LA FONCTION RACINE CARRÉE

I Qu'est ce qu'une racine carrée ?

Définition n°1. ***Racine carrée***

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée de *a***

et on note $\sqrt{a}$ le nombre **positif** dont **le carré vaut *a***.

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

Exemple n°1.

- $\sqrt{64}=8$ en effet $8^2=64$ ($(-8)^2=64$ aussi mais $-8<0$)
- $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ à 0,001 près : une racine carrée n'est pas forcément un entier.
- $\sqrt{-64}$ n'existe pas et ne s'écrit pas…
- $-\sqrt{64}$ existe et vaut -8 .
- $\sqrt{0}=0$ et $\sqrt{1}=1$

Remarque n°1.

D'après la définition, pour a un nombre **positif**. $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E01

EXERCICE N°1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) 49 est le carré de 7.

2) 8 a pour carré 64.

3) -9 a pour carré -81.

4) 144 est le carré de -12.

5) $(-3)^2$ est le carré de 3.

EXERCICE N°2

Écrire chaque nombre sous la forme du carré d'un nombre positif.

1) 16 **2)** 25 **3)** 0 **4)** 0,36 **5)** 1 **6)** 0,04

EXERCICE N°3

Les nombres suivants ont-ils une racine carrée ? Si oui, laquelle ?

1) 100 **2)** 9 **3)** -36 **4)** $(-8)^2$

5) 169 **6)** -1 **7)** -52 **8)** π

LA FONCTION RACINE CARRÉE E01

EXERCICE N°4

Peut-on déterminer la racine carrée des nombres suivants ? Justifier.

1) $\left(\sqrt{8}\right)^2$ **2)** $\sqrt{5}$ **3)** $\dfrac{-5}{-7}$ **4)** $-2\times(-5)^2$

5) $\pi-4$ **6)** 5×10^{-2} **7)** $4-\pi$

II Opérations élémentaires et racines carrées

Propriété n°1. ***La racine du produit égale le produit des racines***

Soient a et b deux nombres positifs. $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

preuve :

- Si $a=0$ et/ou $b=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)

- Supposons à présent que $a>0$ **et** $b>0$

Alors $\sqrt{a\times b}>0$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$

- La remarque n°1 nous permet d'affirmer que :

$\left(\sqrt{a\times b}\right)^2=a\times b$ et que $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2=a\times b$.

- On peut alors écrire :

$$0=a\times b-a\times b=\left(\sqrt{a\times b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\left[\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right]\left[\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right]$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ne peut pas être nul

donc $\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}=0$ qui équivaut à $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

cqfd.

Remarque n°2.

En particulier, pour $\boxed{a\geqslant 0,\quad \sqrt{a^2}=a}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E02

EXERCICE N°1

Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ (a étant un entier positif).

1) $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ **2)** $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$ **3)** $2\sqrt{3}$ **4)** $3\sqrt{2}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E02

EXERCICE N°2

1) Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ (a est un entier positif). $A=\sqrt{8}\times\sqrt{5}$ et $B=3\sqrt{11}$

2) Sans effectuer de calcul, donner alors les valeurs exactes de A^2 et de B^2 .

Propriété n°2. ***La racine du quotient égale le quotient des racines***

Soient a un nombre positif et b un nombre strictement positif. $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

preuve :

Si $a = 0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)

Supposons à présent que $a > 0$.

- Avec la remarque n°1 : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$
- On peut alors écrire : $0 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq 0$ donc $\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 0$ qui équivaut à $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *cqfd.*

LA FONCTION RACINE CARRÉE E03

EXERCICE N°1

Écrire sans radical et sous forme de fraction irréductible, les expressions suivantes :

1) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **2)** $\sqrt{\frac{1}{16}}$ **3)** $\sqrt{\frac{49}{25}}$

EXERCICE N°2

Donner la valeur exacte des expressions suivantes :

1) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ **2)** $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ **3)** $\left(2\sqrt{3}\right)^2$

4) $\sqrt{4{,}5}\times\sqrt{2}$ **5)** $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{14}}$ **6)** $\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

Remarque n°3. ***Attention ! Pas de somme ou de différence***

De manière générale, la racine de la somme ou de la différence n'égale pas la somme ou la différence des racines.

