LES SUITES NUMÉRIQUES E07C

EXERCICE N°3 Du concret : Héritage

Mathilde a reçu 80 000 € en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 8%. Mais chaque année, elle doit retirer 4000 € pour payer les impôts dus à ce placement. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement. On a donc $C_0 = 80\,000$.

1) Expliquer pourquoi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation suivante: $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.

Une augmentation de 8 % correspond à un coefficient multiplicateur valant 1,08.
Ainsi, chaque année le capital est multiplié par 1,08. Ensuite Mathilde retire 4000 € à ce nouveau montant pour payer les impôts.
Au final pour passer d'un terme au suivant, on multiplie le terme par 1,08 puis on enlève 4000 au résultat : $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.

2) Calculer à la calculatrice les premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? Géométrique ?

On peut utiliser la calculatrice… En général trois termes suffisent

▪ Calculons les trois premiers termes :

$\boxed{C_0 = 80\,000}$;

$C_1 = 1{,}08\times 80\,000-4000$, ainsi $\boxed{C_1 = 82\,400}$

$C_2 = 1{,}08\times 82\,400-4000$, ainsi $\boxed{C_2 = 84\,992}$

▪ Montrons que la suite n'est pas arithmétique :

Bien sûr, on a d'abord fait les calculs au brouillon pour savoir où l'on va...

$C_1 - C_0 = 82400-80000 = 2400$

$C_2 - C_1 = 84922-82400 = 2592$

Les différence successives ne sont pas toutes égales donc la suite ne peut pas être arithmétique.

▪ Montrons que la suite n'est pas géométrique :

Bien sûr, on a d'abord fait les calculs au brouillon pour savoir où l'on va…

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{82\,400}{80000} = 1{,}03$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{84\,992}{82\,400} \approx 1{,}031$$

Les quotients successifs ne sont pas tous égaux donc la suite ne pas être géométrique.

3) On considère la suite auxiliaire (U_n) définie par : $U_n = C_n-50\,000$.

3.a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

▪ $U_0 = C_0-50\,000 = 80000-50000 = 30000$

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= C_{n+1}-50\,000 \\ &= 1{,}08\,C_n-4000-50000 \\ &= 1{,}08\,C_n-54000 \\ &= 1{,}08\left(C_n-\frac{54000}{1{,}08}\right) \\ &= 1{,}08\left(C_n-50000\right) \\ &= 1{,}08\,U_n \end{aligned}$$

« Astuce » à retenir : on met « de force » en facteur et « Oh miracle... »

▪ On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = 1{,}08}$ et de premier terme $\boxed{U_0 = 30000}$.

3.b) Exprimer U_n puis C_n en fonction de n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = C_n - 50\,000 \Leftrightarrow C_n = U_n + 50000$

Or, d'après la question précédente la suite U est géométrique et on peut écrire $U_n = 30000 \times 1{,}08^n$.

Donc, en remplaçant :

$C_n = 30000 \times 1{,}08^n + 50000$

3.c) De quelle somme Mathilde disposera-t-elle au bout de 5 ans ?

Il s'agit de calculer C_5

$C_5 = 30000 \times 1{,}08^5 + 50000 \approx 94079{,}84$

Mathilde disposera d' $\boxed{\text{environ } 94\,079{,}84 \text{ €}}$.

3.d) Mathilde veut acheter une maison à 180000 €. Combien d'années devra-t-elle attendre avant de disposer de cette somme ?

Avec l'aide de la calculatrice,

$C_{19} \approx 179041{,}03$ et $C_{20} \approx 189\,828{,}71$

Il est important de montrer que C_{20} est bien le premier terme qui convient, c'est pour cela qu'il faut donner la valeur de C_{19} .

On en déduit que $\boxed{\text{Mathilde devra attendre } 20 \text{ ans}}$.