LES FONCTIONS PART1

I Les généralités

I.1 Définir une fonction

Définition n°1. Domaine de définition, image, antécédent

On considère D_f un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

▪ On définit une fonction sur D_f en associant à chaque nombre réel x de D_f un unique réel appelé image de x par f qui est noté $f(x)$.

▪ On dit que D_f est le domaine de définition de f :

Si $x \notin D_f$ alors $f(x)$ n'existe pas.

▪ Si, pour un nombre réel b , il existe $a \in D_f$ tel que $f(a)=b$ alors on dit que a est un antécédent de b par f .

Exemple n°1.

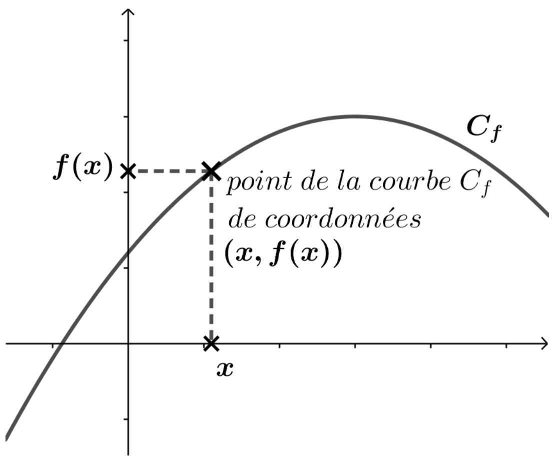
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout x réel associe le nombre $2x-5$. On écrit symboliquement en mathématiques $f : x \mapsto 2x-5$

I.2 La représentation graphique

Définition n°2. Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f .

On appelle courbe représentative de la fonction f (notée C_f) dans un repère du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ où $x \in D$ et $y = f(x)$.



CC-NC-SA

II Fonctions polynômes de degré 2

II.1 Définition

Définition n°3.

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
L'expression algébrique ax^2+bx+c est appelée trinôme du second degré.

Exemple n°2.

$f : x \mapsto x^2-2x-3$ est une fonction polynôme du second degré et son expression est $f(x)=x^2-2x-3$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$.

II.2 Courbe représentative

On considère une fonction polynôme du second degré écrite sous sa forme développée : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

Définition n°4.

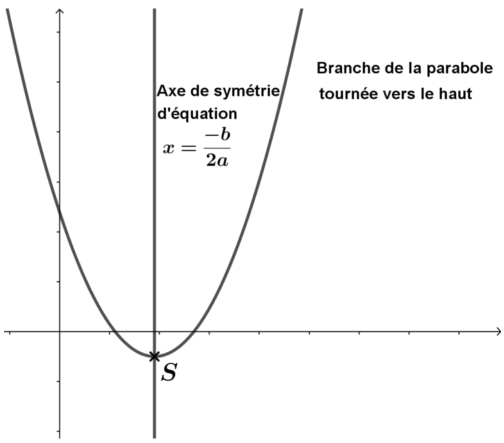
Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction f du second degré s'appelle une parabole.
▪ Lorsque $a>0$, on dit que la parabole est tournée vers le haut.
▪ Lorsque $a<0$, on dit que la parabole est tournée vers le bas.

Propriété n°1. (admise)

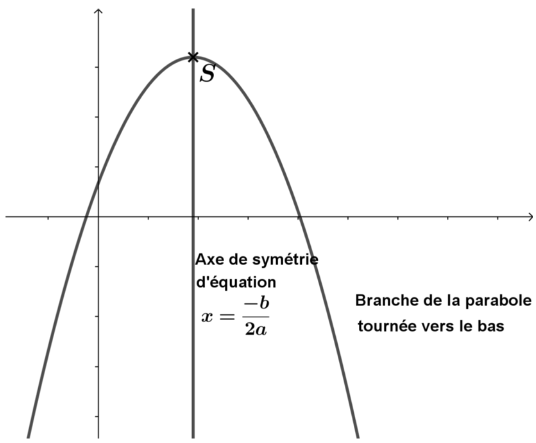
▪ Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha\ ;\ \beta)$
avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$

▪ La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x=\dfrac{-b}{2a}$.

$a>0$



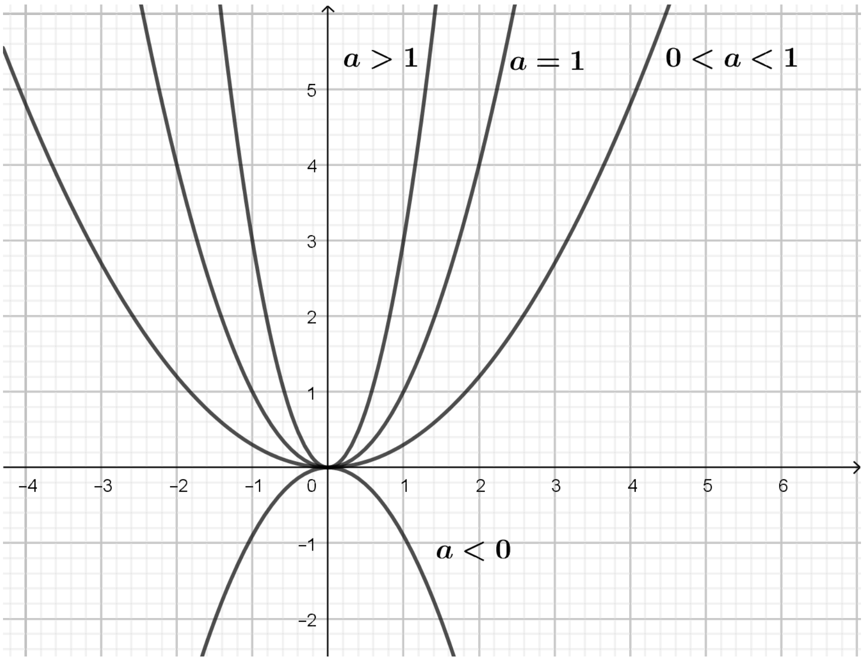
$a<0$



Géogébra

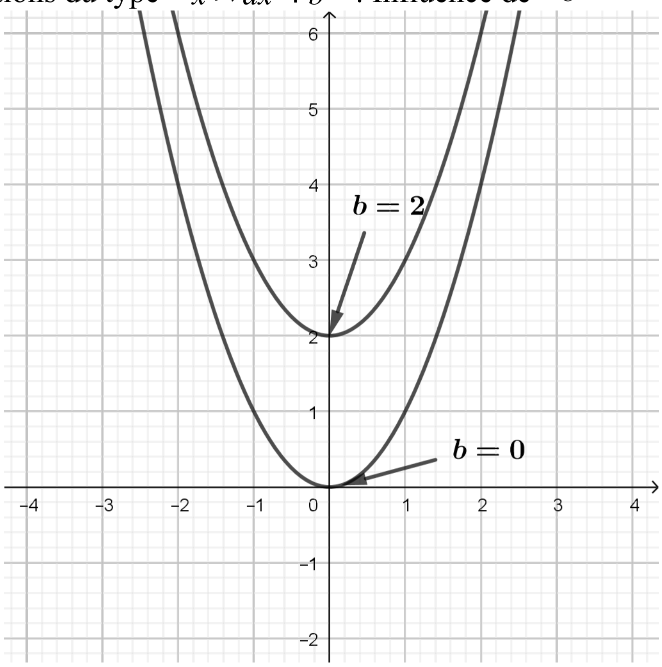
II.3 Quelques cas particuliers

Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2$: Influence de a



geogebra

Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2 + b$: Influence de b



II.4 Les racines quand elles existent

Propriété n°2. ***(admise)***

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ (appelée forme développée)

▪ Si f admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues) alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ que l'on appelle forme factorisée de f.

▪ Inversement, si f s'écrit sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, alors x_1 et x_2 sont les racines de f.

▪ L'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f a alors pour équation $x=\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

▪ L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

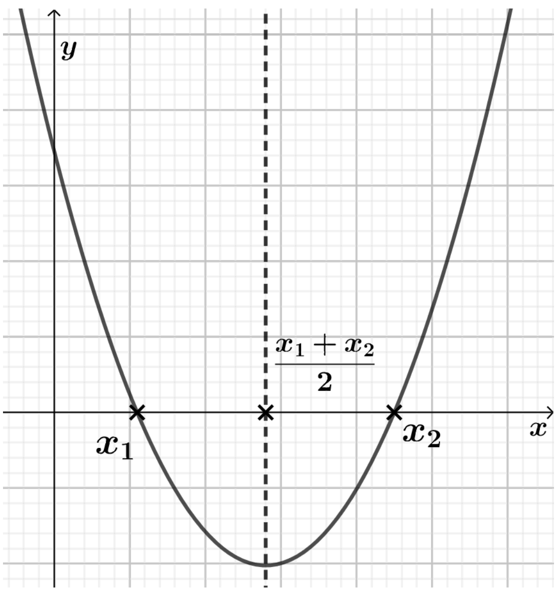
Exemple n°3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-9x-30$.
On peut montrer que $f(-2)=f(5)=0$. -2 et 5 sont les racines de f On peut lire sur la forme développée que $a=3$.
La forme factorisée est donc $f(x)=3(x-(-2))(x-5)$, soit $f(x)=3(x+2)(x-5)$.

