LA FONCTION INVERSE

Remarque n°1.

Dans ce cours, nous utiliserons la notion de limite. Conformément au programme nous nous contenterons d'une approche intuitive.
Pour une fonction f, D_f représentera son ensemble de définition et sera un intervalle ou une réunion d'intervalles.

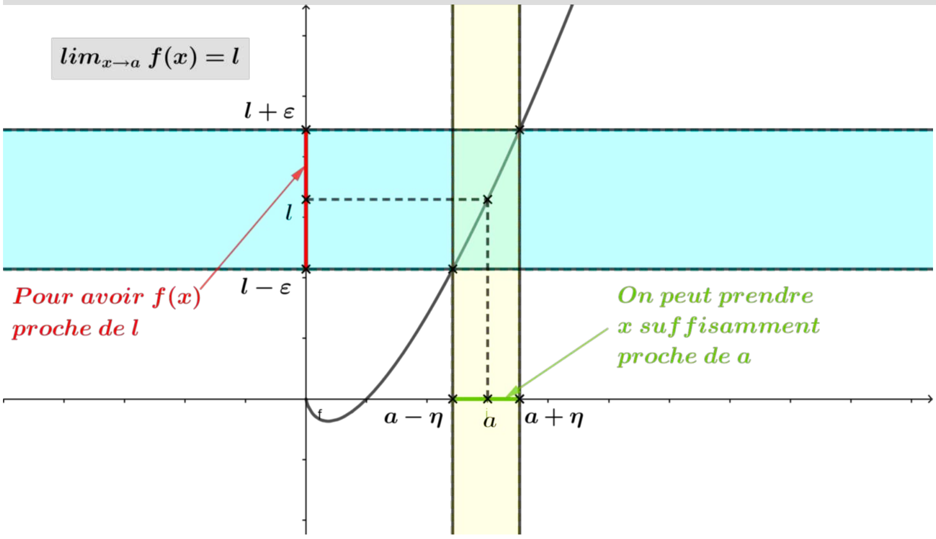
LA FONCTION INVERSE

I Qu'est-ce qu'une limite ?

Connaissance n°1 Limite finie en un point

Soit $f:\begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$, $a \in \overline{D_f}$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } l \text{ en } a}$ et on note $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = l}$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que l'on veut en approchant suffisamment x de a .



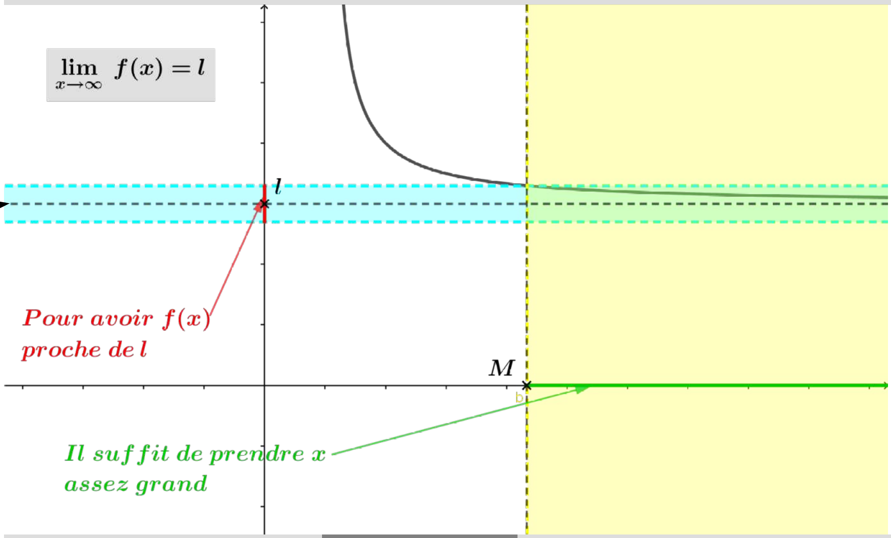
La fonction inverse

Connaissance n°2 Limite finie en l'infini

Soit $f:\begin{cases} D_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$, D_f ayant $+\infty$ pour extrémité et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } l \text{ en } +\infty}$ et on note $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que l'on veut en augmentant suffisamment x .

