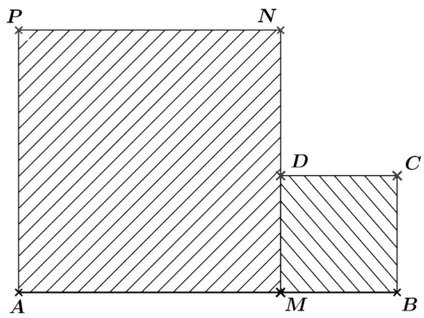
LA DÉRIVATION E07C

EXERCICE N°1 Du concret : Optimisation d'une aire

Extrait du Sesamath 1[er] spe n°48 p155

Soit un segment $[AB]$ de longueur 10 et M un point de ce segment. Du même côté de ce segment, on construit deux carrés $AMNP$ et $MBCD$. On pose $AM = x$ et on étudie l'aire du domaine formé par ces deux carrés en fonction de x.



1) À quel intervalle I appartient le réel x ?

$\boxed{I = [0\ ;\ 10]}$

2) Soit $f(x)$ l'aire du domaine. Montrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

Soit $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= AM^2 + MB^2 \\ &= x^2 + (10-x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien, pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$

3) Justifier que la fonction f est dérivable sur I et déterminer $f'(x)$ pour tout x de I.

f est une somme de fonctions de références dérivables sur I, elle est donc dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$f'(x) = 2 \times 2x - 20 \times 1 + 0$

$\boxed{f'(x) = 4x - 20}$

4) En déduire les variations de f sur I et la valeur de x pour laquelle l'aire du domaine est minimale.

Dressons le tableau de variations de f sur I :

x	0		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	100	↘	50	↗	100

On en déduit que $\boxed{\text{l'aire sera minimale pour } x = 5}$

EXERCICE N°2 Du concret : Optimisation d'un bénéfice

Extrait du Sesamath 1[er] spe n°81 p158

Une coopérative fabrique du jus de pomme. Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x dizaines de litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction $C : x \mapsto x^2 - x + 10$. Chaque dizaine de litres produite sera vendue 19 €.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction C ?

L'entreprise produit entre 0 et 200 litres de jus, donc le domaine de définition de C est $[0\ ;\ 20]$

2) On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x dizaines de litres vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

$R(x) = 19x$

Chaque dizaine de litres est vendue 19 €.

3) On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x dizaines de litres de jus de pomme. Quel que soit x, on a $B(x) = R(x) - C(x)$. Montrer que la fonction bénéfice B est définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $B(x) = -x^2 + 20x - 10$.

Soit $x \in [0\ ;\ 20]$,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 19x - (x^2 - x + 10) \\ &= 19x - x^2 + x - 10 \\ &= -x^2 + 20x - 10 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $B(x) = -x^2 + 20x - 10$.

4) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 20]$.

B est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[0\ ;\ 20]$, elle l'est donc aussi et pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$,

$\boxed{B'(x) = -2x + 20}$

On en déduit le tableau de variations suivante :

x	0		10		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	$\nearrow$	90	$\searrow$	-10

5) En déduire le nombre de litres que la coopérative doit produire afin d'obtenir un bénéfice maximum.

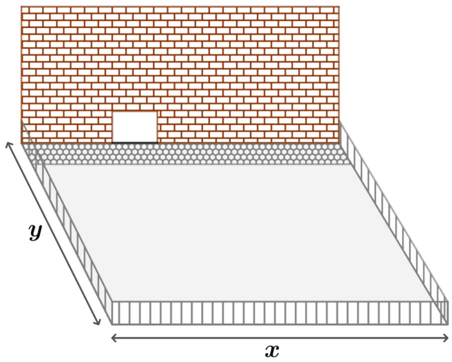
D'après le tableau de variations, la coopérative doit produire 100 L .

Attention à ne pas aller trop vite et oublier les unités de l'énoncé...

EXERCICE N°3 ***Du concret : Optimisation d'un prix***

Extrait du Déclic 1[er] spe n°87 p 124

Le gérant d'un magasin de sport souhaite faire construire une aire rectangulaire à l'extérieur du magasin pour permettre aux clients de tester certains produits. Il veut que cette zone occupe $200\ \text{m}^2$ et que soit installée, sur trois de ses côtés, une clôture en bois coûtant 12 € le mètre. De plus, le long du côté attenant au mur du magasin, il fera poser une rangée de dalle en béton à 15 € le mètre.



Soient y la largeur et x la longueur du rectangle délimitant la zone. Le gérant aimerait connaître les valeurs de x et y qui minimiserait le prix de l'entourage de cette aire sachant que x est compris entre 10 et 40 m .

1) Montrer que $y = \dfrac{200}{x}$

La zone est un rectangle d'aire 200, sa largeur est y et sa longueur est x . La formule de l'aire d'un rectangle, nous donne alors $y \times x = 200$.
Donc pour $x \in [10\ ;\ 40]$, on peut écrire :
$y = \dfrac{200}{x}$. *cqfd*

2) Montrer que le prix p de la construction de l'entourage peut s'exprimer en fonction de x et que $p(x) = 27x + \dfrac{4800}{x}$

Le prix de la construction dépend de la largeur y et de la longueur x mais d'après la question 1) on peut exprimer y en fonction de x . Donc le prix peut s'exprimer uniquement en fonction de x .
Soit $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$\begin{aligned} p(x) &= \overbrace{2\times 12y + 12x}^{\text{la clôture}} + \overbrace{15x}^{\text{la dalle}} \\ &= 24 \times \frac{200}{x} + 12x + 15x \\ &= 27x + \frac{4800}{x} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$, $p(x) = 27x + \dfrac{4800}{x}$.

3) Étudier les variations de p sur l'intervalle $[10\ ;\ 40]$.

p est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[10\ ;\ 40]$, elle l'est donc aussi et pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$p'(x) = 27 \times 1 + 4800 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$\boxed{p'(x) = 27 - \frac{4800}{x^2}}$$

4) Déterminer les dimensions de la zone pour que le prix de l'entourage soit minimal. Combien le gérant devra-t-il payer ?

pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$p'(x) = 27 - \frac{4800}{x^2} = \frac{27x^2 - 4800}{x^2} = \frac{3(9x^2 - 1600)}{x^2} = \frac{3(3x-40)(3x+40)}{x^2}$$

On en déduit le tableau de signes de p' puis le tableau de variations de p .

x	10		$\frac{40}{3}$		40
3		$+$	$\vert$	$+$	
$3x-40$		$-$	0	$+$	
$3x+40$		$+$	$\vert$	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	750	$\searrow$	720	$\nearrow$	1200

D'après le tableau le prix sera minimal pour $x = \frac{40}{3}$, on aura alors :

$$y = \frac{200}{\frac{40}{3}} = 200 \times \frac{3}{40} = 15$$

On en déduit les dimensions :

$\boxed{\text{la largeur vaut } 15 \text{ m et la longueur vaut } \frac{40}{3} \text{ m}}$

$\boxed{\text{Le gérant devra alors payer } 720 \text{ €}}$