Variables aléatoires

I Quelques définitions

Définition n°1. ***Variable aléatoire***

Étant donnée une expérience aléatoire, définir une variable aléatoire, c'est associer à chaque issue de l'expérience un nombre réel. On la note à l'aide d'une majuscule : X ou Y par exemple.

Exemple n°1. ***Désigner un événement***

$\{X = a\}$: X prend la valeur a
$\{X < a\}$: X prend des valeurs strictement inférieures à a.

Remarque n°1. ***Une autre notation possible***

$\{X \in a\}$ pour $\{X = a\}$
$\{X \in]-\infty\ ;\ a[\ \}$ pour $\{X < a\}$

Exemple n°2. ***Le jeu auquel tout le monde veut jouer***

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient $Pile$, on gagne 1€, sinon on gagne 2€.
On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue de fin du jeu, associe la somme gagnée par le joueur.

Notre jeu est une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.
- Épreuve n°1 : on lance la pièce, on note P quand on obtient $Pile$ et F quand on obtient $Face$.

L'univers est $\Omega_1=\{P,F\}$
- Épreuve n°2 : Exactement la même chose, l'univers est alors $\Omega_2=\{P,F\}$
- L'univers de notre expérience aléatoire est alors $\Omega=\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$

À chacune des quatre issues, on associe un nombre réel :
(P,P) est associé au nombre 2.
(P,F) et (F,P) sont, chacune, associées au nombre 3.
(F,F) est associé au nombre 4.

Nous avons ainsi défini notre variable aléatoire.
$\{X = 2\}$ correspond à (P,P)
$\{X = 3\}$ correspond à (P,F) ou (F,P)
$\{X = 4\}$ correspond à (F,F)

$\{X = 5\}$ correspond à l'ensemble vide…
« $\{X = \text{quelque chose autre que } 2{,}3 \text{ ou } 4\}$ » correspond à l'ensemble vide…

$\{X \leqslant 3\}$ correspond à (P,P) ou (P,F) ou (F,P)
etc...

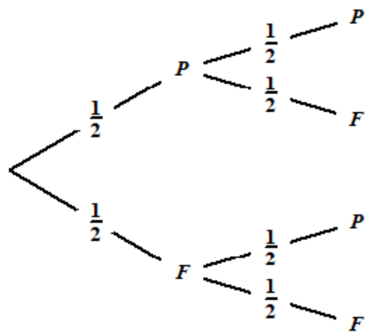
Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Étant donnée une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X , définir la loi de probabilité de X , c'est associer, à chaque valeur de cette variable aléatoire, la probabilité de l'événement associé.

Exemple n°3. Avec le jeu auquel tout le monde veut jouer

Loi de probabilité de X				
a_i	2	3	4	Total
$P(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

En effet, grâce à un arbre pondéré :



(P, P) qui correspond à $\{X = 2\}$

(P, F) qui correspond à $\{X = 3\}$

(F, P) qui correspond à $\{X = 3\}$

(F, F) qui correspond à $\{X = 4\}$

On peut déterminer chaque valeur prise par X et la probabilité de l'événement qui lui est associé.

$P(X = 2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$P(X = 3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Définition n°3. Espérance

On donne une expérience aléatoire (à n issues possibles) sur laquelle on a défini une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donné ci-dessous.

Loi de probabilité de X					
a_i	a_1	a_2	$\ldots$	a_n	Total
$P(X=a_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

On appelle espérance de X et on note $E(X)$, le nombre défini par

$E(X) = p_1\times a_1 + p_2\times a_2 + \ldots + p_n\times a_n$

Remarque n°2.

Cela représente, la valeur moyenne de X que l'on peut espérer obtenir en répétant l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

Exemple n°4. Toujours avec le jeu auquel tout le monde veut jouer

$E(X) = \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 3$

En moyenne, on peut espérer gagner trois euros à chaque fois que l'on joue…

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=a_i)$	0,3	0,25	0,2	0,1	0,1	0,05

1) Donner la valeur de $P(X=2)$.

2) Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leqslant 2\}$?

3) Calculer $P(X \leqslant 2)$.

4) Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

EXERCICE N°2

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	-2	2	3	5	9	12
$P(X=a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$

1) Sachant que $P(X \leqslant 5)=\frac{11}{16}$,compléter le tableau ci-dessus.

