EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction nulle}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f_1'(x) = 0$, $f_2'(x) = 0$, $f_3'(x) = 0$, $f_4'(x) = 0$, $f_5'(x) = 0$.

2) $g_1 : x \mapsto x + 2$; $g_2 : x \mapsto x + 3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction constante égale à 1}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g_1'(x) = 1$, $g_2'(x) = 1$.

3) $g_3 : x \mapsto 4x + 5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x + 8{,}5$;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante k $(k = 4$ pour g_3 et $k = \sqrt{7}$ pour $g_4)$ et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à k .

Ainsi : $\boxed{g_3' : x \mapsto 4}$ et $\boxed{g_4' : x \mapsto \sqrt{7}}$

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2 - 4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2 + 5x - 1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2 + 6x + \sqrt{3}$

▪ Pour h_1 :

h_1 est la forme $3 \times u + v$

où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -4$

Or :

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

h_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_1'(x) = 3u'(x) + v'(x)$$
$$= 3 \times 2x + 0$$
$$\boxed{h_1'(x) = 6x}$$

▪ Pour h_2 :

h_2 est la forme $4 \times u + 5 \times v + w$

où $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_2'(x) = 4u'(x) + 5 \times v'(x) + w'(x)$$
$$= 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$
$$\boxed{h_2'(x) = 8x + 5}$$

▪ Pour h_3 :
h_3 est la forme $-2{,}5\times u + 6\times v + w$
où $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$
Or :
u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$
v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$
w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$
Donc
h_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_3'(x) = -2{,}5u'(x)+6\times v'(x)+w'(x)$$
$$= -2{,}5\times 2x+6\times 1+0$$
$$\boxed{h_3'(x) = -5x+6}$$

5) $h_4 : x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$

▪ Pour h_4 :
h_4 est la forme $\frac{5}{2}\times u-4\times v+3\times w-t$
où $u : x \mapsto x^3$, $v : x \mapsto x^2$, $w : x \mapsto x$ et $t : x \mapsto -7\sqrt{11}$
Or :
u, v, w et t sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$, $w'(x) = 1$ et $t'(x) = 0$
Donc
h_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_4'(x) = \frac{5}{2}\times u'(x)-4\times v'(x)+3\times w'(x)-t'(x)$$
$$= \frac{5}{2}\times 3x^2-4\times 2x+3\times 1-0$$
$$\boxed{h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2-8x+3}$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

▪ Pour h_5 :
h_5 est une somme de fonctions de référence définie et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_5'(x) = \pi\times 3x^2 + \sqrt{5}\times 2x - \frac{14}{3}\times 1 + 0$$
$$\boxed{h_5'(x) = 3\pi x^2+2\sqrt{5}x-\frac{14}{3}}$$

On fait bien attention
à arrêter le radical
avant le x

n est un
entier naturel

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$; $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$

▪ Pour h_6 :
h_6 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, donc h_6 est définie et dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :
$x : \mapsto x^n$ et $x : \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui contient $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et
$x : \mapsto \frac{1}{x}$ n'est définie et dérivable que sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
On ne garde que la partie commune pour tout le monde :
$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[\cap \mathbb{R} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$,

$$h_6'(x) = 3 \times nx^{n-1} + 2 \times 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_6'(x) = 3nx^{n-1} + 4x - \frac{3}{x^2}}$$

▪ Pour h_7 :

h_7 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, donc h_7 est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et :

$\forall x \in]0\ ;+\infty[$,

$$h_7'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times 15x^{14} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_7'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}}$$

▪ Pour h_8 :

h_8 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, donc h_8 est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et :

$\forall x \in]0\ ;+\infty[$,

$$h_8'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 7 \times 1 - 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_8'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7}$$

On a « mis la constante à la fin »

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour h_9 :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2 - 21x + 8x - 28 \\ &= 6x^2 - 13x - 28 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_9'(x) = 6 \times 2x - 13 \times 1 - 0$$

$$\boxed{h_9'(x) = 12x - 13}$$

▪ Pour h_{10} :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 28x + 49 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_{10}'(x) = 4 \times 2x - 28 \times 1 - 0$$

$$\boxed{h_{10}'(x) = 4x - 28}$$