CALCUL LITTÉRAL

I Développer et réduire une expression

Définition n°1.

Développer c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Remarque n°1.

Réduire une expression, c'est « regrouper les termes semblables » et faire les calculs

Exemple n°1.

$(2x+3)(x-4)$	$=$	$2x^2-8x+3x-12$	$=$	$2x^2-5x-12$
produit	➔	somme	➔	expression réduite

I.1 La distributivité

Dans toute la suite de ce chapitre, a , b , c , d et k sont des nombres.

Propriété n°1. ***Simple distributivité***

$\boxed{k(a+b)=ka+kb}$ et $\boxed{k(a-b)=ka-kb}$

Exemple n°2.

$3x(7+2x)=21x+6\ x^2$ et $3x(7-2x)=21x-6\ x^2$

Remarque n°2.

$(7+2x)\times 3x\ =\ 3x(7+2x)$

Propriété n°2. ***Double distributivité***

$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$

Remarque n°3.

On n'oublie pas d'appliquer la règle des signes.

Méthode n°1.

$$(2x+3)(x-4) \qquad \text{L1}$$
$$=(+2x)\times(+x)+(+2x)\times(-4)+(+3)\times(+x)+(+3)\times(-4) \qquad \text{L2}$$
$$=2\times x-2x\times 4+3\times x-3\times 4 \qquad \text{L3}$$
$$=2x^2-8x+3x-12 \qquad \text{L4}$$
$$=2x^2-5x-12 \qquad \text{L5}$$

L2 ne s'écrit pas mais sert à trouver les signes de L3 en se rappelant que chaque flèche représente une multiplication. Il suffit d'appliquer la règle des signes au fur et à mesure.
L3 n'est pas nécessaire sur une copie (loin de là)
Pour résumer L2 et L3 sont des étapes mentales et seules L1 L4 et L5 sont à écrire.

Remarque n°4. .

Si il y a plus de termes dans les parenthèses, il suffit d'ajouter assez de flèches que ce soit dans la propriété n°1 ou dans la n°2.

Exercice n°1.

Développer et réduire :
$A=-2x(7-3x)$; $B=(4x-3)(5-3x)$ et $C=(2x+3y)(4-2z)$

I.2 Les identités remarquables

Propriété n°3. ***1re identité remarquable***

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

preuve : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

Exemple n°3.

$$(8+3x)^2=8^2+2\times 8\times 3x+(3x)^2=64+48x+9x^2=9x^2+48x+64$$

Remarque n°5.

Il est de coutume d'ordonner selon les puissances décroissantes de l'inconnue.

Propriété n°4. ***2^e identité remarquable***

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

preuve : $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

Exemple n°4.

$$(8-3x)^2=8^2-2\times 8\times 3x+(3x)^2=64-48x+9x^2=9x^2-48x+64$$

Propriété n°5. ***3^e identité remarquable***

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

preuve : $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Exemple n°5.

$$(8-3x)(8+3x)=8^2+(3x)^2=64-9x^2=-9x^2+64$$

Exercice n°2.

Développer et réduire :

$D=(1{,}5x+2)^2$; $E=(3x-2y)^2$; $F=(2x-1)(2x+1)$

Méthode n°2. ***Développer une expression « plus complexe »***

Développons et réduisons l'expression *G*.

$G=4(3x+2)^2-(x+2)(7-3x)$ L1

$G=4(9x^2+12x+4)-(7x-3x^2+14-6x)$ L2

$G=36x^2+48x+16-7x+3x^2-14+6x$ L3

$G=39x^2+47x+2$ L4

Dans L1, on identifie les produits à développer

Dans L2, on développe ces produits entre parenthèses (ou entre crochets).

Dans L3, on a distribué le facteur 4 sur la première expression entre parenthèses et on a écrit l'opposé de la seconde expression entre parenthèses (on a changé tous les signes à l'intérieur des parenthèses puis on a supprimé les parenthèses ainsi que le signe – qui était devant).

Dans L4, on a réduit l'expression (et on l'a ordonnée selon les puissances décroissantes de l'inconnue)

II Factoriser une expression

L'idée est d'utiliser les propriétés du paragraphe précédent « dans l'autre sens ».

Définition n°2.

Factoriser, c'est transformer une somme (algébrique) en un produit.

Méthode n°3. ***Avec un facteur commun***

Factoriser l'expression suivante :

$H=(2x+1)(3x-5)-(2x+1)^2+(8x+4)(7x-1)$ L1

$H=\underline{(2x+1)}(3x-5)-\underline{(2x+1)}(2x+1)+4\underline{(2x+1)}(7x-1)$ L2

$H=(2x+1)[(3x-5)-(2x+1)+4(7x-1)]$ L3

$H=(2x+1)[3x-5-2x-1+28x-4]$ L4

$H=(2x+1)(29x-10)$ L5

Dans L1, on identifie les produits (ici il y en a 3) et on cherche un facteur commun à chacun d'eux.
Dans L2, on fait apparaître le facteur commun, ici il s'agît de $(2x+1)$.
On remarque que « un seul $(2x+1)$ » est souligné, en effet $(2x+1)$ n'apparaît qu'une fois dans chaque produit.
Dans L3, on utilise la propriété n°1 de la droite vers la gauche (et si on a un doute, on relit la remarque n°4) en posant $k=(2x+1)$ $a=(3x-5)$ etc.
Dans L4, on développe l'expression obtenue entre crochets.
Dans L5, on réduit l'expression entre crochets et on s'assure qu'il n'y a plus de factorisation possible.

Exercice n°3.

Factoriser $I=(3x-2)^2-(2+6x)(3x-2)$

Méthode n°4. ***Avec des identités remarquables***

L'idée est de reconnaître les membres de droite des identités remarquables et d'utiliser ces identités de la droite vers la gauche.
En pratique, c'est surtout la 3^e qui est utile…

Exemple n°6. ***Avec la 1re identité remarquable***

$9+4x^2+12x=4x^2+12x+9=(2x)^2+12x+3^2=(2x+3)^2$

Remarque n°6. ***essentielle***

On a compris qu'on avait à faire à la 1re identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...
On a repéré les valeurs de *a* et *b* et on a pas oublié de vérifier que $2\times a\times b=2\times 2x\times 3=12x$

Exemple n°7. ***Avec la 2^e identité remarquable***

$-12x+9+4x^2=4x^2-12x+9=(2x)^2-12x+3^2=(2x-3)^2$

Remarque n°7. ***essentielle***

On a compris qu'on avait à faire à la 2^e identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...
On a repéré les valeurs de *a* et *b* et on a pas oublié de vérifier que $2\times a\times b=2\times 2x\times 3=12x$

Exemple n°8. ***Avec la 3^e identité remarquable***

$(4x+2)^2-(3x-7)^2=[(4x+2)+(3x-7)][(4x+2)-(3x-7)]=(7x-5)(x+9)$

Remarque n°8.

On oublie pas qu'on repère les membres de droite des identités remarquables.
Ici $a^2=(4x+2)^2$ donc $a=4x+2$ et $b^2=(3x-7)^2$ donc $b=3x-7$

III Le résumé du cours

Dans les expressions qui suivent, ***a*** , ***b*** , ***c*** , ***d*** et ***k*** sont des nombres qui peuvent aussi prendre la forme d'expression.
Par exemple, il est possible d'avoir $a=3x+5$ …

III.1 Définition

$$\text{Produit} \quad \xrightarrow{\text{Développer}} \quad \text{Somme}$$

$$\text{Produit} \quad \xleftarrow[\text{Factoriser}]{} \quad \text{Somme}$$

III.2 Simple distributivité

produit $\boxed{k(a+b)=ka+kb}$ somme

produit $\boxed{k(a-b)=ka-kb}$ somme

produit $k(a+b-c\ldots)=ka+kb-kc\ldots$ somme

III.3 double distributivité

produit $\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$ somme

III.4 Les identités remarquables

produit $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ somme

produit $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$ somme

produit $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$ somme

FONCTIONS AFFINES ET ÉQUATIONS

I Définitions

Définition n°1. Fonction affine

Soit m et p deux nombres réels et f une fonction.
Si pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$
alors f est une **fonction affine**

Remarque n°1. Fonction constante, fonction linéaire

Si $m=0$, on parle de fonction constante
Si $p=0$, la fonction affine est aussi linéaire.

Exemple n°1.

$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 3{,}2\,x-5\end{cases}$ est une fonction affine : $m=3{,}2$ et $p=-5$

$g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto -4{,}3\end{cases}$ est une fonction constante.

$h:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto -2{,}5\,x\end{cases}$ est une fonction affine et linéaire.

Définition n°2. Représentation graphique, équation de courbe

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto f(x)\end{cases}$, une fonction quelconque.

On appelle représentation graphique de f et on note C_f l'ensemble des points du plan ayant pour coordonnées $(x\ ;\ y=f(x))$
On dit alors que C_f est la courbe d'équation $y=f(x)$

Propriété n°1. (admise pour le moment)

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto mx+p\end{cases}$,avec m et p des réels, une fonction affine, Alors sa représentation graphique C_f est une droite d'équation $y=mx+p$

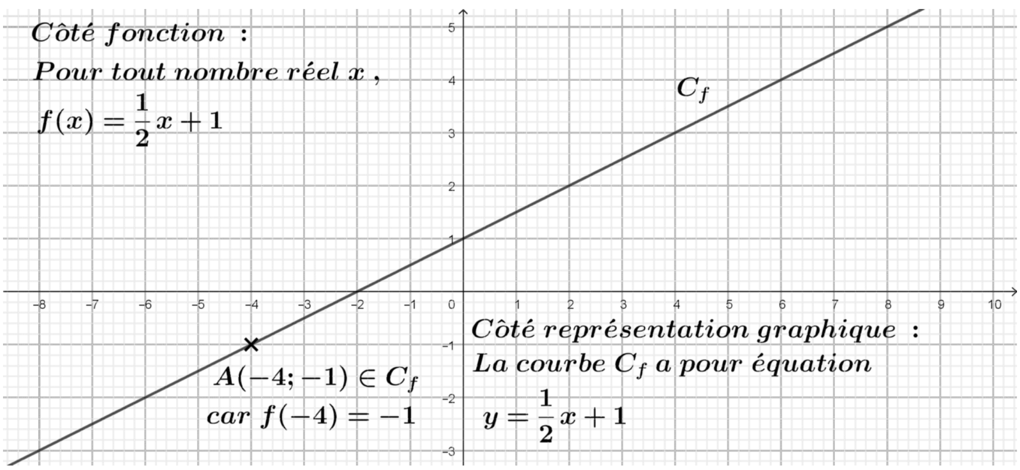
Définition n°3.

$\boldsymbol{m}$ est le **coefficient directeur** de la droite et $\boldsymbol{p}$ est son **ordonnée à l'origine.**

Propriété n°2.

Si $A(x_A\ ;\ y_A=f(x_A))$ et $B(x_B\ ;\ y_B=f(x_B))$ sont deux points distincts de C_f alors :

$$\boxed{\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{f(x_B)-f(x_A)}}{\boldsymbol{x_B-x_A}} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$



II Résoudre une équation à une inconnue

II.1 Les outils

Propriété n°3.

Soient a, b, c trois nombres réels et d un réel non nul.

$$\boxed{a=b \Leftrightarrow a+c=b+c} \quad \text{et} \quad \boxed{a=b \Leftrightarrow a-c=b-c}$$

$$\boxed{a=b \Leftrightarrow a\times d=b\times d} \quad \text{et} \quad \boxed{a=b \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{b}{d}}$$

Propriété n°4.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

II.2 Les méthodes

Définition n°4.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Méthode n°1. Équation du type ax + b = 0 $(a\neq 0)$

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+2)(2x-3)+3=(2x-1)(x-5)$

Réponse

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x\in\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$x \in S$

$(x+2)(2x-3)+3=(2x-1)(x-5)$

$2x^2-3x+4x-6+3 = 2x^2-10x-x+5$

$2x^2+x-3 = 2x^2-11x+5$

$2x^2+x-3 - (2x^2-11x+5)=0$

$2x^2+x-3-2x^2+11x-5=0$

$12x-8=0$

$12x=8$

$x=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

On en déduit que $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$. C'est à dire que :

Cette équation possède une unique solution : $\frac{2}{3}$

Méthode n°2. Équation produit

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(3x+2)(5-2x)(2x-7)=0$

Réponse

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x\in\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $x \in S$
- $(3x+2)(5-2x)(2x-7)=0$

(Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs au moins est nul.)

- $(3x+2 = 0 \text{ ou } 5-2x = 0 \text{ ou } 2x-7 = 0)$
- $\left(x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{-5}{-2} = 2{,}5 \text{ ou } x = \frac{7}{2} = 3{,}5\right)$

On en déduit que $S=\left\{-\frac{2}{3} \,;\, 2{,}5 \,;\, 3{,}5\right\}$. C'est à dire que :

Cette équation possède trois solutions : $-\frac{2}{3}$; $2{,}5$ et $3{,}5$

LES PUISSANCES

I Les bases

Définition n°1.

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

et

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}}$$

En particulier, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ et par convention $a^0 = 1$.

Exemple n°1.

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-5{,}1)^1 = -5{,}1$

$(-5{,}1)^{-1} = \frac{1}{-5{,}1}$ et $(-5{,}1)^0 = 1$.

Remarque n°1. Attention

$(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2401$

alors que :

$-7^4 = -7 \times 7 \times 7 \times 7 = -2401$

II Puissances et propriétés

Propriété n°1. Puissances et signes

Pour tout nombre entier relatif n :

▪ Si a est positif alors a^n est positif.

▪ Si a est négatif alors a^n est positif lorsque l'exposant n est pair, et négatif lorsque l'exposant n est impair.

Remarque n°2.

Cette propriété découle de la règle des signes.

Exemple n°2.

$7{,}1^4$, $7{,}1^{-6}$, $7{,}1^3$ et 7^{-5} sont tous positifs car 7,1 est positif.

$(-7{,}1)^4$ et $(-7{,}1)^{-6}$ sont positifs car 4 et -6 sont pairs

$(-7{,}1)^3$ et $(-7{,}1)^{-5}$ sont négatifs car 3 et -5 sont impairs

Propriété n°2. ***Puissances et opérations***

Soient a et b des nombres réels non nuls et m et n des entiers relatifs.

$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\times n}}$

$\boxed{(a\times b)^n = a^n \times b^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$.

Remarque n°3.

Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition. Elles restent valables pour a et b des réels positifs et m et n des réels, mais la preuve est plus délicate.

Exemple n°3.

$$(-2{,}1)^{10}\times(-2{,}1)^{-3} = (-2{,}1)^{10+(-3)} = (-2{,}1)^7$$

$$30^2 = (3\times 10)^2 = 3^2\times 10^2 = 9\times 100 = 900$$

III Écriture scientifique

Définition n°2.

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{a\times 10^n}$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est à dire ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un nombre entier relatif.

▪ Le nombre a est appelé : **mantisse**.

▪ 10^n est l'**ordre de grandeur** du nombre.

Exemple n°4.

▪ $678\,000\,000 = 6{,}78\times 10^8$

Mantisse : 6,78

Ordre de grandeur : 10^8

▪ $0{,}000\,007\,896 = 7{,}896\times 10^{-6}$

Mantisse : 7,896

Ordre de grandeur : 10^{-6}

▪ $-450\,000\,000 = -4{,}5\times 10^8$

Mantisse : $-4{,}5$

Ordre de grandeur : 10^8

Remarque n°4. ***Attention***

$45{,}321\times 10^8$ n'est pas une écriture scientifique

$0{,}758\times 10^8$ n'est pas non plus une écriture scientifique.

LES VECTEURS

I Translations et vecteurs

Définition n°1. Translation qui transforme A en B.

On considère deux points A et B du plan.
On appelle translation qui transforme A en B la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

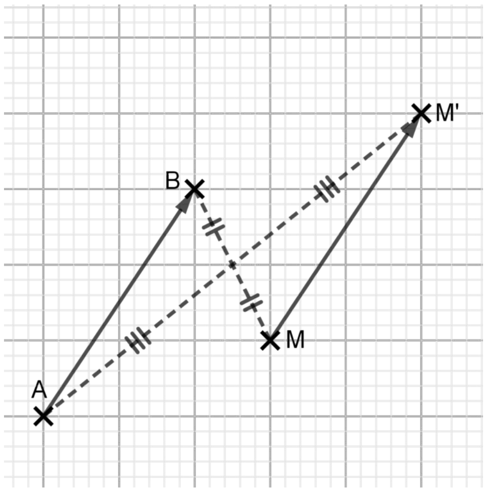


Figure 1

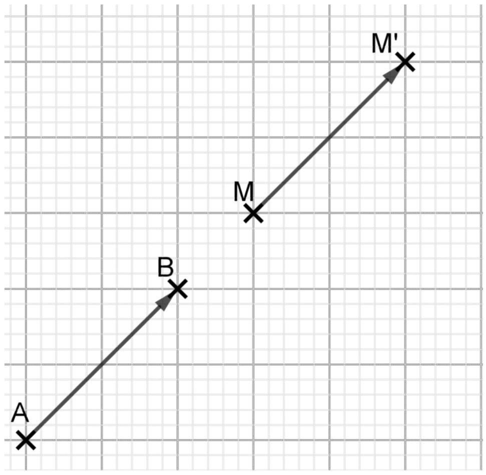


Figure 2

Le point M' est l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

Remarque n°1.

Une translation est entièrement définie par la donnée de 3 informations :
▪ Une direction : on se déplace parallèlement à la droite (AB) ,
▪ Un sens : on se déplace comme de A vers B
▪ Une longueur : la distance parcourue est la même que la longueur AB.

Définition n°2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, associé à la translation qui transforme A en B.

On considère deux points A et B du plan.
▪ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la donnée des 3 informations qui caractérisent la translation qui transforme A en B.
▪ On le représente par une flèche comme sur les figures 1 et 2.
▪ A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B est son extrémité.

Définition n°3. Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

Propriété n°1.

Soient A, B, C et D quatre points.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ *ABDC* est un parallélogramme.

preuve :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme

▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $(AB)//(DC)$
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ ABDC est non croisé.
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $AB=DC$

Le quadrilatère ABDC, non croisé, a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.
C'est un parallélogramme.

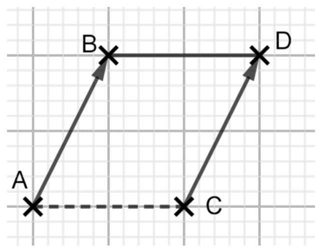


Figure 3

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftarrow$ ABDC est un parallélogramme

Le quadrilatère *ABDC* étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux. En particulier $(AB)//(DC)$ et $AB=DC$
Enfin le nom *ABDC* nous indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.
Ainsi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

II Vecteurs et opérations

Définition n°4. Addition de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations associées et $t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ (Pour tout point X $t_{\vec{w}}(X) = t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(X))$)

$$\vec{u} + \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{w}$$

Remarque n°2.

Cette définition un peu théorique ne nous servira pas cette année.
En revanche, la propriété suivante nous sera bien plus utile...

Propriété n°2. La relation de Chasles

Soient A, B et C trois points.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

preuve :

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ se résume par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(Pour comprendre la définition : $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AC}}$)

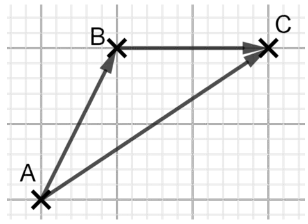


Figure 4

Propriété n°3. Règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs de même origine)

Soient A, B et C trois points.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

preuve :

- ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
- Il suffit alors de remplacer $\overrightarrow{BD}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans l'égalité précédente pour obtenir $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

(Il faut surtout retenir le dessin et l'égalité)

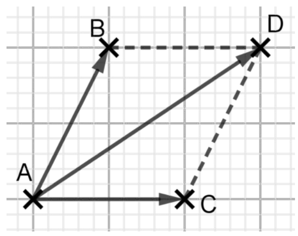


Figure 5

Définition n°5. Vecteur opposé, vecteur nul

Soit $\vec{u}$ un vecteur, on appelle **vecteur opposé à** $\boldsymbol{\vec{u}}$
et on note $\boldsymbol{-\vec{u}}$ le vecteur
→ qui a même direction et même longueur (ou norme) que $\vec{u}$
→ mais dont le sens est opposé à celui de $\vec{u}$

On alors $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
$\vec{0}$ est appelé le **vecteur nul**.

