b)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(a)>f(b)$

Nous avons démontré que pour tous a et b appartenant à $]-\infty\ ;\ 3]$, $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

Ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]-\infty\ ;\ 3]}$

3) La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui que vaut-il et en quelle valeur de x est-il atteint ?

f décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$ puis croissante sur $[3\ ;\ +\infty[$ donc si elle admet un extremum alors ce sera un minimum et il sera atteint en 3. (il faut vérifier qu'il est bien atteint…)

f admet un $\boxed{\text{minimum en } 3}$ et

ce minimum vaut : $\boxed{\text{ce minimum vaut : } f(3)=(3-3)^2+1=1}$

Remarques :

- Un exercice un peu plus long, vous vous y ferez et irez de plus en plus vite.
- Observez la « forme » de la fonction f au début . On appelle cela la forme canonique, elle vous sera très utile l'année prochaine.
- Prenez le temps de bien lire toutes les inégalités écrites. Parfois, « on passe » d'une inégalité large à une inégalité stricte et il est important de bien comprendre pourquoi on peut le faire à ce moment là, alors qu'en générale c'est impossible.
-Quand vous aurez bien assimilé le tiret précédent, vous comprendrez qu'en fait, on ne « passe » pas d'une inégalité large à une inégalité stricte mais qu'on en écrit une nouvelle...

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-6x+12$

1) Conjecturer le minimum m de f sur $\mathbb{R}$.

On prend la calculatrice, on trace la représentation graphique de la fonction et on constate facilement que le point de coordonnées $(3\ ;\ 3)$ est le sommet de la courbe de la courbe.

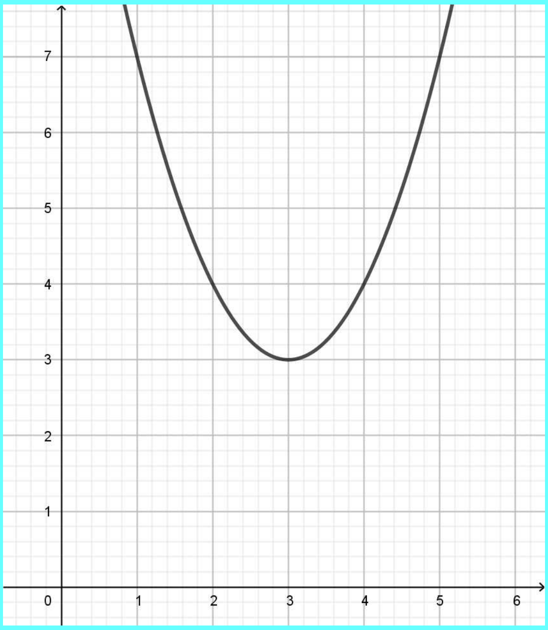
Le minimum de f sera alors 3 (celui des ordonnées) et sera atteint en 3 (celui des abscisses).

On va émettre une conjecture, donc notre phrase va commencer par :

« il semble que »

« je pense que »

…



Il semble que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ soit 3 .

2) Étudier le signe de $f(x)-m$ pour valider la conjecture.

Étudier le signe d'une différence est très rarement une bonne idée. Il faut penser à factoriser.

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-m = f(x)-3 = x^2-6x+12-3 = x^2-6x+9 = (x-3)^2 \geqslant 0$$

On vient de montrer que pour tout réel x , $f(x)\geqslant 3$

De plus $f(3)=3^2+6\times 3+12=3$

Cette dernière ligne est aussi importante que les précédentes car vous devez montrer que la valeur est atteinte (relisez bien la définition n°1)

On a donc bien :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geqslant f(3)=3$

Ainsi 3 est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$ est ce minimum est atteint en 3

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

1) Soit l'expression $A=(3x-2)^2-16$

1.a) Développer et réduire A

$A=(3x-2)^2-16$
$A=9x^2-12x+4-16$
$\boxed{A=9x^2-12x-12}$

1.b) Factoriser A

On reprend l'expression de départ et on reconnaît la 3e identité remarquable.

