# LES SUITES

## I Les suites arithmétiques

### I.1 Ce que l'on sait déjà

***Définition n°1. Suite arithmétique***

Une suite $u$ est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

***Exemple n°1.***

La suite $v$ de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$ .

$v_0=5$ , $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$ , $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\dots$

***Propriété n°1. Relation de récurrence***

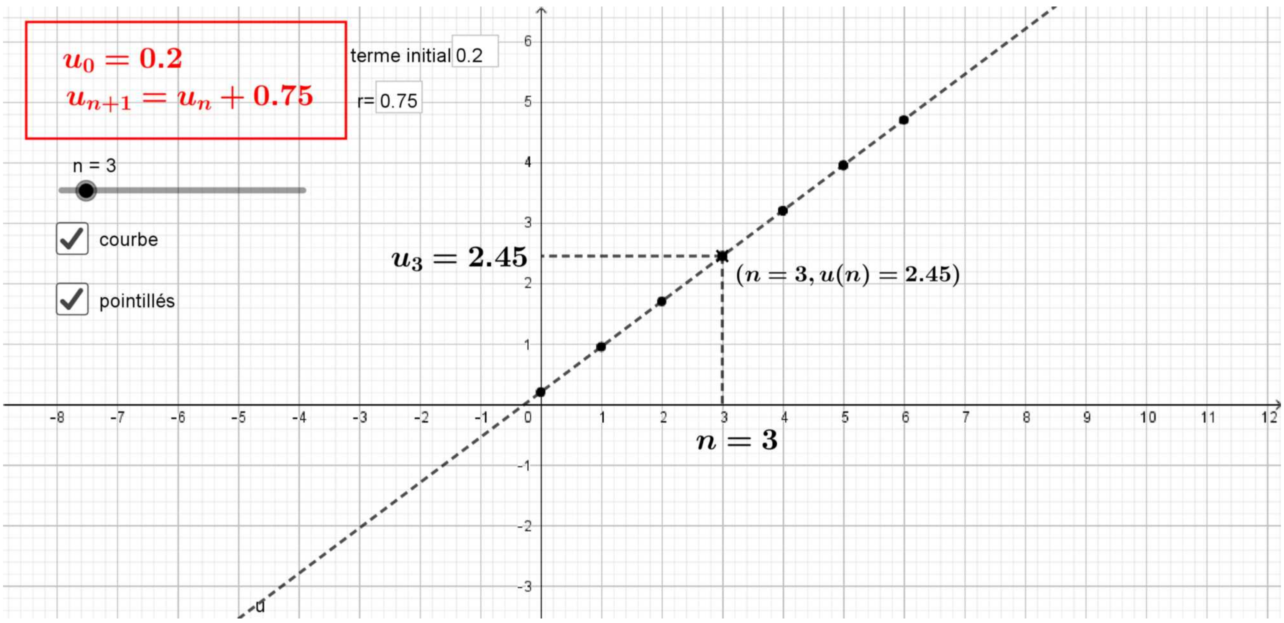
Si $u$ est une suite arithmétique de raison $r$ , de terme initial $k$ dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$ , $u:\begin{cases} u_0=k \\ u_{n+1}=u_n+r \end{cases}$

(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte … )

***Propriété n°2. Représentation graphique***

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.




***Propriété n°3. Sens de variation***

Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ :

- si $r>0$ , la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $r=0$ , la suite est constante;
- si $r<0$ , la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

## *I.2 Ce qui est nouveau*

***Définition n°2. Moyenne arithmétique***

Soient $a$ et $b$ deux nombres.

La moyenne arithmétique des deux nombres $a$ et $b$ est : $\dfrac{a+b}{2}$ .

***Exemple n°2.***

La moyenne arithmétique des deux nombres $8$ et $13{,}5$ est : $\dfrac{8+13{,}5}{2} = 10{,}75$

***Propriété n°4. Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si $(u_n)$ est une suite suite arithmétique de raison $r$ alors, pour tout $n$ et $p$ : $\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$

En particulier :

$\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$ et $\boxed{u_n = u_1 + (n-1) \times r}$

***Exemple n°3.***

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit $(v_n)$ la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . Par exemple : $v_{250} = v_0+250\times r = -5+250\times 3 = 745$ .
- Soit $(w_n)$ la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . Par exemple : $w_{101} = w_1+(101-1)\times r = 2+100\times 1{,}5 = 152$ .
- Soit $(t_n)$ la suite arithmétique de raison $r=-2$ et de premier terme $t_0=10$ . Par exemple : $t_{300} = t_0+300\times r = 10+300\times(-2) = -590$ .

***Propriété n°5. Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique***

La somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique vaut :

$$\boxed{S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

***Méthode n°1. Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique***

- Soit $(v_n)$ la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . On veut calculer la somme $A$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

Comme on « commence à zéro » le 10^e^ terme est $v_9$ , on le calcule : $v_9 = v_0+9\times r = -5+9\times 3 = 22$ .

$$A = 10 \times \frac{v_0 + v_9}{2} = 10 \times \frac{-5+22}{2} = 85$$

- Soit $(w_n)$ la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . On veut calculer la somme $B$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1+w_2+\ldots+w_{10}\right)$$

Comme on « commence à un» le 10^e^ terme est $w_{10}$ , on le calcule : $w_{10} = w_1+(10-1)\times r = 2+9\times 1{,}5 = 15{,}5$ .

$$B = 10 \times \frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10 \times \frac{2+15{,}5}{2} = 87{,}5$$

# *II Les suites géométriques*

## *II.1 Ce que l'on sait déjà*

***Définition n°3. Suite géométrique***

Une suite $u$ est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

***Exemple n°4.***

La suite $v$ de terme initial $v_0 = 10$ et de raison $q = 0{,}5$ .

$v_0 = 10$ , $v_1 = v_0 \times q = 10 \times 0{,}5 = 5$ , $v_2 = v_1 \times q = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5, \ldots$

***Propriété n°6. Relation de récurrence***

Si $u$ est une suite géométrique de raison $q$ , de terme initial $k$ dont l'indice est zéro , alors : pour $n \geqslant 0$ , $u : \begin{cases} u_0 = k \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$

