Fonctions part3 E06

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

On donne la fonction f définie sur $[-20\ ;\ 20]$ par : $f(x)=x^3-6x^2-135x+572$

1) Montrer que $f(x)=(x+11)(x-4)(x-13)$.

$$\begin{aligned}(x+11)(x-4)(x-13)&=(x+11)[x^2-13x-4x+52]\\&=(x+11)(x^2-17x+52)\\&=x^3-17x^2+52x+11x^2-187x+572\\&=x^3-6x^2-135x+572\\&=f(x)\end{aligned}$$

2) En déduire les racines de f .

Les racines de f sont : $\boxed{-11\ ;\ 4 \text{ et } 13}$

3) Déterminer la dérivée f' de f .

$f(x)=x^3-6x^2-135x+572$

$f'(x)=3x^2-6\times 2x-135\times 1+0$

$\boxed{f'(x)=3x^2-12x-135}$

4) Montrer que $f'(x)=3(x-9)(x+5)$.

$$\begin{aligned}3(x-9)(x+5)&=3(x^2+5x-9x-45)\\&=3(x^2-4x-45)\\&=3x^2-12x-135\\&=f'(x)\end{aligned}$$

5) Dresser le tableau de signe de f' .

$3>0$ est vraie quelque soit la valeur de x

$x-9\ >\ 0 \Leftrightarrow x\ >\ 9$

$x+5\ >\ 0 \Leftrightarrow x\ >\ -5$

x	-20		-5		9		20
3		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-9$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$x+5$		$-$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6) En déduire le tableau de variations de f .

x	-20		-5		9		20
$f(x)$	-7128	↗	972	↘	-400	↗	3472

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 10 .

Une équation de la tangente au point d'abscisse est :

$y=f'(10)(x-10)+f(10)$

$y=45(x-10)-378$

$\boxed{y=45x-828}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On donne la fonction f définie sur $[-20\ ;\ 40]$ par : $f(x)=x^3-33x^2-144x+3740$

1) Montrer que $f(x)=(x+11)(x-10)(x-34)$.

$$
\begin{aligned}
(x+11)(x-10)(x-34) &= (x+11)[x^2-34x-10x+340]\\
&= (x+11)(x^2-44x+340)\\
&= x^3-44x^2+340x+11x^2-484x+3740\\
&= x^3-33x^2-144x+3740\\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

2) En déduire les racines de f .

Les racines de f sont : $\boxed{-11\ ;\ 10\ \text{et}\ 34}$

3) Déterminer la dérivée f' de f .

$f(x)=x^3-33x^2-144x+3740$

$f'(x)=3x^2-33\times 2x-144\times 1+0$

$\boxed{f'(x)=3x^2-66x-144}$

4) Montrer que $f'(x)=3(x-24)(x+2)$.

$$
\begin{aligned}
3(x-24)(x+2) &= 3(x^2+2x-24x-48)\\
&= 3(x^2-22x-48)\\
&= 3x^2-66x-144\\
&= f'(x)
\end{aligned}
$$

5) Dresser le tableau de signe de f' .

$3>0$ est vraie quelque soit la valeur de x

$x-24\ >\ 0 \Leftrightarrow x\ >\ 24$

$x+2\ >\ 0 \Leftrightarrow x\ >\ -2$

x	-20		-2		24		40
3		+	|	+	|	+	
$x-24$		−	|	−	0	+	
$x+2$		−	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

6) En déduire le tableau de variations de f .

x	-20		-2		24		40
$f(x)$	-14580	$\nearrow$	3888	$\searrow$	-4900	$\nearrow$	9180

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -5 .

Une équation de la tangente au point d'abscisse est :

$y=f'(-5)(x+5)+f(-5)$

$y=261(x+5)-3510$

$\boxed{y=261x-2205}$

EXERCICE N°3 tableur (Le corrigé)

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de x lecteurs est modélisé par la fonction CT définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ par : $CT(x)=0,4x^3-7x^2+60x+120$

On appelle coût marginal au rang x, noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque x pièces ont déjà été produites.

Ainsi $Cm(x)=CT(x+1)-CT(x)$

1) Calculer $Cm(5)$. Donner une interprétation.

$Cm(5)\ =\ CT(5+1)-CT(5)\ =\ \underbrace{CT(6)-CT(5)}_{\text{à la calculatrice}}\ =\ 19,4$

Quand 5 pièces ont été produites, le coût de fabrication de la pièce suivante est de 19,4 €

2) On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de x.

Pour limiter les calculs nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	x	CT(x)	CT(x+1)-CT(x)	Approximation par CT'(x)	écart avec la valeur réelle
2	0	120	53,4		
3	1	173,4	41,8		
4	2	215,2	32,6		
5					

2.a) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

=0,4*A3^3-7*A3^2+60*A3+120

2.b) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

=B3-B2

2.c) Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 MP3

Attention : Il ne peut y avoir de production d'un 501^{e} lecteur, par conséquent sur la dernière seules les colonnes A et B devront être complétées.

