PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

EXERCICE N°1 **(Le corrigé)**

On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. On donne $A(1\ ;\ 2)$, $M(1{,}75\ ;\ 3{,}5)$ et $B(2\ ;\ 4)$

Démontrez que $A\,,B$ et M sont alignés.

Nous allons démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, ce qui justifiera que les points sont alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1{,}75-1 \\ 3{,}5-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

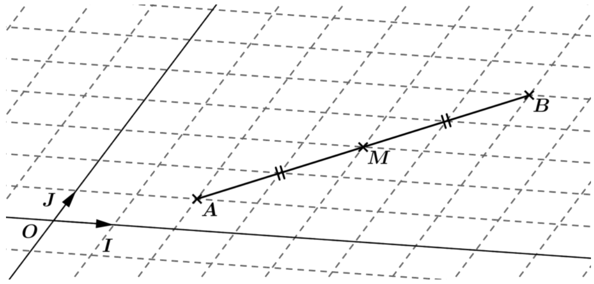
De plus $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = 1\times1{,}75-2\times0{,}75 = 0$

On en déduit que les points $A\,,B$ et M sont alignés.

EXERCICE N°2 ***Preuve de la propriété n°2 (Le corrigé)***

On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
On donne $A(x_A\ ;\ y_A)$, $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.
Démontrez que si M est le **milieu** du segment $[AB]$ alors :

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$



On sait que :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Or :
M est le milieu de $[AB]$

Donc :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad .$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_M - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ y_M - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B - x_A}{2} + x_A \\ y_M = \dfrac{y_B - y_A}{2} + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_A}{2} \end{cases}$$

Ainsi $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

EXERCICE N°3 ***(Le corrigé)***

Dans le repère orthonormé $(O\ ;I\ ;J)$.
On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(2\ ;-1)$; $F(\ 2;3)$ et $G(5;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M centre du cercle circonscrit à EFG .

On sait que :
M est le centre du cercle circonscrit à EFG .
Donc M est le milieu de l'hypoténuse $[FG]$.
On en déduit en notant $M(x_M\ ;\ y_M)$

$$x_M = \frac{x_F+x_G}{2} = \frac{2+5}{2} = 3{,}5 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_F+y_G}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Ainsi $\boxed{M(3{,}5\ ;\ 1)}$

2) Le point $H(5;3)$ appartient-il au cercle ?

Si la distance MH est égale à la longueur du rayon du cercle alors H appartient à ce cercle.
Le rayon du cercle vaut par exemple MF :
Comme le repère $(O\ ;I\ ;J)$ est orthonormé :

$$MF=\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_m-y_F)^2}=\sqrt{(3{,}5-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1{,}5^2+(-2)^2}=\sqrt{2{,}25+4}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$$

Calculons IH :

$$MH=\sqrt{(x_M-x_H)^2+(y_M-y_H)^2}=\sqrt{(3{,}5-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(-1{,}5)^2+(-2)^2}=\sqrt{2{,}25+4}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$$

On a $MH = MF$ par conséquent H appartient bien au cercle.

EXERCICE N°4 ***(Le corrigé)***

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(3\ ;\ 1)$ et $M(2\ ;\ 4)$.

1) La symétrie de centre A transforme B en C .

1.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Par définition, « La symétrie de centre A transforme B en C » signifie que :
A est le milieu de $[BC]$
On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}}$

1.b) En déduire les coordonnées du point C .

On sait que :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -2-1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C - (-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$
On obtient :

$$\begin{cases} x_C - 1 = -2 \\ y_C + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -5 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{C(-1\ ;-5)}$

2) Soit N le point tel que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$.

2.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?

On peut dire que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AN} \text{ sont colinéaires}}$

2.b) Calculer les coordonnées du point N .

On sait que :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - x_A \\ y_N - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 1 \\ y_N - (-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 1 \\ y_N + 2 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$
On obtient :

$$\begin{cases} -2(x_N - 1) = 1 \\ -2(y_N + 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N + 2 = 1 \\ -2y_N - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N = -1 \\ -2y_N = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0{,}5 \\ y_N = -5 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{N(0{,}5\ ;-5)}$

EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(2\ ;1)$, $C(-4\ ;3)$ et $D(-5\ ;0)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ puis celles du milieu de $[BD]$.

Notons $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $N(x_N\ ;\ y_N)$ les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

On a alors :

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1+(-4)}{2} = -1{,}5 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = 0{,}5$$

Ainsi $\boxed{M(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)}$

et

$$x_N = \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{2+(-5)}{2} = -1{,}5 \quad \text{et} \quad y_N = \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{1+0}{2} = 0{,}5$$

Ainsi $\boxed{N(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)}$.

2) Démontrer que $AC=BD$

On va calculer les deux longueurs et constater qu'elles sont égales :

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-4-1)^2+(3-(-2))^2} = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50}$$

$$BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(-5-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$$

Ainsi $AC=BD$.

3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

D'après la question 1) les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu et d'après la question 2, ils ont aussi la même longueur.

Le quadrilatère $ABCD$ a donc ses diagonales qui se coupent en milieu et qui de plus sont de même longueur.

On en déduit que $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$.