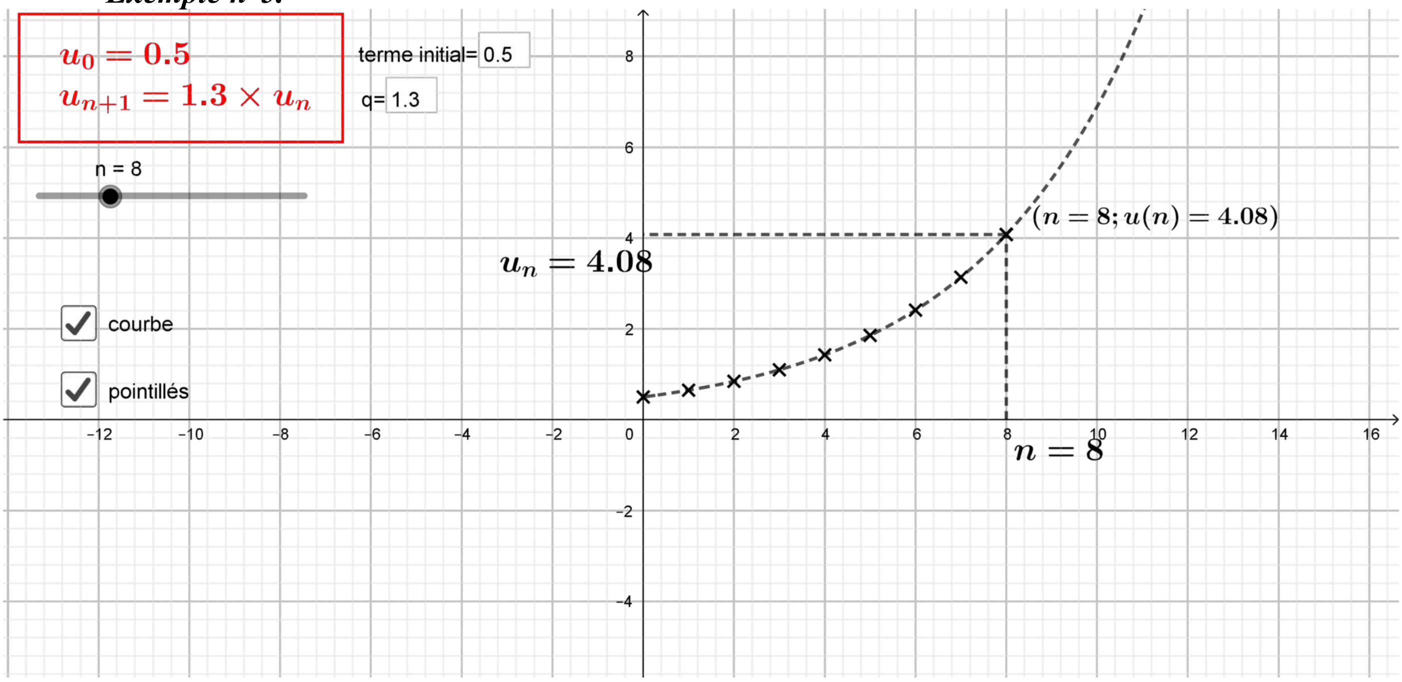
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte … )

***Propriété n°7. Représentation graphique***

▪ Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

***Exemple n°5.***




***Propriété n°8. Sens de variation***

Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme strictement positif :

- si $q > 1$ , la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $q = 1$ , la suite est constante;
- si $0 < q < 1$ , la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

## II.2 Ce qui est nouveau

***Définition n°4.*** ***Moyenne géométrique de deux nombres***

Soient $a$ et $b$ deux nombres de même signe.
La moyenne géométrique des deux nombres $a$ et $b$ est : $\sqrt{a \times b}$

***Remarque n°1.*** ***Attention***

Si les deux nombres ne sont pas de même signe alors leur produit est négatif et on ne peut pas extraire la racine carrée.

***Exemple n°6.***

- La moyenne géométrique de $4{,}8$ et $30$ vaut : $\sqrt{4{,}8 \times 30} = \sqrt{144} = 12$
- La moyenne géométrique de $-4{,}8$ et $-30$ vaut : $\sqrt{-4{,}8 \times (-30)} = \sqrt{144} = 12$
- On ne calcule pas la moyenne géométrique de $-4{,}8$ et $30$ ou de $4{,}8$ et $-30$ .

***Propriété n°9.*** ***Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si $(u_n)$ est une suite suite géométrique de raison $q$ alors, pour tout $n$ et $p$ : $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{(n-p)}}}$

En particulier :

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{(n-1)}}}$$

***Exemple n°7.***

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit $(v_n)$ la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . Par exemple : $v_9 = v_0 \times q^9 = -5 \times 3^9 = -98\ 415$ .

- Soit $(w_n)$ la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . Par exemple : $w_5 = w_1 \times q^{(5-1)} = 2 \times 1{,}5^4 = 10{,}125$ .

***Propriété n°10.*** ***Somme des n premiers termes d'une suite géométrique***

La somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ avec $\boldsymbol{q \neq 1}$ vaut :

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

***Méthode n°2.*** ***Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique***

- Soit $(v_n)$ la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . On veut calculer la somme $A$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = -5 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = -147\ 620$$

- Soit $(w_n)$ la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . On veut calculer la somme $B$ des 5 premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{5} w_k = w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right)$$

$$B = w_1 \times \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \times \frac{1-1{,}5^5}{1-1{,}5} = 26{,}375$$

***Remarque n°2.***

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des $n$ premiers termes vaut simplement : $n \times \textit{premier terme}$

# LA FONCTION INVERSE

***Remarque n°1.***

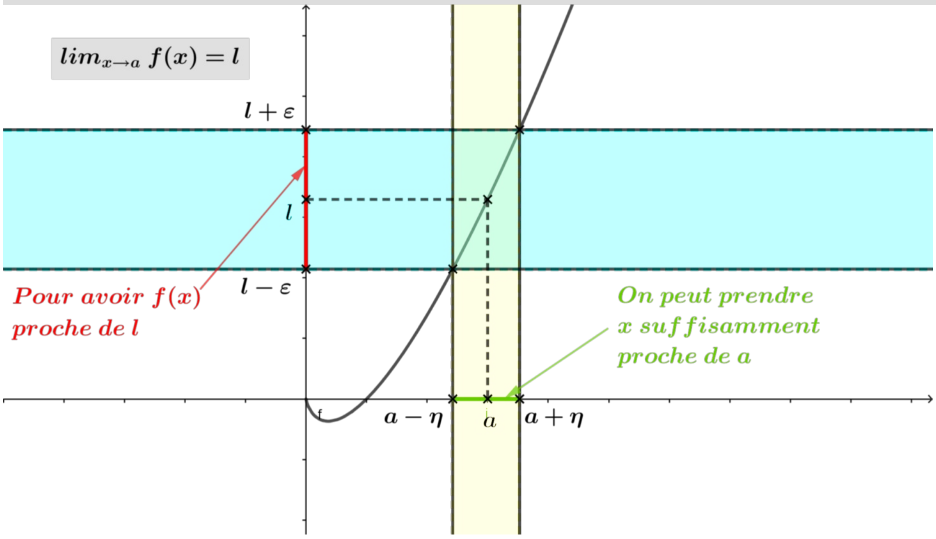
Dans ce cours, nous utiliserons la notion de limite. Conformément au programme nous nous contenterons d'une approche intuitive.
Pour une fonction $f$ , $D_f$ représentera son ensemble de définition et sera un intervalle ou une réunion d'intervalles.

## I Qu'est-ce qu'une limite ?

***Connaissance n°1 Limite finie en un point***

Soit $f:\begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ , $a \in \overline{D_f}$ et $l \in \mathbb{R}$ .

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } l \text{ en } a}$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = l}$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de $l$ que l'on veut en approchant suffisamment $x$ de $a$ .

