LES SUITES NUMÉRIQUES

I Quelques définitions

Définition n°1. ***Suite numérique réelle (deux versions)***

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle) u est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$).
Autrement dit :

$$u:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto u(n)\end{cases}$$

Remarque n°1. ***Notations***

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer $u(n)$ par u_n .
Ainsi :

$$u:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto u_n\end{cases}$$

On pourra noter : $\boxed{u \text{ ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)_{n\geqslant 0}}$ pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois (u_n) mais on évitera le plus possible)

On dira que $\boxed{u_n \text{ est le terme de rang } n}$.

Remarque n°2.

À partir de maintenant, on dira « suite » plutôt que « suite numérique réelle ».

Définition n°2. ***Suite définie de façon explicite***

L'application u peut être **définie de façon explicite :**

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n = f(n)}$$

(avec f au moins définie pour tous les entiers naturels)

Exemple n°1. ***Une suite définie de façon explicite***

La suite u définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2n-3$
Ses premiers termes sont :
$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, …
Ici $f:x\mapsto 2x-3$

Définition n°3.

L'application u peut être **définie par une relation de récurrence :**

$$\boxed{u:\begin{cases}u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel})\\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ \forall\ n\in\mathbb{N}\end{cases}}$$

Exemple n°2. ***Une suite définie par une relation de récurrence***

La suite v définie par : $\begin{cases}u_0 = 1\\ u_{n+1} = 2u_n-3\end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

Ses premiers termes sont :
$v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 7$, $v_3 = 15$, …
Ici $f:x\mapsto 2x-3$ (**Ne pas confondre la fonction *f* avec l'application *u* !**)

Remarque n°3.

Une suite peut être définie par un énoncé qui peut prendre plusieurs formes :
- un algorithme (suite d'instructions informatiques ou non)
- un motif géométrique : (triangle de Sierpiński)
- une simple phrase : « la suite w est la suite des nombres impairs positifs ».
- ou encore un ensemble (infini) de points du type $M(n\ ,\ u_n)$.
- ...

II Suites arithmétiques

Définition n°4. Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.
Autrement dit :
▪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

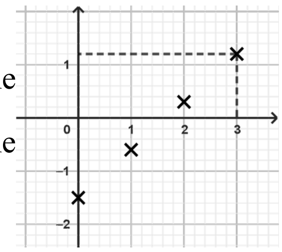
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

▪ Le nombre r est appelé : **raison** de la suite.

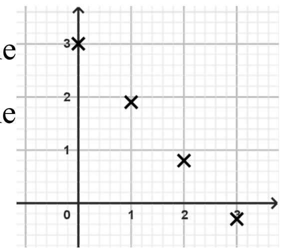
Remarque n°4. Lien avec la définition n°3

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x+r$

Exemple n°3.



▪ La suite $u : \begin{cases} u_0 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}9 \ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $0{,}9$ et de premier terme $u_0 = -1{,}5$.
Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = -1{,}5$, $u_1 = -0{,}6$, $u_2 = 0{,}3$, $u_3 = 1{,}2$



▪ La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 1{,}1 \ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $-1{,}1$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}9$, $v_2 = 0{,}8$, $v_3 = -0{,}7$

Remarque n°5.

Le 1er terme est u_0 , le deuxième u_1 …
On restera vigilant face à ce « décalage » …

Propriété n°1. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\times r}$$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire les termes suivants à l'aide la définition par récurrence :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

Puis, en additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient
$u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+r+u_1+r+\ldots+u_{n-1}+r$
qui équivaut à :
$u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+n\times r$
puis en soustayant $(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})$ à chaque membre
$u_n = u_0 + n\times r$

Remarque n°6. Lien avec la définition n°2

Cette fois-ci la suite est définie de façon explicite et on a : $f : x \mapsto u_0 + r\times x$

Propriété n°2. Une généralisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $p \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)\times r}$$

preuve : Laissée en exercice

Propriété n°3. ***Sommes des premiers entiers***

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+(n-1)+n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ On remarque que $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$

(car : $0+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+0$)

▪ et donc : $\mathbf{2}\times\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)\times n$

(car : $\begin{array}{rl} & 0+\ 1\ +\ 2\ +\ldots+(n-2)+(n+1)+n \\ & +n+(n-1)+(n-2)+\ldots+\ 2\ +\ 1\ +0 \\ = & \underbrace{n+\ n\ +\ n\ +\ldots+\ n\ +\ n\ +n}_{n+1\ termes} \end{array}$)

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *cqfd*

Propriété n°4. ***Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0+k\,r)$ (d'après la propriété n°1)

(car : $\begin{array}{rl} & u_0 \ +\ u_1\ +\ \ldots\ +\ u_{n-1}\ +\ u_n \\ = & u_0+0\times r\ +\ u_0+1\times r\ +\ \ldots\ +\ u_0+(n-1)\times r\ +\ u_0+n\times r \end{array}$)

▪ Or :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_0+k\,r) = \sum_{k=0}^{n} u_0+\sum_{k=0}^{n} k\,r = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0}_{(n+1)u_0} + r\times\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

▪ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{r\times n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0+r\,n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2\,u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

$$= (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

cqfd

III Suites géométriques

Définition n°5. ***Suite géométriques***

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.
Autrement dit :
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

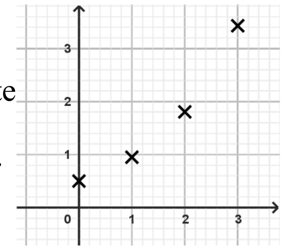
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

- Le nombre q est appelé : **raison** de la suite.