2) Donner la probabilité que X soit au moins égale à 5.

EXERCICE N°3

À l'arrière d'un ticket à gratter, on peut lire :

> Tableau de lots :
> sur 3 000 000 tickets : 323 000 lots de 1 €; 295 000 lots de 2 €,
> 60 000 lots de 4 €, 77 000 lots de 10 €, 20 lots de 100 €,
> 5 lots de 400 € et 2 lots de 4 000 €.
> Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1) Décrire l'événement $\{X=100\}$.

2) Quelles sont les valeurs prises par X ?

3) Quelle est la probabilité de gagner 1 €?

4) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE N°4

On lance un dé tétraédrique rouge dont les faces numérotées de 1 à 4 et un autre dé identique bleu. On note X la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2) Quelles sont les valeurs prises par X ?

3) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

II Le cas Bernoulli

Définition n°4. Loi de Bernoulli

On se donne une épreuve de Bernoulli (rappel ici en page3) de paramètre p
On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
On appelle loi de Bernoulli de paramètre p, la loi suivie par X

Loi de Bernoulli de paramètre p notée $B(p)$			
a_i	0	1	Total
$P(X=a_i)$	$1-p$	p	1

Propriété n°1. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors : $\boxed{E(X)=p}$

preuve :

$$E(X) = 0\times(1-p) + 1\times p = p$$

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1

On lance un dé cubique et on observe si on obtient une valeur supérieure ou égale à 5.

1) Peut-on associer à cette situation une loi de Bernoulli ?
2) Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité associée.

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°2

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on observe si on obtient une figure.

1) Peut-on associer à cette situation une loi de Bernoulli ?
2) Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité associée.
3) Quelle est l'espérance de cette loi de Bernoulli ?

EXERCICE N°3

Compléter l'algorithme ci-dessous afin de retourner le nombre de succès dans 100 échantillons de taille 50 où la probabilité du succès vaut 0,5.

```
Fonction simulation ( )
    L est une liste vide
    Pour i allant de 1  à    …
        X ← 0
        Pour i allant de 1 à   …
            X ←  X + nombre entier aléatoire entre 0 et 1
        Ajouter X à la liste L
    Retourner    …
```

EXERCICE N°4

Compléter l'algorithme ci-dessous afin de retourner le nombre de succès dans un échantillon de taille 80 où la probabilité du succès vaut 0,3.

```
Fonction echantillon ( )
    X ← 0
    Pour i allant de l à   …
       Y ←  nombre aléatoire entre 0 et 1
       Si Y   ⩽ …    ,alors
           X ←  …
    Retourner X
```

III Simulations et échantillons

Définition n°5. échantillon de taille n associé à une épreuves de Bernoulli

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associé à une épreuve de Bernoulli.

Exemple n°5. Simuler un échantillon de taille n

```python
import random

def Bernoulli(p):
    """ epreuve de Bernoulli, p
        est la probabilité de succés
        on renvoie alors 1
        (sinon on renvoie 0)."""
    if random.random() <= p:
        return 1
    else:
        return 0

def echantillon(n,p=0.5):
    """echantillon de taille n
       associé à une épreuve de
       Bernoulli de parametre p
       qui vaut de base 0.5"""
    result = []
    for i in range(n):
        result.append(Bernoulli(p))
    return result

def frequence_des_uns(echantillon):
    """renvoie la frequence des 1
       dans l'echantillon (liste) donné"""
    numerateur = 0
    denominateur = len(echantillon)
    for i in range(denominateur):
        numerateur += echantillon[i]
    return numerateur/denominateur
```

Vous pouvez télécharger le programme ci-dessus en cliquant dessus. (Il comporte quelques annotations supplémentaires pour vous aider à le comprendre)

Plutôt que de truquer une pièce de monnaie afin qu'elle ait 40 % de chance tomber sur Pile puis de la lancer 20 fois en notant le résultat, on préfère effectuer une simulation.

```
>>> mon_echantillon=echantillon(20,0.4)
>>> mon_echantillon
[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]
>>> frequence_des_uns(mon_echantillon)
0.35
>>> 
```

On simule un échantillon de taille 20 associé à une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4.
Cette simulation peut se faire avec une feuille de calcul ou comme ici avec un programme informatique.
L'intérêt est que l'on peut facilement augmenter la taille de l'échantillon.