Le fichier est ici

3) En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi, $Cm(x)\approx CT'(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 500$

3.a) Montrer que pour appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$, $Cm(x)=1,2x^2-12,8x+53,4$.

$$\begin{aligned}Cm(x)&=CT(x+1)-CT(x)\\&=0,4(x+1)^3-7(x+1)^2+60(x+1)+120-(0,4x^3-7x^2+60x+120)\\&=0,4x^3-5,8x^2+47,2x+173,4-(0,4x^3-7x^2+60x+120)\\&=0,4x^3-5,8x^2+47,2x+173,4-0,4x^3+7x^2-60x-120\\&=1,2x^2-12,8x+53,4\end{aligned}$$

Pour passer de la 2^{e} à la 3^{e} ligne (seuls le développement et la réduction de $CT(x+1)$ sont présentés):

$$0,4(x+1)^3-7(x+1)^2+60(x+1)+120\ =\ 0,4(x^3+3x^2+3x+1)-7(x^2+2x+1)+60(x+1)+120$$

$$=\ \underbrace{0,4x^3+1,2x^2+1,2x+0,4}_{\text{1ere 'parenthèse'}}\ \underbrace{-7x^2-14x-x}_{\text{2eme 'parenthèse'}}\ +\ \underbrace{60x+60}_{\text{3eme 'parenthèse'}}\ +120$$

$$=\ 0,4x^3-5,8x^2+47,2x+173,4$$

3.b) Calculer alors pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ $CT'(x)$ et proposer une approximation de $Cm(x)$.

$CT(x)=0,4x^3-7x^2+60x+120$

$CT'(x)=0,4\times 3x^2-7\times 2x+60\times 1+0$

$\boxed{CT'(x)=1,2x^2-14x+60}$

On peut approcher $Cm(x)$ avec $1,2x^2-14x+60$

3.c) Calculer $Cm(5)$ à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question 1. a.? Qu'en pensez-vous?

Calculons l'approximation de $Cm(5)$

$Cm(5) \approx 1{,}2\times5^2-14\times5+60 = 20$

L'erreur commise par rapport à la valeur de la question 1a) est alors :

$\frac{20-19{,}4}{19{,}4}\approx0{,}03$

Soir environ 3 %

Cette erreur nous semble acceptable.

3.d) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de $Cm(x)$ par $CT'(x)$?

=1,2*A2^2-14*A2+60

3.e) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

=(D2-C2)/C2

3.f) Observer l'intégralité de la colonne D.

Que pensez-vous de cette approximation proposée pour le coût marginal?

On constate que l'erreur d'approximation diminue en augmentant le nombre de pièces produites. Cette approximation est donc acceptable.

FONCTIONS PART3 E06

EXERCICE N°1

On donne la fonction f définie sur $[-20\ ;\ 20]$ par : $f(x)=x^3-6x^2-135x+572$

1) Montrer que $f(x)=(x+11)(x-4)(x-13)$.

2) En déduire les racines de f .

3) Déterminer la dérivée f' de f .

4) Montrer que $f'(x)=3(x-9)(x+5)$.

5) Dresser le tableau de signe de f' .

6) En déduire le tableau de variations de f .

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 10 .

EXERCICE N°2

On donne la fonction f définie sur $[-20\ ;\ 40]$ par : $f(x)=x^3-33x^2-144x+3740$

1) Montrer que $f(x)=(x+11)(x-10)(x-34)$.

2) En déduire les racines de f .

3) Déterminer la dérivée f' de f .

4) Montrer que $f'(x)=3(x-24)(x+2)$.

5) Dresser le tableau de signe de f' .

6) En déduire le tableau de variations de f .

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -5 .

EXERCICE N°3 *tableur*

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de x lecteurs est modélisé par la fonction CT définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ par : $CT(x)=0{,}4x^3-7x^2+60x+120$

On appelle coût marginal au rang x , noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque x pièces ont déjà été produites.

Ainsi $Cm(x)=CT(x+1)-CT(x)$

1) Calculer $Cm(5)$. Donner une interprétation.

2) On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de x .

Pour limiter les calculs nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	x	CT(x)	CT(x+1)-CT(x)	Approximation par CT'(x)	écart avec la valeur réelle
2	0	120	53,4		
3	1	173,4	41,8		
4	2	215,2	32,6		
5					

2.a) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

2.b) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

2.c) Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 MP3

Attention : Il ne peut y avoir de production d'un 501e lecteur, par conséquent sur la dernière seules les colonnes A et B devront être complétées.

3) En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi, $Cm(x)\approx CT'(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 500$

3.a) Montrer que pour appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$, $Cm(x)=1{,}2x^2-12{,}8x+53{,}4$.

3.b) Calculer alors pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ $CT'(x)$ et proposer une approximation de $Cm(x)$.

3.c) Calculer $Cm(5)$ à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question 1. a.? Qu'en pensez-vous?

3.d) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de $Cm(x)$ par $CT'(x)$?

3.e) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

3.f) Observer l'intégralité de la colonne D.

Que pensez-vous de cette approximation proposée pour le coût marginal?