$A=(3x-2)^2-16$
$A=(3x-2)^2-4^2$
$A=[3x-2-4][3x-2+4]$
$A=(3x-6)(3x+2)$
$\boxed{A=3(x-2)(3x+2)}$

$A=3(x-2)\times 3\left(x+\frac{2}{3}\right)$
$A=9(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Mais pourquoi est-ce qu'il s'amuse à rajouter ça ?
Si vous regardez attentivement vous verrez que « dans les parenthèses » le « x » est « tout seul ». Vous pouvez toujours obtenir cette forme et cela sera très utile l'année prochaine...quelque soit votre première.

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(3x-2)^2-16$

2.a) Calculer les images de 0 ; 1 et -3

$\boldsymbol{f(0) = -12}$

Relisez votre question 1)a) et vous comprendrez qu'il n'est pa $f(x)=(3x-2)^2-16$ s nécessaire de « se fatiguer »...

$\boldsymbol{f(1)} = (3\times 1-2)^2-16 = (-1)^2-16 = 1-16 = \boldsymbol{-15}$
$\boldsymbol{f(-3)} = (3\times(-3)-2)^2-16 = (-11)^2-16 = 121-16 = \boldsymbol{105}$

2.b) Déterminer par le calcul, s'ils existent, les antécédents de 0 ; -16 et -25

On a plusieurs expression de $f(x)$ à notre disposition, on va donc choisir la plus intéressante à chaque fois.
Pour l'antécédent de 0, on choisit la forme : $f(x)=3(x-2)(3x+2)$

▪ Pour le nombre 0 :
$f(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)(3x+2)=0$
Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

Ainsi le nombre 0 possède deux antécédents par f : $\boxed{-\frac{2}{3} \text{ et } 2}$

$f(x)=9(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ aurait été encore plus efficace puisque les solutions apparaissent directement (au signe près)
Cette forme sera appelée : **forme factorisée**

Pour l'antécédent de -16, on choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$
Remarque :
Ces deux formes seront définies en détails l'année prochaine.

▪ Pour le nombre -16 :
$f(x)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)^2-16=-16 \Leftrightarrow (3x-2)^2=0$

Cette équation produit possède une seule solution : $\boxed{\frac{2}{3}}$

Pour l'antécédent de -25 , on choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$

Ici, vous choisirez en générale la forme développée réduite $f(x)=9x^2-12x-12$ mais dans notre cas, ce n'est pas une bonne idée.

En effet, si vous avez bien compris l'exercice n°2, vous avez compris que $f(x)$ ne peut « descendre en dessous de -16 »

$(3x-2)^2$ est un nombre jamais négatif et on l'ajoute à -16 , le résultat est donc forcément plus grand que (ou égal à) -16

▪ Pour le nombre -25 :

$f(x)=-25 \Leftrightarrow (3x-2)^2-16=-25 \Leftrightarrow (3x-2)^2=-9$

Or, le carré d'un nombre (réel) est toujours positif.

Donc cette équation n'admet aucune solution et par conséquent $\boxed{-25 \text{ n'admet pas d'antécédent par } f}$

2.c) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?

On va résoudre l'inéquation

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(3x+2) \geqslant 0$

Pour cela nous allons dresser un tableau de signes :

- $3 > 0$ est vrai quelque soit la valeur de x .
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $3x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
3		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que cette fonction est positive sur : $\left]-\infty\ ;\ -\frac{2}{3}\right] \cup [2\ ;\ +\infty[$

Si on avait dit : « strictement positive » alors on aurait ouvert les crochets en $-\frac{2}{3}$ et 2 .

2.d) Déterminer l'extremum de cette fonction.

On choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$

il est alors évident que -16 est le minimum.

Montrons que -16 est le minimum de f .