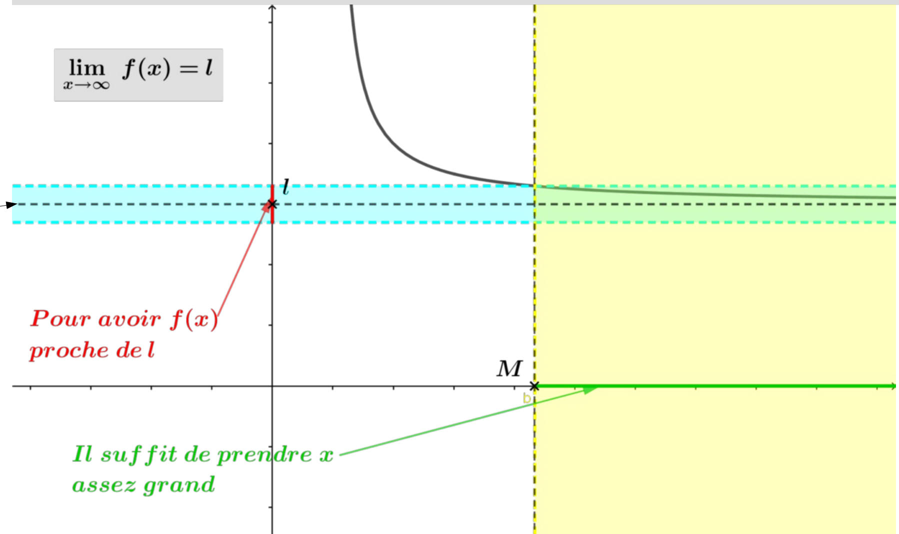



***Connaissance n°2 Limite finie en l'infini***

Soit $f:\begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ , $D_f$ ayant $+\infty$ pour extrémité et $l \in \mathbb{R}$ .

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } l \text{ en } +\infty}$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l}$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de $l$ que l'on veut en augmentant suffisamment $x$ .

*Vocabulaire*
Lorsque $x$ grandit, la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $y = l$.
On dit que cette droite est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ .




On explique de même $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l}$

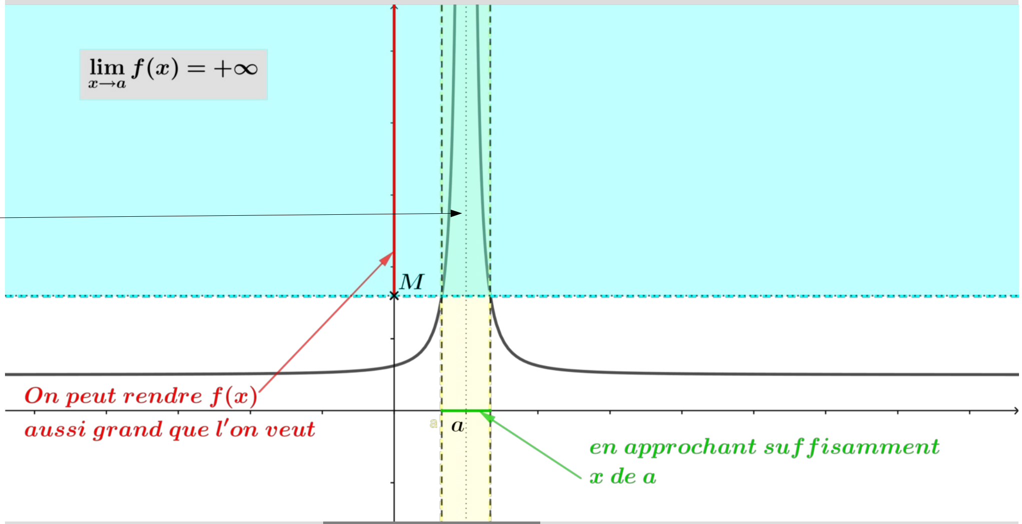
***Connaissance n°3 Limite infinie en un point***

Soit $f : \begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ et $a \in \overline{D_f}$ .

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } +\infty \text{ en } a}$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$ si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en approchant suffisamment $x$ de $a$ .

*Vocabulaire*

Lorsque $x$ s'approche de $a$ , la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $x = a$.
On dit que cette droite est **asymptote verticale** à la courbe en $a$ .




On explique de même $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty}$

***Remarque n°2. Limite à droite, limite à gauche***

Il arrive parfois que des phénomènes différents se produisent selon que l'on s'approche de $a$ par la gauche ou par la droite.

On peut par exemple avoir $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Ici, la limite de $f$ à gauche en $a$ est $-\infty$
et la limite à droite de $f$ en $a$ est $+\infty$ .

# *II Et la fonction inverse dans tout ça ?*

Nous allons à présent pouvoir parler du comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition…

***Définition n°1.***

On appelle fonction inverse, la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to \dfrac{1}{x} \end{cases}$ .

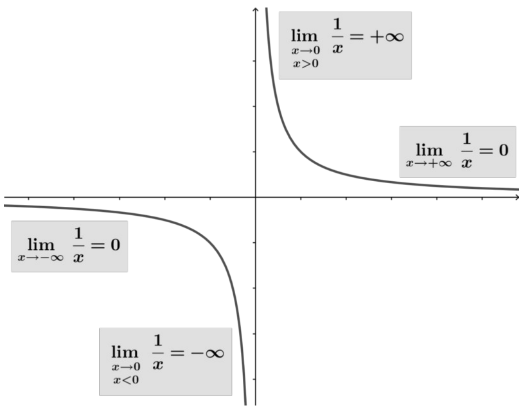
Avec $\mathbb{R}^* = ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$ .

***Propriété n°1.***

Limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à l'hyperbole.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à l'hyperbole.



***Propriété n°2.*** ***Dérivée de la fonction inverse***

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \dfrac{1}{x} \end{cases}$ .

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]-\infty\ ;\ 0[}$ ; $\boxed{f \text{ est dérivable sur } ]0\ ;\ +\infty[}$

et pour $x$ dans l'un ou l'autre de ces intervalles

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

***preuve :***

▪ Soit $a \in ]-\infty\ ;\ 0[$ et $h$ tel que $]a-h\ ;\ a+h[\ \subset\ ]-\infty\ ;\ 0[$

On peut écrire :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

En faisant tendre $h$ vers $0$ , on obtient : $-\dfrac{1}{a^2}$

Le nombre dérivée de $f$ en $a$ existe donc pour tout $a \in ]-\infty\ ;\ 0[$ et vaut $-\dfrac{1}{a^2}$ .

On a donc démontré que $f$ est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et que pour $x \in ]-\infty\ ;\ 0[$ , $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ .

▪ On procède de la même façon sur $]0\ ;\ +\infty[$ (faites-le).

▪ Ce qui achève la démonstration.

***Remarque n°3.***

▪ On a $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$

donc $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ .

▪ On a $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

donc $f$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ .

▪ Mais $f$ n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ .

On peut à présent dresser le tableau de variation de la fonction inverse.

***Connaissance n°4*** ***Tableau de variation complet de la fonction inverse.***

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ |

# *III Complément de cours*

Vous ne serez pas interrogés sur cette partie, mais elle vous aidera à comprendre les exercices...
On peut mener des calculs avec les limites en respectant les règles suivantes :

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.
Ici $a$ et $b$ désignent deux nombres réels et $f$ et $g$ sont des fonctions.