II.5 Courbe représentative quand les racines sont distinctes

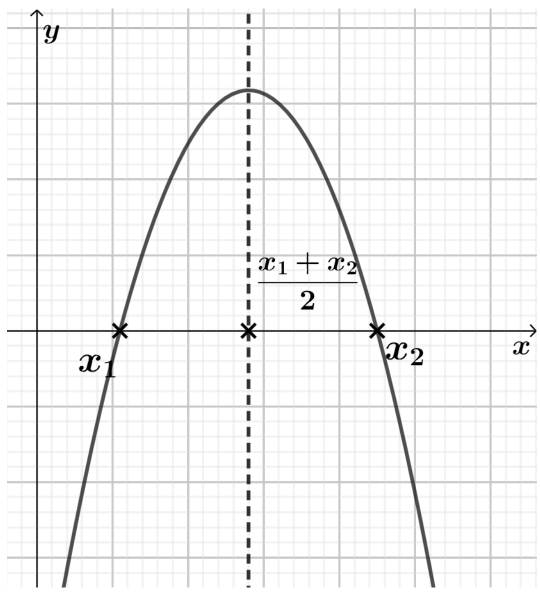
On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ et on la représente dans un repère du plan :

$a>0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

$a<0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

Les racines x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
Si les racines sont distinctes, alors $f(x)$ est toujours du signe de a sauf entre les racines.

Suites numériques

I Les suites numériques

Définition n°1.

Une suite **numérique** est une application $u:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$.

▪ Pour $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 , on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemple n°1.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
Pour $n\geqslant 1$, u_n est le n$^{\text{ième}}$ nombre premier .
$u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=5$, $u_4=7$, $u_5=11$ …

Définition n°2. ***Suite définie de façon explicite***

Une suite u est **définie de façon fonctionnelle ou explicite** lorsque u_n peut être calculé directement en fonction de n sans que l'on ait besoin de calculer tous les termes précédents.

Exemple n°2.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
Pour $n\geqslant 0$, $v_n = n^2+\sqrt{n}-4$
$v_0 = 0^2+\sqrt{0}-4 = -4$,…, on peut calculer directement v_{100}
$v_{100} = 100^2+\sqrt{100}-4 = 10000+10-4 = 10096$

Remarque n°1.

Attention, v_{100} n'est pas le 100$^{\text{ième}}$ terme mais le 101$^{\text{ième}}$ car le premier indice est zéro.

Définition n°3. ***Suite définie par récurrence***

Une suite u est **définie par récurrence** lorsqu'on :
dispose du **terme initial** et d'une **formule permettant de passer d'un terme au suivant.**

Exemple n°3.

La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} w_0=2 \\ w_{n+1}=2\times w_n+n \end{cases}$

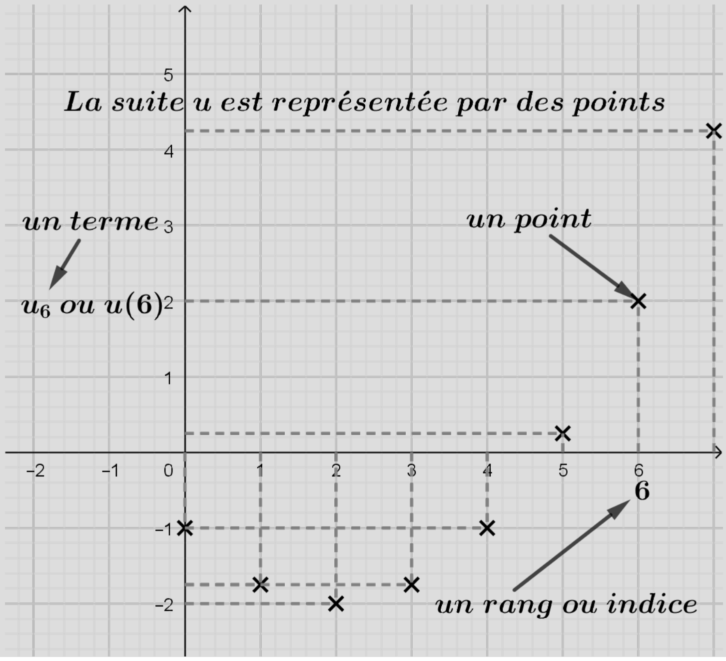
$w_1=2\times w_0+1=2\times 2+1=5$
$w_2=2\times w_1+2=2\times 5+2=12$

Remarque n°2.

Si on veut calculer w_{100} alors il faut calculer w_{99} qui lui même nécessite w_{98} etc …

Méthode n°1. Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une suite u dans un repère, on place:
- les indices n sur l'axe des abscisses;
- les termes $u_n = u(n)$ sur l'axe des ordonnées ;
- les points de coordonnées $(n \ ; \ u_n)$ dans le repère, sans les relier (nuage de points).



Définition n°4. Suite croissante, suite décroissante

▪ Une suite u est dite **croissante** lorsque les termes de la liste sont classés en ordre croissant : pour tout indice n :
$u(n-1) \leqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \leqslant u(n+1)}$.

▪ Une suite u est dite **décroissante** lorsque ses termes sont classés en ordre décroissant : pour tout indice n :
$u(n-1) \geqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \geqslant u(n+1)}$.

II Les suites arithmétiques

Définition n°5. ***Suite arithmétique***

Une suite u est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°4.

La suite v de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$.

$v_0=5$, $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$, $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\ldots$

Propriété n°1. ***Relation de récurrence***

Si u est une suite arithmétique de raison r , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$, $u:\begin{cases} u_0=k \\ u(n+1)=u(n)+r \end{cases}$

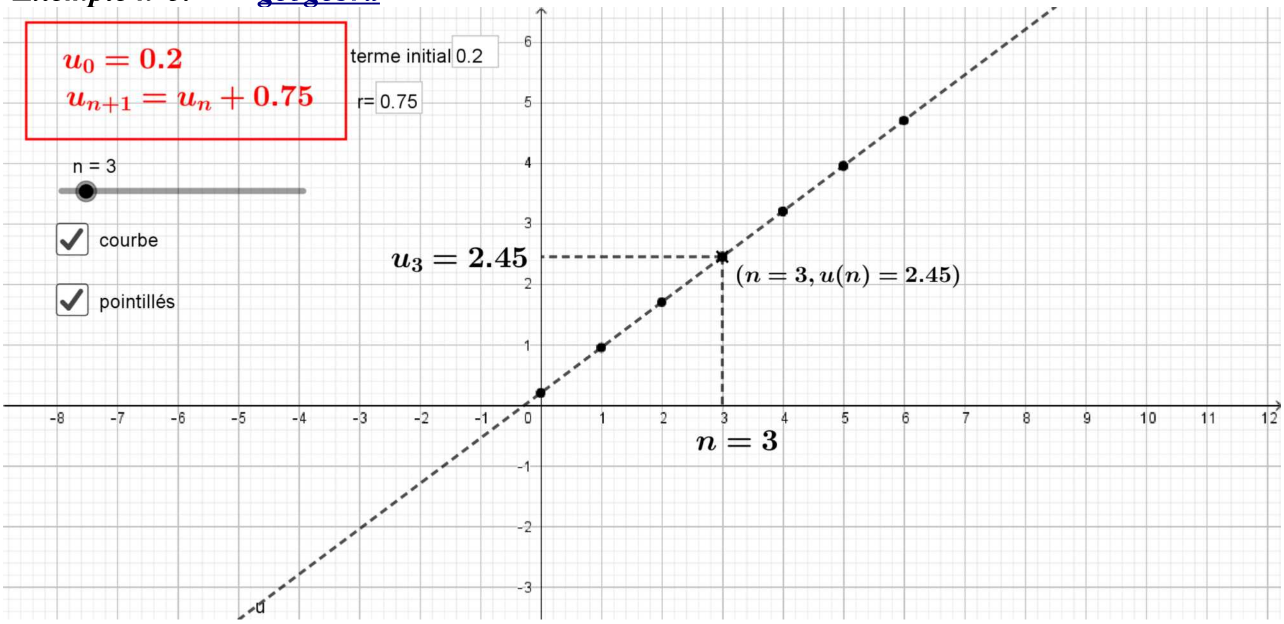
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°2. ***Représentation graphique***

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.

Exemple n°5. ***géogébra***



Propriété n°3. ***Sens de variation***

Soit u une suite arithmétique de raison r :

- si $r>0$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $r=0$, la suite est constante;
- si $r<0$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

III Les suites géométriques

Définition n°6. ***Suite géométrique***

Une suite u est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°6.

La suite v de terme initial $v_0=10$ et de raison $q=0{,}5$.

$v_0=10$, $v_1 = v_0\times q = 10\times 0{,}5=5$, $v_2 = v_1\times q = 5\times 0{,}5=2{,}5,\dots$

Propriété n°4. ***Relation de récurrence***

Si u est une suite géométrique de raison q , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$, $u:\begin{cases} u_0=k \\ u(n+1)=u(n)\times q \end{cases}$