Exemple n°1.

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$
mais aussi
$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$
ou encore
$-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$
(pensez bien au fait que le sens du vecteur se lit en suivant la flèche au dessus des lettres)

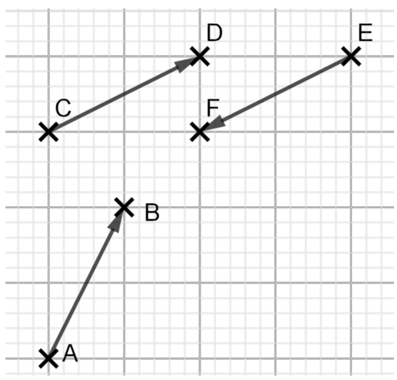


Figure 6

Définition n°6. ***Soustraction de vecteurs***

Pour soustraire un vecteur, on ajoute son opposé.

Exemple n°2.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Propriété n°4. ***Vecteurs et milieu***

Soit A, I et B trois points.

$$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. (Inspirez vous de la propriété n°1)

Définition n°7. ***Multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)***

Soit $\vec{u}$ et k un nombre réel. On appelle produit de $\vec{u}$ par k
et on note $k\cdot\vec{u}$ le vecteur
qui a la même direction que $\vec{u}$,
qui a le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$,ou le sens contraire si $k<0$
et dont la norme (la longueur) est multipliée par la distance à zéro de k .

Exemple n°3.

On peut écrire :

$\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH} = -0{,}5\cdot\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{FE}$

Par contre,
Il n'existe pas de nombre k tel que
$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{EF}$
(car ces vecteurs n'ont pas la même direction)

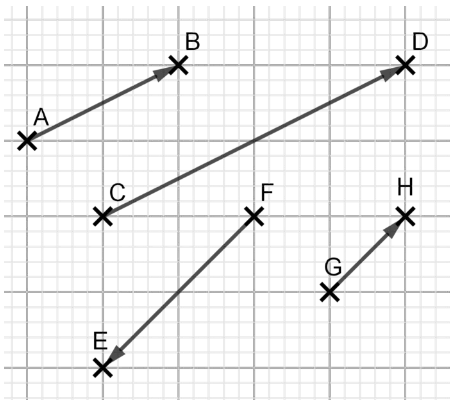


Figure 7

Remarque n°3.

Il faut bien comprendre que nous avons multiplié un vecteur par nombre et que cela n'a rien à voir avec le fait de multiplier deux vecteurs entre eux. Il faudra avancer un peu dans les maths pour en parler…

III Vecteurs et coordonnées

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{OJ}$

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque, la relation de Chasles nous permet d'écrire : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
avec C étant choisi tel que (AC) // (OI) et (CB) // (OJ).
On a alors :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = 6\cdot\vec{e_1}-4\cdot\vec{e_2}$
On écrira plus simplement :
$\overrightarrow{AB}\ (6\ ;-4)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

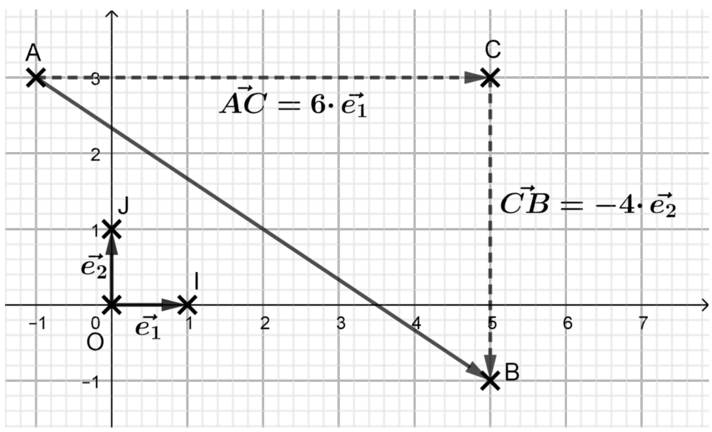


Figure 8

Définition n°8. ***Coordonnées d'un vecteur***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{OJ}$. Alors, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux nombres x et y tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}$

On appellera :

x l'abscisse de $\vec{u}$

y l'ordonnée de $\vec{u}$

$(x\ ,\ y)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2})$

Remarque n°4.

Comme pour les points, on notera indifféremment $\vec{u}(x\ ,\ y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Méthode n°1. ***Calculer les coordonnées du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple n°4.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

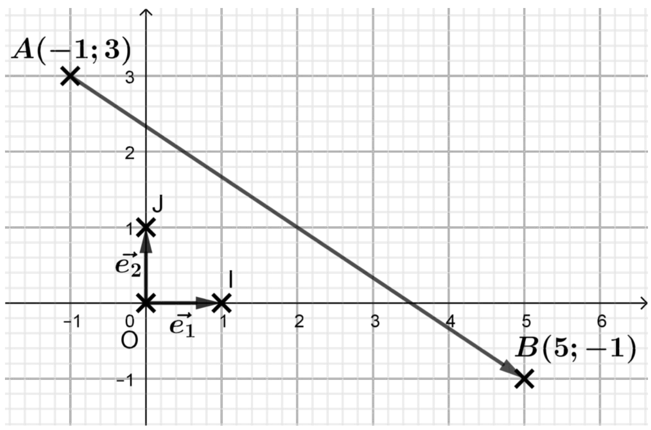


Figure 9

Propriété n°5. ***Coordonnées du milieu d'un segment***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Les coordonnées de K milieu de $[AB]$ sont $K\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

preuve :

Notons $K(x_K\ ;\ y_K)$.

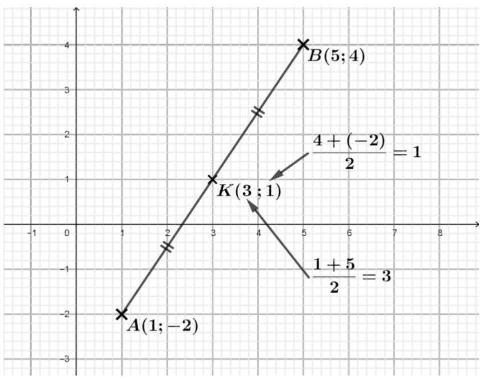
$$K \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_K + x_B - x_K = 0 \\ y_A - y_K + y_B - y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_K = 0 \\ y_A + y_B - 2y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_K \\ y_A + y_B = 2y_K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{} = x_K \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = y_K \end{cases}$$



Propriété n°6. ***Opérations et coordonnées de vecteur***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ des vecteurs ainsi qu'un nombre k.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$$

$$-\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$$

$$k\cdot\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}k\,a\\k\,b\end{pmatrix}$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. Revenez à la définition n°8 et utilisez les définitions du deuxième paragraphe.

Exemple n°5.

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2{,}1\\2{,}3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$ alors , par exemple :

$$3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}3\times(-2{,}1)\ -\ 2\times3\\3\times2{,}3\ -\ 2\times1{,}5\end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix}-12{,}3\\3{,}9\end{pmatrix}$$

Remarque n°5.

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Propriété n°7. ***Calcul de la norme d'un vecteur***

Dans un repère ORTHONORME $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
alors la norme (ou longueur) de $\vec{u}$, qui se note $\|\vec{u}\|$, s'obtient grâce à l'égalité :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

preuve :

On utilise la décomposition de la figure n°8 et on applique le théorème de Pythagore au triangle ABC qui est rectangle en C car le repère est orthonormé.

IV La colinéarité

Définition n°9. ***Vecteurs colinéaires***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs
On dit que

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque n°6.

D'après la définition n°7, des vecteurs colinéaires sont des vecteurs qui ont la même direction.

Définition n°10. ***Déterminant de deux vecteurs***

Soient $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ le nombre

$\boxed{\mathbf{det}(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \mathbf{ad-bc}}$

Exemple n°6.

Dans la base orthonormée $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$, pour $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$:

$det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 4\times5-(-2)\times3 = 26$

Propriété n°8.

Dans la base orthonormée , $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0}$

preuve :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, alors il existe un nombre k tel que
$\vec{u}=k\cdot\vec{v} \Leftrightarrow a=kc$ et $b=kd$

▪ Si $c=0$ alors $a=k\times0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $d=0$ alors $b=k\times0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $c\neq0$ et $d\neq0$ alors $\dfrac{a}{c}=k=\dfrac{b}{d}$, d'après l'égalité des produits en croix : $ad=bc$ qui équivaut à $ad-bc=0$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

$ad-bc=0$ équivaut à $ad=bc$

▪ Si $c\neq0$ et $d\neq0$ alors on pose $k=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

ainsi $a=kc$ et $b=kd \Leftrightarrow \vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $c=0$ alors $ad=0$ et $a=0$ ou $d=0$

▪ Si $d=0$ alors $\vec{v}=\vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $a=0$ et $d\neq0$ alors on pose $k=\dfrac{b}{d}$ ainsi

$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Les autres cas, $d=0$, $a=0$ et $b=0$ se traitent de la même façon et on obtient que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode n°2. ***Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ou non.***

Énoncé :

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, déterminer le coefficient de proportionnalité.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-18\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$

Réponse :

1) $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=2\times(-18)-6\times(-6)=0$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\dfrac{2}{-6}=\dfrac{6}{-18}=-\dfrac{1}{3}$

On précise que $\vec{u}=-\dfrac{1}{3}\cdot\vec{v}$

2) $det(\vec{w}\ ,\ \vec{z})=-5\times(-7)-3\times12 = -1 \neq 0$

On en déduit que $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

V Le résumé du cours

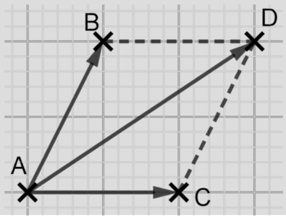
Un vecteur c'est trois informations
- Une direction (on se déplace sur une droite)
- Un sens (sur cette droite on choisit un sens)
- Une norme ou longueur

Soient A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ $ABDC$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Règle du parallélogramme



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

Vecteur opposé : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ même direction, même norme, sens contraire

Vecteur nul : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\ldots$

$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$

$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on se donne $A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$

$\boxed{\text{Les coordonnées de } \overrightarrow{AB} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}}$

et si $K(x_K\,;y_K)$ est le milieu de $[AB]$: $\boxed{K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)}$

On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ des vecteurs ainsi qu'un nombre k.

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}}$ $\boxed{-\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}}$

$\boxed{k\cdot\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow det(\vec{u}\,,\vec{v})=ad-bc=0}$

Si le repère est ORTHONORME $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}}$

ARITHMÉTIQUE

I Les ensembles de nombres entiers

Définition n°1. Les entiers naturels et les entiers relatifs

▪ L'ensemble des nombres entiers naturels $\{0;1;2;3;4;...\}$ se note $\mathbb{N}$

▪ L'ensemble des entiers relatifs $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$ se note $\mathbb{Z}$

Remarque n°1.

Tout entier naturel est un entier relatif, l'ensemble $\mathbb{N}$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

II Quelques définitions

Soient *a*, *b* des éléments de $\mathbb{Z}$.

On note $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ ou $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

Définition n°2. diviseurs, multiples

Si il existe un entier relatif *k* tel que : $a=kb$

Alors on peut dire que :

▪ ***b* divise *a* , on peut noter *b* | *a***

▪ ***b* est un diviseur de *a***

▪ ***a* est divisible par *b***

▪ ***a* est un multiple de *b***

Remarque n°2.

La réciproque est vraie.

Exemple n°1.

Pour $a=42$ $b=7$, on pose $k=\frac{42}{7}=6$ et donc $42=6\times7$.

Ainsi 7 divise 42, 7 est un diviseur de 42, 42 est divisible par 7 et 42 est un multiple de 7.

Remarque n°3.

▪ Tous les nombres divisent zéro mais zéro ne divise aucun nombre.

▪ 1 divise tous les nombres.

Définition n°3. Nombre pair, nombre impair

▪ On dit que **a est un nombre pair** si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que : $\boldsymbol{a=2k}$.

▪ On dit que **a est un nombre impair** si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que : $\boldsymbol{a=2k+1}$.

Exemple n°2.

▪ 28 est un nombre pair, en effet $28=2\times14$

▪ 31 est un nombre impair, en effet $31=2\times15+1$

Définition n°4. Nombre premier

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même

Exemple n°3.

▪ 31 admet pour seuls diviseurs positifs 1 et 31 donc 31 est un nombre premier.

▪ 6 admet pour diviseurs positifs 1 ; 2 ; 3 et 6, il n'est donc pas premier.

▪ 1 n'admet qu'un seul diviseur positif : lui-même. Il n'est donc par un nombre premier.

Remarque n°4.

Si *b* est un diviseur de *a* alors -*b* (l'opposé de *b*) est aussi un diviseur de *a*.

La plupart du temps, nous travaillerons dans $\mathbb{N}$, nous ne noterons donc que les diviseurs positifs.

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS

I Les inégalités

Remarque n°1.

Les propriétés énoncées restent valables avec les symboles $<$; $\geqslant$ et $\leqslant$

Propriété n°1.

Soient a et b deux nombres réels.
$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$

preuve :

Immédiat car, par définition, $a > b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété n°2.

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow a\,d>b\,d}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow a\,d<b\,d}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

preuve :

▪ $a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow a+c-c-b>0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Leftrightarrow a+c>b+c$

▪ Si $d>0$
$a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow d(a-b)>0 \Leftrightarrow ad-bd>0 \Leftrightarrow ad>bd$
règle des signes

▪ Les autres équivalences se démontrent de la même manière que ces deux là
Elles sont laissées à titre d'exercice.

Propriété n°3.

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$

preuve :

Si $a<b$ et $c<d$ alors $a-b<0$ et $c-d<0$
donc $(a-b)+(c-d)<0$ (somme de deux nombres négatifs)
Or $(a-b)+(c-d)<0 \Leftrightarrow a+c-b-d<0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+d)<0 \Leftrightarrow a+c<b+d$

Exemple n°1.

Si $x\geqslant 3$ et $y\geqslant 12$ alors $x+y\geqslant 3+12$

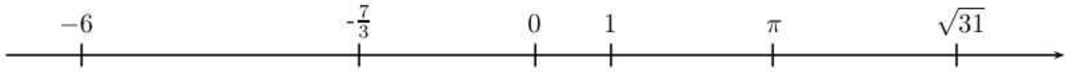
Remarque n°2. ***Attention***

Cette propriété ne fonctionne pas avec la soustraction, voici un contre-exemple :
$1<2$ et $3<10$ alors que $1-3>2-10$

II Les intervalles

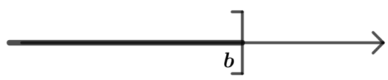
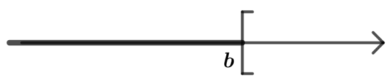
Définition n°1. ***Une façon de voir l'ensemble des réels***

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.



Définition n°2. ***Intervalles***

Soit a et b deux nombre réels, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ définies par :

Intervalle	Ensemble des réels x tels que :	Représentation graphique
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$	
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$ on peut aussi écrire $x \geqslant a$	
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$ on peut aussi écrire $x > a$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$	

Remarque n°3.

➔ Les intervalles $[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ et $]a\ ;\ b]$ sont des intervalles bornés et a et b sont appelés les bornes .

➔ L'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$

➔ $[a\ ;\ b]$ est un intervalle fermé et $]a\ ;\ b[$ est un intervalle ouvert.

➔ $\mathbb{R}=]-\infty\ ;+\infty[$

III Les inéquations

Définition n°3.

Une inéquation d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x qu'on appelle alors solutions. Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les solutions réelles.

Exemple n°2. ***Décrire les solutions d'une inéquation***

Énoncé :

Résoudre l'inéquation $-3x+7\geqslant 11$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis le représenter graphiquement.

Réponse :

$$-3x+7\geqslant 11 \quad\Leftrightarrow\quad -3x\geqslant 4 \quad\Leftrightarrow\quad x\leqslant -\frac{4}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$

Remarque n°4.

On garde en tête la propriété n°2 :

Lorsqu'on résout une inéquation,

• additionner ou soustraire un même nombre réel à chaque membre ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre positif ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre négatif change l'ordre.

IV Sens de variation et signe d'une fonction affine

Dans tout le paragraphe, $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$ avec m et p des réels, est une fonction affine.

Propriété n°4. ***Rappel***

Pour toute fonction affine, l'accroissement de la fonction est proportionnel à celui de la variable :
si $a\neq b$ alors

$$\boxed{\boldsymbol{m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}$$

preuve :

Comme f est affine, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=mx+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.
Pour $a\neq b$, on peut écrire :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma+p-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Remarque n°5. Sens de variation d'une fonction affine

La propriété précédente nous indique que si $m>0$ alors les images sont rangées dans le même ordre que les abscisses (on dit que la fonction est croissante) et que si $m<0$ alors les images sont rangées dans l'ordre contraire à celui des abscisses (on dit que la fonction est décroissante).

$m<0$: f est strictement décroissante

$m>0$: f est strictement croissante

Tableaux de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Définition n°4. Racine d'une fonction affine

On suppose $m\neq 0$.

On appelle racine de f le réel x_0 tel que $f(x_0)=0$

Propriété n°5.

$$x_0=\frac{-p}{m}$$

Remarque n°6.

Le point de coordonnées $(x_0\ ;\ 0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Propriété n°6. Signe d'une fonction affine

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$

Tableaux de signes

$m<0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$m>0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

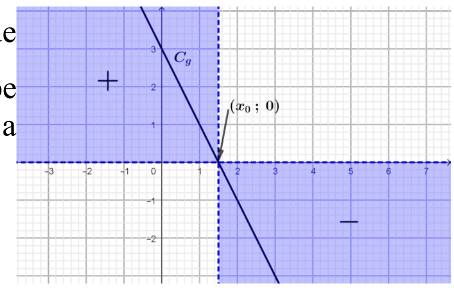
Exemple n°3.

Pour $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -2x+3\end{cases}$, $m=-2$ et $p=3$

▪ Comme $m<0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Posons $x_0=\frac{-p}{m}=\frac{-3}{-2}=1{,}5$, on sait alors que la droite représentant la fonction g coupe l'axe des abscisses au point $(1{,}5\ ;\ 0)$ et on a le tableau de signe suivant :



x	$-\infty$	$1{,}5$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

V Le résumé du cours

Les propriétés énoncées restent valables avec les symboles $<$; $\geqslant$ et $\leqslant$

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$$

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad>bd}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad<bd}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$

Attention : Si on peut additionner des inégalités on ne peut pas les soustraire.

- ➔ Les intervalles $[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ et $]a\ ;\ b]$ sont des intervalles bornés et a et b sont appelés les bornes .
- ➔ L'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$
- ➔ $[a\ ;\ b]$ est un intervalle fermé et $]a\ ;\ b[$ est un intervalle ouvert.
- ➔ $\mathbb{R}=]-\infty\ ;+\infty[$

Résoudre une inéquation

Énoncé :

Résoudre l'inéquation $-3x+7\geqslant 11$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis le représenter graphiquement.

Réponse :

$$-3x+7\geqslant 11 \Leftrightarrow -3x\geqslant 4 \Leftrightarrow x\leqslant -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x\in \left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$ une fonction affine

$m<0$	$m>0$
f est strictement décroissante	f est strictement croissante

Tableaux de variations

$m<0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$m>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableaux de signes

$m<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$m>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

PROPORTIONS ET ÉVOLUTIONS

I Population et sous-population

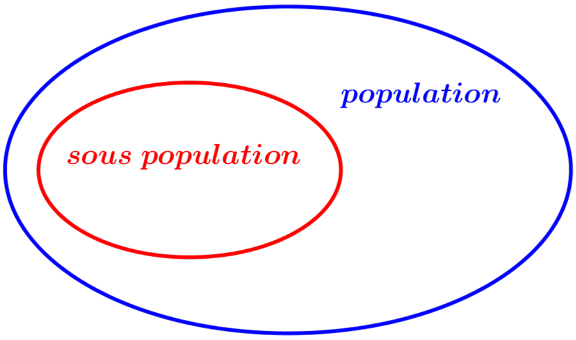
Définition n°1.

