LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in [5\ ;\ 20]$ **2)** $x \in [1000\ ;\ 2000]$ **3)** $x \in [-4\ ;\ -1]$

4) $x \in [-5000\ ;\ -3000]$ **5)** $x \in [10^6\ ;\ 10^{15}]$ **6)** $x \in \left[-\dfrac{3}{5}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

1)

Commençons par remarquer que $[5\ ;\ 20] \subset \left]0\ ;\ +\infty\right[$

Vous ne savez plus comment se lit « $\subset$ » ? Voir ici

Or la fonction inverse est décroissante sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [5\ ;\ 20] \Leftrightarrow 5 \leqslant x \leqslant 20 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{20} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{20}\ ;\ \frac{1}{5}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[\dfrac{1}{20}\ ;\ \dfrac{1}{5}\right]}$

On n'oublie pas que quand on écrit un intervalle, on prend la bonne habitude d'écrire les bornes dans l'ordre croissant...

2)

Commençons par remarquer que $[1000\ ;\ 2000] \subset \left]0\ ;\ +\infty\right[$

Or la fonction inverse est décroissante sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [1000\ ;\ 2000] \Leftrightarrow 1000 \leqslant x \leqslant 2000 \Leftrightarrow \frac{1}{1000} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2000} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2000}\ ;\ \frac{1}{1000}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[\dfrac{1}{2000}\ ;\ \dfrac{1}{1000}\right]}$

3)

Commençons par remarquer que $[-4\ ;\ -1] \subset \left]0\ ;\ +\infty\right[$

Or la fonction inverse est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [1000\ ;\ 2000] \Leftrightarrow 1000 \leqslant x \leqslant 2000 \Leftrightarrow \frac{1}{1000} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2000} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{1000}\ ;\ \frac{1}{2000}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[-1\ ;\ -\dfrac{1}{4}\right]}$

4)

Commençons par remarquer que $[-5000\ ;\ -3000] \subset \left]-\infty\ ;\ 0\right[$

Or la fonction inverse est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [-5000\ ;\ -3000] \Leftrightarrow -5000 \leqslant x \leqslant -3000$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-5000} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{-3000} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3000}\ ;\ -\frac{1}{5000}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[-\dfrac{1}{3000}\ ;\ -\dfrac{1}{5000}\right]}$

5)

Commençons par remarquer que $[10^6\ ;\ 10^{15}] \subset]0\ ;\ +\infty[$

Or la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [10^6\ ;\ 10^{15}] \Leftrightarrow 10^6 \leqslant x \leqslant 10^{15} \Leftrightarrow \frac{1}{10^6} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{10^{15}}$$

$$\Leftrightarrow 10^{-6} \leqslant x \leqslant 10^{-15} \Leftrightarrow x \in \left[10^{-15}\ ;\ 10^{-6}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[10^{-15}\ ;\ 10^{-6}\right]}$

6)

Commençons par remarquer que $\left[-\frac{3}{5}\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \subset]-\infty\ ;\ 0[$

Or la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$

Donc on peut écrire les équivalences suivantes :

$$x \in [-5000\ ;\ -3000] \Leftrightarrow -5000 \leqslant x \leqslant -3000$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-5000} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{-3000} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3000}\ ;\ -\frac{1}{5000}\right]$$

Ainsi $\boxed{x \in \left[-2\ ;\ -\frac{5}{3}\right]}$

$$\frac{1}{-\frac{3}{5}} = 1 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 \times \left(-\frac{2}{1}\right) = -\frac{2}{1} = -2$$

Notez la place du « = » qui détermine le trait de fraction principal et souvenez-vous : diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{10} < x < 1$

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1) $\frac{1}{x} > 10$ **2)** $1 < \frac{1}{x} \leqslant 10$ **3)** $0 < \frac{1}{x} < 100$

Commençons par la remarque suivante :

On l'écrit avant de commencer les questions car cela va nous être utile dans chaque question. Cela suppose que l'on a réfléchi au brouillon avant de commencer la rédaction de l'exercice...comme à chaque fois..

$\frac{1}{10} < x < 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{10} ; 1\right[$

Or $\left]\frac{1}{10} ; 1\right] \subset [0 ; +\infty[$ et la fonction inverse est décroissante sur ce dernier intervalle.

