LES VECTEURS E03

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(-3\ ;\ 6)$ et $C(-7\ ;\ -1)$

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

L'idée est d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore (si vous l'avez vu comme cela) ou la caractérisation par l'égalité de Pythagore (si vous l'avez vu comme cela).

Pour cela, on a besoin de AB^2 ; BC^2 et AC^2 que l'on va obtenir en calculant les carrés des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Avant cela, on aura donc besoin de calculer les coordonnées de ces vecteurs.

▪ On sait que :

▫ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 6-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (-2)^2+4^2 = 4+16 = 20$

▫ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -7-(-3) \\ -1-6 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (-4)^2+(-7)^2 = 16+49 = 65$

▫ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7-(-1) \\ -1-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (-6)^2+(-3)^2 = 36+9 = 45$

▫ de plus $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 20+45 = 65$

▪ On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

▪ Ce qui équivaut, d'après l'égalité de Pythagore, au fait que le triangle ABC est rectangle en A .

$\|\overrightarrow{AB}\|$ est la norme (longueur) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc on peut écrire AB à la place de $\|\overrightarrow{AB}\|$ et donc AB^2 à la place de $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ (pour la fin de la rédaction).

En revanche, on n'écrira pas $\overrightarrow{AB}^2$ qui n'a pas encore de sens pour nous.