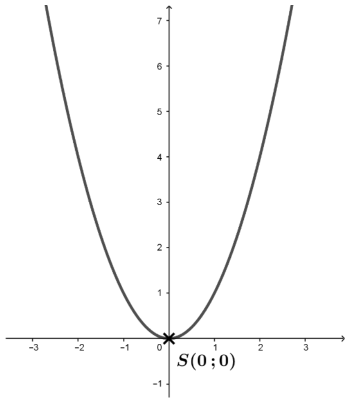
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Nous allons généraliser ce que nous avons appris sur la fonction carré. Il est donc judicieux d'avoir relu ***ce cours*** avant de commencer...

I Jouons avec la parabole



Notons f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$.

Nous savons que sa représentation graphique est la parabole d'équation $y = f(x)$ ou encore $y = x^2$.

Nous savons également que son sommet S a pour coordonnées $(0 \;;\; 0)$.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

I.1 Premier jeu

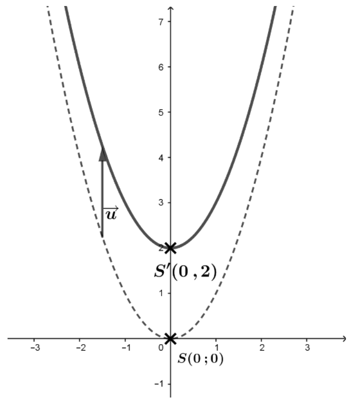
Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Amusons-nous à translater cette parabole de deux unités selon l'axe des ordonnées et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0\ ;2)$? c'est très bien!)

Nous n'avons pas changé les abscisses, par contre nous avons augmenté toutes les ordonnées de 2.

Notre nouvelle parabole a donc pour équation $y=f(x)+2$ ou encore $y=x^2+2$. Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler g et telle que $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\ \mapsto x^2+2\end{cases}$

Son sommet S' a alors pour coordonnées $(0\ ;2)$.

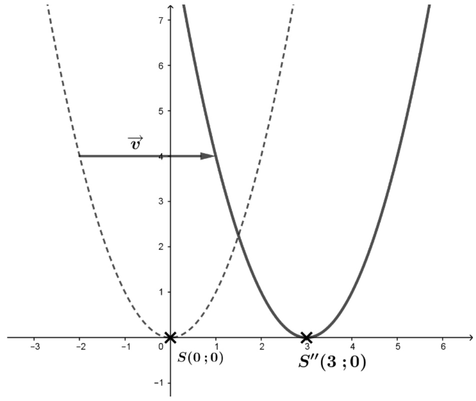


I.2 Deuxième jeu

Cliquer pour Visualiser
$y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Amusons-nous à translater cette parabole de trois unités selon l'axe des abscisses et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(3\ ;0)$? c'est très bien!)

Nous avons augmenté les abscisses de 3 mais nous n'avons pas changé les ordonnées. C'est à dire que si $A(x_A\ ;\ y_A)$ est un point de la parabole de départ alors son image $B(x_B\ ;\ y_B)$ est telle que : $\begin{cases} x_B=x_A+3 \\ y_B=y_A \end{cases}$.

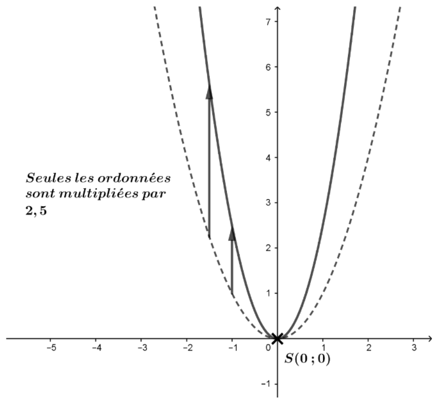


De la première égalité, on déduit que $x_A=x_B-3$ et de la seconde, on déduit que $y_B = y_A = f(x_A) = f(x_B-3)$. Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = f(x-3)$ ou encore $y = (x-3)^2$. (Comprenez bien d'où vient le « moins »). Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler h et telle que $h:\begin{cases} \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x \mapsto (x-3)^2 \end{cases}$

Son sommet S'' a alors pour coordonnées $(3\ ;0)$.

