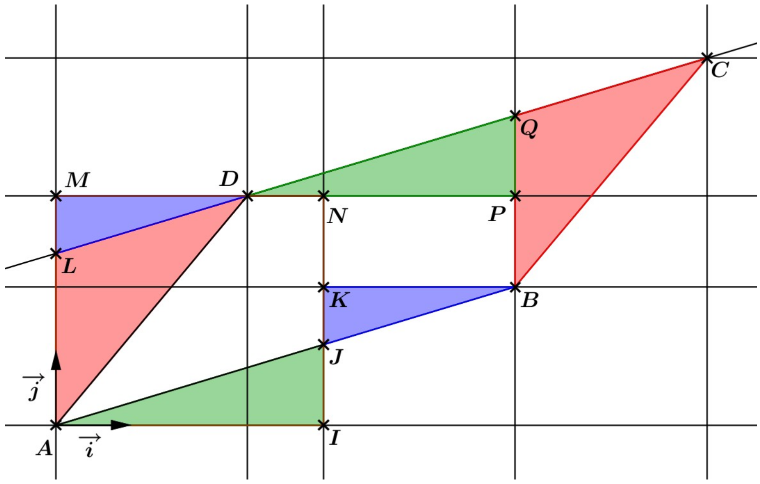
PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E02

EXERCICE N°1 ***Calculer l'aire d'un parallélogramme avec des vecteurs (Le corrigé)***

On considère la figure ci-contre, dans laquelle :

- $(A\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ est un repère orthonormé;
- $ABCD$ est un parallélogramme;
- les triangles AIJ et DPQ sont égaux;
- les triangles ALD et BQC sont égaux;
- les triangles LMD et JKB sont égaux.



1) Montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à la somme des aires des rectangles $AMNI$ et $KNPB$.

À l'aide de la figure et des données de l'énoncé, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{ADNJ} + \underbrace{A_{KBJ}}_{bleu} + \underbrace{A_{DQP}}_{vert} + \underbrace{A_{BQC}}_{rouge} + A_{KNPB} \\ &= A_{ADNJ} + \underbrace{A_{LMD}}_{bleu} + \underbrace{A_{AJI}}_{vert} + \underbrace{A_{ALD}}_{rouge} + A_{KNPB} \\ &= A_{AMNI} + A_{KNPB} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $A_{ABCD} = A_{AMNI} + A_{KNPB}$

2) On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ celles de $\overrightarrow{AD}$.

On suppose que $0 < x' < x$ et que $0 < y < y'$.

2.a) Montrer que $MN = x - x'$.

Comme A est l'origine du repère : $B(x\ ;\ y)$ et $D(x'\ ;\ y')$

On sait que $MN = MP - NP$

$= MP - KB$ (car $KNPB$ est un rectangle)

$= MP - MD$ (car les triangles bleus sont égaux)

Or :

P et B ont la même abscisse, donc $MP = x$

et

$MD = x'$

On a donc bien $MN = x - x'$

2.b) En déduire que l'aire du rectangle $AMNI$ est égale à $(x - x')y'$.

On sait que $A_{AMNI} = MN \times AM$

Or :

M et D ont la même ordonnée, donc $AM = y'$

On a donc bien $A_{AMNI} = (x - x')y'$

2.c) Montrer que l'aire du rectangle $KNPB$ est égale à $x'(y' - y)$.

$$\begin{aligned} A_{KNPB} &= NP \times NK \\ &= MD \times (IN - IK) \\ &= x'(y' - y) \end{aligned}$$

2.d) En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.

$$A_{ABCD} = A_{AMNI} + A_{KNPB} = (x - x')y' + x'(y' - y) = xy' - x'y' + x'y' - x'y = xy' - x'y$$

Ainsi $\boxed{A_{ABCD} = det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})}$

(dans le cas général, quand le résultat est négatif, on prend son opposé)