EXERCICE N°3 Tangentes parallèles à une droite donnée

Extrait du déclic 1er spé 74 p 122

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^3 - x^2 - x + 1$$

Déterminer les tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = -8x+2$.
On précisera l'abscisse des points de tangence et leurs équations réduites respectives.

On parle de tangentes donc on doit penser « dérivée » et se souvenir que le nombre dérivé et le coefficient directeur de la tangente…
On doit aussi savoir que « droites parallèles = même coefficient directeur »

La droite d'équation $y = -8x+2$ a pour coefficient directeur -8 .

- Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = -8$

f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -3\times 3x^2 - 2x - 1 + 0$ ou encore : $\boxed{f'(x) = -9x^2 - 2x - 1}$

Ainsi

$$f'(x) = -8$$
$$\Leftrightarrow -9x^2 - 2x - 1 = -8$$
$$\Leftrightarrow -9x^2 - 2x + 7 = 0$$

Posons $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-9)\times 7 = 4 + 4\times 63 = 4 + 252 = 256$, le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{256}}{2\times(-9)} = \frac{2-16}{-18} = \frac{-14}{-18} = \frac{7}{9}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{256}}{2\times(-9)} = \frac{2+16}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

- On en déduit qu'il y a deux tangentes à C_f possibles :
- La première se situe au $\boxed{\text{point d'abscisse } -1}$ et admet comme équation

$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

Or :

$f(-1) = -3(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 - 1 + 1 + 1 = 4$

et

$f'(-1) = -8$

On obtient :

$y = -8(x+1) + 4$

qui se réduit à :

$\boxed{y = -8x - 4}$

- La seconde situe au $\boxed{\text{point d'abscisse } \frac{7}{9}}$ et admet comme équation :

$$y = f'\left(\frac{7}{9}\right)\left(x - \frac{7}{9}\right) + f\left(\frac{7}{9}\right)$$

Or :

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -3\left(\frac{7}{9}\right)^3 - \left(\frac{7}{9}\right)^2 - \frac{7}{9} + 1 = -\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 = \frac{-343-147-189+243}{243} = -\frac{436}{243}$$

et

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -8$$

On en déduit $\boxed{y = -8x + \frac{1076}{243}}$

Aide au calcul

$$-\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 = -\frac{436}{243}$$
$$-\frac{56}{9} - \frac{436}{243} = \frac{1076}{243}$$