

LES SUITES NUMÉRIQUES M07

EXERCICE N°1 Du concret : Feu d'artifice

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Extrait du Sésamath 1ere spé 2019 112 p 70

Un artificier prépare son feu d'artifice synchronisé sur de la musique.

Il décide lancer une fusée pendant le premier extrait de musique, deux fusées pendant le deuxième extrait, trois pendant le 3^e etc.

Chaque fusée lui coûte 10 €.

- 1) Il décide passer 15 extraits de musique, combien paiera-t-il ?
- 2) Il décide d'époustoufler les spectateurs et d'envoyer au moins 1000 fusées. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d'extraits de musique qu'il devra passer. Combien paiera-t-il ?

EXERCICE N°2 Du concret : Assurance

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Extrait du Sésamath 1ere spé 2019 112 p 70

Kenza veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B . Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 euros par an en 2019.

1) L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an. On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019+n$.

- 1.a) Déterminer la valeur de u_0 et de u_1 .
- 1.b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite u ?
- 1.c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 1.d) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2030 ?
- 1.e) Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

2) L'assureur B prévoit une augmentation de 2 % par an. On note v_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur B en $2019+n$.

- 2.a) Déterminer la valeur de v_0 et de v_1 .
- 2.b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite v ?
- 2.c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 2.d) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur B en 2030 ?
- 2.e) Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A .

EXERCICE N°3 Du concret : Réseau social (méthode à connaître)

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Extrait remanié du Sésamath 1ere spé 2019 114 p 70

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.

À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées.

L'administrateur de la plateforme prévoit que, chaque année, 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas et 2000 personnes s'abonnent.

On note u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$.

- 1) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2020 ?
- 2) Donner la valeur de u_0 et u_1 .
- 3) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 2000$
- 4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10000$
 - 4.a) Justifier que la suite v est géométrique et préciser ces éléments caractéristiques.
 - 4.b) En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - 4.c) Combien d'abonnés devrait-il y avoir en 2050 ?

LES SUITES NUMÉRIQUES M07C

EXERCICE N°1 Du concret : Feu d'artifice

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

Extrait du Sésamath 1ere spé 2019 112 p 70

Un artificier prépare son feu d'artifice synchronisé sur de la musique.

Il décide lancer une fusée pendant le premier extrait de musique, deux fusées pendant le deuxième extrait, trois pendant le 3^e etc.

Chaque fusée lui coûte 10 €.

1) Il décide passer 15 extraits de musique, combien paiera-t-il ?

▪ Calculons le nombre de fusées :

$$1+2+\dots+14+15 = \sum_{k=0}^{15} k = \frac{15(15+1)}{2} = 120$$

petite « subtilité » $\sum_{k=0}^{15} k = 0+1+2+\dots+14+15$ mais ajouter zéro ne change rien...

▪ Calculons le prix :

$$120 \times 10 = 1200$$

▪ Ainsi l'artificier devra payer 1200 €

2) Il décide d'époustoufler les spectateurs et d'envoyer au moins 1000 fusées. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d'extraits de musique qu'il devra passer. Combien paiera-t-il ?

▪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n le nombre de fusées pour n extraits de musique.

▪ On a : $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

▪ Il s'agit donc de résoudre $S_n \geq 1000$

▪ À l'aide de la calculatrice, on trouve $S_{44} = 990$ et $S_{45} = 1035$

▪ On en déduit qu'il devra passer 45 extraits et que cela lui coûtera

$$1035 \times 10 = \text{10350 €}$$

On présente ici, une méthode « plus savante » et en rapport avec le précédent chapitre. On remplace le 4 « ▪ » par ce qui suit :

$$S_n \geq 1000 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \geq 1000 \Leftrightarrow n^2 + n - 1999 \geq 0$$

Le déterminant Δ du membre de gauche de cette dernière inégalité vaut :

$$1^2 - 4 \times 1 \times (-1999) = 7997$$

$$\Delta > 0, \text{ il y a donc deux racines } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7997}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7997}}{2 \times 1} \approx 44,2$$

De plus, le coefficient du terme en n^2 vaut $1 > 0$.

On obtient alors le tableau de signe suivant :

n	0	x_2	$+\infty$
S_n	-	0	+

(x_1 est clairement négatif et on se souvient que l'on travaille sur les entiers naturels...)

On en déduit que $n \geq 45$

LES SUITES NUMÉRIQUES M07C

EXERCICE N°2 Du concret : Assurance

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

Extrait du Sésamath 1ere spé 2019 112 p 70

Kenza veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B . Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 euros par an en 2019.

1) L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an. On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019+n$.

1.a) Déterminer la valeur de u_0 et de u_1 .

- $u_0 = 300$
- $u_1 = 300+10$, ainsi $u_1 = 310$

1.b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite u ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$

On reconnaît une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de 1er terme $u_0 = 300$

1.c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 300 + 10n$

1.d) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2030 ?

- $2030 = 2019+11$, il s'agit de donc de calculer u_{11} .
 $u_{11} = 300 + 10 \times 11 = 410$
- Ainsi, en 2030, le prix de la mutuelle s'élèvera à 410 € .