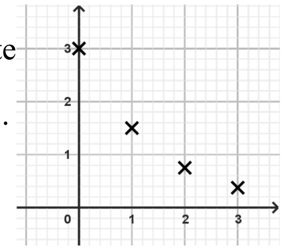
Remarque n°7. ***Lien avec la définition n°3***

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x \times q$

Exemple n°4.



- La suite $u : \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1,9 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 1,9 et de premier terme $u_0 = 0,5$.
Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = 0,5$, $u_1 = 0,95$, $u_2 = 1,805$, $u_3 = 3,4295$



- La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0,5 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1,5$, $v_2 = 0,75$, $v_3 = 0,375$

Propriété n°5. ***Expression de u_n en fonction de n***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n = u_0 \times q^n}$$

preuve :

- Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls et l'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ ($0=0$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$ alors on admet que **tous les termes de la suite sont non nuls** et on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_1 \times q \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} \times q \end{aligned}$$

Puis, en multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \ldots \times u_{n-1} \times q$
qui équivaut à :
$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1} \times q^n$
puis en divisant chaque membre par $(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1})$ (qui est non nul...)
$u_n = u_0 \times q^n$

Propriété n°6. ***Somme des premiers termes d'une suite géométrique***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et u_0 son premier terme.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, en particulier si $u_0 = 1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

preuve :

Nous allons commencer par le cas particulier et nous en déduirons le cas général.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on remarque que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0 \times q^k}_{\text{d'après la propriété n°5}} = \underbrace{u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k}_{\text{par factorisation par } u_0}$$

▪ Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ et calculons $S_n - q S_n$.

$$S_n - q S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - q \times \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right)$$

(car :

$S_n = q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n$

$q \times S_n = q \times \left(q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) = q^{0+1} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1+1} + q^{n+1}$)

▪ donc, par télescopage (à retenir !):

$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n-1}$

(car

$$S_n - q \times S_n = q^0 \underbrace{- q^{0+1} + q^1}_{0} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1} \underbrace{- q^{n-1+1} + q^n}_{0} - q^{n+1}$$

les termes se télescopent au fur et à mesure et il ne reste que le 1er et le dernier)

▪ Or :

$S_n - q \times S_n = (1-q) S_n$ (par factorisation)

▪ Donc

$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$

Comme $q \neq 1, 1-q \neq 0$ et on peut diviser chaque membre par $1-q$ pour obtenir :

▪ $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(Nous avons obtenu le cas particulier)

▪ D'après la remarque du premier point (▪)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(Nous avons obtenu le cas général) *cqfd*

Remarque n°8.

Tant que *n* est fixé, on sait donc faire pas mal de choses sur les suites. Mais *n* peut devenir aussi grand que l'on veut : on dit que *n* peut « tendre vers l'infini ». On aimerait alors savoir comment se comportent les termes de la suite vers cet « infini ». C'est ce qui motive ce dernier paragraphe. Conformément au programme nous resterons dans l'intuition et nous utiliserons parfois des « pseudo-définitions » (cela sera signalé).

IV Comportement de suite

Définition n°6. Suite Croissante, suite décroissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} > u_n$

Remarque n°9.

$u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n \geqslant 0$

En pratique, c'est surtout la partie de droite de l'équivalence qui sera utilisée.

Exemple n°5.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = n^2+3n+2$ est strictement croissante. En effet :
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Étudions la différence $v_{n+1}-v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-u_n &= \underbrace{(n+1)^2+3(n+1)+2}_{v_{n+1}}-\underbrace{(n^2+3n+2)}_{u_n} \\ &= n^2+2n+1+3n+3n+2-n^2-3n-2 \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

- Or n est un entier naturel donc $n \geqslant 0$ d'où $2n \geqslant 0$ et enfin $2n+1 \geqslant 1 > 0$
- Ainsi, $v_{n+1}-v_n > 0$ qui équivaut à $v_{n+1} > v_n$.
- En conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Définition n°7. Convergence, divergence, limite (pseudo-définition)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel.

On dira que :
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si les termes de la suite tendent vers l ,
On dira alors que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut l et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite tendent vers $+\infty$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si les termes de la suite tendent vers $-\infty$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.

Remarque n°10.

L'arnaque vient du fait qu'on a pas défini ce que « tendre » veut dire…

Exemple n°6.

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{5}$ converge vers zéro. ($l=0$)
- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+1} = w_n+5$ diverge vers $+\infty$.
- La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ t_{n+1} = t_n-5$ diverge vers $-\infty$.
- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = a_n+(-1)^n$ diverge.