

## LA DÉRIVATION E02C

### EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  (autrement dit :  $x$  est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ), non nul ( $*$ )) et soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture  $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$  en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir :  $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$  a pour expression conjuguée  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ )

1) Justifier que  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$  ne s'annule pas.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $h \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sqrt{x+h} > 0 \text{ et } \sqrt{x} > 0$$

Donc  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} > 0$

cqfd

2) Simplifier l'expression :  $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction racine carrée.

Quand  $h$  tend vers zéro,  $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$  tend vers  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , le nombre dérivé en  $x$  de la fonction racine carrée est  $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

4) À quoi servait la question 1) ?

Nous avons été amenés à diviser par l'expression  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ , il fallait donc s'assurer que cela était toujours possible.

## LA DÉRIVATION E02C

### EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ , soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x+h \in I$ . Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = k \times u(x)$

1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?

La fonction  $u$  est définie sur  $I$ .

Si  $x+h \notin I$  alors on ne peut pas calculer son image par  $u$ .

2) Simplifier l'expression  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k u(x+h) - k u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $f : x \mapsto k \times u(x)$ .

Pour tout  $x \in I$ ,

quand  $h$  tend vers zéro,  $k \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$  tend vers  $\boxed{k \times u'(x)}$

# LA DÉRIVATION E02C

## EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

### Préliminaires

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, démontrer que  $ab - cd = d(a-c) + a(b-d)$ .

$$d(a-c) + a(b-d) = ad - cd + ab - ad = ab - cd$$

### La preuve

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$ , tel que  $x+h \in I$ .

**1)** Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur  $I$ .

Si  $x+h \notin I$  alors on ne peut pas calculer son image par  $f$  ou  $g$ .

**2)** En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ \frac{(fg)(x+h) - fg(x)}{h} &= \overbrace{\frac{a}{h}}^{f(x+h) - f(x)} \overbrace{\frac{b}{h}}^{g(x+h) - g(x)} - \overbrace{\frac{c}{h}}^{f(x) - f(x)} \overbrace{\frac{d}{h}}^{g(x) - g(x)} \\ &= \overbrace{\frac{d}{h}}^{g(x)} \overbrace{\frac{(a-c)}{h}}^{[f(x+h) - f(x)]} + \overbrace{\frac{a}{h}}^{f(x+h)} \overbrace{\frac{(b-d)}{h}}^{[g(x+h) - g(x)]} \\ &= g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

**3)** En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $(fg): x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$ .

Pour tout  $x \in I$ , quand  $h$  tend vers zéro,

$$g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ tend vers } [g(x)f'(x) + f(x)g'(x)].$$

# LA DÉRIVATION E02C

## EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1)  $f_1: x \mapsto 5 ; f_2: x \mapsto \frac{15}{7} ; f_3: x \mapsto \sqrt{3} ; f_4: x \mapsto 2\pi ; f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et leur fonction dérivée est la fonction nulle.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_1'(x) = 0, f_2'(x) = 0, f_3'(x) = 0, f_4'(x) = 0, f_5'(x) = 0.$$

2)  $g_1: x \mapsto x+2 ; g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à 1.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g_1'(x) = 1, g_2'(x) = 1.$$

3)  $g_3: x \mapsto 4x+5 ; g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$  ;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante  $k$  ( $k=4$  pour  $g_3$  et  $k=\sqrt{7}$  pour  $g_4$ ) et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à  $k$ .

Ainsi :  $g_3': x \mapsto 4$  et  $g_4': x \mapsto \sqrt{7}$

4)  $h_1: x \mapsto 3x^2-4 ; h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1 ; h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$

▪ Pour  $h_1$  :

$h_1$  est la forme  $3 \times u + v$

où  $u: x \mapsto x^2$  et  $v: x \mapsto -4$

Or :

$u$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

$v$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

$h_1$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h_1'(x) = 3u'(x)+v'(x)$$

$$= 3 \times 2x + 0$$

$$\boxed{h_1'(x) = 6x}$$

▪ Pour  $h_2$  :

$h_2$  est la forme  $4 \times u + 5 \times v + w$

où  $u: x \mapsto x^2$ ,  $v: x \mapsto x$  et  $w: x \mapsto -1$

Or :

$u$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

$v$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

$w$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

$h_2$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h_2'(x) = 4u'(x)+5 \times v'(x)+w'(x)$$

$$= 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$

$$\boxed{h_2'(x) = 8x+5}$$

■ Pour  $h_3$  :

$h_3$  est la forme  $-2,5 \times u + 6 \times v + w$   
où  $u: x \mapsto x^2$ ,  $v: x \mapsto x$  et  $w: x \mapsto -1$

Or :

