Fonctions affines et inéquations M01

Exercice 1

1. Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

a. $-3x+2 \geqslant 0$ b. $5(x+9)>0$

c. $\dfrac{x+1}{4} \geqslant -3\times\dfrac{x-2}{3}$ d. $2>x$

2. Résoudre les inéquations suivantes

a. $-3x+7 \leqslant x+2$ b. $-6x+1>0$

c. $-\dfrac{x}{4}<5$ d. $-3(x+5)<x+5$

e. $-3x+7 \leqslant 9-x$ f. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3}<2$

g. $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

Correction 1

1. a. 9 n'est pas solution de l'inéquation $-3x+2\geqslant 0$ car : $-3\times 9+2=-27+2=-25$

b. 9 est solution de l'inéquation $5{\cdot}(x+9)>0$ car : $5{\cdot}(9+9)=5\times 18=90$

c. 9 est solution de l'équation car :

- $\dfrac{9+1}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$
- $-3\times\dfrac{9-2}{3}=-7$

d. 9 n'est pas solution de l'inéquation de $2>x$.

2. a.
$$\begin{aligned} -3x+7 &\leqslant x+2\\ -4x &\leqslant -5\\ x &\geqslant \frac{-5}{-4}\\ x &\geqslant \frac{5}{4}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

b.
$$\begin{aligned} -6x+1 &> 0\\ -6x &> -1\\ x &< \frac{-1}{-6}\\ x &< \frac{1}{6}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{6}\right[$.

c.
$$\begin{aligned} -\frac{x}{4} &< 5\\ (-4)\times\left(-\frac{x}{4}\right) &> (-4)\times 5\\ x &> -20\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-20\,;+\infty[$.

d.
$$\begin{aligned} -3(x+5) &< x+5\\ -3x-15 &< x+5\\ -4x &< 20\\ x &> \frac{20}{-4}\\ x &> -5\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-5\,;+\infty[$.

e.
$$\begin{aligned} -3x+7 &\leqslant 9-x\\ -2x+7 &\leqslant 9\\ -2x &\leqslant 2\\ x &\geqslant \frac{2}{-2}\\ x &\geqslant -1\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

f.
$$\begin{aligned} \frac{x-1}{6}+\frac{x+1}{3} &< 2\\ 6\times\left(\frac{x-1}{6}+\frac{x+1}{3}\right) &< 6\times 2\\ (x-1)+2\times(x+1) &< 12\\ x-1+2x+2 &< 12\\ 3x+1 &< 12\\ 3x &< 11\\ x &< \frac{11}{3}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{11}{3}\right[$.

g.
$$\begin{aligned} x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6} &\leqslant \frac{x+1}{3}+\frac{2x-3}{6}\\ 6\times\left(x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\right) &\leqslant 6\times\left(\frac{x+1}{3}+\frac{2x-3}{6}\right)\\ 6x+3x-x &\leqslant 2\times(x+1)+(2x-3)\\ 8x &\leqslant 2x+2+2x-3\\ 8x &\leqslant 4x-1\\ 4x &\leqslant -1\\ x &\leqslant \frac{-1}{4}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right]$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+1)^2>0$ b. $(x+1)^2 \geqslant 0$

c. $(x+1)^2<0$ d. $x^2+1 \leqslant 0$

e. $x^2-4<(x+2)^2$ f. $(x+1)^2-(x-1)^2 \geqslant 0$

Correction 2

a. L'inéquation $(x+1)^2>0$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
car un carré est positif et le membre de gauche ne s'annule que pour $x=-1$.

b. L'inéquation $(x+1)^2\geqslant 0$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S}=\mathbb{R}$
car un carré est toujours positif ou nul.

c. L'inéquation $(x+1)^2<0$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S}=\varnothing$
car un carré ne peut être strictement négatif.

d. On a :
$$x^2 \geqslant 0$$
$$x^2+1 \geqslant 1$$
On en déduit que l'inéquation $x^2+1 \leqslant 0$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = \varnothing$

e. On a les transformations algébriques suivantes :
$$x^2-4 < (x+2)^2$$
$$x^2-4 < x^2+4x+4$$
$$-4 < 4x+4$$
$$-4x < 8$$
$$x > \frac{8}{-4}$$
$$x > -2$$
Cette inéquation a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = \left]-2\,;+\infty\right[$

f. Résolvons cette inéquation :
$$(x+1)^2-(x-1)^2 \geqslant 0$$
$$\big(x^2+2x+1\big)-\big(x^2-2x+1\big) \geqslant 0$$
$$x^2+2x+1-x^2+2x-1 \geqslant 0$$
$$4x \geqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$
Cette inéquation a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$

Exercice 3

Soit n un entier relatif $(n \in \mathbb{Z})$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
$$-3{\cdot}n^2+5 > -13$$

Correction 3

Pour résoudre cette inéquation, on a les transformations algébriques :
$$-3n^2+5 > -13$$
$$-3n^2 > -18$$
$$n^2 < \frac{-18}{-3}$$
$$n^2 < 6$$
Les solutions de cette inéquation sont tous les entiers relatifs appartenant à l'intervalle $\big[-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\big]$. L'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \big\{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\big\}$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes, donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalle et le représenter sur une droite graduée :

a. $3x+3 \geqslant 1$ b. $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant -1$

c. $x^2+x+1 \geqslant (x+1)(x-1)$

Correction 4

1. Résolvons l'inéquation :
$$3x+3 \geqslant 1$$
$$3x \geqslant 1-3$$
$$3x \geqslant -2$$
$$x \geqslant -\frac{2}{3}$$
Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

2. Résolvons l'inéquation :
$$\frac{3x-1}{4} \leqslant -1$$
$$4\times\frac{3x-1}{4} \leqslant 4\times(-1)$$
$$3x-1 \leqslant -4$$
$$3x \leqslant -4+1$$
$$3x \leqslant -3$$
$$x \leqslant -1$$
Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-1\right]$

3. Résolvons l'inéquation :
$$x^2+x+1 \geqslant (x+1)(x-1)$$
$$x^2+x+1 \geqslant x^2-1$$
$$x^2+x-x^2 \geqslant -1-1$$
$$x \geqslant -2$$
Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left[-2\,;+\infty\right[$

