

ARITHMÉTIQUE E03 (EN GROUPE)

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Dans un donjon, vingt cellules numérotées de 1 à 20 sont fermées à clé. Ces cellules s'ouvrent et se ferment en un tour de clé.

Alors que les prisonniers dorment à poings fermés, un premier gardien, les pensant ouvertes, met un tour de clé à toutes les cellules.

Peu après, un deuxième gardien met un tour de clé à toutes les cellules dont le numéro est multiple de 2.

Arrive ensuite un troisième gardien qui met un tour de clef à toutes les cellules dont le numéro est un multiple de 3 !

Et ainsi de suite...

Au final, vingt gardiens se sont succédés !

Commençons par une remarque :

Une fois le premier gardien passé, toutes les cellules sont ouvertes et le resteront si elle subissent par la suite un nombre pair de tours de clé, elles auront donc subi au total un nombre impair de tours de clé.

Étudions à présent, le processus décrit par l'énoncé :

Une serrure donnée subira un tour de clé si le numéro du gardien est un diviseur de celui de la serrure.

Comme il y a autant de serrures que de gardiens, le processus revient à compter le nombre de diviseurs de chaque nombre de 1 à 20.

Autrement dit :

Le nombre de tours de clé que subit une serrure est également le nombre de diviseurs de son numéro. (exemple : 6 possède quatre diviseurs, la serrure n°6 subit donc quatre tours de clé)

On obtient donc :

Une serrure sera ouverte si elle a subi un nombre impair de tours de clé, c'est à dire : si le nombre de diviseurs de son numéro est impair.

On remarque assez vite que seuls les nombres carrés (exemple : 49 est un nombre carré car $49 = 7^2$) ont un nombre impair de diviseurs...

Conclusion :

Si le numéro de cellule est un nombre carré, le prisonnier pourra facilement s'évader.

(Bien sûr le raisonnement est valable quelque soit le nombre de cellules à condition qu'il y ait autant de gardiens)

1) Quels sont les numéros des cellules dont les prisonniers vont facilement pouvoir s'évader ?

1 ; 4 ; 9 ; 16.

2) Reprendre le même problème avec 500 cellules et 500 passages de gardiens !! Justifier la réponse.

1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225 ; 256 ; 289 ; 324 ; 361 ; 400 ; 441 et 484.