EXERCICE N°1 Du concret ! (Suivi de sportif)

Afin de participer aux compétitions dans sa catégorie, un karatéka surveille son poids (ou plutôt sa masse). Pour cela, il se pèse toutes les semaines de l'année 2024. Sa courbe de poids peut être modélisée par la fonction polynomiale f définie pour tout $x \in [0\ ;\ 52]$ par $f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}4x + 75$ où x correspond au temps passé en semaine à partir du premier Janvier 2024.

- **Hommes :**
  - -60 kg
  - -67 kg
  - -75 kg
  - -84 kg
  - +84 kg
  - OPEN (Tous poids confondus)

Source: Wikipedia

1) Dressez le tableau de variations de la fonction f .

$f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a = 0{,}008$; $b = -0{,}4$ et $c = 75$

Sa forme canonique est donc : $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{(-0{,}4)}{2\times 0{,}008} = 25$

et $\beta = f(\alpha) = f(25) = 70$.

De plus $f(0) = 75$ et $f(52) = 0{,}0008\times 52^2-0{,}4\times 52+75 = 75{,}832$

Comme $a > 0$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	25	52
$f(x)$	75	↘ 70 ↗	75,832

2) En utilisant cette modélisation, répondez aux questions suivantes :

2.a) Quel était sont poids maximal sur l'année ? Quand l'a-t-il atteint ?

D'après le tableau de variations, le poids maximal sur l'année est $75{,}832\,kg$ et est atteint 52 semaines après le 1er Janvier 2024 .

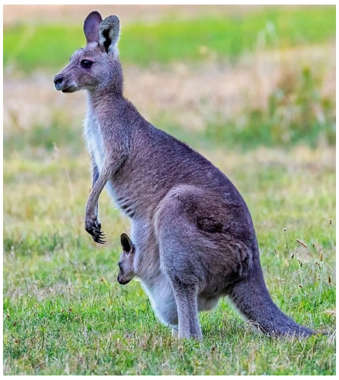
2.b) Quel était son poids minimal sur l'année ? Quand l'a-t-il atteint ?

D'après le tableau de variations, le poids minimal sur l'année est $70\,kg$ et est atteint 25 semaines après le 1er Janvier 2024 .

EXERCICE N°2 Du concret ! (Éthologie)

Extrait du sésamath 1er spé

Une femelle kangourou porte un bébé kangourou dans sa poche et décide de sauter. La trajectoire du bébé est modélisée par la parabole d'équation $y = -\frac{1}{4}x^2+x+0,5$ où x et y représentent des distances en mètres.



Créateur : John Torcasio

1) Avant de sauter, à quelle distance du sol se trouve le bébé ?

Quand $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}\times 0^2+0+0,5 = 0,5$

Ainsi, avant de sauter le bébé se trouve à $\boxed{50 \text{ cm}}$ du sol.

2) Quelle est l'altitude maximale atteinte par le bébé au court de ce saut ?

Dressons un tableau de variations :

$y=-\frac{1}{4}x^2+x+0,5$ est de la forme $y = ax^2+bx+c$

et peut être écrit sous la forme canonique $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$

et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 1,5$.

De plus $f(0) = 0,5$

Comme $a > 0$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
y	$0,5$	$\nearrow$	1.5	$\searrow$	

D'après le tableau de variations, l'altitude maximale atteinte par le bébé est $1,5$ m

3) Quelle est la distance parcourue par le bébé lors du saut ?

Il s'agit de résoudre l'équation $y = 0,5$.

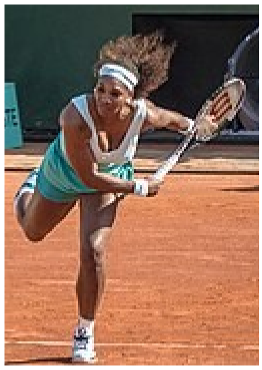
$$\begin{aligned} y = 0,5 &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+0,5 = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2+x = 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}x+1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x=0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{4}x+1=0 \right) \\ &\Leftrightarrow (x=0 \quad \text{ou} \quad x=4) \end{aligned}$$

Cette équation possède deux solutions : 0 et 4

On en déduit que le bébé a parcouru $\boxed{4 \text{ m}}$ pendant le saut.

EXERCICE N°3 Du concret ! (Tennis)

Extrait du sésamath 1[er] spé



Créateur : Yann Caradec

Un joueuse de tennis frappe dans une balle avant qu'elle touche le sol.
La trajectoire de la balle est alors définie par la parabole d'équation :
$y=-0{,}03x^2+0{,}3x+0{,}75$ où x correspond à la distance entre le joueur de tennis et la balle et y correspond à la hauteur de la balle.

1) Le filet se trouve à 5 m de la joueuse et la hauteur du filet est de $1\ \text{m}$. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ? Justifier.

Pour $x = 5$, $y = -0{,}03\times5^2+0{,}3\times5+0{,}75 = 1{,}5 > 1$

On en déduit que $\boxed{\text{la balle passe au dessus du filet}}$.