I.3 Troisième jeu

Amusons-nous à « déformer » cette parabole en multipliant les ordonnées par 2,5.
Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = 2{,}5 \times f(x)$ ou encore $y = 2{,}5x^2$.
Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler k et telle que $k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5x^2 \end{cases}$.
Son sommet reste le même : $S(0\ ;\ 0)$



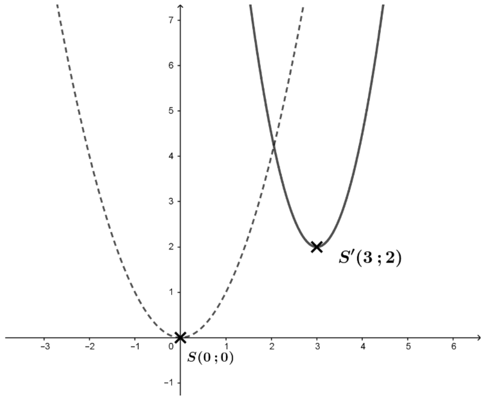
Cliquer pour Visualiser $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$

I.4 Dernier Jeu

On combine les trois premiers jeux !

On obtient la parabole d'équation : $y = 2{,}5(x-3)^2+2$ qui répresente une fonction que l'on appeler l et telle que $l : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5(x-3)^2+2 \end{cases}$.

Son sommet est alors le point $S'(3 ; 2)$

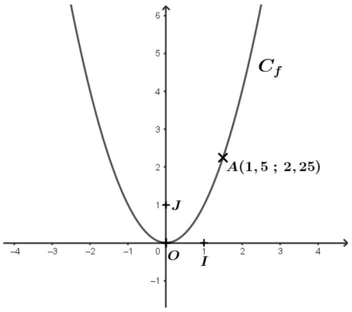


Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Sur cette page, vous pourrez faire varier les trois paramètres ($a=2{,}5$; $\alpha=3$ et $\beta=2$) afin d'observer en détail leur influence sur la parabole.

FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ E01

EXERCICE N°1 J'ai compris les jeux et je maîtrise les notations



On note f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,\ I\ ,\ J)$. On donne le point $A(1,5\ ;\ 2,25)$.

1) Vérifiez que $A\in C_f$.

2) On pose $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)-3\end{cases}$ et C_g sa courbe représentative.

2.a) Calculez $g(0)$ et en déduire les coordonnées du sommet de C_g .

2.b) Déterminez $g(1,5)$ en vous aidant du point A .

3) On pose $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x+2)\end{cases}$ et C_h sa courbe représentative.

3.a) Calculez $h(0)$ et en déduire les coordonnées du sommet de C_h .

3.b) Déterminez $h(-0,5)$ en vous aidant du point A .

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

II Expressions des fonctions polynomiales du second degré

II.1 La forme développée réduite

Définition n°1. Le trinôme

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$ avec a, b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$

L'expression ax^2+bx+c est appelée : Trinôme

Exemple n°1.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$.

On peut écrire :

$l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$

$l(x) = 2{,}5[x^2-6x+9]+2$

$l(x) = 2{,}5x^2-15x+24{,}5$

Ainsi $l(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=2{,}5$, $b=-15$ et $c=24{,}5$

l est donc une fonction polynomiale du second degré.

EXERCICE N°2 Autour de la forme développée réduite

Parmi les fonctions suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont des fonctions polynomiales du second degré.

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+3)^2-5 \end{cases}$ **2)** $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(x+7)-5 \end{cases}$ **3)** $h_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (4x-3)(2x+7) \end{cases}$

4) La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 2(x-7)^2+1$.

5) La fonction h_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $h_2(x) = (2x^2+5)(1-3x)$

6) $h_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (2x+1)(7-15x)+(1+6x)(5x-3) \end{cases}$

EXERCICE N°3 Autour de la forme développée réduite, je me prépare pour la suite

Deux définitions :

Soient f et g définies toutes les deux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▪ On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

▪ On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$

1) Montrer que la somme de deux fonctions affines ne pas être une fonction polynomiale du second degré.

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynôme du second degré.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Remarque n°1.

On devine, sur cet exemple, que toute fonction du type de celle que nous avons observée au dernier jeu est une fonction polynomiale du second degré.

Exercice n°1.

Démontrez-le en partant de l'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ où $a\neq 0$; α et β sont des nombres réels.

II.2 La forme canonique

Propriété n°1. ***(et définition)***

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x ,

$f(x) = ax^2+bx+c$

(avec a , b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous

sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha=\frac{-b}{2a}}$ et $\beta = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$

Remarque n°2.