Exemple n°2.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Propriété n°3. ***Racine carrée et distance à zéro***

Soit a un nombre réel : $\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \text{ , } \sqrt{a^2}=a \\ \text{Si } a<0 \text{ , } \sqrt{a^2}=-a \end{cases}$

preuve :

Si $a \geqslant 0$ alors, d'après la remarque n°2, $\sqrt{a^2}=a$

Si $a<0$ alors $-a>0$ et comme $(-a)^2=a^2$ on peut appliquer le point précédent pour conclure.

Remarque n°4. ***Valeur absolue de a :*** $|\boldsymbol{a}|$

La propriété n°3 nous dit que :

Pour $a \in \mathbb{R}$ $\sqrt{a^2}$ vaut la **distance à zéro de *a***.

(On dira maintenant : « **valeur absolue de *a*** »)

On notera alors $\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|\ a\ |}$

et on lira « La racine carrée du carré d'un nombre égale sa valeur absolue ».

LA FONCTION RACINE CARRÉE E04

EXERCICE N°1

1) Soit x un nombre positif. Résoudre les équations suivantes :

1.a) $\sqrt{x^2}=15{,}1$ **1.b)** $\sqrt{x^2}=25$ **1.c)** $\sqrt{x^2}=-7{,}1$

2) Soit x un nombre quelconque. Résoudre les équations suivantes :

2.a) $\sqrt{x^2}=15{,}1$ **2.b)** $\sqrt{x^2}=25$ **2.c)** $\sqrt{x^2}=-7{,}1$

III Simplification de racine carrée

Il s'agît de savoir faire ce que fait votre calculatrice : Faire en sorte que le nombre sous le radical soit un entier le plus petit possible.

Méthode n°1. ***Simplifier une racine carrée***

Énoncé :

Écrire $\sqrt{675}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

Réponse :

Au brouillon :

$\sqrt{675}\approx 25{,}98$ Comme 25 est le plus grand entier inférieur à 25,98 , on commence de cette façon :

Est-ce que 25^2 est un diviseur de 675 ? Non $\frac{675}{625}\notin\mathbb{N}$

Est-ce que 24^2 est un diviseur de 675 ? Non $\frac{675}{576}\notin\mathbb{N}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Est-ce que 15^2 est un diviseur de 675 ? Oui $\frac{675}{225}=3 \in \mathbb{N}$

Sur la copie :

$$\sqrt{675}=\sqrt{15^2\times 3}=\sqrt{15^2}\times\sqrt{3}=\mathbf{15\sqrt{3}}$$

Remarque n°5.

Si une expression comporte plusieurs racines carrées, on les simplifie une à une avec la méthode précédente.

LA FONCTION RACINE CARRÉE E05

EXERCICE N°1

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$A=\sqrt{32}$ $B=\sqrt{75}$ $C=\sqrt{500}$ $D=\sqrt{80}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E05

EXERCICE N°2

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ **2)** $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ **3)** $\sqrt{7}\times3\sqrt{14}$ **4)** $7\sqrt{2}\times5\sqrt{70}$

EXERCICE N°3

Sans utiliser de calculatrice, transformer les expressions suivantes de façon à obtenir une fraction irréductible.

1) $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{75}}$ **2)** $\dfrac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}$ **3)** $\sqrt{\dfrac{28}{42}}\times\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$

EXERCICE N°4

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{2}$ ou $a\sqrt{3}$ où a est un entier relatif.

1) $A=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ **2)** $B=7\sqrt{3}-9\sqrt{3}$ **3)** $C=\sqrt{3}-8\sqrt{3}+15\sqrt{3}$

4) $D=3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}$ **5)** $E=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ **6)** $F=5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

EXERCICE N°5

Simplifier les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont entiers et b le plus petit possible.

$G=\sqrt{50}+\sqrt{18}-2\sqrt{8}$

$H=\sqrt{12}-7\sqrt{27}+\sqrt{3}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E06

EXERCICE N°1

Effectuer les calculs suivants. Écrire les résultats sous la forme où $a+b\sqrt{c}$ a, b et c sont des entiers relatifs avec c le plus petit possible.