Donc elle est bien sûr décroissante sur le premier car il est inclus dedans.

Donc $\frac{1}{x} \in]1 ; 10[$

Reprenez la méthode de l'exercice précédent afin de lever vos doutes...

1)

Faux

Nous savons que $\frac{1}{x} \in]1 ; 10[\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x} < 10$

Cela contredit clairement l'affirmation.

2)

Vrai

Nous savons que $1 < \frac{1}{x} \leqslant 10 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]1 ; 10]$

Or $]1 ; 10[\subset]1 ; 10]$

3)

Vrai

Nous savons que $0 < \frac{1}{x} < 100 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]0 ; 100[$

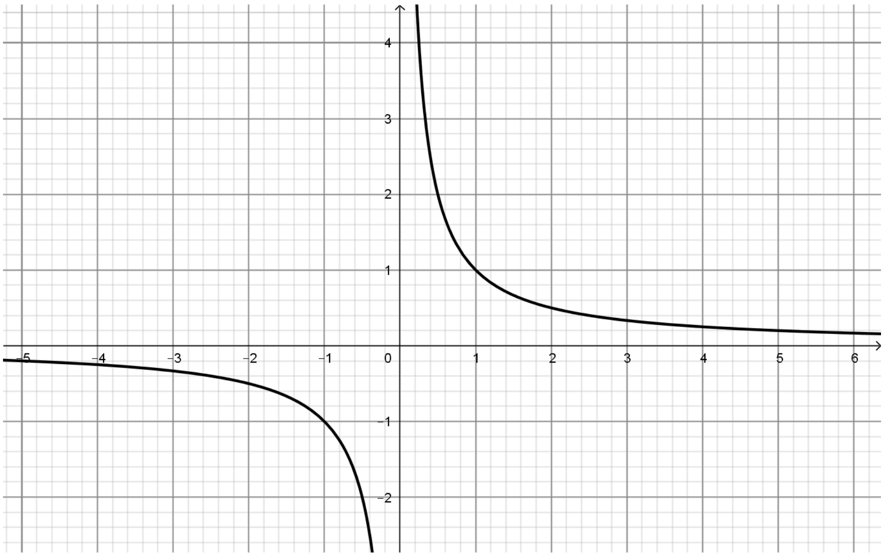
Or $\frac{1}{x} \in]1 ; 10[$ et $]1 ; 10[\subset]0 ; 100[$

Et donc comme « $\frac{1}{x}$ est dans $]1 ; 10[$ il est forcément dans $]0 ; 100[$ »

Il est FONDAMENTAL que ceci soit clair dans votre esprit.

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°3 *(Le corrigé)*



Résoudre graphiquement :

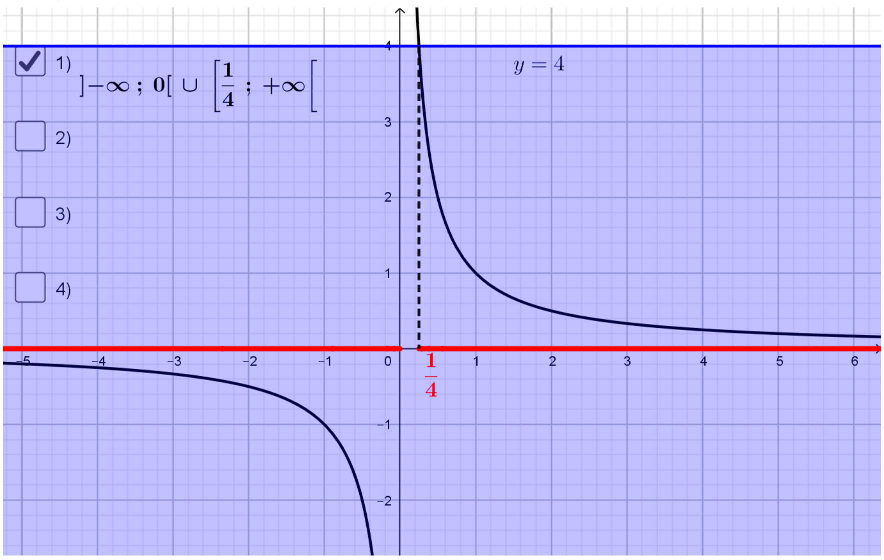
1) $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\dfrac{1}{x} < -2$

