EXERCICE N°4 Lien entre les racines et la forme développée réduite (Le corrigé)

La théorie :

On donne a , b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax^2+bx+c$

On note Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c et on suppose $\Delta > 0$.

On peut alors poser $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de f .

1) Simplifier les expressions suivantes :
$s = x_1+x_2$ et $p = x_1 x_2$

$$\begin{aligned} s &= x_1+x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}+(-b)+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{s = x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}}$

$$\begin{aligned} p &= x_1 x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{s = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}}$

La pratique :

2) En remarquant que 1 est une racine évidente de $3x^2+3x-6$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que
$3x^2+3x-6 = ax^2+bx+c$ avec $a=3$; $b=3$; $c=-6$

Posons alors $x_1 = 1$, d'après la question 1)

$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ d'où $x_2 = \dfrac{-6}{3} = -2$

On en déduit que $\boxed{3x^2+3x-6 = 3(x-1)(x+2)}$

3) En remarquant que -1 est une racine évidente de $-2x^2-6x-4$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que
$-2x^2-6x-4 = ax^2+bx+c$ avec $a=-2$; $b=-6$; $c=-4$

Posons alors $x_1 = -1$, d'après la question 1)

$x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}$ d'où $-1+x_2 = \dfrac{-6}{-2}$ ou encore $x_2 = 3+1 = 4$

On en déduit que $\boxed{-2x^2-6x-4 = -2(x+1)(x-4)}$