EXERCICE N°2 *Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé*

Pour chaque fonction f, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis calculer le nombre dérivé de f en a.

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$, $I = [0\ ;+\infty[$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = \sqrt{2x+1}$ d'où $u'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

et

$v(x) = 3x+2$ d'où $v'(x) = 3$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(3x+2)-3\sqrt{2x+1}}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{\frac{(3x+2)-3(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{3x+2-6x-3}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{-3\times1-1}{(3\times1+2)^2\sqrt{2\times1+1}} = -\frac{4}{5^2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f'(1) = -\frac{4}{25\sqrt{3}}}$$

« On n'aime pas trop les racines au dénominateur »…

$$\frac{-4\times\sqrt{3}}{25\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{25\times3}$$

On pourrait également écrire :

$$\boxed{f'(1) = -\frac{4\sqrt{3}}{75}}$$

2) $f(t) = (2t+1)^3(5-3t)^4$ $I = \mathbb{R}$, , $a = -2$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on peut écrire :
$f(t) = u(t) \times v(t)$
avec :
$u(t) = (2t+1)^3$ d'où $u'(t) = 3 \times 2 \times (2t+1)^2 = 6(2t+1)^2$
et
$v(t) = (5-3t)^4$ d'où $v'(t) = 4 \times (-3)(5-3t)^3 = -12(5-3t)^3$
Ainsi

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^4 + (-12)(5-3t)^3(2t+1)^3 \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t+(-2)(2t+1)] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t-4t-2] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3)}$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.
Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.
Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$\boxed{f'(x) = 4536t^6 - 20088t^5 + 24030t^4 + 4164t^3 - 16320t^2 - 300t + 2250}$ mais bon...

▪ Pour finir :

$$f'(-2) = 6(2(-2)+1)^2(5-3(-2))^3(-7(-2)+3) = 6 \times (-3)^2 \times 11^3 \times (-11) = -54 \times 11^4$$

$$\boxed{f'(-2) = -790\,614}$$

Aide au calcul
$125 \times 105 = 13125$
$54 \times 11^4 = 790\,614$

3) $f(x) = \dfrac{3+x^2}{(5x-10)^4}$, $I =]2\ ;+\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = 3+x^2$ d'où $u'(x) = 2x$

et

$v(x) = (5x-10)^4$ d'où $v'(x) = 4\times5\times(5x-10)^3 = 20(5x-10)^3$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(5x-10)^4-20(5x-10)^3(3+x^2)}{((5x-10)^4)^2} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[x(5x-10)-10(3+x^2)]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[5x^2-10x-30-10x^2]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3(-5x^2-10x-30)}{(5x-10)^8} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2(5x-10)^3(5x^2+10x+30)}{(5x-10)^8}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(3) = \frac{-2(5\times3-10)^3(5\times3^2+10\times3+30)}{(5\times3-10)^8} = -2\times5^3\times105 = -2\times125\times105 = -2\times13125$$

$$\boxed{f'(3) = -26250}$$

Aide au calcul
$125\times105 = 13125$
$54\times11^4 = 790614$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2}$, $I =]0\ ;\ 3]$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = \sqrt{6-2x} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = -2\times\frac{1}{2\sqrt{6-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$$

et

$$v(x) = x^2 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{6-2x}}x^2 - 2x\sqrt{6-2x}}{(x^2)^2} \\
&= \frac{\dfrac{-x^2-2x(6-2x)}{\sqrt{6-2x}}}{x^4} \\
&= \frac{-x^2-12x+4x^2}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3x^2-12x}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3x(x-4)}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3(x-4)}{x^3\sqrt{6-2x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x-12}{x^3\sqrt{6-2x}}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{3\times1-12}{1^3\sqrt{6-2\times1}} = \frac{-9}{\sqrt{4}} = \frac{-9}{2}$$

$$\boxed{f'(1) = \frac{-9}{2}}$$