

FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Nous allons généraliser ce que nous avons appris sur la fonction carré. Il est donc judicieux d'avoir relu ce cours avant de commencer...

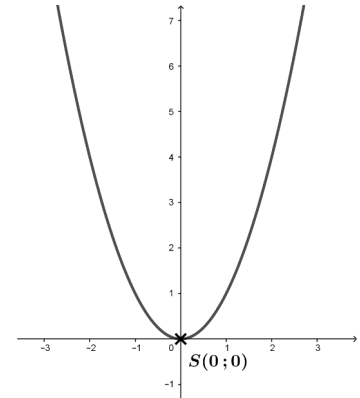
I Jouons avec la parabole

Notons f la fonction carré, c'est à dire

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}.$$

Nous savons que sa représentation graphique est la parabole d'équation $y = f(x)$ ou encore $y = x^2$.

Nous savons également que son sommet S a pour coordonnées $(0 ; 0)$.



I.1 Premier jeu

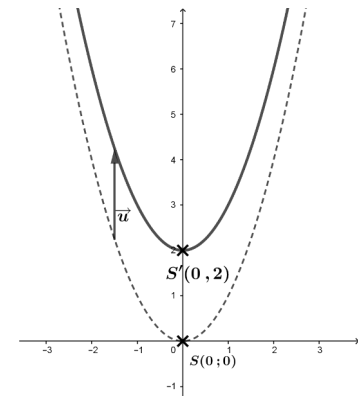
Amusons-nous à traduire cette parabole de deux unités selon l'axe des ordonnées et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur \vec{u} de coordonnées $(0 ; 2)$? c'est très bien!)

Nous n'avons pas changé les abscisses, par contre nous avons augmenté toutes les ordonnées de 2.

Notre nouvelle parabole a donc pour équation $y = f(x)+2$ ou encore $y = x^2+2$. Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut

appeler g et telle que $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+2 \end{cases}$

Son sommet S' a alors pour coordonnées $(0 ; 2)$.



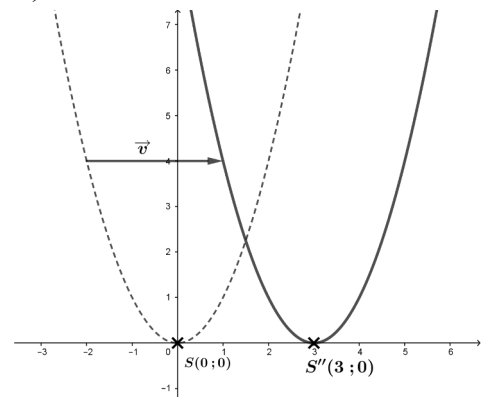
I.2 Deuxième jeu

Amusons-nous à traduire cette parabole de trois unités selon l'axe des abscisses et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur \vec{v} de coordonnées $(3 ; 0)$? c'est très bien!)

Nous avons augmenté les abscisses de 3 mais nous n'avons pas changé les ordonnées. C'est à dire que si

$A(x_A ; y_A)$ est un point de la parabole de départ alors son image $B(x_B ; y_B)$ est telle que :

$$\begin{cases} x_B = x_A + 3 \\ y_B = y_A \end{cases}.$$



De la première égalité, on déduit que $x_A = x_B - 3$ et de la seconde, on déduit que $y_B = y_A = f(x_A) = f(x_B - 3)$. Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = f(x-3)$ ou encore $y = (x-3)^2$. (Comprenez bien d'où vient le « moins »). Elle représente une nouvelle fonction que l'on

peut appeler h et telle que $h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-3)^2 \end{cases}$

Son sommet S'' a alors pour coordonnées $(3 ; 0)$.

I.3 Troisième jeu

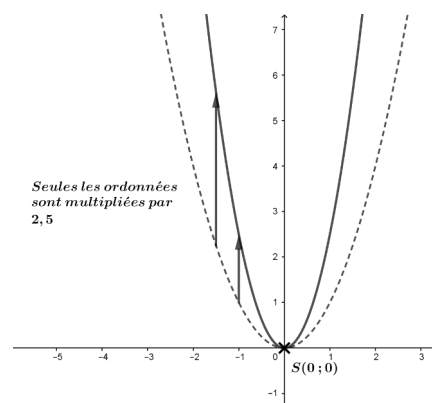
Amusons-nous à « déformer » cette parabole en multipliant les ordonnées par 2,5.

Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = 2,5 \times f(x)$ ou encore $y = 2,5x^2$.

Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler k et telle que

$$k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2,5x^2 \end{cases}$$

Son sommet reste le même : $S(0 ; 0)$



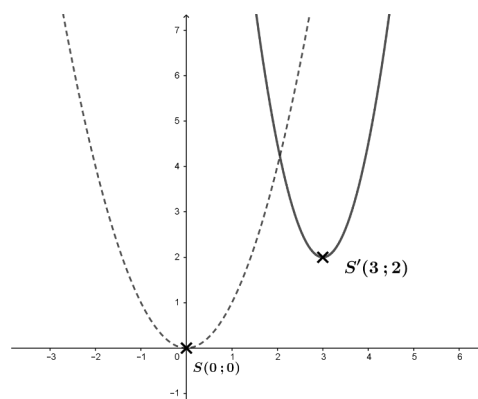
I.4 Dernier Jeu

On combine les trois premiers jeux !

On obtient la parabole d'équation : $y = 2,5(x-3)^2 + 2$ qui représente une fonction que l'on appelle l et

telle que $l : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2,5(x-3)^2 + 2 \end{cases}$.

Son sommet est alors le point $S'(3 ; 2)$



Cliquer pour
Visualiser

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Sur cette page, vous pourrez faire varier les trois paramètres ($a=2,5$; $\alpha=3$ et $\beta=2$) afin d'observer en détail leur influence sur la parabole.

Rentrons à présent dans le vif du sujet...

II Expressions des fonctions polynômes du second degré

II.1 La forme développée réduite

Définition n°1. Le trinôme

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur \mathbb{R} et telle que pour tout réel x , on peut écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec a , b et c des réels et $a \neq 0$

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée : Trinôme

Exemple n°1.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $l(x) = 2,5(x-3)^2 + 2$.

On peut écrire :

$$l(x) = 2,5(x-3)^2 + 2$$

$$l(x) = 2,5[x^2 - 6x + 9] + 2$$

$$l(x) = 2,5x^2 - 15x + 24,5$$

Ainsi $l(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a=2,5$, $b=-15$ et $c=24,5$

l est donc une fonction polynôme du second degré.

Remarque n°1.

On devine, sur cet exemple, que toute fonction du type de celle que nous avons observée au dernier jeu est une fonction polynôme du second degré.

Exercice n°1.

Démontrez-le en partant de l'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $a \neq 0$; α et β sont des nombres réels.

II.2 La forme canonique

Propriété n°1. (et définition)

Si f est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x ,
 $f(x) = ax^2 + bx + c$

(avec a , b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous

sa forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Remarque n°2.

C'est bien le « même a ».

Il faut retenir la formule de α mais pas forcément celle de β car

$$\beta = f(\alpha)$$

preuve : (de la propriété)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

(explications à la remarque n°3)

$$= a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right]$$

On a réduit au même dénominateur

$$= a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right]$$

On a distribué a

$$= a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarque n°3.

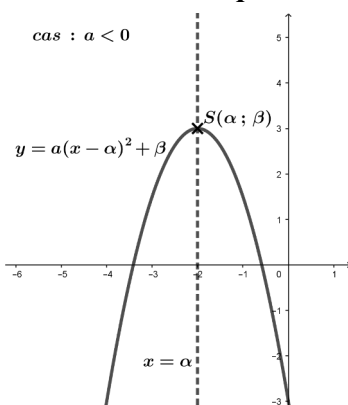
La troisième ligne semble peu naturelle... L'idée est la suivante :

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est forcément le début de la première identité remarquable

$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. En effet $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$. Le problème est

qu'il y a un terme « en trop », il faut donc l'enlever : $-\left(\frac{b}{2a} \right)^2$

Remarque n°4. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.



