VARIABLES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°1 ***Déterminer l'espérance***

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

$$E(X) = -6\times\frac{1}{12} + (-3)\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{5}{24} + 4\times\frac{1}{4} + 6\times\frac{1}{8}$$
$$E(X) = -0,5 + (-1) + 0 + 1 + 0,75$$
$$\boxed{E(X) = 0,25}$$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X-\frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

y_i	$\underbrace{-6,25}_{=-6-0,25}$	$\underbrace{-3,25}_{=-3-0,25}$	$\underbrace{-0,25}_{=0-0,25}$	$\underbrace{3,75}_{=4-0,25}$	$\underbrace{5,75}_{=6-0,25}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (***On dit alors que la variable aléatoire est centrée***)

$$E(Y) = -6,25\times\frac{1}{12} + (-3,25)\times\frac{1}{3} + -0,25\times\frac{5}{24} + 3,75\times\frac{1}{4} + 5,75\times\frac{1}{8}$$
$$E(Y) = (-6-0,25)\times\frac{1}{12} + (-3-0,25)\times\frac{1}{3} + (0-0,25)\times\frac{5}{24} + (4-0,25)\times\frac{1}{4} + (6-0,25)\times\frac{1}{8}$$

Tiens tiens $-0,25$ revient souvent...

$$E(Y) = \underbrace{-6\times\frac{1}{12} + (-3)\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{5}{24} + 4\times\frac{1}{4} + 6\times\frac{1}{8}}_{E(X)} - 0,25\times\underbrace{\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{5}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right]}_{\text{somme des probablités des issues ...}}$$
$$E(Y) = E(X)-0,25$$
$$E(Y) = 0,25-0,25$$
$$E(Y) = 0$$

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

La réponse attendue est bien sûr oui mais la justification va demander un peu de travail et c'est ce qui motive la propriété n°1.

EXERCICE N°2 Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	$0,85$	$0,1499$	$0,00009$	$0,00001$

Ce jeu est-il équitable ?

Un jeu est équitable si les gains et les pertes potentielles s'équilibrent. Cela se traduit par une espérance nulle.

Il s'agit de vérifier si $E(X) = 0$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X = x_i)$$

$$E(X) = -2\times 0,85 + 8\times 0,1499 + 98\times 0,00009 + 4998\times 0,00001$$

$$\boxed{E(X) = -0,442}$$

L'espérance n'est pas nulle donc $\boxed{\text{ce jeu n'est pas équitable}}$.

Dans ce contexte, les joueurs perdent en moyenne 0,442 € à chaque fois qu'ils prennent un ticket.

EXERCICE N°3 *Utiliser l'espérance*

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».
On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le «triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.
Déterminer, en fonction de m, le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.

Notons X la variable aléatoire donnant le gain algébrique en fonction de m d'un lancer.
La loi de probabilité de X est alors donnée ci-dessous :

x_i	$-m$	0	$2m$
$P(X = x_i)$	0,35	0,45	0,2

Il s'agit alors de calculer l'espérance de X :

$E(X) = -m\times 0{,}35 + 0\times 0{,}45 + 2m\times 0{,}2$

$\boxed{E(X) = 0{,}05m}$