On appelle population un ensemble d'éléments appelés les individus.
On appelle sous-population une partie de la population.

Remarque n°1.

Les individus d'une population ne sont pas toujours des personnes. Ils peuvent être également des objets.

Une population et une sous-population peuvent se représenter par un diagramme comme ci-contre.



Exemple n°1.

On considère la population constituée par les élèves d'un lycée. Un individu est un élève. L'ensemble des élèves des classes de Seconde constitue une sous-population de la population des élèves du lycée.

II Proportion d'une sous-population

Définition n°2.

On considère une population qui possède N individus et une sous-population composée de n individus.
La proportion d'individus de la sous-population, notée p, est égale à

$$\boxed{p=\frac{n}{N}}$$

Remarque n°2.

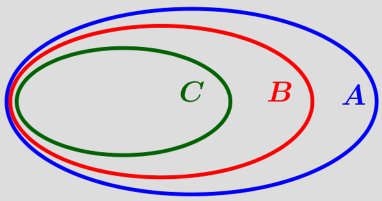
p peut s'exprimer en pourcentage. Un pourcentage est donc une proportion.

III Pourcentage de pourcentage

Propriété n°1.

On note p_B la proportion d'individus de la population B dans A et p_C la proportion d'individus de la population C dans B.

La proportion p d'individus de C dans A est égale à



$$\boxed{p=p_B\times p_C}$$

Exemple n°2.

Si 30 % des élèves du lycée sont des secondes et si 40 % des secondes mangent à la cantine alors la proportion des élèves de secondes qui mangent à la cantine parmi l'ensemble des élèves du lycée est :

$\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}=0{,}12$ soit 12 %

IV Variations d'une quantité

Définition n°3. Variation absolue

On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initiale et V_F la quantité finale.
La **variation absolue** de la quantité est le nombre :
$\boxed{V_F - V_I}$

Remarque n°3.

La variation absolue possède la même unité que la quantité étudiée.

Exemple n°3.

Au 1er Janvier 2012, le SMIC mensuel brut était de 1 425,67 €.
Au 1er Janvier 2019, le SMIC mensuel brut était de 1 521,22 €.
Or : 1 521,22 - 1 425,67 = 95,55
La variation absolue vaut donc : 95,55 €

Propriété n°2.

▪ Lorsque la variation absolue d'une quantité est positive, la quantité augmente.
▪ Lorsque la variation absolue d'une quantité est négative, la quantité diminue.

Définition n°4. Variation relative

On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initial et V_F la quantité finale.
La **variation relative** t de V_F par rapport à V_I , est le nombre
$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{V_F - V_I}{V_I}}}$

Remarque n°4.

• La variation relative ne possède pas d'unité.
• La variation relative s'appelle également le **taux d'évolution** de la quantité étudiée. Elle peut s'exprimer en pourcentage.

Exemple n°4.

En reprenant les données de l'exemple n° 3 :
$\frac{1521{,}22 - 1425{,}67}{1425{,}67} \approx 0{,}0670$ arrondi à 10^{-4} près
Soit une hausse du SMIC mensuel brut d'environ 6,7 %.

V Coefficient Multiplicateur

Remarque n°5.

• On pose $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$ une variation relative. On a alors $V_F = (1+t)V_I$.
Si t est positif, la quantité augmente.
Si t est négatif, la quantité diminue.
t peut s'exprimer en pourcentage : $t = \frac{t'}{100}$
On a alors $V_F = (1+t)V_I = \left(1 + \frac{t'}{100}\right)V_I$

Définition n°5. Le Coefficient Multiplicateur

On donne t est une variation relative (ou taux d'évolution) .
On appelle Coefficient Multiplicateur et on note $\boxed{\boldsymbol{CM = 1 + t}}$

Remarque n°6.

▪ $CM > 1$ correspond à une augmentation
▪ $CM < 1$ correspond à une diminution

VI Indice de base 100

Définition n°6. D'après l'INSEE :

L'indice d'une grandeur est le rapport entre la valeur de cette grandeur au cours d'une période courante et sa valeur au cours d'une période de base. Il mesure la variation relative de la valeur entre la période de base et la période courante. Souvent, on multiplie le rapport par 100 ; on dit : indice base 100 à telle période.
Les indices permettent de calculer et de comparer facilement les évolutions de plusieurs grandeurs entre deux périodes données.

Méthode n°1. Calculer un indice de base 100

Une valeur V_I est fixée, tous les CM sont calculés par rapport à elle et sont multipliés par 100.
Dans l'exemple qui suit : V_I est la quantité de 2016 : 3250

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Quantité	3575	3250	3087,5	2925	3380
Indice de base 100 par rapport à 2016	110	100	95	90	104

- Indice de base 100 de 2019 par rapport à 2016 : $\frac{3380}{3250}\times 100=104$
- Quantité en 2017 : $\frac{3250\times 95}{100}$

VII Évolutions successives

Attention des taux d'augmentations (ou de baisses) successives ne s'additionnent pas.
Pour calculer la valeur finale après 2 évolutions successives (hausses et/ou baisses), on multiplie la valeur initiale par le produit des coefficients multiplicatifs qui correspondent à chaque évolution :

$$\boxed{\boldsymbol{V_F = V_I\times CM_1\times CM_2 = V_I\times\left(1+t_1\right)\times\left(1+t_2\right)}}$$

Pour déterminer le taux global t_g en % , on calcule d'abord le **coefficient multiplicateur global** CM_g puis on en déduit le **taux global**.

$$\boxed{\boldsymbol{CM_g=CM_1\times CM_2}} \quad \text{puis} \quad \boxed{\boldsymbol{t_g=CM_g-1}}$$

VIII Évolutions réciproques

Une évolution (hausse ou baisse) de $t\%$ n'est pas compensée par une évolution opposée de $t\%$. Il y a toujours une baisse.
L'évolution réciproque d'une évolution, est l'évolution inverse qui permet de revenir à la valeur initiale.
Le coefficient réciproque CM_r du coefficient CM de l'évolution de départ est donné par la formule :

$$\boxed{\boldsymbol{CM_r=\frac{1}{CM}}}$$

IX Le résumé du cours

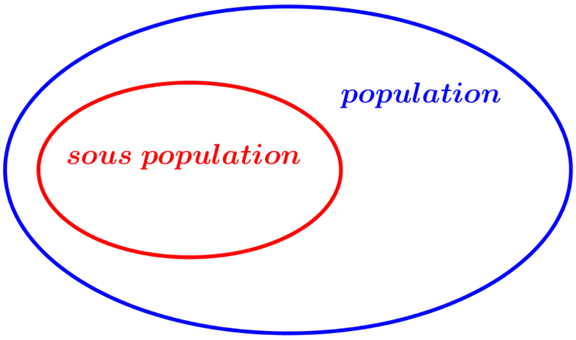
Proportion

Population : N éléments

Sous-population : n éléments

Proportion de la sous-population **parmi** la population : p

$$\boxed{p=\frac{n}{N}}$$



Proportion de proportion

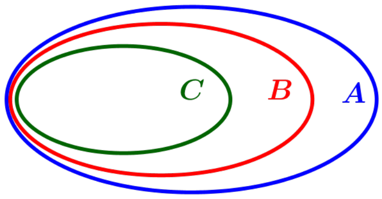
On note p_B la proportion d'individus de la population B dans A et

p_C la proportion d'individus de la population C dans B

.

La proportion p d'individus de C dans A est égale à

$$\boxed{p=p_B\times p_C}$$



Variation absolue : $\boxed{V_F-V_I}$ **Variation relative** ou **taux d'évolution** : $\boxed{t=\frac{V_F-V_I}{V_I}}$

Coefficient Multiplicateur : $\boxed{CM=1+t}$ **et bien sûr** $t=CM-1$ **...**

Calculer un indice de base 100

Une valeur V_I est fixée, tous les CM sont calculés par rapport à elle et sont multipliés par 100.
Dans l'exemple qui suit : V_I est la quantité de 2016 : 3250

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Quantité	3575	3250	3087,5	2925	3380
Indice de base 100 par rapport à 2016	110	100	95	90	104

- Indice de base 100 de 2019 par rapport à 2016 : $\frac{3380}{3250}\times 100=104$
- Quantité en 2017 : $\frac{3250\times 95}{100}$

Attention des taux d'augmentations (ou de baisses) successives ne s'additionnent pas.

Évolutions successives

$$\boxed{V_F = V_I\times CM_1\times CM_2 = V_I\times(1+t_1)\times(1+t_2)}$$

***CM* global**

$$\boxed{CM_g=CM_1\times CM_2}$$

Taux global

$$\boxed{t_g=CM_g-1}$$

Évolutions réciproques

***CM* réciproque**

$$\boxed{CM_r=\frac{1}{CM}}$$

La fonction carré

I Définition et étude de la fonction carré

Définition n°1.

La fonction carré est la fonction définie par $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur D_f .
« f **est paire** » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f,\ f(-x)=f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction carré est paire.

preuve :

Notons g la fonction carré.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g=\mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^2 = -x\times(-x) = x^2 = g(x)$
Ainsi g est paire.

Remarque n°1.

Si une fonction est paire alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

Définition n°3. ***Croissance, décroissance***

Soit f une fonction définie sur D_f et $I\subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

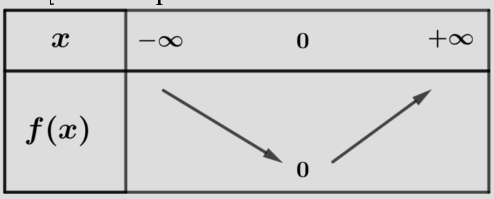
▪ « f est décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Remarque n°2.

On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Propriété n°2. ***Variations de la fonction carré***

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

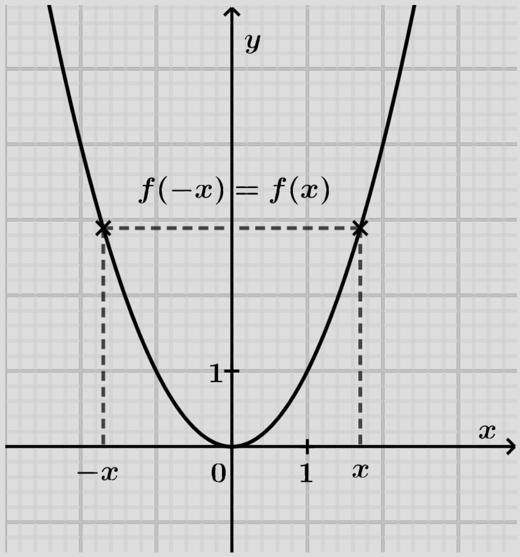


preuve :

▪ Soient $a < b \leqslant 0$
$f(a)-f(b) = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
Or $a+b<0$ (car a et b sont négatifs) et $a-b<0$ (car $a<b$)
Donc $(a+b)(a-b) > 0$ d'où on déduit que $f(a)>f(b)$
Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
▪ De la même manière, on démontre que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. (Cette seconde partie est laissée à titre d'exercice)

Définition n°4. ***Représentation graphique***

La représentation graphique de la fonction carré est une **parabole**



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

Propriété n°3.

La représentation graphique de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

II Équations et inéquations du second degré.

II.1 Encadrements d'un nombre réel et arrondis

Propriété n°4. ***Équation du type $x^2 = a$***

Soit a un nombre réel.
▪ Si $a > 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
▪ Si $a = 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet une solution : *zéro* .
▪ Si $a < 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

preuve :

▪ Le deuxième point est évident.
▪ Le troisième découle du fait que le carré d'un nombre réel est toujous positif.
▪ Pour le premier point :
si $a > 0$ alors $\sqrt{a}$ existe.
Les équations suivantes sont alors équivalentes :

$x^2 = a$

$x^2 - a = 0$

$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.
On en déduit que cette équation admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Remarque n°3.

Il est parfois utile de donner des valeurs approchées des solutions quand elles existent. c'est ce qui motive ce la suite de ce paragraphe.

Propriété n°5. ***(admise)***

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$

Définition n°5.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$

Exemple n°1.

$\frac{16812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \frac{16813}{10^3}$ donc l'encadrement de 16,8127 à 10^{-3} est :
$16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ et l'arrondi à 10^{-3} vaut 16,813.

II.2 *Inéquations du type $x^2 \leqslant k$ et $x^2 \geqslant k$*

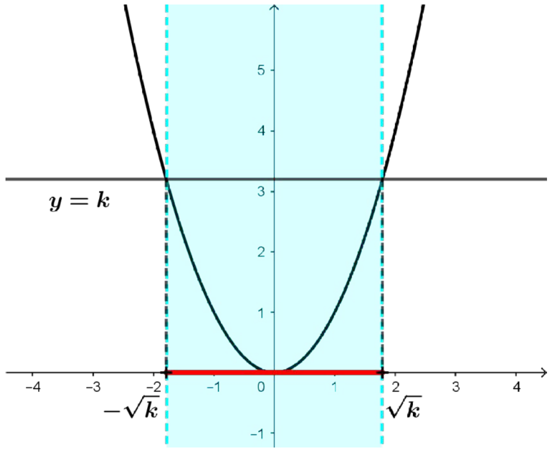
Propriété n°6.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

Si $k=0$ alors $S=\{0\}$

Si $k<0$ alors $S=\emptyset$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

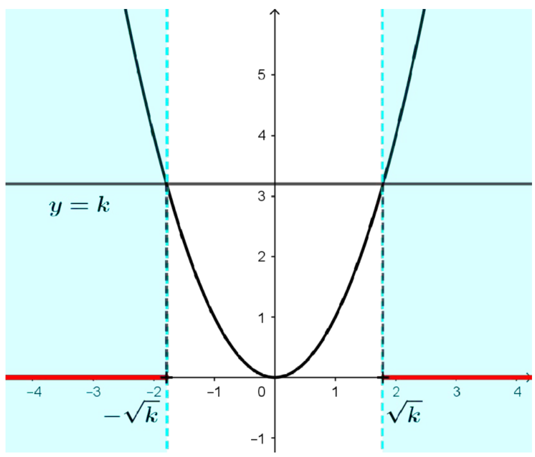
$$
\begin{aligned}
& x^2 \leqslant k \\
\Leftrightarrow\ & x^2-k \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((x+\sqrt{k} \geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \leqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k} \leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \geqslant 0)) \\
\Leftrightarrow\ & ((x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \geqslant \sqrt{k})) \\
\Leftrightarrow\ & (x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \qquad \text{(car l'autre cas est impossible)}
\end{aligned}
$$

Propriété n°7.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors
$S=]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k \leqslant 0$ alors $S=\mathbb{R}$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

$$\begin{aligned}
& x^2 \geqslant k \\
\Leftrightarrow\ & x^2-k\geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})\geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((x+\sqrt{k}\geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k}\geqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k}\leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k}\leqslant 0)) \\
\Leftrightarrow\ & ((x\geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x\geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x\leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x\leqslant \sqrt{k})) \\
\Leftrightarrow\ & (x\geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x\leqslant -\sqrt{k})
\end{aligned}$$

Remarque n°4.

Dans les deux preuves précédentes, nous avons résolu des inéquations produits. La méthode utilisée peut-être résumée sous forme de tableau de signes. Ce qui motive le dernier paragraphe.

II.3 Inéquations produits.

Exemple n°2.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(4x-7)(5-2x)(3x+2) \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$5-2x$		$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$(4x-7)(5-2x)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°5.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs.

III Le résumé du cours

La fonction carré

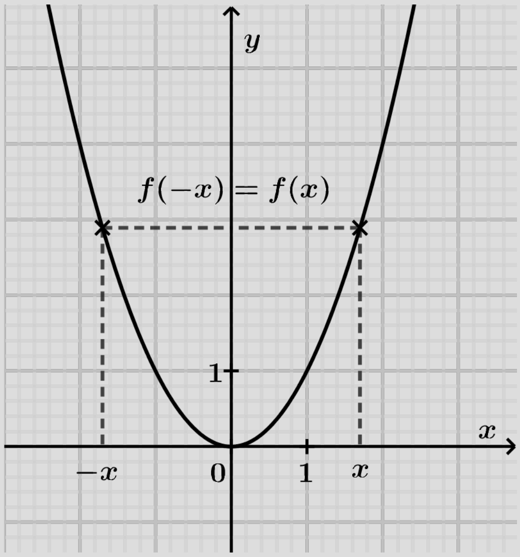
La fonction carré est la fonction définie par $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

Elle est **paire** ce qui signifie que :

pour tout x, $g(-x)=g(x)$

Ses variations se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↗



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

L'**axe des ordonnées** est l'**axe de symétrie de la parabole.**

f une fonction et $I\subset D_f$ un intervalle, a, b dans I

Stricte croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$
Stricte décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$
Croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b)$
Décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\geqslant f(b)$

Soit a un nombre réel.
- Si $a>0$ alors : l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a=0$ alors : l'équation $x^2=a$ admet une solution : *zéro* .
- Si $a<0$ alors : l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution.

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\dfrac{a}{10^n}\leqslant x<\dfrac{a+1}{10^n}$

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près** .

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ et $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\dfrac{a}{10^n}$ et de $\dfrac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\dfrac{a+1}{10^n}$

- Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$
Si $k=0$ alors $S=\{0\}$
Si $k<0$ alors $S=\varnothing$

- Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}]\cup[\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k\leqslant 0$ alors $S=\mathbb{R}$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

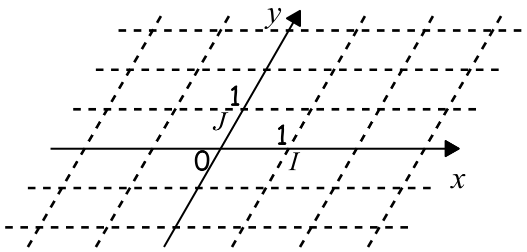
I Les repères du plan

Définition n°1.

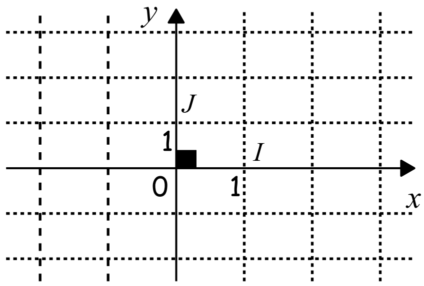
▪ On dit que le plan est muni d'un repère lorsque l'on a fixé dans ce plan deux axes graduées sécants en leur origine.
▪ On dit que le repère est orthogonal si les deux axes sont perpendiculaires.
▪ On dit que le repère est orthonormé, si il est orthogonal ET si les unités de longueurs sont les mêmes sur les deux axes.

Remarque n°1.

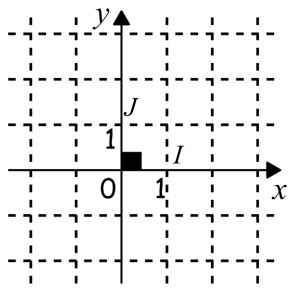
Dans les autres cas, on parle de repère cartésien (ou quelconque).



$(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère quelconque



$(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère orthogonal



$(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

Remarque n°2.

Dans un repère $(O\ ;I\ ;J)$, on a, par définition :
$O(0;0)$; $I(1;0)$ et $J(0;1)$
Si le repère se nomme, par exemple, $(C\ ;A\ ;E)$ alors :
$C(0;0)$; $A(1;0)$ et $E(0;1)$

Propriété n°1. ***Alignement***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$, $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ trois points du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB})=0$

Remarque n°3.

Toute combinaison de ces points fonctionne...

