

LA FONCTION EXPONENTIELLE

I Introduction

Nous allons tenter de résoudre une équation fonctionnelle, c'est à dire que l'on cherche toutes les fonctions vérifiant une condition donnée. On cherche les fonctions f définies sur \mathbb{R} qui vérifient la propriété suivante :

La condition $\rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

En français, on cherche les fonctions qui sont égales à leur dérivée et pour lesquelles l'image de 0 vaut 1.

Propriété n°1. Si une telle fonction existe alors elle ne s'annule pas

Si f est une fonction, définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

preuve :

▪ Soit f une telle fonction. Construisons la fonction h définie également sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) \times f(-x)$

▪ Montrons que h est dérivable sur \mathbb{R} :

$x \mapsto -x$ et f sont dérivables sur \mathbb{R} dont leur composée $g : x \mapsto f(-x)$ l'est aussi.

h étant le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , elle est dérivable sur \mathbb{R} .

▪ Montrons que h' est nulle :

On peut écrire que $h = f \times g$ et donc $h' = f' \times g + f \times g'$.

C'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= f'(x)f(x) - f(x)f'(x) && (\text{car } g'(x) = -f'(-x)) \\ &= f(x)f(x) - f(x)f(x) && (\text{car } f' = f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante égale à 1.

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc h est constante sur \mathbb{R} .

De plus $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$

▪ Montrons que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors on aurait $h(x) = 0$ ce qui est impossible.

Propriété n°2. Si une telle fonction existe alors elle est unique

Si f est une fonction, définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } f \text{ est unique.}$$

preuve :

▪ Soit f et g deux fonctions vérifiant la condition. Nous allons montrer qu'alors $f = g$.

▪ Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(h est bien définie car g ne s'annule pas d'après la propriété n°1)

▪ Montrons que h' est nulle :

f et g étant des fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui ne s'annulent pas, leur quotient $h = \frac{f}{g}$ est également dérivable sur \mathbb{R} et,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \\ h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ vérifient la condition}) \\ &= 0\end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante, égale à 1.

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc h est constante.

$$\text{De plus } h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.

▪ Montrons que $f = g$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$$

$$\text{Or, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = g(x)$$

Remarque n°1. Une telle fonction existe bien et nous allons l'étudier.

La preuve est admise en première mais nous en verrons une idée...

II La fonction Exponentielle et quelques-unes de ses propriétés

Définition n°1.

On appelle fonction Exponentielle et on note \exp l'unique fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Propriété n°3. La fonction \exp ne s'annule pas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$$

preuve :

Faite en introduction

Propriété n°4. L'exponentielle de la somme égale le produit des exponentielles

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

preuve :

$$\text{Soit } b \in \mathbb{R}, \text{ et } f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) \end{cases}$$

▪ Montrons que f est dérivable sur \mathbb{R}

Les fonctions \exp et $x \mapsto x+b$ sont dérivables sur \mathbb{R} donc leur composée aussi. f est ainsi dérivable sur \mathbb{R} .

▪ Montrons que $f' = f$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = f(x)$$

▪ Montrons que $f(0) = 1$

$$f(0) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$$

▪ Utilisons l'unicité de la fonction exponentielle pour montrer que $f = \exp$.

La fonction f vérifie la condition $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c'est donc la fonction \exp .

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \exp(x)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b) \quad \text{cqfd}$$

Propriété n°5. l'inverse de l'exponentielle égale l'exponentielle de l'opposé

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

puis en divisant chaque membre par le nombre $\exp(x)$ qui est non nul :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{cqfd}$$

Propriété n°6. La fonction \exp est strictement positive sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Propriété n°7. La fonction \exp et ses puissances $n^{\text{ième}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$(\exp(a))^n = \exp(na)$$

preuve :

▪ Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(na).$$

▪ On a :

$$u_0 = \exp(0 \times a) = 1$$

▪ Et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = u_n \times \exp(a)$$

▪ On reconnaît une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \exp(a)$.

▪ Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (\exp(a))^n$$

En identifiant terme à terme, on obtient le résultat.

cqfd.

III Le comportement de la fonction exponentielle.

Propriété n°8. La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R}

La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

preuve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) > 0 \quad (\text{d'après la propriété n°6})$$

La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive sur l'intervalle \mathbb{R} donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R} .