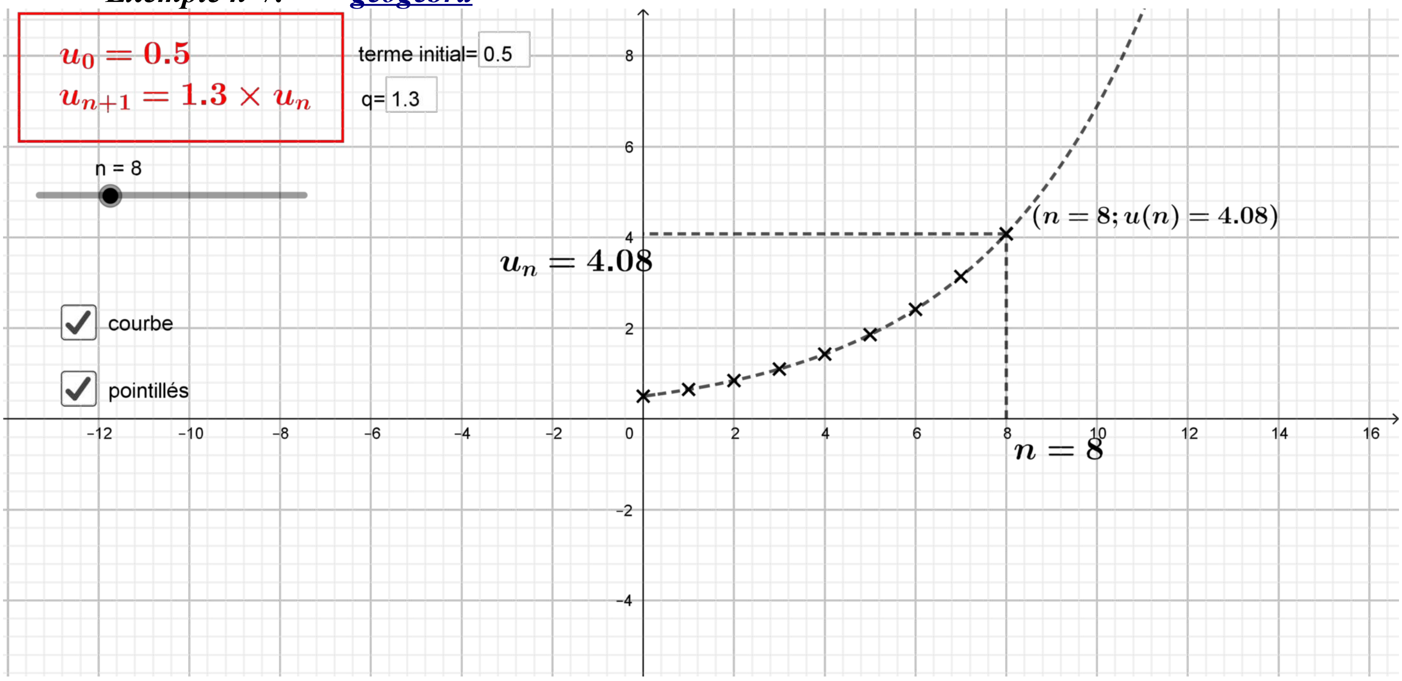
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°5. ***Représentation graphique***

▪ Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

Exemple n°7. [***géogébra***]



Propriété n°6. ***Sens de variation***

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif :

- si $q>1$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $q=1$, la suite est constante;
- si $0<q<1$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

TABLEAUX CROISÉS, FRÉQUENCES

I Croisement de deux variables catégorielles

Définition n°7.

Soit deux variables A et B étudiées sur un même ensemble E d'individus. On peut croiser ces deux variables dans un tableau d'effectifs, à deux entrées.

$Card(A)$ est le nombre d'individus ayant le caractère A.

	B	non B	Total
A	$Card(A\cap B)$	$Card(A\cap \overline{B})$	$Card(A)$
non A	$Card(\overline{A}\cap B)$	$Card(\overline{A}\cap \overline{B})$	$Card(\overline{A})$
Total	$Card(B)$	$Card(\overline{B})$	$Card(E)$

Définition n°1.

▪ La fréquence de A dans l'ensemble E est $f(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(E)}$

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition de la variable A.

▪ Les fréquences marginales en colonne donnent la répartition de la variable B.

▪ La fréquence conditionnelle de B dans A est $f_A(B)=\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(A)}$

Exemple n°1.

Un groupe représentatif de 500 personnes se répartit suivant deux variables catégorielles:

▪ le sexe (A : féminin et non A : masculin)

▪ la Profession et Catégorie Socioprofessionnelle (PCS) réparties en 4 groupes comme ci-dessous.

	$PCS\,1$	$PCS\,2$	$PCS\,3$	$PCS\,4$	Total	Fréquences marginales
A	25	125	105	5	260	$\frac{260}{500}=0{,}52$
non A	15	90	130	5	240	$\frac{240}{500}=0{,}48$
Total	40	215	235	10	500	1
Fréquences marginales	$\frac{40}{500}=0{,}08$	$\frac{215}{500}=0{,}43$	$\frac{235}{500}=0{,}47$	$\frac{10}{500}=0{,}02$	1	

PCS1 : Agriculteurs, artisans, commerçants et chefs d'entreprise
PCS2 : Cadres, prof. intellectuelles sup., prof. Intermédiaires
PCS3 : Employés, ouvriers
PCS4 : Autres professions ou catégories

▪ Les fréquences marginales en colonnes donnent la répartition des *PCS* dans le groupe, indépendamment du sexe des individus. Ainsi, 47% des personnes du groupe sont employés ou ouvriers.

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition du sexe, indépendamment de la PCS des individus. Ainsi 52% des personnes du groupe sont des femmes

▪ La fréquence conditionnelle de la PCS3 dans les personnes de sexe féminin est : $f_A(PCS\,3)=\dfrac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(A)}=\dfrac{105}{260}=\dfrac{21}{53}\approx 0{,}404$

• La fréquence conditionnelle des femmes dans les PCS3 du groupe est:

$$f_{PCS\,3}(A)=\frac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(PCS\,3)}=\frac{105}{235}=\frac{21}{47}\approx 0{,}447$$

II Les tableaux à connaître

Tableau croisé d'effectifs

Y=Vin / X=couleur	y_1=Bordeaux	y_2=Bourgogne	Total
x_1=Blanc	5	4	9
x_2=Rouge	3	7	10
Total	8	11	19

La colonne Total donne les effectifs marginaux de la couleur.

Combien y a-t-il de Blancs ?
→ 9
Combien y a-t-il de Rouges ?
→ 10

La ligne« Total » donnent les effectifs marginaux du vin.
Combien y a-t-il de Bordeaux ? → 8
Combien y a-t-il de Bourgogne ? → 11

Combien y a-t-il de bouteilles ?
→ 19
Combien y-a-t-il de Bourgognes Rouges ? → 7

Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global

Y=Vin / X=couleur	y_1=Bordeaux	y_2=Bourgogne	Total
x_1=Blanc	$\frac{5}{19}\approx 0{,}26$	$\frac{4}{19}\approx 0{,}21$	$\frac{9}{19}\approx 0{,}47$
x_2=Rouge	$\frac{3}{19}\approx 0{,}16$	$\frac{7}{19}\approx 0{,}37$	$\frac{10}{19}\approx 0{,}53$
Total	$\frac{8}{19}\approx 0{,}42$	$\frac{11}{19}\approx 0{,}58$	1

La colonne Total donne les fréquences marginales de la couleur.

Quelle est la fréquence de Blanc parmi l'ensemble des bouteilles ?
→ environ 0,47 ou 47 %

Quelle est la proportion de Rouge parmi l'ensemble des bouteilles ?
→ environ 0,53 ou 53 %

La ligne « Total » donnent les fréquences marginales du vin.
Quelle est la proportion de Bordeaux parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 42 %
Quelle est la fréquence des Bourgogne parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 58 %

Quelle est La fréquence (conjointe) des Bourgogne Rouges parmi l'ensemble des bouteilles ?
→ environ 37 %

Un tableau des fréquences conditionnelles

Y=vin	y_1=Bordeaux	y_2=Bourgogne	Total
x_2=Rouge	$\frac{3}{10}=0{,}3$	$\frac{7}{10}=0{,}7$	$\frac{10}{10}=1$

Ici, on a les fréquences conditionnelles du vin sachant qu'il est rouge.(Y sachant x_2)
On pourrait de même construire les tableaux pour :
(Y sachant x_1) , (X sachant y_1) et (X sachant y_2)

Quelle est proportion de Bordeaux parmi les vins rouges ?
→ $f_{x_2}(y_1)=\frac{Card\,(y_1\cap x_2)}{Card\,(x_2)}=$ 0,3 ou 30 %
Quelle est la fréquence des Bourgogne Rouges ?
→ $f_{x_2}(y_2)=\frac{Card\,(y_2\cap x_2)}{Card\,(x_2)}=$ 0,7 ou 70 %

Pour (Y sachant x_2)
On a restreint le tableau à la ligne rouge.
Voir le tableau croisé des effectifs.

FONCTIONS PART2

I Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

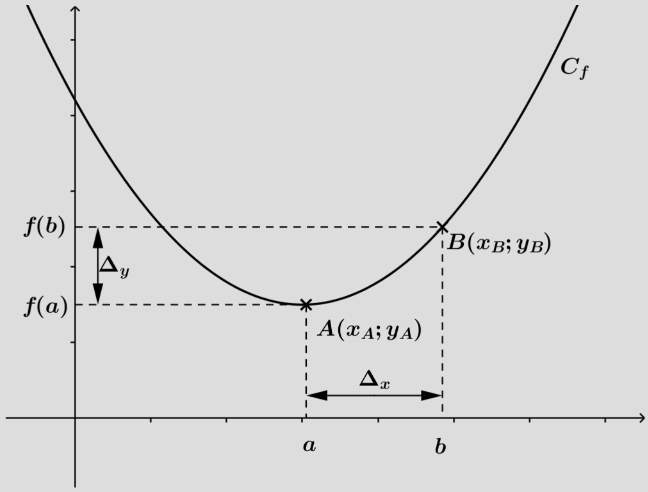
Définition n°1.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b appartenant à I. On appelle taux de variation entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Remarque n°1.

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

Remarque n°2.

Le taux de variation entre a et b est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

Définition n°2.

La droite (AB) est une sécante à la courbe C_f passant par A.

Remarque n°4.

On aurait pu faire la même phrase avec B mais dans la suite on va « fixer » A et « faire varier » B.

II Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points A et B sont proches l'un de l'autre. L'intérêt de cette remarque étant qu'il est facile d'étudier le comportement d'un droite… geogebra

Définition n°3. ***(un peu hors programme...)***

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de f en a et on note si cela existe :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque n°5. ***Nombre dérivé d'une fonction f en a.***

La notion de limite n'étant pas au programme, on se contentera de dire que :

$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Exemple n°1.