$A=(\sqrt{3}-2)(5\sqrt{3}+4)$

$B=(7-2\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{16})$

$C=(5\sqrt{5}-5)(5+3\sqrt{5})$

$D=(4-3\sqrt{18})(6-4\sqrt{2})$

LA FONCTION RACINE CARRÉE E06

EXERCICE N°2

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A=\left(\sqrt{11}+4\right)^2$ $\quad B=\left(2\sqrt{6}-7\right)^2$ $\quad C=\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2$

$D=\left(5\sqrt{12}-6\sqrt{5}\right)^2$ $\quad E=\left(\sqrt{13}+4\right)\left(3\sqrt{13}-4\right)$

EXERCICE N°3

Montrer que E et F sont des nombres entiers.

$E=(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

$F=(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)$

EXERCICE N°4

1) Calculer le nombre suivant :

$$\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}.$$

2) Compléter l'expression précédente avec des radicaux de manière à ce que le résultat du calcul soit égal à 9.

3) Faire de même pour que le résultat soit 12.

LA FONCTION RACINE CARRÉE

IV Étude de la fonction racine carrée

Définition n°2.

La fonction racine carrée est la fonction $g:\begin{cases}[0\ ;\ +\infty[\rightarrow \mathbb{R}\\ x \mapsto \sqrt{x}\end{cases}$

Propriété n°4.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

preuve :

Soient a et b des réels tels que $0 \leqslant a < b$.
Nous devons montrer qu'alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
$a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < 0$
D'après la règle des signes, les facteurs $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont de signes contraires.
Or, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$ (voir la définition n°1 si vous n'êtes pas convaincu…)
Donc $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$ qui équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarque n°6.

On en déduit que la fonction racine carrée conserve les inégalités.

LA FONCTION RACINE CARRÉE E07

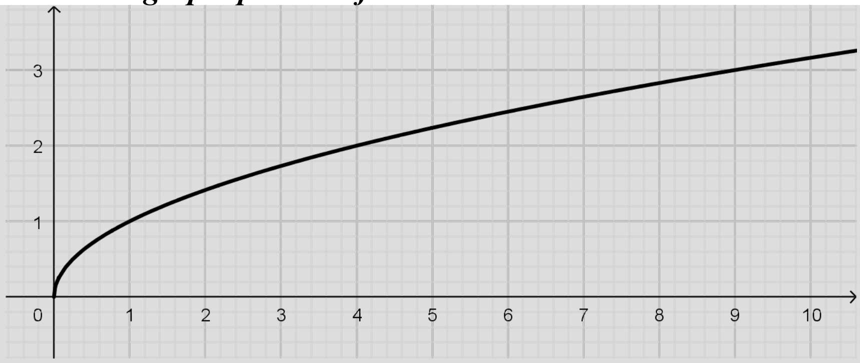
EXERCICE N°1

Comparer les nombres suivants :

1) $\sqrt{12}$ et $\sqrt{10}$ **2)** $\sqrt{0,7}$ et $\sqrt{1,3}$ **3)** $\sqrt{1,5}$ et $\sqrt{1,6}$

LA FONCTION RACINE CARRÉE

Définition n°3. ***Représentation graphique de la fonction racine carrée***



La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.

LA FONCTION RACINE CARRÉE

V Équations et inéquations avec la fonction racine carrée

Propriété n°5. ***L'équation*** $\sqrt{x}=k$ ***avec*** $k \in \mathbb{R}$

Soit k un nombre réel.

- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

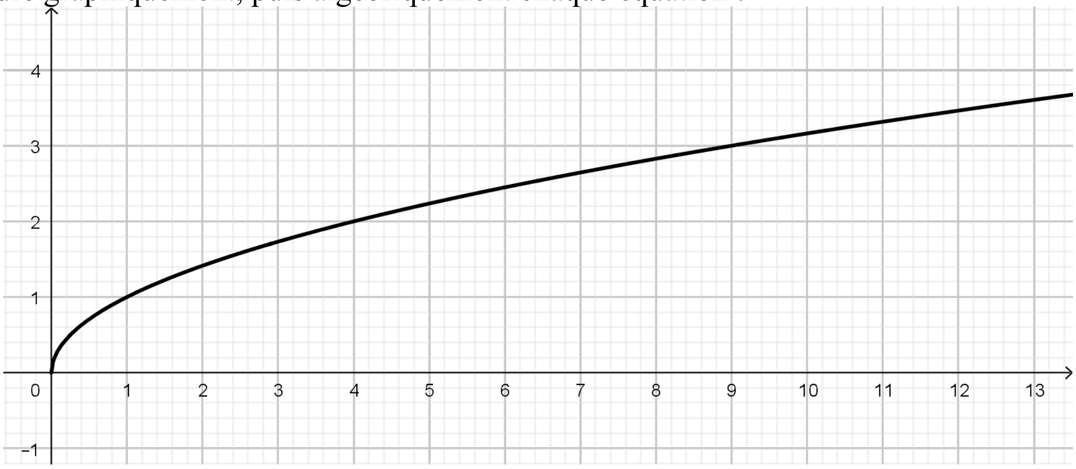
preuve :

