LES SUITES NUMÉRIQUES E05C

EXERCICE N°1 ***Comportement d'une suite définie explicitement***

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = n^2+n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+1)^2+(n+1)-[n^2+n] \\ &= n^2+2n+1+n+1-n^2-n \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

Or $n \geqslant 0$ donc $2n+2 > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement croissante}}$.

Car : $u_{n+1}-u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = \dfrac{3^n}{7^{n+1}}$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = > 0$, ce qui nous permet ce qui suit.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{7^{n+2}}}{\dfrac{3^n}{7^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{7^{n+2}}\times\frac{7^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{7} < 1$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

En fait, ce n'est pas tout à fait gratuit :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{3}{7}v_n < v_n \text{ et donc } v_{n+1} < v_n$$

et $\dfrac{3}{7}v_n < v_n$ car $\dfrac{3}{7} < 1$ (d'où la comparaison avec 1)

3) La suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_n = -5^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1}-w_n = -5^{n+1}-(-5^n) = -5^{n+1}+5^n = 5^n(-5+1) = -4\times5^n < 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

4) La suite t définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ t_n = (-5)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1}-t_n = (-5)^{n+1}-(-5)^n = (-5)^n(-5-1) = -6\times(-5)^n$$

Or :

si n est pair $(-5)^n > 0$ d'où $-6\times(-5)^n < 0 \Leftrightarrow t_{n+1}-t_n < 0$

et si n est impair $(-5)^n < 0$ d'où $-6\times(-5)^n > 0 \Leftrightarrow t_{n+1}-t_n > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite n'est pas monotone}}$.

EXERCICE N°2 Comportement d'une suite définie par récurrence

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = u_n - \sqrt{n+1} \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = u_n - \sqrt{n+1} - u_n = -\sqrt{n+1} < 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

2) La suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_{n+1} = \dfrac{7}{v_n} \end{cases}$

Allons y gaiement :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{7}{v_n} - v_n = \frac{7 - v_n^{\,2}}{v_n} = \frac{\left(\sqrt{7} + v_n\right)\left(\sqrt{7} - v_n\right)}{v_n} = \ldots$$

On n'arrive pas à se débarrasser de v_n . Dans ce cas, on va regarder les premiers termes

$v_0 = 7$,

$v_1 = \dfrac{7}{7} = 1$,

$v_2 = \dfrac{7}{1} = 7$,

$v_3 = \dfrac{7}{7} = 1$

On constate sur les premiers termes que $\boxed{\text{la suite n'est pas monotone}}$.

Pourquoi on fait pas ça à chaque fois ?

Souvenez-vous : un contre exemple démontre, mais un exemple non.

EXERCICE N°3 Comportement d'une suite arithmétique

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = u_n - 4{,}5 \end{cases}$

On reconnaît une suite arithmétique de raison $r = -4{,}5$ et de 1^er^ terme $u_0 = 3$

On a $r < 0$ donc $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_n = 5n+4$

On reconnaît le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de 1^er^ terme $u_0 = 4$

On a $r > 0$ donc $\boxed{\text{la suite est strictement croissante}}$.

Vous avez tout à fait le droit de rédiger ainsi (en parlant bien du « terme général ») mais faites attention au premier terme. Si on avait eu « $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } v_n = 5n+4$ » alors le premier terme aurait été $v_1 = 9$.

EXERCICE N°4 Comportement d'une suite géométrique

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = 0{,}5\, u_n \end{cases}$

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de 1er terme $u_0 = 3$

On a $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ donc $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

Attention « $q < 1$ » tout seul ne suffit pas !

Il ne faut pas oublier non plus de parler du signe du premier terme.

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_n = 4\times 5^n$

On reconnaît le terme général d'une suite géométrique de raison $q = 5$ et de 1er terme $u_0 = 4$

On a $q > 1$ et $u_0 > 0$ donc $\boxed{\text{la suite est strictement croissante}}$.

Il ne faut pas oublier de parler du signe du premier terme.

EXERCICE N°5 ***Limite d'une suite : 1ère approche***

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites suivantes pour lesquelles on a donné quelques termes.

1) $u_0 = 1$, $u_{52} = -30$, $u_{7589} = -5000$, $u_{20000} = -168699245$

Avec les informations que l'on a, on peut se dire que la valeur des termes prend des valeurs de « plus en plus négatives » et que cela va continuer comme cela vers $-\infty$.

$\boxed{\text{Il semble la suite } u \text{ diverge vers } -\infty}$

2) $v_3 = -5$, $v_{52} = -30$, $v_{789} = 22$, $v_{5240} = -30$, $v_{35240} = 2$

Avec les informations que l'on a, on peut se dire que la valeur des termes ne suit aucune tendance en particulier et ne risque pas de tendre vers quoique ce soit.

$\boxed{\text{Il semble la suite } v \text{ diverge}}$

Notez la différence entre les deux réponses.

EXERCICE N°6 Limite d'une suite : 2ème approche

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites suivantes.

1) La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = n$

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Autre rédaction possible

Il semble la suite u diverge vers $+\infty$

2) La suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ v_n = \dfrac{1}{n}$

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$

Autre rédaction possible

Il semble la suite v converge vers 0