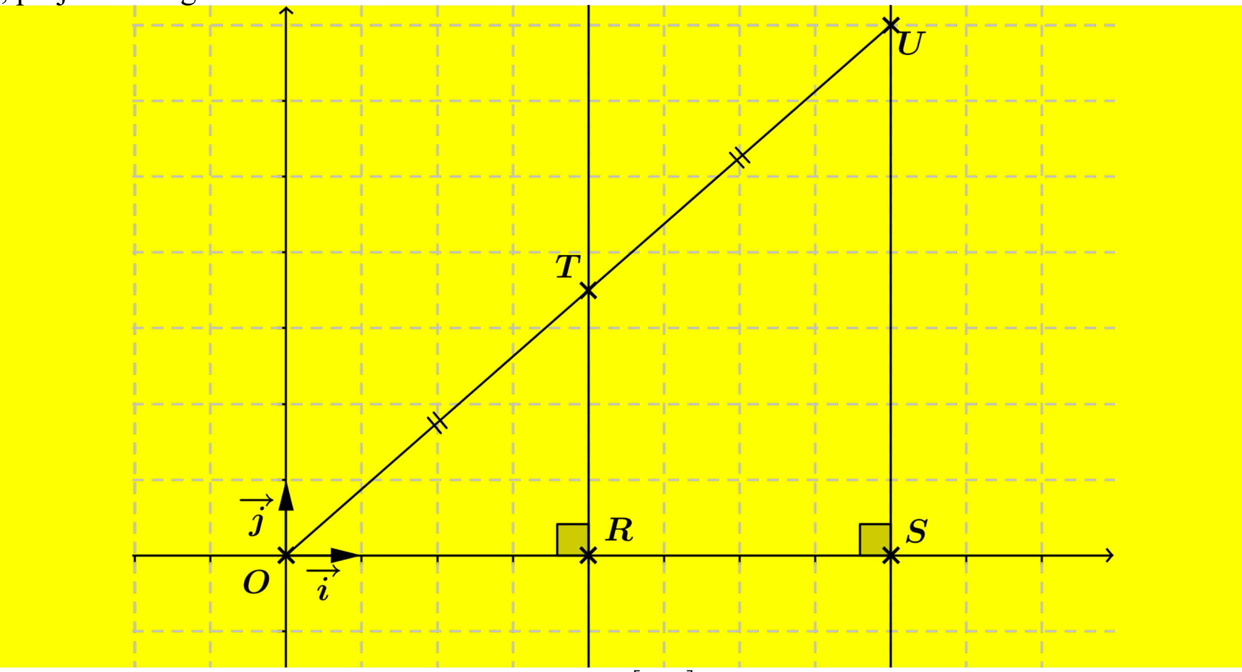
PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

EXERCICE N°1 **(Le corrigé)**

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, placer le point $U(8\ ;\ 7)$ et le point T milieu de $[OU]$.

1) Construire le point R, projeté orthogonal de T sur l'axe des abscisses et le point S, projeté orthogonal de U sur l'axe des abscisses.



2) Montrer que le point R est le milieu de $[OS]$ et calculer ses coordonnées.

On considère le triangle OSU.

On sait que $(TR)//(US)$ et que T est le milieu de $[US]$

Or : Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième.

Donc R est le milieu de $[OS]$.

S étant le projeté orthogonal de U sur l'axe des abscisses, ces deux points ont la même abscisse et bien sûr l'ordonnée de S est nulle.

Ainsi $S(8\ ;\ 0)$

Enfin, comme R est le milieu de $[OS]$:

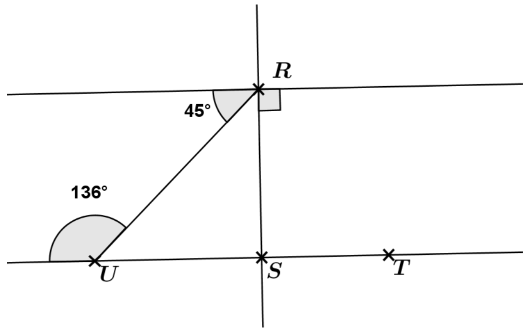
$x_R=\frac{x_S+x_O}{2}=\frac{8}{2}=4$ et $y_R=\frac{y_S+y_O}{2}=\frac{0}{2}=0$

Donc $R(4\ ;\ 0)$

EXERCICE N°2 *Démontrer par l'absurde (Le corrigé)*

On considère la figure suivante dans laquelle point T appartient à la droite (US)

En raisonnant par l'absurde, montrer que le point S n'est pas le projeté orthogonal du point R sur la droite (UT) .