1.e) Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

- Il s'agit de calculer la somme des 25 premiers termes de la suite u , notons S_A cette somme.
- Le 25^e terme de cette somme est u_{24} et vaut $300 + 10 \times 24 = 540$

$$S_A = 25 \times \frac{300+540}{2} = 10500$$

- Ainsi, si Kenza choisit l'assureur A , elle payera au total en 25 ans la somme de 10500 € .

2) L'assureur B prévoit une augmentation de 2 % par an. On note v_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur B en $2019+n$.

2.a) Déterminer la valeur de v_0 et de v_1 .

- $v_0 = 300$
- $v_1 = v_0 + \frac{2}{100} \times v_0 = (1+0,02)v_0 = 1,02v_0 = 1,02 \times 300 = 306$, ainsi $v_1 = 306$

2.b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite v ?

Une hausse de 2 % correspond à un Coefficient Multiplicateur valant 1,02 donc pour passer d'un terme on multiplie par 1,02.

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $v_0 = 300$

2.c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 300 \times 1,02^n$

2.d) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur B en 2030 ?

- $2030 = 2019+11$, il s'agit de donc de calculer v_{11} .
 $v_{11} = 300 \times 1,02^{11} \approx 373,01$
- Ainsi, en 2030, le prix de la mutuelle s'élèvera à $\text{environ } 373,01 \text{ €}$.

2.e) Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

- Il s'agit de calculer la somme des 25 premiers termes de la suite v , notons S_B cette somme.

$$S_B = 300 \times \frac{1-1,02^{25}}{1-1,02} \approx 9609,09$$

- Ainsi, si Kenza choisit l'assureur B , elle payera au total en 25 ans la somme de $9609,09 \text{ €}$.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A .

Il s'agit de trouver la plus petite valeur de n vérifiant $u_n \leq v_n$.

À l'aide la calculatrice, on trouve que pour $n \leq 48$: $u_n \geq v_n$

puis $790 = u_{49} \leq v_{49} \approx 791,64$.

Or $2019 + 49 = 2068$

C'est donc en 2068 que le prix de la mutuelle de l'assureur B dépassera pour la première fois celui de l'assureur A .

On n'a pas démontré qu'à partir de 49, on avait toujours $u_n \leq v_n$. Pour cela, il aurait fallu, étudier le signe $u_n - v_n$ en fonction de n . Essayez pour voir où cela vous mène;)

LES SUITES NUMÉRIQUES M07C

EXERCICE N°3

Du concret : Réseau social (méthode à connaître)

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

Extrait remanié du Sésamath 1ere spé 2019 114 p 70

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.

À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées.

L'administrateur de la plateforme prévoit que, chaque année, 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas et 2000 personnes s'abonnent.

On note u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$.

1) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2020 ?

$$600 - \frac{20}{100} \times 600 + 2000 = (1 - 0,2) \times 600 + 2000 = 0,8 \times 600 + 2000 = 2480$$

En 2020, il aura **2480 abonnés**.

2) Donner la valeur de u_0 et u_1 .

$$u_0 = 600 \text{ et } u_1 = 2480$$

3) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 2000$

Une diminution de 20 % correspond à un Coefficient Multiplicateur valant 0,8 ainsi la perte de 20 % d'abonnés se traduit par la multiplication de u_n par 0,8. Ensuite le gain de 2000 abonnés se traduit par l'ajout de 2000 au résultat précédent. Au final, on a bien $u_{n+1} = 0,8u_n + 2000$.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10000$

4.a) Justifier que la suite v est géométrique et préciser ces éléments caractéristiques.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10000 \\ &= 0,8u_n + 2000 - 10000 \\ &= 0,8u_n - 8000 \\ &= 0,8\left(u_n - \frac{8000}{0,8}\right) \\ &= 0,8(u_n - 10000) \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

« Astuce » à retenir : on met
« de force » en facteur et
« Oh miracle... »

▪ On reconnaît une **suite géométrique de raison $q = 0,8$**

▪ Calculons la valeur du premier terme $v_0 = u_0 - 10000 = 600 - 10000 = -9400$

Ainsi le **premier terme est $v_0 = -9400$**

Le 1^{er} terme fait partie des éléments caractéristiques, ne l'oubliez pas.

4.b) En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = -9400 \times 0,8^n$$

$$v_n = u_n - 10000 \Leftrightarrow u_n = 10000 + v_n \Leftrightarrow u_n = 10000 - 9400 \times 0,8^n$$

$$\text{Ainsi } u_n = 10000 - 9400 \times 0,8^n$$

4.c) Combien d'abonnés devrait-il y avoir en 2050 ?

2050 = 2019 + 31, il s'agit de calculer u_{31}

$$u_{31} = 10000 - 9400 \times 0,8^{31} \approx 9991$$

On a arrondi à l'unité car on évite de découper les gens, ce n'est pas légal...

On en déduit qu'en 2050, il y aura **environ 9991 abonnés**.