LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Le 1er janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P, en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.

Au bout de n mois écoulés, on a donc la suite (P_n) définie pour tout entier naturel n par : $P_n = 2\times 1{,}03^n$.

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction P définie pour tout réel x par : $P(x)=2\times 1{,}03^x$.

On considère qu'un mois dure 30 jours.

Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de $P(0{,}2)$ et au bout de 15 jours $P(0{,}5)$.

1) Quelle est la nature de la suite (P_n) . Préciser ses éléments caractéristiques.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = 2\times 1{,}03^n$

On reconnaît une $\boxed{\text{suite géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q = 1{,}03}$ et de premier terme $\boxed{P_0 = 2}$

2) Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?

Un an et demi représente 18 mois et 18 est un nombre entier, il suffit alors de calculer P_{18} .

Le réponse est donc $\boxed{OUI}$.

3) Calculer la production le 1er février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

On décide que le jour mentionné n'est pas écoulé.

▪ Le 1er février 2020 :

Il se sera écoulé 13 mois, il s'agît donc de calculer P_{13} .

$P_{13} = 2\times 1{,}03^{13} \approx 2{,}937$

La production sera alors d' $\boxed{\text{environ } 2937 \text{ vaccins par jour}}$.

▪ Le 15 mars 2021 :

Il se sera écoulé 26 mois et 14 jours soit $26+\dfrac{14}{30} = \dfrac{397}{15}$ mois , il s'agît donc de calculer

$P\left(\dfrac{397}{15}\right) = 2\times 1{,}03^{\frac{397}{15}} \approx 4{,}373$.

La production sera alors d' $\boxed{\text{environ } 4373 \text{ vaccins par jour}}$.

▪ Le 5 janvier 2024 :

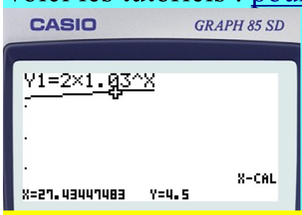
Il se sera écoulé 60 mois et 4 jours soit $60+\dfrac{4}{30} = \dfrac{902}{15}$ mois , il s'agît donc de calculer

$P\left(\dfrac{902}{15}\right) = 2\times 1{,}03^{\frac{902}{15}} \approx 11{,}830$.(le dernier zéro n'a pas à apparaître sur votre copie, il a été laissé pour vous rappeler qu'on a fait un arrondi au millième)

La production sera alors d' $\boxed{\text{environ } 11830 \text{ vaccins par jour}}$.

4) À l' aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de vaccins dépassera 4500 par jour.

Voici les tutoriels : [pour la TI] et [pour la CASIO]



La calculatrice nous indique environ 27,4344 mois soit 27 mois et $0{,}4344\times 30 \approx 13$ jours.

La date est donc le $\boxed{14 \text{ mars } 2021}$.

Le 13e jour est écoulé.

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours.
(1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?

Une augmentation de 5 % correspond à un Coefficient Multiplicateur CM valant 1,05.
Nous allons donc utiliser la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 992\times1{,}05^x$

La démarche est la même que pour les suites, le « u_0 » vaudrait 992. Comme l'exposant ne sera pas entier (on ne nous demande pas le solde au bout d'un nombre entier d'années), on va utiliser une fonction exponentielle. Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de x.

De plus, deux ans , trois mois et quatre jours font $2\times365+3\times31+4=827$ jours soit $\dfrac{827}{365}$ années .

Il s'agit donc de calculer $f\left(\dfrac{827}{365}\right)$

$$f\left(\frac{827}{365}\right) = 992\times1{,}05^{\frac{827}{365}} \approx 1107{,}95$$

Ainsi le solde sera alors d' $\boxed{\text{environ } 1107{,}95\ €}$.

2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement?

10 ans 3 mois et 20 jours font $10\times365+3\times31+20 = 3763$ jours soit $\dfrac{3763}{365}$ années .

Notons S le solde initial.

Il s'agit alors de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $S\times1{,}05^{\frac{3763}{365}} = 992$

$$S\times1{,}05^{\frac{3763}{365}} = 992 \Leftrightarrow S = \frac{922}{1{,}05^{\frac{3763}{365}}} \approx 599{,}87$$

On en déduit qu'Alissa avait placé $\boxed{\text{environ } 599{,}87\ €}$

600 € serait compté comme bon...

