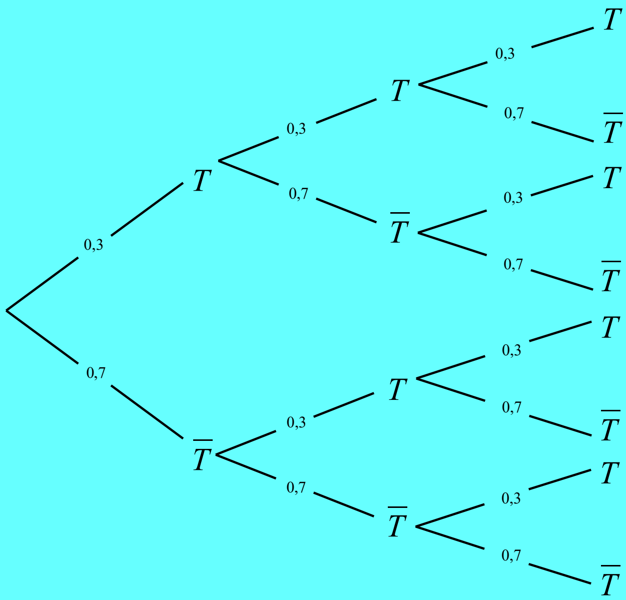
VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

EXERCICE N°1 ***Pour se souvenir (Le corrigé)***

Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse.

Un lycée comporte 900 élèves, dont 270 sont en Terminale. On choisit trois élèves au hasard. Étant donné le grand nombre d'élèves, on assimile cet échantillon à un tirage avec remise.

T l'élève choisi est en Terminale



« on assimile cet échantillon à un tirage avec remise » ???

Normalement on ne peut pas choisir le même élève plusieurs fois… Donc...

En toute « rigueur » la branche menant à T dans la 1ere étape devrait être pondérée par $\dfrac{270}{900}=0{,}3$ (c'est bien le cas) , les branches menant à T dans la 2e étape devraient être pondérées respectivement (de haut en bas) par $\dfrac{269}{899} \approx 0{,}2992$ et $\dfrac{270}{899} \approx 0{,}3003$ et il y aurait également un *très petit* changement pour la 3e étape.

Comme ces changements sont très petits, on décide de les ignorer et de garder à chaque fois 0,3…

Mais pourquoi ?!?

On considère que les erreurs commises par ces approximations sont négligeables et comme, en plus, cela simplifie grandement les calculs...

Pour résumé, on a pas vraiment un tirage avec remise mais on va faire comme si car les résultats obtenus seront très proches.

Bien sûr, on ne pas toujours procéder ainsi, mais quand la population a un grand effectif ça marche.

$\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{2}{3}$ sont très diffèrents $\dfrac{30}{40}$ et $\dfrac{29}{39}$ le sont moins ; $\dfrac{300}{400}$ et $\dfrac{299}{399}$ le sont encore moins…

Revenons à notre cas…

On peut mettre en place une variable aléatoire X qui compte le nombre k d'élèves en Terminale.

k	0	1	2	3	Total
$P(X=k)$	$\underbrace{0{,}027}_{=0{,}3^3}$	$\underbrace{0{,}441}_{=3\times0{,}3\times0{,}7^2}$	$\underbrace{0{,}189}_{=3\times0{,}3^2\times0{,}7}$	$\underbrace{0{,}343}_{=0{,}7^3}$	1

1) La probabilité que les trois élèves choisis soient en Terminale est :

A 0,027	B 0,3	C 0,343	D 0,9

À la main : $0{,}3^3$
Avec notre variable aléatoire : $P(X=0) = 0{,}027$

2) La probabilité qu'au plus deux des trois élèves soient en Terminale est d'environ :

A 0,26	B 0,4	C 0,6	D 0,97

À la main :
C'est l'événement contraire de « exactement un élève est en Terminale »
$1-0{,}7\times0{,}7\times0{,}3\times3 = 0{,}559 \approx 0{,}6$
Avec notre variable aléatoire :
$P(X\leqslant2) = 1-P(X=1) = 1-0{,}441 = 0{,}559 \approx 0{,}6$

3) La probabilité que k de ces trois élèves soient en Terminale est d'environ $0{,}441$ alors la valeur de k est :

A 0	B 1	C 2	D 4

À la main :
on fait tous les calculs et on finit par tomber sur $0{,}3\times0{,}7\times0{,}7\times3 = 0{,}441$
Avec notre variable aléatoire :
On voit que c'est la probabilité de l'événement $\{X=1\}$

4) La probabilité qu'un de ces trois élèves ne soit pas en Terminale est d'environ :

A 0,19	B 0,41	C 0,7	D 0,9

À la main : $0{,}3\times0{,}3\times0{,}7\times3 = 0{,}189 \approx 0{,}19$
Avec notre variable aléatoire : $P(X=2)$ (dire qu'il y en a un qui n'est pas en terminal revient à dire que 2 y sont...)

5) Sachant qu'un des élèves est en Terminale, la probabilité qu'au moins un des deux autres soit aussi en Terminale est d'environ :

A 0,49	B 0,51	C 0,6	D 0,91

À la main : $0{,}3+0{,}7\times0{,}3 = 0{,}51$

6) On répète cette expérience un grand nombre de fois. En moyenne, le nombre d'élèves de Terminale parmi les trois est :

A 0,9	B 1,2	C 1,5	D 1,8

Il s'agit de calculer l'espérance d'une variable aléatoire...
Espérance ? … N'oubliez pas de relire ce cours : définition n°2 page2
$0\times0{,}7^3+1\times(3\times0{,}3\times0{,}7^2)+2\times(3\times0{,}3^2\times0{,}7)+3\times0{,}3^3 = 0{,}9$
Nous verrons dans ce chapitre, que pour ce cas de figure, on peut calculer l'espérance bien plus facilement.