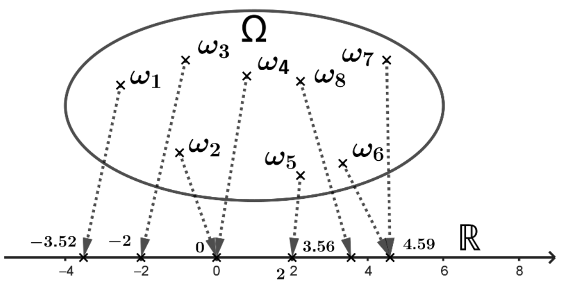
Variables aléatoires

I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

Définition n°1. ***Variable aléatoire***

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$,
c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Exemple n°1.



$X : \Omega \to \mathbb{R}$

Ici,
$X(\omega_1) = -3{,}52$:
L'issue ω_1 a pour image -3,52 par la variable aléatoire X ….
$X(\omega_2) = 0$, etc.…

Remarque n°1.

Toutes les issues doivent avoir une image par X (car X est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

VARIABLES ALÉATOIRES

Connaissance n°1 ***Des notations***

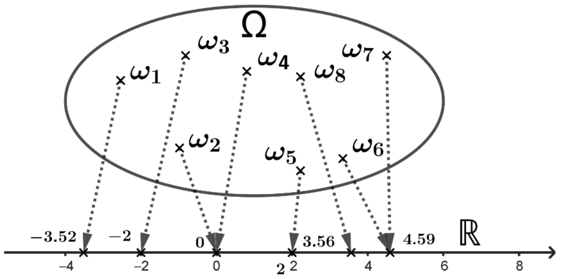
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

▪ $\{X = a\}$ l'événement « X prend la valeur a »

▪ $\{X \leqslant a\}$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »

▪ on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Exemple n°2.



$\{X = -3{,}52\}$ est en fait $\{\omega_1\}$,

$\{X = 0\}$ est en fait $\{\omega_2 , \omega_4\}$

$\{X = 1{,}5\}$ est en fait $\emptyset$

$\{X = -18\}$ aussi…

$\{X \leqslant 0\}$ est en fait $\{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4\}$

$\{X < 0\}$ est en fait $\{\omega_1 , \omega_3\}$

(il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de Ω , on peut parler de leur probabilité.
Par exemple :
$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2 , \omega_4\}) = P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})$ ...
C'est pénible toutes ces accolades !

Connaissance n°2 ***Convention d'écriture***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »

- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement
« X prend une valeur inférrieure ou égale à a »

- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de Ω , on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

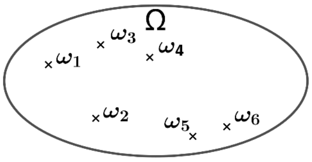
Définition n°2. ***Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle***

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$) , soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \ldots , x_k$.

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k.

Exemple n°3.

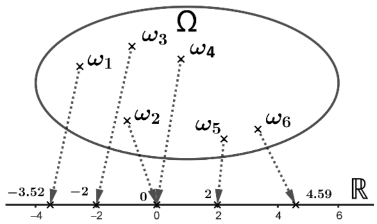
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0)+P(X = 2)+P(X = 4{,}59) = 1$

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

▪ On détermine Ω .

$\Omega = \{1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 5 \; ; \; 6\}$

▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$X(\{1\}) = -5$, $X(\{2\}) = 2$, $X(\{3\}) = 1$,

$X(\{4\}) = 2$, $X(\{5\}) = 1$ et $X(\{6\}) = 2$

(Il y a trois images possibles : $-5 \; ; \; 1$ et 2)

▪ On regroupe les antécédents :

$\{X = -5\} = \{1\}$

$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$

$\{X = 2\} = \{4\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

Le plus gros du travail est fait au brouillon

▪ On calcule les probabilités de chaque événement :

▫ $P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

▫ $P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

▫ $P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	1	2	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)

Voici un jeu :

