LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

Écrire sous forme décimale, chacun des nombres suivant :

1) $\log\left(10^3\right)$

$\log\left(10^3\right) = 3$

2) $\log\left(10^8\right)$

$\log\left(10^8\right) = 8$

3) $\log\left(10^{-4}\right)$

$\log\left(10^{-4}\right) = -4$

4) $\log\left(10^{\frac{7}{3}}\right)$

$\log\left(10^{\frac{7}{3}}\right) = \dfrac{7}{3}$

5) $\log\left(10^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

$\log\left(10^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

6) $\log\left(1\,000\,000\right)$

$\log\left(1\,000\,000\right) = 6$

7) $\log\left(0{,}000\,01\right)$

$\log\left(0{,}000\,01\right) = -5$

8) $\log\left(\dfrac{1}{0{,}000\,001}\right)$

$\log\left(\dfrac{1}{0{,}000\,001}\right) = 6$

9) $\log\left(\dfrac{1}{100\,000}\right)$

$\log\left(\dfrac{1}{100\,000}\right) = -5$

Les 5 premiers découlent directement de la définition.

Pour 6) $1\,000\,000=10^6$,

pour 7) $0{,}000\,01=10^{-5}$,

pour 8) $\dfrac{1}{0{,}000\,001}=\dfrac{1}{10^{-6}}=10^{-(-6)}=10^6$,

et pour 9) $\dfrac{1}{100\,000}=\dfrac{1}{10^5}=10^{-5}$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Dans chacun des cas suivants, comparer les nombres donnés sans utiliser la calculatrice.

1) $\log(\pi)$ et $\log(3{,}14)$

$\pi > 3{,}14$

Comme la fonction log est strictement croissante, elle conserve les inégalités.

Donc : $\boxed{\log(\pi) > \log(3{,}14)}$

2) $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$

$\sqrt{2} < \sqrt{3}$

Comme la fonction log est strictement croissante, elle conserve les inégalités.

Donc $\boxed{\log(\sqrt{2}) < \log(\sqrt{3})}$

3) $\log(5{,}1\times10^{-3})$ et $\log(5{,}1\times10^{-4})$

$5{,}1\times10^{-3} > 5{,}1\times10^{-4}$

Comme la fonction log est strictement croissante, elle conserve les inégalités.

Donc $\log(5{,}1\times10^{-3}) > \log(5{,}1\times10^{-4})$

4) Pour $x>1$: $\log(x^3)$ et $\log(x^2)$

Pour $x>1$ $x^3 > x^2$

Comme la fonction log est strictement croissante, elle conserve les inégalités.

Donc $\log(x^3) > \log(x^2)$

1) est direct avec le cours.

Pour 2) $2 < 3$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante, elle conserve les inégalités.

(lire ce cours page 3, définition n°2, propriété n°4 et remarque n°6)

3) est direct avec le cours

Pour 4) Lire ce cours page 2, propriété n°4.

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Donner le signe des nombres suivants :

1) $\log\left(10^3\right)$

$\log\left(10^3\right) > 0$

2) $\log(9{,}73)$

$\log(9{,}73)$

3) $\log(0{,}91)$

$\log(0{,}91) < 0$

4) $\log(1{,}001)$

$\log(1{,}001) > 0$

5) $\log(0{,}99)$

$\log(0{,}99) < 0$

6) $\log(\pi - 3)$

$\log(\pi - 3) < 0$

7) $\log(741{,}23)$

$\log(741{,}23) > 0$

8) $\log\left(\dfrac{1}{\pi - 3}\right)$

$\log\left(\dfrac{1}{\pi - 3}\right) > 0$

On compare le nombre dans les parenthèses à 1. Si il est plus grand que 1, le résultat est positif, si il est plus petit que 1, le résultat est négatif et si il est égal alors le résultat est nul.

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

1) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$:

1.a) $\log(8\times10^3)$

$\boxed{3\log(2)+3}$

1.b) $\log(1\,600)$

$\boxed{4\log(2)+2}$

1.c) $\log(0{,}32)$

$\boxed{5\log(2)-2}$

1.a) $\log(8\times10^3) = \log(8)+\log(10^3) = \log(2^3)+3 = 3\log(2)+3$

1.b) $\log(1\,600) = \log(16\times100) = \log(16)+\log(100) = \log(2^4)+2 = 4\log(2)+2$

1.c) $\log(0{,}32) = \log(32\times10^{-2}) = \log(32)+\log(10^{-2}) = \log(2^5)-2 = 5\log(2)-2$

2) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(3)$:

2.a) $\log(27)$

$\boxed{3\log(3)}$

2.b) $\log(0{,}09)$

$\boxed{2\log(3)-2}$

2.c) $\log(0{,}008\,1)$

$4\log(3)-4$

2.a) $\log(27) = \log(3^3) = 3\log(3)$

2.b) $\log(0{,}09) = \log(9\times10^{-2}) = \log(9)+\log(10^{-2}) = \log(3^2)-2 = 2\log(3)-2$

