LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi+5\sqrt{3}$

2) $g_1 : x \mapsto x+2$; $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

3) $g_3 : x \mapsto 4x+5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8{,}5$;

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

5) $h_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\dfrac{14}{3}x+33$

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\dfrac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\dfrac{4}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\dfrac{7}{x}$

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a , b , c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi+5\sqrt{3}$

2) $g_1 : x \mapsto x+2$; $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

3) $g_3 : x \mapsto 4x+5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8{,}5$;

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

5) $h_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\dfrac{14}{3}x+33$

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\dfrac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\dfrac{4}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\dfrac{7}{x}$

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$