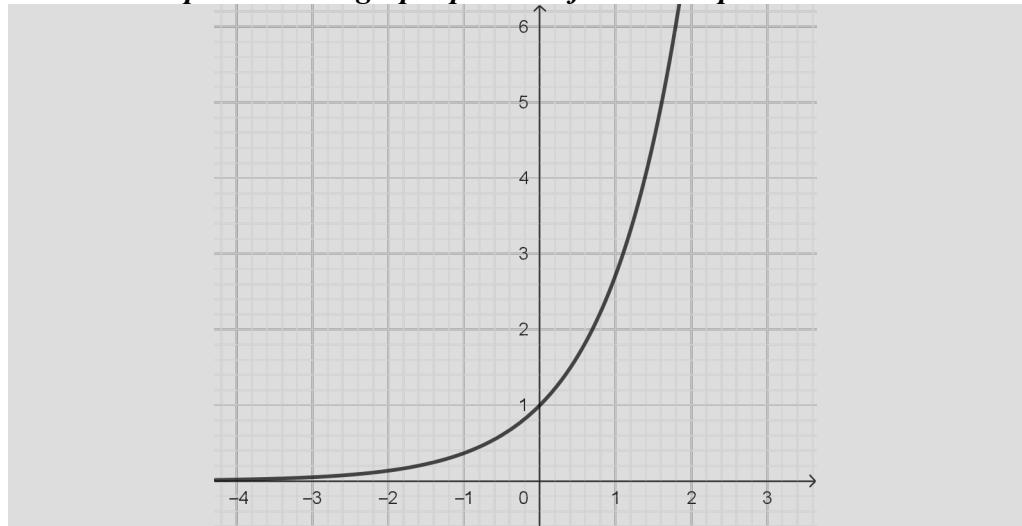
Remarque n°2.

La propriété n°8, nous permet d'affirmer que si un nombre admet un antécédent par la fonction \exp alors cet antécédent est unique. C'est, par exemple, utile pour montrer l'unicité d'une solution dans une équation...

Remarque n°3.

Je sais, c'est pénible ces « sur l'intervalle \mathbb{R} » mais c'est essentiel !

Connaissance n°1 La représentation graphique de la fonction exponentielle.



IV Une nouvelle notation pour la fonction exponentielle

Remarque n°4.

Les propriétés n°4, n°5 et n°8 nous rappellent les propriétés sur les puissances. Par exemple,

$$7^{2+3} = 7^2 \times 7^3 \text{ ressemble beaucoup à } \exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$$

Comme $7^1 = 7$, on est tenté de regarder $\exp(1)$. Ce nombre n'est malheureusement pas entier, ce n'est même pas une fraction (vous le démontrerez un jour) mais il est aussi important que le nombre π . Pour cela, on va lui donner un nom.

Définition n°2.

- On note e le nombre $\exp(1)$
- On a : $e \approx 2,71828$
- Pour tout réel x , on pose $e^x = \exp(x)$

Remarque n°5. Résumé des propriétés avec la nouvelle notation

Soit a et b des réels et n un entier naturel.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \text{ et } e^{na} = (e^a)^n$$

V Le résumé du cours

La définition de
exp

On appelle fonction Exponentielle et on note \exp l'unique fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

exp ne s'annule
pas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$$

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

exp est strictement
positive

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

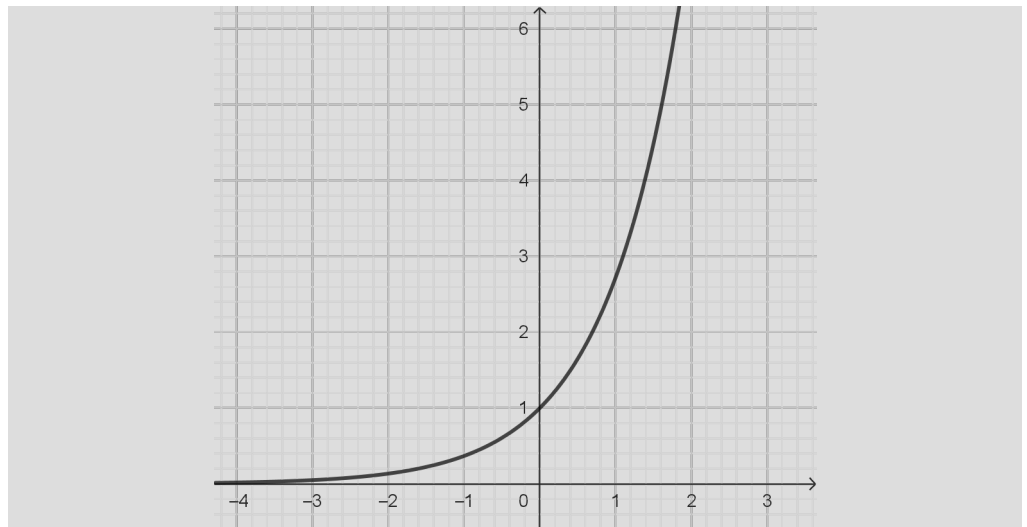
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$(\exp(a))^n = \exp(na)$$

exp est strictement
croissante

La fonction exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Représentation
graphique de exp



Nouvelle notation de
exp

▪ On note e le nombre $\exp(1)$

▪ On a : $e \approx 2,71828$

▪ Pour tout réel x , on pose $e^x = \exp(x)$

Propriétés algébriques
de exp

Soit a et b des réels et n un entier naturel.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad \text{et} \quad e^{na} = (e^a)^n$$