

VARIABLES ALÉATOIRES E04C

EXERCICE N°1 Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules (Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

- 1) Calculer l'espérance de X .

$$E(X) = -2 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = 3$$

Ainsi : $E(X) = 3$

- 2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .

▪ Calculons la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-2-3)^2 \times \frac{3}{10} + (4-3)^2 \times \frac{3}{10} + (6-3)^2 \times \frac{4}{10} \\ &= 25 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 9 \times \frac{4}{10} \end{aligned}$$

$$V(X) = 11,4$$

▪ On en déduit l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{11,4} \approx 3,376 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

- 3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .

	Valeurs V1	Effectifs N1	Valeurs V2
-2	0.3		
4	0.3		
6	0.4		

	Effectif total	n
Minimum	Min	-2
Maximum	Max	6
Etendue	E	8
Moyenne	\bar{x}	3
Ecart type	σ	3.376389
Variance	σ^2	11.4
Premier quartile	Q1	-2
Deuxième quartile	Q2	3
Troisième quartile	Q3	6

Moyenne \bar{x} 3
 Ecart type σ 3.376389
 Variance σ^2 11.4

- 4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -2X+3$

On utilise bien sûr les formules du cours :

- $E(Y) = E(-2X+3) = -2E(X)+3 = -2 \times 3 + 3$ Ainsi : $E(Y) = -3$
- $V(Y) = V(-2X+3) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 11,4$ Ainsi : $V(Y) = 45,6$
- $\sigma(Y) = \sigma(-2X+3) = |-2| \times \sigma(X) = 2 \times \sqrt{11,4}$ Ainsi : $\sigma(Y) = 2\sqrt{11,4}$

Hé mais si on avait utilisé directement la définition de $\sigma(Y)$?

$$\sqrt{45,6} = \sqrt{4 \times 11,4} = \sqrt{4} \times \sqrt{11,4} = 2\sqrt{11,4}$$

Alors on aurait bien sûr trouvé le même résultat.

- 5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 3Y-1$

- $E(Z) = E(3Y+1) = 3E(Y)+1 = 3 \times (-3)+1$ Ainsi : $E(Z) = -8$
- $V(Z) = V(3Y+1) = 3^2 \times V(Y) = 9 \times 45,6$ Ainsi : $V(Z) = 410,4$
- $\sigma(Z) = \sigma(3Y+1) = |3| \times \sigma(Y) = 3 \times 2\sqrt{11,4}$ Ainsi : $\sigma(Z) = 6\sqrt{11,4}$

Tiens, c'est marrant ce 3×2 ... Je vous laisse y réfléchir...

Au passage : $9 \times 45,6 = 9 \times 4 \times 11,4$...