4) $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{2}$

1)



Résoudre graphiquement :

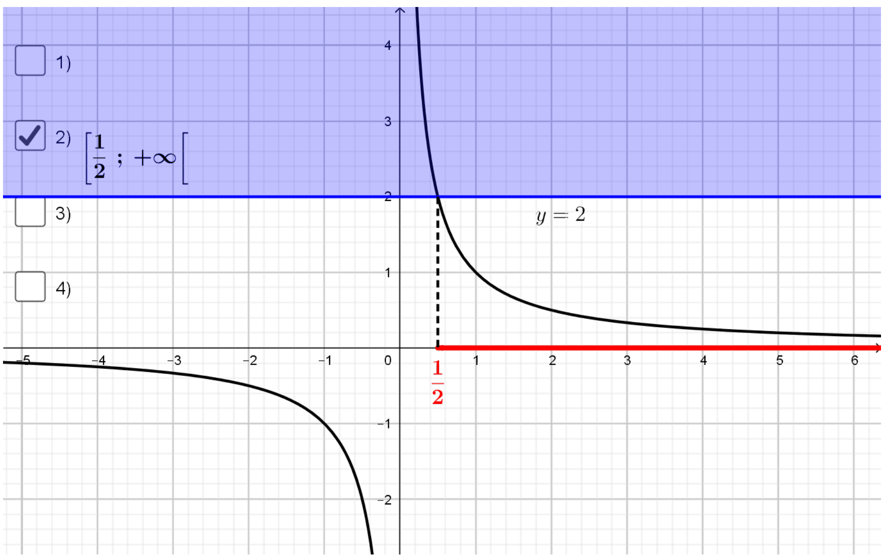
1) $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\dfrac{1}{x} < -2$

4) $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{2}$

2)



Résoudre graphiquement :

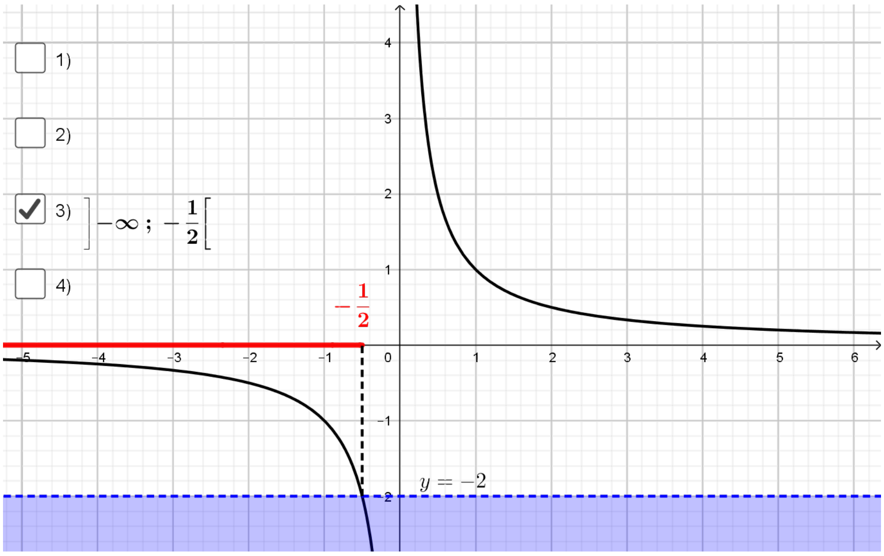
1) $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\dfrac{1}{x} < -2$

4) $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{2}$

3)



Résoudre graphiquement :