IV Étude des échantillons

Définition n°6. Fluctuation d'échantillonnage

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès obtenues sur chaque échantillon va varier (fluctuer). On appelle cela la fluctuation d'échantillonnage.

Exemple n°6.

On reprend l'exemple précédent et on simule 10 échantillons de taille 20 d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4.

```
>>> for i in range(10):
        print(frequence_des_uns(echantillon(20,0.4)))


0.5
0.3
0.4
0.35
0.3
0.35
0.6
0.65
0.3
0.3
>>>
```

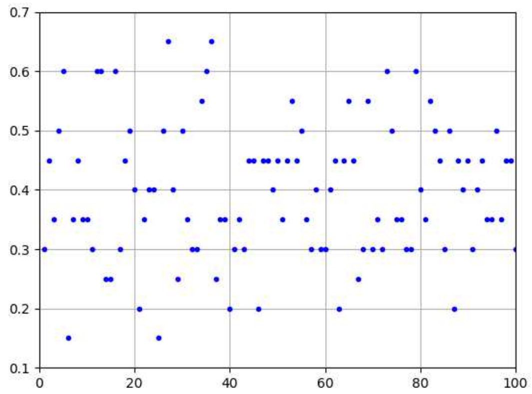
On constate que la fréquence du succès fluctue..

Remarque n°3.

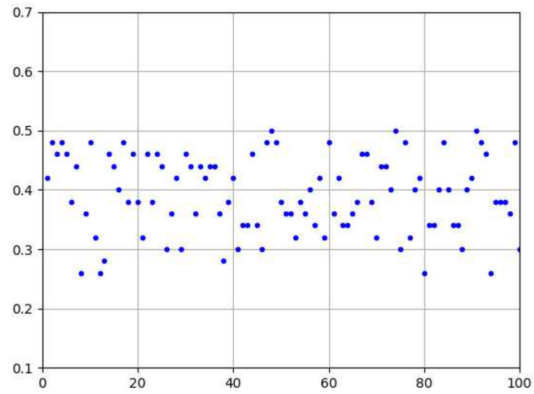
Par contre, plus la taille des échantillons augmente, plus la fluctuation diminue.

Dans les graphiques suivants, chaque point représente la fréquence du succès d'un échantillon.

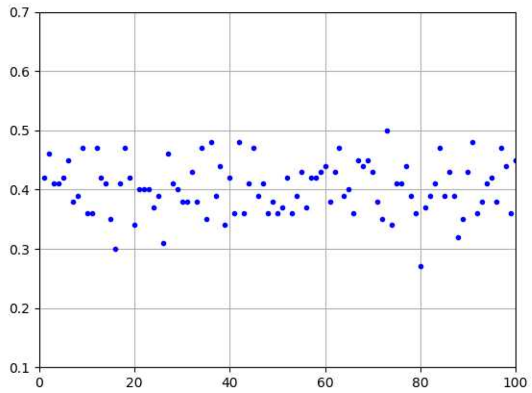
100 échantillons de taille 20
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



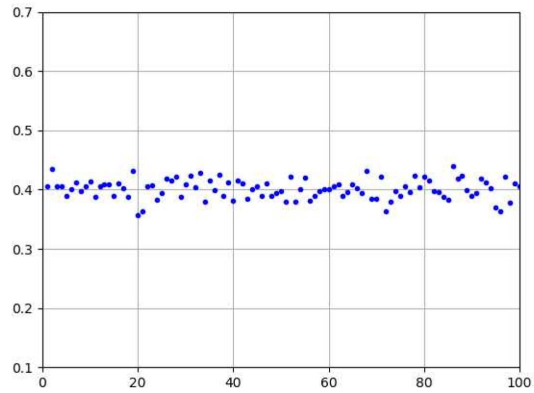
100 échantillons de taille 50
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



100 échantillons de taille 100
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



