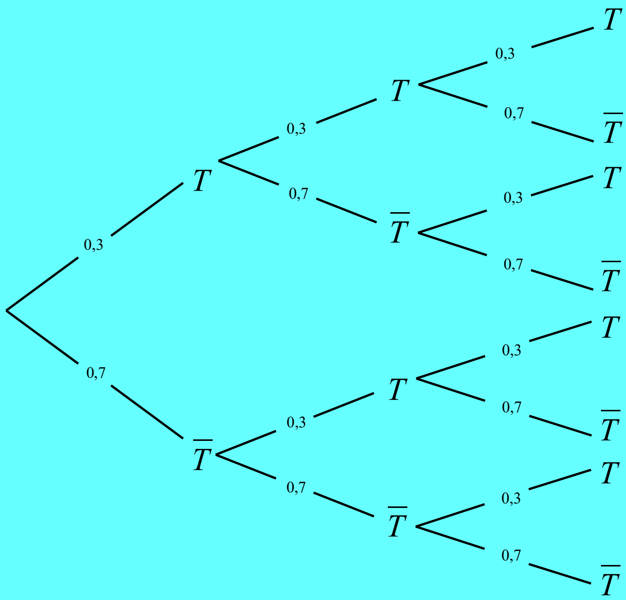
## EXERCICE N°1 *Pour se souvenir (Le corrigé)*

Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse.

Un lycée comporte 900 élèves, dont 270 sont en Terminale. On choisit trois élèves au hasard.
Étant donné le grand nombre d'élèves, on assimile cet échantillon à un tirage avec remise.

$T$ l'élève choisi est en Terminale




« on assimile cet échantillon à un tirage avec remise » ???
Normalement on ne peut pas choisir le même élève plusieurs fois… Donc...
En toute « rigueur » la branche menant à $T$ dans la 1ere étape devrait être pondérée par $\frac{270}{900}=0,3$ (c'est bien le cas) , les branches menant à $T$ dans la 2e étape devraient être pondérées respectivement (de haut en bas) par $\frac{269}{899} \approx 0,2992$ et $\frac{270}{899} \approx 0,3003$ et il y aurait également un *très petit* changement pour la 3e étape.

Comme ces changements sont très petits, on décide de les ignorer et de garder à chaque fois 0,3…
Mais pourquoi ?!?
On considère que les erreurs commises par ces approximations sont négligeables et comme, en plus, cela simplifie grandement les calculs...
Pour résumé, on a pas vraiment un tirage avec remise mais on va faire comme si car les résultats obtenus seront très proches.
Bien sûr, on ne pas toujours procéder ainsi, mais quand la population a un grand effectif ça marche.
$\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ sont très diffèrents $\frac{30}{40}$ et $\frac{29}{39}$ le sont moins ; $\frac{300}{400}$ et $\frac{299}{399}$ le sont encore moins…

Revenons à notre cas…

On peut mettre en place une variable aléatoire $X$ qui compte le nombre $k$ d'élèves en Terminale.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\underbrace{0,027}_{=0,3^3}$ | $\underbrace{0,441}_{=3\times 0,3\times 0,7^2}$ | $\underbrace{0,189}_{=3\times 0,3^2\times 0,7}$ | $\underbrace{0,343}_{=0,7^3}$ | 1 |

**1)** La probabilité que les trois élèves choisis soient en Terminale est :

| A 0,027 | B 0,3 | C 0,343 | D 0,9 |
|---|---|---|---|

À la main : $0{,}3^3$
Avec notre variable aléatoire : $P(X=0) = 0{,}027$

**2)** La probabilité qu'au plus deux des trois élèves soient en Terminale est d'environ :

| A 0,26 | B 0,4 | C 0,6 | D 0,97 |
|---|---|---|---|

À la main :
C'est l'événement contraire de « exactement un élève est en Terminale »
$1-0{,}7\times0{,}7\times0{,}3\times3 = 0{,}559 \approx 0{,}6$
Avec notre variable aléatoire :
$P(X\leqslant2) = 1-P(X=1) = 1-0{,}441 = 0{,}559 \approx 0{,}6$

**3)** La probabilité que $k$ de ces trois élèves soient en Terminale est d'environ $0{,}441$ alors la valeur de $k$ est :

| A 0 | B 1 | C 2 | D 4 |
|---|---|---|---|

À la main :
on fait tous les calculs et on finit par tomber sur $0{,}3\times0{,}7\times0{,}7\times3 = 0{,}441$
Avec notre variable aléatoire :
On voit que c'est la probabilité de l'événement $\{X=1\}$

**4)** La probabilité qu'un de ces trois élèves ne soit pas en Terminale est d'environ :

| A 0,19 | B 0,41 | C 0,7 | D 0,9 |
|---|---|---|---|

À la main : $0{,}3\times0{,}3\times0{,}7\times3 = 0{,}189 \approx 0{,}19$
Avec notre variable aléatoire : $P(X=2)$ (dire qu'il y en a un qui n'est pas en terminal revient à dire que 2 y sont...)

