**EXERCICE N°4 Changement de variable, tableau de signes, delta**

On considère l'inéquation suivante, d'inconnue réelle $x$ :

$$(H) : \sin^2(x) - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0.$$

On pose $X = \sin(x)$.

**1)** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $X^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0.$

▪ Commençons par factoriser l'expression $X^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Posons $\Delta = \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 4\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} + \sqrt{3} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

$\Delta > 0$ , il y a donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}}{2\times1} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}}{2\times1} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, $X^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

▪ Dressons à présent un tableau de signes :

▫ $X + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow X > -\frac{1}{2}$

▫ $X - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow X > \frac{\sqrt{3}}{2}$

| $X$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X+\frac{1}{2}$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $X-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty\right[}$

**2)** En déduire les solutions de l'inéquation $(H)$.

Notons $S$ l'ensemble des solutions de $(H)$ . Pour $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x \in S \Leftrightarrow \sin^2(x) - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0$$

$$x \in S \Leftrightarrow \left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right)\left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty\right[$$

$$\Leftrightarrow \left( \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Traitons ces deux cas séparément :

**$1^{er}$ cas :**

$$\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]$$

**$2^e$ cas :**

$$\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$

On en déduit que :

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\right)}$$

Pour ceux qui ne voudraient pas raisonner séparément :

$$x \in S \Leftrightarrow \sin^2(x)-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0$$
$$x \in S \Leftrightarrow \left(\sin(x)+\frac{1}{2}\right)\left(\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ +\infty\right[$$
$$\Leftrightarrow \left( \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(\exists\ p \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]\right) ou \left(\exists\ q \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right] \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\right)$$