

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Remarque n°1.

Il peut-être utile de relire ce qui a été fait en seconde puis en première sur les probabilités.

(Les Qrcodes sont également cliquables)

Seconde



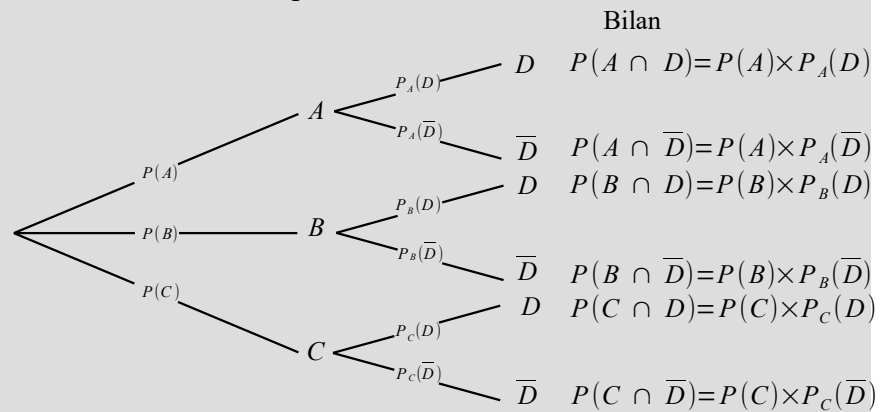
Première



I Les arbres de probabilités

Définition n°1. Arbre de probabilités

Un arbre de probabilités est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Remarque n°2.

Les événements reliés à un même nœud sont incompatibles deux à deux.

Définition n°2. Branche

Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène.

Exemple n°1.

Ci-dessus, sur la branche de A à D , on place $P_A(D)$, la probabilité conditionnelle de D sachant A ;

Définition n°3. Nœud

Un nœud est un croisement entre plusieurs branches.

Définition n°4. Chemin

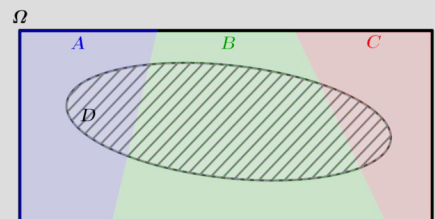
Un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.

Définition n°5. Événement bilan

L'événement bilan, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

Définition n°6. Partition de l'univers

Dans ce diagramme de Venn qui correspond à l'arbre de la définition n°1. Les événements A , B et C forment une partition de l'univers Ω : Leur réunion égale l'univers et ils sont incompatibles deux à deux (ils sont disjoints).



On en déduit la propriété suivante.

Propriété n°1.

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

Exemple n°2.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Remarque n°3.

$D \cap A$ et $\bar{D} \cap A$ forment une partition de A et donc :

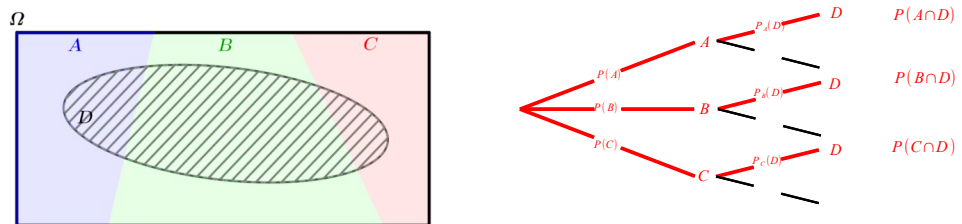
$$\begin{aligned} P_A(D) + P_A(\bar{D}) &= \frac{P(D \cap A)}{P(A)} + \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \end{aligned}$$

Propriété n°2. Formule des probabilités totales

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement dans un arbre de probabilités.

preuve : (ou plutôt une explication)

Le diagramme de Venn nous permet de comprendre que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$. Comme ces événements sont incompatibles : $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

**II Indépendance de deux événements****Définition n°7.**

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$

Propriété n°3. L'indépendance de deux événements est symétrique

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$

preuve :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Propriété n°4. Une autre façon de voir l'indépendance de deux événements

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

preuve :

Il suffit de lire la preuve de la propriété n°3...

Remarque n°4.

On a $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ et $P_A(A) = 1$

Si A et B sont disjoints alors $P_A(B) = 0$

Remarque n°5. Attention

Les mots « disjoint » et « indépendant » ne signifient pas du tout la même chose :

« disjoints » = « incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$
(leur intersection est vide)