Soit $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^2+5 \end{cases}$, déterminons le nombre dérivé de f en 3 .

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

On faisant « tendre h vers 0 » , on obtient 6.

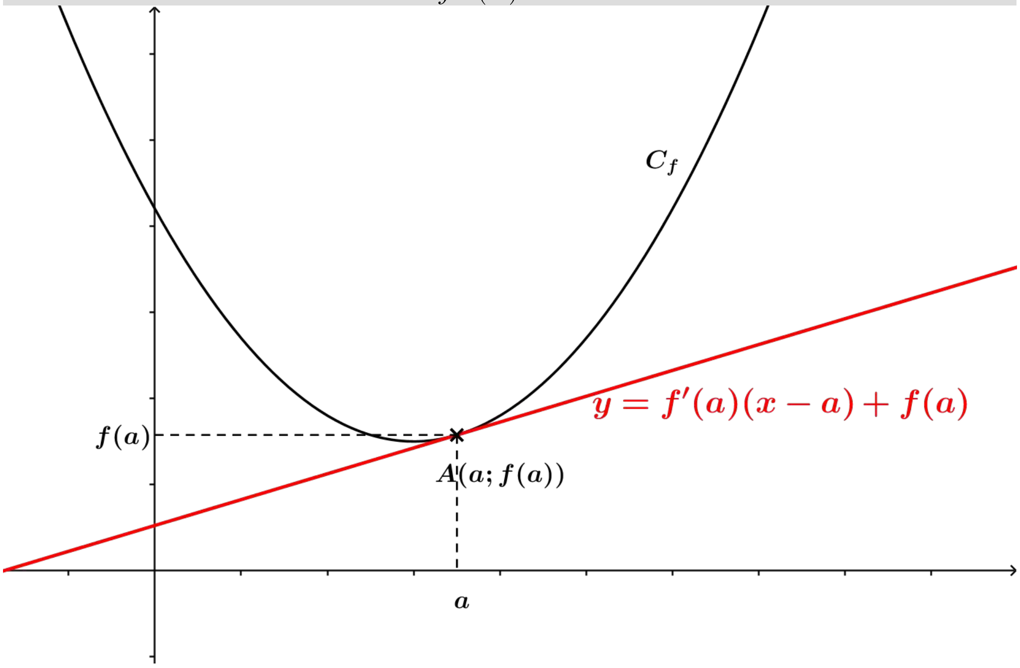
Donc $f'(3)=6$.

III Tangente à la courbe C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°4, nous allons faire « tendre B vers A » et notre sécante va devenir une tangente.
En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$, on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre, quand h tend vers 0 , vers $f'(a)$.

Définition n°4.

La tangente T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque n°6.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à C_f , on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de C_f peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-af'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

Propriété n°1. Équation de la tangente

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I et $a\in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

IV Fonction dérivée d'une fonction

Définition n°5.

$f:=\begin{cases} I\mapsto\mathbb{R} \\ x\to f(x)\end{cases}$ où $I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel x appartenant à l'intérieur de I, $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intérieur de I et on appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f' définie par

$f':=\begin{cases} \mathring{I}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to f'(x)\end{cases}$

Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to x^2+5\end{cases}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$. Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h}=2x+h$$

En faisant « tendre h vers 0 » , on obtient $2x$.

Ainsi $f'(x)=2x$.

Ceci étant valable pour tout réel x, nous venons de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f':=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to 2x\end{cases}$

IV.1 Quelques fonctions dérivées de référence

Remarque n°7. Fonction dérivée d'une fonction constante

Si f est une fonction constante sur I, autrement dit pour tout $x\in I$ $f(x)=k$ avec $k\in\mathbb{R}$ alors :

$f(x+h)-f(x)=k-k=0$ pour tout h, on en déduit que $f'(x)=0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Remarque n°8. Fonction dérivée de la fonction identité

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to x\end{cases}$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $h\in\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

Propriété n°2. Fonction dérivée de la fonction carré

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to x^2\end{cases}$ alors $f':=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to 2x\end{cases}$

preuve :

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « h tend vers 0 » .

Propriété n°3. Fonctions dérivée de la fonction cube

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to x^3\end{cases}$ alors $f':=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\to 3x^2\end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

qui « tend vers $3x^2$ » quand « h tend vers 0 » .

IV.2 Quelques opérations sur les fonctions dérivées

Propriété n°4. Linéarité de la dérivation

Soient $f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$ et $g := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

La fonction dérivée de la fonction $af+bg$ est :

$$(af+bg)' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow a\,f'(x)+b\,g'(x) \end{cases}$$

preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{(af+bg)(x+h)-(af+bg)(x)}{h} &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-(af(x)+bg(x))}{h} \\
&= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h} \\
&= \frac{af(x+h)-af(x)+bg(x+h)-bg(x)}{h} \\
&= \frac{af(x+h)-af(x)}{h}+\frac{bg(x+h)-bg(x)}{h} \\
&= a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

qui tend vers $af'(x)+bg'(x)$ quand h tend vers zéro.

Grâce aux remarques n°7 et 8 ainsi qu'aux propriétés n°2,3 et 4 nous obtenons le formulaire suivant :

V Un formulaire à connaître

Propriété n°5.

Dans ce tableau k, a, b, c et d sont des nombres.

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$a\times 3x^2 + b\times 2x + c$

Exemple n°3.

On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+11x+7$ et déterminons l'expression de sa fonction dérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\times 3x^2 - 5\times 2x + 11 \\ &= 12x^2-10x+11 \end{aligned}$$

VI Variations d'une fonction

Propriété n°6.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) \geqslant 0$
- Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) \leqslant 0$
- Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) = 0$

preuve :

- Supposons que f est croissante sur I

Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $a+h$ appartienne à I.

→ Si $h > 0$ alors :

$a+h > a$ et comme f est croissante sur I $f(a+h) \geqslant f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a > 0$ et $f(a+h)-f(a) \geqslant 0$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$

→ De la même façon, si $h < 0$ alors :

$a+h < a$ et comme f est croissante sur I $f(a+h) \leqslant f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a < 0$ et $f(a+h)-f(a) \leqslant 0$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$

Dans les deux cas $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$, ce qui implique $f'(a) \geqslant 0$

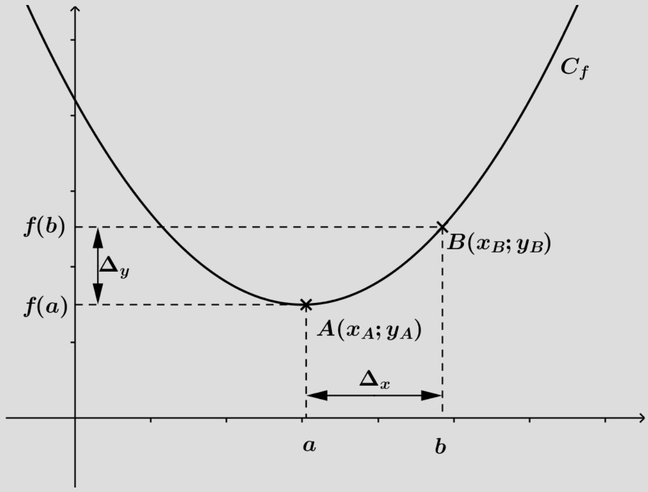
- Les deux autres points se sont démontrent de la même manière et sont laissés à titre d'exercice.

Propriété n°7. ***(admise)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si pour tout x de I $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

VII Le résumé du cours

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



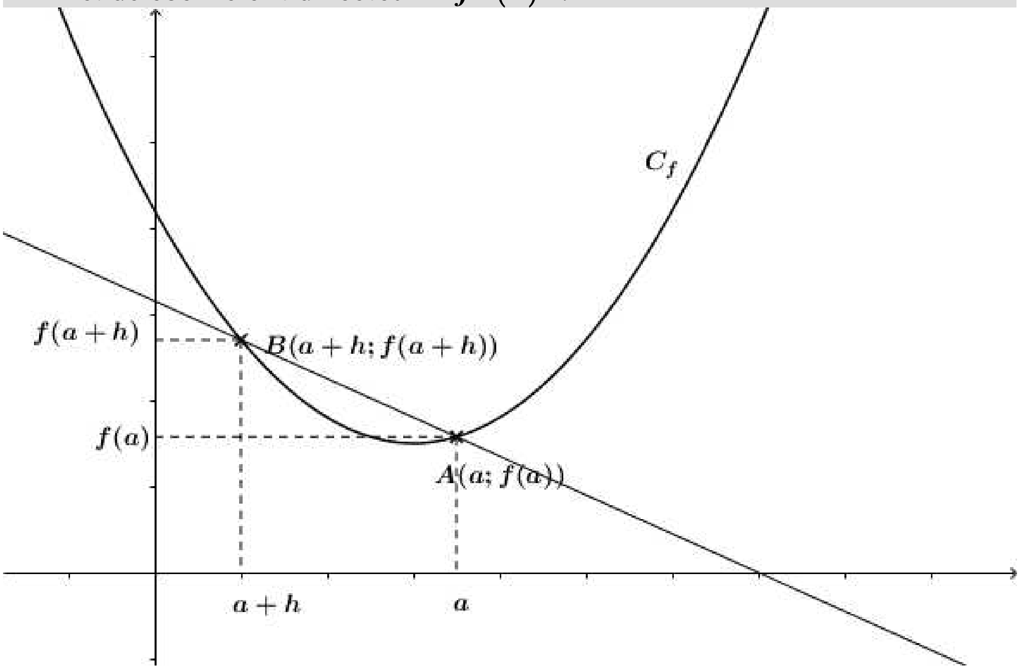
taux de variation : $\boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}}$

où $\Delta_y = y_B - y_A$ et $\Delta_x = x_B - x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

La **tangente** T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $\boldsymbol{f'(a)}$.