D'après nos petits jeux, nous pouvons dire que :

toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole

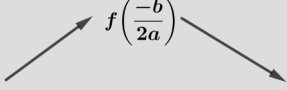
tournée vers le bas si $a < 0$, tournée vers le haut si $a > 0$,

de sommet $(\alpha ; \beta)$ et admettant pour axe de symétrie $x = \alpha$

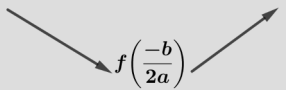
Remarque n°5. Tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x ,
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

II.3 La forme factorisée

Dans ce paragraphe, f est une fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nous savons que l'on peut écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$.

Ajoutons une notation supplémentaire : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = a \left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Si $\Delta < 0$ alors la factorisation n'est pas possible dans \mathbb{R} .

Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x - \alpha)^2$

Si $\Delta > 0$ alors

$$f(x) = a \left(x - \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

et comme $\alpha = \frac{-b}{2a}$:

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

ou encore

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Nous obtenons la propriété suivante :

Propriété n°2. Forme factorisée

Soit f est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x ,
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

et posons $\Delta = b^2 - 4ac$,

▪ Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans \mathbb{R}

▪ Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$

▪ Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarque n°6. Résolution des équations du second degré

La propriété suivante nous donne une méthode de résolution des équations à une inconnue du second degré.

On fait en sorte d'avoir zéro pour le membre de droite puis on réduit le membre de gauche de façon à obtenir un trinôme, on doit alors résoudre :

$$ax^2+bx+c = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels et } a \neq 0)$$

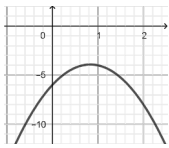
$$ax^2+bx+c = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels et } a \neq 0)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet une solution double : $-\frac{b}{2a}$	L'équation admet deux solutions :
		$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
		et
		$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque n°7.

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exemple n°2.


Réolvons les équations suivantes dans \mathbb{R} .

▪ $-3x^2 + 5x - 6 = 0$

Posons $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = -47$ le discriminant de cette équation.

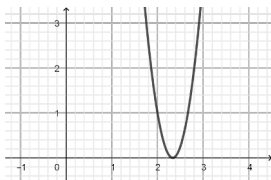
Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet aucune solution réelle.

▪ $9x^2 - 42x + 49 = 0$

Posons $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 9 \times 49 = 0$ le discriminant de cette équation.

Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une unique solution : $\frac{7}{3}$

$$\left(\frac{-(-42)}{2 \times 9} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3} \right)$$

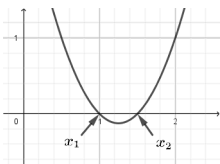


▪ $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Posons $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$ le discriminant de cette équation.

Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions : 1 et 1,5

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1,5$$


Remarque n°8.

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas défini a , b et c , nous n'avons donc pas utilisé ces lettres...

III Le résumé du cours

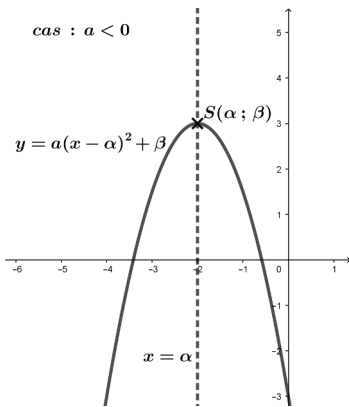
Fonction
polynôme du
second degré,
Trinôme

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur \mathbb{R} et telle que pour tout réel x , on peut écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée : Trinôme

Forme canonique

Si f est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous sa forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$ on a aussi $\beta = f(\alpha)$



Cliquer pour
Visualiser
 $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Tableau de
variation

toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole

tournée vers le bas si $a < 0$, tournée vers le haut si $a > 0$,

de sommet $(\alpha; \beta)$ et admettant pour axe de symétrie $x = \alpha$

Soit f une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

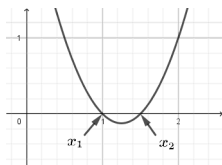
$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) \searrow$		

$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) \nearrow$		

Forme factorisée



Soit f est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

et posons $\Delta = b^2 - 4ac$,

▪ Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans \mathbb{R}

▪ Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$

▪ Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$

L'équation n'admet aucune
solution réelle.

$\Delta = 0$

L'équation admet une solution
double : $\frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$

L'équation admet deux
solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Équation du
second degré

