

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°1 Résoudre une équation (niveau 0)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1) \quad e^x = 1$$

$$2) \quad e^x = e^{-1}$$

$$3) \quad e^x - e = 0$$

On utilise ici la propriété n°8

$$1) \quad e^x = 1$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $S = \boxed{\{0\}}$

$$2) \quad e^x = e^{-1}$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Ainsi $S = \boxed{\{-1\}}$

$$3) \quad e^x - e = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$$

Ainsi $S = \boxed{\{1\}}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°2 Résoudre une équation (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1) \quad e^{2x+4} = 1$$

$$2) \quad e^{-3x+7} = e^{-2}$$

$$3) \quad e^{x^2} - e = 0$$

On utilise ici la propriété n°8

$$1) \quad e^{2x+4} = 1$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{2x+4} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+4} = e^0 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Ainsi $S = \boxed{[-2]}$

$$2) \quad e^{-3x+7} = e^{-2}$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-3x+7} = e^{-2} \Leftrightarrow -3x+7 = -2 \Leftrightarrow x = 3$$

Ainsi $S = \boxed{[3]}$

$$3) \quad e^{x^2} - e = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 1)$$

Ainsi $S = \boxed{[-1, 1]}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°3 Résoudre une inéquation (niveau 0)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1) $e^x > e$

2) $e^x \leq 0$

3) $e^x < e^{-2}$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^x > e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$$x \in S \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow 2x+4 > 1 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

Ainsi $S = \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$

2) $e^x \leq 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x \leq 0$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive. Soit $x \in \mathbb{R}$,

Ainsi $S = \emptyset$

3) $e^x < e^{-2}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x < e^{-2} \Leftrightarrow x < -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[$$

Ainsi $S =]-\infty, -2[$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°4 Résoudre une inéquation (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1) \quad e^{3x+1} > 1$$

$$2) \quad e^{-2x+1} \geq e^4$$

$$3) \quad e^{2x+1} + e^{5x-7} < 0$$

On utilise ici la remarque n°2

$$1) \quad e^{3x+1} > 1$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{3x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{3x+1} > e^0 \Leftrightarrow 3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$$

Ainsi $S = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$

$$2) \quad e^{-2x+1} \geq e^4$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-2x+1} \geq e^4 \Leftrightarrow -2x+1 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[$$

Ainsi $S = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[$

$$3) \quad e^{2x+1} + e^{5x-7} < 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{2x+1} + e^{5x-7} < 0$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{2x+1} > 0 \text{ et } e^{5x-7} > 0$$

d'où

$$e^{2x+1} + e^{5x-7} > 0$$

On ne risque donc pas de trouver une solution à notre équation...

Ainsi $S = \emptyset$

On reste vigilant

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°5 Résoudre une équation (niveau 2)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $e^x \times e^{2x} = 1$

2) $(e^x)^3 = e$

3) $\frac{e^{3x}}{e^2} = e$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^x \times e^{2x} = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,
 $x \in S \Leftrightarrow e^x \times e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{e^{x+2x}}_{\text{pas utile sur une copie}} = e^0 \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow \underbrace{3x = 0}_{\text{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi $S = [0]$

2) $(e^x)^3 = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow (e^x)^3 = e \Leftrightarrow e^{3x} = e^1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

3) $\frac{e^{3x}}{e^2} = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{e^{3x}}{e^2} = e \Leftrightarrow e^{3x-2} = e^1 \Leftrightarrow 3x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°6 Résoudre une inéquation (niveau 2)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1) \quad e^x(e - e^{-x}) > e^3 - 1$$

$$2) \quad e^{2x-3} \leq e^x \times e^{-7x+2}$$

$$3) \quad e^{x+2}(-e^{-2}+1) \geq -e^x + e^5$$

On utilise ici la remarque n°2

$$1) \quad e^x(e - e^{-x}) > e^3 - 1$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x &\in S \\ \Leftrightarrow e^x(e - e^{-x}) &> e^3 - 1 \\ \Leftrightarrow e^{x+1}-1 &> e^3-1 \\ \Leftrightarrow e^{x+1} &> e^3 \\ \Leftrightarrow x+1 &> 3 \\ \Leftrightarrow x &> 2 \\ \Leftrightarrow x &\in]2 ; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi $S =]2 ; +\infty[$

$$2) \quad e^{2x-3} \leq e^x \times e^{-7x+2}$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x &\in S \\ \Leftrightarrow e^{2x-3} &\leq e^x \times e^{-7x+2} \\ \Leftrightarrow e^{2x-3} &\leq e^{-6x+2} \\ \Leftrightarrow 2x-3 &\leq -6x+2 \\ \Leftrightarrow 8x &\leq 5 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow x &\in \left] -\infty ; \frac{5}{8} \right] \end{aligned}$$

Ainsi $S = \left] -\infty ; \frac{5}{8} \right]$

$$3) \quad e^{x+2}(-e^{-2}+1) \geq -e^x + e^5$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x &\in S \\ \Leftrightarrow e^{x+2}(-e^{-2}+1) &\geq -e^x + e^5 \\ \Leftrightarrow -e^x + e^x &\geq -e^x + e^5 \\ \Leftrightarrow e^x &\geq e^5 \\ \Leftrightarrow x &\geq 5 \\ \Leftrightarrow x &\in [5 ; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi $S = [5 ; +\infty[$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°7 Résoudre une équation (niveau 3)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1) \quad (x+2)(e^x - 1) = 0 \quad 2) \quad (e^{-x} - e)^2 = 0 \quad 3) \quad e^x(-2x+4) = 0$$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

$$1) \quad (x+2)(e^x - 1) = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } e^x = 1)$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } e^x = e^0) \quad \text{pas utile sur une copie}$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 0)$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2 ; 0]$$

Ainsi $S = [-2 ; 0]$

$$2) \quad (e^{-x} - e)^2 = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x} - e)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} - e = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = e$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = e^1 \quad \text{pas utile sur une copie}$$

$$\Leftrightarrow -x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1\}$$

Ainsi $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

$$3) \quad e^x(-2x+4) = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow e^x(-2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x = 0 \text{ ou } -2x+4 = 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2x+4 = 0}_{\text{car } e^x \text{ ne s'annule pas}}$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-2\}$$

Ainsi $S = \{-2\}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°8 Résoudre une inéquation (niveau 4)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $e^x - 3xe^x = 0$

2) $xe^x - x = 0$

3) $-2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0$

4) $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

1) $e^x - 3xe^x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow e^x - 3xe^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(1 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 3x = 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 - 3x = 0}_{\text{car } e^x \neq 0 \text{ ne s'annule pas}}$$

$$\Leftrightarrow -3x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}}$

2) $xe^x - x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow xe^x - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x - 1 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x = 1)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0)$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0\}$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

3) $-2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow -2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1}(-2 + 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad -2 + 5x = 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2 + 5x = 0}_{\text{car } e^x \neq 0 \text{ ne s'annule pas}}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{ \frac{2}{5} \right\}}$

$$4) \quad 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = 0$$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(2x - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \times x(2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x} = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\phantom{x=0 \text{ ou } 2-x=0}}_{\text{car } e^{-x} \text{ ne s'annule pas}} (x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2)$$

$$\Leftrightarrow x \in [0 ; 2]$$

Ainsi $\boxed{S = [0 ; 2]}$