PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E06C

EXERCICE N°1 *inversion du conditionnement (avec calculatrice)*

Inspiré du sesamath 1er Spé 63 p 287

Dans l'association sportive d'un lycée, il y a :

▫ 24 % d'élèves de Seconde dont 12 % font du football, 45 % de l'athlétisme et 43 % de la natation ;

▫ 61 % d'élèves de Première dont 34 % font du football, 44 % de l'athlétisme et 22 % de la natation ;

▫ 15 % d'élèves de Terminale dont 41 % font du football, 9 % de l'athlétisme et 50 % de la natation.

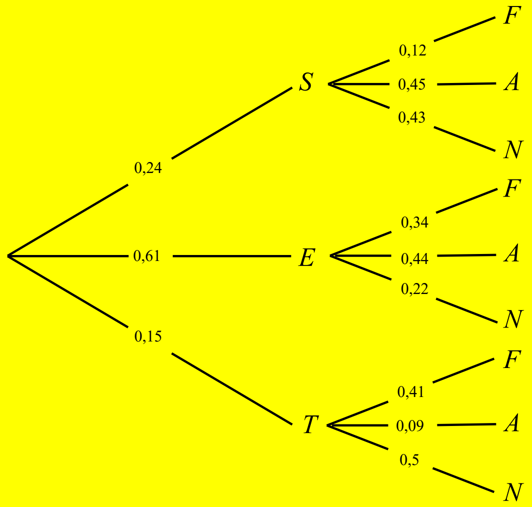
On prend un élève de l'association sportive et on considère les événements :

▪ S (resp. E, resp. T) : « Cet élève est en Seconde (resp. Première, resp. Terminale). »

▪ F (resp. A, resp. N) : « Cet élève pratique le football (resp. l'athlétisme, resp. la natation). »

(*On arrondira, si nécessaire à 4 chiffres après la virgule*)

1) Représenter la situation par un arbre de pondéré.



2) Déterminer $P(N \cap S)$.

$P(N \cap S) = P(S) \times P_S(N) = 0{,}24 \times 0{,}43 = 0{,}1032$

$\boxed{P(N \cap S) = 0{,}1032}$

3) Déterminer $P(N)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N) &= P(S)\times P_S(N) + P(E)\times P_E(N) + P(T)\times P_T(N) \\ &= 0{,}24\times 0{,}43 + 0{,}61\times 0{,}22 + 0{,}15\times 0{,}41 \\ &= 0{,}1032 + 0{,}1342 + 0{,}0615 \end{aligned}$$

$\boxed{P(N) = 0{,}2989}$

4) En déduire $P_N(S)$.

$$P_N(S) = \frac{P(N \cap S)}{P(N)} = \frac{0{,}1032}{0{,}2989} \approx 0{,}3553$$

$\boxed{P_N(S) \approx 0{,}3553}$

5) On considère un élève qui se rend à la piscine pour faire de la natation.

Est-il plus probable que ce soit un élève de Seconde, Première ou Terminale ?

Il s'agit de comparer $P_N(S)$, $P_N(E)$ et $P_N(T)$.

$$P_N(E) = \frac{P(N \cap E)}{P(N)} = \frac{0{,}61\times 0{,}22}{0{,}2989} = \frac{0{,}1342}{0{,}2989} \approx 0{,}449$$

$$P_N(T) = \frac{P(N \cap T)}{P(N)} = \frac{0{,}15\times 0{,}09}{0{,}2989} = \frac{0{,}0135}{0{,}2989} \approx 0{,}0452$$

Ainsi $P_N(T) < P_N(S) < P_N(E)$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il est plus probable que ce soit un élève de première}}$.

6) Déterminer $P(A \cup N)$.

▪ A et N sont incompatibles, donc :

$P(A \cup N) = P(A)+P(N)$

Or d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S)\times P_S(A) + P(E)\times P_E(A) + P(T)\times P_T(A) \\ &= 0{,}24\times 0{,}45 + 0{,}61\times 0{,}44 + 0{,}15\times 0{,}09 \\ &= 0{,}108 + 0{,}2684 + 0{,}0135 \end{aligned}$$

$\boxed{P(A) = 0{,}3899}$

Donc

$P(A \cup N) = 0{,}3899+0{,}2989$

$\boxed{P(A \cup N) = 0{,}6888}$

7) Déterminer la probabilité que l'élève soit en seconde ou qu'il fasse du football.

▪ La probabilité que l'élève soit en seconde ou qu'il fasse du football est $P(S \cup F)$.

D'après la formule du crible :

$P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F)$

Or,

d'une part, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(S)\times P_S(F) + P(E)\times P_E(F) + P(T)\times P_T(F) \\ &= 0{,}24\times 0{,}12 + 0{,}61\times 0{,}34 + 0{,}15\times 0{,}41 \\ &= 0{,}0288 + 0{,}2074 + 0{,}0615 \end{aligned}$$

$\boxed{P(F) = 0{,}2977}$

et d'autre part :

$P(S \cap F) = P(S)\times P_S(F) = 0{,}24\times 0{,}12$

$\boxed{P(S \cap F) = 0{,}0288}$

Donc :

$P(S \cup F) = 0{,}24 + 0{,}2977 - 0{,}0288$

$\boxed{P(S \cup F) = 0{,}5089}$

Ainsi $\boxed{\text{la probabilité cherchée vaut } 0{,}5089}$.

