

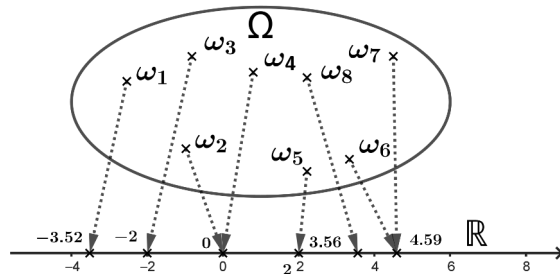
VARIABLES ALÉATOIRES

I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

Définition n°1. Variable aléatoire

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans \mathbb{R} , c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Exemple n°1.



$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ici,

$$X(\omega_1) = -3,52 :$$

L'issue ω_1 a pour image -3,52 par la variable aléatoire X

$$X(\omega_2) = 0 , \text{ etc....}$$

Remarque n°1.

Toutes les issues doivent avoir une image par X (car X est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

VARIABLES ALÉATOIRES

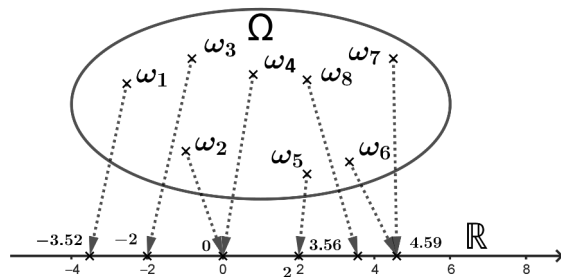
Connaissance n°1

Des notations

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $\{X = a\}$ l'événement « X prend la valeur a »
- $\{X \leq a\}$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

Exemple n°2.



$\{X = -3,52\}$ est en fait $\{\omega_1\}$,
 $\{X = 0\}$ est en fait $\{\omega_2, \omega_4\}$
 $\{X = 1,5\}$ est en fait \emptyset
 $\{X = -18\}$ aussi...
 $\{X \leq 0\}$ est en fait $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
 $\{X < 0\}$ est en fait $\{\omega_1, \omega_3\}$
 (il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

VARIABLES ALÉATOIRES

Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de Ω , on peut parler de leur probabilité.

Par exemple :

$$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) \dots$$

C'est pénible toutes ces accolades !

Connaissance n°2 Convention d'écriture

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leq a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de Ω , on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

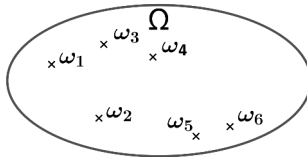
II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k .

Exemple n°3.



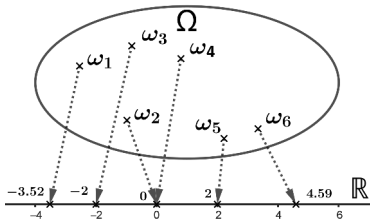
Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total

1



Loi de probabilité de X

x_i	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$

Total

1

- $P(X = 4,59) = 0,18$, $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de X .

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine Ω .

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$$X(\{1\}) = -5, \quad X(\{2\}) = 2, \quad X(\{3\}) = 1,$$

$$X(\{4\}) = 2, \quad X(\{5\}) = 1 \quad \text{et} \quad X(\{6\}) = 2$$

(Il y a trois images possibles : -5 ; 1 et 2)

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -5\} = \{1\}$$

$$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$$

$$\{X = 2\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	1	2	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	

Le plus gros du travail
est fait au brouillon

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°2 ***Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)***

Voici un jeu :

- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis on jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

