TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E04C

EXERCICE N°1 ***Savoir retrouver et utiliser les valeurs remarquables***

1.a) Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$ associé à $\frac{91\pi}{4}$.

On doit enlever les « tours inutiles », c'est à dire qu'on cherche l' entier k tel que :

$$-\pi \leqslant \frac{91\pi}{4}-k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} \leqslant \frac{91\pi}{4}-\frac{k\times 8\pi}{4} \leqslant \frac{4\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -95\pi \leqslant -k\times 8\pi \leqslant -87\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{95}{8} \geqslant k \geqslant \frac{87}{8}$$

On en déduit que $k = 11$

puis $\frac{91\pi}{4}-\frac{11\times 8\pi}{4} = \frac{91\pi}{4}-11\times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

et on a bien $-\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$

$\frac{91\pi}{4}-11\times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$,

le réel cherché est donc $\boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

1.b) En déduire $\cos\left(\frac{91\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(\frac{91\pi}{4}\right)$.

- $\cos\left(\frac{91\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+11\times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{91\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}+11\times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculer $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$ et en déduire $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right)$.

On doit enlever les « tours inutiles », c'est à dire qu'on cherche l' entier k tel que :

$$-\pi \leqslant \frac{25\pi}{3}-k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{3} \leqslant \frac{25\pi}{3}-\frac{k\times 6\pi}{3} \leqslant \frac{3\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -3\pi \leqslant 25\pi-k\times 6\pi \leqslant 3\pi$$

$$\Leftrightarrow -28\pi \leqslant -k\times 6\pi \leqslant -22\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{6} \geqslant k \geqslant \frac{22}{6}$$

On en déduit que $k = 4$

- $\frac{25\pi}{3}-4\times 2\pi = \frac{\pi}{3}$,
- $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+4\times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+4\times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Calculer $\sin\left(-\frac{45\pi}{6}\right)$ et en déduire $\cos\left(-\frac{45\pi}{6}\right)$.

$$-\pi \leqslant -\frac{45\pi}{6} - k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow \frac{-6\pi}{6} \leqslant -\frac{45\pi}{6} - \frac{k\times 12\pi}{6} \leqslant \frac{6\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -6\pi \leqslant -45\pi - k\times 12\pi \leqslant 6\pi$$

$$\Leftrightarrow 39\pi \leqslant -k\times 12\pi \leqslant 51\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{39}{12} \geqslant k \geqslant -\frac{51}{12}$$

On en déduit que $k = -4$

On fait bien attention aux signes

- $\frac{-45\pi}{6} + 4\times 2\pi = \frac{\pi}{2}$,
- $\cos\left(\frac{-45\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{-45\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

EXERCICE N°2 ***Les bonnes réponses : pas plus, pas moins***

1) Résoudre sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x) > 1$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x) > 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left]\frac{-\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x) > 1$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x) > 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ ,\ x \in \left]\frac{-\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{-\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[}$

3) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'inéquation $\sqrt{2}\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[}$

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2}\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2}$.

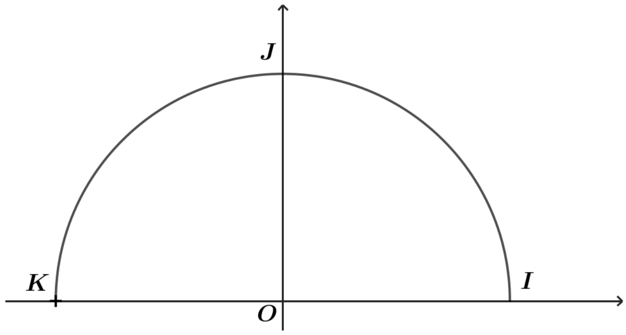
Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[0+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ 2\pi+2k\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[0+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ 2\pi+2k\pi\right[}$

EXERCICE N°3 ***Du concret : Architecture***

Un tennis club possède un gymnase de forme demi-cylindrique, dont un schéma en coupe est représentée ci-après. L'unité graphique est égale à 10 m.



1) On souhaite installer des gradins hauts de 5 m de chaque côté du court central situé à l'intérieur de ce gymnase.

1.a) Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0\ ;\ \pi]$,

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6} \right\}$$

1.b) En déduire les positions limites au sol des gradins.

Il s'agit de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, comme $OI = OK = 10 \text{ m}$, les positions limites se trouvent à $10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ mètres de chaque côté de l'axe du cylindre.

1.c) On décide d'installer une guirlande lumineuse le long du plafond, d'un gradin à l'autre. Quelle longueur de guirlande va-t-on utiliser ?

Il s'agit de calculer la longueur de l'arc de cercle de rayon 10m compris dans l'angle de mesure

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} :$$

$$\frac{10 \times 2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

Ainsi, la guirlande mesurera $\boxed{\frac{20\pi}{3} \text{ m}}$ de long.

2) On décide finalement d'installer une guirlande lumineuse horizontale longue de 10 m au plafond, de manière symétrique par rapport au sommet du gymnase.

2.a) Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$ l'inéquation $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0\ ;\ \pi]$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3} \right]$$

2.b) On admet que la personne qui fixe la guirlande mesure 1,80 m et que ses bras ne doivent pas dépasser le haut de sa tête au moment de l'installation.
En déduire la hauteur minimale de l'échafaudage pour pouvoir exécuter cette manœuvre.

La guirlande va se situer à une hauteur de $10\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3} \text{ m}$.

La hauteur minimale de l'échafaudage est donc de $\boxed{5\sqrt{3} - 1{,}8 \text{ m}} \approx 6{,}86 \text{ m}$.

EXERCICE N°4 Changement de variable, tableau de signes, delta

On considère l'inéquation suivante, d'inconnue réelle x :

$(H) : \sin^2(x) - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0.$

On pose $X = \sin(x)$.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $X^2 - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}X - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0.$

▪ Commençons par factoriser l'expression $X^2 - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}X - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Posons $\Delta = \left(-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 4\times1\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{4} + \sqrt{3} = \dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-\left(-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) - \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}}{2\times1} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{-\left(-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}}{2\times1} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, $X^2 - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}X - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \left(X+\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

▪ Dressons à présent un tableau de signes :

▫ $X + \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow X > -\dfrac{1}{2}$

▫ $X - \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow X > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

X	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$X+\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$X-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ +\infty\right[}$

2) En déduire les solutions de l'inéquation (H).

Notons S l'ensemble des solutions de (H) . Pour $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow \sin^2(x) - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0$

$x \in S \Leftrightarrow \left(\sin(x)+\dfrac{1}{2}\right)\left(\sin(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sin(x) \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ +\infty\right[$

$\Leftrightarrow \left(\ \sin(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}\ \text{ ou }\ \sin(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \right)$

Traitons ces deux cas séparément :

1^er cas :

$$\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]$$

2^e cas :

$$\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$

On en déduit que :

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\right)}$$

Pour ceux qui ne voudraient pas raisonner séparément :

$$x \in S \Leftrightarrow \sin^2(x)-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0$$

$$x \in S \Leftrightarrow \left(\sin(x)+\frac{1}{2}\right)\left(\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\exists\ p \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right]\right) ou \left(\exists\ q \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-5\pi}{6}+2p\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2p\pi\right] \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2q\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2q\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\right)$$