LA FONCTION RACINE CARRÉE

I Qu'est ce qu'une racine carrée ?

Définition n°1. ***Racine carrée***

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée de *a***
et on note $\sqrt{a}$ le nombre **positif** dont **le carré vaut *a***.
Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

Exemple n°1.

- $\sqrt{64}=8$ en effet $8^2=64$ ($(-8)^2=64$ aussi mais $-8<0$)
- $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ à 0,001 près : une racine carrée n'est pas forcément un entier.
- $\sqrt{-64}$ n'existe pas et ne s'écrit pas…
- $-\sqrt{64}$ existe et vaut -8 .
- $\sqrt{0}=0$ et $\sqrt{1}=1$

Remarque n°1.

D'après la définition, pour a un nombre **positif**. $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$

II Opérations élémentaires et racines carrées

Propriété n°1. ***La racine du produit égale le produit des racines***

Soient a et b deux nombres positifs. $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

preuve :

- Si $a=0$ et/ou $b=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
- Supposons à présent que $a>0$ **et** $b>0$

Alors $\sqrt{a\times b}>0$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$

- La remarque n°1 nous permet d'affirmer que :

$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$ et que $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b$.

- On peut alors écrire :

$$0=a\times b-a\times b=(\sqrt{a\times b})^2-(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=[\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}][\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}]$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ne peut pas être nul

donc $\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}=0$ qui équivaut à $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ *cqfd.*

Remarque n°2.

En particulier, pour $\boxed{a\geqslant 0,\quad \sqrt{a^2}=a}$

Propriété n°2. ***La racine du quotient égale le quotient des racines***

Soient a un nombre positif et b un nombre strictement positif. $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

preuve :

Si $a=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
Supposons à présent que $a>0$.

- Avec la remarque n°1 : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$

- On peut alors écrire : $0=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq 0$ donc $\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=0$ qui équivaut à $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *cqfd.*

Remarque n°3. ***Attention ! Pas de somme ou de différence***

De manière générale, la racine de la somme ou de la différence n'égale pas la somme ou la différence des racines.

Exemple n°2.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Propriété n°3. ***Racine carrée et distance à zéro***

Soit a un nombre réel : $\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \text{ , } \sqrt{a^2} = a \\ \text{Si } a < 0 \text{ , } \sqrt{a^2} = -a \end{cases}$

preuve :

Si $a \geqslant 0$ alors, d'après la remarque n°2, $\sqrt{a^2} = a$

Si $a < 0$ alors $-a > 0$ et comme $(-a)^2 = a^2$ on peut appliquer le point précédent pour conclure.

Remarque n°4. ***Valeur absolue de a :*** $|a|$

La propriété n°3 nous dit que :

Pour $a \in \mathbb{R}$ $\sqrt{a^2}$ vaut la **distance à zéro de *a***.

(On dira maintenant : « **valeur absolue de *a*** »)

On notera alors $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |\ a\ |}$

et on lira « La racine carrée du carré d'un nombre égale sa valeur absolue ».

III Simplification de racine carrée

Il s'agît de savoir faire ce que fait votre calculatrice : Faire en sorte que le nombre sous le radical soit un entier le plus petit possible.

Méthode n°1. ***Simplifier une racine carrée***

Énoncé :

Écrire $\sqrt{675}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

Réponse :

Au brouillon :

$\sqrt{675} \approx 25{,}98$ Comme 25 est le plus grand entier inférieur à 25,98 , on commence de cette façon :

Est-ce que 25^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{625} \notin \mathbb{N}$

Est-ce que 24^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{576} \notin \mathbb{N}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Est-ce que 15^2 est un diviseur de 675 ? Oui $\dfrac{675}{225} = 3 \in \mathbb{N}$

Sur la copie :

$$\sqrt{675} = \sqrt{15^2 \times 3} = \sqrt{15^2} \times \sqrt{3} = \mathbf{15\sqrt{3}}$$

Remarque n°5.

Si une expression comporte plusieurs racines carrées, on les simplifie une à une avec la méthode précédente.

IV Étude de la fonction racine carrée

Définition n°2.