3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

Ici, on fait le choix de partir du présent : « à ce jour : 992 € »
Il n'est pas interdit de partir du passé mais il faut le signaler clairement lors de votre rédaction.
Nous devrions procéder comme à l'exercice n°1 mais nous allons plutôt utiliser une « recette » que nous justifierons plus tard.

Nous savons qu'à ce jour Alissa a un solde de 992 € et nous allons déterminer dans combien de jours son solde sera supérieur ou égal à 2000 €.
Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) \geqslant 2000$ où f est la fonction définie à la question 1).

$$\begin{aligned}
& f(x) \geqslant 2000 \\
\Leftrightarrow\ & 922\times1{,}05^x \geqslant 2000 \\
\Leftrightarrow\ & 1{,}05^x \geqslant \frac{2000}{922} \\
\Leftrightarrow\ & \log(1{,}05^x) \geqslant \log\left(\frac{2000}{922}\right) \qquad \text{(car la fonction log est strictement croissante)} \\
\Leftrightarrow\ & x\log(1{,}05) \geqslant \log\left(\frac{2000}{922}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x \geqslant \frac{\log\left(\frac{2000}{922}\right)}{\log(1{,}05)} \approx 14{,}371 \qquad \text{(car } \log(1{,}05)>0\text{)}
\end{aligned}$$

Comme $14{,}371\times365=5245{,}415$, on en déduit qu'elle devra attendre $\boxed{5246 \text{ jours}}$.

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; 8]$ par : $f(x)=25\,000 \times 1{,}1^x$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.

$f(2)=25\,000 \times 1{,}1^2$
$f(2)=30250$
$\boxed{\text{Après 2h, il y aura environ } 30000 \text{ bactéries}}$.

$f(4{,}5)=25\,000 \times 1{,}1^{4{,}5}$
$f(4{,}5)=38339$
$\boxed{\text{Après 4h30min, il y aura environ } 38000 \text{ bactéries}}$.

2) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 8]$.

$f(x)=k \times a^x$
Avec $a=1{,}1 > 1$ et $5=25000 > 0$ Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$

3) À l'aide de La calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

Nous devrions procéder comme à l’exercice n°1 mais nous allons plutôt utiliser une « recette » que nous justifierons plus tard.

Il s’agît de résoudre sur $[0 ; 8]$ l’inéquation $f(2) \geqslant 50\,000$.

$f(2) \geqslant 50\,000$
$\Leftrightarrow 25\,000 \times 1{,}1^x \geqslant 50000$
$\Leftrightarrow 1{,}1^x \geqslant 2$
$\Leftrightarrow \log(1{,}1^x) \geqslant \log(2)$ (car la fonction log est strictement croissante)
$\Leftrightarrow x\log(1{,}1) \geqslant \log(2)$
$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}1)} \approx 7{,}2725$ (car $\log(1{,}1) > 0$)

$7{,}2725 \text{ h} = 7 \text{ h} + 0{,}2725 \times 60 \text{ min} = 7 \text{ h } 16 \text{ min} + 0{,}35 \times 60 \text{ s} = 7 \text{ h } 16 \text{ min } 21 \text{ s}$

Il faudra attendre au moins $\boxed{7 \text{ h } 16 \text{ min } 21 \text{ s}}$

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans.

Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

Une baisse de 11 % correspond à un CM_1 valant 0,89 et une hausse de 8 % correspond à un CM_2 valant 1,08.

Notons CM_g et CM_m les coefficients multiplicateurs global et moyen.

On a alors :

$$CM_g = (CM_1)^4 \times (CM_2)^6 = 0{,}89^4 \times 1{,}08^6$$

On en déduit que :

$$CM_m = (CM_g)^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}9996$$

Le taux moyen vaut alors :

$CM_m - 1 \approx -0{,}0004$ ce qui correspond à une $\boxed{\text{baisse d'environ } 0{,}04\,\%}$

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

1) Quelle est sa population en 2020 ?

Une hausse de 3,5% correspond à un CM_1 valant 1,035 et une baisse de 1 % correspond à un CM_2 valant 0,99.

Notons CM_g et CM_m les coefficients multiplicateurs global et moyen.

