LES VECTEURS E03

EXERCICE N°6 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $I(1\ ;\ -5)$, $J(7\ ;\ 2)$, $K(16\ ;\ 4)$ et $L(10\ ;\ -3)$.

Montrer que $IJKL$ est un losange.

On peut montrer que les quatre côtés ont la même longueur ou démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.
Nous choisissons la seconde méthode.

Calculons les coordonnées et les normes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LK}$ et, $\overrightarrow{JK}$

- $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-(-5) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

  $\|\overrightarrow{IJ}\|^2 = 6^2+7^2=36+49=85$

- $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 16-10 \\ 4-(-3) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont égaux le calcul de la norme de $\overrightarrow{LK}$ est inutile.

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ signifie que $IJKL$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 16-7 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\|\overrightarrow{JK}\|^2 = 9^2+2^2=81+4=85$
- Ainsi $\|\overrightarrow{IJ}\|^2 = \|\overrightarrow{JK}\|^2$ et comme $\|\overrightarrow{IJ}\|$ et $\|\overrightarrow{JK}\|$ sont positifs (ce sont des longueurs) :
  $\|\overrightarrow{IJ}\| = \|\overrightarrow{JK}\|$
- Le parallélogramme $IJKL$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.