LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

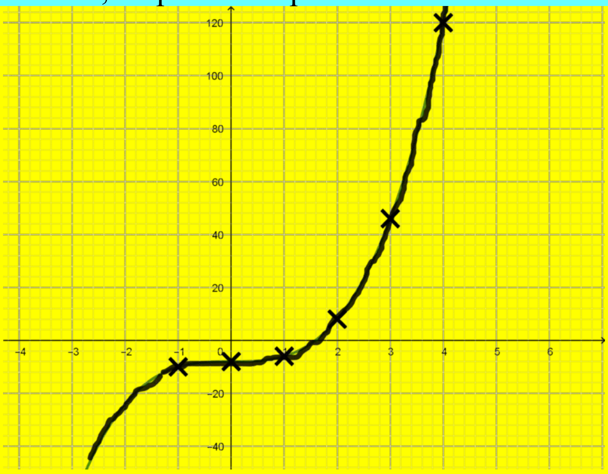
On veut résoudre graphiquement l'équation $2x^3-8=0$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction cube.

Avec la calculatrice, on crée une table de valeur
Avec une TI : en vidéo
Avec une casio graph 35 : en vidéo
Avec une casio collège fx92 : en vidéo
- Méthode « old school »
Premier essai avec un pas (step) de 1

x	-1	0	1	2	3	4	…	…	…
$2x^3-8$	-10	-8	-6	8	46	120			

Le repère orthonormé n'est pas une bonne idée… On se dirige donc vers un repère orthogonal.
(Vous vous souvenez de la différence ?... Évidemment monsieur !)
Choisissons plutôt, 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnées.
Et comme la croissance a l'air moins rapide entre 0 et 2, on va faire un deuxième tableau avec un pas plus petit…
avec un pas de 0,5 (faites le) c'est pas mal mais on voit qu'il y une forte accélération entre 1,5 et 2
On fait donc un troisième tableau avec un pas de 0,1.
On commence à y voir plus clair, on peut alors procéder au tracé.



Méthode « in » (je suis preneur d'une traduction du contraire de « old school » : monsieur.szczebara@gmail.com merci par avance à mes élèves;))

On va utiliser geogebra (vous pouvez l'installer sur votre téléphone ; version6 ou sur votre ordinateur version 6 ou 5 : tous les fichiers que je vous propose sont faits avec la version 5)

Un petit tuto pour cela.
Et un autre de ma part avec geogebra 5 (soyez indulgent!)

2) Montrer que la résolution de l'équation donnée se ramène à résoudre l'équation $x^3=4$.

$2x^3-8=0 \Leftrightarrow 2x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = 4$ (On travaille dans $\mathbb{R}$)

3) Résoudre graphiquement cette dernière équation et donner la(les) solution(s) au dixième près.

En vidéo

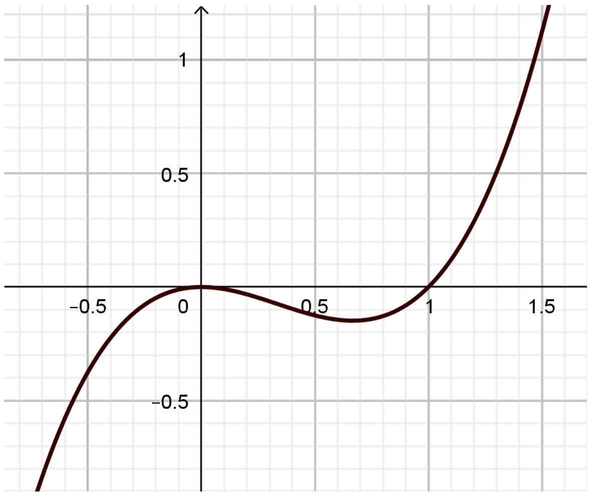
On trouve une solution qui est environ 1,8

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°2 ***(Le corrigé)***

On considère la fonction f définie pour tout réel par $f(x)=x^3-x^2$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



1) Conjecturer graphiquement les solutions l'équation $f(x)=0$.

La courbe coupe l'axe des abscisses en 0 et 1 . On peut donc penser que les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont **0 et 1**

2) Démontrer la conjecture précédente.

Nous allons résoudre l'équation $f(x)=0$

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3-x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-1)=0$$

(un produit de facteurs est nuls si et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul)

x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0)$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1)$$

(hé mais le carré a disparu ! Ah oui : propriété n°6)

Les solutions sont donc 0 et 1 .

(On peut aussi écrire : « l'ensemble des solutions est $\{0 ; 1\}$ »)

3) En utilisant le graphique, déterminer le signe de $f(x)$.

La courbe est « en dessous de l'axe des abscisses » jusque 1, puis est au dessus. Il y a aussi deux points de contact avec l'axe des abscisses qui ont pour abscisse respectives 0 et 1 .