$f(x)-(-16) = f(x)+16 = (3x-2)^2 \geqslant 0$

Ainsi pour tout réel x $f(x) \geqslant -16$

De plus $f\left(\frac{2}{3}\right)=-16$

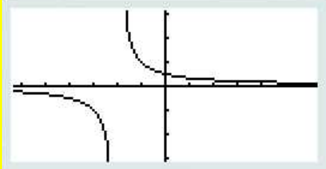
Donc -16 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et ce minimum est atteint pour $x=\frac{2}{3}$.

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°4 *(Le corrigé)*

On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de -2 par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.



Pour les Casios
https://www.youtube.com/watch?v=eqPhMlF8l68

Pour les TI
https://www.youtube.com/watch?v=aDTy88WAGg8

2) Conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\ ;-2[$ et sur $]-2\ ;+\infty[$

Il semble que la fonction f est $\boxed{\text{décroissante}}$ sur $]-\infty\ ;-2[$ et sur $]-2\ ;+\infty[$.

On pourrait même préciser : « strictement décroissante ».

3) Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle , $]-2\ ;+\infty[$ tels que $a<b$.

3.a) Montrer que $f(b)-f(a) = \dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}$

$$f(b)-f(a) = \frac{1}{b+2}-\frac{1}{a+2} = \frac{(a+2)-(b+2)}{(b+2)(a+2)} = \frac{a+2-b-2}{(b+2)(a+2)} = \frac{a-b}{(b+2)(a+2)}$$

3.b) à l'aide de la règle des signes démontrer que $f(b)-f(a)\leqslant 0$ sur $]-2\ ;+\infty[$.

- On sait que $a<b$ équivaut à $a-b<0$
- $a \in\ ]-2\ ;+\infty[\ \Leftrightarrow\ -2 < a\ \Leftrightarrow\ 0 < a+2$
- $b \in\ ]-2\ ;+\infty[\ \Leftrightarrow\ -2 < b\ \Leftrightarrow\ 0 < b+2$

Ainsi, d'après la règle des signes, $\boxed{\dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)} < 0}$

Le numérateur est négatif, le dénominateur lui est positif car produit de deux nombres de même signe, enfin le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

Donc $f(b)-f(a) < 0$

3.c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]-2\ ;+\infty[$.

$f(b)-f(a) < 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$

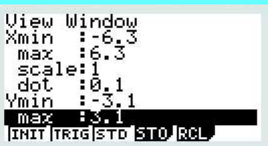
À l'aide des questions précédentes, on a démontré que sur l'intervalle $]-2\ ;+\infty[$,
si $a<b$ alors $f(a) > f(b)$.

La fonction $\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur }]-2\ ;+\infty[}$

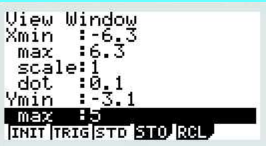
4)

4.a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$.

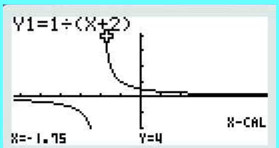
Nous allons devoir adapter la fenêtre de notre calculatrice.



→



→



Graphiquement, on trouve environ $-1{,}75$

Alors là, c'est bien sûr de l'arnaque. On ne vous a pas donné un graphique digne de ce nom, on ne s'attend donc pas à ce que vous fassiez une « belle lecture graphique ».
Pour la dernière fenêtre, je vous laisse chercher…
Voici tout de même un début de piste :
Casio :
http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fonctions_graph35.pdf
TI :
http://xymaths.free.fr/Lycee/Calculatrice-TI.php#def

4.b) Vérifier la conjecture en résolvant algébriquement l'équation $f(x)=4$.

