

VARIABLES ALÉATOIRES E03C

EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret

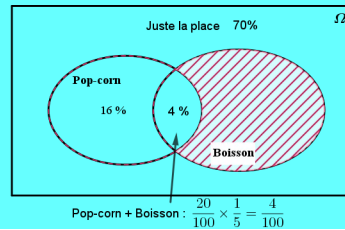
Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?

$$\frac{100}{100} - \left(\frac{70}{100} + \frac{20}{100} \right) = \frac{10}{100}$$

Ainsi 10 % des clients achètent une place avec seulement une boisson .



2) Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de R .

▪ On détermine Ω .

$Place\ seule(S)$, $Place + Boisson(B)$, $Place + Pop-corn(C)$

$Place + Pop-corn + Boisson(BC)$

$$\Omega = \{S ; B ; C ; BC\}$$

▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	S	B	C	BC	Total
Probabilité	0,7	0,1	0,16	0,04	1

▪ On détermine les images de chaque issue par R (autrement dit : on détermine $R(\Omega)$)

$$R(\{S\}) = 7 , R(\{B\}) = 7+3=10 , R(\{C\}) = 7+4 = 11 ,$$

$$R(\{BC\}) = 7+3+4 = 14$$

(Il y a quatre images possibles : 7 ; 10 ; 11 et 14)

▪ On regroupe les antécédents :

Ici, c'est immédiat.

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :

$$\square P(\{R = 7\}) = P(S) = 0,7$$

$$\square P(\{R = 10\}) = P(B) = 0,1$$

$$\square P(\{R = 11\}) = P(C) = 0,16$$

$$\square P(\{R = 14\}) = P(BC) = 0,04$$

Le plus gros du travail
est fait au brouillon

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

r_i	7	10	11	14	Total	
$P(\{R = r_i\})$	0,7	0,1	0,16	0,04	1	

3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?

Il s'agit d'abord de calculer $E(R)$ puis de multiplier par 2000 :

$$\begin{aligned} E(R) &= r_1 \times P(R = r_1) + r_2 \times P(R = r_2) + r_3 \times P(R = r_3) + r_4 \times P(R = r_4) \\ &= 7 \times 0,7 + 10 \times 0,1 + 11 \times 0,16 + 14 \times 0,04 \\ &= 4,9 + 1 + 1,76 + 0,56 \end{aligned}$$

$$E(R) = 8,22$$

Ainsi pour chaque spectateur, il peut espérer 8,22 €.

$$2000 \times E(R) = 2000 \times 8,22 = 16440$$

Pour 2000 spectateurs, il peut espérer un chiffre d'affaire de 16 440 € .

4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

Si on note X la variable aléatoire donnant le nouveau prix payé par un client du cinéma choisi au hasard alors :

$$X = R + 0,5$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(R + 0,5) = E(R) + 0,5 = 8,22 + 0,5 = 8,72$$

Il peut alors espérer un prix payé par client de 8,72 € .