

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

I Population et sous-population

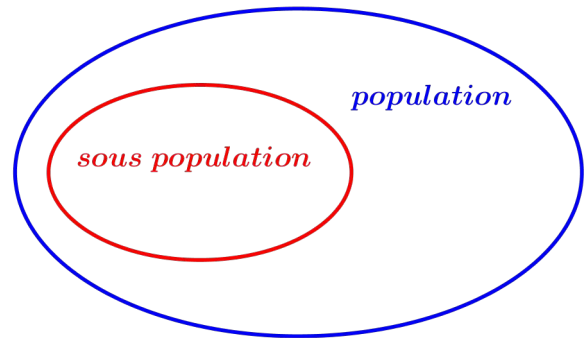
Définition n°1.

On appelle population un ensemble d'éléments appelés les individus.
On appelle sous-population une partie de la population.

Remarque n°1.

Les individus d'une population ne sont pas toujours des personnes. Ils peuvent être également des objets.

Une population et une sous-population peuvent se représenter par un diagramme comme ci-contre.



Exemple n°1.

On considère la population constituée par les élèves d'un lycée. Un individu est un élève. L'ensemble des élèves des classes de Seconde constitue une sous-population de la population des élèves du lycée.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E01

EXERCICE N°1

Un laboratoire fabrique chaque année des médicaments. La production de ces médicaments permet de mettre sur le marché des anticoagulants, des antidépresseurs et des régulateurs de tension. L'entreprise veut effectuer une étude sur sa production totale de médicaments.

- 1) Quelle est la population étudiée par le service de recherche de l'entreprise?
- 2) Citer deux sous-populations.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

II Proportion d'une sous-population

Définition n°2.

On considère une population qui possède N individus et une sous-population composée de n individus.

La proportion d'individus de la sous-population, notée p , est égale à

$$p = \frac{n}{N}$$

Remarque n°2.

p peut s'exprimer en pourcentage. Un pourcentage est donc une proportion.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E01

EXERCICE N°2

Une réserve de protection d'oiseaux, constituée d'espèces en danger, contient 1 800 individus. On dénombre 8 % de milans royaux (c'est un rapace) et 270 alouettes des champs.

- 1) Quel est le nombre de milans royaux?
- 2) Déterminer la proportion d'alouettes des champs. Donner aussi le résultat en pourcentage.

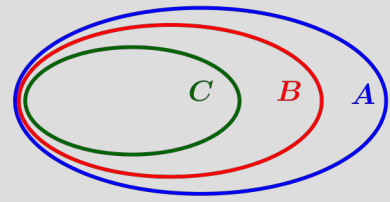
PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

III Pourcentage de pourcentage

Propriété n°1.

On note p_B la proportion d'individus de la population B dans A et p_C la proportion d'individus de la population C dans B .

La proportion p d'individus de C dans A est égale à



$$p = p_B \times p_C$$

Exemple n°2.

Si 30 % des élèves du lycée sont des secondes et si 40 % des secondes mangent à la cantine alors la proportion des élèves de secondes qui mangent à la cantine parmi l'ensemble des élèves du lycée est :

$$\frac{40}{100} \times \frac{30}{100} = 0,12 \quad \text{soit } 12 \%$$

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E01

EXERCICE N°3

Calculer :

1) 30 % de 60 %

2) 50 % de 50 %

3) 1 % de 80 %

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E01

EXERCICE N°4

D'après les statistiques de l'Insee, la France comptera 74 millions d'habitants en 2050. Parmi les Français, les personnes de plus de 65 ans représenteront 40 %.
De plus, 60% des plus de 65 ans auront plus de 75 ans.

Quelle sera la proportion de Français âgée de plus de 75 ans en 2050 ? Donner le résultat en pourcentage.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

IV Variations d'une quantité

Définition n°3. Variation absolue

On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initiale et V_F la quantité finale.

La **variation absolue** de la quantité est le nombre :

$$V_F - V_I$$

Remarque n°3.

La variation absolue possède la même unité que la quantité étudiée.

Exemple n°3.

Au 1^{er} Janvier 2012, le SMIC mensuel brut était de 1 425,67 €.

Au 1^{er} Janvier 2019, le SMIC mensuel brut était de 1 521,22 €.

