

VARIABLES ALÉATOIRES M04

EXERCICE N°1 *Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

(Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	4	7
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

- 1) Calculer l'espérance de X .
- 2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .
- 3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.
- 4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -3X + 2$
- 5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 2Y + 1$

EXERCICE N°2 *Espérance, variance, écart-type : cas concret*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

(Calculatrice autorisée)

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher dont 15 sont rouges et les autres sont jaunes. On mise 40 €.

On tire au hasard successivement deux boules en remettant dans l'urne la première.

On gagne 70 € par boule jaune tirée.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) À l'aide de la calculatrice, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 3) Donner une interprétation de $E(X)$.
- 4) Ce jeu est-il équitable ?

EXERCICE N°3 *Le choix de l'investissement*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Merci à Gemini pour l'idée même si les calculs étaient faux et que j'ai dû tout refaire...

Imaginez que vous avez 10 000 € à investir. Vous hésitez entre deux placements financiers (A et B). Les rendements annuels (en %) sont des variables aléatoires.

Voici les probabilités de gain pour chaque placement :

Placement A :

Gain (x_i)	-1 %	2 %	5 %
Probabilité $P(X = x_i)$	0,2	0,6	0,2

Placement B :

Gain (y_i)	-11 %	2 %	15 %
Probabilité $P(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,2

- 1) Calculer l'espérance $E(X)$ et $E(Y)$. Que remarquez-vous ?
- 2) Calculer la variance $V(X)$ et $V(Y)$, puis les écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
- 3) Si vous devez choisir un placement pour votre retraite, lequel prenez-vous ? Si vous êtes un trader qui cherche un "gros coup", lequel choisissez-vous ?

VARIABLES ALÉATOIRES M04C

EXERCICE N°1 Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules

(Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	4	7
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

1) Calculer l'espérance de X .

$$E(X) = -1 \times \frac{5}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 7 \times \frac{2}{10} = 3$$

Ainsi : $E(X) = 2,1$

2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .

▪ Calculons la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-1 - 2,1)^2 \times \frac{5}{10} + (4 - 2,1)^2 \times \frac{3}{10} + (7 - 2,1)^2 \times \frac{2}{10} \\ &= 9,61 \times \frac{5}{10} + 3,61 \times \frac{3}{10} + 24,01 \times \frac{2}{10} \end{aligned}$$

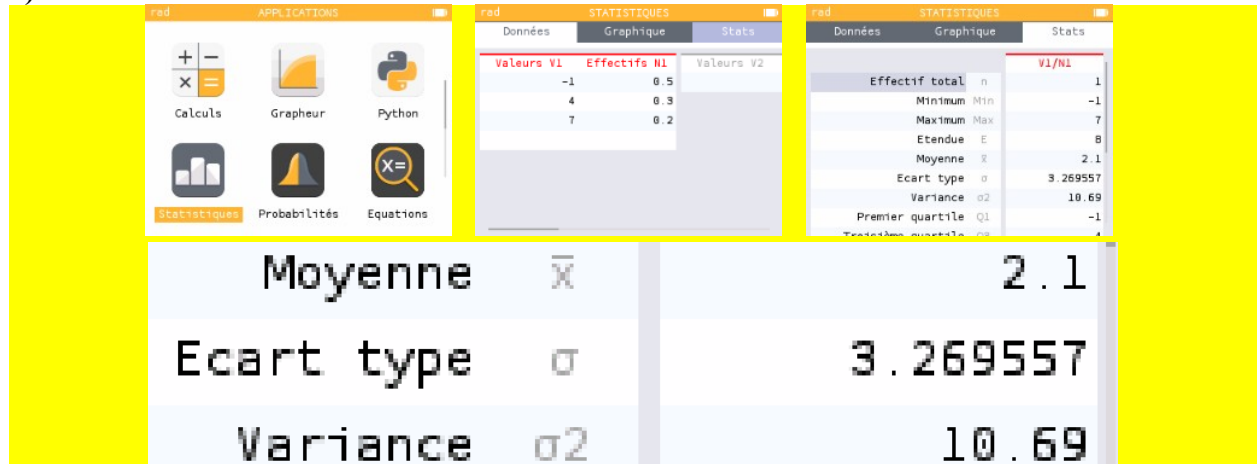
$$V(X) = 10,69$$

▪ On en déduit l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10,69} \approx 3,27 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.



4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -3X + 2$

On utilise bien sûr les formules du cours :

▪ $E(Y) = E(-3X + 2) = -3E(X) + 2 = -3 \times 2,1 + 2 = -4,3$ Ainsi : $E(Y) = -4,3$

▪ $V(Y) = V(-3X + 2) = (-3)^2 \times V(X) = 9 \times 10,69 = 96,21$ Ainsi : $V(Y) = 96,21$

▪ $\sigma(Y) = \sigma(-3X + 2) = |-3| \times \sigma(X) = 3 \times \sqrt{10,69} = 3\sqrt{10,69}$ Ainsi : $\sigma(Y) = 3\sqrt{10,69}$

Hé mais si on avait utilisé directement la définition de $\sigma(Y)$?

$$\sqrt{96,21} = \sqrt{9 \times 10,69} = \sqrt{3 \times 3 \times 10,69} = 3\sqrt{10,69}$$

Alors on aurait bien sûr trouvé le même résultat.