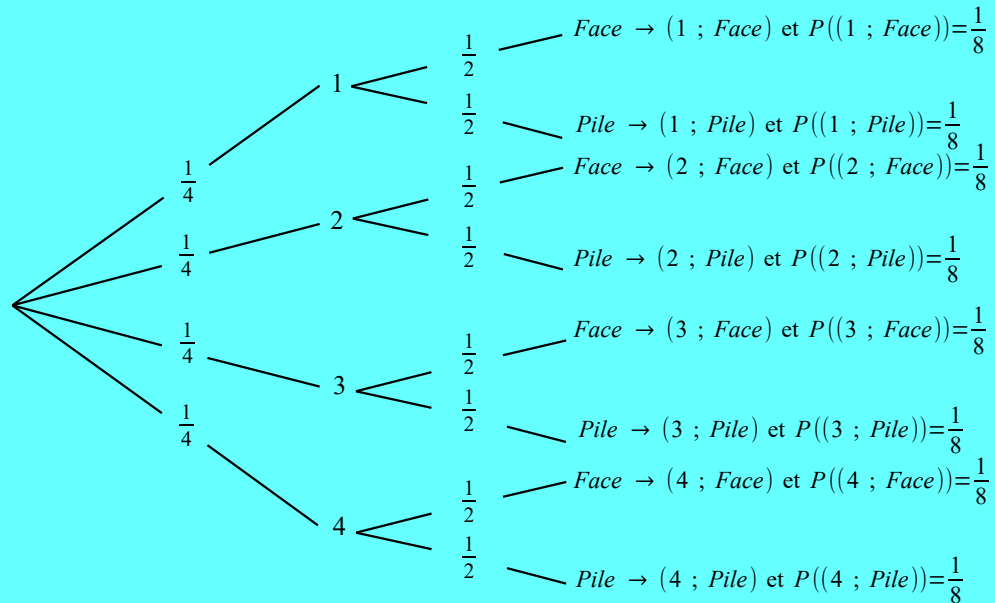
Donner la loi de probabilité de X .

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine Ω

Une issue de Ω est donc un couple, par exemple : $(2 ; Face)$, $(5 ; Pile)$ etc...

Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1; Face); (2; Face); (3; Face); (4; Face); (1; Pile); (2; Pile); (3; Pile); (4; Pile)\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	(1; Face)	(2; Face)	(3; Face)	(4; Face)	(1; Pile)	(2; Pile)	(3; Pile)	(4; Pile)	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

Issue	(1; Face)	(2; Face)	(3; Face)	(4; Face)	(1; Pile)	(2; Pile)	(3; Pile)	(4; Pile)
$X(Issue)$	-6 $= -4 - 2$	8 $= 10 - 2$	8 $= 10 - 2$	8 $= 10 - 2$	-6 $= -4 - 2$	3 $= 5 - 2$	-6 $= -4 - 2$	3 $= 5 - 2$

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -6\} = \{(1; Face)\} \cup \{(1; Pile)\} \cup \{(3; Pile)\}$$

$$\{X = 3\} = \{(2; Pile)\} \cup \{(4; Pile)\}$$

$$\{X = 8\} = \{(2; Face)\} \cup \{(3; Face)\} \cup \{(4; Face)\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-6	3	8	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1	

Le plus gros du travail est fait au brouillon

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On n'écrit pas
les accolades

On fait une partie :

- 1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
- 2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
- 3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
- 4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

On n'écrit pas les accolades

- 1) Déterminer $P(X = 8)$.
- 2) Déterminer $P(X \leq 0)$.
- 3) Déterminer $P(X > 7)$.
- 4) Déterminer $P(X < 20)$.

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°5 *Simuler une loi de probabilité*

On reprend le contexte de l'exercice n°1 et on se propose de simuler 10000 parties.

Télécharger le script disponible en flashant (ou en cliquant) le QRcode de gauche puis ouvrez le avec Basthon (QRcode de droite).

- 1) Complétez le script puis exécutez-le.
- 2) Notez le gain moyen que vous avez obtenu et comparez le avec vos camarades.



