LA DÉRIVATION E05C

EXERCICE N°2 Étude de fonction avec une fonction auxiliaire

On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{3}x^3 - x + 2}$ sur $I =]-2\ ;\ 2[$.

Partie n°1 : f est définie et dérivable sur I .

On pose $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

1) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur I .

g est une somme de fonctions de références, définies et dérivables sur I donc elle l'est aussi.

2) Étudier le signe de g' sur I .

Commençons par déterminer g' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

x	-2		-1		1		2
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Dresser alors le tableau de variations de g sur I .

x	-2		-1		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$

4) En déduire le signe de g sur I à l'aide de ses extrema sur I .

D'après son tableau de variation , g possède un minimum sur I qui est $\frac{4}{3}$, ce qui signifie que :

$\forall x \in I\ ,\ g(x) \geqslant \frac{4}{3} > 0$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement positive sur } I}$.

5) Justifier alors que f est bien définie et dérivable sur I .

Pour tout $x \in I$,

$f(x) = \sqrt{g(x)}$

La fonction racine carrée étant définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, pour que f soit dérivable sur I , il faut et il suffit que :

$\forall x \in I\ ,\ g(x) \in]0\ ;\ +\infty[$.

C'est bien le cas d'après la question 4).

Donc f est bien définie et dérivable sur I .

Partie n°2 : étude de f sur I .

6) Déterminer f' , la fonction dérivée de la fonction f sur I .

Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^3-x+2}}}$$

7) Étudier le signe de f' sur I .

x	-2		-1		1		2
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\sqrt{\frac{1}{3}x^3-x+2}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

8) Dresser alors le tableau de variations de f sur I .

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$