Équation de la tangente en a

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Si f et g sont dérivables sur un intervalle I alors $f+g$ aussi et $\boldsymbol{(f+g)' = f' + g'}$

Si f est dérivable sur un intervalle I et si $k \in \mathbb{R}$ alors $k\,f$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(k\,f)' = k\,f'}$

À connaître par cœur

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$a\times 3x^2 + b\times 2x + c$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Les définitions

On considère une expérience aléatoire dont l'univers, noté Ω, est fini et à partir duquel on définit une loi de probabilité.
Soit A et B deux événements de l'univers Ω.

Définition n°1. ***Événement contraire***

On note $\overline{A}$ (et on lit « A barre ») l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

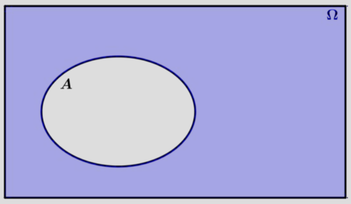


Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

Définition n°2. ***Intersection de deux événements***

On note $A\cap B$ (et on lit « A inter B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus à la fois dans A et B

	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	
$\overline{A}$		

La case coloriée correspond à $A\cap B$

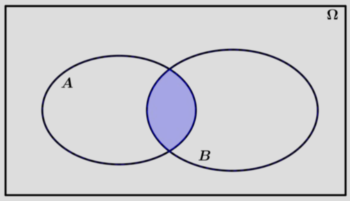


Diagramme de Venn illustrant $A\cap B$

Définition n°3. ***Union de deux événements***

On note $A\cup B$ (et on lit « A union B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou B.

	B	$\overline{B}$
A	$A\cup B$	$A\cup B$
$\overline{A}$	$A\cup B$	

Les cases coloriées correspondent à $A\cup B$

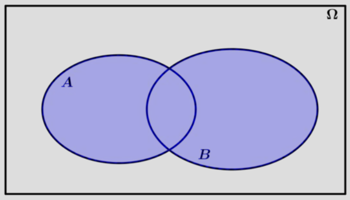


Diagramme de Venn illustrant $A\cup B$

Remarque n°1.

Attention, c'est un « ou inclusif » : l'événement peut appartenir à A, à B mais aussi à A et B en même temps

Définition n°4. ***Probabilité conditionnelle***

On appelle **probabilité de B sachant A** et on note $p_A(B)$ le nombre défini par :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)}}$$

Propriété n°1.

$$\boxed{p_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

preuve :

$$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}}{\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}\times\frac{Card(\Omega)}{Card(A)} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)} = p_A(B)$$

Remarque n°2. ***rappel***

$Card(A)$ est le nombre d'événements élémentaires contenus dans A

II Calculer et interpréter une probabilité conditionnelle.

Méthode n°1.

Un magasin de sport à la montagne dispose de 400 matériaux de glisse. Il propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.
Son matériel est constitué de 45 % de skis de piste, 36 % de snowboards et le reste de skis de randonnée.
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Il a été constaté que la moitié des skis de piste, deux tiers des snowboards et le quart des skis de randonnée ont été abîmés pendant la journée.
Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise leur suivi.

On considère les événements suivants :

- P : « La fiche est celle d'une paire de skis de piste » ;
- S : « La fiche est celle d'un snowboard » ;
- R : « La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée » ;
- A : « Le matériel a été abîmé et nécessite une réparation » .

On représente la situation sous la forme d'un tableau :

Matériel / Résultat du contrôle	P	S	R	Total
A	90	96	19	205
$\overline{A}$	90	48	57	195
Total	180	144	76	400

$$p_A(R) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(A)} = \frac{19}{205} \approx 0{,}0927$$

Sachant que le matériau a été endommagé, il y a environ 9,27 % de chance que ce soit des skis de randonnée.

$$p_R(A) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(R)} = \frac{19}{76} = 0{,}25$$

Il y a une chance sur quatre qu'un ski de randonné soit endommagé

$$p_{\overline{A}}(S) = \frac{Card(\overline{A} \cap R)}{Card(\overline{A})} = \frac{48}{195} \approx 0{,}2462$$

On tire au hasard un matériau qui n'a pas été endommagé, la probabilité que ce soit un snowboard est d'environ 24,62 %.

FONCTIONS PART3

I Fonction polynôme de degré 3

Définition n°1.

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
On parle aussi de fonction du troisième degré.

Exemple n°1.

La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$g(x)=4{,}5\,x^3+\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^2-3\,x+5\sqrt{3}$ est une fonction du troisième degré.

Remarque n°1.

La fonction du troisième degré la plus simple est la **fonction cube** :
$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{cases}$ (ici $a=1, b=c=d=0$)

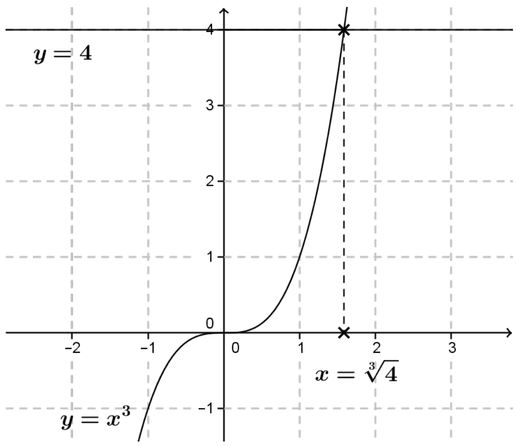
Propriété n°1. ***résoudre $x^3 = c$, avec $c > 0$ (admise)***

Soit c un réel positif. L'équation $x^3=c$ admet une unique solution qui est : $c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{c}$

Exemple n°2.

$x^3 = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$

Ainsi l'unique solution est $\sqrt[3]{4}$

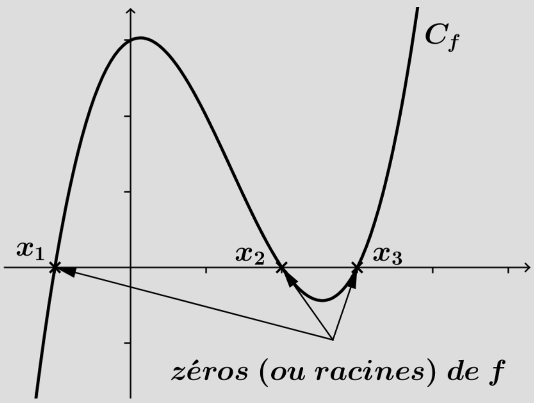


Remarque n°2.

Une équation du troisième degré peut avoir une ou trois solutions réelles.

Propriété n°2. ***Fonction du troisième degré admettant trois zéros (admise)***

Soit f une fonction de degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme développée :
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$(a \neq 0)$
Si l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 alors on peut écrire
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
(c'est bien le même a).



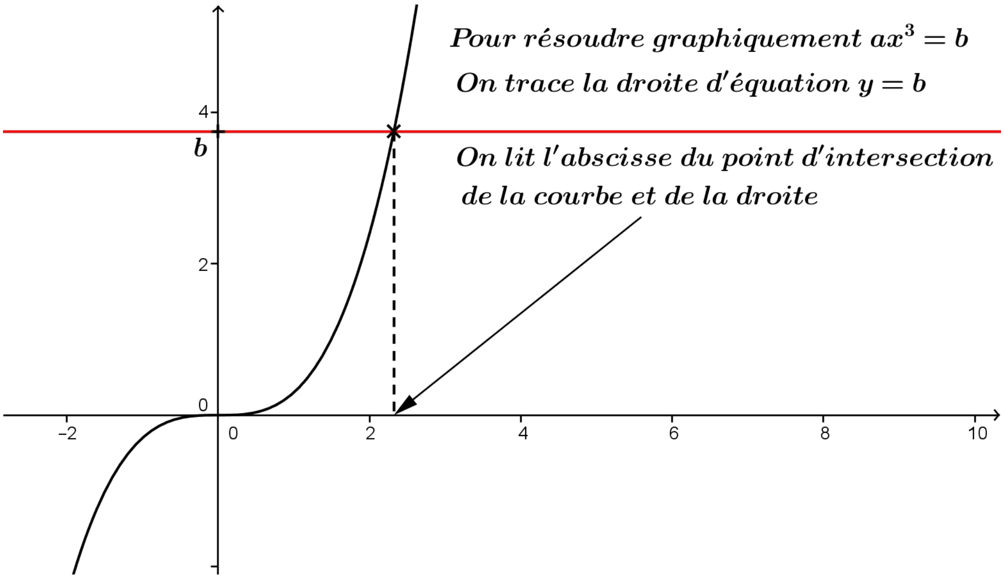
On parle alors de la forme factorisée de f .
Réciproquement, si une fonction de degré 3 est écrite sous forme factorisée : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ alors x_1, x_2 et x_3 sont les zéros de la fonction.

Remarque n°3.

Souvent le mot « racine » sera employé à la place de « zéro ».