C'est bien le « même a ».
Il faut retenir la formule de α mais pas forcément celle de β car $\boxed{\beta = f(\alpha)}$

preuve : ***(de la propriété)***

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] && \text{(explications à la remarque n°3)}\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}\right] && \text{On a réduit au même dénominateur}\\
&= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a} && \text{On a distribué } a\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta
\end{aligned}
$$

Remarque n°3.

La troisième ligne semble peu naturelle… L'idée est la suivante :

$x^2+\frac{b}{a}x$ est forcément le début de la première identité remarquable $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. En effet $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Le problème est qu'il y a un terme « en trop », il faut donc l'enlever : $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E01

EXERCICE N°4 La méthode de complétion du carré

Le principe

1) Soit a un nombre réel. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2ax = (x+a)^2-a^2$

Application

2) À l'aide de l'égalité que vous venez de démontrer, déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

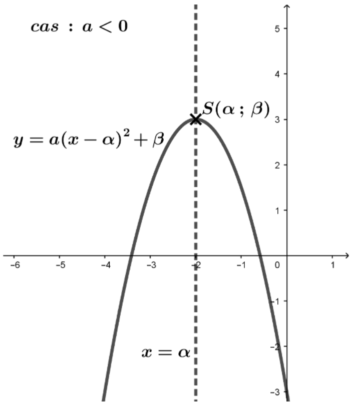
2.a) x^2+4x+7 **2.b)** x^2+7x-8 **2.c)** x^2-3x+6 **2.d)** x^2+bx+5 où $b \in \mathbb{R}$

3) Adaptez la méthode pour déterminer la forme canonique des trinômes suivants

3.a) $3x^2-5x+8$ **3.b)** $6x^2+7x-2$ **3.c)** $-4x^2+3x-7$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Remarque n°4. Représentation graphique d'une fonction polynomiale du second degré.



Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

D'après nos petits jeux, nous pouvons dire que :

toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole

tournée vers le bas si $a<0$, tournée vers le haut si $a>0$,

de sommet $(\alpha\ ;\ \beta)$ et admettant pour axe de symétrie $x=\alpha$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Remarque n°5. ***Tableau de variations d'une fonction polynomiale du second degré***

Cliquer pour Visualiser
$y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x ,
$f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$

$a > 0$

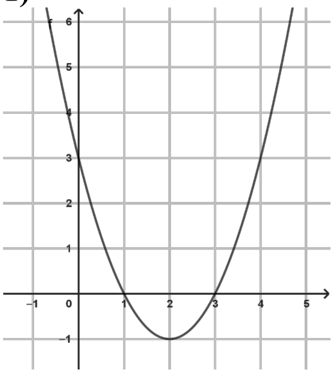
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E02

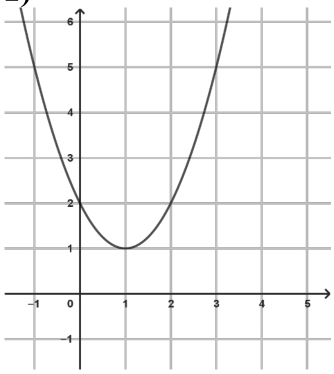
EXERCICE N°1 Lien entre la forme canonique et le graphique

Dans chaque cas, donnez la forme canonique de la fonction polynomiale du second degré qui est représentée.

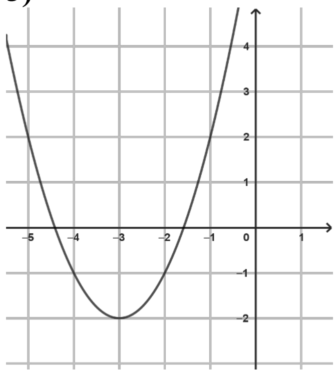
1)



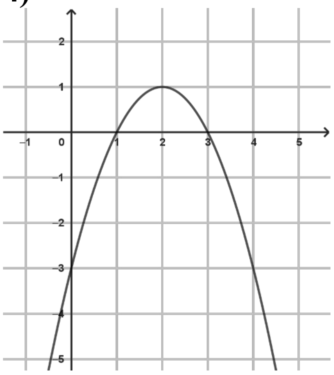
2)



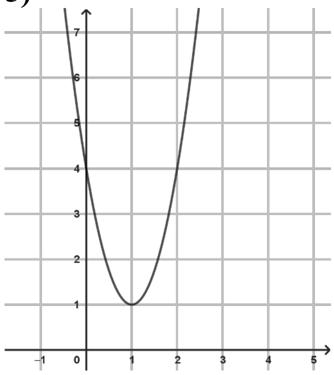
3)



