# FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E06

## EXERCICE N°1 *Deux nouvelles identités remarquables*

**Le but :**

Soit $x$ et $a$ deux nombres réels, $a \neq 0$ et $n$ un entier naturel , $n \geqslant 2$
On veut factoriser $x^n - a^n$

Pour $n = 2$ , on sait faire : $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$
Pour $n = 3$ , on connaît la méthode de Horner :

**1)** En remarquant que $a$ est une racine évidente de $x^3 - a^3$ , factoriser $x^3 - a^3$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $0$ | $0$ | $-a^3$ |
| $a$ | | $a \times 1 = a$ | $a \times a = a^2$ | $a \times a^2 = a^3$ |
| | $1$ | $0 + a = a$ | $0 + a^2 = a^2$ | $-a^3 + a^3 = 0$ |

Comme $a$ est une racine évidente de $x^3 - a^3$ , la méthode Horner nous donne :
$\boxed{x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)}$

Pour $n = 4$ , on peut … encore appliquer la méthode de Horner :

**2)** En remarquant que $a$ est une racine évidente de $x^4 - a^4$ , factoriser $x^4 - a^4$ .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-a^4$ |
| $a$ | | $a \times 1 = a$ | $a \times a = a^2$ | $a \times a^2 = a^3$ | $a \times a^3 = a^4$ |
| | $1$ | $0 + a = a$ | $0 + a^2 = a^2$ | $0 + a^3 = a^3$ | $-a^4 + a^4 = 0$ |

Comme $a$ est une racine évidente de $x^4 - a^4$ , la méthode Horner nous donne :
$\boxed{x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + a\,x^2 + a^2\,x + a^3)}$

***Remarque n°1.***

On pourrait factoriser $x^5 - a^5$ , mais on a compris que la méthode de Horner va fonctionner quelque soit la valeur de $n$ …

Faisons plutôt fonctionner la méthode sur un exemple :

**3)** Factoriser $x^7 - 5^7$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $5^7$ |
| $5$ | | $\underbrace{5 \times 1 = 5}_{5^1}$ | $\underbrace{5 \times 5 = 25}_{5^2}$ | $5 \times 5^2 = 5^3$ | $5^4$ | $5^5$ | $5^6$ | $5^7$ |
| | $1$ | $0 + 5 = 5$ | $0 + 5^2 = 5^2$ | $0 + 5^3 = 5^3$ | $5^4$ | $5^5$ | $5^6$ | $0$ |

Comme $5$ est une racine évidente de $x^7 - 5^7$ , la méthode Horner nous donne :
$\boxed{x^7 - 5^7 = (x-5)(x^6 + 5\,x^5 + 25\,x^4 + 125\,x^3 + 625\,x^2 + 3125\,x + 15625)}$

Passons à la justification de la formule générale :
(pour que les notations suivantes soient correctes, on suppose $n>2$ ) :

**4)** Développer et réduire l'expression suivante :
$(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1})$

$$\begin{aligned}
&(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1})\\
=\ & x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ldots+a^{n-3}x^3+a^{n-2}x^2+a^{n-1}x\\
&\quad -ax^{n-1}-a^2x^{n-2}-\ldots-a^{n-3}x^3-a^{n-2}x^2-a^{n-1}x-a^n\\
=\ & x^n+(a-a)x^{n-1}+(a^2-a^2)x^{n-2}+\ldots+(a^{n-3}-a^{n-3})x^3+(a^{n-2}-a^{n-2})x^2+(a^{n-1}-a^{n-1})x-a^n\\
=\ & x^n-a^n
\end{aligned}$$

***Remarque n°2.***

On dit que les termes se télescopent (retenez cela pour la suite de vos études…)

On retient donc notre première nouvelle identité remarquable :

Afin de pouvoir tenir compte du cas $n=2$ , on préfère simplifier un peu la formule :

$$\boxed{x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})}$$

Le cas particulier où $a = 1$

**5)** Réécrire la formule précédente pour $a = 1$ (que l'on retiendra également)

Pour $a = 1$ ,

$$\boxed{x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}$$

On applique :

**6)** Factoriser $x^{11}-1$

$x^{11}-1 = (x-11)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

Jouer avec les méthodes

**7)** En remarquant $x^6-a^6 = (x^3)^2-(a^3)^2$ proposer une factorisation $x^6-a^6$

$$\begin{aligned}
x^6-a^6 &= (x^3)^2-(a^3)^2\\
&= (x^3-a^3)(x^3+a^3)\\
&= (x-a)(x^2+ax+a^2)(x^3+a^3)\\
&= \underbrace{(x-a)(x^2+ax+a^2)}_{\textit{ok facile}}\underbrace{(x+a)(x^2-ax+a^2)}_{\textit{mais pourquoi ?}}
\end{aligned}$$

$x^3+a^3 = x^3-(-a)^3$
$-a$ est une racine évidente (*oui je sais, il est énervant ce mot « évidente »*)
et la méthode de Horner donne… à vous !