Or : $1\,521,22 - 1\,425,67 = 95,55$

La variation absolue vaut donc : 95,55 €

Propriété n°2.

- Lorsque la variation absolue d'une quantité est positive, la quantité augmente.
- Lorsque la variation absolue d'une quantité est négative, la quantité diminue.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

Définition n°4. Variation relative

On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initial et V_F la quantité finale.

La **variation relative** t de V_F par rapport à V_I , est le nombre

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

Remarque n°4.

- La variation relative ne possède pas d'unité.
- La variation relative s'appelle également le **taux d'évolution** de la quantité étudiée. Elle peut s'exprimer en pourcentage.

Exemple n°4.

En reprenant les données de l'exemple n° 3 :

$$\frac{1521,22 - 1425,67}{1425,67} \approx 0,0670 \text{ arrondi à } 10^{-4} \text{ près}$$

Soit une hausse du SMIC mensuel brut d'environ 6,7 %.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E02

EXERCICE N°1

Le patron d'un magasin d'informatique compare les résultats de ses ventes de tablettes et ordinateurs portables entre l'année 2019 et l'année 2020: le nombre d'ordinateurs portables vendus est passé de 1 256 à 1 099 en une année. Dans le même temps, le nombre de tablettes vendues est passé de 890 à 1068.

- 1) Quelle est la variation absolue du nombre d'ordinateurs portables vendus entre 2019 et 2020? Interpréter.
- 2) Quelle est la variation relative du nombre de tablettes vendues entre 2019 et 2020? Donner le résultat en pourcentage.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E02

EXERCICE N°2

Lors d'une semaine promotionnelle organisée dans un cinéma de quartier, une place d'entrée habituellement à 8 euros est vendue 5 euros.

Lors de cette semaine, et par rapport à une semaine normale, quel est le pourcentage d'évolution prix de l'entrée?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

V ***Coefficient Multiplicateur***

Remarque n°5.

• On pose $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$ une variation relative. On a alors $V_F = (1+t)V_I$.

Si t est positif, la quantité augmente.

Si t est négatif, la quantité diminue.

t peut s'exprimer en pourcentage : $t = \frac{t'}{100}$

On a alors $V_F = (1+t)V_I = \left(1 + \frac{t'}{100}\right)V_I$

Définition n°5. ***Le Coefficient Multiplicateur***

On donne t est une variation relative (ou taux d'évolution) .

On appelle Coefficient Multiplicateur et on note **$CM = 1+t$**

Remarque n°6.

- $CM > 1$ correspond à une augmentation
- $CM < 1$ correspond à une diminution

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E02

EXERCICE N°3

En été, la population d'une île est multipliée par 13, soit une augmentation de 54000 habitants. Quel pourcentage d'augmentation subit la population de cette île durant l'été?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E02

EXERCICE N°4

Une entreprise compte 250 salariés en 2018. Suite à une augmentation des commandes, elle embauche 35 personnes en 2019.

- 1) Quel est le nombre de salariés dans l'entreprise après recrutement ?
- 2) Quel pourcentage représentent les embauches par rapport à l'effectif des salariés de 2018 ?
- 3) En 2020, l'entreprise embauche encore 12 personnes.

Combien y a-t-il de salariés dans l'entreprise en 2020 ?

- 4) Quel est le taux d'augmentation du nombre de salariés entre 2018 et 2020 ?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E02

EXERCICE N°5

Deux magasins affichent les tarifs suivants pour un même modèle de téléviseur qu'ils vendent.

Magasin 1 : Le prix du téléviseur passe de 250€ à 212,5€

Magasin 2 : Le prix du téléviseur baisse de 13 % .

Quel est le téléviseur qui bénéficie de la plus forte baisse ?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

VI Indice de base 100

Définition n°6. D'après l'INSEE :

L'indice d'une grandeur est le rapport entre la valeur de cette grandeur au cours d'une période courante et sa valeur au cours d'une période de base. Il mesure la variation relative de la valeur entre la période de base et la période courante. Souvent, on multiplie le rapport par 100 ; on dit : indice base 100 à telle période.

Les indices permettent de calculer et de comparer facilement les évolutions de plusieurs grandeurs entre deux périodes données.

Méthode n°1. Calculer un indice de base 100

Une valeur V_I est fixée, tous les CM sont calculés par rapport à elle et sont multipliés par 100.

