FONCTIONS PART4 E01

EXERCICE N°3 tableur (Le corrigé)

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de x lecteurs est modélisé par la fonction CT définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ par : $CT(x)=0{,}4x^3-7x^2+60x+120$

On appelle coût marginal au rang x, noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque x pièces ont déjà été produites.

Ainsi $Cm(x)=CT(x+1)-CT(x)$

1) Calculer $Cm(5)$. Donner une interprétation.

$Cm(5)\ =\ CT(5+1)-CT(5)\ =\ \underbrace{CT(6)-CT(5)}_{\text{à la calculatrice}}\ =\ 19{,}4$

Quand 5 pièces ont été produites, le coût de fabrication de la pièce suivante est de 19,4 €

2) On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de x.

Pour limiter les calculs nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	x	CT(x)	CT(x+1)-CT(x)	Approximation par CT'(x)	écart avec la valeur réelle
2	0	120	53,4		
3	1	173,4	41,8		
4	2	215,2	32,6		
5					

2.a) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

=0,4*A3^3-7*A3^2+60*A3+120

2.b) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

=B3-B2

2.c) Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 MP3

Attention : Il ne peut y avoir de production d'un 501e lecteur, par conséquent sur la dernière seules les colonnes A et B devront être complétées.

Le fichier est ici

3) En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi, $Cm(x)\approx CT'(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 500$

3.a) Montrer que pour appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$, $Cm(x)=1{,}2x^2-12{,}8x+53{,}4$.

$$\begin{aligned}Cm(x)&=CT(x+1)-CT(x)\\&=0{,}4(x+1)^3-7(x+1)^2+60(x+1)+120-(0{,}4x^3-7x^2+60x+120)\\&=0{,}4x^3-5{,}8x^2+47{,}2x+173{,}4-(0{,}4x^3-7x^2+60x+120)\\&=0{,}4x^3-5{,}8x^2+47{,}2x+173{,}4-0{,}4x^3+7x^2-60x-120\\&=1{,}2x^2-12{,}8x+53{,}4\end{aligned}$$

Pour passer de la 2e à la 3e ligne (seuls le développement et la réduction de $CT(x+1)$ sont présentés):

$$0{,}4(x+1)^3-7(x+1)^2+60(x+1)+120\ =\ 0{,}4(x^3+3x^2+3x+1)-7(x^2+2x+1)+60(x+1)+120$$

$$=\ \underbrace{0{,}4x^3+1{,}2x^2+1{,}2x+0{,}4}_{\text{1ere 'parenthèse'}}\ \underbrace{-7x^2-14x-x}_{\text{2eme 'parenthèse'}}\ +\ \underbrace{60x+60}_{\text{3eme 'parenthèse'}}\ +120$$

$$=\ 0{,}4x^3-5{,}8x^2+47{,}2x+173{,}4$$

3.b) Calculer alors pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 500]$ $CT'(x)$ et proposer une approximation de $Cm(x)$.

$CT(x)=0{,}4x^3-7x^2+60x+120$

$CT'(x)=0{,}4\times 3x^2-7\times 2x+60\times 1+0$

$\boxed{CT'(x)=1{,}2x^2-14x+60}$

On peut approcher $Cm(x)$ avec $1{,}2x^2-14x+60$

3.c) Calculer $Cm(5)$ à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question 1. a.? Qu'en pensez-vous?

Calculons l'approximation de $Cm(5)$

$Cm(5) \approx 1{,}2\times5^2-14\times5+60 = 20$

L'erreur commise par rapport à la valeur de la question 1a) est alors :

$\frac{20-19{,}4}{19{,}4}\approx0{,}03$

Soir environ 3 %

Cette erreur nous semble acceptable.

3.d) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de $Cm(x)$ par $CT'(x)$?

=1,2*A2^2-14*A2+60

3.e) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

=(D2-C2)/C2

3.f) Observer l'intégralité de la colonne D.

Que pensez-vous de cette approximation proposée pour le coût marginal?

On constate que l'erreur d'approximation diminue en augmentant le nombre de pièces produites. Cette approximation est donc acceptable.