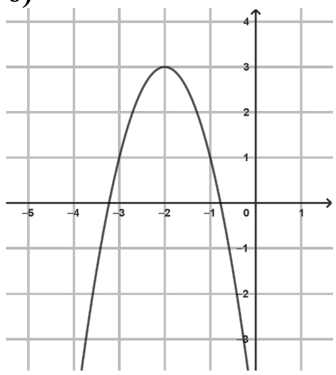
4)



5)



6)



EXERCICE N°2 Quelques tableaux de variations

Dressez le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^2+2x-7 \end{cases}$

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -4x^2+5x-3 \end{cases}$

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2(x-3)^2+5 \end{cases}$

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(x+1)(x-2) \end{cases}$

II.3 La forme factorisée

Dans ce paragraphe, f est une fonction polynomiale du second degré définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2+bx+c$. Nous savons que l'on peut écrire $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Ajoutons une notation supplémentaire : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = a\left[(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si $\Delta < 0$ alors la factorisation n'est pas possible dans $\mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x-\alpha)^2$

Si $\Delta > 0$ alors

$$f(x) = a\left(x-\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et comme $\alpha=\frac{-b}{2a}$:

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

ou encore

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Nous obtenons la propriété suivante :

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Propriété n°2. Forme factorisée

α est une *racine double*
x_1 et x_2 sont des *racines*
On peut aussi dire *zéros*

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x,
$f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\Delta = b^2-4ac$,

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

EXERCICE N°3 Factoriser avec le discriminant

Factoriser les expressions suivantes à l'aide du discriminant :

$A = 3x^2 - 3x - 60$ $B = -2x^2 - 4x + 30$ $C = 2x^2 - 4x - 10{,}5$

EXERCICE N°4 Lien entre les racines et la forme développée réduite

La théorie :

On donne a , b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax^2+bx+c$

On note Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c et on suppose $\Delta > 0$.

On peut alors poser $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de f .

1) Simplifier les expressions suivantes :
$s = x_1+x_2$ et $p = x_1 x_2$

La pratique :

2) En remarquant que 1 est une racine évidente de $3x^2+3x-6$ factorisez cette expression.

3) En remarquant que -1 est une racine évidente de $-2x^2-6x-4$ factorisez cette expression.

Remarque n°6. Résolution des équations du second degré

La propriété suivante nous donne une méthode de résolution des équations à une inconnue du second degré.

On fait en sorte d'avoir zéro pour le membre de droite puis on réduit le membre de gauche de façon à obtenir un trinôme, on doit alors résoudre :

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)

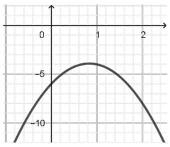
Posons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet une solution double : $\dfrac{-b}{2a}$	L'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque n°7.

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

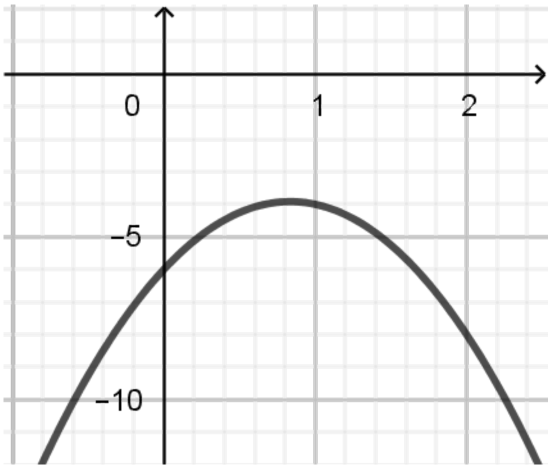
Exemple n°2.

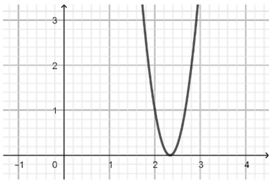


Résolvons les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

- $-3x^2+5x-6 = 0$

Posons $\Delta = 5^2-4\times(-3)\times(-6) = -47$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet $\boxed{\text{aucune solution réelle}}$.