Le script



Ouvrir Basthon

```
1 import random
2
3 def simulation_gain():
4     de = random.randint(1, 6) # On lance un dé à 6 faces
5
6     if de == 1:
7         return -5 # Perte de 5 euros
8
9     elif de % 2 == 0: # Si le résultat est pair
10        return ..... # Gain de 2 euros
11
12    else :
13        return ..... # Gain de 1 euro
14
15 # Calcul de la moyenne sur 10 000 parties
16 nb_parties = 10000
17 somme_gains = 0
18
19 for i in range(nb_parties):
20     somme_gains = somme_gains + simulation_gain()
21
22 moyenne = somme_gains / nb_parties
23 print("Le gain moyen sur 10 000 parties est :", moyenne)
```

III *Espérance d'une variable aléatoire réelle*

Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour X ? »

Définition n°3. *Espérance d'une variable aléatoire réelle*

Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i)$$

Remarque n°5.

$$\sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Exemple n°4. *dans le contexte de l'exemple n°3*

$$E(X) = -3,52 \times P(X=-3,52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4,59 \times P(X=4,59)$$

$$E(X) = -3,52 \times 0,1 + (-2) \times 0,25 + 0 \times 0,35 + 2 \times 0,12 + 4,59 \times 0,18$$

$$E(X) = 0,2142$$

L'espérance de X vaut 0,2142.

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (*On dit alors que la variable aléatoire est centrée*)

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°2 *Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)*

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,00009	0,00001

Ce jeu est-il équitable ?

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».

On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le « triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.

Déterminer, en fonction de m , le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.



VARIABLES ALÉATOIRES TP01

Objectif : Utiliser Python pour simuler des données biologiques et comprendre comment l'espérance et la variance réagissent aux transformations de données.

La situation

Dans une population de fleurs sauvages, un gène influence la taille de la tige.

- 60% des fleurs ont la variété "standard" : taille de 10 cm.
- 30% ont la mutation "M1" : taille de 15 cm.
- 10% ont la mutation "M2" : taille de 20 cm.

Soit X la variable aléatoire donnant la taille d'une fleur choisie au hasard.

Le travail à faire

3) Ouvrez votre éditeur Python et complétez les fonctions ci-dessous.



```
1 tailles = [10, 15, 20]
2 probabilites = [0.6, 0.3, 0.1]
3
4 def esperance(L_valeurs, L_probabilites):
5     e = 0
6     for i in range(len(L_valeurs)):
7         # À COMPLÉTER : Formule de l'espérance
8         ...
9     return e
10
11 def variance(L_valeurs, L_probabilites):
12     e = esperance(L_valeurs, L_probabilites)
13     v = 0
14     for i in range(len(L_valeurs)):
15         # À COMPLÉTER : Moyenne des carrés des écarts
16         ...
17     return v
18
19 # Résultats pour X
20 print("X (en cm) : E(X) =", esperance(tailles, probabilites))
21 print("X (en cm) : V(X) =", variance(tailles, probabilites))
```



4) Notez les valeurs obtenues pour $E(X)$ et $V(X)$.

$E(X) =$

$V(X) =$

VARIABLES ALÉATOIRES TP01

5) On décide d'exprimer les tailles en millimètres. Chaque valeur est multipliée par 10. On pose $Y = 10 X$.

```
1 tailles = [10, 15, 20]
2 probabilites = [0.6, 0.3, 0.1]
3
4 def esperance(L_valeurs, L_probabilites):
5     e = 0
6     for i in range(len(L_valeurs)):
7         # À COMPLÉTER : Formule de l'espérance
8         ...
9     return e
10
11 def variance(L_valeurs, L_probabilites):
12     e = esperance(L_valeurs, L_probabilites)
13     v = 0
14     for i in range(len(L_valeurs)):
15         # À COMPLÉTER : Moyenne des carrés des écarts
16         ...
17     return v
18
19 # Résultats pour X
20 print("X (en cm) : E(X) =", esperance(tailles, probabilites))
21 print("X (en cm) : V(X) =", variance(tailles, probabilites))
```

5.a) Créez une liste **tailles_mm** = [100, 150, 200].

