LA FONCTION INVERSE E04

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Une entreprise fabrique des tables de jardin. La production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.

Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à $C(q)=q^2+50q+100$ où q appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.

1) Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

Il s'agît de calculer $C(20)$:

$C(20)=20^2+50\times 20+100=1500$

Ainsi, le coût de production de 20 tables est de $\boxed{1500\ €}$

2) À chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production :

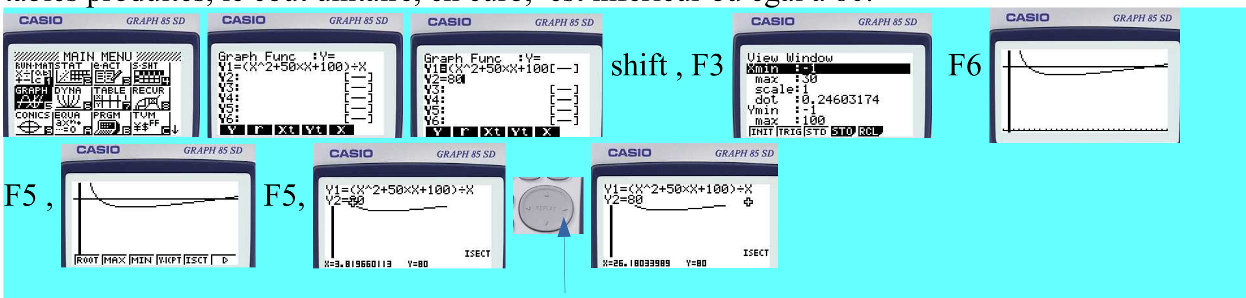
$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q}$$

2.a) Calculer le coût unitaire de production, en euros, pour 20 tables produites.

$$C_u(20) = \frac{C(20)}{20} = \frac{1500}{20} = 75$$

Ainsi, le coût unitaire de production pour 20 tables est de : $\boxed{75\ €}$

2.b) Représenter la fonction C_u sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites, le coût unitaire, en euro, est inférieur ou égal à 80.



Avec la calculatrice : on peut dire que le coût unitaire, en euro, est inférieur à 80 $\boxed{\text{entre 4 et 26 tables}}$

2.c) Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1\ ;\ 30]$,

$$C_u'(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$$

D'une part :

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^2+50q+100}{q} = q+50+\frac{100}{q}$$

$$C_u'(q) = 1-\frac{100}{q^2}$$

D'autre part :

$$\frac{(q-10)(q+10)}{q^2} = \frac{q^2-100}{q^2} = 1-\frac{100}{q^2}$$

Ainsi, on a bien $C_u'(q) = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.

2.d) Étudier le signe de $C_u'(q)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_u .

▪ $q-10 > 0 \Leftrightarrow q > 10$ et ▪ $q+10 > 0 \Leftrightarrow q > -10$

q	1		10		30
$q-10$		$-$	0	$+$	
$q+10$		$+$	|	$+$	
$C_u'(q)$		$-$	0	$+$	
$C_u(q)$	151	↘	70	↗	≈ 83

2.e) Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

D'après le tableau de variation, il faut fabriquer $\boxed{10 \text{ tables par jour}}$ pour un $\boxed{\text{coût minimal de } 70 \text{ €}}$.

EXERCICE N°2 *Toujours faire attention aux notations (Le corrigé)*

Une entreprise fabrique chaque jour x litres d'un produit chimique, où x appartient à $[1\ ;\ 50]$.
Le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $[1\ ;\ 50]$ par :

$$C(x)=0{,}5x^2+2x+200 \ ,$$

les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

1) Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction C_M définie par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, où $x \in [1\ ;\ 50]$.

1.a) Exprimer le coût moyen de production en fonction de x .

