FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E06

EXERCICE N°1 Deux nouvelles identités remarquables

Le but :

Soit x et a deux nombres réels, $a \neq 0$ et n un entier naturel , $n \geqslant 2$
On veut factoriser $x^n - a^n$

Pour $n = 2$, on sait faire : $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$
Pour $n = 3$, on connaît la méthode de Horner :

1) En remarquant que a est une racine évidente de $x^3 - a^3$, factoriser $x^3 - a^3$.
Pour $n = 4$, on peut … encore appliquer la méthode de Horner :

2) En remarquant que a est une racine évidente de $x^4 - a^4$, factoriser $x^4 - a^4$.

Remarque n°1.

On pourrait factoriser $x^5 - a^5$, mais on a compris que la méthode de Horner va fonctionner quelque soit la valeur de n …

Faisons plutôt fonctionner la méthode sur un exemple :

3) Factoriser $x^7 - 5^7$

Passons à la justification de la formule générale :
(pour que les notations suivantes soient correctes, on suppose $n > 2$) :

4) Développer et réduire l'expression suivante :
$(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1})$

Remarque n°2.

On dit que les termes se télescopent (retenez cela pour la suite de vos études…)

On retient donc notre première nouvelle identité remarquable :

$$\boxed{x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1})}$$

Le cas particulier où $a = 1$

5) Réécrire la formule précédente pour $a = 1$ (que l'on retiendra également)

On applique :

6) Factoriser $x^{11} - 1$

Jouer avec les méthodes

7) En remarquant $x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2$ proposer une factorisation $x^6 - a^6$