***Propriété n°3. Limite d'une somme***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $a$ | $a$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim g$ | $b$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim (f+g)$ | $a+b$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

***Propriété n°4. Limite d'un produit***

* signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $a$ | $a \neq 0$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim g$ | $b$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim (f \times g)$ | $a \times b$ | $* \; \infty$ | $* \; \infty$ | FI |

***Propriété n°5. Limite d'un quotient***

* signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $a$ | $a$ | $a$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim g$ | $b \neq 0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $b$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim \left(\frac{f}{g}\right)$ | $\frac{a}{b}$ | $0$ | $* \; \infty$ | $* \; \infty$ | FI | FI |

# *LES FONCTIONS EXPONENTIELLES*

## *I Définition et propriétés algébriques*

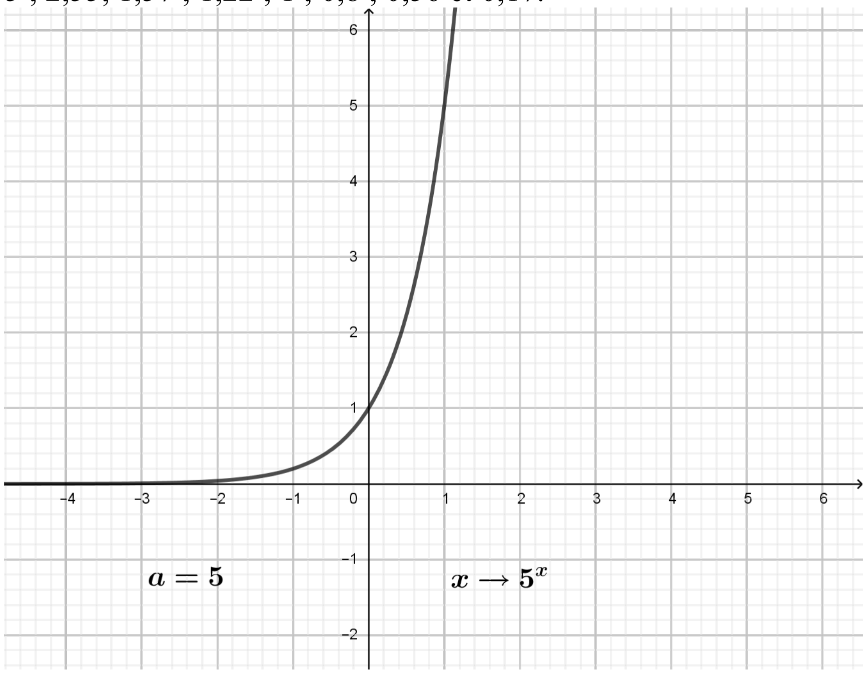
***Définition n°1.*** ***Fonctions exponentielles de base a.***

Soit $a$ un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base $a$, la fonction $x \to a^x$

***Exemple n°1.***

Les fonctions $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 5^x \end{cases}$, $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2{,}55^x \end{cases}$, $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}57^x \end{cases}$, $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}22^x \end{cases}$, $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1^x = 1 \end{cases}$, $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}8^x \end{cases}$, $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}56^x \end{cases}$ et $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}17^x \end{cases}$ sont des fonctions exponentielles de bases respectives : 5 ; 2,55, 1,57 ; 1,22 ; 1 ; 0,8 ; 0,56 et 0,17.

Cliquez sur la figure




***Remarque n°1.***

Pour $a = 0$, on a la fonction $f : \begin{cases} ]0 \; ; +\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \quad \to 0 \end{cases}$

***Propriété n°1.*** ***Propriétés algébriques (admises)***

Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.
Pour tous rées $x$ et tout réel $y$ :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^x \times b^x = (a \times b)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \times y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

***Exemple n°2.***

- $1{,}3^{2,3} \times 1{,}3^{0,7} = 1{,}3^{2,3+0,7} = 1{,}3^3 = 2{,}197$ ; - $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2}$ ;
- $(4{,}37^{2,1})^3 = 4{,}37^{2,1 \times 3} = 4{,}37^{6,3}$ ;
- $\dfrac{5{,}2^{3,1}}{5{,}2^{1,7}} = 5{,}2^{3,1-1,7} = 5{,}2^{1,4}$ ;
- $\dfrac{9{,}31^{4,3} \times 9{,}31^{-2,7} \times 9{,}31^{1,1}}{9{,}31^{-3}} = 9{,}31^{(4,3-2,7+1,1)-(-3)} = 9{,}31^{5,7}$ .

# II Sens de variation

***Propriété n°2.*** ***(admise)***

Soit $a$ un réel strictement positif , et $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to a^x\end{cases}$

- Si $a > 1$ alors $f$ est strictement croissante,
- si $a = 1$ alors $f$ est constante,
- si $0 < a < 1$ alors $f$ est strictement décroissante.

***Propriété n°3.*** ***(admise)***

Soit $a$ un réel strictement positif , $k$ un réel non nul et :

$g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to k\times a^x\end{cases}$

- Si $k > 0$ et :
  - si $a > 1$ alors $g$ est strictement croissante,
  - si $a = 1$ alors $g$ est constante,
  - si $0 < a < 1$ alors $g$ est strictement décroissante.
- Si $k < 0$ et :
  - si $a > 1$ alors $g$ est strictement décroissante,
  - si $a = 1$ alors $g$ est constante,
  - si $0 < a < 1$ alors $g$ est strictement croissante.

***Remarque n°2.***

On peut résumer cette dernière propriété de la façon suivante :

- Si $k > 0$ alors $x\to k\cdot a^x$ se comporte comme $x\to a^x$ et .
- Si $k < 0$ alors $x\to k\cdot a^x$ se comporte à l'inverse de $x\to a^x$ .

***Remarque n°3.***

Si $k=0$ alors la fonction $x\to k\cdot a^x$ est la fonction nulle…

***Exemple n°3.***

Étudions les variations des fonctions suivantes définies pour tout réel $x$ par :

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = 3{,}1^x$ | $f_1(x) = a^x$ avec $a=3{,}1 > 1$ .<br>Donc $f_1$ est strictement croissante. |
| $f_2(x) = 0{,}23^x$ | $f_2(x) = a^x$ avec $a=0{,}23$ et $0 < a < 1$<br>Donc $f_2$ est strictement décroissante. |
| $f_3(x) = 4\times 3{,}1^x$ | $f_3(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $a > 1$<br>Donc $f_3$ est strictement croissante. |
| $f_4(x) = -5\times 3{,}1^x$ | $f_4(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $a > 1$<br>Donc $f_4$ est strictement décroissante. |
| $f_5(x) = 4\times 0{,}23^x$ | $f_5(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $0 < a < 1$<br>Donc $f_5$ est strictement décroissante. |
| $f_6(x) = -5\times 0{,}23^x$ | $f_6(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$<br>Donc $f_6$ est strictement croissante. |
| $f_7(x) = \dfrac{-0{,}23^x}{5}$ | $f_7(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$<br>Donc $f_7$ est strictement croissante. ( $k=-1/5$ ) |

# *III Moyenne géométrique*

***Définition n°2.***

Soit $n$ un entier naturel non nul et $a_1$ , $a_2$ , … , $a_{n-1}$ , $a_n$ des réels strictement positifs.
On appelle moyenne géométrique des $a_1$ , $a_2$ , … , $a_{n-1}$ , $a_n$ le nombre :
$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n)^{\frac{1}{n}}$

***Exemple n°4.***

La moyenne géométrique de $0{,}5$ ; $0{,}78$ ; $1{,}3$ et $1{,}78$ vaut :

$(0{,}5 \times 0{,}78 \times 1{,}3 \times 1{,}78)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}9747$ à $0{,}0001$ près .

