

# LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

## EXERCICE N°1 Suite auxiliaire (sans calculatrice)

On donne la suite  $u$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases}$$

1) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ , on donnera les valeurs exactes.

▪  $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}$ , ainsi  $u_1 = \sqrt{3}$

▪  $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{3 + 12} = \frac{1}{2} \times \sqrt{15}$ , ainsi  $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$

▪  $u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4} + 12} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{2}$ , ainsi  $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

2) On définit la suite  $v$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2 - 4$

2.a) Montrer que la suite  $v$  est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

▪  $v_0 = u_0^2 - 4 = 0 - 4$ , ainsi  $v_0 = -4$

▪ Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 4 \\ &= \left( \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2 - 1 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

« Astuce » de la mise en facteur de « force »

▪ On reconnaît une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{4}$  et de premier terme  $v_0 = -4$

2.b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -4 \times \left( \frac{1}{4} \right)^n$

2.c) On a admet que pour tout entier  $n$ ,  $v_n > -4$ . En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

▪ Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $v_n = u_n^2 - 4 \Leftrightarrow u_n^2 = v_n + 4 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{v_n + 4}$  (car  $v_n - 4 > 0$ )

On en déduit que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \sqrt{4 - 4 \times \left( \frac{1}{4} \right)^n}$

2.d) Conjecturer alors la limite de la suite  $u$ .

Il semble que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

La suite  $v$  tend vers 0, « il reste »  $\sqrt{4} = 2$

# LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

## EXERCICE N°2 Suite auxiliaire et tableur

- Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  
 $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  ,  
 $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$  .

- Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  
pour tout entier naturel  $n$  ,  $v_n = u_n + 2n^2 + 3n$  .

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :  
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2  
et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes  
des suites  $u$  et  $v$  ?

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

- C2 :  $=B2+2*A2^2+3*A2$
- B3 :  $=2*B2+2*A2^2-A2$

2) Déterminer, en justifiant, une expression de  
 $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$  .

- Exprimons  $v_{n+1}$  en fonction  $v_n$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\
 &= \underbrace{2u_n + 2n^2 - n}_{u_{n+1}} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\
 &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5 \\
 &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\
 &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\
 &= 2v_n
 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $v$  est géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $v_0 = 7$

Pour  $v_0$  , il suffit de lire la valeur dans le tableur...

- Exprimons  $v_n$  en fonction  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = v_0 \times q^n, \text{ ainsi } v_n = 7 \times 2^n$$

- Exprimons  $u_n$  en fonction  $n$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ,

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n \Leftrightarrow u_n = v_n - 2n^2 - 3n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$

# LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

## EXERCICE N°3      Somme des premiers carrés

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $u_n$  la somme des  $n$  premiers carrés, c'est à dire  $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .

3) Calculer les trois premiers termes de la suite  $u$ .

- $u_1 = 1^2$ , ainsi  $u_1 = 1$ .
- $u_2 = 1^2 + 2^2$ , ainsi  $u_2 = 5$ .
- $u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ , ainsi  $u_3 = 14$ .

4) Déterminer une relation entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + (n+1)^2$

5) On pose  $v$  la suite définie par : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

5.a) Montrer que  $v_1 = u_1$

$$v_1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1 = u_1$$

5.b) Montrer que la suite  $v$  suit la même relation de récurrence que la suite  $u$  et conclure.

▪ Exprimons  $v_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

▪ Calculons à présent  $v_n + (n+1)^2$

$$\begin{aligned} v_n + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} && \text{factorisation par } (n+1) \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \end{aligned}$$

Or :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Donc :

$$v_{n+1} = v_n + (n+1)^2.$$

- La suite  $v$  suit bien la même relation de récurrence que la suite  $u$ .
- Comme, de plus, elles ont le même premier terme, on en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n.$$

- On a donc démontré que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On ne change pas cette somme en ajoutant zéro, donc on peut commencer à  $k = 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(Le résultat reste vrai pour  $n=0$  puisque  $0 = 0$ )

# LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

## EXERCICE N°4 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que :  $a > 0$  et  $b > \sqrt{a}$ .

On donne également la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ .

On considère la suite  $u$  définie par  $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

Notre but est de comprendre que le terme  $u_n$  tend vers  $\sqrt{a}$ .

1) Un premier cas :  $a = 2$  et  $b = 5$ .

1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 5$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left( 5 + \frac{2}{5} \right)$ , ainsi  $u_1 = 2,7$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left( u_1 + \frac{2}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2,7 + \frac{2}{2,7} \right)$ , ainsi  $u_2 \approx 1,72$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left( u_2 + \frac{2}{u_2} \right)$ , ainsi  $u_3 \approx 1,441$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left( u_3 + \frac{2}{u_3} \right)$ , ainsi  $u_4 \approx 1,414$

n	$u_n$
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite  $u$  et la comparer avec  $\sqrt{a}$ .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 1,414213562

Régler l'intervalle

N début	500
N fin	520
Pas	1

Valider

n	$u_n$
500	1.414213562
501	1.414213562
502	1.414213562
503	1.414213562
504	1.414213562
505	1.414213562
506	1.414213562

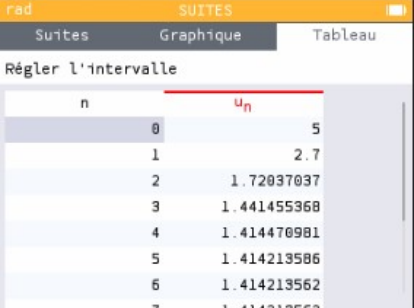
Ce qui correspond à une valeur approchée de  $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$	1.414213562
------------	-------------

2) Un premier cas :  $a = 5$  et  $b = 10$  .

2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 10$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{5}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left( 10 + \frac{5}{10} \right)$  , ainsi  $u_1 = 5,25$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left( u_1 + \frac{5}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 5,25 + \frac{5}{5,25} \right)$  , ainsi  $u_2 \approx 3,101$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left( u_2 + \frac{5}{u_2} \right)$  , ainsi  $u_3 \approx 2,357$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left( u_3 + \frac{5}{u_3} \right)$  , ainsi  $u_4 \approx 2,239$



n	$u_n$
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite  $u$  et la comparer avec  $\sqrt{a}$  .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 2,236067977



Régler l'intervalle

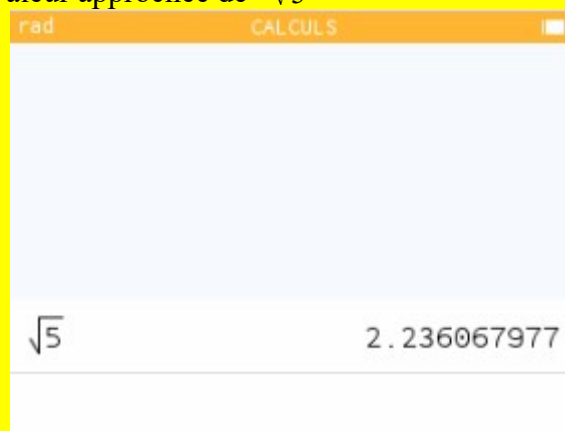
N début	500
N fin	520
Pas	1

Valider



n	$u_n$
500	2.236067977
501	2.236067977
502	2.236067977
503	2.236067977
504	2.236067977
505	2.236067977
506	2.236067977

Ce qui correspond à une valeur approchée de  $\sqrt{5}$



$\sqrt{5}$  2.236067977