$f(x)=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}=4$

Pour $x \neq -2$ cette équation est équivalente à :

Souvenez vous, on fait attention aux valeurs interdites

$1=4(x+2) \Leftrightarrow 1=4x+8 \Leftrightarrow -7=4x \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}=x$

Et bien sûr, $-\dfrac{7}{4}=-1{,}75$

Ainsi, $f(x)=4$ possède $\boxed{\text{une unique solution : } -1{,}75}$

5) Montrer que $f(x)-2 = \dfrac{-2x-3}{x+2}$

$$f(x)-2 = \frac{1}{x+2}-2 = \frac{1}{x+2}-\frac{2(x+2)}{x+2} = \frac{1}{x+2}-\frac{2x+4}{x+2} = \frac{1-(2x+4)}{x+2} = \frac{-2x-3}{x+2}$$

6) En utilisant un tableau de signes, déterminer l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.

Pour $x \neq -2$

$f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow f(x)-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-3}{x+2} \leqslant 0$

- $-2x-3 > 0 \Leftrightarrow -2x > 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{-2}=-1{,}5$
- $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

x	$-\infty$		-2		$-1{,}5$		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Pour la double barre dans la dernière ligne : page 4 de ce cours

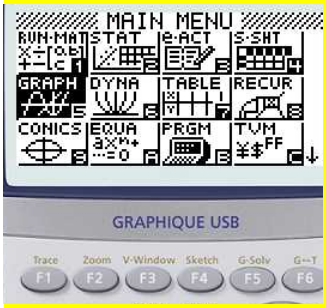
On en déduit que l'ensemble des solutions est : $]-\infty \,;\, -2[\cup [-1{,}5 \,;\, +\infty[$

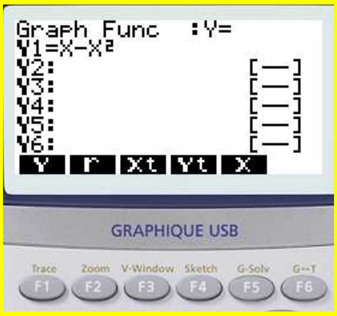
Ouvert en -2 car valeur interdite, fermé en $-1{,}5$ car inégalité large

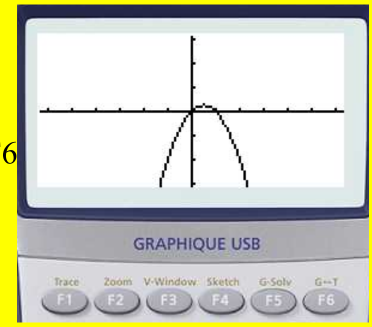
EXERCICE N°5 *(Le corrigé)*

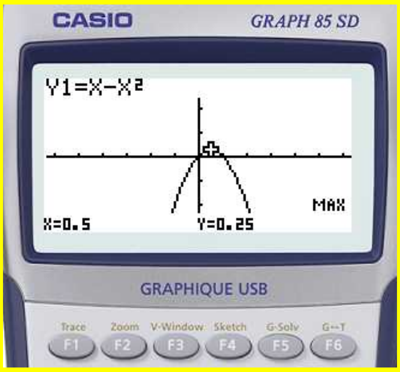
Quelle valeur maximale peut-on obtenir quand on soustrait à un nombre réel son carré ?

Notons x un nombre réel et $f(x)=x-x^2$ la différence dont il est fait mention dans l’énoncé.
Il s’agit donc de trouver, si il existe, le maximum de f sur $\mathbb{R}$.





EXE puis F6


F5 puis F2


On en déduit que la valeur maximale vaut 0,25 et qu’elle atteinte quand $x=0,5$

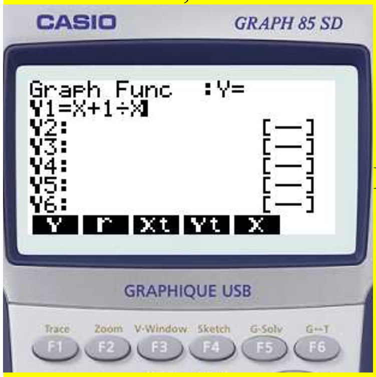
L’année prochaine vous n’aurez plus besoin de la calculatrice pour ce genre d’exercice car vous aurez de nouvelles propriétés et techniques à votre disposition.

