Вектори

I Переклади та вектори

Définition n°1. ***Переклад, який перетворює A на B.***

Розглянемо дві точки A і B площини. Ми називаємо трансляцією, яка перетворює A у B, трансформацією, яка в будь-якій точці M площини пов'язує єдину точку M' так, що $[AM']$ і $[BM]$ мають однакову середину.

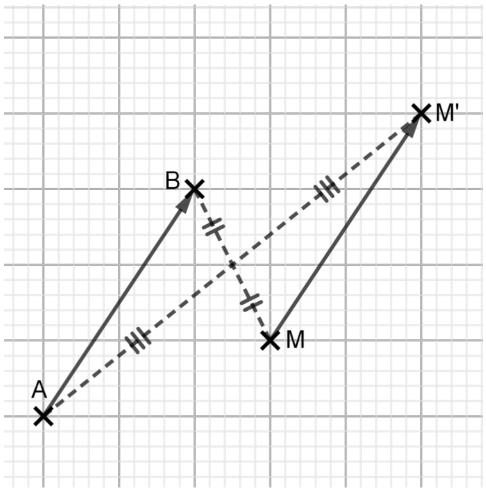


Figure 1

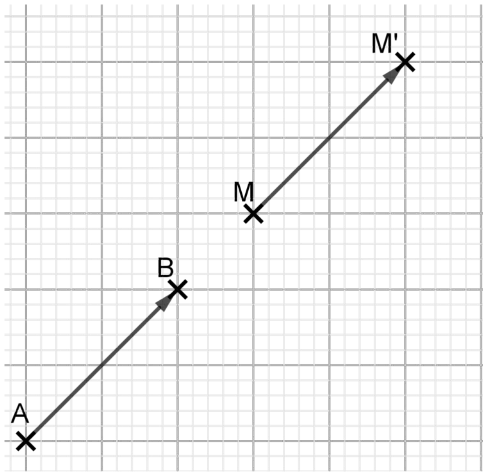


Figure 2

Точка M' є образом точки M шляхом переносу, який перетворює A в B.

Remarque n°1.

Переклад повністю визначається даними 3 частин інформації:
▪ Напрямок: ми рухаємося паралельно прямій (AB) ,
▪ Один напрямок: рухаються як від A до B
▪ A довжина: пройдена відстань дорівнює довжині AB.

Définition n°2. ***Вектор $\overrightarrow{AB}$, пов'язаний із трансляцією, яка перетворює A на B.***

Розглянемо дві точки A і B площини.
▪ Вектор $\overrightarrow{AB}$ — це дані 3 частин інформації, які характеризують переклад, який перетворює A на B.
▪ *Він* представлений стрілкою, як на *Figure* 1 і 2.
▪ A — це початок вектора $\overrightarrow{AB}$, а B — його кінець.

Définition n°3. ***Рівні вектори***

Два вектори є рівними, якщо вони визначають однаковий зсув.

Propriété n°1.

Нехай A, B, C і D — чотири точки.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇔ $ABCD$ — паралелограм.

preuve :

● $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇒ $(AB)//(DC)$
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇒ ABDC est non croisé.
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇒ $AB=DC$

Le quadrilatère ABDC, non croisé, a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.
C'est un parallélogramme.

● $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftarrow$ ABDC est un parallélogramme

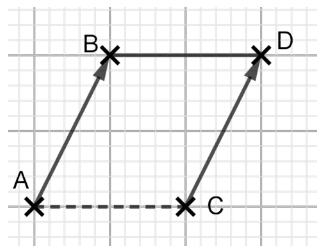


Figure 3

Le quadrilatère $ABDC$ étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux. En particulier $(AB)//(DC)$ et $AB=DC$
Enfin le nom $ABDC$ nous indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.

Ainsi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

II Vecteurs et opérations

Définition n°4. Додавання двох векторів

Нехай $\vec{u}$ і $\vec{v}$, ми помічаємо $t_{\vec{u}}$ і $t_{\vec{v}}$ відповідні переклади і $t_{\vec{w}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ (Для будь-якої точки X $t_{\vec{w}}(X)=t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(X))$)

$$\vec{u}+\vec{v}\overset{\text{def}}{=}\vec{w}$$

Remarque n°2.

Це дещо теоретичне визначення цього року нам не послужить. З іншого боку, наступна властивість буде нам набагато корисніша...