La fonction racine carrée est la fonction $g:\begin{cases}[0\ ;+\infty[\to \mathbb{R}\\ x \mapsto \sqrt{x}\end{cases}$

Propriété n°4.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$

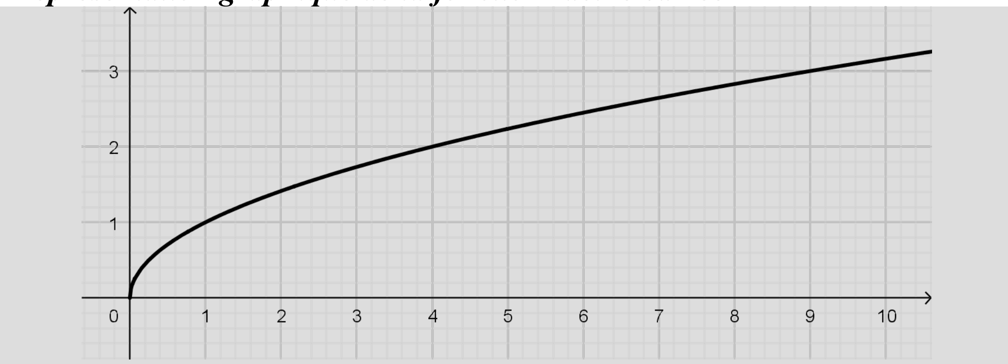
preuve :

Soient a et b des réels tels que $0 \leqslant a < b$.
Nous devons montrer qu'alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
$a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < 0$
D'après la règle des signes, les facteurs $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont de signes contraires.
Or, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$ (voir la définition n°1 si vous n'êtes pas convaincu…)
Donc $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$ qui équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarque n°6.

On en déduit que la fonction racine carrée conserve les inégalités.

Définition n°3. Représentation graphique de la fonction racine carrée



La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.

V Équations et inéquations avec la fonction racine carrée

Propriété n°5. L'équation $\sqrt{x}=k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Soit k un nombre réel.
- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

preuve :

Évidente avec la définition n°1

Propriété n°6. Les inéquations

Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S =]k^2\ ;+\infty[$	$S = [0\ ;+\infty[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = [k^2\ ;+\infty[$	$S = [0\ ;+\infty[$
$\sqrt{x} < k$	$S = [0\ ;k^2[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = [0\ ;k^2]$	Aucune solution

preuve :

À titre d'exercice (indice : pensez aux variations de la fonction carré)

Propriété n°7. Le cas $\sqrt{(x-a)^2} \leqslant k$ c'est à dire $|x-a| \leqslant k$

Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k\ ;a+k]$.

VI Le résumé du cours

➔ Pour un nombre réel strictement positif a, il existe deux nombres opposés dont le carré vaut a : Seul celui qui est positif est noté $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé « radical ».

➔ Pour **a et b des nombres réels positifs ou nuls** :

Produit et quotient : OK

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$$

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$\boxed{a \geqslant 0, \quad \sqrt{a^2} = a}$$

$$\boxed{\text{Si } b > 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Somme et différence : ATTENTION PAS DE FORMULE

➔ Pour **a un nombre réel quelconque** (cette fois il peut être négatif)

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \ , \ \sqrt{a^2} = a \\ \text{Si } a < 0 \ , \ \sqrt{a^2} = -a \end{cases}}$$

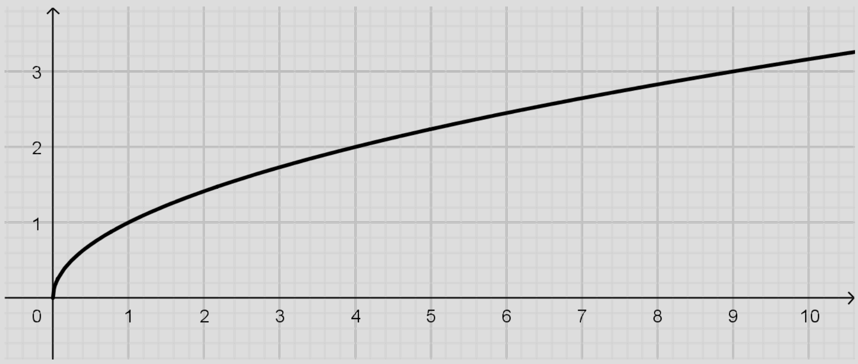
On résume cela en écrivant : $\boxed{\sqrt{a^2} = |\ a\ |}$ se lit « valeur absolue de a »

➔ La fonction racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs : $[0 \ ; +\infty[$

➔ La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 \ ; +\infty[$

➔ La fonction racine carrée conserve les inégalités (cela veut dire qu'on ne change pas une inégalité en extrayant la racine carrée de chaque membre).

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.



➔ Soit k un nombre réel.

- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

➔ Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S =]k^2 \ ; +\infty[$	$S = [0 \ ; +\infty[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = [k^2 \ ; +\infty[$	$S = [0 \ ; +\infty[$
$\sqrt{x} < k$	$S = [0 \ ; k^2[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = [0 \ ; k^2]$	Aucune solution

➔ Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k \ ; a+k]$