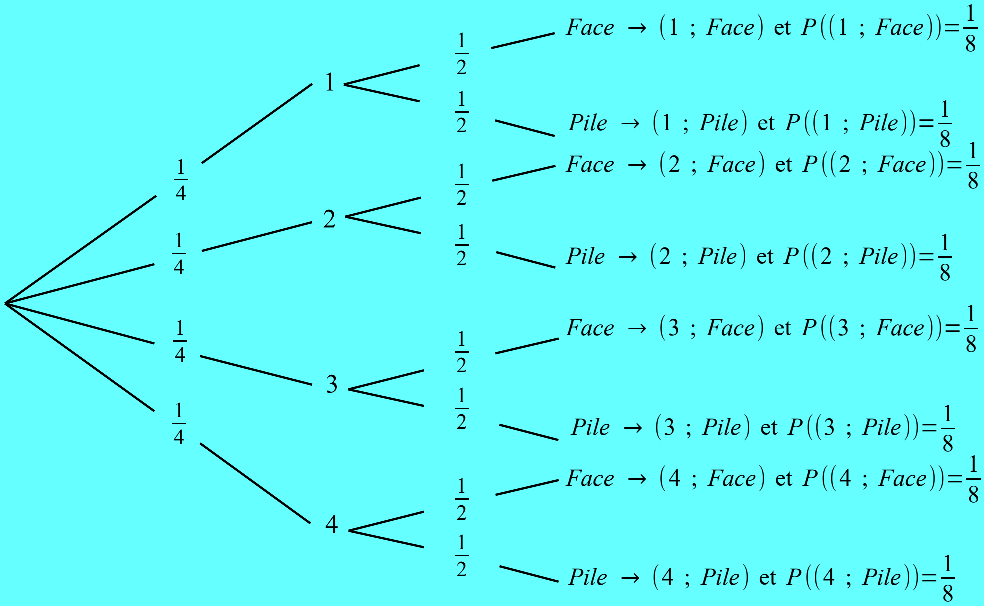
- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis un jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

▪ On détermine Ω

Une issue de Ω est donc un couple, par exemple : $(2\ ;\ Face)$, $(5\ ;\ Pile)$ etc...

Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1;Face);(2;Face);(3;Face);(4;Face);(1;Pile);(2;Pile);(3;Pile);(4;Pile)\}$$

▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	$(1;Face)$	$(2;Face)$	$(3;Face)$	$(4;Face)$	$(1;Pile)$	$(2;Pile)$	$(3;Pile)$	$(4;Pile)$	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

Issue	$(1;Face)$	$(2;Face)$	$(3;Face)$	$(4;Face)$	$(1;Pile)$	$(2;Pile)$	$(3;Pile)$	$(4;Pile)$
$X(Issue)$	-6 $=-4-2$	8 $=10-2$	8 $=10-2$	8 $=10-2$	-6 $=-4-2$	3 $=5-2$	-6 $=-4-2$	3 $=5-2$

▪ On regroupe les antécédents :

$\{X = -6\} = \{(1;Face)\} \cup \{(1;Pile)\} \cup \{(3;Pile)\}$

$\{X = 3\} = \{(2;Pile)\} \cup \{(4;Pile)\}$

$\{X = 8\} = \{(2;Face)\} \cup \{(3;Face)\} \cup \{(4;Face)\}$

Le plus gros du travail est fait au brouillon

▪ On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-6	3	8	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté X, la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

On n'écrit pus les accolades

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On fait une partie :

1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit pus les accolades

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	…	0,08

1) Déterminer $P(X = 8)$.
2) Déterminer $P(X \leqslant 0)$.
3) Déterminer $P(X > 7)$.
4) Déterminer $P(X < 20)$.

III Espérance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour X ? »

Définition n°3. ***Espérance d'une variable aléatoire réelle***

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$), soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \dots , x_k$.

On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i)}$$

Remarque n°5.

$$\sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Exemple n°4. ***dans le contexte de l'exemple n°3***

$$E(X) = -3{,}52 \times P(X=-3{,}52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4{,}59 \times P(X=4{,}59)$$
$$E(X) = -3{,}52 \times 0{,}1 + (-2) \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}12 + 4{,}59 \times 0{,}18$$
$$E(X) = 0{,}2142$$

L'espérance de X vaut 0,2142.

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1 ***Déterminer l'espérance***

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (***On dit alors que la variable aléatoire est centrée***)

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

EXERCICE N°2 ***Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)***

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,000 09	0,000 01

Ce jeu est-il équitable ?

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».
On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le «triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.
Déterminer, en fonction de m, le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.

Propriété n°1. ***espérance et transformation affine***

Comme la somme des $P(X=x_i)$ vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i P(X=X_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités respectives.

Or :

▪ Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre b à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de b.

▪ Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul a toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par a.

Au final on peut écrire : $\boxed{E(aX+b) = a\times E(X) + b}$

IV Variance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de X autour de $E(X)$. Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

Définition n°4. ***Variance d'une variable aléatoire réelle***

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $x\,, x\,, \ldots, x_k$.