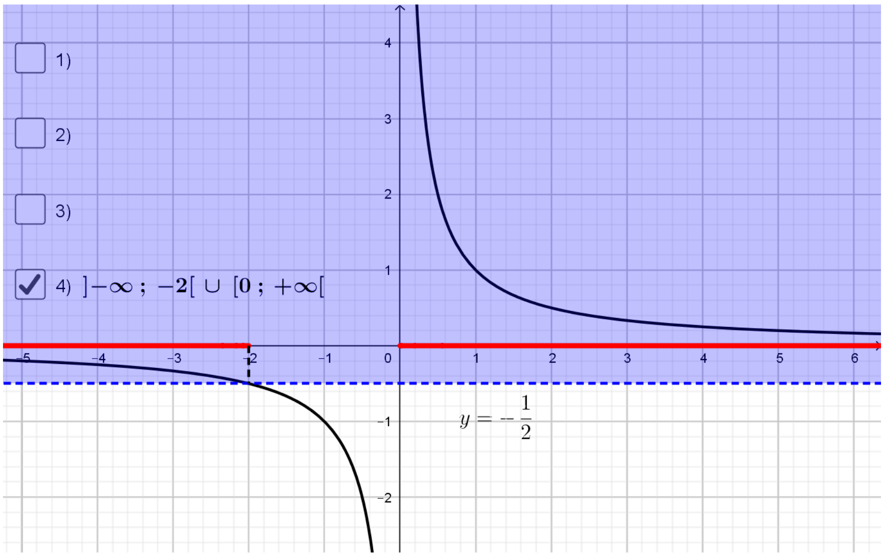
1) $\frac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\frac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\frac{1}{x} < -2$

4) $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

4)



Résoudre graphiquement :

1) $\frac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\frac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\frac{1}{x} < -2$

4) $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

EXERCICE N°4 *(Le corrigé)*

Résoudre les équations suivantes pour tout réel x non nul.

1) $\dfrac{-3}{x}=0$ **2)** $\dfrac{4}{x}=\dfrac{3}{x}+2$ **3)** $-\dfrac{5}{x}+2=\dfrac{3}{x}-1$ **4)** $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{2}=0$

L'énoncé nous précise que $x\neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

1)

$\dfrac{-3}{x}=0$ n'admet aucune solution.

L'énoncé nous précise que $x\neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

2)

$\dfrac{4}{x}=\dfrac{3}{x}+2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Valable car } x\neq 0} 1=2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=x$

L'équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } \dfrac{1}{2}}$

Au cas où : $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{x}+2-\dfrac{3}{x}$

L'énoncé nous précise que $x\neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

3)

$-\dfrac{5}{x}+2=\dfrac{3}{x}-1 \Leftrightarrow 3=\dfrac{8}{x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Valable car } x\neq 0} 3x=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$

L'équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } \dfrac{8}{3}}$

Au cas où : $-\dfrac{5}{x}+2+\dfrac{5}{x}+1=\dfrac{3}{x}-1+1+\dfrac{5}{x}$

L'énoncé nous précise que $x\neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

4)

$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x}=-\dfrac{1}{2} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{Valable car } x\neq 0\\ \text{et penser aux produits en croix}}} 8=-x \Leftrightarrow -8=x$

L'équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } -8}$

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°5 ***(Le corrigé)***

Résoudre les inéquations suivantes pour tout nombre réel x non nuls.

1) $\dfrac{2}{x} \leqslant 3$ **2)** $-\dfrac{3}{x} > 6$ **3)** $-\dfrac{1}{x} + 3 \geqslant 0$ **4)** $\dfrac{3}{x} + 1 \leqslant \dfrac{4}{x}$

L'énoncé nous précise que $x \neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

1)

On aimerait utiliser la propriété n°2 de ce cours et multiplier chaque membre par x .
Seulement voilà, on ne connaît pas le signe du nombre qui se cache derrière x .
S'il est positif, l'inégalité ne changera pas de sens et s'il est négatif alors il y aura changement.
On doit donc traiter les cas séparément.

- Pour $x < 0$:

$\dfrac{2}{x}$ est toujours négatif et donc $\dfrac{2}{x} \leqslant 3$ est toujours vraie.

On en déduit que l'intervalle $]-\infty \ ; 0[$ fait partie de l'ensemble des solutions.
(souvenez-vous des intervalles : toujours le même cours)

- Pour $x > 0$:

$$\frac{2}{x} \leqslant 3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ x>0\ justement} 2 \leqslant 3x \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ 3>0} \frac{2}{3} \leqslant x$$

On en déduit que $\left]0 \ ; \dfrac{2}{3}\right]$ fait partie de l'ensemble des solutions.