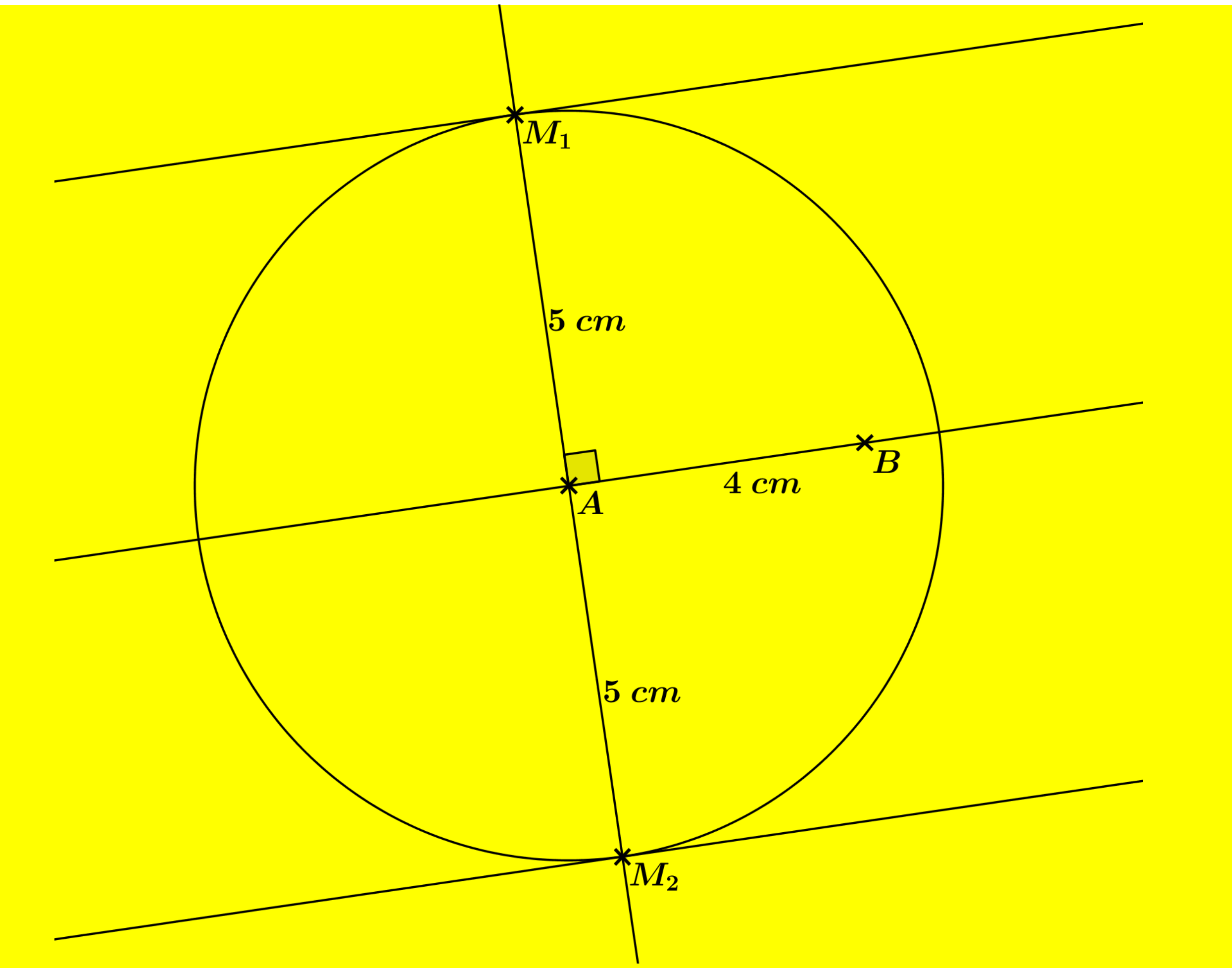


Nous savons que : $\widehat{USR}=180-90-45=45\,°$ et $\widehat{RUS}=180-136=44\,°$
Supposons que S soit le projeté orthogonal de R sur (UT)
alors $\widehat{RST}=90\,°$
On obtient que $\widehat{USR}+\widehat{RUS}+\widehat{RST}=45+44+90=179\,°$ ce qui est absurde.
Ce qui signifie que S ne peut pas être le projeté orthogonal de R sur (UT) .

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

A et B sont deux points distants de 4cm. Déterminer l'ensemble des points M situés à 5 cm de la droite (AB) et à 5 cm du point A.