**5)** Sachant qu'un des élèves est en Terminale, la probabilité qu'au moins un des deux autres soit aussi en Terminale est d'environ :

| A 0,49 | B 0,51 | C 0,6 | D 0,91 |
|---|---|---|---|

À la main : $0{,}3+0{,}7\times0{,}3 = 0{,}51$

**6)** On répète cette expérience un grand nombre de fois. En moyenne, le nombre d'élèves de Terminale parmi les trois est :

| A 0,9 | B 1,2 | C 1,5 | D 1,8 |
|---|---|---|---|

Il s'agît de calculer l'espérance d'une variable aléatoire...
Espérance ? … N'oubliez pas de relire [ce cours : définition n°2 page2]
$0\times0{,}7^3+1\times(3\times0{,}3\times0{,}7^2)+2\times(3\times0{,}3^2\times0{,}7)+3\times0{,}3^3 = 0{,}9$
Nous verrons dans ce chapitre, que pour ce cas de figure, on peut calculer l'espérance bien plus facilement.

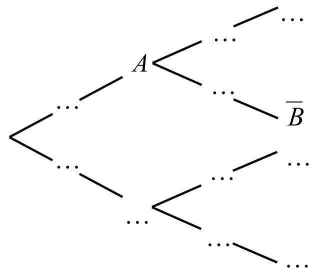
# VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

**EXERCICE N°2** ***Revoir l'espérance (Le corrigé)***

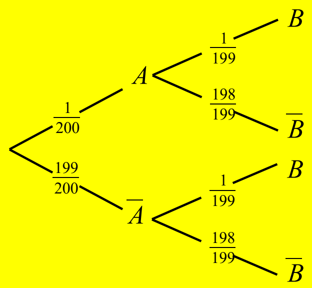
200 billets de loterie valant 2 euros chacun sont vendus. Seulement deux billets permettent de gagner un lot : l'un permet de gagner 100 euros, l'autre permet de gagner 50 euros, les autres ne rapportent rien du tout.

On a acheté deux billets. On considère les événements suivants :

- $A$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- $B$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».




**1)** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.




**2)** On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.
$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.
$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.
$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.

*Indication : il est important de prendre en compte l'argent dépensé pour acheter les billets.*

**3)** Recopier et compléter le tableau suivant.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | | | | |
| Probabilités correspondantes | | | | |

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | $(\overline{A}\cap\overline{B})$ | $(\overline{A}\cap B)$ | $(A\cap\overline{B})$ | $(A\cap B)$ |
| Probabilités correspondantes | 0,99 | 0,005 | $\dfrac{99}{19900}$ $\frac{1}{200}\times\frac{198}{199}$ | $\dfrac{1}{39800}$ $\frac{1}{200}\times\frac{1}{199}$ |

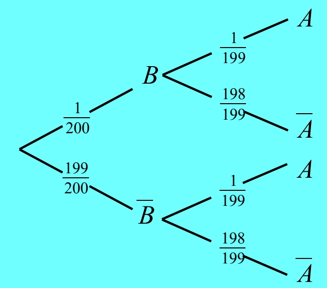
**4)** Calculer l'espérance de $X$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = -4\times 0{,}99 + 46\times 0{,}005 + 96\times\frac{99}{19900} + 146\times\frac{1}{39800} \approx -3{,}25$$

$$\boxed{E(X)\approx -3{,}25}$$

Cela signifie que, en jouant à ce jeu, on perd en moyenne 3,25 €

C'est bien gentil tout ça mais si on commence par $B$ ?




On a échangé les positions de $A$ et $B$

On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.
$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.
$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.
$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | $(\overline{B}\cap\overline{A})$ | $(B\cap\overline{A})$ | $(\overline{B}\cap A)$ | $(B\cap A)$ |
| Probabilités correspondantes | 0,99 | $\frac{99}{19900}$ $\frac{1}{200}\times\frac{198}{199}$ | 0,005 | $\frac{1}{39800}$ $\frac{1}{200}\times\frac{1}{199}$ |

$$E(X) = -4\times0{,}99 + 46\times\frac{99}{19900} + 96\times0{,}005 + 146\times\frac{1}{39800} \approx -3{,}25$$

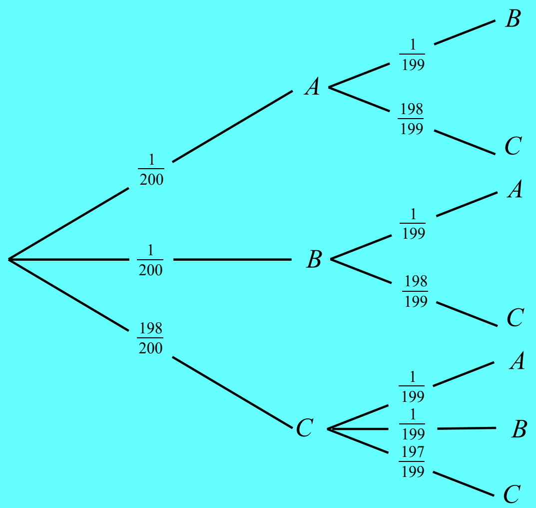
Bon les probabilités des événements $\{X=46\}$ et $\{X=96\}$ sont inversée mais on a presque la même espérance (vous pouvez regarder les millièmes, il y a une différence).