Dans l'exemple qui suit : V_I est la quantité de 2016 : 3250

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Quantité	3575	3250	3087,5	2925	3380
Indice de base 100 par rapport à 2016	110	100	95	90	104

▪ Indice de base 100 de 2019 par rapport à 2016 : $\frac{3380}{3250} \times 100 = 104$

▪ Quantité en 2017 : $\frac{3250 \times 95}{100}$

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E03

EXERCICE N°1

On donne le tableau suivant en calculer les indices en base 100 manquants.
(On arrondira les résultats à 0,1 près)

	t_1	t_2	t_3	t_4
Effectifs	527	300	452	346
Indice	i_1	i_2	100	i_4

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E03

EXERCICE N°2

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires annuel d'une entreprise pour les années comprises entre 2012 et 2018.

Déterminer l'indice de 2018. (On donnera un résultat arrondi au dixième)

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires en milliers d'euros y_i	276	271,3	267,5	263,2	262,5	264,7	264,2
Indice (base 100)	100	98,3	96,9	95,4	95,1	95,9	?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E03

EXERCICE N°3

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice du nombre annuel d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel de 2011 à 2019, base 100 en 2011.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Indice y_i	100	100,6	102	103,9	105,7	105,7	105,8	110,3	113

- 1) Quel a été le taux d'évolution du nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel entre 2012 et 2016 ? (On donnera un résultat arrondi à 0.01% près)
- 2) Par quel nombre a été multiplié le nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel entre 2014 et 2017 ? (On donnera un résultat arrondi au centième)
- 3) On suppose que le nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel a diminué de 13,2% entre 2011 et 2020. Quel est l'indice 2020 de ce nombre d'immatriculations ?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

VII Évolutions successives

Attention des taux d'augmentations (ou de baisses) successives ne s'additionnent pas.

Pour calculer la valeur finale après 2 évolutions successives (hausses et/ou baisses), on multiplie la valeur initiale par le produit des coefficients multiplicatifs qui correspondent à chaque évolution :

$$V_F = V_I \times CM_1 \times CM_2 = V_I \times (1+t_1) \times (1+t_2)$$

Pour déterminer le taux global t_g en %, on calcule d'abord le **coefficient multiplicateur global** CM_g puis on en déduit le **taux global**.

$$CM_g = CM_1 \times CM_2 \quad \text{puis} \quad t_g = CM_g - 1$$

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

VIII Évolutions réciproques

Une évolution (hausse ou baisse) de $t\%$ n'est pas compensée par une évolution opposée de $t\%$. Il y a toujours une baisse.

L'évolution réciproque d'une évolution, est l'évolution inverse qui permet de revenir à la valeur initiale.

Le coefficient réciproque CM_r du coefficient CM de l'évolution de départ est donné par la formule :

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

Réviser pour IE02

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°1

Dire si les affirmations suivantes sont vraie ou fausse.

- 1) Si un prix augmente de 20 % puis baisse de 20 %, alors il reste le même.
- 2) Une hausse de 20% suivie d'une baisse de 20 % revient au même qu'une hausse de 60 % suivie d'une baisse de 40 %.

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°2

Dans chacun des cas, calculer le coefficient multiplicateur.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) Hausse de 25 % puis hausse de 10%. | 2) Hausse de 30 % puis baisse de 30 %. |
| 3) Baisse de 42% puis baisse de 8%. | 4) Hausse de 2% puis baisse de 1 %. |

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°3

Dans une entreprise A, les salaires ont augmenté de 2% entre 2017 et 2018 puis de 3% entre 2018 et 2019.

Dans une autre entreprise B, les salaires ont augmenté de 4% entre 2017 et 2018 puis de 1 % entre 2018 et 2019.

Dans quelle entreprise les salaires ont-ils le plus augmenté entre 2017 et 2019?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°4

La production d'un éleveur laitier a diminué de 30 % entre les mois de janvier et février.

Quel devrait être le pourcentage d'évolution entre les mois de février et mars pour qu'il retrouve même production qu'au mois de janvier?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°5

Un fleuriste a acheté des orchidées au prix de gros à 6€ le pot.

Il majore habituellement le prix de 30 % pour les vendre mais décide de les solder de 25 % au moment des fêtes de Noël. Il espère ainsi ne pas réaliser de pertes.