Vocabulaire
Lorsque x grandit, la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $y = l$.
On dit que cette droite est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.



On explique de même $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = l}$

LA FONCTION INVERSE

Connaissance n°3 Limite infinie en un point

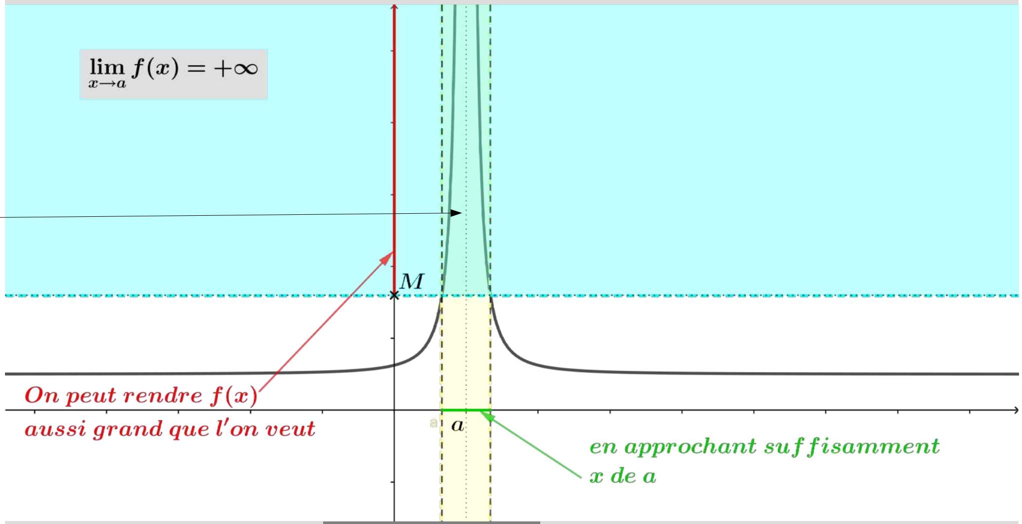
Soit $f:\begin{cases} D_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et $a \in \overline{D_f}$.

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } +\infty \text{ en } a}$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$

si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en approchant suffisamment x de a .

Vocabulaire

Lorsque x s'approche de a , la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $x = a$.
On dit que cette droite est **asymptote verticale** à la courbe en a .



On explique de même $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty}$

Remarque n°2. Limite à droite, limite à gauche

Il arrive parfois que des phénomènes différents se produisent selon que l'on s'approche de a par la gauche ou par la droite.

On peut par exemple avoir $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Ici, la limite de f à gauche en a est $-\infty$
et la limite à droite de f en a est $+\infty$.

II Et la fonction inverse dans tout ça ?

Nous allons à présent pouvoir parler du comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition…

Définition n°1.

On appelle fonction inverse, la fonction $f:\begin{cases}\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\\ x \to \dfrac{1}{x}\end{cases}$.

Avec $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

LA FONCTION INVERSE A01

Dans tout ce qui suit on utilise la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

EXERCICE N°1 limite en + ∞

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	10	800	10000	50000	400000	1000000
$f(x)$						

2) Vers quel nombre semblent se rapprocher les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

3) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation suivante : $\frac{1}{x} < 0{,}000\ 001$.

ϵ se lit epsilon

4) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation suivante : $\frac{1}{x} < \epsilon$ où ϵ est un nombre réel positif.

LA FONCTION INVERSE A01

On vient de démontrer que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de zéro que l'on veut ($0 < f(x) < \epsilon$) en prenant x suffisamment grand ($x > \frac{1}{\epsilon}$).

Autrement dit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

EXERCICE N°2 limite en $-\infty$

En vous inspirant de l'exercice n°1 , justifiez que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

LA FONCTION INVERSE A01

EXERCICE N°3 limite à droite en zéro.

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	0,1	0,05	0,008	0,0004	0,000001
$f(x)$						

2) Vers quel nombre semblent se rapprocher les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus petites ?

3) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation suivante : $\dfrac{1}{x} > 1\,000\,000$.

4) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation suivante : $\dfrac{1}{x} > M$ où M est un nombre réel positif.

On vient de démontrer que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut ($f(x) > M$) en prenant x suffisamment proche de la droite de zéro ($0 < x < \epsilon$).
Autrement dit : $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

EXERCICE N°4 limite à gauche en zéro

En vous inspirant de l'exercice n°3 , justifiez que $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

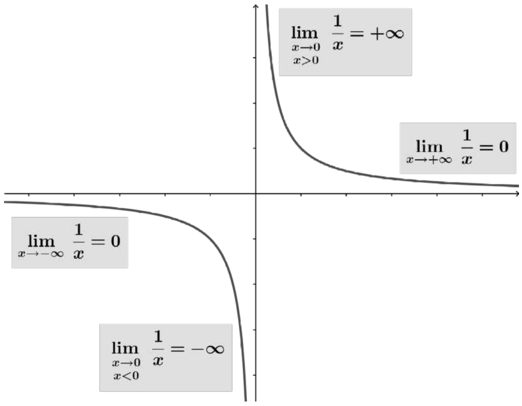
LA FONCTION INVERSE

Propriété n°1.

Limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à l'hyperbole.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à l'hyperbole.



LA FONCTION INVERSE E01

Vous pouvez vous aider du complément de cours.

Méthode n°1. ***À connaître***

Énoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ par :

$f(x)=\frac{7}{x}+4$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) Déterminer la limite de f en 0^- .

Réponse :

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f(x) = 7\times\frac{1}{x} + 4$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\times\frac{1}{x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\times\frac{1}{x}+4 = \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 7\times\frac{1}{x}=-\infty$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 7\times\frac{1}{x}+4 = \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty}$

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-5}{x}$.

Déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle . $+\infty$

EXERCICE N°2

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=8+\dfrac{11}{x}$

Déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle $+\infty$.

EXERCICE N°3

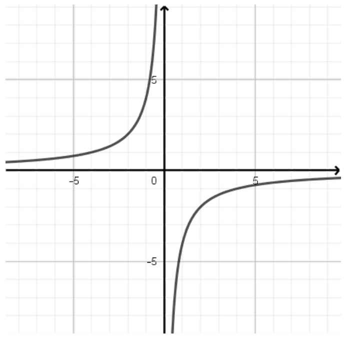
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$ par $f(x)=\dfrac{-5}{x}$.
Déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle $-\infty$.

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$ par . $f(x)=8+\dfrac{11}{x}$

Déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle $-\infty$.

EXERCICE N°5



On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur :

$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

1) Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Interpréter graphiquement ces résultats.

LA FONCTION INVERSE

Propriété n°2. Dérivée de la fonction inverse

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\\ x \to \dfrac{1}{x}\end{cases}$.

$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty\ ;\ 0[}$; $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0\ ;\ +\infty[}$

et pour x dans l'un ou l'autre de ces intervalles

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

preuve :

- Soit $a \in]-\infty\ ;\ 0[$ et h tel que $]a-h\ ;\ a+h[\ \subset\ ]-\infty\ ;\ 0[$

On peut écrire :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

En faisant tendre h vers 0 , on obtient : $-\frac{1}{a^2}$

Le nombre dérivée de f en a existe donc pour tout $a \in]-\infty\ ;\ 0[$ et vaut $-\frac{1}{a^2}$.

On a donc démontré que f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et que pour $x \in]-\infty\ ;\ 0[$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- On procède de la même façon sur $]0\ ;\ +\infty[$ (faites-le).
- Ce qui achève la démonstration.

Remarque n°3.

▪ On a $f'(x)<0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$
donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
▪ On a $f'(x)<0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$
donc f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
▪ Mais f n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

On peut à présent dresser le tableau de variation de la fonction inverse.

LA FONCTION INVERSE

Connaissance n°4 ***Tableau de variation complet de la fonction inverse.***

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		‖		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	0

LA FONCTION INVERSE E02

EXERCICE N°1

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[\ \cup\ \left]0\ ;\ +\infty\right[$.