Hé oui : $0 < x \leqslant \dfrac{2}{3}$

On peut donc « recoller les morceaux » pour donner l'ensemble des solutions

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{]-\infty \ ; 0[\cup \left]0 \ ; \dfrac{2}{3}\right]}$

L'énoncé nous précise que $x \neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

2)

Vous l'aurez compris, on va procéder de la même façon :

- Pour $x < 0$:

$$\frac{-3}{x} > 6 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ x<0\ justement} -3 > 6x \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ 6>0} -\frac{3}{6} > x \Leftrightarrow -0{,}5 > x$$

On en déduit que $]-\infty \ ; -0{,}5[$ fait partie de l'ensemble des solutions.

- Pour $x > 0$:

$\dfrac{-3}{x}$ est toujours négatif et donc $-\dfrac{3}{x} > 6$ est toujours fausse.

Il n'y a donc pas de solution à ajouter à notre ensemble.

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est $\boxed{]-\infty \ ; -0{,}5[}$.

L'énoncé nous précise que $x \neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

3)

▪ Pour $x < 0$:

$$-\frac{1}{x}+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geqslant -3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, x<0} -1 \leqslant -3x \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, -3<0} \frac{-1}{-3} \geqslant x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geqslant x$$

Mais comme de toute façon $x < 0$ … On en déduit que $]-\infty\ ;\ 0[$ fait partie de l'ensemble des solutions. Attention, on ne peut rien dire de plus à ce stade.

▪ Pour $x > 0$:

$$-\frac{1}{x}+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geqslant -3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, x>0} -1 \geqslant -3x \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, -3<0} \frac{-1}{-3} \leqslant x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geqslant x$$

On en déduit que $\left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ fait partie de l'ensemble des solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est . $\boxed{]-\infty\ ;\ 0[\cup \left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[}$

L'énoncé nous précise que $x \neq 0$, il n'est donc pas nécessaire de le rappeler à chaque question.
Pour le faites-vous alors ! ?
Parce qu'il faut insister pendant l'apprentissage !
Par contre, au cas où, on garde à l'esprit qu'il faut vérifier si il n'y pas d'autres valeurs interdites.

4)

▪ Pour $x < 0$:

$$\frac{3}{x}+1 \leqslant \frac{4}{x} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, x<0} x \geqslant 1$$

On en déduit que $\frac{3}{x}+1 \leqslant \frac{4}{x}$ est toujours fausse.
Il n'y a donc pas de solution à ajouter à notre ensemble.

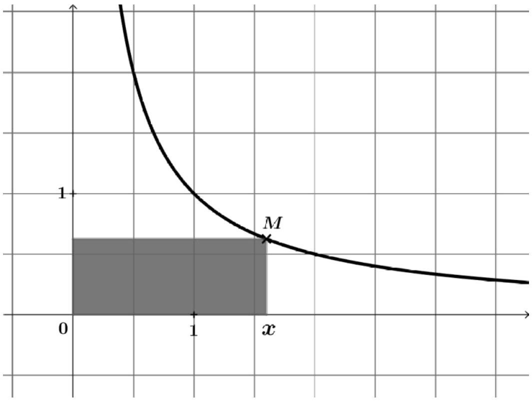
▪ Pour $x > 0$:

$$\frac{3}{x}+1 \leqslant \frac{4}{x} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, x>0} x \leqslant 1$$

On en déduit que $]0\ ;\ 1]$ fait partie de l'ensemble des solutions.
Et comme il n'y a rien d'autre…

On ne déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est $\boxed{]0\ ;\ 1]}$

EXERCICE N°6



On considère un point variable M sur la branche de l'hyperbole représentant la fonction inverse définie par :

$f(x)=\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

Comment l'aire du rectangle grisé évolue-t-elle lorsque M se déplace sur la branche de l'hyperbole ?

L'aire est constante, égale à 1.

… heu…

Que nous demande-t-on ?

L'aire d'un rectangle !

Comment cela se calcule-t-il ?

Longueur fois largeur !

Que vaut la longueur ?

Facile, elle vaut x !

Que vaut la largeur (on pourrait parler de « hauteur » ici) ?

Heu…l'ordonnée de M ? … Bravo

Quelle est l'ordonnée de M ?

Heu… M appartient à la courbe représentative de la fonction inverse et son abscisse vaut x donc son ordonnée vaut $\frac{1}{x}$ …

Super !

