

CROISSANCE EXPONENTIELLE

I Les suites géométriques

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions et propriétés suivantes seront écrites pour le cas où $u_0 = 0$. Nous les adapterons selon les besoins des activités.

Définition n°1. Suite géométrique

Une **suite géométrique** est une suite telle que :

Il existe un nombre réel q tel que :

- Pour tout entier naturel n , on peut écrire $u(n+1) = u(n) \times q$
- q est appelé la **raison de la suite**.
- l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$), il suffit de multiplier par q le terme actuel ($u(n)$). »

Exemple n°1.

Soit la suite géométrique v de terme initial $v(0) = 4,5$ et de raison $r = 2$. Les quatre premiers de v sont :
 $v(0) = 4,5$, $v(1) = 9$, $v(2) = 18$ et $v(3) = 36$.

Propriété n°1. Exprimer $u(n)$ en fonction de n

Une suite $(u(n))$ est géométrique de raison q si et seulement si :

Pour tout entier naturel n , on a $u(n) = u(0) \times q^n$

Remarque n°3.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$

Exemple n°2.

Dans l'exemple n°1, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v(n) = 4,5 \times 2^n$.

II Et la croissance exponentielle dans tout ça ?

Propriété n°2. Pour la croissance

Soit u une suite géométrique de terme initial strictement positif et de raison $q \in \mathbb{R}$:

- u est strictement croissante si et seulement si $q > 1$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$ et
- u est constante si et seulement si $q = 0$ ou $q = 1$.

Remarque n°4.

Hé mais on a oublié le cas $q < 0$!

C'est juste qu'il n'est pas au programme. Pour les curieux : la suite est alors alternée (si un terme est positif alors son suivant est négatif et vice et versa).

Exemple n°3.

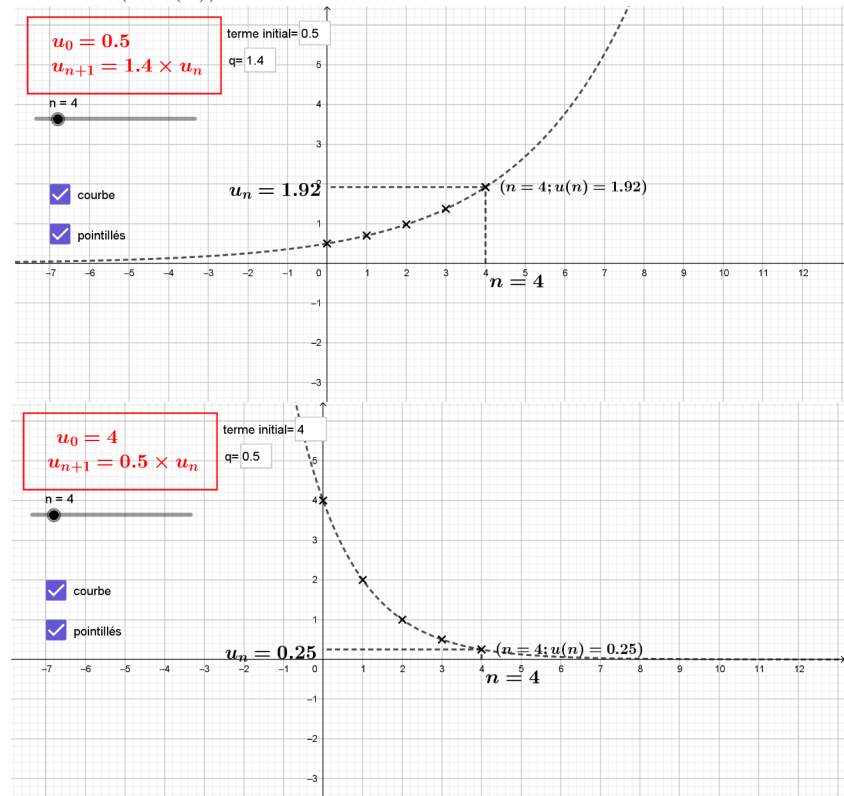
La suite géométrique w de terme initial $w_0 = 0,1$ de raison $r = 0,5$ est strictement décroissante.

Remarque n°5.

- Si le terme initial est strictement négatif alors dans la propriété n°2 les mots « croissante » et « décroissante » sont échangés.
- Si le terme initial est nul alors tous les autres le sont aussi.

Remarque n°6. Représentation graphique

Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.



Les pointillés symbolisent la courbe à laquelle appartiennent les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

Remarque n°7. Pour le côté exponentielle

La courbe en pointillés est la représentation graphique d'une fonction exponentielle. Nous allons préciser cela tout de suite...

III Les fonctions exponentielles

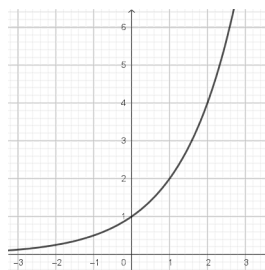
Définition n°2. Fonction exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif.