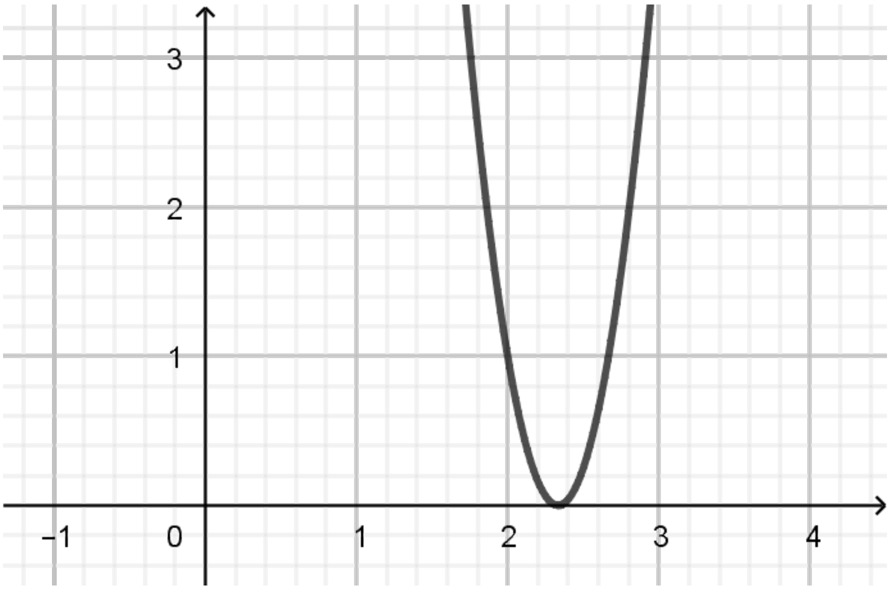


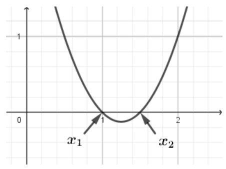
- $9x^2-42x+49 = 0$

Posons $\Delta = (-42)^2-4\times 9\times 49 = 0$ le discriminant de cette équation.

Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } \frac{7}{3}}$

($\frac{-(-42)}{2\times 9} = \frac{2\times 3\times 7}{2\times 3\times 3}$)





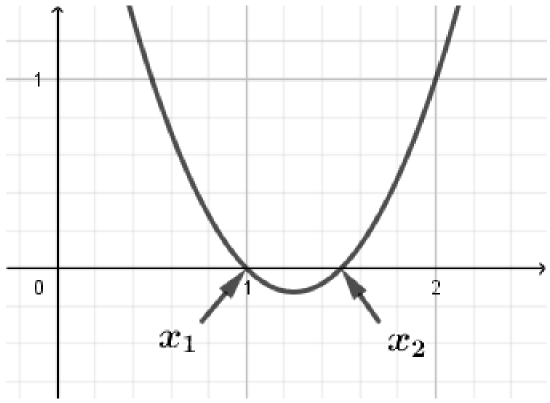
- $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Posons $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta > 0$, cette équation admet $\boxed{\text{deux solutions : } 1 \text{ et } 1{,}5}$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1{,}5$$

Remarque n°8.

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas défini a, b et c, nous n'avons donc pas utilisé ces lettres...



FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E03

EXERCICE N°1 Discriminant pour résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $3x^2+6x-24 = 0$

2) $5x^2+10\sqrt{2}x-30 = 0$

3) $2x^2-12x+19 = 0$

4) $2x^2+11x-6 = 4x^2-10x+4$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E03

EXERCICE N°2 Discriminant oui mais pas toujours !

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $4x^2-14x+49 = 0$

2) $5x^2-2x = 0$

3) $(3x-1)^2-(2x+5)^2 = 0$

4) $x^2 = 49$

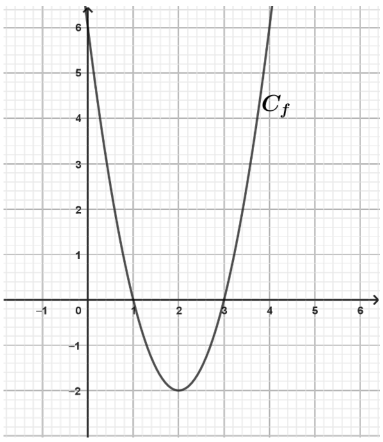
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E03

EXERCICE N°3 Le lien entre les racines et la parabole

Dans chaque question, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et leur représentation graphique est une parabole.

