FONCTIONS PART3 E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des polynômes de degré 3 ? Justifier.

1) $f(x)=-x^3-\frac{1}{21}x^2-2x+19$

$\boxed{\text{C'est un polynôme de degré 3}}$

Le coefficient du terme de degré 3 n'est pas nul (il vaut -1) et il n'y a pas de terme de degré strictement supérieur à 3.

2) $g(x)=\frac{12}{11}x^2+\frac{3}{5}x-9$

$\boxed{\text{Ce n'est pas un polynôme de degré 3}}$

Il est clairement de degré de 2.

3) $h(x)=x^4+2x^3+x^2-5x+4$

$\boxed{\text{Ce n'est pas un polynôme de degré 3}}$

Il est clairement de degré de 4.

4) $p(x)=(x+2)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+2)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right) \\ &= (x+2)\left[x^2-1{,}5x-2{,}5\right] \\ &= x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{2}x-5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{C'est un polynôme de degré 3}}$

Le coefficient du terme de degré 3 n'est pas nul (il vaut 1) et il n'y a pas de terme de degré strictement supérieur à 3.

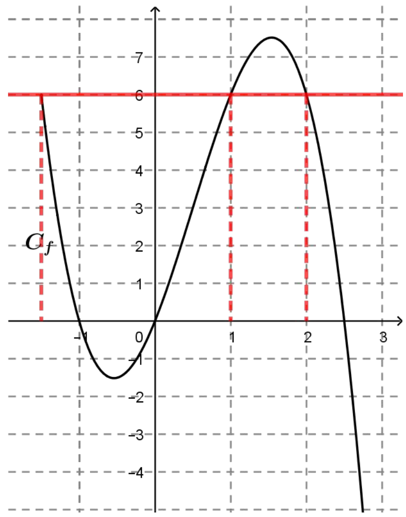
5) $q(t)=5t^3-2t+6$

$\boxed{\text{C'est un polynôme de degré 3}}$

Le coefficient du terme de degré 3 n'est pas nul (il vaut 5) et il n'y a pas de terme de degré strictement supérieur à 3.

FONCTIONS PART3 E01

EXERCICE N°2 ***(Le corrigé)***



Soit f un polynôme de degré 3 défini sur $[-1,5\ ;\ 4]$ par $f(x)=-2x(x+1)(x-2,5)$ et représenté dans le plan sur un repère par la courbe ci-contre.

1) Résoudre graphiquement $f(x)=6$.

Graphiquement, les solutions sont : $\boxed{-1,5\ ;\ 1\ \text{et}\ 2}$

2) Étudier graphiquement les variations de f .

x	$-1,5$		$-0,5$		$1,5$		4
$f(x)$	6	↘	$-1,5$	↗	$7,5$	↘	

3) Déterminer graphiquement les racines de f .

Graphiquement, les racines de f sont : $\boxed{-1\ ;\ 0\ \text{et}\ 2,5}$.

On peut les lire directement sur la forme factorisée…

4) Déterminer graphiquement le signe $f(x)$.

x	$-1,5$		-1		0		$2,5$		4
$f(x)$	6	+	0	−	0	+	0	−	

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant $1, -3$ et -4 pour racines et telle que $P(2)=90$.

On sait que P est une fonction polynôme de degré 3 et que ses racines sont $1, -3$ et -4 .
Donc, pour tout réel x ,
$P(x) = a(x-1)(x+3)(x+4)$ avec a un nombre réel.
De plus $P(2) = 90$
Donc
$a(2-1)(2+3)(2+4) = 90 \Leftrightarrow 30a = 90 \Leftrightarrow a = 3$
Ainsi
$\boxed{P(x) = 3(x-1)(x+3)(x+4)}$

On peut aussi développer et réduire cette expression, dans le but de calculer la dérivée par exemple.
$P(x) = 3x^3+18x^2+15x-36$

EXERCICE N°4 *(Le corrigé)*

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant $3 , -5$ et 7 pour racines et telle que $P(2) = -70$.

On sait que P est une fonction polynôme de degré 3 et que ses racines sont . $3 , -5$ et 7
Donc, pour tout réel x ,
$P(x) = a(x-3)(x+5)(x-7)$ avec a un nombre réel.
De plus $P(2) = -7$
Donc
$a(2-3)(2+5)(2-7) = -70 \Leftrightarrow 35a = -70 \Leftrightarrow a = -2$
Ainsi
$\boxed{P(x) = -2(x-3)(x+5)(x-7)}$

On peut aussi développer et réduire cette expression, dans le but de calculer la dérivée par exemple.
$P(x) = -2x^3+10x^2+58x-210$

EXERCICE N°5 *(Le corrigé)*

On considère la fonction P définie par où $P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+k$ k est un nombre réel.

1) Déterminer la valeur du réel k pour que le nombre 4 soit une racine de P .

Si 4 est une racine de P alors :

$P(4)=0 \Leftrightarrow -4^3+5\times4^2-4{,}25\times4+k=0 \Leftrightarrow -1+k=0 \Leftrightarrow k=1$

Ainsi, pour que 4 soit une racine de P , il faut (et il suffit) que $\boxed{k=1}$

2) Sachant que $0{,}5$ est une racine double, factoriser $P(x)$.

On sait que P est de degré 3 et que ses racines sont $0{,}5$; $0{,}5$ et 4

Donc, pour tout réel x ,

$P(x)=a(x-0{,}5)^2(x-4)$ avec a un nombre réel.

Il nous reste à trouver a :

$P(x)=a(x-0{,}5)(x-0{,}5)(x-4)$ et $(x-0{,}5)(x-0{,}5)=(x-0{,}5)^2$

En développant,

$P(x)=a[(x^2-x+0{,}25)(x-4)]=a(x^3-4x^2-x^2+4x+0{,}25x-1)=a(x^3-5x^2+4{,}25x-1)$

Or d'après la question 1)

$P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+1$

En effet, on sait que $P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+k$ et grâce à la question 1 que $k=1$, donc

$P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+1$

Ici, on se souvient de la définition n°1 du cours :

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

avec $a=-1$; $b=5$; $c=-4{,}25$ et $d=k=1$

La propriété n°2 du cours nous dit alors que $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$x_1=x_2=0{,}5$ et $x_3=4$ et comme le « a » est le même dans les deux formes $a=-1$

On en déduit que $a=-1$

Ainsi $\boxed{P(x)=-(x-0{,}5)^2(x-4)}$

3) Résoudre $P(x)>0$.

Soit x un nombre réel.

$P(x)>0 \Leftrightarrow -(x-0{,}5)^2(x-4)>0$

- -1 est toujour négatif,
- $(x-0{,}5)^2$ est positif ou nul (nul en 0,5)
- $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

x	$-\infty$		$0{,}5$		4		$+\infty$
-1		$-$	|	$-$	|	$-$	
$(x-0{,}5)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x)>0$ est :

$\boxed{]-\infty\ ;\ 0{,}5[\ \cup\ ]0{,}5\ ;\ 4[}$