АФІННІ ФУНКЦІЇ ТА НЕРІВНОСТІ

I Нерівності

Remarque n°1.

Зазначені властивості залишаються дійсними з символами $<$; $\geqslant$ і $\leqslant$

Propriété n°1.

Нехай a і b — два дійсних числа.
$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$

preuve :

Негайно, тому що, за визначенням, $a > b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété n°2.

Нехай a, b і c — три дійсні числа, а d — ненульове дійсне число.

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad>bd}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad<bd}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

preuve :

- $a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow a+c-c-b>0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Leftrightarrow a+c>b+c$

- Si $d>0$
$a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow d(a-b)>0 \Leftrightarrow ad-bd>0 \Leftrightarrow ad>bd$
правило знаків

- Інші еквівалентності доводяться так само, як ці дві
Їх залишають як вправу.

Propriété n°3.

Нехай a, b, c і d — чотири дійсні числа.

$\boxed{\text{I } a<b \text{ et } c<d \text{ потім } a+c<b+d}$

preuve :

I $a<b$ et $c<d$ потім $a-b<0$ et $c-d<0$
donc $(a-b)+(c-d)<0$ (сума двох від'ємних чисел)
Або $(a-b)+(c-d)<0 \Leftrightarrow a+c-b-d<0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+d)<0 \Leftrightarrow a+c<b+d$

Exemple n°1.

I $x\geqslant 3$ et $y\geqslant 12$ потім $x+y\geqslant 3+12$

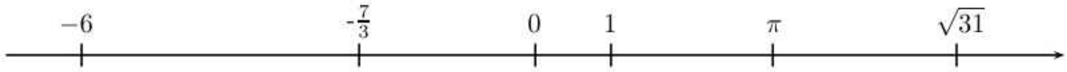
Remarque n°2. ***Увага***

Ця властивість не працює з відніманням, ось контрприклад:
$1<2$ et $3<10$ тоді як $1-3>2-10$

II Інтервали

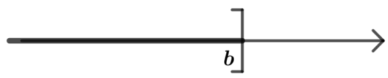
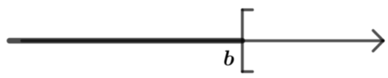
Définition n°1. Спосіб бачити набір дійсних чисел

Множина дійсних чисел, позначена $\mathbb{R}$, є множиною абсцис точок градуйованої лінії.



Définition n°2. Інтервали

Нехай a і b — два дійсні числа, інтервали $\mathbb{R}$ — це частини $\mathbb{R}$, визначені так:

Інтервал	Множина дійсних чисел x така, що:	Графічне представлення
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$	
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$ ми також можемо писати $x \geqslant a$	
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$ ми також можемо писати $x > a$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$	

Remarque n°3.

- ➔ Інтервали $[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ et $]a\ ;\ b]$ є обмеженими інтервалами, а a і b називаються межами.
- ➔ Амплітуда інтервалу варто $b-a$
- ➔ $[a\ ;\ b]$ є замкненим інтервалом і $]a\ ;\ b[$ є відкритим інтервалом.
- ➔ $\mathbb{R}=]-\infty\ ;+\infty[$

III Les inéquations

Définition n°3.

Нерівність невідомого x - це нерівність, яка може бути істинною для певних значень x, які потім називаються рішеннями. Розв'язати цю нерівність у $\mathbb{R}$ означає знайти всі дійсні розв'язки.

Exemple n°2. ***Опишіть розв'язки нерівності***

держави:

Розв'яжіть нерівність $-3x+7 \geqslant 11$ і запишіть усі розв'язки у вигляді інтервалу та зобразіть його графічно.

Відповідь:

$$-3x+7 \geqslant 11 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$

Remarque n°4.

Ми маємо на увазі propriété n°2 :

При розв'язуванні нерівності,

• додавання або віднімання того самого дійсного числа до кожного члена не змінює порядок,
• множення або ділення членів на те саме додатне число не змінює порядок,
• множення або ділення членів на те саме від'ємне число змінює порядок.