II Quelques savoir-faire

Méthode n°1. Résoudre graphiquement une équation du type $ax^3 = b$

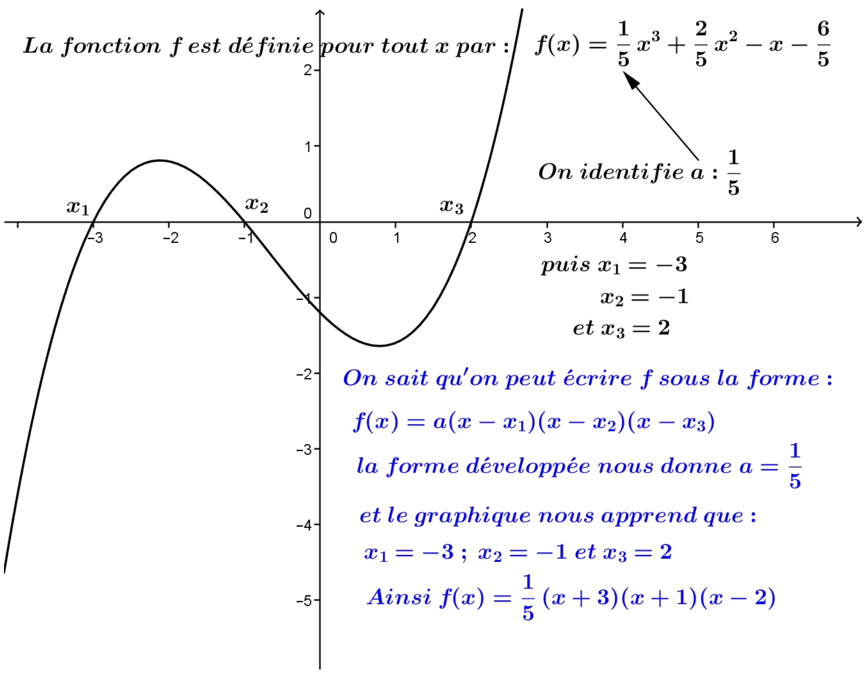


Méthode n°2. Résoudre algébriquement une équation du type $ax^3 = b$

Si $a \neq 0$ alors : $ax^3 = b \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

L' équation admet donc une solution : $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

Méthode n°3. Déterminer la forme factorisée avec l'aide du graphique.



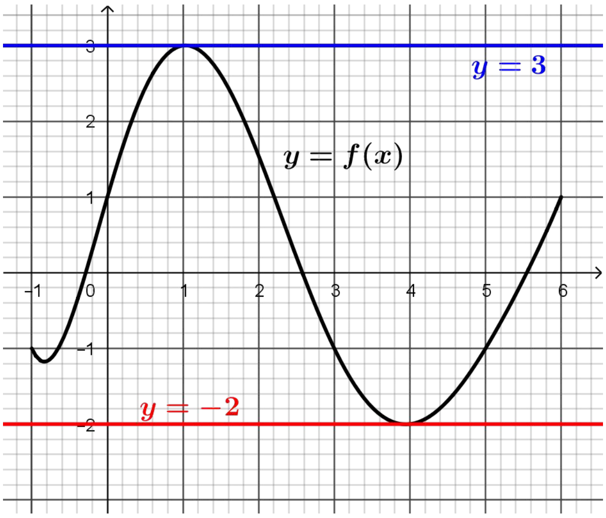
III Extremums d'une fonction

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.
- On dit que $f(c)$ est un maximum de f sur I si, pour tout $x \in I,\ f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que $f(c)$ est un minimum de f sur I si, pour tout $x \in I,\ f(x) \geqslant f(c)$.

Exemple n°3.

Soit fonction f définie sur $I=[-1\ ;\ 6]$ et représentée ci-dessous.



- f admet un minimum sur I qui est le nombre $-2 = f(4)$.
- f admet un maximum sur I qui est le nombre $3 = f(1)$.

Remarque n°4. ***Extremum global ou local***

Dans l'exemple précédent, nous avons donné les extremums globaux de la fonction car nous avons considéré tout l'ensemble de définition.
On pourrait définir des extremums locaux en considérant un intervalle plus petit.
Par exemple, sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$, f admet $-1=f(5)$ comme minimum et $1=f(6)$ comme maximum.

Propriété n°3. ***(admise)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$ et $c \in \mathring{I}$. Si c est un extremum de f alors $f'(c)=0$.

Exemple n°4.

Notons $g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^2\end{cases}$ la fonction carrée. Nous savons que g admet un minimum en $c=0$. La propriété nous dit qu'alors $g'(0)=0$
Effectivement, pour tout x , $g'(x)=2x$ et $2\times 0=0$.

Remarque n°5.

La réciproque de cette propriété est fausse. Notons $h:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^3\end{cases}$ la fonction cube. On a $h'(0)=3\times 0^2=0$ et pourtant la valeur 0 n'est pas un extremum de la fonction. (Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

IV Un exemple d'étude de fonction

Après un énoncé quelconque, on nous annonce que tel ou tel phénomène peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur $[0\ ;\ 40]$ par :

$$f(x) = x^3-36x^2+285x-250$$

1) Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$

2) En déduire les racines de f .

3) Déterminer une expression de $f'(x)$.

4) Montrer que $f'(x)=3(x-5)(x-19)$.

5) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

6) Dresser le tableau des variations de $f(x)$.

7) Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction f ?

8) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 7.

La correction qui résume les savoirs-faire sur les fonctions que vous devez maîtriser.

1) Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$.

$$\begin{aligned}(x-1)(x-10)(x-25) &= (x-1)[x^2-25x-10x+250]\\ &= (x-1)[x^2-35x+250]\\ &= x^3-35x^2+250x-x^2+35x-250\\ &= x^3-36x^2+285x-250\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f(x)$.

Par contre, on ne commence pas par écrire « $f(x)=$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.

Ainsi, on a bien : $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$.

2) En déduire les racines de f .

Les racines de f sont $\boxed{1\ ;\ 10 \text{ et } 25}$.

3) Déterminer une expression de $f'(x)$.

On note l'expression de $f(x)$ donc sans le $'$

$f(x) = x^3-36x^2+285x-250$

Puis on commence à déterminer celle de $f'(x)$ donc avec le $'$

$f'(x) = 3x^2-36\times2x+285\times1-0$

On simplifie bien sûr cette expression

$\boxed{f'(x) = 3x^2-72x+285}$

4) Montrer que $f'(x)=3(x-5)(x-19)$

$$\begin{aligned}3(x-5)(x-19) &= 3[x^2-19x-5x+95]\\ &= 3(x^2-24x+95)\\ &= 3x^2-72x+285\\ &= f'(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f'(x)$

Par contre, on ne commence pas par écrire « $f'(x)=$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.

Ainsi, on a bien : $f'(x)=3(x-5)(x-19)$.

5) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

On travaille avec la forme factorisée de $f'(x)$.

Il y a 3 facteurs, on résoudra donc 3 inéquations qui nous permettront de savoir où placer les « + » dans le tableau (c'est pour cela que les inéquations sont du type « >0 »):

$3>0$ est vraie quelque soit la valeur de x

$x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

$x-19>0 \Leftrightarrow x>19$

x	0		5		19		40
3		+	|	+	|	+	
$x-5$		−	0	+	|	+	
$x-19$		−	|	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Les signes ne s'écrivent pas en dessous des nombres mais entre eux.

Étudions la 1ere colonne de signes (on va de haut en bas) :

Le 1er + signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, 3 est strictement positif (élémentaire mon cher Watson…).

Le − qui suit signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, $x-5$ est strictement négatif.

Le − suivant signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, $x-19$ est strictement négatif.

Sur $[0\ ;\ 5[$ les trois facteurs ont un signe constant, on peut donc appliquer sans risque la règle des signes pour obtenir que sur $[0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ est strictement positif

(« + par − par − ça donne + »)

On a fait la même chose avec les autres colonnes

6) Dresser le tableau des variations de $f(x)$.

On va se servir de la question précédente et je vais ajouter une ligne cyan (et hé oui c'est la couleur utilisée ici) qui rappellera la dernière du tableau précédent. Cette ligne n'est pas à écrire sur la copie .

x	0		5		19		40
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$f(0)=-250$	$\nearrow$	$f(5)=400$	$\searrow$	$f(19)=-972$	$\nearrow$	$f(40)=7550$

7) Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction f ?

Le maximum vaut 7550 et est atteint quand $x=40$

Le minimum vaut -972 et est atteint quand $x=19$

On peut remarquer que 400 n'est qu'un maximum local (par exemple sur $[0\ ;\ 19]$)

Il faut donc faire attention et ne pas oublier les valeurs extrêmes de l'ensemble de définition.

8) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 7.

Une équation de la tangente au point d'abscisse est :

$y=f'(7)(x-7)+f(7)$

On remplace $f'(7)$ et $f(7)$ par leur valeur

$y=324(x-7)-72$

On développe et réduit l'expression

$\boxed{y=324x-2340}$

Expérience aléatoire, Modèle associé

I Expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

Remarque n°1.

Nous ne ferons pas de distinction entre « expérience aléatoire » et « épreuve », les deux étant surtout utilisés comme synonymes afin d'éviter les répétitions…

Les épreuves indépendantes

On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

▪ épreuve n°1 : On lance une pièce de monnaie truquée de façon à obtenir Pile deux fois plus souvent que Face et on note le côté obtenu.

On note :

P : « Obtenir Pile » et
F : « Obtenir Face »
Son univers est alors : $\Omega_1=\{P\ ;\ F\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°1			
Issue	P	F	Total
Probabilité	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

▪ épreuve n°2 : On tire une boule dans une urne contenant 5 boules Noires, 3 boules Rouges et 2 boules Blanches et on note la couleur obtenue.

On note :

N : « La boule tirée est Noire » ;
R : « La boule tirée est Rouge » et
B : « La boule tirée est Blanche »
Son univers est alors : $\Omega_2=\{N\ ;\ R\ ;\ B\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°2				
Issue	N	R	B	Total
Probabilité	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	1

Définition n°1. épreuves indépendantes (très intuitive…)

Quand deux (ou plus) épreuves n'ont aucune influence l'une sur l'autre. On dit qu'elles sont **indépendantes**.

Remarque n°2.