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$V(X) = E((X-E(X))^2)$ c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)}$$

Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$\boxed{V(X) = (x_1-E(X))^2\times P(X=x_1) + (x_2-E(X))^2\times P(X=x_2) + \ldots (x_k-E(X))^2\times P(X=x_k)}$$

Exemple n°5. ***Dans le contexte de l'exemple n°3***

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	$4{,}59$	Total
$P(X=x_i)$	$0{,}1$	$0{,}25$	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	$0{,}12$	$0{,}18$	1

On calcule d'abord l'espérance :

$E(X) = 0{,}2142$ (on l'a fait dans l'exemple n°4)

Puis on calcule la variance :

$V(X) = (-3{,}52-0{,}2142)^2\times 0{,}1 + (-2-0{,}2142)^2\times 0{,}25 + \ldots + (4{,}59-0{,}2142)^2\times 0{,}18$

$V(X) \approx 6{,}4654$

Propriété n°2. ***variance et transformation***

Soit a et b deux nombres réels. $\boxed{V(aX+b) = a^2\times V(X)}$

En effet,

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{k}(a\,x_i+b-E(aX+b))^2\times P(X=x_1)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(a\,x_i+b-aE(X)-b)^2\times P(X=x_1)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(a(x_i-E(X)))^2\times P(X=x_1)\\
&= \sum_{i=1}^{k}a^2(x_i-E(X))^2\times P(X=x_1)\\
&= a^2\sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times P(X=x_1) \;=\; a^2\times V(X)
\end{aligned}$$

Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimerait que $E(X)$ et $V(X)$ aient la même unité.
En effet si X est par exemple en euro alors $E(X)$ sera en euro mais $V(X)$ sera en « euro au carré »…
On va donc « se débarrasser de ce carré »…

V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition n°5. écart-type d'une variable aléatoire réelle

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple n°6. Toujours dans le contexte de l'exemple n°3

On avait $V(X) \approx 6{,}4654$
Donc $\sigma(X) = V(X) \approx 2{,}5427$

Remarque n°9. écart-type et transformation affine

$$\sigma(aX+b) = |a|\times\sigma(X)$$

VI Formule de Koenig-Huygens

Remarque n°10.

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

▪ Gardons à l'esprit que $E(X)$ est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^{k}E(X)^2\times P(X=x_i) = E(X)^2\times\sum_{i=1}^{k}P(X=x_i) = E(X)^2\times 1$$

▪ Dans la même idée :

$$E(-2\,X\,E(X)) = \sum_{i=1}^{k}-2\,x_i\,E(X)\times P(X=x_i) = -2\,E(X)\times\sum_{i=1}^{k}x_i\,P(X=x_i) = -2\,E(X)\times E(X)$$

▪ On peut donc écrire :

$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2-2\,X\,E(X)+(E(X))^2)$

ou encore

$V(X) = E(X^2)-2\,E(X\,E(X))+E((E(X))^2)$

et grâce aux deux premiers points :

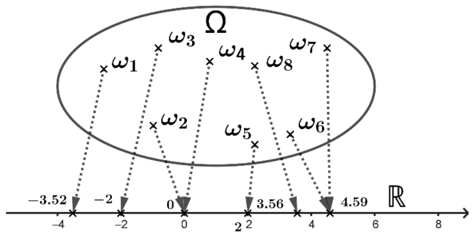
$V(X) = E(X^2)-\underbrace{2\,E(X)\,E(X)}_{-2\,E(X)^2}+\underbrace{E(X)^2\times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2)-(E(X))^2$

Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{V(X) = E(X^2)-(E(X))^2}$$

VII Le résumé du cours



Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est à dire si X **associe à chaque issue de Ω un nombre réel.**

Convention d'écriture

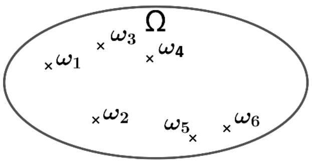
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférrieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Loi de probabilité

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$) , soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \dots , x_k$.
Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k.

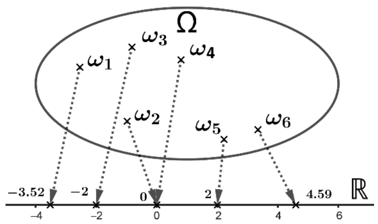
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0)+P(X = 2)+P(X = 4{,}59) = 1$

Espérance de *X*

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i)}$$

ou encore :

$$\boxed{E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)}$$

Variance de X	$\boxed{V(X) = E((X-E(X))^2)}$ ou encore : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)}$
Écart-type de X	$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$
	Les propriétés à retenir a et b sont des nombres réels.
Transformation affine, changement de variable **(selon les livres)**	$\boxed{E(aX+b) = a \times E(X) + b}$ $\boxed{V(aX+b) = a^2 \times V(X)}$ $\boxed{\sigma(aX+b) = \lvert a \rvert \times \sigma(X)}$
Formule de Koenig-Huygens	$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$