Propriété n°2. ***Coordonnées du milieu d'un segment***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
Si $M(x_M\ ;\ y_M)$ est le **milieu** du segment $[AB]$ alors

$$\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

Propriété n°3. ***Longueur d'un segment dans un repère orthonormé.***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points plan du muni du repère **ORTHONORME** $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

Propriété n°4. ***Aire d'un parallélogramme***

Si ABCD est un parallélogramme, alors son aire vaut la distance à zéro de $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$

II Distance d'un point à une droite

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$

Définition n°2. ***Projection orthogonale***

Soit A un point et (d) une droite.
Le projeté orthogonal de A sur (d) est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Exemple n°1.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

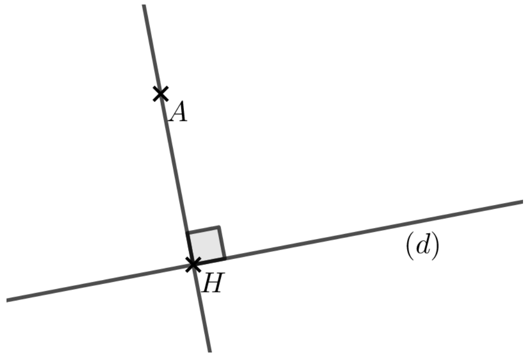


Figure 1

Propriété n°5.

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors pour tout point M de (d) distinct de H, on a : $AH < AM$

preuve :

Par définition du point *H*, le triangle *AHM* est rectangle en *H*.
Le théorème de Pythagore nous donne alors :
$AM^2 = AH^2 + HM^2 > AH^2$ (car $HM^2 > 0$).

Définition n°3. ***Distance d'un point à une droite***

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors on appelle **distance du point A à la droite (d)** la longueur AH.

Définition n°4. ***Tangente à un cercle***

Soit A un point d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r.

La **tangente à $(\mathcal{C})$ au point** A est la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (OA).

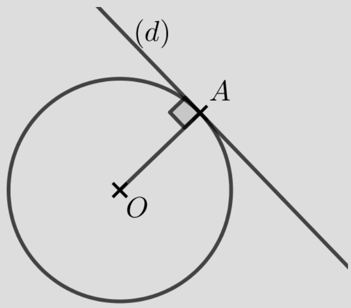


Figure 2

Propriété n°6.

Un cercle possède un unique point en commun avec sa tangente en l'un de ses points.

preuve :

Soit (d) la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A et M un point de (d).
D'après la propriété n°1, $OM > OA$ donc $M \notin (\mathcal{C})$.

III Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans ce paragraphe, on se donne un triangle ABC rectangle en B.

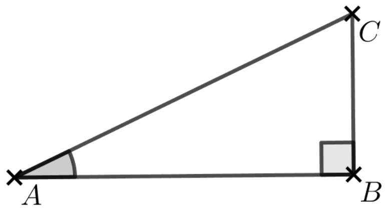


Figure 3

Définition n°5.

- $[AC]$ est l'hypoténuse.
- $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
- $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Définition n°6. ***cosinus, sinus, tangente***

Dans le triangle ABC, rectangle en B.

- $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{AB}{AC}$ (« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)
- $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AC}$ (« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AB}$ («tangente égale côté apposé sur côté adjacent »)

Remarque n°4.

Pour l'angle $\widehat{BCA}$, il suffit d'échanger les lettres A et C dans tout ce qui précède.

Remarque n°5.

On n'oublie pas de préciser à chaque dans quel triangle rectangle on travaille.

Propriété n°7.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{\mathbf{\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}}$

preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC, rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}=\frac{BC}{AC}\times\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AB}=\tan(x)$$

Propriété n°8.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{\mathbf{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}}$

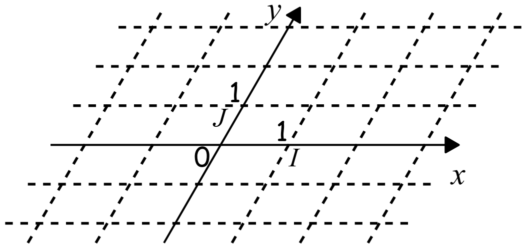
preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC, rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

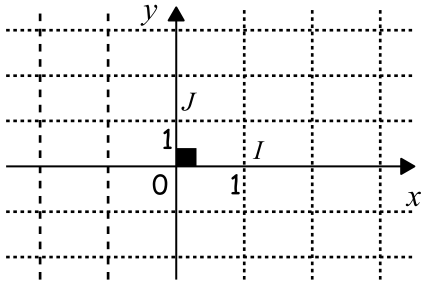
$$(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1$$

l'avant dernière égalité étant justifiée par le théorème de Pythagore.

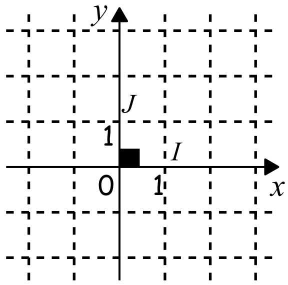
IV Le résumé du cours



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère quelconque



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthogonal



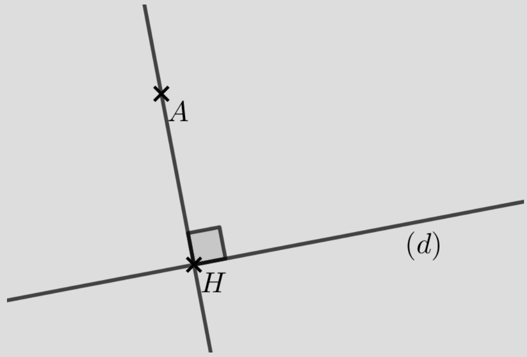
$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB})=0$	Repère
M milieu du segment [AB] alors $\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$	Tous
$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}$ ou $\boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$	Uniquement ORTHONORME
Si ABCD est un parallélogramme, alors son aire vaut la distance à zéro de $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$	

Le point H s'appelle le **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)** car $(AH)\perp(d)$

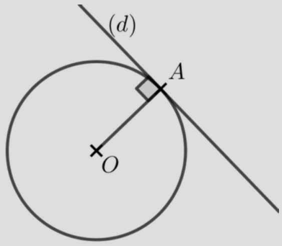
La longueur AH s'appelle la **distance du point A à la droite (d)**.

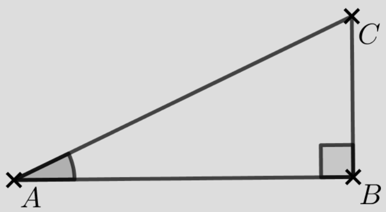
Si $M\in(d)$ distinct de H alors $AM>AH$.



(d) est **la tangente au cercle au point A** car $(OA)\perp(d)$

Il y a **un seul point commun entre la tangente et le cercle.**





Dans le triangle ABC, rectangle en B.

- $\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB}{AC}$

(« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)

- $\sin(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AC}$

(« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)

- $\tan(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AB}$

(« sinus égale côté apposé sur côté adjacent »)

$$\boxed{\mathbf{\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}}$$

LA FONCTION CUBE

I Définition et étude de la fonction cube

Définition n°1.

La fonction cube est la fonction $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction sur D_f.
« f est impaire » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f, f(-x)=-f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction cube est impaire

preuve :

Notons g la fonction cube.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g=\mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^3 = -x\times(-x)\times(-x) = -x^3 = -g(x)$
Ainsi g est impaire.

Remarque n°1.

Si une fonction est impaire, alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

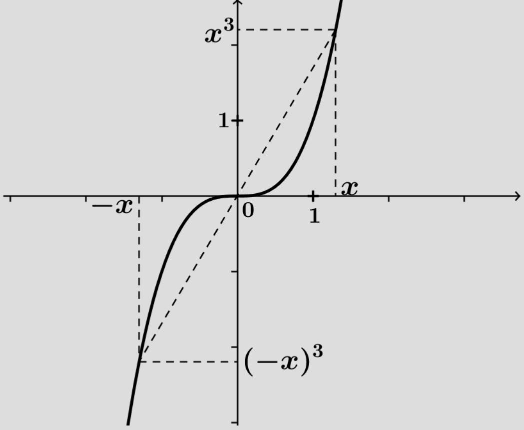
Propriété n°2. ***Variations de la fonction cube***

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

preuve :

Nous allons montrer que la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (Cela suffira car les deux intervalles ont un point commun).
▪ Soient $a < b \leqslant 0$
Nous devons montrer que $a^3 < b^3$ ce qui équivaut à $a^3-b^3 < 0$.
Remarquons que : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Comme $a < b \Leftrightarrow a-b < 0$
De plus $a^2>0$, $b^2\geqslant 0$ et $ab\geqslant 0$ (car a et b sont de même signe)
Ainsi $a^2+ab+b^2 > 0$
D'après la règle des signes : $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$
Et donc $a^3-b^3 < 0$.
La fonction cube bien strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
▪ La stricte croissance sur $[0\ ;\ +\infty[$ se démontre de la même manière et est laissée à titre d'exercice.

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction cube***



L'origine du repère est le centre de symétrie de la courbe

Remarque n°2. Parité, imparité et représentation graphique

Dans un repère orthogonal, on donne C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur D_f .

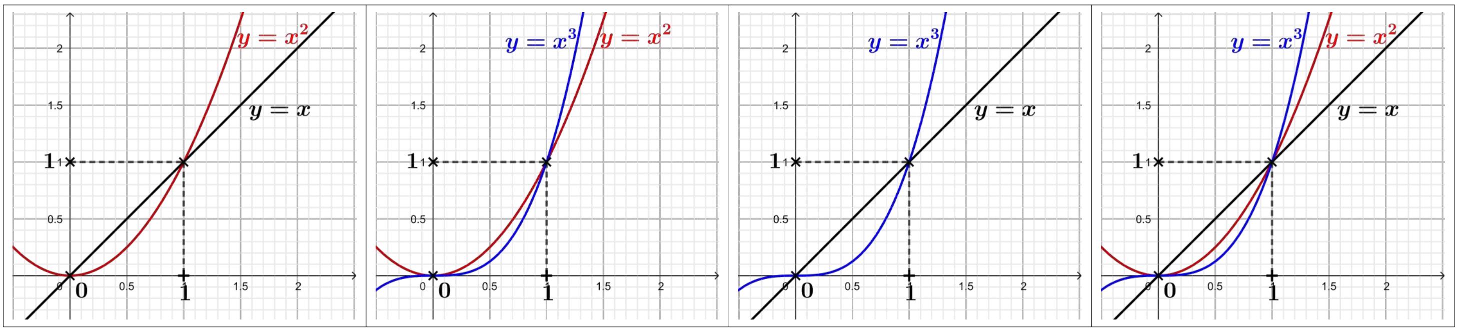
▪ Si f est **paire** alors C_f est **symétrique** par rapport à l'**axe** des ordonnées.
▪ Si f est **impaire** alors C_f est **symétrique** par rapport au **centre** du repère.

En images : fonction paire , fonction impaire

II Comparaison des fonctions identité, carré et cube

Propriété n°4.

▪ Pour $x \in]0\,;\,1[$, $x > x^2 > x^3$
▪ Pour $x \in]1\,;\,+\infty[$, $x < x^2 < x^3$
▪ Et bien sûr $0=0^2=0^3$ et $1=1^2=1^3$



preuve :

▪ Comparons $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ pour $x \in]0\,;\,1[$
$x^2 - x = x(x-1)$
$x>0$ et $x-1<0$
d'après la règle des signes : $x(x-1) < 0$ et donc $x^2-x < 0$ ce qui équivaut à $x^2 < x$
La comparaison pour $x \in]0\,;\,1[$ de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ est laissée à titre d'exercice (la méthode est la même, faites le!).
On a donc bien, pour $x \in]0\,;\,1[$, $x > x^2 > x^3$

▪ Les comparaisons pour $x \in]1\,;\,+\infty[$ sont laissées à titre d'exercices (c'est encore la même méthode, faites le!)
On a donc bien, pour $x \in]1\,;\,+\infty[$, $x < x^2 < x^3$

▪ Enfin les égalités sont évidentes.

LES STATISTIQUES

I Vocabulaire et définitions

Définition n°1. ***Population, individus***

La population, c'est l'ensemble des individus sur lesquels portent l'étude statistique.

Exemple n°1.

On étudie le nombre d'arbres malades dans une forêt.
Les individus sont les arbres, la population est la forêt.

Définition n°2. ***Caractère (ou variable)***

C'est une propriété étudiée sur chaque individu.

Exemple n°2.

Pour notre notre forêt, le caractère est le fait d'être malade ou non.

Définition n°3. ***Nature du caractère, valeur ou modalité***

Le caractère est **quantitatif** quand il prend des valeurs (ou modalités) numériques. Il peut alors être **quantitatif discret** si les valeurs sont isolées ou **quantitatif continu** dans le cas contraire.
Le caractère est **qualitatif** quand les modalités qu'il prend **ne sont pas numériques**.

Remarque n°1.

On a tendance à utiliser le terme « valeur » pour un caractère quantitatif et plutôt le terme « modalité » pour un caractère qualitatif.

Exemple n°3. ***Qualitatif***

Pour notre forêt, le caractère est qualitatif.

Exemple n°4. ***Quantitatif discret***

On étudie le nombre de stylos par élève dans notre classe.
La population est la classe, les individus sont les élèves, le caractère est le nombre de stylos. C'est un caractère quantitatif discret.

Exemple n°5. ***Quantitatif continu***

On étudie la hauteur en mètres des bâtiments d'une ville.
La population est l'ensemble des bâtiments de la ville, les individus sont les bâtiments, le caractère est la hauteur en mètres. C'est un caractère quantitatif continu.

Remarque n°2. ***Regroupement par classe***

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, on regroupe les valeurs par **classes** (qui sont des **intervalles**). On peut également le faire quand le caractère est quantitatif discret.

Définition n°4. ***Centre de classe***

Le centre de la classe, c'est la moyenne des extrémités de la classe

Définition n°5. ***Effectif***

C'est le nombre d'individus qui possèdent le caractère étudié.

Définition n°6. ***Mode, Valeur modale, classe modale***

On appelle mode ou valeur (*resp* classe) modale, la valeur (*resp* classe) qui possède le plus grand effectif.

II Fréquences, distribution des fréquences

Soit p un nombre entier.
On considère une série statistique, dont le caractère étudié peut prendre les valeurs (ou modalités) x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_p .
On note n_1 , n_2 , n_3 , ... , n_p les effectifs correspondants et
on pose $N=n_1+n_2+n_3+...+n_p$
(N est l'effectif total, c'est à dire le nombre d'individus qui composent la population)

▪ Pour $i \in [\![1\ ;\ p]\!]$, on pose $f_i=\dfrac{n_i}{N}$,
f_i est alors la fréquence associée à x_i

▪ L'ensemble de ces fréquences est appelé la distribution des fréquences.

Exemple n°6. ***Série A***

Voici les notes obtenues à un contrôle dans une classe de 30 élèves :
2 – 3 – 3 – 4 – 5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7
8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9
9 – 10 – 10 – 11 – 11 – 11 – 13 – 13 – 15 – 16
On peut représenter cette série par un tableau d'effectifs, et le compléter par la distribution des fréquences :

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
Fréq en %	0	3	7	3	3	7	10	17	20	7	10	0	7	0	3	3	0	0	0

On peut vérifier que la somme des fréquences est égale à 1 (ou à 100% si on les exprime en pourcentage).

➔ Le mode ou la valeur modale est 9 (6 élèves ont eu 9 : c'est le plus grand effectif)

On peut aussi faire un regroupement par classe, ce qui rend l'étude moins précise, mais qui permet d'avoir une vision plus globale.

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [	total
Centre	$\dfrac{0+5}{2}=2{,}5$	$\dfrac{5+10}{2}=7{,}5$	$\dfrac{10+15}{2}=12{,}5$	$\dfrac{15+20}{2}=17{,}5$	
Effectif	4	17	7	2	30
Fréquence	0, 13	0, 57	0, 23	0, 07	1

➔ La classe modale est [5 ; 10 [(17 élèves ont eu entre 5 inclus et 10 exclu : c'est le plus grand effectif)

III Indicateurs de tendance centrale

Les indicateurs de tendance centrale sont le mode, la médiane et la moyenne.

Définition n°7. ***Moyenne pondérée***

Soit une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_p d'effectifs associés n_1 , n_2 , n_3 , ... , n_p avec $N=n_1+n_2+n_3+...+n_p$

La moyenne pondérée de cette série est le nombre $\overline{x}$ tel que :

$$\boxed{\overline{x} = \frac{n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3+...+n_p x_p}{n_1+n_2+n_3+...+n_p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}$$

Remarque n°3.

Lorsque la série est regroupée en classes, on calcule la moyenne en prenant pour valeurs x_i le centre de chaque classe ; ce centre est obtenu en faisant la moyenne des deux extrémités de la classe.

Exemple n°7. ***(avec la série A)***

▪ Si on note $\overline{x}$ la moyenne du contrôle alors

$$\overline{x} = \frac{2\times1+3\times2+...+16\times1}{30} = \frac{254}{30} \approx 8{,}47$$

▪ Si on regroupe par classe d'amplitude 5 points, une estimation de la moyenne est : $\overline{x} = \dfrac{2{,}5\times4+7{,}5\times17+...+17{,}5\times2}{30} = \dfrac{260}{30} \approx 8{,}67$

Remarque n°4.

On peut aussi calculer une moyenne à partir de la distribution de fréquences :

$$\boxed{\overline{x} = f_1 x_1+f_2 x_2+f_3 x_3+...+f_p x_p = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i}$$

Propriété n°1. ***Linéarité de la moyenne***

▪ Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre k à toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve augmentée (resp. diminuée) de k.

▪ Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul k toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve multipliée (resp. divisée) par k.

Exemple n°8. ***(toujours avec la série A)***

▪ Si on ajoute 1, 5 points à chaque note du contrôle, alors la moyenne de classe devient $\overline{x} \approx 8{,}47+1{,}5=9{,}97$

▪ Si on augmente chaque note de 10%, cela revient à multiplier chaque note par 1, 1, ce qui donne $\overline{x} \approx 8{,}47\times1{,}1=9{,}317$

Propriété n°2. ***Moyenne par sous groupe***

Soit une série statistique, d'effectif total N et de moyenne $\overline{x}$

Si on divise cette série en deux sous-groupes disjoints d'effectifs respectifs p et q (avec $p + q = N$) de moyennes respectives $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ alors on a :

$$\boxed{\overline{x} = \frac{p}{N}\times\overline{x}_1 + \frac{q}{N}\times\overline{x}_2}$$

Exemple n°9. ***(toujours avec la série A)***

Énoncé

On suppose que les 12 garçons de la classe de la série A ont obtenu une moyenne globale de 8 sur 20. Déterminer la moyenne des filles.

Réponse :

Notons $\overline{x}_f$ la moyenne des filles. $\overline{x}_f$ vérifie l'égalité suivante :

$$9{,}47 = \frac{12}{30} \times 8 + \frac{18}{30} \times \overline{x}_f \quad .$$

Après résolution : $\overline{x}_f = 10{,}45$

IV Indicateurs de dispersion

Les principaux indicateurs de dispersion sont l'étendue, l'écart inter-quartile, la variance et l'écart-type.

Définition n°8. ***Étendue***

On appelle étendue d'une série X le réel défini par $e(X) = \max(X) - \min(X)$

Exemple n°10. ***(toujours avec la série A)***

La plus grande valeur est 16, la plus petite est 2.

Donc en notant e l'étendue de la série, on obtient : $e = 16 - 2 = 14$

Définition n°9. ***Quartiles***

Soit une série statistique ordonnée, on appelle :

- **premier quartile** et on note Q_1 la valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures (ou égales) à Q_1
- **troisième quartile** et on note Q_3 la valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs soient inférieures (ou égales) à Q_3

Remarque n°5.

On ne parle pas de Q_2 , on lui préfère la médiane.