5.b) Utilisez vos fonctions pour calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

$$E(Y) = E(10 X) = \boxed{} \quad V(Y) = V(10 X) = \boxed{}$$

5.c) Comment $E(10 X)$ et $V(10 X)$ sont-elles liées à $E(X)$ et $V(X)$?

$$\boxed{E(10 X) = \dots \times E(X)} \quad \text{et} \quad \boxed{V(10 X) = \dots \times V(X)}$$

VARIABLES ALÉATOIRES TP01

6) On ajoute un engrais qui fait gagner exactement 5 cm à chaque plante, quelle que soit sa génétique. On pose $Z = X+5$

```

1 tailles = [10, 15, 20]
2 probabilites = [0.6, 0.3, 0.1]
3
4 def esperance(L_valeurs, L_probabilites):
5     e = 0
6     for i in range(len(L_valeurs)):
7         # À COMPLÉTER : Formule de l'espérance
8         ...
9     return e
10
11 def variance(L_valeurs, L_probabilites):
12     e = esperance(L_valeurs, L_probabilites)
13     v = 0
14     for i in range(len(L_valeurs)):
15         # À COMPLÉTER : Moyenne des carrés des écarts
16         ...
17     return v
18
19 # Résultats pour X
20 print("X (en cm) : E(X) =", esperance(tailles, probabilites))
21 print("X (en cm) : V(X) =", variance(tailles, probabilites))

```

6.a) Créez une liste `tailles_boost = [15, 20, 25]`.

6.b) Utilisez vos fonctions pour calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

$$E(Z) = E(X+5) = \boxed{} \qquad V(Y) = V(X+5) = \boxed{}$$

6.c) Comment $E(X+5)$ et $V(X+5)$ sont-elles liées à $E(X)$ et $V(X)$?

$$\boxed{E(X+5) = E(X) + 5} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X+5) = V(X)}$$

VARIABLES ALÉATOIRES TP01

7) Complétez

Linéarité de l'espérance :

$$E(aX+b) = \dots\dots\dots$$

Propriété de la variance :

$$V(aX+b) = \dots\dots\dots$$

VARIABLES ALÉATOIRES

Propriété n°1. *espérance et transformation affine*

Soit a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire.

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

preuve :

Posons $Y = aX+b$.

Quand X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k , Y prend les valeurs $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_k+b$.

De plus, pour tout entier i entre 1 et k , $P(Y = ax_i+b) = P(X = x_i)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^k (ax_i+b)P(Y = ax_i+b) \\ &= \sum_{i=1}^k (ax_i+b)P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (ax_i \times P(X = x_i) + b \times P(X = x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k a \times x_i \times P(X = x_i) + \sum_{i=1}^k b \times P(X = x_i) \\ &= a \times \underbrace{\sum_{i=1}^k x_i \times P(X = x_i)}_{=E(X)} + b \times \underbrace{\sum_{i=1}^k P(X = x_i)}_{=1} \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°1 *Linéarité de l'espérance*

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -4 ; 5 ; 10 et 100 , et telle que $E(Y) = 8$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 3Y + 60$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

1.b) Déterminer $E(Z)$.

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -4Y + 5$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

2.b) Déterminer $E(R)$.

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°2 *Linéarité de l'espérance : du concret*

Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

- 1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?
- 2) Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de R .
- 3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?
- 4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

VARIABLES ALÉATOIRES

IV Variance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de X autour de $E(X)$. Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

VARIABLES ALÉATOIRES

Définition n°4. Variance d'une variable aléatoire réelle

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ et soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ c'est à dire :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X = x_2) + \dots + (x_k - E(X))^2 \times P(X = x_k)$$

VARIABLES ALÉATOIRES

Exemple n°5.

Dans le contexte de l'exemple n°3

x_i	$-3,52$	-2	0	2	$4,59$	Total
$P(X=x_i)$	$0,1$	$0,25$	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	$0,12$	$0,18$	1

On calcule d'abord l'espérance :

$$E(X) = 0,2142 \text{ (on l'a fait dans l'exemple n°4)}$$

Puis on calcule la variance :

$$V(X) = (-3,52 - 0,2142)^2 \times 0,1 + (-2 - 0,2142)^2 \times 0,25 + \dots + (4,59 - 0,2142)^2 \times 0,18$$

$$V(X) \approx 6,4654$$

VARIABLES ALÉATOIRES

Propriété n°2. variance et transformation

Soit a et b deux nombres réels. $V(aX+b) = a^2 \times V(X)$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^k (a x_i + b - E(aX+b))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (a x_i + b - aE(X) - b)^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (a(x_i - E(X)))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k a^2 (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) = a^2 \times V(X) \end{aligned}$$

VARIABLES ALÉATOIRES

Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimerait que $E(X)$ et $V(X)$ aient la même unité.