***Méthode n°1. Calculer un taux moyen d'évolution***

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Si $CM$ est le coefficient multiplicateur global sur $n$ évolutions alors le taux moyen d'évolution est le réel $t=CM^{\frac{1}{n}}-1$

***Exemple n°5.***

On donne 5 taux d'évolutions et on veut calculer $t$ , le taux moyen d'évolution équivalent à ces 5 évolutions.

Une hausse de 30 % ( $t_1=0{,}3$ et $CM_1=1{,}3$ )
Une hausse de 15 % ( $t_2=0{,}15$ et $CM_2=1{,}15$ )
Une baisse de 5 % ( $t_3=-0{,}05$ et $CM_3=0{,}95$ )
Une hausse de 10 % ( $t_4=0{,}1$ et $CM_4=1{,}1$ )
Une baisse de 20 % ( $t_5=-0{,}2$ et $CM_5=0{,}8$ )

On calcule le Coefficient Multiplicateur global $CM$ :

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times CM_4 \times CM_5 = 1{,}24982$$

Ainsi :

$$t = CM^{\frac{1}{5}}-1$$
$$t = 1{,}24982^{\frac{1}{5}}-1 \approx 0{,}0456 \text{ à } 0{,}0001 \text{ près}$$

Soit une hausse d'environ $4{,}56\,\%$

# STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

## I Représenter une série statistique à deux variables

***Définition n°1.*** ***Série statistique à deux variables***

Une série statistique à deux variables est une série statistique étudiant simultanément deux caractères sur un même échantillon de $n$ individus extraits d'une population.

***Connaissance n°1*** ***Représentation sous forme de tableau***

On peut présenter une série statistique à deux variables à l'aide d'un tableau statistique de la forme suivante :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs du 1er caractère | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
| Valeurs du 2nd caractère | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ |

***Connaissance n°2*** ***Représentation graphique : le nuage de points***

On peut aussi représenter une série statistique à deux variables dans un repère orthogonal à l'aide d'un nuage de points :

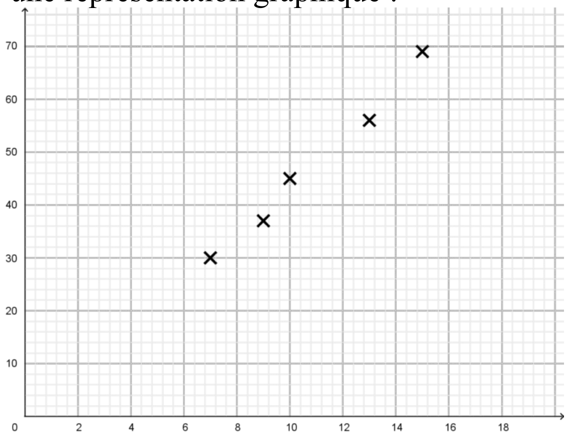
$M_1(x_1\ ;\ y_1)$ , $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ , … , $M_n(x_n\ ;\ y_n)$

***Exemple n°1.*** ***Ma petite entreprise ♪ ♫...***

Le tableau suivant présente l'évolution du nombre de clients et du chiffre d'affaires en milliers d'euros d'une micro-entreprise au cours des 6 mois :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de clients : $x_i$ | 7 | 9 | 10 | 13 | 15 | 18 |
| Chiffre d'affaires : $y_i$ | 30 | 37 | 45 | 56 | 69 | 81 |

On peut en donner une représentation graphique :




***Définition n°2.*** ***Le point moyen du nuage***

On note $\overline{x} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ la moyenne des $x_i$ et

$\overline{y} = \dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$ la moyenne des $y_i$ .

On appelle point moyen du nuage le point $G(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$

***Méthode n°1.*** ***Déterminer le point moyen d'un nuage***

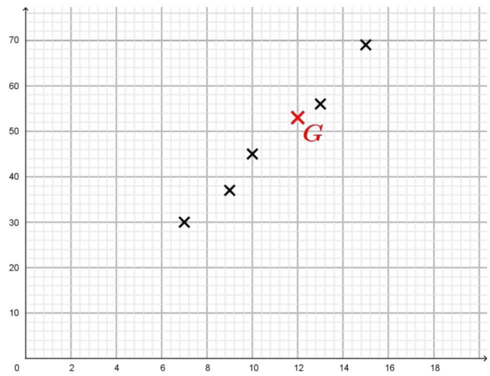
*On va calculer le point moyen du nuage de l'exemple n°1*

Notons $G(x_G\ ;\ y_G)$ le point moyen du nuage alors :

$x_G = \dfrac{7+9+10+13+15+18}{6} = 12$ et

$y_G = \dfrac{30+37+45+56+69+81}{6} = 53$

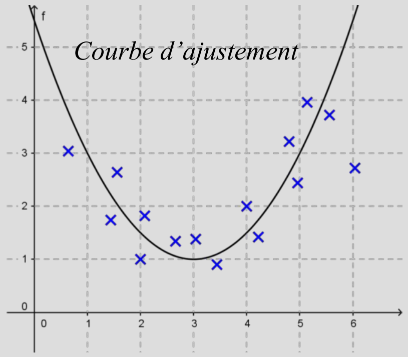
Ainsi $\boxed{G(12\ ;\ 53)}$



# II Ajustement affine

## II.1 Le principe

Le problème d'ajustement d'un nuage de points consiste à trouver la courbe d'une fonction $f$ qui approche (ajuste) au mieux les points du nuage. On établie alors une relation idéale (théorique) entre $y$ et $x$ de la forme $y=f(x)$ . Grâce à cette courbe, on pourra faire des prévisions (approximations) de valeurs non données dans la série.



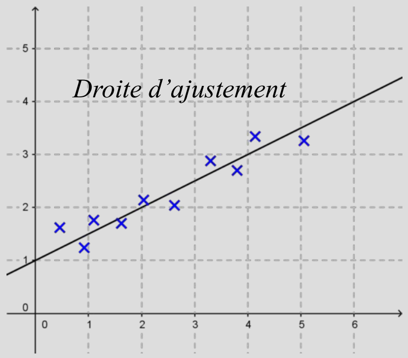

Si ces valeurs sont incluses dans la plage de données du tableau on parle d'interpolation et si elles sont à l'extérieur du tableau on parle d'extrapolation.

***Remarque n°1.***

Parfois, il n'existe pas de courbe d'ajustement.

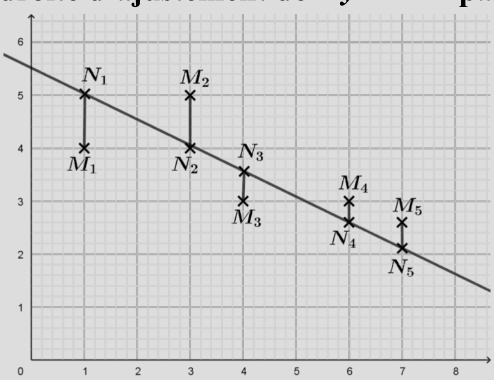
## II.2 Le cas particulier

L'ajustement affine est l'ajustement qui consiste à trouver une droite qui rende compte de la forme « aligné » d'un nuage en approchant au mieux les points qui le constituent.