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0{,}5x^2+2x+200}{x} = 0{,}5x+2+\frac{200}{x} \ .$$

Ainsi : $\boxed{C_M(x) = 0{,}5x+2+\dfrac{200}{x}}$

1.b) Justifier que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ 50]$,

$$C_M'(x) = \frac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$$

D'une part :

$$C_M(x) = 0{,}5x+2+\frac{200}{x}$$

$$C_M'(x) = 0{,}5-\frac{200}{x^2}$$

D'autre part :

$$\frac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2} = \frac{0{,}5[x^2-400]}{x^2} = \frac{0{,}5x^2-200}{x^2} = 0{,}5-\frac{200}{x^2}$$

Ainsi, on a bien $C_M'(x) = \dfrac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$

1.c) Étudier le signe de $C_M'(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 50]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .

- 0,5 est toujours positif.
- $x-20 > 0 \Leftrightarrow x > 20$ et
- $x+20 > 0 \Leftrightarrow x > -20$

x	1		20		50
0,5		+	|	+	
$x-20$		−	0	+	
$x+20$		+	|	+	
$C_M'(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$	202,5	↘	22	↗	31

1.d) En déduire la quantité de produit chimique à produire pour que le coût moyen soit minimal.

D'après le tableau de variation, il faut produire $\boxed{20 \text{ litres}}$ de produit chimique pour que le coût moyen soit minimal.

2) Le coût marginal de production, noté C_m pour une quantité produite x, est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire. On a donc :

$$C_m(x)=C(x+1)-C(x) .$$

2.a) Calculer le coût marginal pour une production de 10 litres de produit, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 10 litres à 11 litres.

$$\begin{aligned} C_m(10) = C(10+1)-C(10) &= C(11)-C(10) \\ &= 0,5\times 11^2+2\times 11+200-(0,5\times 10^2+2\times 10+200) \\ &= 282,5-270 = 12,5 \end{aligned}$$

Ainsi, le coût marginal cherché est: $\boxed{12,5\text{ €}}$

2.b) En pratique, les économistes assimilent le coût marginal de production à la dérivée du coût total et considèrent donc que $C_m(x)=C'(x)$.

Calculer $C'(x)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

▪ Calculons la dérivée demandée :

$C(x)=0,5x^2+2x+200$

$C'(x)=0,5\times 2x+2\times 1+0$

$\boxed{C'(x)=x+2}$

▪ $C'(10)=10+2=12$

On constate que $\boxed{C'(10) \text{ et } C_m'(10) \text{ sont assez proches}}$.

2.c) Les économistes affirment que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal. Vérifier que $-0,5+\sqrt{400,25}$ est une solution de l'équation $C_M(x)=C_m(x)$ pour confirmer l'affirmation faite par les économistes.

$C_M(-0,5+\sqrt{400,25})-C_m(-0,5+\sqrt{400,25})=0$

Ce qui montre que c'est bien une solution de l'équation.

Or : $-0,5+\sqrt{400,25}\approx 20,51$

On est donc en accord avec le résultat trouvé à la question 1d)

Mais d'où vient ce nombre ?

$$\begin{aligned} & C_M(x)=C_m(x) \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x} = C(x+1)-C(x) \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x} = 0,5(x+1)^2+2(x+1)+200-(0,5x^2+2x+200) \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x} = 0,5(x^2+2x+1)+\cancel{2x}+2+\cancel{200}-0,5x^2-\cancel{2x}-\cancel{200} \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x} = 0,5x^2+x+0,5+2-0,5x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x} = x+2,5 \\ \Leftrightarrow\ & 0,5x+2+\frac{200}{x}-x-2,5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -0,5x-0,5+\frac{200}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-0,5x^2-0,5x+200}{x} = 0 \end{aligned}$$

$-0,5x^2-0,5x+200$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-0,5$, $b=-0,5$ et $c=200$

On note Δ le discriminant de ce trinôme.

$\Delta=b^2-4ac=0,25+400=400,25>0$

On en déduit qu'il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 avec :

$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,5-\sqrt{400,25}}{-1}\approx 20,51$ et $r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\approx -19,51$

Comme on cherche à résoudre sur [1 ; 50] donc il ne reste que r_1 comme solution.

Vous avez bien sûr reconnu r_1 ;)