Propriété n°2. Стосунки Чазлса

Нехай A, B і C — три точки.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

preuve :

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ se résume par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(Pour comprendre la définition : $t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{AB}}=t_{\overrightarrow{AC}}$)

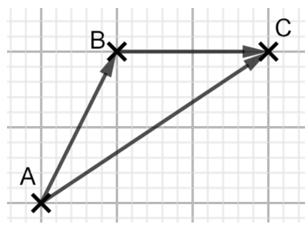


Figure 4

Propriété n°3. Правило паралелограма (сума двох векторів з однаковим початком координат)

Нехай A, B і C — три точки.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ де D точка така, що $ABCD$ є паралелограмом.

preuve :

▪ ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
▪ D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
▪ Il suffit alors de remplacer $\overrightarrow{BD}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans l'égalité précédente pour obtenir $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

(Il faut surtout retenir le dessin et l'égalité)

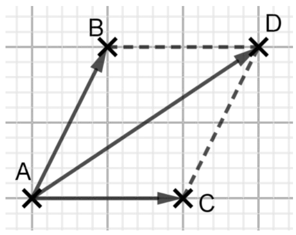


Figure 5

Définition n°5. Протилежний вектор, нульовий вектор

Нехай $\vec{u}$ — вектор, ми називаємо вектор, протилежний $\vec{u}$
і ми відзначаємо $-\vec{u}$ вектор :

→ який має той самий напрямок і ту саму довжину (або норму), що й $\vec{u}$
→ але значення якого протилежне значенню $\vec{u}$
Ми тоді $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
$\vec{0}$ називається нульовим вектором.

Exemple n°1.

$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$

mais aussi

$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

ou encore

$-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$

(пам’ятайте, що напрямок вектора читається за стрілкою над літерами)

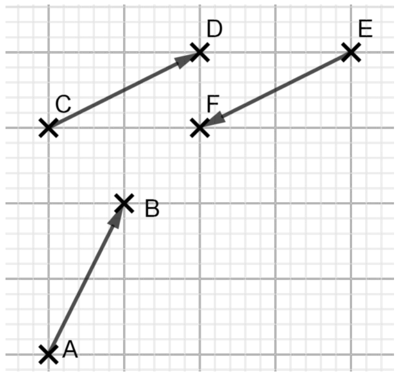


Figure 6

Définition n°6. ***Віднімання векторів***

Щоб відняти вектор, додайте його протилежний вектор.

Exemple n°2.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Propriété n°4. ***Vecteurs et milieu***

Нехай A, I і B — три точки.

$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ — середина } [AB]}$

$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ — середина } [AB]}$

preuve :

Залишили як вправу. (Надихніться властивістю №1)

Définition n°7. ***Множення вектора на скаляр (число)***

Нехай $\vec{u}$ і k — дійсне число. Ми називаємо добуток $\vec{u}$ на k і ми зазначаємо $k\cdot\vec{u}$ вектор :
який має той самий напрямок, що й $\vec{u}$,
що має таке саме значення, як $\vec{u}$, якщо $k>0$, або протилежне значення, якщо $k<0$
і норма (довжина) якої помножена на нульову відстань k .

Exemple n°3.

Ми можемо написати:

$\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH} = -0{,}5\cdot\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{FE}$

однак,

Немає числа k , наприклад $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{EF}$

(оскільки ці вектори не мають однакового напрямку)

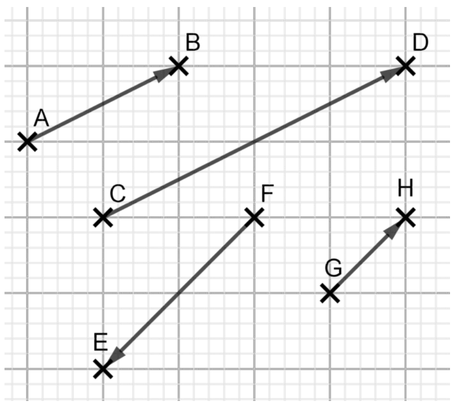


Figure 7

Remarque n°3.

Слід розуміти, що ми помножили вектор на число, і це не має нічого спільного з множенням двох векторів. Нам доведеться трохи просунутися в математиці, щоб говорити про це...

III Вектори і координати

У кадрі $(O \; ; \; I \; ; \; J)$ ми визначаємо два «базисні вектори»:

$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OI}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OJ}$

Для будь-якого вектора $\overrightarrow{AB}$ співвідношення Шалза дозволяє нам записати: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ при цьому C вибрано так, що (AC) // (OI) і (CB) // (OJ).