$u$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$   
 $v$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$   
 $w$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

$h_3$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= -2,5u'(x) + 6v'(x) + w'(x) \\ &= -2,5 \times 2x + 6 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

$$h_3'(x) = -5x + 6$$

5)  $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3 - 4x^2 + 3x - 7\sqrt{11}$  ;  $h_5: x \mapsto -\pi x^3 + \sqrt{5}x^2 - \frac{14}{3}x + 33$

■ Pour  $h_4$  :

$h_4$  est la forme  $\frac{5}{2} \times u - 4 \times v + 3 \times w - t$

où  $u: x \mapsto x^3$ ,  $v: x \mapsto x^2$ ,  $w: x \mapsto x$  et  $t: x \mapsto -7\sqrt{11}$

Or :

$u, v, w$  et  $t$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  
 $u'(x) = 3x^2$ ,  $v'(x) = 2x$ ,  $w'(x) = 1$  et  $t'(x) = 0$

Donc

$h_4$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h_4'(x) &= \frac{5}{2} \times u'(x) - 4 \times v'(x) + 3 \times w'(x) - t'(x) \\ &= \frac{5}{2} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 - 0 \end{aligned}$$

$$h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2 - 8x + 3$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

■ Pour  $h_5$  :

$h_5$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h_5$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h_5'(x) = \pi \times 3x^2 + \sqrt{5} \times 2x - \frac{14}{3} \times 1 + 0$$

$$h_5'(x) = 3\pi x^2 + 2\sqrt{5}x - \frac{14}{3}$$

On fait bien attention  
à arrêter le radical  
avant le  $x$

6)  $h_6: x \mapsto 3x^n + 2x^2 + \frac{3}{x}$  ;  $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x} + 8x^{15} - \frac{4}{x}$  ;  $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x} + 7|x| - \frac{7}{x}$

■ Pour  $h_6$  :

$h_6$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ , donc  $h_6$  est définie et dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :

$x: \mapsto x^n$  et  $x: \mapsto x^2$  sont définies et dérивables sur  $\mathbb{R}$  qui contient  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  et  $x: \mapsto \frac{1}{x}$  n'est définie et dérivable que sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

On ne garde que la partie commune pour tout le monde :

$$]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \cap \mathbb{R} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[,$$

$$h_6'(x) = 3 \times nx^{n-1} + 2 \times 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_6'(x) = 3nx^{n-1} + 4x - \frac{3}{x^2}$$

▪ Pour  $h_7$  :

$h_7$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ , donc  $h_7$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[,$$

$$h_7'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times 15x^{14} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_7'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}$$

▪ Pour  $h_8$  :

$h_8$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ , donc  $h_8$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[,$$

$$h_8'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 7 \times 1 - 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_8'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7$$

On a « mis la constante à la fin »

$$7) \quad h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7) \quad ; \quad h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour  $h_9$  :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2 - 21x + 8x - 28 \\ &= 6x^2 - 13x - 28 \end{aligned}$$

Ainsi,  $h_9$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h_9$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$h_9'(x) = 6 \times 2x - 13 \times 1 - 0$$

$$h_9'(x) = 12x - 13$$

▪ Pour  $h_{10}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 28x + 49 \end{aligned}$$

Ainsi,  $h_{10}$  est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h_{10}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$h_{10}'(x) = 4 \times 2x - 28 \times 1 - 0$$

$$h_{10}'(x) = 4x - 28$$

## LA DÉRIVATION E02

### **EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  (autrement dit :  $x$  est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ), non nul ( $*$ )) et soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture  $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$  en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir :  $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$  a pour expression conjuguée  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ )

- 1) Justifier que  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$  ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression :  $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

### **EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5**

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ , soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x+h \in I$ .

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
- 2) Simplifier l'expression  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $f : x \mapsto k \times u(x)$ .

### **EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)**

#### Préliminaires

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, démontrer que  $ab - cd = d(a-c) + a(b-d)$ .

#### La preuve

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $h \in \mathbb{R}$ , tel que  $x+h \in I$ .

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
  - 2) En utilisant les préliminaires, montrer que :
- $$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$ .

### **EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction**

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1)  $f_1 : x \mapsto 5$  ;  $f_2 : x \mapsto \frac{15}{7}$  ;  $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$  ;  $f_4 : x \mapsto 2\pi$  ;  $f_5 : x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2)  $g_1 : x \mapsto x+2$  ;  $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3)  $g_3 : x \mapsto 4x+5$  ;  $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$  ;
- 4)  $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$  ;  $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$  ;  $h_3 : x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5)  $h_4 : x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$  ;  $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6)  $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$  ;  $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$  ;  $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7)  $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$  ;  $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

n est un entier naturel