Exemple n°11. ***(toujours avec la série A)***

Énoncé :

Déterminer les premier et troisième quartiles de la série A :

2 − 3 − 3 − 4 − 5 − 6 − 6 − 7 − 7 − 7

8 − 8 − 8 − 8 − 8 − 9 − 9 − 9 − 9 − 9

9 − 10 − 10 − 11 − 11 − 11 − 13 − 13 − 15 − 16

Réponse :

On pense à vérifier que les valeurs sont bien rangées dans l'ordre croissant. (si ce n'est pas le cas, on le fait)

La série comporte 30 valeurs :

- $\frac{1}{4} \times 30 = 7{,}5$, le premier quartile est donc la 8eme valeur de la série et vaut : 7. $\boldsymbol{Q_1 = 7}$
- $\frac{3}{4} \times 30 = 22{,}5$, le troisième quartile est donc la 23eme valeur de la série et vaut : 10. $\boldsymbol{Q_3 = 10}$

Remarque n°6. Mais pourquoi je n'obtiens pas le « bon résultat » ?

Pour Q1	cours	calculatrice	tableur
série n°1	270	270	275,5
série n°2	90	90	144
série n°3	47	59	65
série n°4	196	185	196

Pour Q3	cours	calculatrice	tableur
série n°1	630	630	568
série n°2	547	547	467
série n°3	622	644,5	633,25
série n°4	456	546	456

Nos connaissances, à ce niveau, nous oblige à simplifier la définition des quartiles. C'est le choix fait dans l'immense majorité des manuels scolaires et dans ce cours. Cela n'est bien sûr pas sans conséquence, car parfois la calculatrice ou le tableur ne donneront pas les mêmes réponses que nous. Rassurez-vous (ou pas) la calculatrice et le tableur ne sont pas toujours d'accord entre eux non plus… La preuve avec les quatre séries suivantes :
Série n°1 : 46, 270, 293, 382, 630, 952
Série n°2 : 49, 90, 198, 302, 387, 547, 763
Série n°3 : 34, 47, 71, 263, 282, 622, 667, 968
Série n°4 : 39, 174, 196, 252, 331, 401, 456, 637, 944

Définition n°10. Intervalle interquartile, écart interquartile.

On appelle intervalle inter-quartiles, l'intervalle $[Q_1\ ;\ Q_3]$ et l'amplitude de cet intervalle : $Q_3 - Q1$ est appelée écart inter-quartiles.

Exemple n°12. (toujours avec la série A)

L'intervalle inter-quartile est l'intervalle [7 ; 10]
L'écart inter-quartile vaut 10 – 7 = 3.

Définition n°11. La variance

La variance d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Remarque n°7.

Nous n'utiliserons pas la variance cette année, mais la définition suivante en dépend.

Définition n°12. L'écart-type

L'écart-type d'une série statistique est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
Il est en général noté : σ qui se lit : « sigma »

Exemple n°13. (toujours avec la série A)

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [	total
Centre	2,5	7,5	12,5	17,5	
Effectif	4	17	7	2	30
Fréquence	0, 13	0, 57	0, 23	0, 07	1

▪ La moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{2{,}5\times4+7{,}5\times17+\ldots+17{,}5\times2}{30} = \frac{260}{30} = \frac{26}{3} \approx 8{,}67$$

▪ L'écart-type vaut alors :

$$\sigma = \sqrt{\frac{4\times\left(2{,}5-\frac{26}{3}\right)^2+17\times\left(7{,}5-\frac{26}{3}\right)^2+7\times\left(12{,}5-\frac{26}{3}\right)^2+2\times\left(17{,}5-\frac{26}{3}\right)^2}{4+17+7+2}} \approx 3{,}8$$

V Résumé du cours

Définitions

Population, individus	La population, c'est l'ensemble des individus sur lesquels portent l'étude statistique.
Caractère	C'est une propriété étudiée sur chaque individu.
Nature de caractère, valeur ou modalité.	Le caractère est **quantitatif** quand il prend des valeurs (ou modalités) numériques. Il peut alors être **quantitatif discret** si les valeurs sont isolées ou **quantitatif continu** dans le cas contraire. Le caractère est **qualitatif** quand les modalités qu'il prend **ne sont pas numériques**.
Classe	Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, on regroupe les valeurs par **classes** (qui sont des **intervalles**). On peut également le faire quand le caractère est quantitatif discret.
Centre de classe	Le centre de la classe, c'est la moyenne des extrémités de la classe
Effectif	C'est le nombre d'individus qui possèdent le caractère étudié.
Mode, valeur modale, classe modale	On appelle mode ou valeur (*resp* classe) modale, la valeur (*resp* classe) qui possède le plus grand effectif.

Indicateurs de tendance centrale

	Les indicateurs de tendance centrale sont le mode, la médiane et la moyenne.
Moyenne pondérée (avec les effectifs)	$\boxed{\bar{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \ldots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p} = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i}$
Moyenne pondérée (avec les fréquences)	$\boxed{\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots + f_p x_p = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i}$
Moyenne pondérée (par groupe)	$\boxed{\bar{x} = \dfrac{p}{N} \times \bar{x}_1 + \dfrac{q}{N} \times \bar{x}_2}$

Indicateurs de dispersion

	Les principaux indicateurs de dispersion sont l'étendue, l'écart inter-quartile, la variance et l'écart-type.
Étendue	Étendue = plus grande valeur du caractère – plus petite valeur du caractère
Quartiles	Soit une série statistique ordonnée, on appelle : ▪ **premier quartile** et on note Q_1 la valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures (ou égales) à Q_1 ▪ **troisième quartile** et on note Q_3 la valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs soient inférieures (ou égales) à Q_3
Intervalle inter-quartile, écart inter-quartile	On appelle intervalle inter-quartiles, l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ et l'amplitude de cet intervalle : $Q_3 - Q1$ est appelée écart inter-quartiles.
Écart-type	L'écart-type d'une série statistique est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Il est en général noté : σ qui se lit : « sigma »
	Voir l'exemple n°13

COMPLÉMENT DE COURS

VI Effectifs et fréquences cumulés

Quand les valeurs d'un caractère quantitatif sont rangées dans l'ordre croissant,
● L'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) d'une valeur est la somme des effectifs des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à cette valeur,
● La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) d'une valeur est la somme des fréquences des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à cette valeur.

Exemple n°14. (toujours avec la série A)

Notes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Eff	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1
E.C.C	1	3	4	5	7	10	15	21	23	26	26	28	28	29	30
E.C.D	30	29	27	26	25	23	20	15	9	7	4	4	2	2	1

Ce tableau peut par exemple nous permettre de calculer la médiane de la série :
l'effectif étant de 30, on choisit la moyenne entre la 15e et 16e note, lues dans la ligne des E.C.C. :

$$M = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$$

Exemple n°15. (toujours avec la série A)

On s'intéresse cette fois-ci à la fréquence :

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [
Effectif	4	17	7	2
Fréquence en %	13	57	23	7
F.C.C	13	70	93	70
F.C.D	100	87	30	7

VII Représentation graphique d'une série statistique

VII.1 Histogramme

Lorsque le caractère étudié est quantitatif et lorsque les modalités sont regroupées en classes, on peut représenter la série par un histogramme :
l'aire de chaque rectangle est alors proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) associée à chaque classe.

Méthode n°1. Construire un histogramme

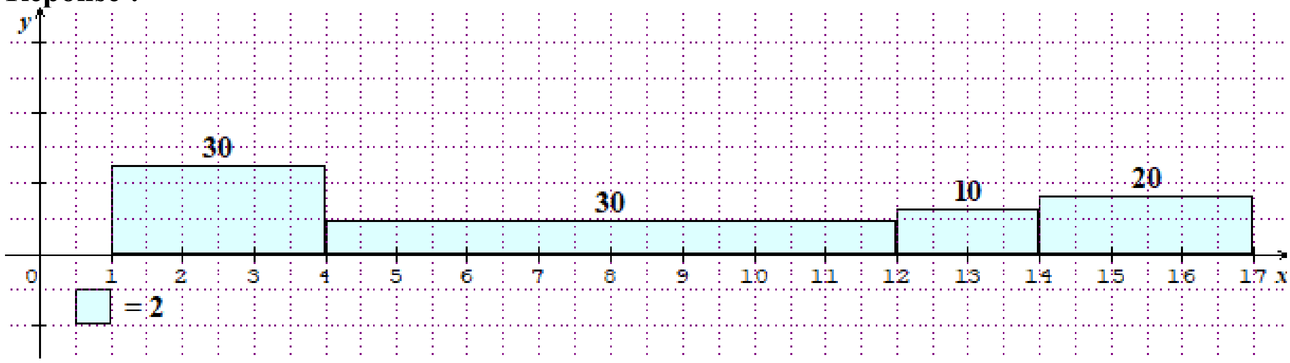
Énoncé :

On donne la série statistique suivante :

Classes	[1 ; 4 [	[4 ; 12 [	[12 ; 14 [	[14 ; 17 [
Effectif	30	30	10	20
Fréquence en %				

Construire un histogramme représentant cette série.

Réponse :



On gradue l'axe des abscisses et on y place les classes.
Ensuite on choisit « la valeur d'un carreau ». Ici on a choisi : « un carreau représente 2 unités ».
Il nous reste à déterminer la hauteur de chaque rectangle afin que son aire soit proportionnelle à l'effectif qu'il représente.

Classe	[1 ; 4 [	[4 ; 12 [	[12 ; 14 [	[14 ; 17 [
Effectif n_i	30	30	10	20
Amplitude en carreaux = largeur du rectangle : l_i	6	16	4	6
Hauteur du rectangle h_i	$\frac{30}{2\times 6}=2{,}5$	$\frac{30}{2\times 16}=0{,}9375$	$\frac{10}{2\times 4}=1{,}25$	$\frac{20}{2\times 6}=\frac{5}{3}$

Si on note « la valeur d'un carreau » alors $\boxed{h_i=\frac{n_i}{t\times l_i}}$

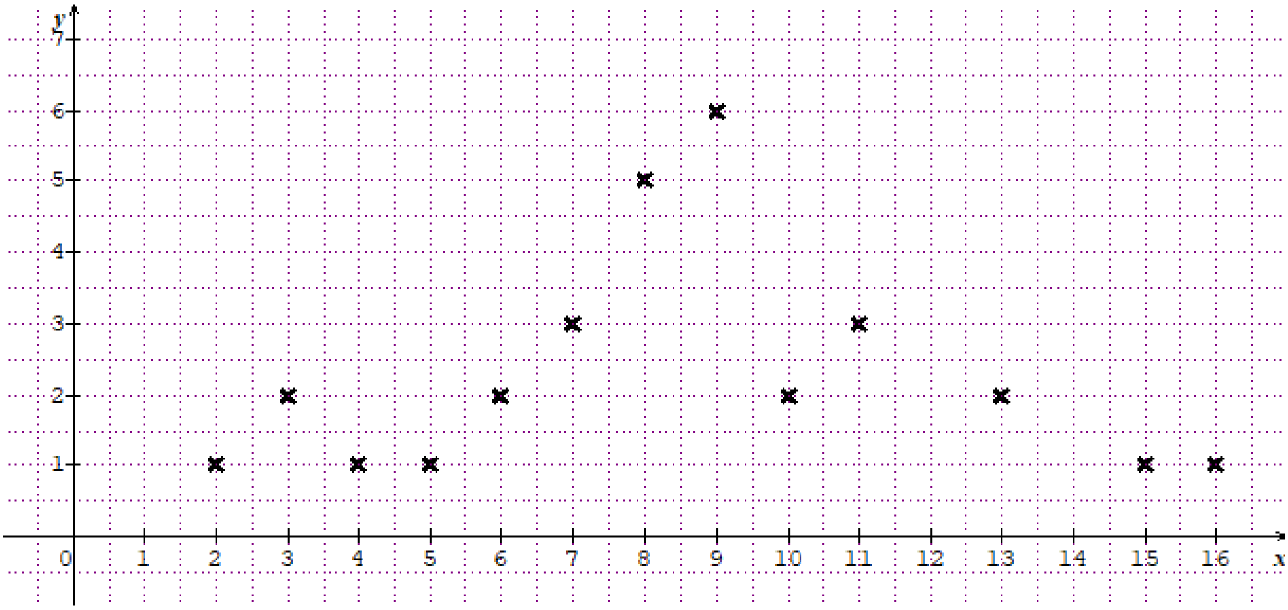
Remarque n°8.

Lorsque les classes ont la même amplitude, la hauteur est aussi proportionnelle à l'effectif. On rappelle que ce n'est pas le cas en général.

VII.2 Nuage de points

Lorsque le caractère étudié est quantitatif et discret, on peut représenter la série par un nuage de points : chaque couple de valeurs est représenté par un point dans un repère orthogonal.

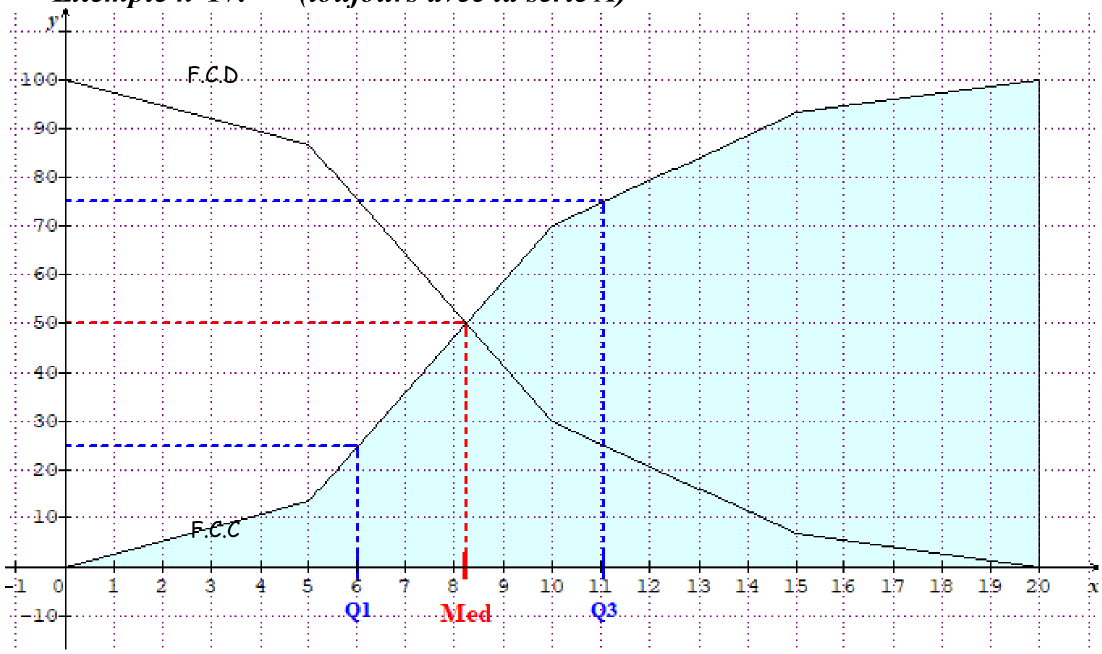
Exemple n°16. ***(toujours avec la série A)***



VII.3 Courbe des fréquences cumulées

Lorsque le caractère étudié est quantitatif et lorsque les modalités sont regroupées en classes, on peut effectuer la courbe des fréquences cumulées (croissantes ou décroissantes) appelée aussi polygone des fréquences cumulées.

Exemple n°17. ***(toujours avec la série A)***



On peut grâce à ces polygones déterminer la médiane de la série de deux manières

- ➔ Soit en déterminant le point du polygone d'ordonnée 50% : on trouve environ $M = 8,2$,
- ➔ soit en lisant l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

LA FONCTION RACINE CARRÉE

I Qu'est ce qu'une racine carrée ?

Définition n°1. ***Racine carrée***

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée de a**
et on note $\sqrt{a}$ le nombre **positif** dont **le carré vaut a**.
Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé « radical ».

Exemple n°1.

- $\sqrt{64}=8$ en effet $8^2=64$ ($(-8)^2=64$ aussi mais $-8<0$)
- $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ à 0,001 près : une racine carrée n'est pas forcément un entier.
- $\sqrt{-64}$ n'existe pas et ne s'écrit pas…
- $-\sqrt{64}$ existe et vaut -8 .
- $\sqrt{0}=0$ et $\sqrt{1}=1$

Remarque n°1.

D'après la définition, pour a un nombre **positif**. $\boxed{(\sqrt{a})^2=a}$

II Opérations élémentaires et racines carrées

Propriété n°1. ***La racine du produit égale le produit des racines***

Soient a et b deux nombres positifs. $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

preuve :

- Si $a=0$ et/ou $b=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
- Supposons à présent que $a>0$ **et** $b>0$

Alors $\sqrt{a\times b}>0$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$

- La remarque n°1 nous permet d'affirmer que :

$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$ et que $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b$.

- On peut alors écrire :

$$0=a\times b-a\times b=(\sqrt{a\times b})^2-(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=[\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}][\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}]$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ne peut pas être nul

donc $\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}=0$ qui équivaut à $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ *cqfd.*

Remarque n°2.

En particulier, pour $\boxed{a\geqslant 0,\quad \sqrt{a^2}=a}$

Propriété n°2. ***La racine du quotient égale le quotient des racines***

Soient a un nombre positif et b un nombre strictement positif. $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

preuve :

Si $a=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
Supposons à présent que $a>0$.

- Avec la remarque n°1 : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$
- On peut alors écrire : $0=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq 0$ donc $\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=0$ qui équivaut à $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *cqfd.*

Remarque n°3. ***Attention ! Pas de somme ou de différence***

De manière générale, la racine de la somme ou de la différence n'égale pas la somme ou la différence des racines.

Exemple n°2.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Propriété n°3. ***Racine carrée et distance à zéro***

Soit a un nombre réel : $\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \text{ , } \sqrt{a^2}=a \\ \text{Si } a<0 \text{ , } \sqrt{a^2}=-a \end{cases}$

preuve :

Si $a \geqslant 0$ alors, d'après la remarque n°2, $\sqrt{a^2}=a$

Si $a<0$ alors $-a>0$ et comme $(-a)^2=a^2$ on peut appliquer le point précédent pour conclure.

Remarque n°4. ***Valeur absolue de a :*** $|a|$

La propriété n°3 nous dit que :

Pour $a \in \mathbb{R}$ $\sqrt{a^2}$ vaut la **distance à zéro de *a*.**

(On dira maintenant : « **valeur absolue de *a*** »)

On notera alors $\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|\ a\ |}$

et on lira « La racine carrée du carré d'un nombre égale sa valeur absolue ».

III Simplification de racine carrée

Il s'agît de savoir faire ce que fait votre calculatrice : Faire en sorte que le nombre sous le radical soit un entier le plus petit possible.

Méthode n°1. ***Simplifier une racine carrée***

Énoncé :

Écrire $\sqrt{675}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

Réponse :

Au brouillon :

$\sqrt{675} \approx 25{,}98$ Comme 25 est le plus grand entier inférieur à 25,98 , on commence de cette façon :

Est-ce que 25^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{625} \notin \mathbb{N}$

Est-ce que 24^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{576} \notin \mathbb{N}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Est-ce que 15^2 est un diviseur de 675 ? Oui $\dfrac{675}{225}=3 \in \mathbb{N}$

Sur la copie :

$$\sqrt{675}=\sqrt{15^2 \times 3}=\sqrt{15^2} \times \sqrt{3}=\mathbf{15\sqrt{3}}$$

Remarque n°5.

Si une expression comporte plusieurs racines carrées, on les simplifie une à une avec la méthode précédente.

IV Étude de la fonction racine carrée

Définition n°2.

La fonction racine carrée est la fonction $g:\begin{cases}[0\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}\\ x \mapsto \sqrt{x}\end{cases}$

Propriété n°4.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

preuve :

Soient a et b des réels tels que $0 \leqslant a < b$.
Nous devons montrer qu'alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

$a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < 0$

D'après la règle des signes, les facteurs $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont de signes contraires.
Or, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$ (voir la définition n°1 si vous n'êtes pas convaincu…)
Donc $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$ qui équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarque n°6.