A-t-il raison?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°6

Le salaire moyen d'une petite entreprise de douze salariés est de 1200 €.

- 1) Un treizième salarié est embauché, le salaire moyen augmente alors de 50€.
Quel est le salaire du nouveau ?
- 2) Un treizième salarié est embauché, le salaire moyen augmente alors de 2 %
Quel est le salaire du nouveau ?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E04

EXERCICE N°7 Python

Soit x un pourcentage d'évolution.

- 1) Écrire une fonction en langage Python permet de calculer le pourcentage d'évolution réciproque.
- 2) Écrire une fonction en Python qui renvoie le pourcentage global d'évolution lorsqu'on applique trois évolutions successives de pourcentage x .

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E05

EXERCICE N°1

Une somme de 1 500 euros est placée en banque au taux de 2,5 % à intérêts composés.

- 1) Calculer le capital disponible au bout de 1 an, puis au bout de 2 ans.
- 2) Quel est le capital disponible au bout de 5 ans ?

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS E05

EXERCICE N°2

Les deux questions sont indépendantes. Les coefficients multiplicatifs sont à arrondir à 10^{-4} .

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser une taxe d'habitation et un impôt.

1) Il est envisagé de baisser la taxe d'habitation de 15 % en deux ans. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année. Justifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 7,8 %.

2) Il est envisagé de baisser l'impôt de 20 % en quatre ans.

La première année, cet impôt baisse de 6 %, la deuxième année, la baisse est de 5 % et la troisième année de 4%.

2.a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme des trois premières années ?

2.b) Pour atteindre l'objectif d'une baisse de 20 % en quatre ans, quel pourcentage de baisse ce gouvernement doit-il décider pour la quatrième année?

IX Le résumé du cours

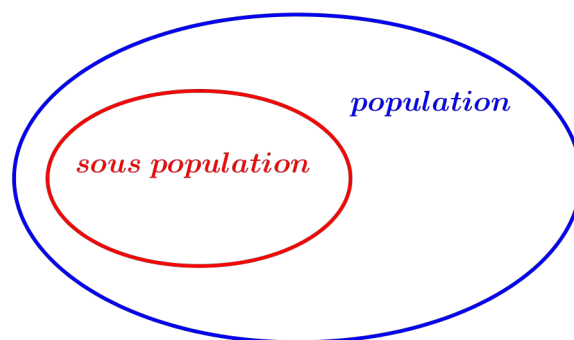
Proportion

Population : N éléments

Sous-population : n éléments

Proportion de la sous-population parmi la population : p

$$p = \frac{n}{N}$$

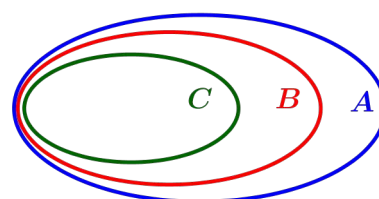


Proportion de proportion

On note p_B la proportion d'individus de la population B dans A et

p_C la proportion d'individus de la population C dans B

La proportion p d'individus de C dans A est égale à



$$p = p_B \times p_C$$

Variation absolue :

$$V_F - V_I$$

Variation relative ou taux d'évolution :

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

Coefficient Multiplicateur :

$$CM = 1 + t$$

et bien sûr $t = CM - 1$...

Calculer un indice de base 100

Une valeur V_I est fixée, tous les CM sont calculés par rapport à elle et sont multipliés par 100. Dans l'exemple qui suit : V_I est la quantité de 2016 : 3250

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Quantité	3575	3250	3087,5	2925	3380
Indice de base 100 par rapport à 2016	110	100	95	90	104

▪ Indice de base 100 de 2019 par rapport à 2016 : $\frac{3380}{3250} \times 100 = 104$

▪ Quantité en 2017 : $\frac{3250 \times 95}{100}$

Attention des taux d'augmentations (ou de baisses) successives ne s'additionnent pas.

Évolutions successives

$$V_F = V_I \times CM_1 \times CM_2 = V_I \times (1+t_1) \times (1+t_2)$$

CM global

$$CM_g = CM_1 \times CM_2$$

Taux global

$$t_g = CM_g - 1$$

Évolutions réciproques

CM réciproque

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