On en déduit que :

$f(x)$ est strictement négative sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 1[$

$f(x)$ est strictement positive sur $]1 ; +\infty[$

$f(x)$ vaut zéro sur $\{0 ; 1\}$

4) Démontrer la conjecture graphique de la question 3.

On va dresser un tableau de signes.

$f(x) = x^2(x-1) = x\times x\times(x-1)$

- $x > 0$ quand $x > 0$ (Bah oui)
- $x > 0$ quand $x > 0$ (Encore !)
- $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

La dernière ligne du tableau nous donne le signe de $f(x)$

Remarque 1 : Vous avez pu constaté que certaines lignes peuvent paraître inutiles. Nous sommes encore en formation donc on applique la méthode à la lettre pour s'en souvenir.

Remarque 2 :
On pourra aller plus vite plus tard :

$x^2 > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 0)$
$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

La dernière ligne du tableau nous donne le signe de $f(x)$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$

La droite d'équation $y=1$ et la courbe ont un seul point d'intersection dont l'abscisse est entre $1{,}4$ et $1{,}5$

6) En utilisant le graphique, donner le tableau variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$

7) Calculer les valeurs exactes de $f(1{,}46)$ et $f(1{,}47)$ En utilisant la question 6, justifier que la solution de l'équation $f(x)=1$ est comprise entre $1{,}46$ et $1{,}47$.

Avec la calculatrice :
$f(1{,}46) = 0{,}980536$
$f(1{,}47) = 1{,}015623$

$f(1{,}46) < f(x)=1$
Comme f est strictement croissante d'après la question 6, on en déduit que $1{,}46 < x$
(sinon on ne peut pas avoir $f(1{,}46) < f(x)$ car f conserve les inégalités)

De la même façon : $x < 1{,}47$
Ainsi $1{,}46 < x < 1{,}47$

Remarque : Plus tard, vous verrez qu'il manque en fait un argument essentiel qui est la continuité de la fonction (En première approche : on a pas besoin de lever le crayon pour dessiner sa représentation graphique) mais cela n'est pas exigible à notre niveau.

8) En utilisant la calculatrice, déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-4} qui contient solution de l'équation $f(x)=1$.

On sait que $1{,}46 < x < 1{,}47$, on va donc faire une première table des valeurs de $f(x)$ avec un pas 10^{-3}

X	Y1
1.464	0.9944
1.465	0.9979
1.466	1.0015
1.467	1.005

On en déduit que $1{,}465 < x < 1{,}466$

On fait ensuite une seconde table avec un pas de 10^{-4}

X	Y1
1.4654	0.9993
1.4655	0.9997
1.4656	1.0001
1.4657	1.0004

$1{,}4655 < x < 1{,}4656$

Remarque : Vous pouvez faire directement la table avec un pas de 10^{-4} (essayez vous verrez ce qui est le plus pratique)

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°3 Objectif Spé (Le corrigé)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 \leqslant 8x$.

L'erreur à ne pas commettre est de diviser par $2x$ chaque membre de l'inéquation.
Pourquoi ? Car $2x$ ne garde pas un signe constant et on ne peut donc pas savoir si il faut ou non changer le sens de l'inégalité.
L'idée est d'essayer d'obtenir une équation produit.

$$\begin{aligned} & 2x^3 \leqslant 8x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^3-8x \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(x^2-4) \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(x+2)(x-2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

- $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (souvenez-vous, on cherche où mettre les « + »)
- $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$2x$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$x-2$		$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$2x^3-8x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble S des solutions est : $\boxed{S =]-\infty\ ;\ -2] \cup [0\ ;\ 2]}$

2) On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3+x+6 \geqslant 4x^2$.

2.a) Développer et réduire l'expression $(x+1)(x-2)(x-3)$.

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-2)(x-3) \\ =\ & (x+1)[x^2-5x+6] \\ =\ & x^3-4x^2+x+6 \end{aligned}$$

2.b) En déduire la résolution de l'inéquation proposée.

$$\begin{aligned} & x^3+x+6 \geqslant 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-4x^2+x+6 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(x-2)(x-3) \geqslant 0 \end{aligned}$$

- $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$x-3$		$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
x^3-4x^2+x+6		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble S des solutions est : $\boxed{S = [-1\ ;\ 2] \cup [3\ ;\ +\infty[}$

3) Inventez votre inéquation à résoudre et donnez-en la correction.

On part de $(ax+b)(cx+d)(ex+f)$ (choisissez les valeurs de a, b, c, d, e et f)
On développe et réduit, on choisit un type d'inégalité et hop !
On n'oublie pas la question 2a) sinon l'exercice devient nettement plus (trop) difficile.