5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 2Y + 1$

▪ $E(Z) = E(2Y + 1) = 2E(Y) + 1 = 2 \times (-4,3) + 1 = -7,6$ Ainsi : $E(Z) = -7,6$

▪ $V(Z) = V(2Y + 1) = 2^2 \times V(Y) = 4 \times 96,21 = 384,84$ Ainsi : $V(Z) = 384,84$

▪ $\sigma(Z) = \sigma(2Y + 1) = |2| \times \sigma(Y) = 2 \times 3\sqrt{10,69} = 6\sqrt{10,69}$ Ainsi : $\sigma(Z) = 6\sqrt{10,69}$

Tiens, c'est marrant ce $2 \times 3 \dots$ Je vous laisse y réfléchir...

Au passage : $4 \times 96,21 = 4 \times 9 \times 10,69 \dots$

VARIABLES ALÉATOIRES M04C

EXERCICE N°2 Espérance, variance, écart-type : cas concret

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

(Calculatrice autorisée)

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher dont 15 sont rouges et les autres sont jaunes. On mise 40 €.

On tire au hasard successivement deux boules en remettant dans l'urne la première.

On gagne 70 € par boule jaune tirée.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

▪ On détermine Ω .

R_1 : « rouge au premier tirage » et \overline{R}_1 : « Jaune au premier tirage »

R_2 : « rouge au second tirage » et \overline{R}_2 : « Jaune au second tirage »

$\Omega = \{(R_1 ; R_2) ; (R_1 ; \overline{R}_2) ; (\overline{R}_1 ; R_2) ; (\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}$ (faites un arbre;)

▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	$(R_1 ; R_2)$	$(R_1 ; \overline{R}_2)$	$(\overline{R}_1 ; R_2)$	$(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)$	Total
Probabilité	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)
 $X(\{(R_1 ; R_2)\}) = -40$, $X(\{(R_1 ; \overline{R}_2)\}) = 30$, $X(\{(\overline{R}_1 ; R_2)\}) = 30$ et
 $X(\{(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}) = 140$

(Il y a trois images possibles : -40 ; 30 et 140)

▪ On regroupe les antécédents :

$\{X = -40\} = \{(R_1 ; R_2)\}$

$\{X = 30\} = \{(R_1 ; \overline{R}_2)\} \cup \{(\overline{R}_1 ; R_2)\}$

$\{X = 140\} = \{(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}$

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :

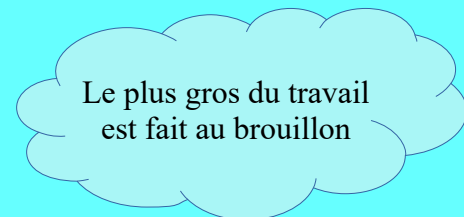
▫ $P(\{X = -40\}) = P(\{(R_1 ; R_2)\}) = \frac{9}{16}$

▫ $P(\{X = 30\}) = P(\{(R_1 ; \overline{R}_2)\}) + P(\{(\overline{R}_1 ; R_2)\}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

▫ $P(\{X = 140\}) = P(\{(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}) = \frac{1}{16}$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-40	30	140	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	1



2) À l'aide de la calculatrice, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Moyenne \bar{x}	-6.875
Ecart type σ	38.68442
Variance σ^2	1496.484

3) Donner une interprétation de $E(X)$.

En jouant un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre 6,875 € à chaque partie.

4) Ce jeu est-il équitable ?

L'espérance n'étant pas nulle, ce jeu n'est pas équitable.

Il est ici défavorable au joueur.

VARIABLES ALÉATOIRES M04C

EXERCICE N°3 Le choix de l'investissement

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

Merci à Gemini pour l'idée même si les calculs étaient faux et que j'ai dû tout refaire...

Imaginez que vous avez 10 000 € à investir. Vous hésitez entre deux placements financiers (A et B). Les rendements annuels (en %) sont des variables aléatoires.

Voici les probabilités de gain pour chaque placement :

Placement A :

Gain (x_i)	-1 %	2 %	5 %
Probabilité $P(X = x_i)$	0,2	0,6	0,2

Placement B :

Gain (y_i)	-11 %	2 %	15 %
Probabilité $P(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,2

1) Calculer l'espérance $E(X)$ et $E(Y)$. Que remarquez-vous ?

▪ $E(X) = -0,01 \times 0,2 + 0,02 \times 0,6 + 0,05 \times 0,2$

$E(X) = 0,02$ (Soit un gain de 2%)

▪ $E(Y) = -0,1 \times 0,2 + 0,02 \times 0,6 + 0,14 \times 0,2$

$E(Y) = 0,02$ (Soit un gain de 2%)

▪ On remarque que sur le long terme les deux placements semblent rapporter la même chose.

2) Calculer la variance $V(X)$ et $V(Y)$, puis les écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

▪ $V(X) = (-0,01 - 0,02)^2 \times 0,2 + (0,02 - 0,02)^2 \times 0,6 + (0,05 - 0,02)^2 \times 0,2$

$V(X) = 0,00036$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,00036} \approx 0,019$ à 10^{-3} près

▪ $V(Y) = (-0,11 - 0,02)^2 \times 0,2 + (0,02 - 0,02)^2 \times 0,6 + (0,15 - 0,02)^2 \times 0,2$

$V(Y) = 0,00676$ et $\sigma(Y) = \sqrt{0,00676} \approx 0,082$ à 10^{-3} près

3) Si vous devez choisir un placement pour votre retraite, lequel prenez-vous ? Si vous êtes un trader qui cherche un "gros coup", lequel choisissez-vous ?

Pour la retraite, il est plus sage de choisir le placement A.

Le trader préférera le placement B.

Voici un prompt pour votre IA :

Bonjour, j'aimerais que tu m'expliques comment interpréter la variance et l'écart-type en finance. J'aimerais également savoir si ce sont les indicateurs les plus pertinents ou s'il y en a d'autres. Auquel cas, il faudrait me les expliquer aussi.