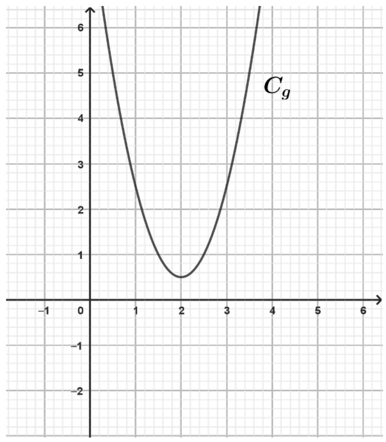
Dans chaque cas déterminez les racines quand elles existent, donnez l'ensemble des solutions de l'équation proposée et déterminez la forme factorisée du trinôme quand c'est possible.

1)



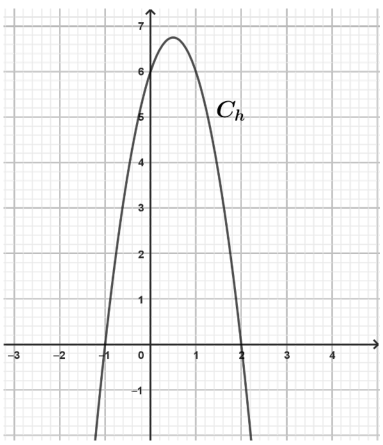
C_f a pour équation réduite $y=f(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$

2)



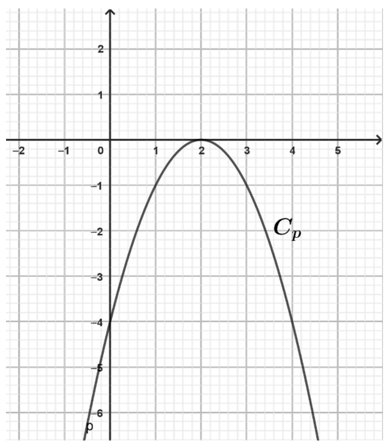
C_g a pour équation réduite $y=g(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$

3)



C_h a pour équation réduite $y=h(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $h(x) = 0$

4)



C_p a pour équation réduite $y=p(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $p(x) = 0$

EXERCICE N°4 Comment résoudre des inéquations ?

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

Exemples généraux :

1) $2x^2+11x-6 \leqslant 4x^2-10x+4$

2) $9x^2-6x+1 > 4x^2+20x+25$

Des cas particuliers :

3) $5x^2-7x+21 < 3x^2-5x+2$

4) $x^2 \geqslant 64$

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E04

EXERCICE N°1 Du concret ! (Suivi de sportif)

Afin de participer aux compétitions dans sa catégorie, un karatéka surveille son poids (ou plutôt sa masse). Pour cela, il se pèse toutes les semaines de l'année 2024. Sa courbe de poids peut être modélisée par la fonction polynomiale f définie pour tout $x \in [0\ ;\ 52]$ par $f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}4x + 75$ où x correspond au temps passé en semaine à partir du premier Janvier 2024.

- **Hommes :**
  - -60 kg
  - -67 kg
  - -75 kg
  - -84 kg
  - +84 kg
  - OPEN (Tous poids confondus)

Source: Wikipedia

1) Dressez le tableau de variations de la fonction f .

2) En utilisant cette modélisation, répondez aux questions suivantes :

2.a) Quel était sont poids maximal sur l'année ? Quand l'a-t-il atteint ?

2.b) Quel était son poids minimal sur l'année ? Quand l'a-t-il atteint ?

EXERCICE N°2 Du concret ! (Éthologie)

Extrait du sésamath 1er spé

Une femelle kangourou porte un bébé kangourou dans sa poche et décide de sauter. La trajectoire du bébé est modélisée par la parabole d'équation $y = -\frac{1}{4}x^2+x+0,5$ où x et y représentent des distances en mètres.

Créateur : John Torcasio

1) Avant de sauter, à quelle distance du sol se trouve le bébé ?

2) Quelle est l'altitude maximale atteinte par le bébé au court de ce saut ?

3) Quelle est la distance parcourue par le bébé lors du saut ?

EXERCICE N°3 Du concret ! (Tennis)

Extrait du sésamath 1er spé

Créateur : Yann Caradec

Un joueur de tennis frappe dans une balle avant qu'elle touche le sol.
La trajectoire de la balle est alors définie par la parabole d'équation :
$y=-0{,}03x^2+0{,}3x+0{,}75$ où x correspond à la distance entre le joueur de tennis et la balle et y correspond à la hauteur de la balle.

1) Le filet se trouve à 5 m du joueur et la hauteur du filet est de 1 m. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ? Justifier.