Et… ?

$x\times\frac{1}{x}=1$

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°1

En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in [5 \; ; \; 20]$ **2)** $x \in [1000 \; ; \; 2000]$ **3)** $x \in [-4 \; ; \; -1]$

4) $x \in [-5000 \; ; \; -3000]$ **5)** $x \in [10^6 \; ; \; 10^{15}]$ **6)** $x \in \left[-\frac{3}{5} \; ; \; -\frac{1}{2}\right]$

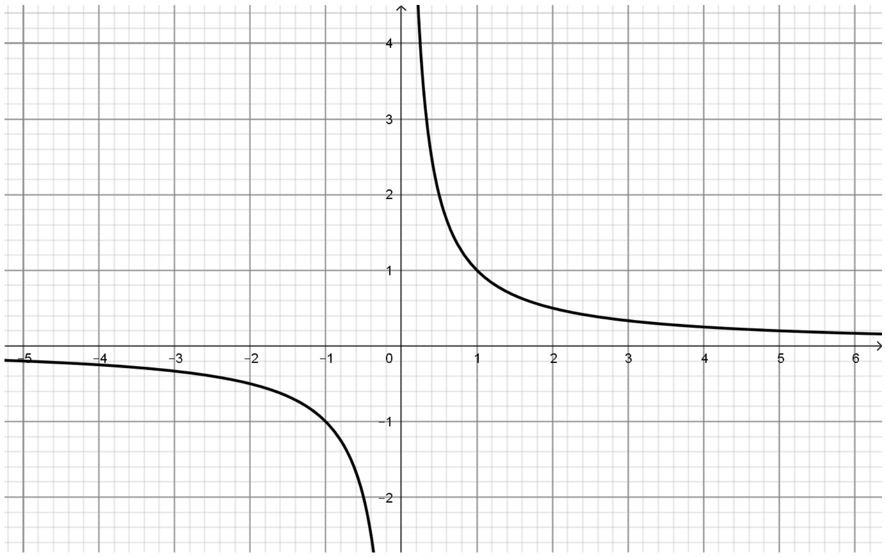
EXERCICE N°2

Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{10} < x < 1$

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1) $\frac{1}{x} > 10$ **2)** $1 < \frac{1}{x} \leqslant 10$ **3)** $0 < \frac{1}{x} < 100$

EXERCICE N°3



Résoudre graphiquement :

1) $\frac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\frac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\frac{1}{x} < -2$

4) $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

EXERCICE N°4

Résoudre les équations suivantes pour tout réel x non nul.

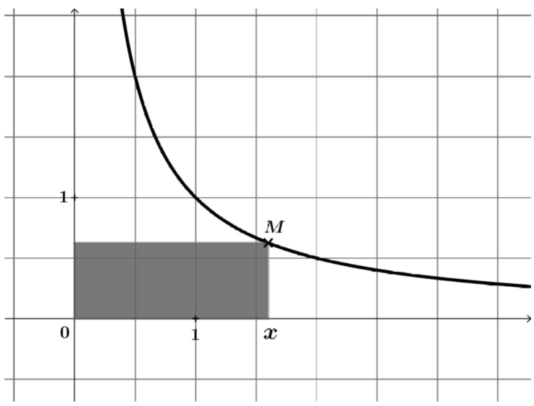
1) $\frac{-3}{x} = 0$ **2)** $\frac{4}{x} = \frac{3}{x} + 2$ **3)** $-\frac{5}{x} + 2 = \frac{3}{x} - 1$ **4)** $\frac{4}{x} + \frac{1}{2} = 0$

EXERCICE N°5

Résoudre les inéquations suivantes pour tout nombre réel x non nuls.

1) $\frac{2}{x} \leqslant 3$ **2)** $-\frac{3}{x} > 6$ **3)** $-\frac{1}{x} + 3 \geqslant 0$ **4)** $\frac{3}{x} + 1 \leqslant \frac{4}{x}$

EXERCICE N°6



On considère un point variable M sur la branche de l'hyperbole représentant la fonction inverse définie par :

$f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0 \; ; \; +\infty[$

Comment l'aire du rectangle grisé évolue-t-elle lorsque M se déplace sur la branche de l'hyperbole ?