Nos deux épreuves sont clairement indépendantes…

L’expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

Nous allons à présent en construire une troisième à partir de ces deux là.
On enchaîne l’épreuve n°1 et n°2.

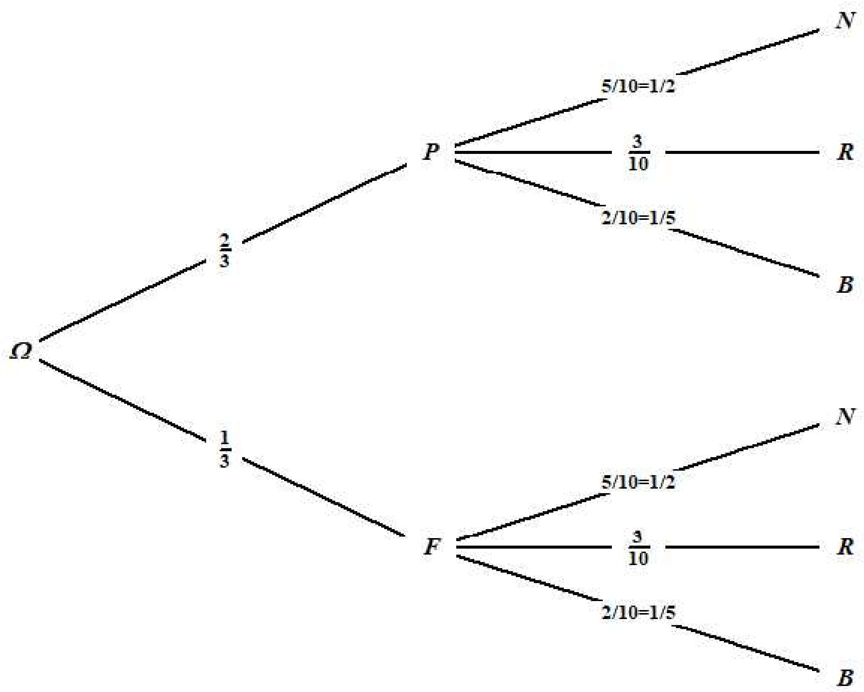
Définition n°2.

On obtient ce qu’on appelle une **expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes**.

Son univers est alors :

$$\Omega=\{(P,N)\ ;\ (P,R)\ ;\ (P,B)\ ;\ (F,N)\ ;\ (F,R)\ ;\ (F,B)\}$$

Pour déterminer sa loi de probabilité, on va utiliser un arbre pondéré.



Loi de probabilité de l’expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes							
Issue	(P,N)	(P,R)	(P,B)	(F,N)	(F,R)	(F,B)	Total
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	1
	$\frac{10}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{30}{30}$

Définition n°3.

Modéliser une **expérience aléatoire**, c'est **associer** à cette **expérience** une loi de probabilité.

II Le cas Bernoulli

Définition n°4. Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues.
p est la probabilité du succès et par conséquent, la probabilité de l'échec (souvent notée q) vaut $1-p$.

Source : Wikipedia

Exemple n°5.

Dans notre épreuve n°1, si on décide que le succès est d'obtenir Pile alors on obtient une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{3}$.

Le **modèle associé** à notre épreuve est alors une épreuve de Bernoulli.

Définition n°5. Schéma de Bernoulli

Si on enchaîne plusieurs (n) épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p alors on obtient un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,,\,p)$.

Exemple n°6.

On peut répéter notre épreuve n°1 , en remarquant que le résultat du 1[er] lancer n'a aucune influence sur le second. On obtient un schéma de Bernoulli de paramètre $\left(2,\frac{2}{3}\right)$

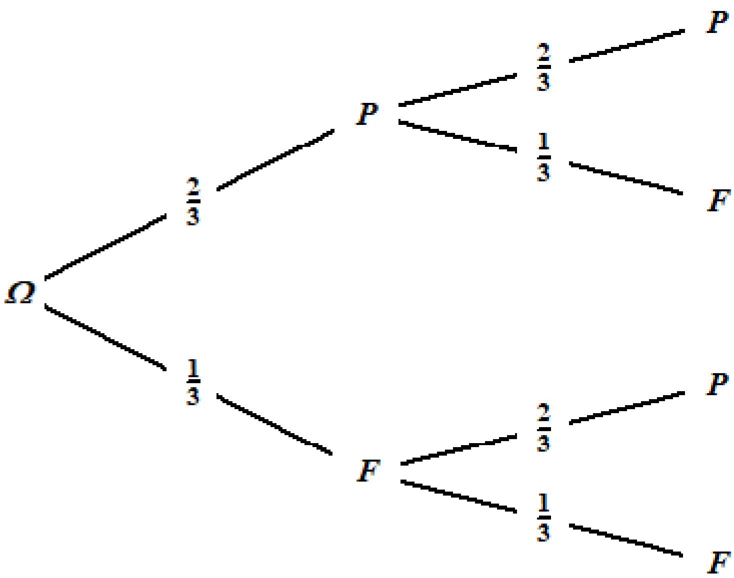
Le modèle associé est alors un schéma de Bernoulli.

Remarque n°3.

On se concentrera sur ce type d'expérience aléatoire aléatoire à deux épreuves indépendantes.

Exemple n°1. Représenter un schéma de Bernoulli

On peut représenter l'expérience aléatoire de l'exemple n°2 avec un arbre pondéré :



VARIABLES ALÉATOIRES

I Quelques définitions

Définition n°1. Variable aléatoire

Étant donnée une expérience aléatoire, définir une variable aléatoire, c'est associer à chaque issue de l'expérience un nombre réel. On la note à l'aide d'une majuscule : X ou Y par exemple.

Exemple n°1. Désigner un événement

$\{X = a\}$: X prend la valeur a
$\{X < a\}$: X prend des valeurs strictement inférieures à a.

Remarque n°1. Une autre notation possible

$\{X \in a\}$ pour $\{X = a\}$
$\{X \in]-\infty ; a[\}$ pour $\{X < a\}$

Exemple n°2. Le jeu auquel tout le monde veut jouer

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient $Pile$, on gagne 1€, sinon on gagne 2€.
On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue de fin du jeu, associe la somme gagnée par le joueur.

Notre jeu est une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.
▪ Épreuve n°1 : on lance la pièce, on note P quand on obtient $Pile$ et F quand on obtient $Face$.
L'univers est $\Omega_1=\{P,F\}$
▪ Épreuve n°2 : Exactement la même chose, l'univers est alors $\Omega_2=\{P,F\}$
▪ L'univers de notre expérience aléatoire est alors $\Omega=\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$

À chacune des quatre issues, on associe un nombre réel :
(P,P) est associé au nombre 2.
(P,F) et (F,P) sont, chacune, associées au nombre 3.
(F,F) est associé au nombre 4.

Nous avons ainsi défini notre variable aléatoire.
$\{X = 2\}$ correspond à (P,P)
$\{X = 3\}$ correspond à (P,F) ou (F,P)
$\{X = 4\}$ correspond à (F,F)

$\{X = 5\}$ correspond à l'ensemble vide…
« $\{X = \text{quelque chose autre que } 2{,}3 \text{ ou } 4\}$ » correspond à l'ensemble vide…

$\{X \leqslant 3\}$ correspond à (P,P) ou (P,F) ou (F,P)
etc...

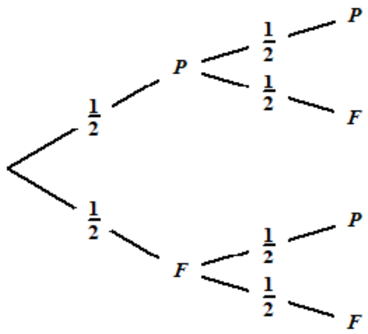
Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Étant donnée une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X, définir la loi de probabilité de X, c'est associer, à chaque valeur de cette variable aléatoire, la probabilité de l'événement associé.

Exemple n°3. Avec le jeu auquel tout le monde veut jouer

Loi de probabilité de X				
a_i	2	3	4	Total
$P(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

En effet, grâce à un arbre pondéré :



(P, P) qui correspond à $\{X = 2\}$

(P, F) qui correspond à $\{X = 3\}$

(F, P) qui correspond à $\{X = 3\}$

(F, F) qui correspond à $\{X = 4\}$

On peut déterminer chaque valeur prise par X et la probabilité de l'événement qui lui est associé.

$P(X = 2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$P(X = 3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Définition n°3. Espérance

On donne une expérience aléatoire (à n issues possibles) sur laquelle on a défini une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donné ci-dessous.

Loi de probabilité de X					
a_i	a_1	a_2	…	a_n	Total
$P(X=a_i)$	p_1	p_2	…	p_n	1

On appelle espérance de X et on note $E(X)$, le nombre défini par

$E(X) = p_1\times a_1 + p_2\times a_2 + \ldots + p_n\times a_n$

Remarque n°2.

Cela représente, la valeur moyenne de X que l'on peut espérer obtenir en répétant l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

Exemple n°4. Toujours avec le jeu auquel tout le monde veut jouer

$E(X) = \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 3$

En moyenne, on peut espérer gagner trois euros à chaque fois que l'on joue…

II Le cas Bernoulli

Définition n°4. Loi de Bernoulli

On se donne une épreuve de Bernoulli (rappel ici en page3) de paramètre p
On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
On appelle loi de Bernoulli de paramètre p, la loi suivie par X

Loi de Bernoulli de paramètre p notée $B(p)$			
a_i	0	1	Total
$P(X=a_i)$	$1-p$	p	1

Propriété n°4. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors : $\boxed{E(X)=p}$

preuve :

$$E(X) = 0\times(1-p) + 1\times p = p$$

III Simulations et échantillons

Définition n°5. échantillon de taille n associé à une épreuves de Bernoulli

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associé à une épreuve de Bernoulli.