Тоді ми маємо:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = 6\cdot\vec{e}_1-4\cdot\vec{e}_2$

Напишемо простіше:
$\overrightarrow{AB}\ (6\ ;-4)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

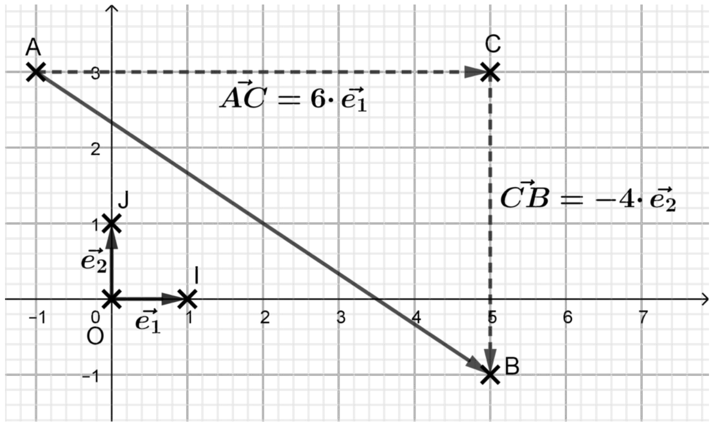


Figure 8

Définition n°8. ***Координати вектора***

У кадрі $(O\ ;I\ ;J)$ ми визначаємо два «базисні вектори»:

$\vec{e}_1=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{e}_2=\overrightarrow{OJ}$. Тоді для будь-якого вектора $\vec{u}$ існують два числа x і y такі, що $\vec{u}=x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2$

On appellera :

x абсциса $\vec{u}$

y ордината $\vec{u}$

$(x\ ,\ y)$ або $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ координати $\vec{u}$ у базі даних $(\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2)$

Remarque n°4.

Що стосується балів, ми будемо відзначати байдуже $\vec{u}(x\ ,\ y)$ або $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Méthode n°1. ***Обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$***

В рамці $(O\ ;I\ ;J)$ ми даємо собі $A(x_A\ ;\ y_A)$ і $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Координати $\overrightarrow{AB}$ дорівнюють $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Exemple n°4.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}5-(-1)\\-1-3\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

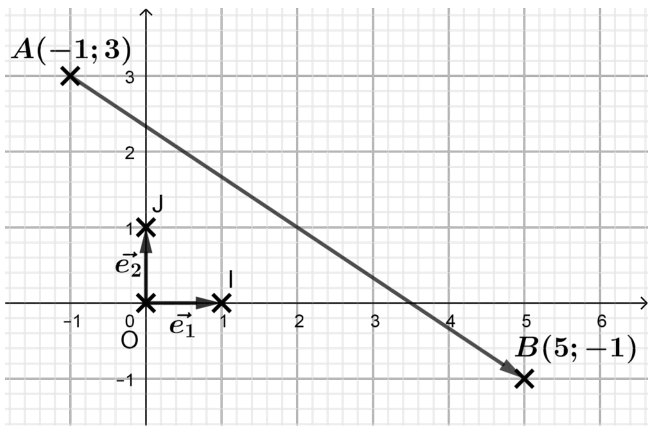


Figure 9

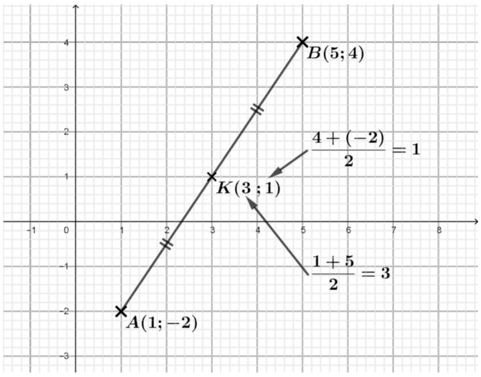
Propriété n°5. ***Координати середини відрізка***

В рамці $(O\ ;I\ ;J)$ ми даємо собі $A(x_A\ ;\ y_A)$ і $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Координати K посередині $[AB]$ є $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

preuve :

Notons $K(x_K \; ; \; y_K)$.



$$K \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_K + x_B - x_K = 0 \\ y_A - y_K + y_B - y_K = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_K = 0 \\ y_A + y_B - 2y_K = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_K \\ y_A + y_B = 2y_K \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{} = x_K \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = y_K \end{cases}$$

Propriété n°6. ***Векторні операції та координати***

У кадрі $(O \; ; \; I \; ; \; J)$ ми задаємо собі вектори $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ і $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, а також число k .

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ має координати $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$-\vec{u}$ має координати $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{u}$ має координати $\begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. Revenez à la définition n°8 et utilisez les définitions du deuxième paragraphe.

Exemple n°5.

Потім ми надаємо $\vec{u}\begin{pmatrix} -2,1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$ і $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, наприклад:

$3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$ має координати $\begin{pmatrix} 3\times(-2,1) - 2\times 3 \\ 3\times 2,3 - 2\times 1,5 \end{pmatrix}$ Де $\begin{pmatrix} -12,3 \\ 3,9 \end{pmatrix}$

Remarque n°5.