***Connaissance n°3*** ***La méthode des moindres carrées***

On se donne une série statistique à deux variables que l'on représente par un nuage de points (les $M_i$ ) et on cherche à tracer une droite qui minimise la somme des $M_iN_i^2$ (Les $N_i$ étant les points de la droite qui correspondent aux $M_i$ ).
On nomme cette droite :
**droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.**




Cette droite a pour équation :
$y = mx+p$

avec $m = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

et $p = \overline{y}-m\overline{x}$

Rassurez-vous c'est la calculatrice qui fera les calculs pour nous et nous remercions Yvan Monka pour son TUTORIEL.

***Propriété n°1.*** ***(admise)***

La droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés passe par le point moyen du nuage de points de la série statistique.

# LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

## I Une étude de la fonction logarithme décimal

***Définition n°1.*** ***(qui découle d'une propriété que l'on admet)***

Soit un nombre réel $a > 0$ . Le logarithme décimal de $a$ est le nombre réel $c$ tel que : $10^c = a$
Il est noté $\log a$ .
On a donc $c = \log(a)$ si et seulement si $10^c = a$

***Définition n°2.*** ***La fonction log***

On appelle fonction logarithme décimal la fonction :

$$\log : \begin{cases} ]0\,;+\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \log(x) \end{cases}$$

***Exemple n°1.***

$\log(1)=0$ , $\log(10)=1$ , $\log(100)=2$ …

***Remarque n°1.***

Parfois, quand il n'y a pas d'ambiguïté, les parenthèses sont omises. Par exemple, on peut voir écrit « log 10 = 1 » à la place de « log(10) = 1 ».
Nous éviterons toutefois, cette simplification cette année...

***Propriété n°1.*** ***(Admise)***

La fonction logarithme décimal est strictement croissante.

**Tableau de variation**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\log(x)$ | $-\infty$ ↗ | |

***Remarque n°2.*** ***Comparaison***

Cela signifie qu'elle conserve l'ordre :
Pour tout réels a et b strictement positifs,

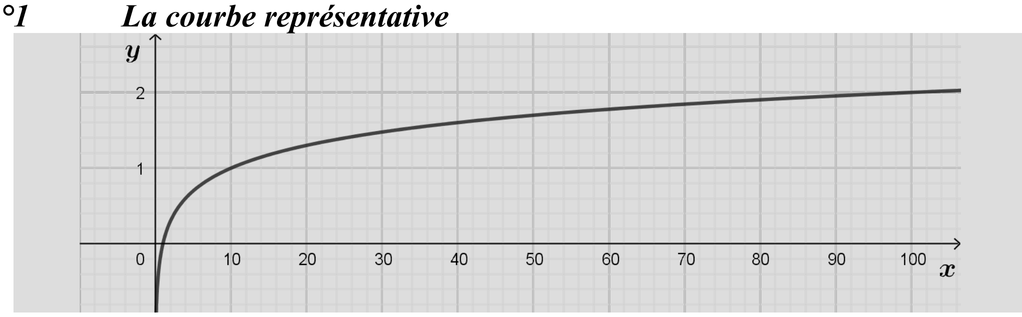
si $a < b$ alors $\log a < \log b$ .

***Propriété n°2.*** ***Tableau de signes de la fonction logarithme décimal***

**Tableau de signes**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

***Connaissance n°1*** ***La courbe représentative***




***Remarque n°3.***

À l'inverse des fonctions exponentielles (de base strictement supérieure à 1) , la croissance de la fonction logarithme décimal est très « lente ».
Pour atteindre 3 en ordonnées il faut faudra atteindre 1000 en abscisses…

***Remarque n°4.*** ***Ne pas tout mélanger***

La fonction logarithme décimal, n'est pas la fonction logarithme népérien (ln) mais elles sont en relation : Pour tout $a > 0$ , $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$

# *II Utiliser la fonction logarithme décimal*

***Propriété n°3.*** ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs $a$ et $b$ :

$$\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$$

***Exemple n°2.***

$$\log(300) = \log(100\times3) = \log(100)+\log(3) = 2+\log(3)$$

***Propriété n°4.*** ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs $a$ et $b$ :

$$\boxed{\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)}$$

$$\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

***Exemple n°3.***

- $\log(0{,}001) = \log\left(\frac{1}{1000}\right) = -\log(1000) = -3$
- $\log(0{,}007) = \log\left(\frac{7}{1000}\right) = \log(7) - \log(1000) = \log(7) - 3$

***Propriété n°5.*** ***(Admise)***

Pour tous nombre réel strictement positif $a$ et tout entier relatif $n$ :

$$\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$$

***Exemple n°4.***

$\log(5{,}2^7) = 7 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $7\log(5{,}2)$ )

***Propriété n°6.***

Pour tous nombre réel strictement positif $a$ et tout nombre réel $x$ :

$$\boxed{\log(a^x) = x \times \log(a)}$$

***Exemple n°5.***

$\log(5{,}2^{-7{,}3}) = -7{,}3 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $-7{,}3\log(5{,}2)$ )

***Propriété n°7.*** ***(Admise)***

Soient $x$ et $y$ deux nombres réels strictement positifs.

$\boxed{x = y \Leftrightarrow \log(x) = \log(y)}$ et $\boxed{x < y \Leftrightarrow \log(x) < \log(y)}$

***Remarque n°5.***

Tous les autres symboles de comparaison sont bien sûr valables.
Cette dernière propriété nous permet de résoudre des équations du type $a^x=b$ ou $x^a=b$ et des inéquations du type $a^x<b$ ou $x^a<b$

***Méthode n°1.***

Résoudre l'équation $2^x = 100$

$$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x)=\log(100)$$
$$\Leftrightarrow x\log(2)=2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{\log(2)}$$

En notant $S$ l'ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{2}{\log(2)}\right\}$

Résoudre l'inéquation $5^x < 0{,}001$

$$5^x < 0{,}001 \Leftrightarrow \log(5^x)<\log(0{,}001)$$

(car la fonction log est strictement croissante)

$$\Leftrightarrow x\log(5) < -3$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-3}{\log(5)}$$

( car $\log(5)>0$ )

En notant $S$ l'ensemble des solutions : $S = \left]-\infty\ ;\ \frac{-3}{\log(5)}\right[$

***Exemple n°6. Un exemple un peu plus complexe***

Résolvons l'inéquation suivante :

$-5\times 0{,}2^x-3 \geqslant -4550003$

$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^x-3+3 \geqslant -4550003+3$

On ne change pas le sens d'une inégalité en retranchant un même nombre à chaque membre

$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^x \geqslant -4550000$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5\times 0{,}2^x}{-5} \leqslant \dfrac{-4550000}{-5}$

On change le sens d'une inégalité en divisant chaque membre par un même nombre strictement négatif.

$\Leftrightarrow 0{,}2^x \leqslant 910000$

La fonction log étant strictement croissante, elle ne change pas les inégalités.

$\Leftrightarrow \log\left(0{,}2^x\right) \leqslant \log(910000)$

$\Leftrightarrow x\times\log(0{,}2) \leqslant \log(910000)$

Grâce à la propriété n°6

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)}$

Car $\log(0{,}2)$ est négatif

Ainsi $-5\times 0{,}2^x-3 \geqslant -4550003$ quand $x \geqslant \dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)} \approx -8{,}53$

En notant $S$ l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \left[\dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)}\ ;+\infty\right[}$

***Remarque n°6.***

$\dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)} = \dfrac{\log(9{,}1\times 10^5)}{\log(2\times 10^{-1})} = \dfrac{5+\log(9{,}1)}{-1+\log(2)}$ mais est-ce plus parlant ?