En effet si X est par exemple en euro alors $E(X)$ sera en euro mais $V(X)$ sera en « euro au carré »...

On va donc « se débarrasser de ce carré »...

VARIABLES ALÉATOIRES

V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition n°5. *écart-type d'une variable aléatoire réelle*

Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple n°6. *Toujours dans le contexte de l'exemple n°3*

On avait $V(X) \approx 6,4654$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,5427$

Remarque n°9. *écart-type et transformation affine*

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

VARIABLES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°1 *Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules* (Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

- 1) Calculer l'espérance de X .
- 2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .
- 3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .
- 4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -2X + 3$
- 5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 3Y - 1$

VARIABLES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°2 *Espérance, variance, écart-type : cas concret*

(Calculatrice autorisée)

Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire.

- Si celui-ci est vert, on gagne 5 €,
- s'il est jaune on gagne 20 € et
- s'il est rouge on perd 4 €.

1) X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1.a) Déterminer la loi de probabilité de X .

1.b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.

1.c) Interpréter la valeur de $E(X)$.

2) Vérifier les résultats de la question 1. en utilisant la calculatrice.

VARIABLES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°3 *Au casino*

Extrait du décliné 1^{er} spé : 80 p 362

(Calculatrice autorisée)

(On arrondira les résultats au centième)

Une roulette de casino comporte 37 cases , numérotées de 0 à 36

On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti.

Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.



<https://www.flickr.com/photos/129231073@N06/35234919293>

1) Lorsqu'un joueur mise sur l'un des numéros, on dit qu'il fait un plein. Dans ce cas là, si le numéro misé sort, il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise. Sinon il perd sa mise au profit du casino. Un joueur mise 10 € et fait un plein. On note X son gain algébrique , en euros.

1.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

1.b) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

2) Lorsqu'un joueur mise sur 2 numéros différents, on dit qu'il fait un cheval point dans ce cas là, si l'un des numéros choisis sort, il remporte 17 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon, il la perd. Un joueur mise 10 € et fait un cheval. On note Y son gain algébrique, en euros .

2.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

2.b) Calculer l'écart-type $\sigma(Y)$.

3) Comparer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$, puis les écarts types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter dans le contexte.

VARIABLES ALÉATOIRES

VI Formule de Koenig-Huygens

Remarque n°10.

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

- Gardons à l'esprit que $E(X)$ est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^k E(X)^2 \times P(X=x_i) = E(X)^2 \times \sum_{i=1}^k P(X=x_i) = E(X)^2 \times 1$$

- Dans la même idée :

$$E(-2XE(X)) = \sum_{i=1}^k -2x_i E(X) \times P(X=x_i) = -2E(X) \times \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = -2E(X) \times E(X)$$

- On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + \underbrace{E(X)^2 \times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°1 Manipuler la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

Une usine fabrique des composants électroniques. On note X le nombre de composants défectueux dans un lot de 5. La loi de probabilité est la suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,42	0,31	0,15	0,08	0,03	0,01

- 1) Calculer $E(X)$.
- 2) Calculer $V(X)$ de deux manières différentes.