EXERCICE N°6 (Le corrigé)

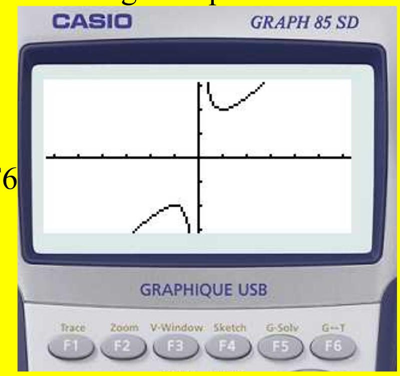
Quelle somme minimale peut-on obtenir quand on ajoute un nombre strictement positif à son inverse ?Quelle somme minimale peut-on obtenir quand on ajoute un nombre strictement positif à son inverse ?

Notons x un nombre réel strictement positif et $f(x)=x+\frac{1}{x}$ la somme dont il est fait mention dans l'énoncé.

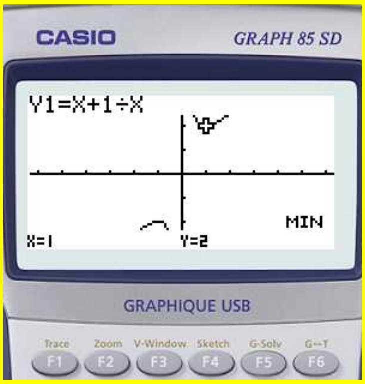
Il s'agit de de trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « R étoile plus » $\mathbb{R}$ pour les nombres réels, on enlève zéro avec « * » et on ne garde que les nombres positifs avec « + »)



EXE puis F6



F2 puis F3



On en déduit que le minimum vaut 2 et qu'il est atteint quand $x=1$.

On remarque que la calculatrice a tracé la représentation pour les abscisses négatives aussi.

Il nous suffit de ne pas en tenir compte puisque notre fonction n'est définie (par l'exercice) que sur les réels strictement positifs.

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^2+1$

1) Soient a et b deux réels tels que $3\leqslant a<b$

1.a) Démontrer que $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

1.b) Quel est le signe de $b+a-6$? Quel est le signe de $b-a$?

1.c) En déduire le signe de $f(b)-f(a)$

1.d) En utilisant la définition du sens de variation d'une fonction, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$

2) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$

3) La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui que vaut-il et en quelle valeur de x est-il atteint ?

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-6x+12$

1) Conjecturer le minimum m de f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier le signe de $f(x)-m$ pour valider la conjecture.

EXERCICE N°3

1) Soit l'expression $A=(3x-2)^2-16$

1.a) Développer et réduire A

1.b) Factoriser A

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(3x-2)^2-16$

2.a) Calculer les images de 0 ; 1 et -3

2.b) Déterminer par le calcul, s'ils existent, les antécédents de 0 ; -16 et -25

2.c) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?

2.d) Déterminer l'extremum de cette fonction.

EXERCICE N°4

On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de -2 par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

2) Conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\ ;-2[$ et sur $]-2\ ;+\infty[$

3) Soients a et b deux réels appartenant à l'intervalle , $]-2\ ;+\infty[$ tels que $a<b$.

3.a) Montrer que $f(b)-f(a) = \dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}$

3.b) à l'aide de la règle des signes démontrer que $f(b)-f(a)\leqslant 0$ sur $]-2\ ;+\infty[$.

3.c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]-2\ ;+\infty[$.

4)

4.a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$.

4.b) Vérifier la conjecture en résolvant algébriquement l'équation $f(x)=4$.

5) Montrer que $f(x)-2 = \dfrac{-2x-3}{x+2}$

6) En utilisant un tableau de signes, déterminer l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 2$.

EXERCICE N°5

Quelle valeur maximale peut-on obtenir quand on soustrait à un nombre réel son carré ?

EXERCICE N°6

Quelle somme minimale peut-on obtenir quand on ajoute un nombre strictement positif à son inverse ?