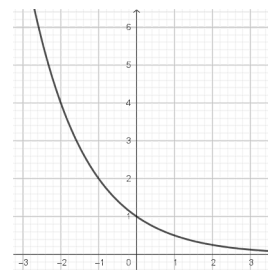
On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = a^x$

Exemple n°4.

$$f(x) = 2^x \quad (a = 2 > 1)$$



$$f(x) = 0,5^x \quad (a = 0,5 \in]0;1[)$$


Remarque n°8.

Si x est un nombre entier alors a^x correspond à la puissance $x^{\text{ième}}$ de a .

Remarque n°9.

Comme pour les suites arithmétiques, on utilisera les suites géométriques pour modéliser des phénomènes à croissance exponentielle discrète et les fonctions exponentielles pour les phénomènes continus. Les fonctions exponentielles sont en quelque sorte le prolongement des suites géométriques.

IV Les outils à connaître

Propriété n°3. Règles de calculs

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels :

$$\boxed{a^0 = 1} ; \quad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} ; \quad \boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}} ; \quad \boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} ;$$

$$\boxed{(a^x)^y = a^{x \times y}} ; \quad \boxed{a^x \times b^x = (a \times b)^x} \text{ et } \boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x} .$$

Exemple n°5.

- $10,45^0 = 1$; ▪ $5,7^{-3,1} = \frac{1}{5,7^{3,1}}$;
- $1,2^{3,4} \times 1,2^{-5,6} = 1,2^{3,4+(-5,6)} = 1,2^{-2,2}$;
- $\frac{1,2^{3,4}}{1,2^{-5,6}} = 1,2^{3,4-(-5,6)} = 1,2^9$;
- $(5,8^{3,1})^{-2,7} = 5,8^{3,1 \times (-2,7)} = 5,8^{-8,37}$ et
- $4,1^{7,1} \times 3,2^{7,1} = (4,1 \times 3,2)^{7,1} = 15,17^{7,1}$

Propriété n°4. Taux d'évolution et Coefficient Multiplicateur

Soit t un taux d'évolution et CM le coefficient multiplicateur correspondant, on a alors la relation suivante :

$$\boxed{CM = 1+t}$$

Exemple n°6.

- Pour une hausse de 32 %, on a $t = 0,32$ et $CM = 1,32$
- Pour une baisse de 32 %, on a $t = -0,32$ et $CM = 0,68$

Remarque n°10. Taux d'évolution global t_g : Attention

On rappelle que les taux d'évolution ne s'additionnent pas.

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % correspondent à une baisse de 4 % .

$$(t_1=0,2 \rightarrow CM_1=1,2 \text{ , } t_2=-0,2 \rightarrow CM_2=0,8 \text{ ,}$$

$$CM_g=1,2 \times 0,8=0,96 \rightarrow t_g=-0,04 \text{ soit une baisse de 4%})$$

Propriété n°5. Racine $n^{\text{ième}}$

Soit c un nombre réel positif ou nul, l'équation $x^n = c$ admet une unique solution réelle : $c^{\frac{1}{n}}$.

Exemple n°7. $x^5 = 2,5$ admet pour unique solution réelle : $2,5^{\frac{1}{5}}$.

Propriété n°6. Le taux moyen

Si CM_g est un coefficient multiplicateur global obtenu à partir de n coefficients multiplicateurs alors le taux moyen t_m s'obtient avec la

formule : $\boxed{t_m = CM_g^{\frac{1}{n}} - 1}$.

Méthode n°1. Calculer un taux moyen à l'aide du Coefficient Multiplicateur moyen.*Énoncé*

On applique successivement une hausse de 11 %, une baisse de 9 % et enfin une hausse de 10 %. Déterminer le taux d'évolution moyen.

« Au brouillon »

Posons $t_1 = 0,11$, $t_2 = -0,09$, $t_3 = 0,1$ et les coefficients multiplicateurs correspondants : $CM_1 = 1,11$, $CM_2 = 0,91$, $CM_3 = 1,1$.

On calcule le coefficient multiplicateur global : $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3$
 $CM_g = 1,11111$.

On calcule le coefficient multiplication moyen CM_m en résolvant dans \mathbb{R} l'équation : $CM_m^3 = CM_g$ ce qui nous donne $CM_m = CM_g^{\frac{1}{3}}$ soit
 $CM_m = 1,11111^{\frac{1}{3}}$.

et enfin on calcule le taux moyen t_m : $t_m = CM_m - 1 = 1,11111^{\frac{1}{3}} - 1$

Bien sûr, sur la copie on résume un peu...

Réponse

Notons t_m le taux moyen cherché.

$$t_m = (1,11 \times 0,91 \times 1,1)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0,0357$$

Soit une

hausse moyenne d'environ 3,57 %

 .