C'est quand même étrange !

Hé mais moi j'ai pas modélisé comme ça !
J'ai noté :

- $A$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- $B$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».
- $C$ : « l'un de nos billets fait partie des billets perdants ».

…




Dans ce cas, c'est encore un peu différent car on donne implicitement une importance à l'ordre des billets

On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.

$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.

$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.

$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilités correspondantes | $\frac{19503}{19900}$ $\frac{198}{200}\times\frac{197}{199}$ | $\frac{99}{9950}$ | $\frac{99}{9950}$ | $\frac{1}{19900}$ |

$$P(X=46) = \frac{1}{200}\times\frac{198}{199}+\frac{198}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times198}{200\times199} = \frac{99}{9950}$$

$$P(X=96) = \frac{1}{200}\times\frac{198}{199}+\frac{198}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times198}{200\times199} = \frac{99}{9950}$$

$$P(X=146) = \frac{1}{200}\times\frac{1}{199}+\frac{1}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times1}{200\times199} = \frac{1}{19900}$$

L'espérance vaut alors : $-4\times\frac{19503}{19900} + 46\times\frac{99}{9950} + 96\times\frac{99}{9950} + 146\times\frac{1}{19900} = -2{,}5$

Oui mais alors qui a raison ?

Place à la simulation : [un petit programme en Python]

Vous constaterez que c'est la dernière version qui représente le mieux la situation…

En conclusion : Le choix de la modélisation est important, vous rencontrerez (peut-être) d'autres exemples où le modèle choisi est correct mais ne représente pas la réalité.
Un autre exemple est celui du lancer de deux dés dont on fait la somme.
Si les dés sont de la même couleur on aura tendance à modéliser sans tenir compte de l'ordre des dés (un peu comme dans cet exercice) et si les dés sont de couleurs différentes alors on tiendra compte de l'ordre des dés (un peu comme dans la dernière version).
Les deux modélisations sont incompatibles et là encore la simulation donne raison au second modèle.

# VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

## EXERCICE N°1 *Pour se souvenir*

Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse.

Un lycée comporte 900 élèves, dont 270 sont en Terminale. On choisit trois élèves au hasard. Étant donné le grand nombre d'élèves, on assimile cet échantillon à un tirage avec remise.

**1)** La probabilité que les trois élèves choisis soient en Terminale est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0,027 | B 0,3 | C 0,343 | D 0,9 |

**2)** La probabilité qu'au plus deux des trois élèves soient en Terminale est d'environ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0,26 | B 0,4 | C 0,6 | D 0,97 |

**3)** La probabilité que $k$ de ces trois élèves soient en Terminale est d'environ 0,441 alors la valeur de $k$ est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0 | B 1 | C 2 | D 4 |

**4)** La probabilité qu'un de ces trois élèves ne soit pas en Terminale est d'environ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0,19 | B 0,41 | C 0,7 | D 0,9 |

**5)** Sachant qu'un des élèves est en Terminale, la probabilité qu'au moins un des deux autres soit aussi en Terminale est d'environ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0,49 | B 0,51 | C 0,6 | D 0,91 |

**6)** On répète cette expérience un grand nombre de fois. En moyenne, le nombre d'élèves de Terminale parmi les trois est :

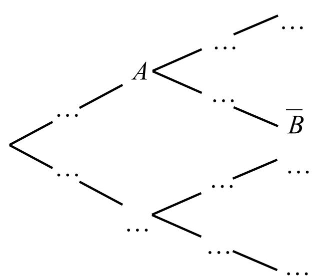
| | | | |
|---|---|---|---|
| A 0,9 | B 1,2 | C 1,5 | D 1,8 |

## EXERCICE N°2 *Revoir l'espérance*

200 billets de loterie valant 2 euros chacun sont vendus. Seulement deux billets permettent de gagner un lot : l'un permet de gagner 100 euros, l'autre permet de gagner 50 euros, les autres ne rapportent rien du tout.

On a acheté deux billets. On considère les événements suivants :

- $A$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- $B$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».




**1)** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

**2)** On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

*Indication : il est important de prendre en compte l'argent dépensé pour acheter les billets.*

**3)** Recopier et compléter le tableau suivant.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | | | | |
| Probabilités correspondantes | | | | |

**4)** Calculer l'espérance de $X$ et interpréter le résultat.