

# VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

## EXERCICE N°2 (Le corrigé)

De 1987 à 1993, le Tapis vert était un jeu de la Française des jeux (à l'époque appelée France Loto). Le principe était le suivant :

pour jouer, il fallait miser entre 2 et 100 francs, puis, pour chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique), choisir une carte entre le 7 et l'as.

Un tirage était ensuite effectué sous contrôle d'huissier et à la télévision.

Si le joueur avait choisi deux des cartes tirées, il gagnait deux fois sa mise, s'il avait choisi trois des cartes tirées, il gagnait trente fois sa mise, et s'il avait choisi les quatre cartes tirées, il gagnait mille fois sa mise.

Un joueur a choisi ses quatre cartes. On note  $X$  le nombre de ses cartes qui seront tirées.

Les résultats seront arrondis à  $10^{-4}$ .

1) Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Pour avoir une loi binomiale, il faut avoir une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de mêmes paramètres (un schéma de Bernoulli).

Pour une carte tirée, on considère comme Succès le fait qu'elle soit celle choisie par le joueur.

On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{8}$ .

Les quatre couleurs ne s'influencent pas, donc chacune des 4 épreuves est indépendante des autres.

On peut donc dire que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n=4$  et  $p=\frac{1}{8}$ .

(  $X \sim \mathcal{B}(4 ; 0,125)$  )

2) Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent ?

Le joueur gagne de l'argent dès le moment où il a au moins deux de ses cartes qui sont tirées.

Il s'agit donc de calculer  $P(X \geq 2)$

On pourrait calculer  $P(X=2)$  ;  $P(X=3)$  et  $P(X=4)$  puis les additionner... mais on n'aime pas faire les calculs. On va donc calculer la probabilité de l'événement contraire qui demande (un peu) moins de travail.

$$P(X \geq 2) = 1 - \underbrace{P(X < 2)}_{\text{On ne prend pas 2}} = 1 - \underbrace{P(X \leq 1)}_{\substack{\text{il suffit donc} \\ \text{d'aller jusque 1}}}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - \left[ \left(\frac{7}{8}\right)^4 + 4 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{1}{8}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{4-0} \quad \text{et} \quad P(X=1) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{8}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{4-1}$$

$$P(X \geq 2) \approx 0,0789$$

3) Déterminer l'espérance de  $X$  et interpréter ce résultat.

$$E(X) = np = 4 \times \frac{1}{8}$$

On peut utiliser les lettres  $n$  et  $p$  car on a précisé leur signification à la question 1).

Ainsi  $E(X) = 0,5$

Cela signifie qu'un joueur peut espérer avoir « la moitié d'une carte en commun avec le tirage ». Bien sûr, cela ne veut pas dire grand-chose.

Cela signifie qu'en moyenne le joueur a une chance sur deux d'avoir une carte en commun avec le tirage.

4) Ce joueur a misé 10 francs pour un tirage. On note  $Y$  ses gains.

4.a) Quelle sont les valeurs prises par  $Y$  ?

Les valeurs de  $Y$  dépendent de celles de  $X$ .

$X$	0	1	2	3	4
$Y$	0	0	20	300	10000
	(pas de gain)	(pas de gain)	(2 fois la mise de 10 francs)	(30 fois la mise de 10 francs)	(1000 fois la mise de 10 francs)

4.b) Donner la loi de probabilité de  $Y$ .

On donne la loi de  $Y$  sous la forme d'un tableau.

$Y=k$	0	20	300	10000	total
$P(Y=k)$	0,9211	0,0718	0,0068	0,0002	1
					En fait 0,9999 mais cela vient des arrondis. Avec les valeurs exactes on obtient bien sûr 1

▪ Pour que  $Y=0$  il faut et il suffit que  $X=0$  ou  $X=1$

Donc  $P(Y=0) = P(X \leq 1) \approx 0,9211$  (reprendre les calculs de la question 2)

▪ Pour que  $Y=20$  il faut et il suffit que  $X=2$

Donc  $P(Y=20) = P(X=2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{4-2} \approx 0,0718$

▪ Pour que  $Y=300$  il faut et il suffit que  $X=3$

Donc  $P(Y=300) = P(X=3) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{4-3} \approx 6,83 \times 10^{-3} \approx 0,0068$

▪ Pour que  $Y=10000$  il faut et il suffit que  $X=4$

Donc  $P(Y=10000) = P(X=4) = \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^4 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{4-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0,0002$

4.c) Calculer  $E(Y)$  et interpréter le résultat.

$$E(Y) = 0 \times P(Y=0) + 20 \times P(Y=20) + 300 \times P(Y=300) + 10000 \times P(Y=10000) \approx 5,476$$

Les calculs ont été faits avec les valeurs écrites dans le tableau qui donne la loi de  $Y$ .

Ainsi  $E(Y) \approx 5,476$

Cela signifie que le joueur peut espérer gagner environ 5 francs et 48 centimes chaque fois qu'il joue 10 francs

5) Le 29 mars 1988 eut lieu un tirage particulier : les quatre as ont été tirés. Beaucoup de gens ayant parié sur cette combinaison, les gains distribués ont été très supérieurs aux mises!

Quelle était la probabilité qu'un tel tirage se produise ?

La probabilité d'un tel tirage est  $P(X=4) = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0,0002$

La probabilité de tirer quatre rois, quatre reines ... ou quatres sept est la même.

Le problème est venu du fait qu'il y avait beaucoup de gens qui jouaient en général les quatres As plutôt qu'un autre carré...