2) Déterminer à quelle distance de la joueuse la balle est retombée par terre. On donnera une valeur arrondie au centième. Justifier.

Il s'agit de résoudre l'équation $y = 0$.

$y = 0 \Leftrightarrow -0{,}03x^2+0{,}3x+0{,}75 = 0$

Posons $\Delta = 0{,}3^2-4\times(-0{,}03)\times0{,}75 = 0{,}18$, le discriminant de cette équation. $\Delta > 0$,il y a donc deux solutions :

$\boxed{x_1 = \dfrac{-0{,}3-\sqrt{0{,}18}}{2\times(-0{,}03)} \approx -2{,}07}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-0{,}3+\sqrt{0{,}18}}{2\times(-0{,}03)} \approx 12{,}07}$

La seule solution positive étant x_2 .

On en déduit que la balle est retombée à $\boxed{\text{environ } 12{,}07\ \text{m}}$ de la joueuse.

3) À quelle(s) distance(s) de la joueuse la balle a-t-elle une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m ? Justifier.

Il s'agit de résoudre l'inéquation $y \geqslant 1{,}02$

$$\begin{aligned} y \geqslant 1{,}02 &\Leftrightarrow -0{,}03x^2+0{,}3x+0{,}75 \geqslant 1{,}02 \\ &\Leftrightarrow -0{,}03x^2+0{,}3x-0{,}27 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ce dernier trinôme est de la forme ax^2+bx+c

Posons $\Delta = b^2-4ac = 0{,}3^2-4\times(-0{,}03)\times(-0{,}27) = 0{,}0576$, son discriminant .

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines:

$\boxed{x_1 = \dfrac{-0{,}3-\sqrt{0{,}0576}}{2\times(-0{,}03)} = 9}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-0{,}3+\sqrt{0{,}0576}}{2\times(-0{,}03)} = 1}$

Et comme $a = -0{,}03 < 0$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x		1		9	
$-0.03x^2+0.3x-0.27$	$-$	0	$+$	0	$-$

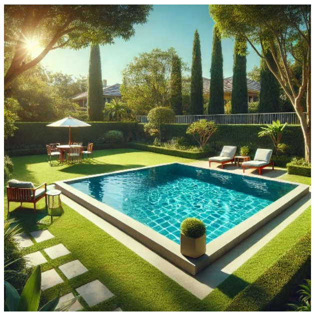
On en déduit que la balle est restée à une hauteur supérieure ou égale à 1,02 $\boxed{\text{entre } 1\ \text{m et } 9\ \text{m (valeurs incluses) de la joueuse}}$.

Si vous voulez écrire $S = [1 ; 9]$ vous pouvez mais n'oubliez pas de définir S :
Notons S l'ensemble des solutions de cette dernière inéquation.

EXERCICE N°4 Du concret ! (Aménagement extérieur)

Extrait du sésamath 1er spé

François décide d'aménager sa piscine, qui a une forme carrée et qui mesure x mètres de côté.
Il veut acheter une bâche de sécurité, qui coûte 20 € par m².
Il veut installer une clôture faisant tout le tour de sa piscine, à une distance de deux mètres de la piscine. Le prix est 100 € par mètre de clôture.
Enfin, il veut acheter une échelle de piscine qui coûte 150 €.
On note $f(x)$ le prix total que François va payer.



Générée par ChatGPT

1) Montrer que $f(x)=20x^2+400x+1750$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 20\times x^2+100\times(x+2+2)\times 4+150 \\ &= 20x^2+400(x+4)+150 \\ &= 20x^2+400x+1600+150 \\ &= 20x^2+400x+1750 \end{aligned}$$

2) Combien payera-t-il si la piscine fait 5 mètres de côté ?

Il s'agit de calculer $f(5)$

$$f(5) = 20\times 5^2+400\times 5+1750 = 4250$$

Si la piscine fait 5 mètres de côté alors il paiera $\boxed{4250 \text{ €}}$

3) Quelle est la taille de la piscine s'il paye 8155 € ?

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 8155$ sur $[0\ ;+\infty[$

sur $[0\ ;+\infty[$ car la taille est longueur et qu'une longueur c'est positif ou nul.

Commençons par la résoudre sur $\mathbb{R}$.

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow f(x) = 8155 \\ &\Leftrightarrow 20x^2+400x+1750=8155 \\ &\Leftrightarrow 20x^2+400x-6405=0 \end{aligned}$$

Posons $\Delta = 400^2-4\times 20\times(-6405) = 672400$, le discriminant de cette équation.

$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-400-\sqrt{672400}}{2\times 20} = -30{,}5} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-400+\sqrt{672400}}{2\times 20} = 10{,}5}$$

Donc $S = \{-30{,}5\ ;\ 10{,}5\}$

Or $S \cap [0\ ;+\infty[= \{10{,}5\}$

En français : seules les solutions positives nous intéressent.
(On prend donc l'intersection de l'ensemble des solutions avec celui des nombres positifs)

On en déduit que sa piscine mesure $\boxed{10{,}5 \text{ m}}$ de côté.