Exemple n°1. Simuler un échantillon de taille n

```
import random

def Bernoulli(p):
    """ epreuve de Bernoulli, p
      est la probabilité de succés
      on renvoie alors 1
      (sinon on renvoie 0)."""
    if random.random() <= p:
        return 1
    else:
        return 0

def echantillon(n,p=0.5):
    """echantillon de taille n
      associé à une épreuve de
      Bernoulli de parametre p
      qui vaut de base 0.5"""
    result = []
    for i in range(n):
        result.append(Bernoulli(p))
    return result

def frequence_des_uns(echantillon):
    """renvoie la frequence des 1
      dans l'echantillon (liste) donné"""
    numerateur = 0
    denominateur = len(echantillon)
    for i in range(denominateur):
        numerateur += echantillon[i]
    return numerateur/denominateur
```

Vous pouvez télécharger le programme ci-dessus en cliquant dessus. (Il comporte quelques annotations supplémentaires pour vous aider à le comprendre)

Plutôt que de truquer une pièce de monnaie afin qu'elle ait 40 % de chance tomber sur Pile puis de la lancer 20 fois en notant le résultat, on préfère effectuer une simulation.

```
>>> mon_echantillon=echantillon(20,0.4)
>>> mon_echantillon
[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]
>>> frequence_des_uns(mon_echantillon)
0.35
>>>
```

On simule un échantillon de taille 20 associé à une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4.
Cette simulation peut se faire avec une feuille de calcul ou comme ici avec un programme informatique.
L'intérêt est que l'on peut facilement augmenter la taille de l'échantillon.

IV Étude des échantillons

Définition n°6. Fluctuation d'échantillonnage

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès obtenues sur chaque échantillon va varier (fluctuer). On appelle cela la fluctuation d'échantillonnage.

Exemple n°2.

On reprend l'exemple précédent et on simule 10 échantillons de taille 20 d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4.

```
>>> for i in range(10):
        print(frequence_des_uns(echantillon(20,0.4)))


0.5
0.3
0.4
0.35
0.3
0.35
0.6
0.65
0.3
0.3
>>> 
```

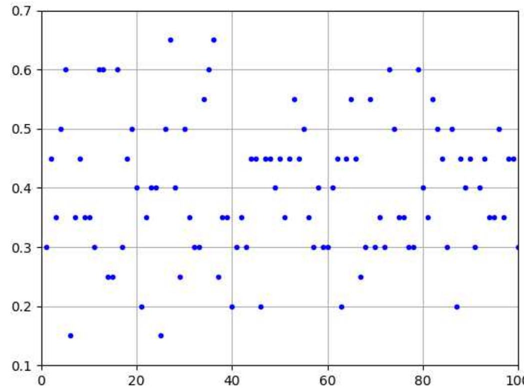
On constate que la fréquence du succès fluctue..

Remarque n°3.

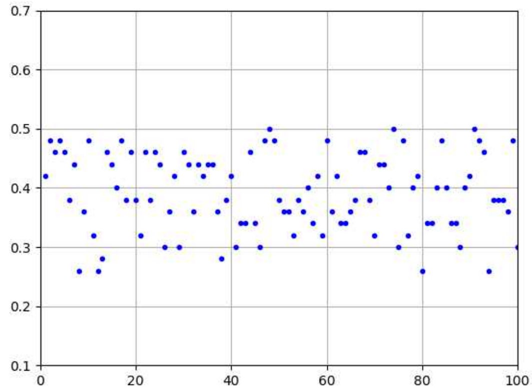
Par contre, plus la taille des échantillons augmente, plus la fluctuation diminue.

Dans les graphiques suivants, chaque point représente la fréquence du succès d'un échantillon.

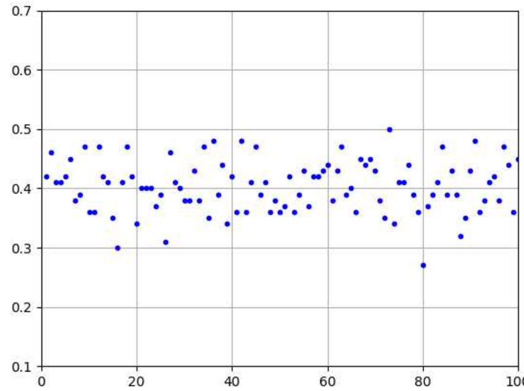
100 échantillons de taille 20
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



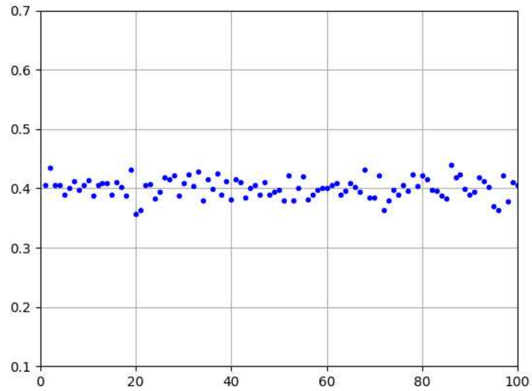
100 échantillons de taille 50
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



100 échantillons de taille 100
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



100 échantillons de taille 1000
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



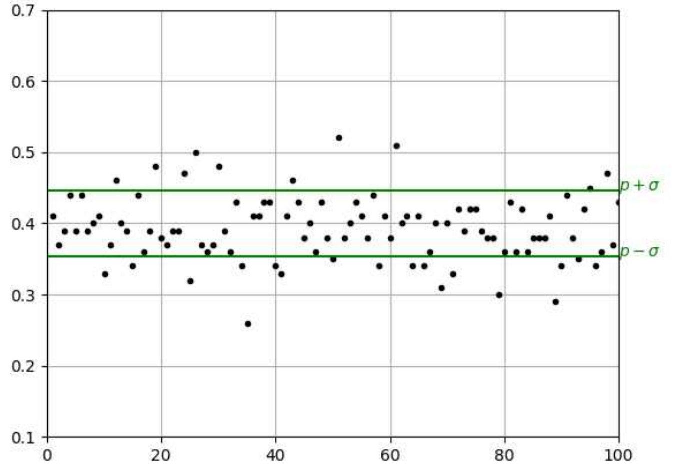
Remarque n°4.

On peut remarquer que en moyenne :

environ 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p-\sigma \ ; \ p+\sigma]$
environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-2\sigma \ ; \ p+2\sigma]$
environ 99% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-3\sigma \ ; \ p+3\sigma]$

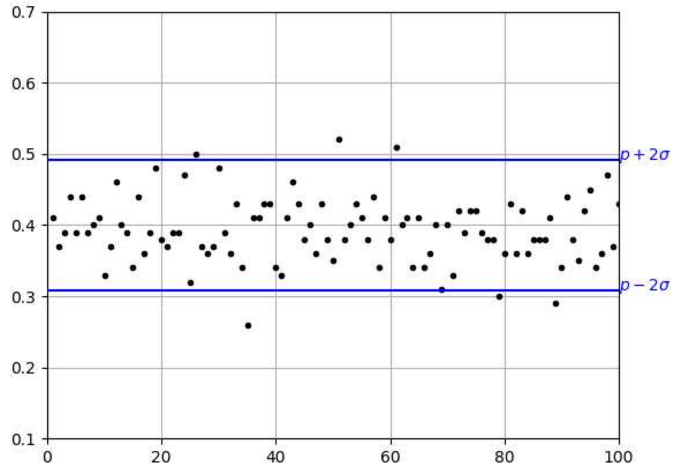
où σ est l'écart-type de la série des fréquences (voir la page 5 de ce cours)

Il faut retenir que :



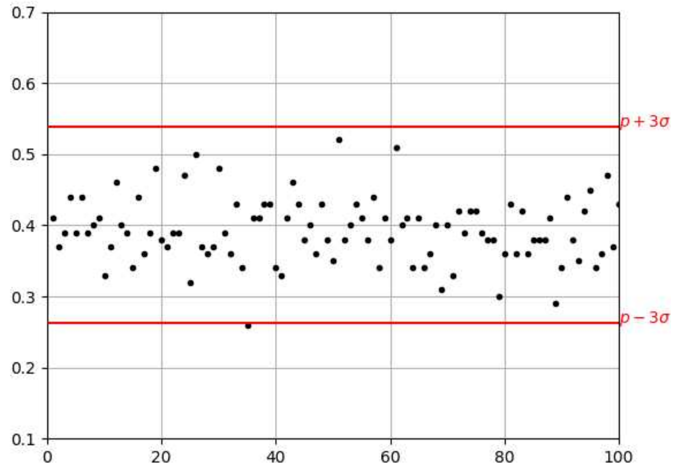
▪ Il n'est pas rare d'obtenir un échantillon dont la fréquence s'écarte de plus d'un écart-type de la fréquence théorique :
cela arrive dans environ 32% des cas
($100\%-68\%$)

Effectivement, il y a pas mal de points à l'extérieur des lignes vertes.



▪ Il est par contre très rare que la fréquence d'un échantillon s'écarte de plus de deux écarts-types de la fréquence théorique :
Cela arrive dans 5 % des cas.

Effectivement, il y a peu de points à l'extérieur des lignes bleues.



▪ Il est encore beaucoup plus rare que la fréquence d'un échantillon s'écarte de plus de trois écarts-types de la fréquence théorique : Cela arrive dans 1 % des cas.

Effectivement, il y a très peu de points à l'extérieur des lignes rouges.

Propriété n°1. ***Lien entre l'écart-type σ et la taille n de l'échantillon (admis)***

La valeur σ n'est pas très éloignée de $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Remarque n°5.

Cela signifie qu'en pratique, on prendra $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ comme valeur de σ .