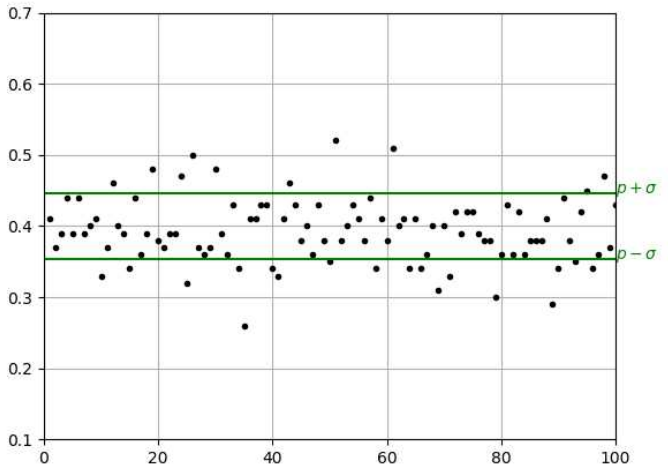
100 échantillons de taille 1000
la probabilité de succès de l'épreuve est 0,4



Remarque n°4.

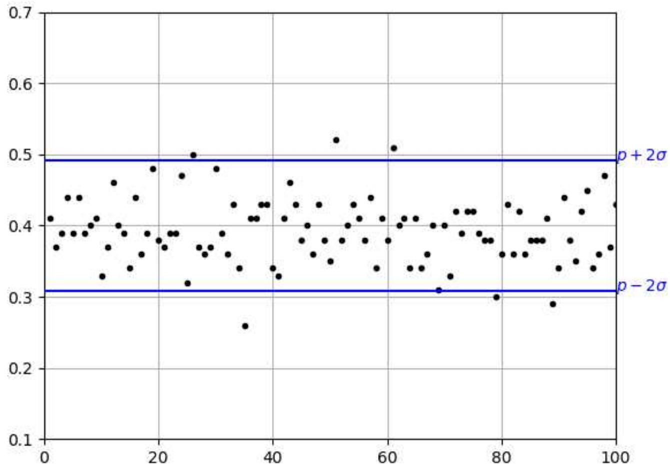
On peut remarquer que en moyenne :
environ 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p-\sigma\ ;\ p+\sigma]$
environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-2\sigma\ ;\ p+2\sigma]$
environ 99% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-3\sigma\ ;\ p+3\sigma]$
où σ est l'écart-type de la série des fréquences (voir la page 5 de ce cours)

Il faut retenir que :



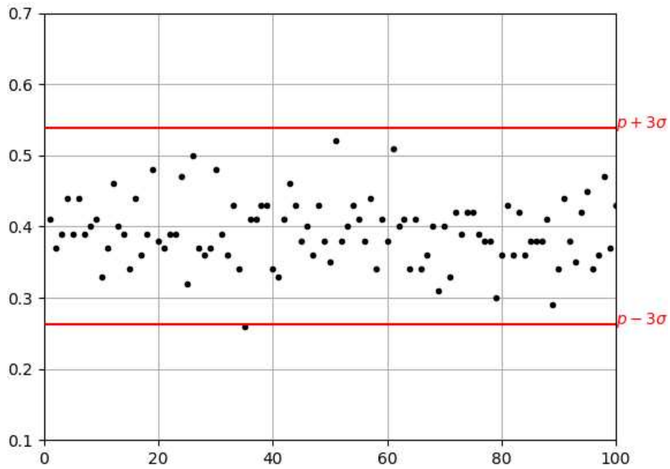
▪ Il n'est pas rare d'obtenir un échantillon dont la fréquence s'écarte de plus d'un écart-type de la fréquence théorique :
cela arrive dans environ $32\,\%$ des cas
($100\,\%-68\,\%$)

Effectivement, il y a pas mal de points à l'extérieur des lignes vertes.



▪ Il est par contre très rare que la fréquence d'un échantillon s'écarte de plus de deux écarts-types de la fréquence théorique :
Cela arrive dans 5 % des cas.

Effectivement, il y a peu de points à l'extérieur des lignes bleues.



▪ Il est encore beaucoup plus rare que la fréquence d'un échantillon s'écarte de plus de trois écarts-types de la fréquence théorique : Cela arrive dans 1 % des cas.

Effectivement, il y a très peu de points à l'extérieur des lignes rouges.