On en déduit que la fonction racine carrée conserve les inégalités.

Définition n°3. Représentation graphique de la fonction racine carrée

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.

V Équations et inéquations avec la fonction racine carrée

Propriété n°5. L'équation $\sqrt{x}=k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Soit k un nombre réel.
- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

preuve :

Évidente avec la définition n°1

Propriété n°6. Les inéquations

Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S =]k^2\ ;\ +\infty[$	$S = [0\ ;\ +\infty[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = [k^2\ ;\ +\infty[$	$S = [0\ ;\ +\infty[$
$\sqrt{x} < k$	$S = [0\ ;\ k^2[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = [0\ ;\ k^2]$	Aucune solution

preuve :

À titre d'exercice (indice : pensez aux variations de la fonction carré)

Propriété n°7. Le cas $\sqrt{(x-a)^2} \leqslant k$ c'est à dire $|x-a| \leqslant k$

Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k\ ;\ a+k]$.

VI Le résumé du cours

➔ Pour un nombre réel strictement positif a, il existe deux nombres opposés dont le carré vaut a : Seul celui qui est positif est noté $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

➔ Pour ***a*** **et** ***b*** **des nombres réels positifs ou nuls** :

Produit et quotient : OK

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$$

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$\boxed{a \geqslant 0, \quad \sqrt{a^2} = a}$$

$$\boxed{\text{Si } b > 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Somme et différence : ATTENTION PAS DE FORMULE

➔ Pour ***a*** **un nombre réel quelconque** (cette fois il peut être négatif)

$$\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \;,\; \sqrt{a^2} = a \\ \text{Si } a < 0 \;,\; \sqrt{a^2} = -a \end{cases}$$

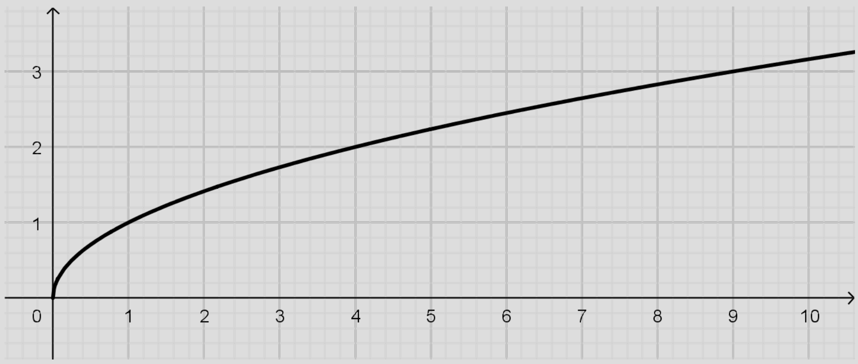
On résume cela en écrivant : $\boxed{\sqrt{a^2} = |\, a \,|}$ se lit « valeur absolue de a »

➔ La fonction racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs : $[0 \;;\; +\infty[$

➔ La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 \;;\; +\infty[$

➔ La fonction racine carrée conserve les inégalités (cela veut dire qu'on ne change pas une inégalité en extrayant la racine carrée de chaque membre).

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une arche de parabole.



➔ Soit k un nombre réel.

- Si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution : k^2
- Si $k < 0$ alors $\sqrt{x} = k$ n'admet aucune solution.

➔ Soit k un nombre réel. Notons S l'ensemble des solutions.

	$k \geqslant 0$	$k < 0$
$\sqrt{x} > k$	$S =]k^2 \;;\; +\infty[$	$S = [0 \;;\; +\infty[$
$\sqrt{x} \geqslant k$	$S = [k^2 \;;\; +\infty[$	$S = [0 \;;\; +\infty[$
$\sqrt{x} < k$	$S = [0 \;;\; k^2[$	Aucune solution
$\sqrt{x} \leqslant k$	$S = [0 \;;\; k^2]$	Aucune solution

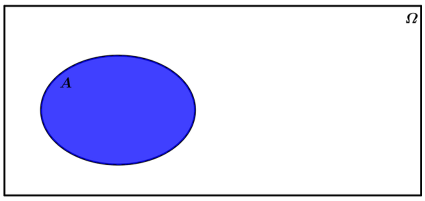
➔ Pour $k \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation $|x-a| \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions $[a-k \;;\; a+k]$

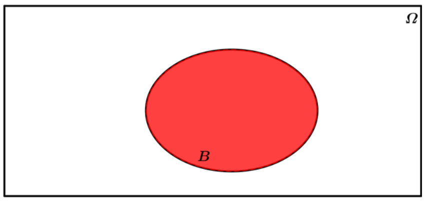
PROBABILITÉS

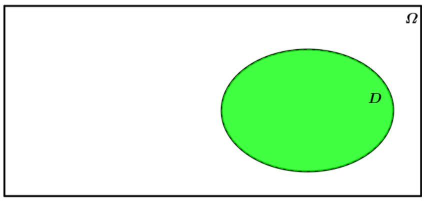
I Un peu de vocabulaire ensembliste

On se donne un ensemble que l'on décide d'appeler Ω ainsi que trois sous-ensembles de Ω que l'on décide d'appeler A , B et D . On représente cela sous la forme d'un diagramme de Venn.

Voici trois diagrammes de Venn, représentant chacun un seul des trois sous-ensembles



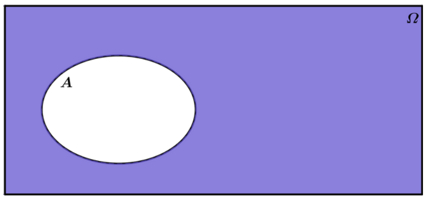




On peut représenter aussi :

Le contraire de A

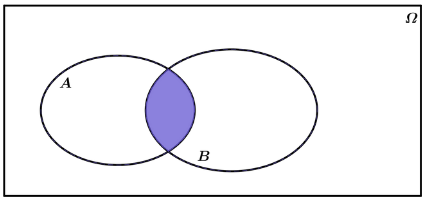
que l'on note $\overline{A}$
et que l'on lit : « A barre »



Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .
On note aussi, parfois, $\Omega \setminus A$ qui se lit « Oméga privé de A »

L'intersection de A et B

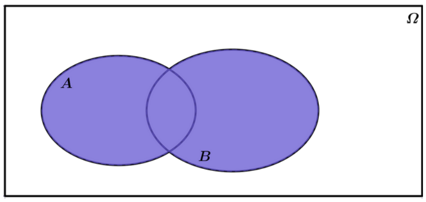
que l'on note $A \cap B$
et que l'on lit : « A inter B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B

L'union de A et B

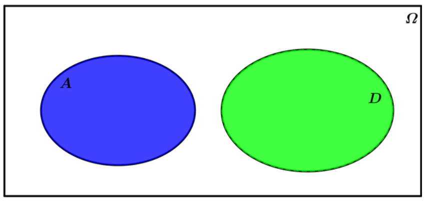
que l'on note $A \cup B$
et que l'on lit : « A union B »



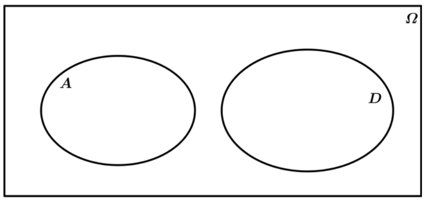
Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B
Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou » .

Il se peut aussi que les ensembles soient disjoints

A et D sont disjoints :
Ils n'ont aucun élément en commun

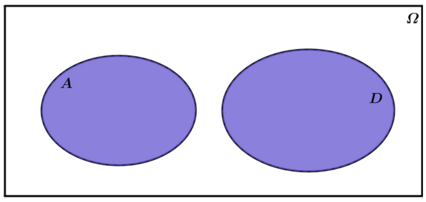


$A \cap D = \emptyset$
$\emptyset$ se lit « ensemble vide »



Ici, aucune couleur car aucun élément n'appartient à A **ET** D

$A \cup D$



On colorie bien sûr de la même couleur les éléments correspondant à la description.

II Vocabulaire des probabilités

Propriété n°1. La loi des grands nombres (simplifiée)

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une éventualité tend vers une « valeur idéale », appelée probabilité.

Définition n°1. Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Définition n°2. Événements élémentaires

Ce sont les « résultats possibles » ou « issues » ou « éventualités » de l'expérience aléatoire.

Définition n°3. Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des événements élémentaires. On le note généralement Ω .

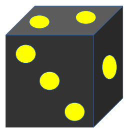
Définition n°4. Événements

Ce sont des sous-ensembles de l'univers que l'on peut décrire avec des événements élémentaires .

Exemple n°1. L'exemple du dé

On prend un dé bien équilibré à six faces. Notre **expérience aléatoire** consistera à le lancer et à relever le nombre de la face supérieure.

Ici on relève le nombre 2



Notre **univers** est alors composé de six nombres : $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5$ et 6
On écrira $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$
$\{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{4\}\ ;\ \{5\}$ et $\{6\}$ sont des **événements élémentaires** avec lesquels on peut décrire des **événements** comme, par exemple :
Obtenir un nombre pair : $\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\} = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$

Définition n°5. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire.

Propriété n°2.

La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Propriété n°3.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple n°2. Avec l'exemple du dé

Loi de probabilité							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

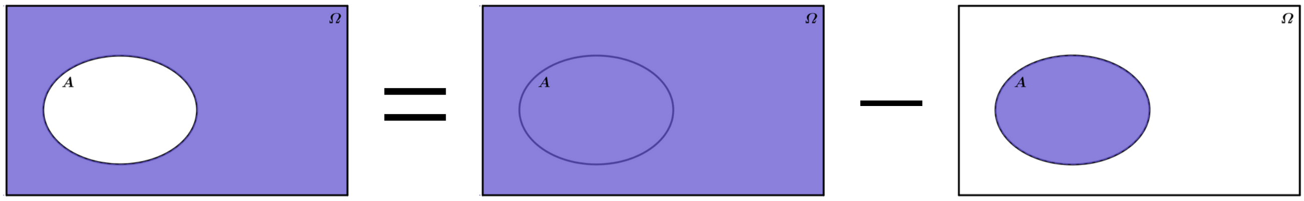
III Calculs de probabilité

III.1 Les formules à connaître

Dans cette partie, on se donne un univers Ω et deux événements A et B .

Propriété n°4.

$$\boldsymbol{p(\overline{A})=1-p(A)}$$



Exemple n°3. ***Avec l'exemple du dé***

B : « Obtenir un multiple de trois »

$B = \{3\}\cup\{6\} = \{3 ; 6\}$

$p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\overline{B}$: « Ne pas obtenir un multiple de trois »

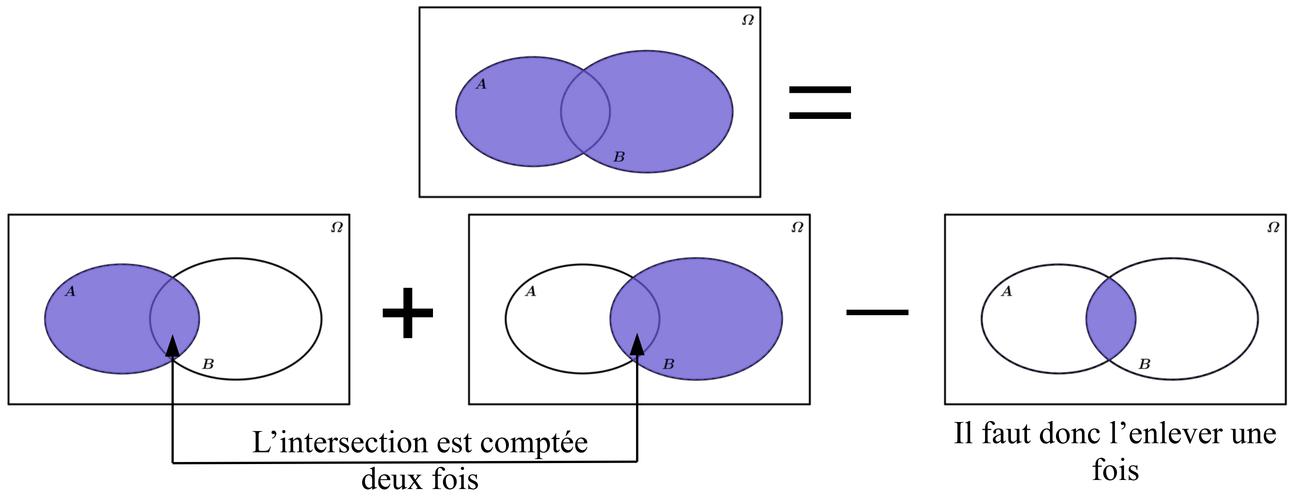
$\overline{B} = \underbrace{\Omega\backslash\{3 ; 6\}}_{\Omega \text{ privé de } \{3 ; 6\}} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$

$p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(On peut aussi calculer directement $p(\overline{B})$ mais ce n'est pas le but ici)

Propriété n°5.

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)}$$



Exemple n°4. ***Avec l'exemple du dé***

$A \cap B = \{2 ; 4 ; 6\}\cap\{3 ; 6\} = \{6\}$ (seul 6 appartient à A **et** B)

$p(A \cap B)=p(\{6\})=\frac{1}{6}$ (En générale, la probabilité de l'intersection est facile à calculer).

$p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B) = \frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Effectivement : $A \cup B = \{2 ; 4 ; 6\}\cup\{3 ; 6\} = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$

(On prend tous les éléments mais on ne les fait apparaître qu'une fois)

III.2 Équiprobabilité ou pas

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec un exemple d'équiprobabilité.
Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître donc tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Loi de probabilité avec le dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On peut aussi truquer (ou piper ou déséquilibrer) le dé. Dans ce cas, certaines faces « vont apparaître plus souvent » : certains événements élémentaires auront une probabilité plus grande que d'autres.
Par exemple :

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d'obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Nous retenons donc qu'avant de se lancer dans les calculs, on pensera à vérifier dans quel cas de figure on se trouve.
Par contre, une fois assuré d'être en situation d'équiprobabilité, on pourra utiliser la formule suivante :

En cas d'équiprobabilité : $\textit{probabilité de } A = \dfrac{\textit{nombre d'éléments de } A}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$

Il existe une notation pour parler d'un nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition n°6.

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A .

Propriété n°6.

En situation d'équiprobabilité : $\boldsymbol{p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

Exemple n°5. ***avec le dé (équilibré ou pas)***

$Card(A)=3$; $Card(\overline{A})=3$; $Card(B)=2$; $Card(\overline{B})=4$
$Card(A\cap B)=1$; $Card(A\cup B)=4$ et $Card(\Omega)=6$

▪ Dans le cas du dé équilibré, on retrouve bien $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

▪ Par contre, cela ne fonctionne pas dans le cas du dé truqué.

Remarque n°1.

Dans le cadre d'une situation d'équiprobabilité, il suffira donc d'être capable de dénombrer (déterminer le nombre d'éléments de) les ensembles dont on cherche la probabilité.
Une fois que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité, on peut utiliser différentes techniques pour dénombrer.

IV Utiliser un tableau pour calculer une probabilité.

Exemple n°6. Le tableau à double entrée.

Voici un tableau à double entrée représentant la répartition de la LV1 dans une classe de seconde .

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	7	13	20
Anglais	9	4	13
Total	16	17	33

On choisit un élève au hasard (on suppose donc que chaque élève a la même chance d'être choisi).
On note :
F : « l'élève choisi est une fille »
E : « l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »

Et on se propose de calculer la probabilité de quelques événements.

On décide de nommer Ω l'univers de expérience aléatoire.

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	$Card(E\cap F)$	$Card(E\cap\overline{F})$	$Card(E)$
Anglais	$Card(\overline{E}\cap F)$	$Card(\overline{E}\cap\overline{F})$	$Card(\overline{E})$
Total	$Card(F)$	$Card(\overline{F})$	$Card(\Omega)$

1) $p(F)=\dfrac{Card(F)}{Card(\Omega)}=\dfrac{16}{33}$

2) $F\cap E$: « L'élève choisi est une fille ET l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »
(On préférera écrire : « l'élève choisi est une fille pratiquant l'espagnol en LV1 »)

$$p(F\cap E) = \frac{Card(F\cap E)}{Card(\Omega)} = \frac{7}{33}$$

Remarque n°2.

À ne pas confondre avec l'événement : « Parmi les filles, on a choisi une élève pratiquant l'espagnol » dont la probabilité sera notée (l'année prochaine)

$$p_F(E)=\frac{Card(E\cap F)}{Card(F)}=\frac{7}{16}$$

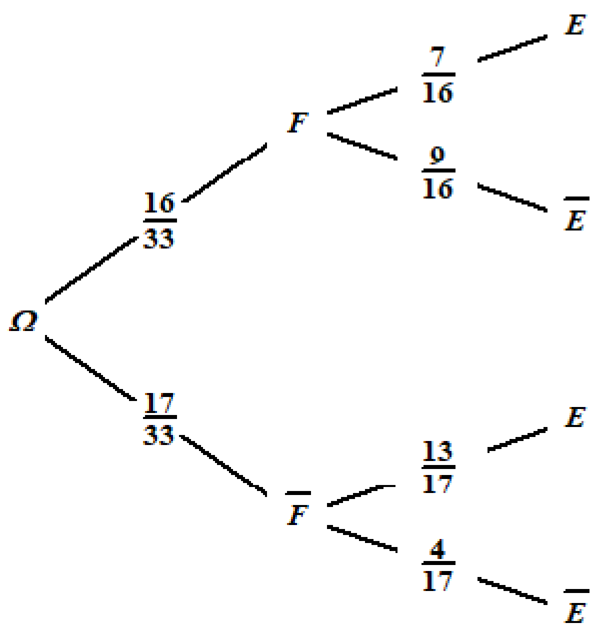
3) $p(F\cup E) = p(F)+p(E)-p(F\cap E) = \dfrac{16}{33}+\dfrac{20}{33}-\dfrac{7}{33} = \dfrac{29}{33}$

V Utiliser un arbre pour calculer une probabilité

On peut représenter l'exemple précédent avec un arbre pondéré.

Exemple n°7. ***Avec la même situation que dans l'exemple 6***

Si on décide de considérer l'événement F en premier :



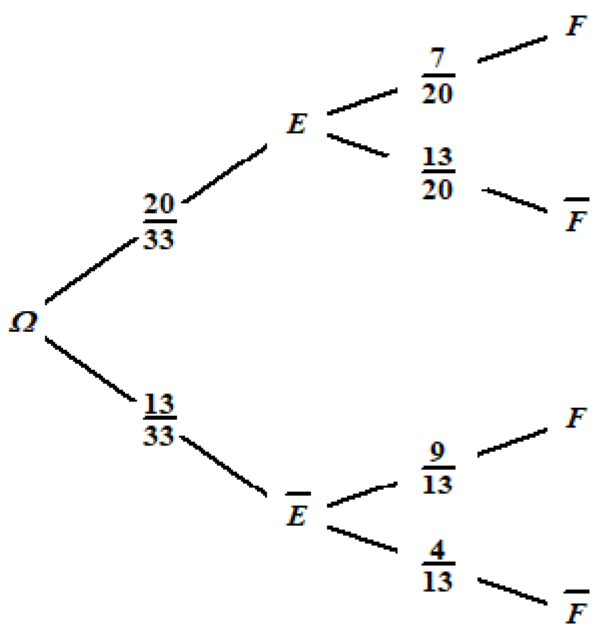
$$p(F\cap E)=\frac{16}{33}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{33}$$

$$p(F\cap \overline{E})=\frac{16}{33}\times\frac{9}{16}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{17}{33}\times\frac{13}{17}=\frac{13}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap \overline{E})=\frac{17}{33}\times\frac{4}{17}=\frac{4}{33}$$

Si on décide de considérer l'événement E en premier :



$$p(F\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{13}{20}=\frac{13}{33}$$

$$p(F\cap \overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{9}{13}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap \overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{4}{13}=\frac{4}{33}$$

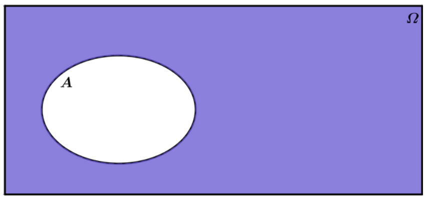
Les règles de calculs :
R1 :Tant qu'on suit une branche, on multiplie.
R2 : Deux branches différentes s'additionnent.
R3 : La somme des branches d'un nœud vaut toujours 1

VI Le résumé du cours

Le résumé n'est utile qu'après avoir lu (et relu et encore relu) le cours...