Vous aurez surtout besoin de la valeur approchée…

# *III Compléments de cours*

## *III.1 Un peu d'histoire*

John Napier, 1614
Source : Wikipédia

En 1614, John Napier publie les premières tables de **logarithmes** :
**logos** = rapport, relation,
**arithmeticos** = nombre
Il n'a pas conscience qu'il décrit alors une nouvelle fonction.
La notation « Log » qui apparaît deux ans plus tard désigne alors le logarithme naturel (ou logarithme népérien qui n'est pas le logarithme décimal – voir la remarque n°4).
Il faudra attendre 1697 pour que Leibniz fasse le lien avec les fonctions exponentielles (et que nous puissions 3 siècles plus tard parler ensemble du logarithme décimal)

Gottfried Wilhelm Leibniz
Source : Wikipédia

# *IV Quelques démonstrations*

Pour les curieux, nous démontrons dans ce paragraphe quelques propriétés du logarithme décimal.

Dans la définition n°1, l'existence et l'unicité du réel $c$ tel que $10^c = a$ sont admises et le resteront à notre niveau…

En revanche, nous pouvons démontrer les propriétés 3 à 6… C'est parti.
Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs.

On peut écrire (grâce à la définition n°1) que $a=10^c$ et $b=10^d$ avec $c$ et $d$ des nombres réels.

On a alors :

- $\log(a \times b) = \log(10^c \times 10^d) = \log(10^{c+d}) = c+d = \log(a)+\log(b)$

ainsi $\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{10^c}{10^d}\right) = \log(10^{c-d}) = c-d = \log(a)-\log(b)$

ainsi $\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$ et si $a=1$ $\boxed{\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)}$

- Soit également un réel $x$

$\log(a^x) = \log\left((10^c)^x\right) = \log(10^{x \times c}) = x \times c = x \times \log(a)$

ainsi $\boxed{\log(a^x) = x \times \log(a)}$

en particulier pour $x = n$ un entier relatif $\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

***Remarque n°1.***

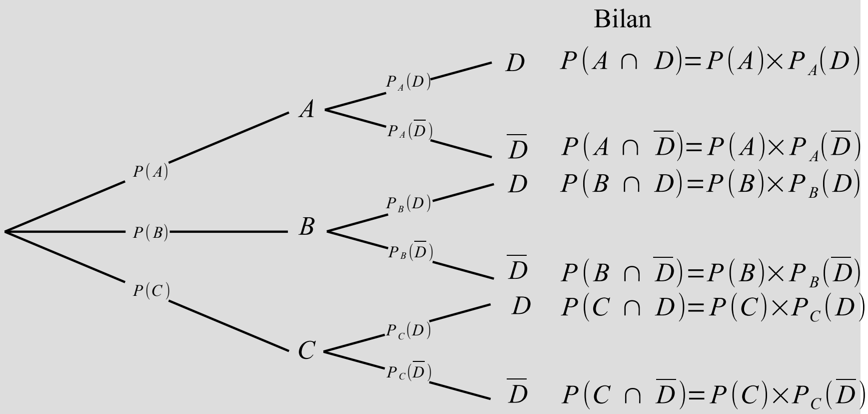
Seconde | Première

Il peut-être utile de relire ce qui a été fait en seconde puis en première sur les probabilités.
(Les Qrcodes sont également cliquables)

## I Les arbres de probabilités

***Définition n°1.*** ***Arbre de probabilités***

Un arbre de probabilités est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.




***Remarque n°2.***

Les événements reliés à un même nœud sont incompatibles deux à deux.

***Définition n°2.*** ***Branche***

Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène.

***Exemple n°1.***

Ci-dessus, sur la branche de $A$ à $D$, on place $P_A(D)$, la probabilité conditionnelle de $D$ sachant $A$ ;

***Définition n°3.*** ***Nœud***

Un nœud est un croisement entre plusieurs branches.

***Définition n°4.*** ***Chemin***

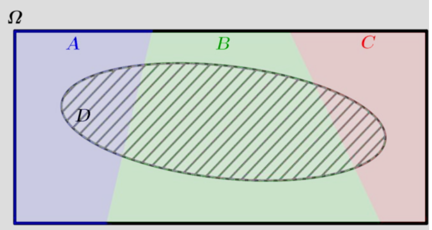
Un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.

***Définition n°5.*** ***Événement bilan***

L'événement bilan, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

***Définition n°6.*** ***Partition de l'univers***

Dans ce diagramme de Venn qui correspond à l'arbre de la définition n°1.
Les événements $A$, $B$ et $C$ forment une partition de l'univers $\Omega$ :
Leur réunion égale l'univers et ils sont incompatibles deux à deux (ils sont disjoints).




On en déduit la propriété suivante.

***Propriété n°1.***

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

***Exemple n°2.***

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

***Remarque n°3.***

$D \cap A$ et $\overline{D} \cap A$ forment une partition de $A$ et donc :

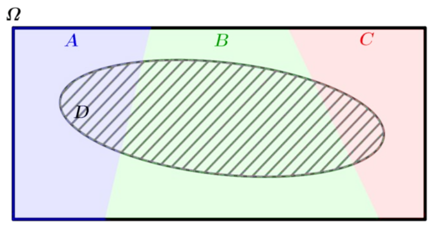
$$P_A(D) + P_A(\overline{D}) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} + \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

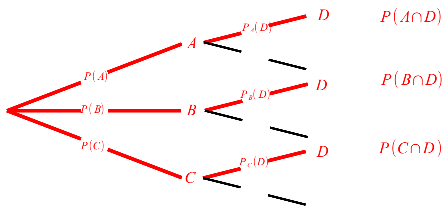
***Propriété n°2.*** ***Formule des probabilités totales***

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement dans un arbre de probabilités.

***preuve :*** ***(ou plutôt une explication)***

Le diagramme de Venn nous permet de comprendre que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$. Comme ces événements sont incompatibles : $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$




# *II Indépendance de deux événements*

***Définition n°7.***

On dit que deux événements $A$ et $B$ de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$

***Propriété n°3.*** ***L'indépendance de deux événements est symétrique***

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$

***preuve :***

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

***Propriété n°4.*** ***Une autre façon de voir l'indépendance de deux événements***

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

***preuve :***

Il suffit de lire la preuve de la propriété n°3...