Propriété n°2. ***Lien entre l'écart-type σ et la taille n de l'échantillon (admis)***

La valeur σ n'est pas très éloignée de $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

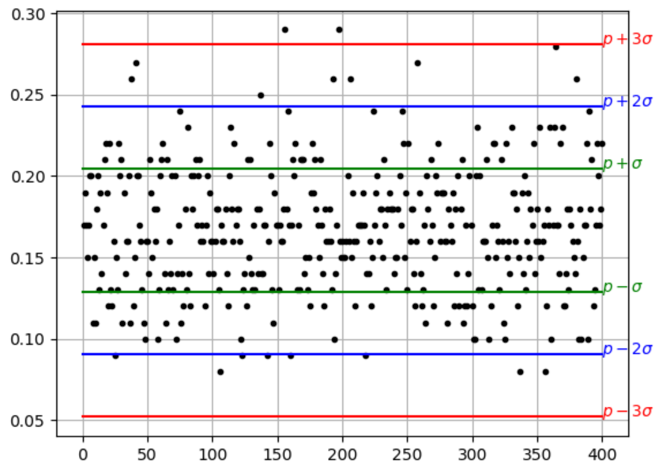
Remarque n°5.

Cela signifie qu'en pratique, on prendra $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ comme valeur de σ .

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°1

On observe le fait d'obtenir un 6 lorsqu'on lance un dé. On simule 400 échantillons de taille 100.
On obtient le nuage de points ci-contre :
De plus, le calcul de l'écart type donne le résultat suivant : $\sigma \approx 0{,}037$.
On note p la probabilité d'obtenir 6.



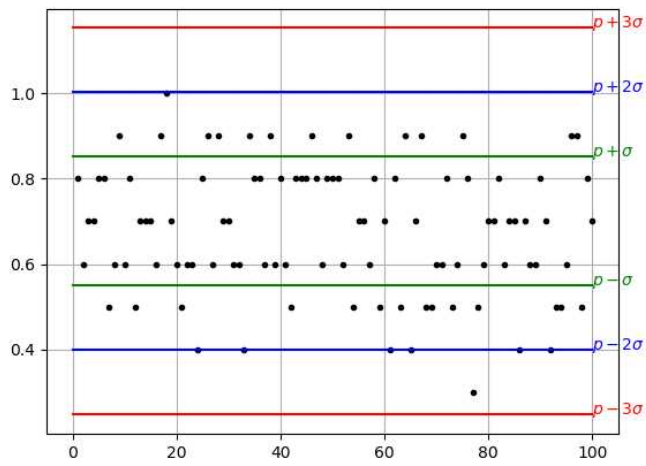
(Lire l'exemple avant de commencer)

1) Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à 2σ de p .
2) Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à 3σ de p .
3) Peut-on dire qu'il est fréquent d'obtenir moins de 10 % de 6?
4) Que va-t-il se passer si on augmente la taille de l'échantillon à 200?

Un exemple :
Pour déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à σ de p :
▪ On a compté (si si) le nombre de points à l'extérieur des droites vertes : il y en a 110.
▪ On en déduit qu'il y en a 280 entre les droites vertes.
▪ Et donc le pourcentage cherché s'obtient avec le calcul suivant : $\dfrac{280}{400}=0{,}7$ soit 70 %.

EXERCICE N°2

Ibrahim gagne ses matchs de badminton 7 fois sur 10.
Il décide de participer à un tournoi où il jouera 10 matchs lors de la sélection.
Pour participer aux quarts de finale, il faut gagner au moins 5 matchs.
On simule 100 échantillons de 10 matchs et on obtient le nuage de points ci-contre.
De plus, le calcul de l'écart type donne le résultat suivant : $\sigma \approx 0{,}151$.
On note p la probabilité que Ibrahim gagne un match.



1) Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à σ de p .
2) Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à 2σ de p .
3) Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à 3σ de p .
4) Donner le nombre de simulations où Ibrahim sera qualifié pour les quarts de finale.
Est-ce une situation fréquente?