Нульовий вектор $\vec{0}$ має координати $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Propriété n°7. ***Обчислення норми вектора***

У позначці ORTHONORM $(O \; ; \; I \; ; \; J)$ ми даємо собі $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ тоді норма (або довжина) $\vec{u}$, яка записується $\|\vec{u}\|$, виходить завдяки рівності:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

preuve :

Ми використовуємо розкладання фігури n°8 і застосовуємо теорему Піфагора до трикутника, який є прямим, тому що точка відліку ортонормальна.

IV Колінеарність

Définition n°9. ***Колінеарні вектори***

У фреймі $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ нам задано два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$
Ми так говоримо

$\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні
якщо і тільки якщо
існує таке число k, що $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

Нульовий вектор колінеарен усім векторам.

Remarque n°6.

Відповідно до визначення №7, колінеарні вектори — це вектори, які мають однаковий напрямок.

Définition n°10. ***Визначник двох векторів***

Нехай $(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$ — ортонормований базис і два вектори $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ і $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

Визначник $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ в основі $(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$ називаємо числом

$\boxed{\boldsymbol{det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})\ =\ ad-bc}}$

Exemple n°6.

В ортонормальному базисі $(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$, для $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$:

$det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})\ =\ 4\times5-(-2)\times3\ =\ 26$

Propriété n°8.

В ортонормальному базисі , $(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$ ми віддаємо себе $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ і $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні $\Leftrightarrow$ $det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})\ =\ 0$

preuve :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})\ =\ 0$

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, alors il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $a=kc$ et $b=kd$

▪ Si $c=0$ alors $a=k\times0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $d=0$ alors $b=k\times0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $c\neq0$ et $d\neq0$ alors $\dfrac{a}{c}=k=\dfrac{b}{d}$, d'après l'égalité des produits en croix : $ad=bc$ qui équivaut à $ad-bc=0$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftarrow$ $det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})\ =\ 0$

$ad-bc=0$ équivaut à $ad=bc$

▪ Si $c\neq0$ et $d\neq0$ alors on pose $k=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

ainsi $a=kc$ et $b=kd$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $c=0$ alors $ad=0$ et $a=0$ ou $d=0$

  ▪ Si $d=0$ alors $\vec{v}=\vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

  ▪ Si $a=0$ et $d\neq0$ alors on pose $k=\dfrac{b}{d}$ ainsi

$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Les autres cas, $d=0$, $a=0$ et $b=0$ se traitent de la même façon et on obtient que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode n°2. Доведіть, що два вектори колінеарні чи ні.

Énoncé :

У ортонормальній системі $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ наступні вектори колінеарні? Якщо так, визначте коефіцієнт пропорційності.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-18\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$

Réponse :

1) $det(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})=2\times(-18)-6\times(-6)=0$

Ми виводимо, що $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні.

$$\frac{2}{-6}=\frac{6}{-18}=-\frac{1}{3}$$

Уточнюється, що $\vec{u}=-\frac{1}{3}\cdot\vec{v}$

2) $det(\overrightarrow{w}\ ,\ \overrightarrow{z})=-5\times(-7)-3\times12\ =\ -1\ \neq\ 0$

Ми виводимо, що $\vec{w}$ et $\vec{z}$ не є колінеарними.

V Короткий зміст курсу

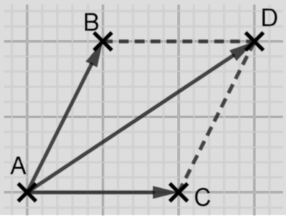
Вектор — це три частини інформації
- Напрямок (рухаємось по прямій)
- Напрямок (на цій лінії вибираємо напрямок)
- Стандарт або довжина

Нехай A, B, C і D — чотири точки.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad ABCD$ — паралелограм.

Стосунки Чазлса $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Правило паралелограма



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ де D — така точка, що $ABCD$ — паралелограм.

Протилежний вектор : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ той же напрямок, той же стандарт, протилежний напрямок

нульовий вектор : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\dots$

$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I \text{ знаходиться в середині } [AB]}$

$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow I \text{ знаходиться в середині } [AB]}$

У кадрі $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ ми даємо собі $A(x_A\ ;\ y_A)$; $B(x_B\ ;\ y_B)$

$\boxed{\text{Контактні дані } \overrightarrow{AB} \text{ є } \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}}$

і якщо $K(x_K\ ;\ y_K)$ є серединою $[AB]$: $\boxed{K\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)}$

Ми даємо собі $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ і вектори $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, а також число k .

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ має координати } \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}}$ $\boxed{-\vec{u} \text{ має координати } \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}}$

$\boxed{k\cdot\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}}$

$\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні
якщо і тільки якщо
існує таке число k, що $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ і } \vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ колінеарні} \Leftrightarrow det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=ad-bc=0}$

Якщо позначка ORTHONORME $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}}$