Le contraire de A

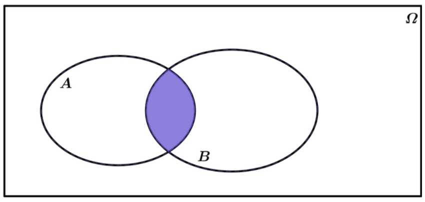
que l'on note $\overline{A}$
et que l'on lit : « A barre »



Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .
On note aussi, parfois, $\Omega \setminus A$ qui se lit « Oméga privé de A »

L'intersection de A et B

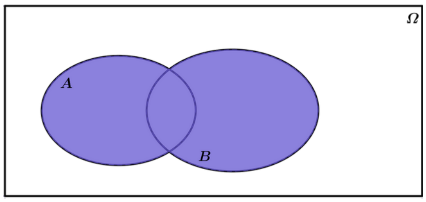
que l'on note $A \cap B$
et que l'on lit : « A inter B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B

L'union de A et B

que l'on note $A \cup B$
et que l'on lit : « A union B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B
Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou » .

Formules toujours valables

$$\boldsymbol{p(\overline{A})=1-p(A)}$$

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)}$$

Situation d'équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A .

En situation d'équiprobabilité : $\boldsymbol{p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

Ω représente l'univers.

Situation de NON équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d'obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Et bien sûr, il faut relire le paragraphe sur les **TABLEAUX** et celui sur les **ARBRES** qui ne se résument pas mais sont essentiels.

LA FONCTION INVERSE

I Définition et étude de la fonction inverse

Définition n°1.

La fonction inverse est la fonction $g:\begin{cases}\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$

Rappel : $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°1.

La fonction inverse est impaire

preuve :

Notons g la fonction inverse.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (car $D_g = \mathbb{R}^*$)

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

Ainsi g est impaire.

Propriété n°2. ***Variations de la fonction inverse***

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

preuve :

▪ Démontrons la stricte décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$
Soit $a \in]-\infty\ ;\ 0[$ et $b \in]-\infty\ ;\ 0[$ tels que $a < b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

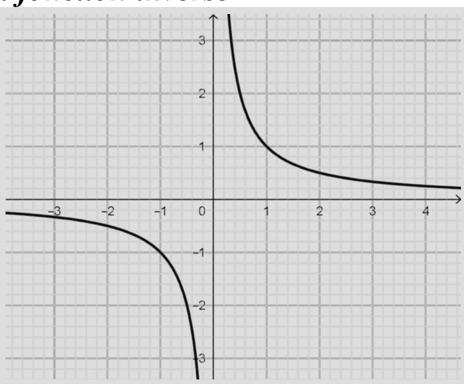
Or : $a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow b-a > 0$
Et comme a et b sont de même signe $ab > 0$
D'après la règle des signes : $\dfrac{b-a}{ab} > 0$
Nous venons de montrer que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, ce qui prouve la stricte décroissance sur $]-\infty\ ;\ 0[$
▪ La stricte décroissance sur $]0\ ;\ +\infty[$ se démontre de la même façon et est laissée à titre d'exercice.

Remarque n°1.

Attention, la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction inverse***

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$



La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.

II Equations et inéquations quotients

Exemple n°1.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2} \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$5-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

On signale les valeurs interdites

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left]-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°2.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs au numérateur ou au dénominateur.

III Complément de cours

Définition n°2. Fonctions homographiques

Soient $a\,,b\,,c$ et d quatre nombres réels tels que $ad-bc\neq 0$.
La fonction $x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est appelée fonction homographique.

Remarque n°3.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[\cup\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

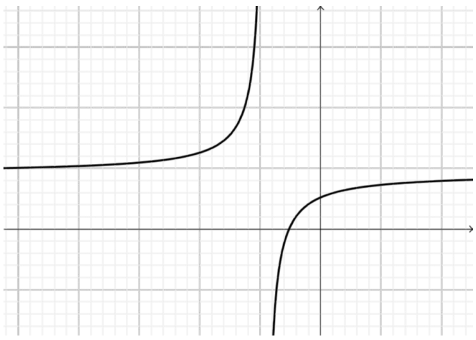
Propriété n°4. (admise)

Quand $c\neq 0$:

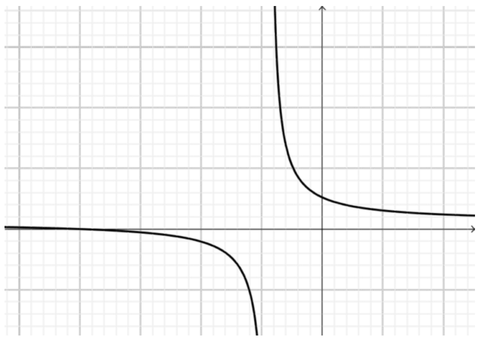
▪ Si $ad-bc>0$ alors la fonction est strictement croissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

▪ Si $ad-bc<0$ alors la fonction est strictement décroissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

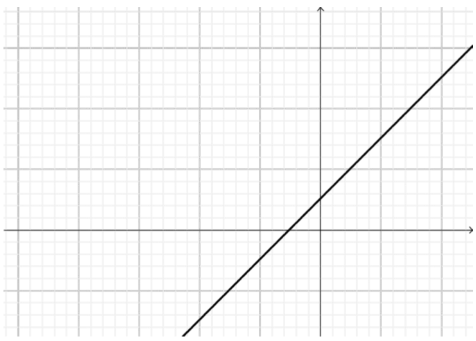
$ad-bc>0$ avec $c\neq 0$



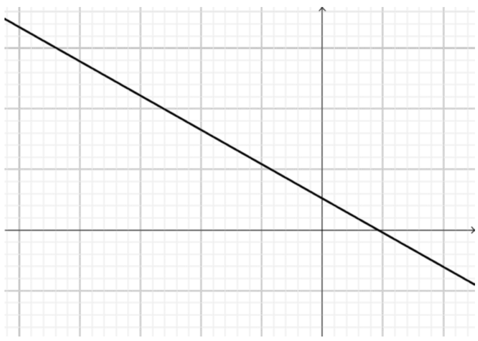
$ad-bc<0$ avec $c\neq 0$



$ad-bc>0$ avec $c=0$



$ad-bc<0$ avec $c=0$



LES DROITES

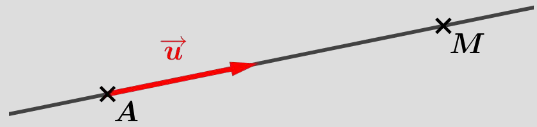
Dans tout ce chapitre, on se place dans un plan muni un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

I Différentes façons de décrire une droite

I.1 Avec un point et un vecteur

Propriété n°1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point.



L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite.

preuve :

Fixons un point N tel que $\overrightarrow{AN}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et considérons la droite (AN) .

▪ Si un point M est tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont aussi colinéaires.

On en déduit que $(AN)//(AM)$ (au sens large)

et comme $A \in (AN)$ et $A \in (AM)$, ces droites sont confondues.

Ainsi $M \in (AN)$

▪ Si un point M appartient à (AN) alors $(AN)//(AM)$ (au sens large) et donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. ***cqfd***

Remarque n°1. ***(sur la preuve précédente)***

▪ Le deuxième point nous dit que tous les points de la droite (AN) répondent à la condition et le premier point nous dit qu'il n'y en a pas d'autre.

▪ Le point N existe il suffit de prendre l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition n°1. ***Vecteur directeur***

$\vec{u}$ est appelé un vecteur directeur de cette droite.

Remarque n°2.

Pour définir une droite, il nous suffit donc d'un vecteur non nul ET d'un point.

Remarque n°3.

Une fois le point A choisi, le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique : tout autre vecteur non nul qui lui est colinéaire engendrera la même droite.

preuve :

Remplacer $\vec{u}$ par l'autre vecteur en question dans la preuve de la propriété n°1...

Propriété n°2.

Soient A et B deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A ainsi que d' la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par B .

d et d' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

preuve :

Notons N et N' les images respectives de A et B par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On sait, grâce à la remarque n°1 et la preuve de la propriété n°1 que : d et (AN) sont confondues et que d' et (BN') le sont aussi.

$d // d' \Leftrightarrow (AN)//(BN') \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN'}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

I.2 Avec une équation cartésienne

Propriété n°3.

Soient a, b et c trois nombres réels tels au moins l'un des nombres a et b est non nul.
L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A\ ;\ y_A)$ où A est un point tel que $ax_A+by_A+c=0$.

preuve :

Les préparatifs

Soient a, b et c trois nombres réels tels au moins l'un des nombres a et b est non nul.
Notons (C) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ et fixons $A(x_A\ ;\ y_A)$ appartenant à (C) c'est à dire que : $ax_A+by_A+c=0$ ou encore : $c=-ax_A-by_A$
Notons d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par A .

Le plan

▪ Nous allons montrer dans un premier temps que tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ appartiennent à une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Nous aurons alors $(C)\subset d$

▪ Puis dans un second temps nous allons montrer que $d\subset(C)$, c'est à dire que si $M(x\ ;\ y)$ appartient à la droite d alors ses coordonnées vérifient $ax+by+c=0$

La preuve

▪ Dans ce premier temps , notre but est de démontrer que :
Si $M(x\ ;\ y)\in(C)$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u}) &= (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b)\\
&= ax-ax_A+by-by_A\\
&= ax+by+\underbrace{(-ax_A-by_A)}_{c}\\
&= ax+by+c\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont bien colinéaires, ce qui signifie que M appartient à la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A

▪ Dans ce second temps, notre but est de démontrer que :
Si $M(x\ ;\ y)\in d$ alors $ax+by+c=0$ où $c=-ax_A-by_A$

$$\begin{aligned}
M(x\ ;\ y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0\\
&\Leftrightarrow (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b)=0\\
&\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A=0\\
&\Leftrightarrow ax+by+\underbrace{(-ax_A-by_A)}_{c}\\
&\Leftrightarrow ax+by+c=0 \quad \text{, où } c=-ax_A-by_A
\end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient bien $ax+by+c=0$

Définition n°2. ***Équation cartésienne***

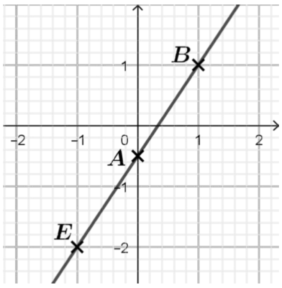
On dit alors que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite d

Remarque n°4.

La droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ passe par le point :

$A\left(\dfrac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$, sinon par $A\left(0\ ;\ \dfrac{-c}{b}\right)$

Exemple n°1. ***De l'équation cartésienne vers un vecteur directeur***



On se donne une droite D d'équation cartésienne : $3x-2y-1=0$.

On identifie : $a=3\,,b=-2$ et $c=-1$

On peut alors déterminer un vecteur directeur de D : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

et un point appartenant à D : $A\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$

Ici on a utilisé la remarque n°4, mais on peut bien sûr trouver d'autres points : le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ est aussi un point de D

Exemple n°2. ***Du vecteur directeur vers une équation cartésienne***

On se donne une droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ passant par le point $E(-1\ ;\ -2)$. On identifie : $a=3\,,b=-2$

(relire la propriété n°3 pour comprendre le « - »devant le « 2 »)

On calcule alors $c\ =\ -ax_E-by_E\ =\ -3\times(-1)-(-2)\times(-2)\ =\ -1$

On peut alors écrire une équation cartésienne de D : $3x-2y-1=0$

Remarque n°5.

D possède une infinité d'équations cartésiennes, par exemple :

$6x-4y-2=0$, $-6x+4y+2=0$, $30x-20y-10=0$ …

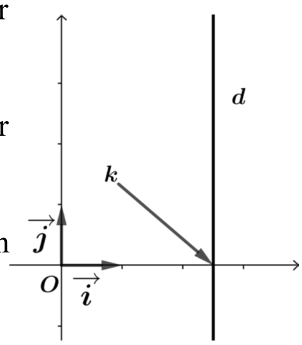
I.3 Avec une équation réduite

Propriété n°4.

Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Une équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $x=k$ avec $k\in\mathbb{R}$

preuve :



L'axe des ordonnées est une droite qui est dirigée par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

La droite d lui étant parallèle elle est aussi dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne est alors $1\times x+0\times y+c=0$ que l'on note bien sûr

$x+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$

En posant $k=-c$, on obtient bien $x=k$.

Remarque n°6.

La droite étant parallèle à l'axe des ordonnées, tous ses points ont la même abscisse : k

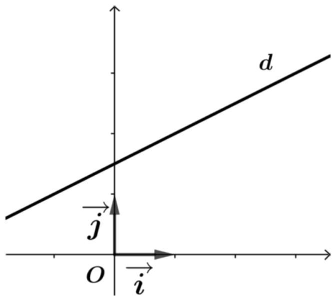
Définition n°3. ***Équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.***

L'équation $\boxed{\boldsymbol{x=k}}$ est appelée : **équation réduite** de d .

Propriété n°5. ***Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées***

Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'**équation réduite** de d peut s'écrire $\boxed{\boldsymbol{y=mx+p}}$ avec m et p des nombres réels.

preuve :



Puisque d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on peut trouver deux réels a et b avec $b\neq 0$ tels que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige d .
(si on avait $b=0$ alors d serait parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas)
On sait alors qu'une équation cartésienne de d est :
$ax+by+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$
On peut réduire cette équation en isolant y :
$y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$
(c'est possible car $b\neq 0$, d'où l'importance de ne pas être parallèle à l'axe des ordonnées)
Il suffit alors de poser : $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$ pour obtenir : $y=mx+p$

Définition n°4. ***(petit rappel)***

m est **la pente** ou le **coefficient directeur** de d et
p est **l'ordonnée à l'origine** de d

Remarque n°7.

Soit f une fonction affine telle que $f(x)=mx+p$ alors sa représentation graphique a pour équation $y=mx+p$ et nous savons à présent que c'est bien une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. (Souvenez-vous de la propriété n°1 du cours fonctions affines et équations)

Remarque n°8.

Si une droite d admet comme équation réduite $y=mx+p$ alors on peut écrire : $mx-y+p=0$ et en déduire qu'un vecteur directeur de d est :
$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

La propriété suivante est alors évidente.

Propriété n°6.

Soient d et d' d'équations réduites respectives :
$y=mx+p$ et $y=m'x+p'$
Alors : $\boldsymbol{d\,//\,d' \Leftrightarrow m=m'}$

Propriété n°7.

Soit d d'équation réduite $y=mx+p$
Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à d , alors :
$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

preuve :

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un coefficient directeur de d et on remarque aussi que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ en est un autre. Par conséquent ces vecteurs sont colinéaires et on peut écrire :

$$\begin{aligned} det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u})=0 &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m-(y_B-y_A)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m=y_B-y_A \\ &\Leftrightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \end{aligned}$$

II Systèmes d'équations

II.1 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition n°5. Qu'est-ce qu'un système ?

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$

où a, b, k, a', b' et k' sont des nombres réels.

Exemple n°3.

$\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ est un système d'inconnues x et y

Définition n°6. Qu'est-ce qu'une solution d'un système ?

Une solution d'un système de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $(x\ ;\ y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Exemple n°4.

Pour $\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$,

Le couple $(-2\ ;\ 5)$ est une solution de ce système. En effet :

$-(-2)+5=7$ ET $2\times(-2)+3\times5=11$

Par contre le couple $(2\ ;\ 9)$ n'est pas une solution de ce système. En effet :

$-2+9=7$ mais $2\times2+3\times9\neq11$

Dès que l'une, au moins, des deux équations n'est pas vérifiée, le couple n'est pas solution.

Définition n°7. Qu'est-ce-que résoudre un système ?

Résoudre un système c'est trouver TOUTES les solutions.

II.2 Systèmes et droites quel rapport ?

Remarque n°9.

Dans le système $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$

en posant $c=-k$ et $c'=-k'$, on peut écrire :

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

On peut alors considérer que :

$ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite d et que $a'x+b'y+c'=0$ est une équation cartésienne d'une droite d'

Une solution du système représente alors les coordonnées d'un point commun aux deux droites et par conséquent résoudre le système revient à trouver TOUS les points commun à d et d'.

Il y a donc trois cas de figure possibles :

▪ Les **droites sont sécantes**, elles n'ont qu'un seul point commun et donc le système possède **une est une seule solution** : Les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ du point d'intersection des deux droites.

L'ensemble des solutions est : $\{(\boldsymbol{x_0\ ;\ y_0})\}$

▪ Les **droites sont** (strictement) **parallèles**, elles n'ont aucun point commun et donc le système n'a **aucune solution**.

L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{\emptyset}$

▪ Les **droites sont confondues** (les deux équations définissent la même droite), il y a une **infinité de solutions** qui est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant $ax+by+c=0$ (ou $a'x+b'y+c'=0$ puisque c'est pareil…)

L'ensemble des solutions est : $\{(\boldsymbol{x\ ;\ y})\ |\ \boldsymbol{ax+bx+c=0}\}$

II.3 Comment résoudre un système ?

Méthode n°1. ***La méthode par substitution***

Résoudre le système : $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans l'une des équations

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(8+2x)=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On substitue à y sa valeur en fonction de x

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+16=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On simplifie

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-21}{7} \\ y=8+2x \end{cases}$ On résout l'équation d'inconnue x

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=8+2\times(-3) \end{cases}$ On remplace x par sa valeur dans l'autre équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ On détermine y

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-3}\ ;\ \mathbf{2})\}$

Méthode n°2. ***La méthode par combinaison***

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+3y=1 & (L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 & (2L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-11 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

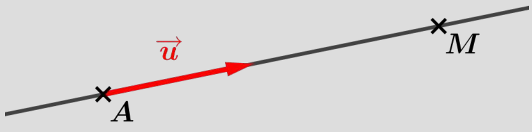
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ -4x+5\times(-1)=-13 \end{cases}$ On remplace y par sa valeur

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ On résout l'équation restante

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{2})\}$

III Le résumé du cours

On peut définir une droite à l'aide d'**un vecteur directeur** et d'un point $A(x_A\ ;\ y_A)$.



$M(x\ ;\ y)$ est sur la droite ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u})=0$

équation cartésienne

On peut définir une droite à l'aide d'une **équation cartésienne** : $\boldsymbol{a\,x+b\,y+c=0}$

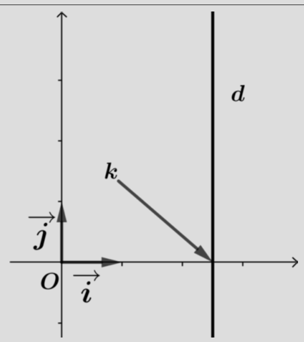
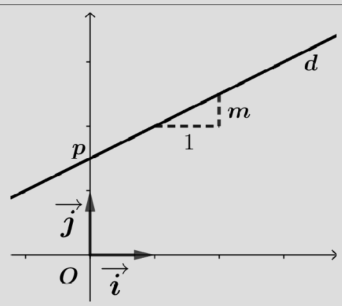
Un **vecteur directeur** est alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et la droite passe par le point :

$A\left(\dfrac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$, sinon par $A\left(0\ ;\ \dfrac{-c}{b}\right)$

Chaque droite possède une infinité d'équations cartésiennes (il suffit de multiplier $a\,,b$ et c par un même nombre non nul)

équation réduite

On peut réduire une équation cartésienne afin d'obtenir une **équation réduite**.