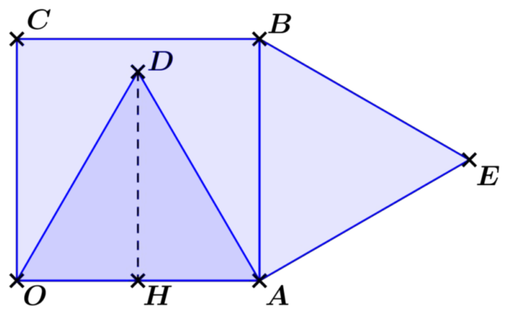
M_1 et M_2 sont les deux seuls points répondant au problème.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

$OABC$ est un carré de côté 1, les triangle ODA et ABE sont équilatéraux.

On se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right)$



1) Calculer la hauteur DH du triangle OAD

Dans le triangle ODH rectangle en H .

Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $OD^2=OH^2+DH^2$

Ainsi $DH^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

Et comme DH est une hauteur :

$DH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (relire l'exo2 de E06)

2) Déterminer les coordonnées des point C , D et E .

$C(0\ ;\ 1)$; $D\left(0{,}5\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $E\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0{,}5\right)$

Pour C et D c'est évident.

Pour E :

On peut introduire le point F , pied de la hauteur issue de E dans le triangle BEA .

Comme BEA est équilatéral, F est le milieu de $[BA]$ et $FE=\frac{\sqrt{3}}{2}$

On en déduit que l'ordonnée de F vaut 0,5 et donc celle de E aussi, puis que l'abscisse de E vaut $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (le 1 étant la longueur du côté du carré)

3) Démontrer que les points C , D et E sont alignés.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0{,}5\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -0{,}5\end{pmatrix}$

$$det\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = 0{,}5\times(-0{,}5)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = -0{,}25-\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right) = -0{,}25-\left(\frac{3}{4}-1\right)=0$$

Ainsi les points C , D et E sont bien alignés.

Remarque : comme on l'a dit dans le cours, toute autre combinaison mènerait au même résultats. Seuls les calculs intermédiaires changeraient.

Geogebra

Pour Géogébra, je vous conseille de télécharger et installer GeoGebra Classique 5

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

EXERCICE N°5 *Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit (Le corrigé)*

On considère un triangle ABC non aplati. Soient d_1, d_2 et d_3 les médiatrices des côtés de ABC.

geogebra

1) Soit O le point d'intersection de d_1 et d_2. Montrer que $OA=OB=OC$.

On sait que $O \in d_1$ et que d_1 est la médiatrice de $[AB]$ donc $OA=OB$
De même $OB=OC$
Ainsi $OA=OB=OC$

2) En déduire que B et C sont sur le cercle de centre O et passant par A.

Le cercle de centre O passant par A a pour rayon OA et comme $OA=OB=OC$, on en déduit que B et C sont bien sur ce cercle.

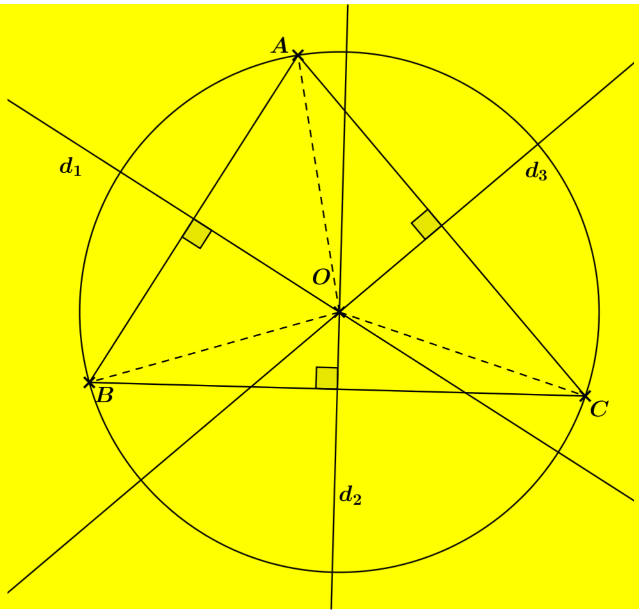
On appelle ce cercle : cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Montrer que O appartient aussi à d_3.

On sait que $OA=OC$ donc O appartient à la médiatrice de $[AC]$ qui n'est autre que d_3

Les médiatrices d'un triangle sont donc concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Propriété à retenir !!!



EXERCICE N°6 ***Hauteurs d'un triangle et orthocentre (Le corrigé)***

On considère un triangle ABC non aplati. Soient d_1 la parallèle à la droite (BC) passant par A, d_2 la parallèle à la droite (AC) passant par B et d_3 parallèle à la droite (AB) passant par C.

