

# LA DÉRIVATION E04C

## EXERCICE N°1 Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente

Pour chaque fonction  $f$ , déterminer sa fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $I$  qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative  $C_f$  de la fonction  $f$  au point d'abscisse  $a$ .

1)  $f(x) = 4x^3 - 5x + 3$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $a = 1$ .

▪  $f$  est bien définie et dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 1 + 0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 5$$

▪ Une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici  $a = 1$

d'où

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 5 \times 1 + 3 = 2$$

et

$$f'(1) = 12 \times 1^2 - 5 = 7$$

Ainsi :

$$y = 7(x-1) + 2$$

qui se réduit à :

$$y = 7x - 5$$

2)  $f(x) = -7t^2 - \frac{3}{t} + 5$ ,  $I = ]0 ; +\infty[$ ,  $a = 3$ .

▪  $f$  est bien définie et dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(t) = -7 \times 2t - 3 \times \frac{-1}{t^2} + 0$$

$$f'(t) = -14t + \frac{3}{t^2}$$

▪ Une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici  $a = 3$

d'où

$$f(3) = -7 \times 3^2 - \frac{3}{3} + 5 = -59$$

et

$$f'(3) = -14 \times 3 + \frac{3}{3^2} = -42 + \frac{1}{3} = \frac{-126+1}{3} = -\frac{125}{3}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{125}{3}(x-3) - 59$$

qui se réduit à :

$$y = -\frac{125}{3}x + 184$$

3)  $f(x) = (2x-3)^3(x^2+1)$  ,  $I = \mathbb{R}$  ,  $a = -1$  .

▪  $f$  est bien définie et dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  , on peut écrire :

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

avec :

$$u(x) = (2x-3)^3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 3 \times 2 \times (2x-3)^2 = 6(2x-3)^2$$

et

$$v(x) = x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 6(2x-3)^2(x^2+1) + 2x(2x-3)^3 \\ &= (2x-3)^2[6(x^2+1)+2x(2x-3)] \\ &= (2x-3)^2(6x^2+6+4x^2-6x) \\ &= (2x-3)^2(10x^2+6x+6) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2(2x-3)^2(5x^2+3x+3)$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.

Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.

Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$$f'(x) = 40x^4 - 144x^3 + 186x^2 - 126x + 54$$

▪ Une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici  $a = -1$

d'où

$$f(-1) = (2(-1)-3)^3((-1)^2+1) = (-5)^3 \times 2 = -250$$

et

$$f'(-1) = 2(2(-1)-3)^2(5(-1)^2-3(-1)+3) = 2 \times (-5)^2 \times 11 = 550$$

Ainsi :

$$y = 550(x+1) - 250$$

qui se réduit à :

$$y = 550x + 300$$

4)  $f(x) = \frac{4x^5 - 10x^2 + 3}{2x}$  ,  $I = ]-\infty ; 0[$  ,  $a = -1$  .

▪  $f$  est bien définie et dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  , on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = 4x^5 - 10x^2 + 3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4 \times 5x^4 - 10 \times 2x + 0 = 20x^4 - 20x$$

et

$$v(x) = 2x \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(20x^4 - 20x) - 2(4x^5 - 10x^2 + 3)}{(2x)^2} \\ &= \frac{2[x(20x^4 - 20x) - (4x^5 - 10x^2 + 3)]}{(2x)^2} \\ &= \frac{2(20x^5 - 20x^2 - 4x^5 + 10x^2 - 3)}{2x \times 2x} \\ &= \frac{16x^5 - 10x^2 - 3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{16x^5 - 10x^2 - 3}{2x^2}$$

▪ Une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici  $a = -1$

d'où

$$f(-1) = \frac{4(-1)^5 - 10(-1)^2 + 3}{2(-1)} = \frac{-4 - 10 + 3}{-2} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

et

$$f'(-1) = \frac{16(-1)^5 - 10(-1)^2 - 3}{2(-1)^2} = \frac{-16 - 10 - 3}{2} = -\frac{29}{2}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{29}{2}(x+1) + \frac{11}{2}$$

qui se réduit à :

$$y = -\frac{29}{2}x - 9$$