EXERCICE N°2 Du concret (avec une inconnue)

Inspiré du sesamath 1[er] Spé 66 p 287

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée pour plusieurs raisons, il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans une ville a permis de constater que :

▫ 40 % de la population est vaccinée ;
▫ 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
▫ 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements

▫ V : « La personne est vaccinée contre la grippe » et
▫ G : « La personne a contracté la grippe ».

1) Donner la probabilité de l'événement G.

$\boxed{P(G) = 0{,}2}$

Car 20 % de la population a contracté la grippe.

2) Représenter la situation par un arbre pondéré dans lequel figure une inconnue.

On fait l'arbre au brouillon, on identifie ce qui manque : $P_{\overline{V}}(G)$ et on l'appelle par exemple p.

Notons p la probabilité qu'une personne ait contracté la grippe sachant qu'elle est vaccinée.

- V (0,4)
  - G (0,08)
  - $\overline{G}$ (0,92)
- $\overline{V}$ (0,6)
  - G (p)
  - $\overline{G}$ ($1-p$)

À ce stade du cours, je n'ai plus besoin d'expliquer le « $1-p$ »

3) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

Il s'agit de déterminer $P(V \cap G)$.

$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

$\boxed{\text{La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée vaut } 0{,}032}$.

4) La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Il s'agit de montrer que $P_{\overline{V}}(F) = p = 0{,}28$.

On sait que $P(G) = 0{,}2$,

Or d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(V) \times P_V(G) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(F) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}08 + 0{,}6 \times p \\ &= 0{,}032 + 0{,}6\,p \end{aligned}$$

Donc ,

$0{,}2 = 0{,}032 + 0{,}6\,p$

d'où $p = \dfrac{0{,}2 - 0{,}032}{0{,}6} = 0{,}28$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\text{la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à } 0{,}28}$

EXERCICE N°3 Pour la suite...

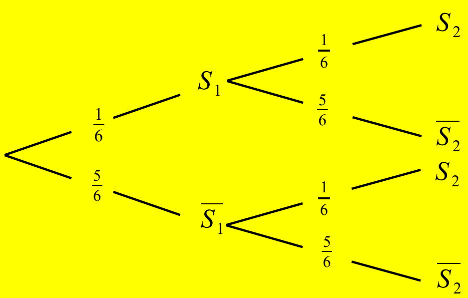
L'épreuve consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces : on considère que c'est un succès quand on obtient un 6.

1) On réalise deux fois de manière indépendante cette épreuve et on regarde le nombre de succès obtenus. Représenter la situation par un arbre.

Notons

S_1 l'événement : « On obtient un six au premier lancer » et

S_2 l'événement : « On obtient un six au second lancer »



2) Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire c'est-à-dire les nombres de succès possibles et leur probabilité.

Nombre de Succès	0	1	2	Total
Probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

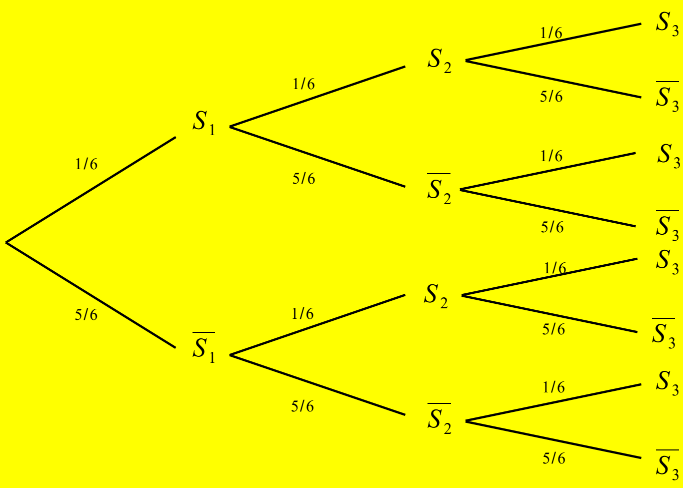
3) Reprendre la question précédente avec trois répétitions indépendantes de cette épreuve.

Notons

S_1 l'événement : « On obtient un six au premier lancer » ,

S_2 l'événement : « On obtient un six au deuxième lancer » et

S_3 l'événement : « On obtient un six au troisième lancer ».



4) On s'intéresse maintenant à dix répétitions indépendantes de cette épreuve.

4.a) Expliquer pourquoi on ne peut pas construire d'arbre pour les représenter.

Il faudrait représenter 10 étapes et il y aurait au final 1024 (2^{10}) chemins possibles.

Même en prenant une hauteur de 0,2 cm pour chaque issue finale, il faudrait une feuille de cahier de plus 5,12 m de hauteur…

4.b) Si l'on considère un chemin de cet arbre correspondant à 3 succès, combien y a-t-il de pondérations $\frac{1}{6}$ dessus ?

$\boxed{\text{Il y en aura } 3}$ (les autres vaudront $\frac{5}{6}$)

4.c) En déduire la probabilité associée à un tel chemin.

Cette probabilité vaut $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

Quand on suit un chemin, on multiplie les pondérations des branches. Il y aura donc 3 facteurs égaux à $\frac{1}{6}$ et 7 facteurs égaux à $\frac{5}{6}$ peu importe l'ordre.

4.d) Le nombre de chemins correspondant à k succès sur n est noté $\binom{n}{k}$. En utilisant cette notation, exprimer la probabilité d'obtenir 3 succès sur les 10 lancers.

Il y a $\binom{10}{3}$ chemins correspondant à 3 succès parmi les 10 essais, chaque chemin a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$ et ses chemins sont incompatibles deux à deux donc leur probabilité s'additionnent.

Au final : $\boxed{\text{la probabilité vaut } \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7}$.

Pour les curieux :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$