On a alors :

$$CM_g = (CM_1)^{10} \times (CM_2)^{10} = 1{,}035^{10} \times 0{,}99^{10} \approx 1{,}2757$$

Enfin $11\,000\,000 \times CM_g \approx 14\,032\,923$

Ainsi, en 2020 la population est d' $\boxed{\text{environ } 14\,032\,923}$

2) Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

$$CM_m = (CM_g)^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}0122$$

Le taux moyen vaut alors :

$CM_m - 1 \approx 0{,}0122$ ce qui correspond à une $\boxed{\text{hausse d'environ } 1{,}22\,\%}$

EXERCICE N°6 (Le corrigé)

On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

1) Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?

Une baisse de 30 % correspond à un coefficient multiplicateur CM valant 0,7.

Nous considérons la fonction f définie pour tout réel positif t par :

$$f(t) = 2\times 0,7^t \quad \text{où}$$

t est le temps en heures et

$f(t)$ est la quantité de médicament en mL dans l'organisme au temps t.

Il s'agît donc de calculer $f(3)$ et $f(24)$

$f(3) = 2\times 0,7^3$

$f(3) = 0,686$

Ainsi la quantité de médicaments sera $\boxed{\text{au bout de 3h de } 0,686 \text{ mL}}$

$f(24) = 2\times 0,7^{24}$

$f(24) \approx 0,000383$

Ainsi la quantité de médicaments sera $\boxed{\text{au bout de 24h d'environ } 0,000383 \text{ mL}}$

2) Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

La fonction f ne s'annule jamais, mais au bout de 24h, la quantité de médicament est déjà négligeable. On peut donc considérer qu'un jour sera suffisant.

EXERCICE N°7 (Le corrigé)

Dans un pays entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction f définie pour tout réel positif t par : $f(t)=100(0{,}994)^t$
où t est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1) Calculer l'indice le 1er janvier 2015 puis le 1er mai 2017.

▪ Pour le 1er Janvier 2015 : il s'agît de calculer $f(12)$

$f(12)=100(0{,}994)^{12}$

$f(12)\approx 93$

Ainsi l'indice au $\boxed{\text{1er Janvier 2015 est environ 93}}$

▪ Pour le 1er Mai 2017: il s'agît de calculer $f(29)$

$f(29)=100(0{,}994)^{29}$

$f(29)\approx 84$

Ainsi l'indice au $\boxed{\text{1er Mai 2013 est environ 84}}$

2) Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.

Attention, ici on nous parle du taux **annuel** moyen. Les 5 baisses sont donc annuelles…

On sait que de 2014 à 2019 les prix ont baissé de 25 % ce qui correspond à un coefficient multiplicateur global $CM_g=0{,}75$

On a alors $CM_m=(CM_g)^{\frac{1}{5}}=0{,}75^{0{,}2}\approx 0{,}9441$

Le taux moyen vaut alors $CM_m-1\approx -0{,}0559$ soit une $\boxed{\text{baisse d'environ } 5{,}59\ \%}$

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

EXERCICE N°1

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Le 1[er] janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P, en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.

Au bout de n mois écoulés, on a donc la suite (P_n) définie pour tout entier naturel n par : $P_n = 2 \times 1{,}03^n$.

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction P définie pour tout réel x par : $P(x) = 2 \times 1{,}03^x$.

On considère qu'un mois dure 30 jours.

Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de $P(0{,}2)$ et au bout de 15 jours $P(0{,}5)$.

1) Quelle est la nature de la suite (P_n) . Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?

3) Calculer la production le 1[er] février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

4) À l' aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de vaccins dépassera 4500 par jour.

EXERCICE N°2

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours.
(1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?

2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement?

3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

EXERCICE N°3

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; 8]$ par : $f(x) = 25\,000 \times 1{,}1^x$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.

2) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 8]$.

3) À l'aide de La calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

EXERCICE N°4

Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans.

Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

EXERCICE N°5

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

1) Quelle est sa population en 2020 ?

2) Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

EXERCICE N°6

On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

1) Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?

2) Donner l'expression de la fonction exponentielle de base a .

3) Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

EXERCICE N°7

Dans un pays entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction f définie pour tout réel positif t par : $f(t) = 100(0{,}994)^t$
où t est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1) Calculer l'indice le 1[er] janvier 2015 puis le 1[er] mai 2017.

2) Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.