2) Déterminer à quelle distance du joueur la balle est retombée par terre. On donnera une valeur arrondie au centième. Justifier.

3) À quelle(s) distance(s) du joueur la balle a-t-elle une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m ? Justifier.

EXERCICE N°4 Du concret ! (Aménagement extérieur)

Extrait du sésamath 1er spé

François décide d'aménager sa piscine, qui a une forme carrée et qui mesure x mètres de côté.
Il veut acheter une bâche de sécurité, qui coûte 20 € par m².
Il veut installer une clôture faisant tout le tour de sa piscine, à une distance de deux mètres de la piscine. Le prix est 100 € par mètre de clôture.
Enfin, il veut acheter une échelle de piscine qui coûte 150 €.
On note $f(x)$ le prix total que François va payer.

Générée par ChatGPT

1) Montrer que $f(x)=20x^2+400x+1750$.
2) Combien payera-t-il si la piscine fait 5 mètres de côté ?
3) Quelle est la taille de la piscine s'il paye 8155 € ?

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E05

EXERCICE N°1 Méthode de Horner : découverte

Nous allons apprendre à factoriser rapidement l'expression développée réduite de certaines fonctions polynomiales du troisième degré.

Autrement dit on va apprendre à factoriser une expression du type Ax^3+Bx^2+Cx+D en $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ où A ; B ; C ; D ; α ; a ; b et c sont tous des réels.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E05

Le principe

Soit α ; a ; b et c des nombres réels

1) Développez et réduisez l'expression $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ afin de vérifier que

$(x-\alpha)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-\alpha a)x^2 + (c-\alpha b)x - \alpha c$

C'est sur cette égalité qu'est basée la méthode.

Par identification :

$a = A$;

$B = b-\alpha a$ ou plutôt $b = B+\alpha a$;

$C = c-\alpha b$ ou plutôt $c = C+\alpha b$ et

$D = -\alpha c$ ou plutôt $D+\alpha c = 0$

Par conséquent si on connaît Ax^3+Bx^2+Cx+D et α , on peut trouver ax^2+bx+c en suivant le schéma suivant :

	A	B	C	D
α		αa	αb	αc
	a	$b = B+\alpha a$	$c = C+\alpha b$	$D+\alpha c = 0$

La méthode en vidéo

Remarque n°9. ***Ça marche si on arrive à trouver α (on parle alors de racine évidente)***

Une « astuce » est donnée dans la vidéo : décomposer D en facteurs premiers et les tester ainsi que leur opposé.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E05

On applique

2) On se donne la fonction polynomiale f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2x^3-7x^2-17x+10$$

Calculez $f(-2)$ et déduisez-en une factorisation de $f(x)$.

3) À l'aide de ce qui précède factorisez complètement $f(x)$

EXERCICE N°2 Méthode de Horner : utilisation

On donne g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = x^3+x^2-10x+8$

1) Calculez $g(1)$.

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE N°3 Méthode de Horner : en python

```python
def horner(coef_poly,alpha):
    """coef_poly = [A,B,C,D] pour Ax^3+Bx^2+Cx+D"""
    coef_facteur = [coef_poly[0]]
    for place in range(1,4):
        coef_facteur.append(alpha*coef_facteur[-1]+coef_poly[place])
    return coef_facteur
```

Utilisez la fonction **horner** pour résoudre l'équation $x^3+2x^2-11x-12 = 0$ sachant que -1 est une solution.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E06

EXERCICE N°1 Deux nouvelles identités remarquables

Le but :

Soit x et a deux nombres réels, $a \neq 0$ et n un entier naturel , $n \geqslant 2$
On veut factoriser $x^n - a^n$

Pour $n = 2$, on sait faire : $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$
Pour $n = 3$, on connaît la méthode de Horner :

1) En remarquant que a est une racine évidente de $x^3 - a^3$, factoriser $x^3 - a^3$.

Pour $n = 4$, on peut … encore appliquer la méthode de Horner :

2) En remarquant que a est une racine évidente de $x^4 - a^4$, factoriser $x^4 - a^4$.

Remarque n°10.

On pourrait factoriser $x^5 - a^5$, mais on a compris que la méthode de Horner va fonctionner quelque soit la valeur de n …

Faisons plutôt fonctionner la méthode sur un exemple :

3) Factoriser $x^7 - 5^7$

Passons à la justification de la formule générale :
(pour que les notations suivantes soient correctes, on suppose $n>2$) :

4) Développer et réduire l'expression suivante :
$(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1})$

Remarque n°11.

