EXERCICE N°4 Comment résoudre des inéquations ?

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

L'idée est de comparer un produit de facteurs à zéro.
Pourquoi ?
Parce qu'on pourra facilement étudier le signe de chaque facteur et que l'on pourra appliquer ensuite la règle des signes pour obtenir le signe du produit (et donc la comparaison à zéro...)

Exemples généraux :

1) $2x^2+11x-6 \leqslant 4x^2-10x+4$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$2x^2+11x-6 \leqslant 4x^2-10x+4$

$2x^2+11x-6 - (4x^2-10x+4) \leqslant 0$

On ne change pas le sens d'une d'inégalité en soustrayant un même nombre à chaque membre (et oui $4x^2-10x+4$ est un nombre même si il dépend du nombre x)

$-2x^2+21x-10 \leqslant 0$

Posons $\Delta = 21^2-4\times(-2)\times(-10) = 361$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-21-19}{2\times(-2)} = 10$ et $x_2 = \dfrac{-21+19}{2\times(-2)} = -\dfrac{1}{2}$

La dernière inéquation est donc équivalente à :

$-2(x-10)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0$

Or :

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ avec a ; b et c des réels , $a \neq 0$ et possédant deux racines distinctes alors

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retient avec l'une des deux phrases suivantes :

Le trinôme est du signe de moins a entre les racines.
Ou
Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

(Retenez en une sur les deux et oubliez l'autre!)

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		10		$+\infty$
$-2(x-10)\left(x+\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup [10\ ;\ +\infty[}$

2) $9x^2-6x+1 > 4x^2+20x+25$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow 9x^2-6x+1 > 4x^2+20x+25 \Leftrightarrow 5x^2-26x-24 > 0$

Posons $\Delta = (-26)^2-4\times5\times(-24) = 1156$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-(-26)-34}{2\times5} = -\dfrac{4}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-(-26)+34}{2\times5} = 6$

La dernière inéquation est donc équivalente à :

$5(x-6)\left(x+\dfrac{4}{5}\right) > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		6		$+\infty$
$5(x-6)\left(x+\frac{4}{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]6\ ;\ +\infty\right[}$

Des cas particuliers :

3) $5x^2-7x+21 < 3x^2-5x+2$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow 5x^2-7x+21 < 3x^2-5x+2 \Leftrightarrow 2x^2-2x+19 < 0$

Posons $\Delta = (-2)^2-4\times2\times19 = -148$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta < 0$, il n'y a donc aucune racine .

Dans ce cas, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, ce qui signifie que le signe ne change pas. Il reste à le déterminer : c'est le signe de a dans ax^2+bc+c (revenez aux jeux)

On en déduit que le trinôme est du même signe que son coefficient dominant $2 > 0$.

On en déduit que $\boxed{S = \emptyset}$

4) $x^2 \geqslant 64$

C'est dans le cours de seconde : propriétés n°6 et 7

Cette équation admet comme ensemble de solutions : $\boxed{S =]-\infty\ ;\ -8[\cup]8\ ;\ +\infty[}$