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°2 Utiliser la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

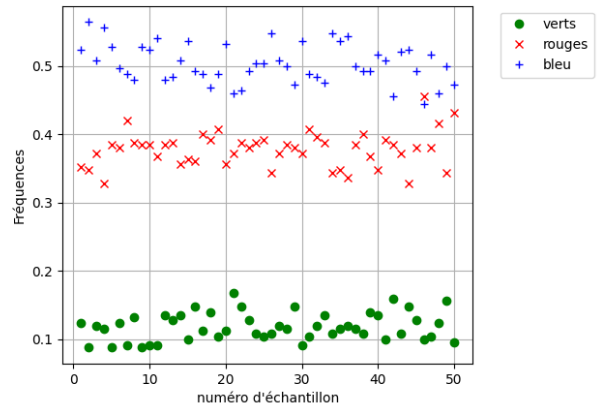
Un jeu consiste à tirer une carte. Si c'est un cœur, on gagne k euros. Sinon, on perd 1 euro. On sait que la probabilité de gagner est $p = \frac{1}{4}$.

Trouvez la valeur de k pour laquelle la variance du gain est de 3.

VARIABLES ALÉATOIRES E06

EXERCICE N°1

Dans son jeu vidéo favori, Bérildée peut ouvrir des coffres dont le contenu est aléatoire. Ils peuvent contenir des émeraudes vertes qui valent dix points, des rubis rouges qui valent 5 points ou un voleur bleu qui lui vole 5 points. Le graphique ci-dessous donne les fréquences obtenues pour 50 échantillons de taille 200 de l'ouverture d'un coffre. Les points bleus représentent les fréquences d'obtention d'un voleur, les points rouges celles des rubis, et les points verts celles des émeraudes.



- 1) À l'aide de ce graphique, donner une estimation de la probabilité d'obtention d'une émeraude à ce jeu.
- 2) Bérildée a-t-elle intérêt à ouvrir les coffres dans ce jeu ?

VARIABLES ALÉATOIRES E06

EXERCICE N°2

On lance 8 fois successivement un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenu sur les huit lancers.

1.a) Calculer $P(X = 0)$.

1.b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 sur les huit lancers ?

2) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibrée à six faces pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 devienne supérieure ou égale à 95 % ?

VARIABLES ALÉATOIRES E06

EXERCICE N°3

Des bons d'achats sont à gagner au hasard dans un magasin et les probabilités de les obtenir sont données dans le tableau ci-dessous.

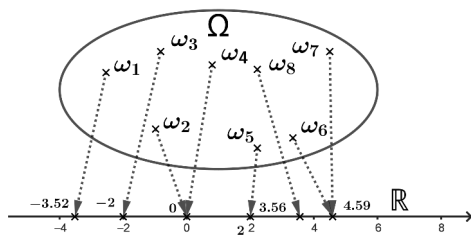
Bons d'achats en euros	1	2	3	4	5
Probabilités	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

X est la variable aléatoire donnant la valeur d'un bon d'achat.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) La gérante du magasin souhaite que la moyenne des bons d'achats soit égale à 3 et que la variance soit égale à 1. Elle demande alors d'utiliser une transformation affine qui à X associe $aX+b$ où a et b sont deux nombres réels avec $a > 0$. Calculer les valeurs de a et b à 10^{-2} près.

VII Le résumé du cours



Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si

X est une application de Ω dans \mathbb{R} ,

c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Convention d'écriture

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

▪ $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »

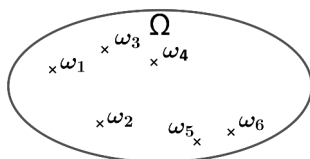
▪ $P(X \leq a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »

▪ on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

Loi de probabilité

Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k .



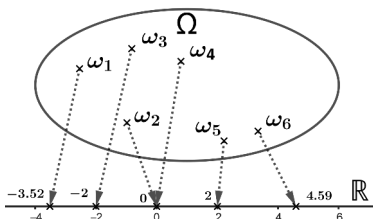
Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total

1



Loi de probabilité de X

x_i	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$

Total

1

- $P(X = 4,59) = 0,18$, $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

Espérance de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i)$$

ou encore :

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Variance de X

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

ou encore :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

Écart-type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Les propriétés à retenir

a et b sont des nombres réels.

$$E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$$

Transformation affine, changement de variable (selon les livres)

Formule de Koenig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$