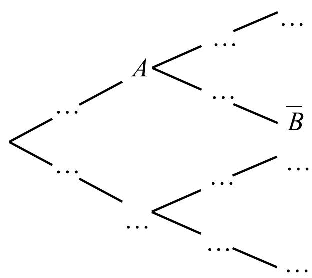
# VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

## EXERCICE N°2 *Revoir l'espérance (Le corrigé)*

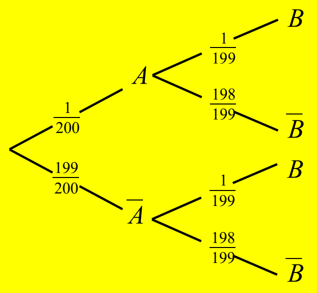
200 billets de loterie valant 2 euros chacun sont vendus. Seulement deux billets permettent de gagner un lot : l'un permet de gagner 100 euros, l'autre permet de gagner 50 euros, les autres ne rapportent rien du tout.

On a acheté deux billets. On considère les événements suivants :

- $A$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- $B$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».




**1)** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.




**2)** On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.
$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.
$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.
$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.

*Indication : il est important de prendre en compte l'argent dépensé pour acheter les billets.*

**3)** Recopier et compléter le tableau suivant.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | | | | |
| Probabilités correspondantes | | | | |

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | $(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $(\overline{A} \cap B)$ | $(A \cap \overline{B})$ | $(A \cap B)$ |
| Probabilités correspondantes | 0,99 | 0,005 | $\frac{99}{19900}$ $\frac{1}{200}\times\frac{198}{199}$ | $\frac{1}{39800}$ $\frac{1}{200}\times\frac{1}{199}$ |

**4)** Calculer l'espérance de $X$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = -4\times 0{,}99 + 46\times 0{,}005 + 96\times\frac{99}{19900} + 146\times\frac{1}{39800} \approx -3{,}25$$

$$\boxed{E(X) \approx -3{,}25}$$

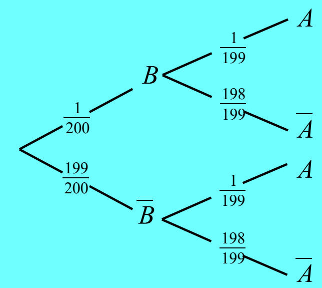
Cela signifie que, $\boxed{\text{en jouant à ce jeu, on perd en moyenne } 3{,}25 \text{ €}}$

C’est bien gentil tout ça mais si on commence par $B$ ?

On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.
$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.
$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.
$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.




On a échangé les positions de $A$ et $B$

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Événements correspondants | $(\overline{B} \cap \overline{A})$ | $(B \cap \overline{A})$ | $(\overline{B} \cap A)$ | $(B \cap A)$ |
| Probabilités correspondantes | 0,99 | $\frac{99}{19900}$ <br> $\frac{1}{200}\times\frac{198}{199}$ | 0,005 | $\frac{1}{39800}$ <br> $\frac{1}{200}\times\frac{1}{199}$ |

$$E(X) = -4\times0{,}99 + 46\times\frac{99}{19900} + 96\times0{,}005 + 146\times\frac{1}{39800} \approx -3{,}25$$

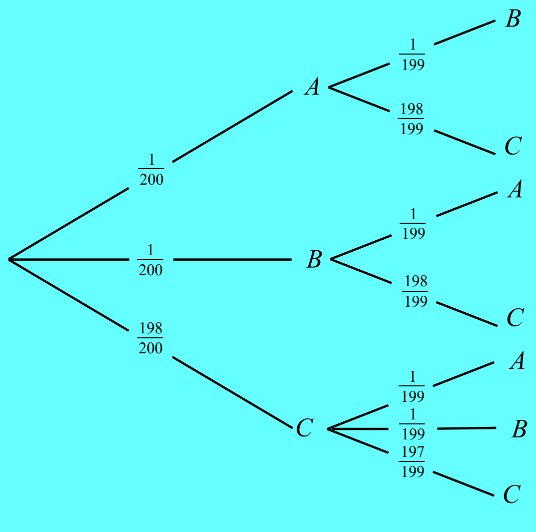
Bon les probabilités des événements $\{X=46\}$ et $\{X=96\}$ sont inversée mais on a presque la même espérance (vous pouvez regarder les millièmes, il y a une différence).

C’est quand même étrange !

Hé mais moi j’ai pas modélisé comme ça !
J’ai noté :

- $A$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- $B$ : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».
- $C$ : « l'un de nos billets fait partie des billets perdants ».

…




Dans ce cas, c’est encore un peu différent car on donne implicitement une importance à l’ordre des billets

On note $X$ le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ?

Les valeurs possibles sont $-4$ ; $46$ ; $96$ et $146$

$-4$ : On dépense deux fois 2 € sans rien gagner.

$46$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 50 €.

$96$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 100 €.

$146$ : On dépense deux fois 2 € et on gagne 150 €.

| Valeurs de X | $X=-4$ | $X=46$ | $X=96$ | $X=146$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilités correspondantes | $\frac{19503}{19900}$ $\frac{198}{200}\times\frac{197}{199}$ | $\frac{99}{9950}$ | $\frac{99}{9950}$ | $\frac{1}{19900}$ |

$$P(X=46) = \frac{1}{200}\times\frac{198}{199}+\frac{198}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times198}{200\times199} = \frac{99}{9950}$$

$$P(X=96) = \frac{1}{200}\times\frac{198}{199}+\frac{198}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times198}{200\times199} = \frac{99}{9950}$$

$$P(X=146) = \frac{1}{200}\times\frac{1}{199}+\frac{1}{200}\times\frac{1}{199} = \frac{2\times1}{200\times199} = \frac{1}{19900}$$

L’espérance vaut alors : $-4\times\frac{19503}{19900} + 46\times\frac{99}{9950} + 96\times\frac{99}{9950} + 146\times\frac{1}{19900} = -2{,}5$

Oui mais alors qui a raison ?

Place à la simulation : [un petit programme en Python]

Vous constaterez que c’est la dernière version qui représente le mieux la situation…

En conclusion : Le choix de la modélisation est important, vous rencontrerez (peut-être) d’autres exemples où le modèle choisi est correct mais ne représente pas la réalité.
Un autre exemple est celui du lancer de deux dés dont on fait la somme.
Si les dés sont de la même couleur on aura tendance à modéliser sans tenir compte de l’ordre des dés (un peu comme dans cet exercice) et si les dés sont de couleurs différentes alors on tiendra compte de l’ordre des dés (un peu comme dans la dernière version).
Les deux modélisations sont incompatibles et là encore la simulation donne raison au second modèle.