2.c) $\log(0{,}0081) = \log(81\times10^{-4}) = \log(81)\times\log(10^{-4}) = \log(3^4)-4 = 4\log(3)-4$

3) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(a)$:

3.a) $\log(a^2\times a^3)$

$\boxed{5\log(a)}$

3.b) $\log\left(\dfrac{a^{-7}}{a^3}\right)$

$\boxed{-10\log(a)}$

3.c) $\log\left(\dfrac{1}{a^4}\right)$

$-4\log(a)$

3.a) $\log(a^2\times a^3) = \log(a^{2+3}) = \log(a^5) = 5\log(a)$

3.b) $\log\left(\dfrac{a^{-7}}{a^3}\right) = \log(a^{-7-3}) = \log(a^{-10}) = -10\log(a)$

3.c) $\log\left(\dfrac{1}{a^4}\right) = \log(a^{-4}) = -4\log(a)$

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2000\times 0{,}4^x = 3000$

$$\begin{aligned} & 2000\times 0{,}4^x = 3000 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}4^x = 1{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & \log(0{,}4^x) = \log(1{,}5) \\ \Leftrightarrow\ & x\log(0{,}4) = \log(1{,}5) \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\log(1{,}5)}{\log(0{,}4)} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation admet $\boxed{\text{une unique solution : } \frac{\log(1{,}5)}{\log(0{,}4)}}$ dont une valeur approchée est $\boxed{-0{,}443 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $15\times 2^x < 8$

$$\begin{aligned} & 15\times 2^x < 8 \\ \Leftrightarrow\ & 2^x < \frac{8}{15} \\ \Leftrightarrow\ & \log(2^x) < \log\left(\frac{8}{15}\right) \end{aligned}$$

(car la fonction log est strictement croissante)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & x\log(2) < \log\left(\frac{8}{15}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)} \approx -0{,}901 \end{aligned}$$

$(\log(2) > 0$ donc le sens de l'inégalité ne change pas)

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left]-\infty\ ;\ \frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)}\right[}$

Si on veut écrire l'ensemble des solutions, il faut garder la valeur exacte. Dans la pratique, on utilise la valeur approchée...

$$\frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)} = \frac{\log(8)-\log(15)}{\log(2)} = \frac{\log(2^3)-\log(15)}{\log(2)} = \frac{3\log(2)-\log(15)}{\log(2)} = 3 - \frac{\log(15)}{\log(2)}$$

$$= 3 - \frac{\log(3)+\log(5)}{\log(2)}$$

L'expression finale est-elle plus simple que l'expression de départ ? … Bof

À notre niveau, en général, on ne se fatiguera donc pas avec cette étape.

(L'époque des tables de log est révolue depuis longtemps...)

EXERCICE N°6 (Le corrigé)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-480\times 0{,}5^x+72 > -4799928$

$-480\times 0{,}5^x+72 > -4799928$

$\Leftrightarrow -480\times 0{,}5^x > -4800000$

On ne change pas le sens d'une inégalité en retranchant un même nombre à chaque membre.

$\Leftrightarrow 0{,}5^x < \dfrac{-4800000}{-480}$

On change le sens d'une inégalité en divisant chaque membre par un même nombre strictement négatif.

$\Leftrightarrow 0{,}5^x < 10000$

La fonction log étant strictement croissante, elle ne change pas les inégalités.

$\Leftrightarrow \log\left(0{,}5^x\right) < \log(10000)$

$\Leftrightarrow x\times\log(0{,}5) < 4$

Grâce à la propriété n°6.

$\Leftrightarrow x > \dfrac{4}{\log(0{,}5)}$

Car $\log(0{,}5)$ est négatif.

Ainsi $-480\times 0{,}5^x+72 > -4799928$ quand $x > \dfrac{4}{\log(0{,}5)} \approx -13{,}29$

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \left]\dfrac{4}{\log(0{,}5)} \; ; +\infty\right[}$

2) $472\times 3{,}2^x-89 \leqslant 471911$

$472\times 3{,}2^x-89 \leqslant 471911$

$472\times 3{,}2^x \leqslant 472000$

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un même nombre à chaque membre.

$3{,}2^x \leqslant \dfrac{472000}{472}$

On ne change pas le sens d'une inégalité en divisant chaque membre par un même nombre strictement positif.

$\Leftrightarrow 3{,}2^x \leqslant 1000$

La fonction log étant strictement croissante, elle ne change pas les inégalités.

$\Leftrightarrow \log\left(3{,}2^x\right) \leqslant \log(1000)$

$\Leftrightarrow x\times\log(3{,}2) \leqslant 3$

Grâce à la propriété n°6.

$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{\log(3{,}2)}$

Car $\log(3{,}2)$ est positif.

Ainsi $472\times 3{,}2^x-89 \leqslant 471911$ quand $x \leqslant \dfrac{3}{\log(3{,}2)} \approx 5{,}94$

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \left]-\infty \; ; \dfrac{3}{\log(3{,}2)}\right]}$