1) Déterminer l'expression de leur dérivée sachant que pour tout réel *x* non nul :

$f_1(x)=\dfrac{1}{x}+25$; $f_2(x)=\dfrac{1}{x}-\pi\sqrt{7}$; $f_3(x)=\dfrac{4}{x}$ $f_4(x)=\dfrac{-7{,}5}{x}$; $f_5(x)=\dfrac{-3}{x}+\dfrac{25}{\sqrt{7}}$

$g_1(x)=2x+\dfrac{1}{x}$; $g_2(x)=\dfrac{3}{x}+4x^2$; $g_3(x)=3x^2-5x+7-\dfrac{8}{x}$

2) Réduire au même dénominateur, les expressions $g_1'(x)$; $g_2'(x)$ et $g_3'(x)$.

EXERCICE N°2

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$ par : $f(x)=\dfrac{-1{,}5}{x}$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0[$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

3) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=0{,}16x+4{,}7+\dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{0{,}16(x-2{,}5)(x+2{,}5)}{x^2}$$

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

3) En déduire les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -10x + 62 - \dfrac{3240}{x}$.

1) Montrer que pour tout réel non nul, $f'(x) = \dfrac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE N°2 Attention à l'ensemble de définition

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2 - 0,1x - \dfrac{0,025}{x}$

1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,1\ ;\ 1]$:

$f\,'(x) = \dfrac{-0,1(x-0,5)(x+0,5)}{x^2}$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1\ ;\ 1]$.

LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{8}{x}$

Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-2		‖ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖	↘	6	↗	0

EXERCICE N°4

Lorsqu'un véhicule roule entre $10\ \text{km.h}^{-1}$ et $130\ \text{km.h}^{-1}$, sa consommation d'essence c (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en km.h^{-1}) par l'expression :

$$c(v)=0{,}06\,v+\frac{150}{v}$$

1) Vérifier que pour tout v appartenant à l'intervalle $[10\ ;\ 130]$,

$$c'(v) = \frac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$$

2) Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10\ ;\ 130]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction c.

3) En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale. Déterminer la consommation minimale en litres.

LA FONCTION INVERSE E04

EXERCICE N°1

Une entreprise fabrique des tables de jardin. La production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.
Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à $C(q)=q^2+50q+100$ où q appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.

1) Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

2) À chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production :

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q}$$

2.a) Calculer le coût unitaire de production, en euros, pour 20 tables produites.

2.b) Représenter la fonction C_u sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites, le coût unitaire, en euro, est inférieur ou égal à 80.

2.c) Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1\ ;\ 30]$,

$$C_u'(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$$

2.d) Étudier le signe de $C_u(q)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_u .

2.e) Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

EXERCICE N°2 ***Toujours faire attention aux notations***

Une entreprise fabrique chaque jour x litres d'un produit chimique, où x appartient à $[1\ ;\ 50]$.
Le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $[1\ ;\ 50]$ par :

$$C(x)=0{,}5\,x^2+2\,x+200\ ,$$

les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

1) Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction C_M définie par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, où $x \in [1\ ;\ 50]$.

1.a) Exprimer le coût moyen de production en fonction de x .

1.b) Justifier que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ 50]$,

$$C_M\,'(x) = \frac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$$

1.c) Étudier le signe de $C_M\,'(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 50]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .

1.d) En déduire la quantité de produit chimique à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2) Le coût marginal de production, noté C_m pour une quantité produite x , est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire. On a donc :

$$C_m(x)=C(x+1)-C(x)\ .$$

2.a) Calculer le coût marginal pour une production de 10 litres de produit, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 10 litres à 11 litres.

2.b) En pratique, les économistes assimilent le coût marginal de production à la dérivée du coût total et considèrent donc que $C_m(x)=C\,'(x)$.
Calculer $C\,'(x)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

2.c) Les économistes affirment que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal. Vérifier que $-0{,}5+\sqrt{400{,}25}$ est une solution de l'équation $C_M(x)=C_m(x)$ pour confirmer l'affirmation faite par les économistes.