VARIABLES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°1

On lance un dé à 10 faces numérotées de 1 à 10. On simule 200 échantillons de 100 lancers de ce dé et on note la fréquence des lancers supérieurs ou égaux à 4. On obtient le tableau suivant :

0,57	0,58	0,59	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65
1	1	1	2	2	1	5	7	6

0,66	0,67	0,68	0,69	0,7	0,71	0,72	0,73	0,74
10	20	12	26	14	16	13	12	16

0,75	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8	0,81	0,82
6	14	6	4	2	2	1	0	0

1) En moyenne, quelle est la fréquence obtenue ?
2) Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 68 % des fréquence
3) Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 95 % des fréquence
4) Calculer l'écart-type σ de cette série.
5) Déterminer les intervalles $[p-\sigma\ ;\ p+\sigma]$ et $[p-2\sigma\ ;\ p+2\sigma]$, et comparer avec les inter obtenus aux questions 1 et 2 .

EXERCICE N°2 Tableur

Le Saboteur est un jeu auquel on peut jouer jusqu'à 10 joueurs. Les joueurs sont répartis au hasard en deux équipes : les « chercheurs d'or » et les « saboteurs ».
Pour déterminer les équipes, chaque joueur choisit au hasard une carte.
Pour 10 joueurs, il y a 7 cartes « chercheurs d'or » et 4 cartes « saboteurs ».
À chaque manche du jeu, les rôles sont distribués.
Une partie s'effectue en trois manches.

1) Estelle a été « saboteur » pendant toute la partie. Est-ce une situation fréquente ?
2) Simuler sur tableur 100 parties et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

Conseil : « =ALEA.ENTRE.BORNES(0;11) » vous sera utile…
(En cas de circonstances exceptionnelles, vous obligeant à faire cet exercice seul(e), vous pouvez vous inspirer de ceci)

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°1

Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet.
On prélève au hasard une lettre puis on la remet dans le sac. On répète cette épreuve 4 fois.
On gagne 10 € si on tire une voyelle et on perd 1 € si on tire une consonne.
Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

1) On note X le gain du joueur au bout des 4 tirages. Donner la loi de probabilité de X.

2) Si l'on peut écrire avec les lettres tirées le mot GAIN, on gagne en plus la somme de $1\,000$ €. Quelle est la somme maximale que l'on peut gagner et quelle est la probabilité de la gagner ?

EXERCICE N°2

Esteban hésite entre deux jeux de grattage de même prix.
Il note X la variable aléatoire associée au gain du premier ticket et Y la variable aléatoire associée au gain du deuxième ticket. Les lois de probabilité qu'il trouve sont données dans les tableaux ci-dessous.

a_i	0	1	2	50	100
$P(X=a_i)$	0,5	0,4	0,05	0,04	0,01

a_i	0	1	2	50	100
$P(Y=a_i)$	0,2	0,2	0,55	0,045	0,005

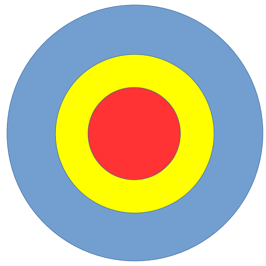
Quel est le choix de ticket à lui conseiller ? Argumenter la réponse.

EXERCICE N°3

Quand elle rentre de sa garde de nuit, Marlène rencontre 2 feux tricolores non synchronisés. Elle est seule sur la route et ne s'arrête que si elle rencontre un feu orange ou rouge. Les deux sont rouges pendant $30\,s$ puis verts pendant $25\,s$ et oranges pendant $5\,s$.

En moyenne, combien de temps Marlène sera-t-elle à l'arrêt ?

EXERCICE N°4



Peter organise un tournoi de fléchettes pour son anniversaire, il possède la cible ci-contre où les cercles ont des rayons de 5, 10 et 20 cm.
La zone rouge rapporte 100 points, la zone jaune 40 et
la zone bleue 20. Si on n'atteint pas la cible, on ne gagne aucun point.
Aurélia, qui n'a jamais joué, lance au hasard 2 fléchettes. On considère qu'elle atteint la cible une fois sur deux et que la probabilité qu'elle soit dans une zone colorée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1) Quelle est la probabilité qu'Aurélia gagne 40 points ?
2) Combien de points Aurélia peut-elle espérer avoir en moyenne ?

EXERCICE N°5 Problème ouvert

Zoé tape au hasard sur les touches A, Z ou E de l'ordinateur toutes les secondes.
On note T_1 le temps moyen pendant lequel Zoé doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAE et T_2 le temps moyen pendant lequel elle doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAZ.
A-t-on $T_1 = T_2$?