EXERCICE N°4 Suite auxiliaire et tableur

- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n+2n^2-n$.
- Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
pour tout entier naturel n, $v_n = u_n+2n^2+3n$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre : Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

- C2 : =B2+2*A2^2+3*A2
- B3 : =2*B2+2*A2^2-A2

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

- Exprimons v_{n+1} en fonction v_n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1) \\ &= \underbrace{2u_n+2n^2-n}_{u_{n+1}}+2(n+1)^2+3(n+1) \\ &= 2u_n+2n^2-n+2n^2+4n+2+3n+3+5 \\ &= 2u_n+4n^2+6n+10 \\ &= 2(u_n+2n^2+3n+5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } v \text{ est géométrique de raison } q = 2 \text{ et de premier terme } v_0 = 7}$

Pour v_0, il suffit de lire la valeur dans le tableur...

- Exprimons v_n en fonction n :

$\forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = v_0\times q^n$, ainsi $\boxed{v_n = 7\times 2^n}$

- Exprimons u_n en fonction n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = u_n+2n^2+3n \Leftrightarrow u_n = v_n-2n^2-3n = 7\times 2^n-2n^2-3n$

Ainsi,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 7\times 2^n-2n^2-3n}$