Évidente avec la définition n°1

LA FONCTION RACINE CARRÉE E07

EXERCICE N°2

Résoudre graphiquement, puis algébriquement chaque équation :



1) $\sqrt{x} = 3{,}5$ **2)** $\sqrt{x} = 2$ **3)** $\sqrt{x} = 0{,}5$

LA FONCTION RACINE CARRÉE

Propriété n°6. ***Les inéquations***

Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S = \left]k^2\ ;\ +\infty\right[$	$S = \left[0\ ;\ +\infty\right[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = \left[k^2\ ;\ +\infty\right[$	$S = \left[0\ ;\ +\infty\right[$
$\sqrt{x} < k$	$S = \left[0\ ;\ k^2\right[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = \left[0\ ;\ k^2\right]$	Aucune solution

preuve :

À titre d'exercice (indice : pensez aux variations de la fonction carré),

LA FONCTION RACINE CARRÉE E07

EXERCICE N°3

Résoudre graphiquement, puis algébriquement chaque inéquation :

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$ **2)** $\sqrt{x} < 4$ **3)** $\sqrt{x} > 1{,}5$

4) $\sqrt{x} \leqslant -4$ **5)** $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{1}{4}$ **6)** $\sqrt{x} > -1$

Propriété n°7. ***Le cas*** $\sqrt{(x-a)^2} \leqslant k$ ***c'est à dire*** $|x-a| \leqslant k$

Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k\ ;\ a+k]$.

LA FONCTION RACINE CARRÉE E07

EXERCICE N°4

Dans chaque cas répondre à la question à l'aide d'un intervalle ou une réunion d'intervalle.

1) Résoudre les inéquations suivantes :

1.a) $|x-3| \leqslant 7$

1.b) $|x+3| \leqslant 7$

1.c) $|x-3| < 7$

1.d) $|x-3| \geqslant 7$

2) Quels sont les nombres dont la distance à 3 est inférieure ou égale à 7 ?

3) Quels sont les nombres dont la distance à -3 est inférieure ou égale à 7 ?

4) Quels sont les nombres dont la distance à 3 est strictement inférieure à 7 ?

5) Quels sont les nombres dont la distance à 3 est supérieure ou égale à 7 ?

VI Le résumé du cours

➔ Pour un nombre réel strictement positif a, il existe deux nombres opposés dont le carré vaut a : Seul celui qui est positif est noté $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

➔ Pour a **et** b **des nombres réels positifs ou nuls** :

Produit et quotient : OK

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$$

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$\boxed{a \geqslant 0,\quad \sqrt{a^2} = a}$$

$$\boxed{\text{Si } b>0,\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Somme et différence : ATTENTION PAS DE FORMULE

➔ Pour a **un nombre réel quelconque** (cette fois il peut être négatif)

$$\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \ , \ \sqrt{a^2} = a \\ \text{Si } a < 0 \ , \ \sqrt{a^2} = -a \end{cases}$$

On résume cela en écrivant : $\boxed{\sqrt{a^2} = |\, a \,|}$ se lit « valeur absolue de a »

➔ La fonction racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs : $[0\ ;\ +\infty[$

➔ La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

➔ La fonction racine carrée conserve les inégalités (cela veut dire qu'on ne change pas une inégalité en extrayant la racine carrée de chaque membre).

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.

➔ Soit k un nombre réel.

- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

➔ Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S =]k^2\ ;\ +\infty[$	$S = [0\ ;\ +\infty[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = [k^2\ ;\ +\infty[$	$S = [0\ ;\ +\infty[$
$\sqrt{x} < k$	$S = [0\ ;\ k^2[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = [0\ ;\ k^2]$	Aucune solution

➔ Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k\ ;\ a+k]$