On dit que les termes se télescopent (retenez cela pour la suite de vos études…)

On retient donc notre première nouvelle identité remarquable :

$$\boxed{x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1})}$$

Le cas particulier où $a = 1$

5) Réécrire la formule précédente pour $a = 1$ (que l'on retiendra également)

On applique :

6) Factoriser $x^{11}-1$

Jouer avec les méthodes

7) En remarquant $x^6 - a^6 = \left(x^3\right)^2 - \left(a^3\right)^2$ proposer une factorisation $x^6 - a^6$

III Le résumé du cours

Fonction polynôme du second degré, Trinôme

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$

avec a, b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$

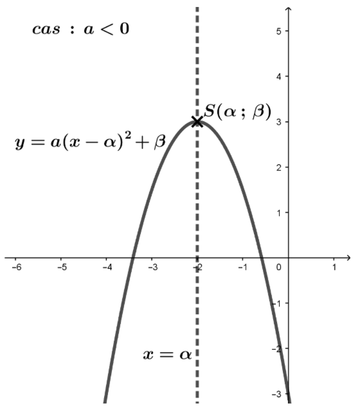
L'expression ax^2+bx+c est appelée : $\boxed{\text{Trinôme}}$

Forme canonique

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$

(avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a}}$ et $\beta = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$ on a aussi $\boxed{\beta = f(\alpha)}$



Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

$\boxed{\text{toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole}}$

$\boxed{\text{tournée vers le bas si } a<0}$, $\boxed{\text{tournée vers le haut si } a>0}$,

$\boxed{\text{de sommet } (\alpha \ ; \ \beta)}$ et admettant pour $\boxed{\text{axe de symétrie } x=\alpha}$

Tableau de variation

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$

$a > 0$

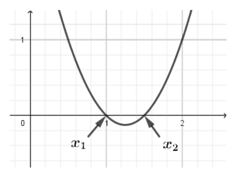
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Forme factorisée

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

et posons $\Delta = b^2-4ac$,

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$



Équation du second degré

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune solution réelle.	Une solution double : $\frac{-b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

IV Le résumé des exercices et activités

Méthode n°1. ***Somme et produit des racines pour factoriser***

Pour un exemple (voir E02 ex4 et M02 ex4)

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\Delta = b^2-4ac$
Si $\Delta > 0$ alors les racines x_1 et x_2 vérifient les relations :

$$\boxed{x_1+x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Cas particulier : **Si $a = 1$**

En posant $S = x_1+x_2$ et $P = x_1 x_2$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{x^2+bx+c = x^2-Sx+P}$$

Méthode n°2. ***Tableaux de signes et résolution d'inéquation***

Pour un exemple (voir E03 ex4 et M03 ex4)

Pour résoudre, de manière générale une inéquation du second degré, on s'arrange pour avoir zéro dans l'un des deux membres et on factorise l'autre à l'aide du discriminant. On dresse un tableau des signes grâce à la propriété n°4 et on s'en sert pour trouver l'ensemble des solutions.

Propriété n°3. ***Signe d'une fonction polynomiale du second degré***

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ avec a ; b et c des réels , $a \neq 0$ et possédant deux racines distinctes alors

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retient avec l'une des deux phrases suivantes :
Le trinôme est du signe de moins a entre les racines.
Ou
Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.
(Retenez en une sur les deux et oubliez l'autre!)

Méthode n°3. ***Méthode de Horner***

Pour un exemple (voir E05 et M05)

Pour factoriser des expressions du type Ax^3+Bx^2+Cx+D en $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ où A ; B ; C ; D ; α ; a ; b et c sont tous des réels.

Si on connaît Ax^3+Bx^2+Cx+D et α une racine, on peut trouver ax^2+bx+c en suivant le schéma suivant :

	A	B	C	D
α		$\alpha\, a$	$\alpha\, b$	$\alpha\, c$
	a	$b = B+\alpha\, a$	$c = C+\alpha\, b$	$D+\alpha\, c = 0$

Cliquez-moi

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)$$

Propriété n°4. ***Deux nouvelles identités remarquables***

Pour un exemple (voir E06 et M06)

Pour tous réels x et a ($a \neq 0$) et tout entier naturel n ($n \geqslant 2$) :

$$\boxed{x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2\,x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}\,x+a^{n-1})}$$

En particulier :

$$\boxed{x^n-1 = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}$$