Si la droite est **PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme : $\boldsymbol{x=k}$	Si la droite est **NON PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme : $\boldsymbol{y=m\,x+p}$ m est la pente ou le coefficient directeur p est l'ordonnée à l'origine
Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ($\vec{u}=\vec{j}$)	Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$
	 Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ appartiennent à d alors : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Chercher les points communs à deux droites revient à résoudre un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** : $\begin{cases}\boldsymbol{a\,x+b\,y=k} & \text{une équation cartésienne de } d\\ \boldsymbol{a'\,x+b'\,y=k'} & \text{une équation cartésienne de } d'\end{cases}$

▪ Si les droites sont sécantes l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x_0\ ;\ y_0})\}$ où $(x_0\ ;\ y_0)$ représente les coordonnées du point d'intersection de d et d' (il y a donc une solution unique)

▪ Si les droites sont confondues, l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x\ ;\ y})\ |\ \boldsymbol{a\,x+b\,x=k}\}$ (il y a donc une infinité de solutions).

▪ Si les droites sont parallèles, l'ensemble des solutions est vide . (il n'y a aucune solution)

Il faut savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues, pour cela il faut être capable de reproduire les deux méthodes de la page 6.

ÉTUDE DE FONCTIONS

I Généralités

Définition n°1. ***Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de l'intervalle I. On dit que :

f admet un maximum en a sur I lorsque,
pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$

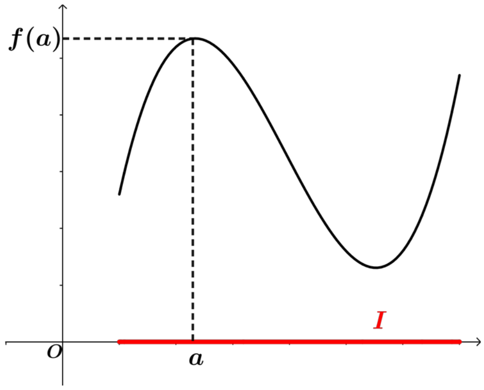
f admet un minimum en a sur I lorsque,
pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$

f admet un extremum en a sur I lorsque, f admet un maximum en a sur I ou f admet un minimum en a sur I.

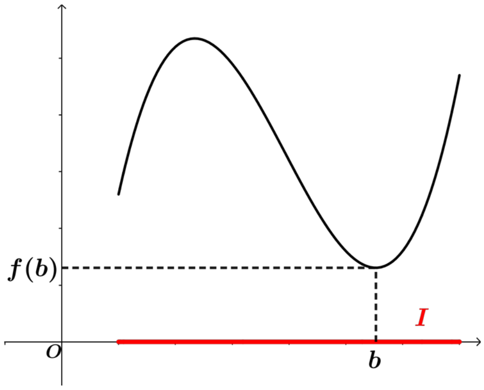
Remarque n°1.

Le pluriel de « extremum » c'est « extrema » mais vous verrez souvent « extremums »…

La fonction f possède un maximum sur I qui est $f(a)$ et qui est atteint en a.



La fonction f possède un minimum sur I qui est $f(b)$ et qui est atteint en b.



(f possède deux extrema sur I : un maximum et un minimum)

Définition n°2. ***Croissance, décroissance***

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I, $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I, $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Remarque n°2. ***Le tableau de variations***

On peut résumer les variations d'une fonction sous la forme d'un **tableau de variations**. Les variations peuvent sur lire graphiquement ou se déduire de propriétés et de calculs. On pose $I=[d , e]$

x	d		a		b		e
$f(x)$	$f(d)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(e)$

On trouve facilement les extrema avec le tableau de variations.

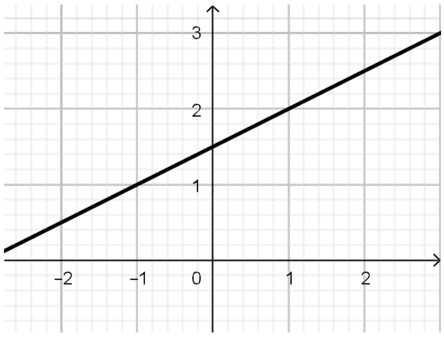
II Les fonctions de références

Les fonctions affines

$f(x)=mx+p$ avec m et p des réels

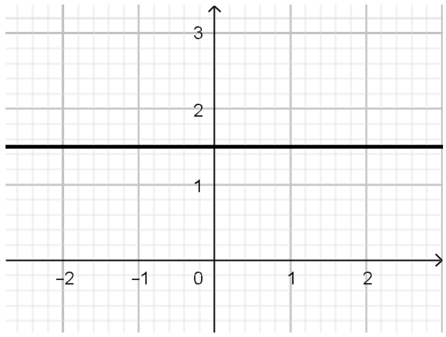
Le domaine de définition est : $D_f=\mathbb{R}$

$m>0$



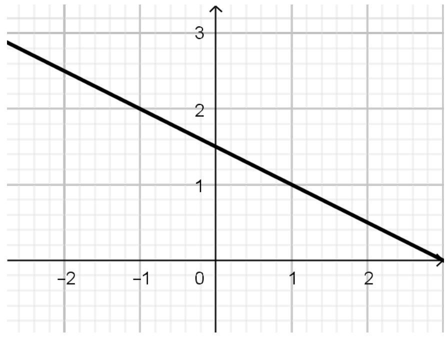
x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Variations	↗	0	↗
signes	−	0	+

$m=0$



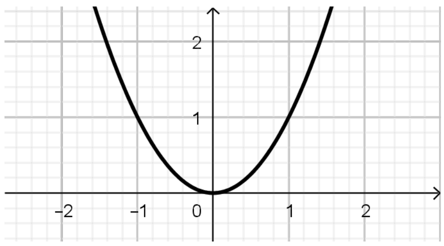
f est constante sur $\mathbb{R}$

$m<0$



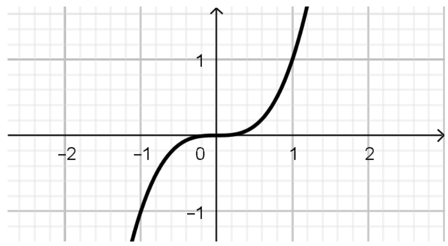
x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Variations	↘	0	↘
signes	+	0	−

La fonction carré : $f(x)=x^2$ $D_f=\mathbb{R}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	↘	0	↗
signes	+	0	+

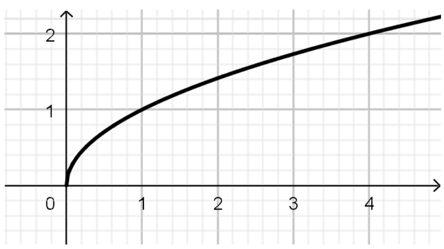
La fonction cube : $f(x)=x^3$ $D_f=\mathbb{R}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	↗	0	↗
signes	−	0	+

La fonction racine carrée: $f(x)=\sqrt{x}$

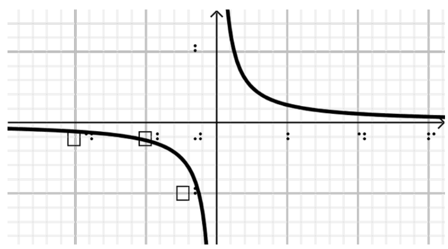
$D_f=[0\ ;+\infty[$



x	0	$+\infty$
Variations	↗	
signes	+	

La fonction inverse : $f(x)=\frac{1}{x}$

$D_f=]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	↘	‖	↘
signes	−	‖	+

ÉCHANTILLONNAGE

I Échantillon

Définition n°1. ***Notion d'échantillon***

Soit n un entier naturel non nul. On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante (c'est-à-dire que la probabilité de chaque issue ne dépend pas des résultats précédemment obtenus).
Un échantillon de taille n est constitué des résultats obtenus par n répétitions de cette expérience aléatoire.

Exemple n°1.

On considère l'expérience aléatoire suivante « On lance une pièce de monnaie et on regarde si elle tombe sur Pile ou Face. »
Cette expérience peut bien être répétée de manière indépendante car le résultat d'un lancer ne dépend pas des lancers précédents.
Si on répète dix fois cette expérience, les résultats obtenus constituent un échantillon de taille 10.
Par exemple, $(P\,;F\,;P\,;P\,;P\,;F\,;P\,;F\,;P\,;P)$ est un échantillon de taille 10.

Remarque n°1.

Lorsqu'on s'intéresse à un caractère d'une population, celle-ci est souvent trop grande pour pouvoir être étudiée dans sa totalité. On observe alors ce caractère sur une partie de cette population, choisie de manière aléatoire, en considérant que la population est suffisamment grande pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise. Les résultats obtenus constituent un échantillon.

Propriété n°1. ***Influence de la taille de l'échantillon (admise)***

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante.
Soit p la probabilité d'une issue ω .
Soit n un entier naturel non nul.
On considère un échantillon de taille n et on note f la fréquence de l'issue ω dans cet échantillon.
Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée f est proche de la probabilité p .

Exemple n°2.

On reprend l'expérience aléatoire de l'exemple précédent et on constitue un échantillon de taille 1000.
Dans cet échantillon, on observe que l'on obtient 531 fois l'issue « Pile ».
La fréquence observée de « Pile» pour cet échantillon est $f=\frac{531}{1000}=0{,}531$.
Si la pièce est bien équilibrée, la probabilité d'obtenir « Pile » est $p=0{,}5$.
On constate que, pour cet échantillon, la fréquence observée f est proche de la probabilité p .

Remarque n°2.

▪ La fréquence observée varie entre deux échantillons de même taille. Il est donc naturel que la fréquence observée f pour un échantillon ne soit pas exactement égale à la probabilité p .
▪ Plus la taille de l'échantillon est grande, plus il y a de chances que la fréquence observée soit proche de la probabilité.

II Principe de l'estimation

Propriété n°2. Fluctuation d'échantillonnage (admise)

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante et dont on connaît la probabilité p d'une issue ω .
On constitue un grand nombre d'échantillons de taille n sur lesquels on observe la fréquence f de réalisation de l'issue ω .
Plus la taille n des échantillons est grande, moins il y a de fluctuation de la fréquence observée f autour de la valeur de p .

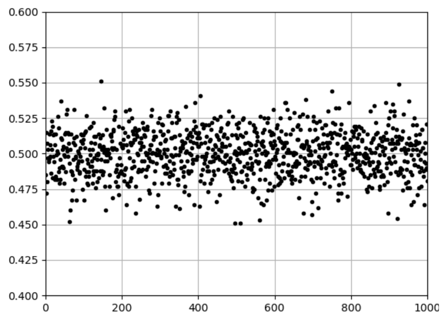
Exemple n°3.

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée et à noter si on retombe sur « Pile » ou « Face ».
On sait que la probabilité p d'obtenir « Face» est égale à 0,5 .

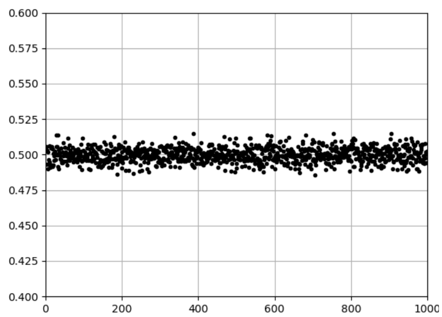
À l'aide d'un ordinateur, on simule 1 000 échantillons de taille 1 000 et, pour chaque échantillon on calcule la fréquence d'apparition de « Face ».
On peut observer que, sur ces échantillons environ 95% de ces fréquences appartiennent à l'intervalle $[0{,}47\ ;\ 0{,}53]$.

On simule à présent 1 000 échantillons de taille 10000 et, pour chaque échantillon, on calcule la fréquence d'apparition de « Face ».
On peut observer cette fois qu'environ 95 % de ces fréquences appartiennent à l'intervalle $[0{,}49\ ;\ 0{,}51]$ les fréquences observées sont plus proches de la valeur de p .

1000 échantillons de taille 1000



1000 échantillons de taille 10 000



Propriété n°3. Estimation d'une proportion (admise)

On considère une population dans laquelle on cherche la proportion des individus qui possèdent un certain caractère.
On prélève au hasard un échantillon de taille n dans la population et on observe la fréquence f du caractère dans cet échantillon. Cette fréquence f est une valeur approchée de p , appelée estimation ponctuelle de p .
Plus la taille de l'échantillon est grande, meilleure est l'estimation de p .

Exemple n°4.

Un candidat se présente à une élection dans une ville de 10000 habitants. Un sondage réalisé sur 1100 habitants montre que 517 personnes envisagent de voter pour ce candidat.

La fréquence observée sur cet échantillon est $f=\frac{517}{1100}=0{,}47$.

On peut estimer qu'une valeur approchée de la proportion des habitants souhaitant voter pour ce candidat est 47% . La qualité de cette estimation dépend de la taille de l'échantillon.

Remarque n°3.

De la même façon, pour une expérience aléatoire donnée, on peut estimer la probabilité d'une issue en observant sa fréquence dans un échantillon de taille suffisamment grande.

AIDE MÉMOIRE

I Langage ensembliste

I.1 Ensemble

Un ensemble est une collection d'éléments.

Exemple n°1.

$\{a;b;c\}$; $\{3,1;-2,1;8;25\}$ sont des ensembles finis.

$E=\{4;d;8;22\}$ permet d'alléger l'écriture en écrivant seulement E pour parler de l'ensemble décrit.

$\mathbb{N};\mathbb{Z};\mathbb{D};\mathbb{Q};\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles infinis.

I.2 Appartenance

Le symbole $\in$ se lit « appartient à »
Le symbole $\notin$ se lit « n'appartient pas à »

Exemple n°2.

$a \in \{a;b;c\}$; $4 \notin \{a;b;c\}$

$\{x\in\mathbb{Z}/\ x\geqslant 0\}$ on décrit un ensemble à l'aide d'une propriété (ici $\mathbb{N}$)

I.3 Inclusion

Soient E et F deux ensembles.
$E \subset F$ se lit « E est inclus dans F »
$E \not\subset F$ se lit « E n'est pas inclus dans F »

Remarque n°1.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

On écrit parfois $E\subseteq F$ ce qui permet d'insister sur le fait que E peut être égal à F.

On peut écrire les symboles dans l'autre sens : $F\supset E$ ou $F\supseteq E$

I.4 Intersection, Union, Complémentaire

Soient E ; F et G trois ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset G$
$E \cap F$ se lit « E inter F »
C'est l'ensemble des éléments appartenant à E **et** F.
$E \cup F$ se lit « E union F »
C'est l'ensemble des éléments appartenant à E **ou** F. (le « ou » est inclusif)
Vous trouverez parfois écrit : E **et/ou** F pour décrire l'union.
$\overline{E}$ se lit « E barre » ou encore le « complémentaire de E »
C'est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à E.
Si on veut rappeler que E est inclus dans G,
on écrit $G\setminus E$ à la place de $\overline{E}$

I.5 Quantificateurs

Le symbole $\exists$ se lit : « il existe »

Le symbole $\forall$ se lit : « Pour tout » ou « Quelque soit »

Exemple n°3.

$E=\{n \in \mathbb{N}\ /\ \exists\, p\in\mathbb{N}, n=2\,p\}$ E est l'ensemble des nombres pairs.

$\forall\ n \in E, \exists\ p \in \mathbb{N}, n=2p$ se lit :
Pour tout n appartenant à E, il existe un entier p tel que $n = 2p$ (c'est vrai!)

$\exists\ p \in \mathbb{N}, \forall\ n \in E, n=2p$ se lit :
Il existe un entier p et pour tout n appartenant à E , $n = 2p$ (c'est faux!)

LES ENSEMBLES DE NOMBRES

I Les définitions

Définition n°1. Les entiers naturels et les entiers relatifs

- L'ensemble des nombres entiers naturels $\{0;1;2;3;4;...\}$ se note $\mathbb{N}$
- L'ensemble des entiers relatifs $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$ se note $\mathbb{Z}$

Remarque n°1.

Tout entier naturel est un entier relatif, l'ensemble $\mathbb{N}$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

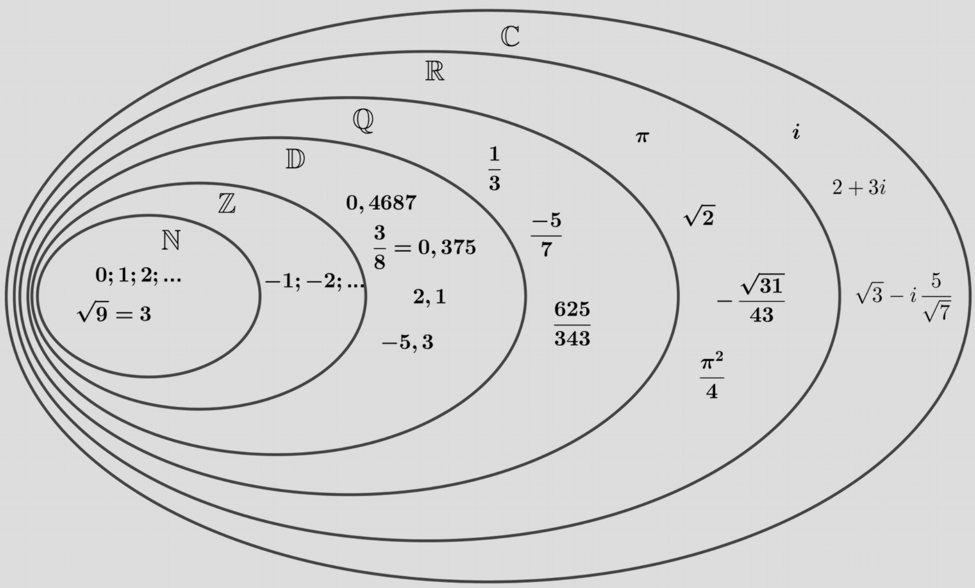
Définition n°2. Décimaux, rationnels et réels

En choisissant deux éléments $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$ et en posant $\dfrac{p}{q}$ on obtient ce qu'on appelle un nombre rationnel. **L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$**.

Le cas particulier où q est une puissance entière de 10 donne **l'ensemble des nombres décimaux** qui se note $\mathbb{D}$, et $\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$.
Comme tout nombre relatif n peut s'écrire $\dfrac{n}{1}$, on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$.
Malheureusement tous les nombres ne sont pas rationnels et on a du construire un ensemble plus grand qui les contient « tous ».
On l'appelle l'ensemble des **nombres réels** et on le note $\mathbb{R}$.

Définition n°3. Les nombres complexes

Enfin, on a constaté que même tous les nombres réels n'étaient pas suffisants, notamment pour résoudre certaines équations du troisième degré. Il a alors fallu imaginer un ensemble encore plus grand : L'ensemble des nombres complexes que l'on note $\mathbb{C}$.



$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

II Un peu d'histoire

Ensemble des entiers naturels
Notation $\mathbb{N}$
Vient du mot allemand « nummern » qui signifie «numéros»
Merci à Richard Dedeking (en 1888)

Ensemble des entiers relatifs
Notation $\mathbb{Z}$
Vient du mot allemand «zahl» qui signifie «nombre»
Merci à Nicolas Bourbaki. (à la même époque)

Ensembles des nombres décimaux
Notation $\mathbb{D}$
Vient du mot… « décimaux »
Est un cas particulier de nombres rationnels (ceux qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule)

Ensemble des nombres rationnels (résultat du quotient de deux entiers)
Notation $\mathbb{Q}$
Vient du mot italien « quoziente » qui signifie… « quotient »
Merci à Giuseppe Peano (en 1895)

Ensemble des nombres réels (tous ceux que vous avez pu utiliser jusqu'à présent)
Notation $\mathbb{R}$
Vient du mot… « réels »
Merci à Georg Cantor (à la même époque)

Ensemble des nombres complexes (vous les verrez bientôt…)
Notation $\mathbb{C}$
Il faut aussi noter la présence d'un nouveau symbole :
i qui évite d'écrire $\sqrt{-1}$ et qui fût introduit par Leonhard Euler en 1777.
La notation $a+ib$ étant elle due à Carl Friedrich Gauss en 1831.