IV Напрям варіації та знак афінної функції

По всьому абзацу, $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto mx+p \end{cases}$ з m і p дійсні числа, є афінною функцією.

Propriété n°4. ***Відкликати***

Для будь-якої афінної функції збільшення функції пропорційне зростанню змінної:

I $a \neq b$ потім

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}$$

preuve :

Comme f est affine, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx+p$ avec $p \in \mathbb{R}$.
Pour $a \neq b$, on peut écrire :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma+p-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Remarque n°5. ***Напрямок зміни афінної функції***

Попередня властивість говорить нам, що якщо $m>0$, то зображення розташовуються в тому ж порядку, що й абсциси (ми говоримо, що функція зростає), а якщо $m<0$, то зображення розташовуються в порядку, протилежному порядку абсцис (ми говоримо: що функція спадна).

$m<0$	$m>0$
f строго спадає	f строго зростає

Варіаційні таблиці

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Définition n°4. ***Корінь афінної функції***

Припустимо $m\neq 0$.
Ми називаємо корінь f дійсного числа x_0 таким, що $f(x_0)=0$

Propriété n°5.

$$x_0=\frac{-p}{m}$$

Remarque n°6.

Точка координати $(x_0\ ;\ 0)$ є точкою перетину кривої, що представляє f , з віссю абсцис.

Propriété n°6. ***Ознака афінної функції***

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$

Таблиці знаків

$m<0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$m>0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

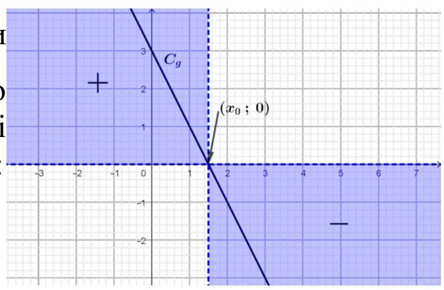
Exemple n°3.

для $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -2x+3\end{cases}$, $m=-2$ et $p=3$

▪ Подібно до $m<0$, ми маємо наступну таблицю варіацій:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Позуємо $x_0=\frac{-p}{m}=\frac{-3}{-2}=1{,}5$, тоді ми знаємо, що лінія, яка представляє функцію g , перетинає вісь абсцис у точці $(1{,}5\ ;\ 0)$, і ми маємо таку таблицю знаків:



x	$-\infty$	$1{,}5$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

V Короткий зміст курсу

Зазначені властивості залишаються дійсними з символами $<$; $\geqslant$ і $\leqslant$

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$$

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c} \qquad \boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$$

Si $d>0$

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad>bd}$$

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$$

$d<0$

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad<bd}$$

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$$

бути a, b, c et d чотири дійсних числа.

$$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$$

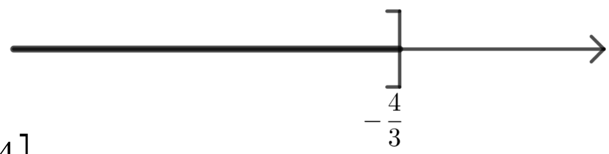
Попередження: нерівності можна складати, але не можна віднімати.

- ➔ Інтервали $[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ et $]a\ ;\ b]$ є обмеженими інтервалами, а a і b називаються межами.
- ➔ Амплітуда інтервалу варто $b-a$
- ➔ $[a\ ;\ b]$ є замкненим інтервалом і $]a\ ;\ b[$ є відкритим інтервалом.
- ➔ $\mathbb{R}=]-\infty\ ;\ +\infty[$

Résoudre une inéquation

Énoncé :

Розв'яжіть нерівність $-3x+7\geqslant 11$ *і запишіть усі розв'язки у вигляді інтервалу та зобразіть його графічно.*



$$-3x+7\geqslant 11 \Leftrightarrow -3x\geqslant 4 \Leftrightarrow x\leqslant -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$

Réponse :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$ афінна функція

$m<0$: f строго зменшується

$m>0$: f строго зростає

Варіаційні таблиці

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Таблиці знаків

$m<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$m>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	