LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°1 *Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente*

Pour chaque fonction f, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse a.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 3$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$f'(x) = 4\times 3x^2 - 5\times 1 + 0$

$\boxed{f'(x) = 12x^2 - 5}$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = 1$

d'où

$f(1) = 4\times 1^3 - 5\times 1 + 3 = 2$

et

$f'(1) = 12\times 1^2 - 5 = 7$

Ainsi :

$y = 7(x-1) + 2$

qui se réduit à :

$\boxed{y = 7x - 5}$

2) $f(x) = -7t^2 - \dfrac{3}{t} + 5$, $I =]0\ ;+\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$f'(t) = -7\times 2t - 3\times\dfrac{-1}{t^2} + 0$

$\boxed{f'(t) = -14t + \dfrac{3}{t^2}}$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = 3$

d'où

$f(3) = -7\times 3^2 - \dfrac{3}{3} + 5 = -59$

et

$f'(3) = -14\times 3 + \dfrac{3}{3^2} = -42 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-126+1}{3} = -\dfrac{125}{3}$

Ainsi :

$y = -\dfrac{125}{3}(x-3) - 59$

qui se réduit à :

$\boxed{y = \dfrac{-125}{3}x + 184}$

3) $f(x) = (2x-3)^3(x^2+1)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$f(x) = u(x)\times v(x)$

avec :

$u(x) = (2x-3)^3$ d'où $u'(x) = 3\times 2\times(2x-3)^2 = 6(2x-3)^2$

et

$v(x) = x^2+1$ d'où $v'(x) = 2x$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 6(2x-3)^2(x^2+1) + 2x(2x-3)^3 \\ &= (2x-3)^2\left[6(x^2+1)+2x(2x-3)\right] \\ &= (2x-3)^2(6x^2+6 + 4x^2-6x) \\ &= (2x-3)^2(10x^2 + 6x^2+6) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2(2x-3)^2(5x^2-3x+3)}$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.
Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.
Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$$\boxed{f'(x) = 40x^4-144x^3+186x^2-126x+54}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$f(-1) = (2(-1)-3)^3((-1)^2+1) = (-5)^3\times 2 = -250$

et

$f'(-1) = 2(2(-1)-3)^2(5(-1)^2-3(-1)+3) = 2\times(-5)^2\times 11 = 550$

Ainsi :

$y = 550(x+1)-250$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = 550x+300}$$

4) $f(x) = \dfrac{4x^5-10x^2+3}{2x}$, $I =]-\infty\ ;\ 0[$, $a = -1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = 4x^5-10x^2+3$ d'où $u'(x) = 4\times 5x^4-10\times 2x+0 = 20x^4-20x$

et

$v(x) = 2x$ d'où $v'(x) = 2$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(20x^4-20x) - 2(4x^5-10x^2+3)}{(2x)^2} \\ &= \frac{2[x(20x^4-20x)-(4x^5-10x^2+3)]}{(2x)^2} \\ &= \frac{2(20x^5-20x^2-4x^5+10x^2-3)}{2x\times 2x} \\ &= \frac{16x^5-10x^2-3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{16x^5-10x^2-3}{2x^2}}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$$f(-1) = \frac{4(-1)^5-10(-1)^2+3}{2(-1)} = \frac{-4-10+3}{-2} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

et

$$f'(-1) = \frac{16(-1)^5-10(-1)^2-3}{2(-1)^2} = \frac{-16-10-3}{2} = -\frac{29}{2}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{29}{2}(x+1)+\frac{11}{2}$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -\frac{29}{2}x-9}$$