ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

1) Soit l'expression $A=(3x-2)^2-16$

1.a) Développer et réduire A

$A=(3x-2)^2-16$

$A=9x^2-12x+4-16$

$\boxed{A=9x^2-12x-12}$

1.b) Factoriser A

On reprend l'expression de départ et on reconnaît la 3[e] identité remarquable.

$A=(3x-2)^2-16$

$A=(3x-2)^2-4^2$

$A=[3x-2-4][3x-2+4]$

$A=(3x-6)(3x+2)$

$\boxed{A=3(x-2)(3x+2)}$

$A=3(x-2)\times 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$

$A=9(x-2)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$

Mais pourquoi est-ce qu'il s'amuse à rajouter ça ?
Si vous regardez attentivement vous verrez que « dans les parenthèses » le « x » est « tout seul ». Vous pouvez toujours obtenir cette forme et cela sera très utile l'année prochaine...quelque soit votre première.

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(3x-2)^2-16$

2.a) Calculer les images de 0 ; 1 et -3

$\boldsymbol{f(0) = -12}$

Relisez votre question 1)a) et vous comprendrez qu'il n'est pa $f(x)=(3x-2)^2-16$ s nécessaire de « se fatiguer »...

$\boldsymbol{f(1)} = (3\times 1-2)^2-16 = (-1)^2-16 = 1-16 = \boldsymbol{-15}$

$\boldsymbol{f(-3)} = (3\times(-3)-2)^2-16 = (-11)^2-16 = 121-16 = \boldsymbol{105}$

2.b) Déterminer par le calcul, s'ils existent, les antécédents de 0 ; -16 et -25

On a plusieurs expression de $f(x)$ à notre disposition, on va donc choisir la plus intéressante à chaque fois.
Pour l'antécédent de 0, on choisit la forme : $f(x)=3(x-2)(3x+2)$

▪ Pour le nombre 0 :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)(3x+2)=0$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

Ainsi le nombre 0 possède deux antécédents par f : $\boxed{-\dfrac{2}{3} \text{ et } 2}$

$f(x)=9(x-2)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$ aurait été encore plus efficace puisque les solutions apparaissent directement (au signe près)
Cette forme sera appelée : **forme factorisée**

Pour l'antécédent de -16, on choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$
Remarque :
Ces deux formes seront définies en détails l'année prochaine.

▪ Pour le nombre -16 :

$f(x)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)^2-16=-16 \Leftrightarrow (3x-2)^2=0$

Cette équation produit possède une seule solution : $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

Pour l'antécédent de -25 , on choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$

Ici, vous choisirez en générale la forme développée réduite $f(x)=9x^2-12x-12$ mais dans notre cas, ce n'est pas une bonne idée.

En effet, si vous avez bien compris l'exercice n°2, vous avez compris que $f(x)$ ne peut « descendre en dessous de -16 »

$(3x-2)^2$ est un nombre jamais négatif et on l'ajoute à -16 , le résultat est donc forcément plus grand que (ou égal à) -16

▪ Pour le nombre -25 :

$f(x)=-25 \Leftrightarrow (3x-2)^2-16=-25 \Leftrightarrow (3x-2)^2=-9$

Or, le carré d'un nombre (réel) est toujours positif.

Donc cette équation n'admet aucune solution et par conséquent $\boxed{-25 \text{ n'admet pas d'antécédent par } f}$

2.c) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?

On va résoudre l'inéquation

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(3x+2) \geqslant 0$

Pour cela nous allons dresser un tableau de signes :

- $3 > 0$ est vrai quelque soit la valeur de x .
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $3x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
3		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que cette fonction est positive sur : $\left]-\infty \,;\, -\frac{2}{3}\right] \cup [2\,;\,+\infty[$

Si on avait dit : « strictement positive » alors on aurait ouvert les crochets en $-\frac{2}{3}$ et 2 .

2.d) Déterminer l'extremum de cette fonction.

On choisit la **forme canonique** : $f(x)=(3x-2)^2-16$

il est alors évident que -16 est le minimum.

Montrons que -16 est le minimum de f .

$f(x)-(-16) = f(x)+16 = (3x-2)^2 \geqslant 0$

Ainsi pour tout réel x $f(x) \geqslant -16$

De plus $f\left(\frac{2}{3}\right)=-16$

Donc -16 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et ce minimum est atteint pour $x=\frac{2}{3}$.