***Remarque n°4.***

On a $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ et $P_A(A) = 1$

Si $A$ et $B$ sont disjoints alors $P_A(B) = 0$

***Remarque n°5.*** ***Attention***

Les mots « disjoint » et « indépendant » ne signifient pas du tout la même chose :

« disjoints » = « incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$

(leur intersection est vide)

# VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

Ce cours est la suite du cours de première (premier QRcode) et utilise les notions abordées dans le précédent (second QRcode) . Il est donc bon de se rafraîchir la mémoire...

cliquables également

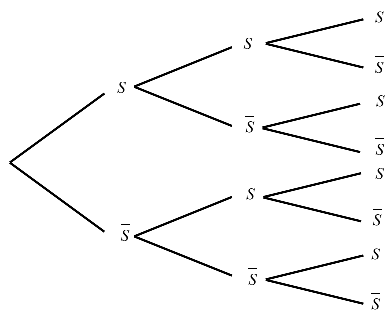
## I Coefficients binomiaux

***Définition n°1.***

Soit $n$ un nombre entier et $p$ une probabilité (c.à.d $0 \leqslant p \leqslant 1$ )
Un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ est la répétition répétition de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètre $p$ identiques et indépendantes.
On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès.
Pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ , on appelle coefficient binomial le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ sur l'arbre représentant le schéma de Bernoulli.
Ce coefficient est noté $\binom{n}{k}$ , ce qui se lit : « **$k$ parmi $n$** »

***Exemple n°1.***

On a modélisé un schéma de Bernoulli , $n=3$ et $p$ est quelconque.
Il y a 3 chemins comportant exactement une fois l'issue $S$ : $(S, \overline{S}, \overline{S})$ , $(\overline{S}, S, \overline{S})$ et $(\overline{S}, \overline{S}, S)$ donc $\binom{3}{1} = 3$ .
De même :
$\binom{3}{0}=1$ ; $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{2}=1$




***Propriété n°1.***

Pour tout entier $n$ tel que $n \geqslant 1$ :

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1} \text{ et } \boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$$

***preuve :***

Soit une collection de $n$ éléments.
▪ Il n'y a qu' une seule façon de ne prendre aucun élément parmi les $n$ , de même il n'y a qu'une façon de tous les prendre. Donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
▪ Il y a $n$ façons façons de prendre un élément parmi les $n$ (chaque élément choisi donne une façon) donc $\binom{n}{1} = n$ .
Enfin prendre un élément parmi les $n$ revient à en laisser $n-1$ de côté. En inversant les rôles, on obtient $\binom{n}{n-1} = n$ .

***Propriété n°2.***

Soit un entier $n$ tel que $n \geqslant 2$.
Pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ :

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

***preuve :***

Soit une collection de $n$ éléments dans laquelle nous fixons un élément quelconque et soit un entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Dans l'ensemble des parties contenant $k$ éléments parmi les $n$ disponibles, il y a deux possibilités : soit les parties contiennent l'élément fixé, soit elles ne le contiennent pas (bien sûr, ces deux ensembles de parties sont disjoints).

▪ Dénombrons celles qui contiennent l'élément fixé :
L'élément fixé étant choisi d'office, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre $k-1$ puisque l'élément fixé est déjà choisi. On a donc $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

▪ Dénombrons, à présent, celles qui ne contiennent pas l'élément fixé :
L'élément fixé étant exclu, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre $k$. On a donc $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

▪ Au final pour obtenir les $\binom{n}{k}$ parties possibles, il faut réunir les $\binom{n-1}{k-1}$ parties contenant l'élément fixé et les $\binom{n-1}{k}$ ne le contenant pas.

Ainsi $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

## II Le triangle de Pascal

Source : Wikipédia

La propriété n°2, nous permet de construire ce qu'on appelle le triangle de Pascal.
C'est un tableau triangulaire tel que la ligne $n$ donne les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

La théorie

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | $\binom{0}{0}$ | | | | | |
| $n=1$ | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | | | | |
| $n=2$ | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | | | |
| $n=3$ | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ | | |
| $n=4$ | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ | |
| $n=5$ | $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{3}$ | $\binom{5}{4}$ | $\binom{5}{5}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | |

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k}$$

La pratique

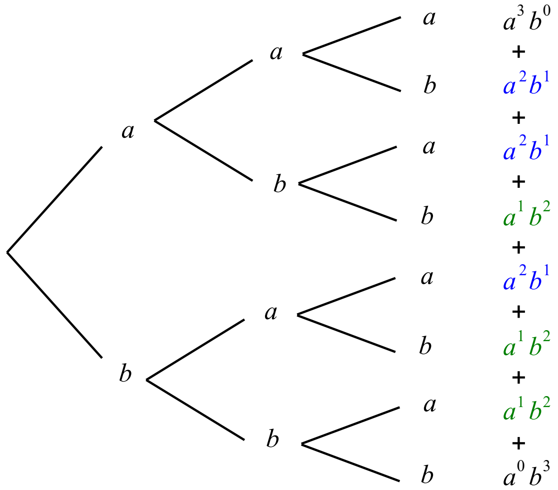
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | |

***Remarque n°1.*** ***Comment développer $(a+b)^n$ ? (pour la culture...)***

Un intérêt du triangle de Pascal est de faciliter le développement des binômes de Newton ( $(a+b)^n$ pour $n$ entier naturel).

***Exemple n°2.*** ***Un exemple avec $(a+b)^3$ .***

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = 1a^3b^0+3a^2b^1+3a^1b^2+1a^0b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$




| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 1 | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 3 | 3 | 1 |

Toutes ces notions nous permettent d'aborder le dernier paragraphe de ce chapitre.

# *III Loi binomiale*

***Définition n°2.***

Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au **nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli** de paramètres $n$ et $p$ . La loi de probabilité de $X$ est appelée **loi binomiale de paramètres $n$ et $p$** .

On la note $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$

***Propriété n°3.***

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$ .

Pour tout nombre entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ ,

la probabilité que $X$ égale $k$ est :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}}$$

***Remarque n°2.***

$p$ étant la probabilité de succès à une épreuve de Bernoulli, la probabilité de l'échec vaut bien sûr $1-p$ .

Pour que $X=k$ , il faut $k$ succès ( $p^k$ ) et $n-k$ échecs ( $(1-p)^{n-k}$ ) .

***preuve :***

Dans l'arbre associé à cette expérience aléatoire, si un chemin comporte $k$ succès alors il comporte aussi $n-k$ échecs.

Or : la probabilité de l'issue associée à un tel chemin vaut $p^k \times (1-p)^{n-k}$

et par définition, il existe $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.

On a donc bien : $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

***Propriété n°4.***

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$

alors son espérance est : $\boxed{E(X) = n \times p}$

### *Exemple n°3. Se servir d'une loi binomiale*

***La situation***

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

***La question n°1***

On s'intéresse à la probabilité, à $10^{-3}$ près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

***La réponse***

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$
▪ *On justifie ensuite l'indépendance afin d'avoir notre schéma de Bernoulli.*
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le fait d'être bénéficiaire de la CMUC pour une des personnes choisies est indépendant de celui des autres.
▪ *Puis on peut décrire notre loi binomiale,*
Ainsi, en notant $X$ , le nombre de personnes étant bénéficiaires de la CMUC, on peut dire que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}053$
▪ *Et enfin on peut faire les calculs.*
Il s'agît donc de calculer $P(X=4)$

$$P(X=4) = \binom{20}{4}\times 0{,}053^4\times(1-0{,}053)^{20-4} = 210\times 0{,}053^4\times 0{,}947^{16}$$

$$\boxed{P(X=4) \approx 0{,}016}$$

***La question n°2***

Si on prélevait un grand nombre d'échantillons de taille 20. Combien y aurait-il de bénéficiaires de la CMUC en moyenne dans chaque échantillon ?

***La réponse***

Il s'agît de calculer l'espérance de $X$
Comme $X$ suit $\mathscr{B}(20\ ;\ 0{,}053)$ alors
$E(X) = 20\times 0{,}0{,}53 = 1{,}06$

$\boxed{\text{Chaque groupe comporterait en moyenne } 1 \text{ personne bénéficiaire de la CMUC}}$