Les droites d_2 et d_3 se coupent en A', d_1 et d_3 coupent en B' et d_1 et d_2 se coupent en C'.

geogebra

1) Montrer que $AB'CB$ et $C'ACB$ sont des parallélogrammes.

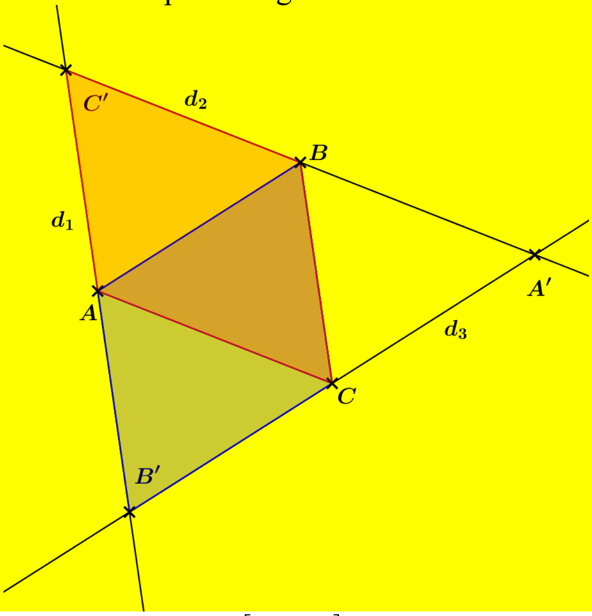
On considère le quadrilatère $AB'CB$

On sait que : $(AB)//(B'C)$ et $(AB')//(BC)$

Or : Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

Donc $AB'CB$ est un parallélogramme.

De la même façon, $C'ACB$ est un parallélogramme.



2) En déduire que A est le milieu de $[B'C']$.

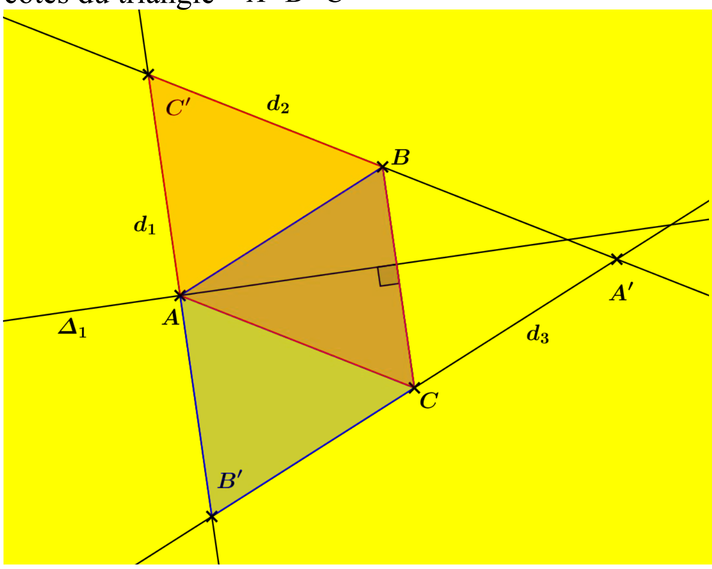
On sait que $AC'=BC$ car $C'ACB$ est un parallélogramme et que $AB'=BC$ car $AB'CB$ est un parallélogramme

Ainsi $AC'=AB'$ et comme, de plus, les points sont alignés, on en déduit que que A est les milieu de $[B'C']$

3) Montrer par un raisonnement analogue que B et C sont les milieux respectifs des segments $[A'C']$ et $[A'B']$.

C'est exactement la même chose, je vous laisse faire...

4) Dans le triangle ABC, on appelle Δ_1 la hauteur issue de A, Δ_2 la hauteur issue de B et Δ_3 hauteur issue de C. Montrer que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices des côtés du triangle $A'B'C'$



On sait que $\Delta_1 \perp (BC)$ et $(B'C') // (BC)$ donc $\Delta_1 \perp (B'C')$ et comme A est le milieu de $[B'C']$, on en déduit que Δ_1 est la médiatrice de $[B'C']$.
De la même façon, Δ_2 est la médiatrice de $[A'C']$ et Δ_3 est la médiatrice de $[B'A']$

5) Sachant que ces trois médiatrices sont concourantes (voir exercice précédent), en déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

D'après la question précédente, les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$. Elles sont donc concourantes.

Les hauteurs d'un triangles sont concourantes en un point qui se nomme l'orthocentre du triangle .

Propriété à retenir !!!