LA FONCTION EXPONENTIELLE

I Introduction

Nous allons tenter de résoudre une équation fonctionnelle, c'est à dire que l'on cherche toutes les fonctions vérifiant une condition donnée. On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante :

La condition

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

En français, on cherche les fonctions qui sont égales à leur dérivée et pour lesquelles l'image de 0 vaut 1 .

Propriété n°1. ***Si une telle fonction existe alors elle ne s'annule pas***

Si f est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :
$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) \neq 0$

preuve :

▪ Soit f une telle fonction. Construisons la fonction h définie également sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ h(x) = f(x) \times f(-x)$

▪ Montrons que h est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto -x$ et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ dont leur composée $g : x \mapsto f(-x)$ l'est aussi.

h étant le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▪ Montrons que h' est nulle :

On peut écrire que $h = f \times g$ et donc $h' = f' \times g + f \times g'$.

C'est à dire que

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R} \\ &h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \\ & = f'(x) f(x) - f(x) f'(x) && (\text{car } g'(x) = -f'(-x)) \\ & = f(x) f(x) - f(x) f(x) && (\text{ car } f' = f\ ) \\ & = 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante égale à 1 .

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

De plus $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ h(x) = 1$

▪ Montrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors on aurait $h(x) = 0$ ce qui est impossible.

Propriété n°2. ***Si une telle fonction existe alors elle est unique***

Si f est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :
$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ alors f est unique.

preuve :

▪ Soit f et g deux fonctions vérifiant la condition. Nous allons montrer qu'alors $f = g$.

▪ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(h est bien définie car g ne s'annule pas d'après la propriété n°1)

▪ Montrons que h' est nulle :

f et étant des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas, leur quotient $h = \dfrac{f}{g}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et ,

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(car } f \text{ et } g \text{ vérifient la condition)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante, égale à 1.
La dérivée de h est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h est constante.
De plus $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$.
▪ Montrons que $f = g$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$
Or , $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
Donc $f(x) = g(x)$

Remarque n°1. ***Une telle fonction existe bien et nous allons l'étudier.***
La preuve est admise en première mais nous en verrons une idée…

II La fonction Exponentielle et quelques-unes de ses propriétés

Définition n°1.

On appelle fonction Exponentielle et on note $\exp$ l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$$

Propriété n°3. ***La fonction exp ne n'annule pas***

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } \exp(x) \neq 0}$$

preuve :

Faite en introduction

Propriété n°4. ***L'exponentielle de la somme égale le produit des exponentielles***

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

preuve :

Soit $b \in \mathbb{R}$, et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) \end{cases}$

▪ Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto x+b$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc leur composée aussi. f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$.
▪ Montrons que $f' = f$
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = f(x)$$

▪ Montrons que $f(0) = 1$

$$f(0) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$$

▪ Utilisons l'unicité de la fonction exponentielle pour montrer que $f = \exp$.

La fonction f vérifie la condition $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c'est donc la fonction exp.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \exp(x)$

ce qui s'écrit encore :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$ *cqfd*

Propriété n°5. ***l'inverse de l'exponentielle égale l'exponentielle de l'opposé***

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)}$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

puis en divisant chaque membre par le nombre $\exp(x)$ qui est non nul :

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *cqfd*

Propriété n°6. ***La fonction exp est strictement positive sur*** $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0}$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Propriété n°7. ***La fonction exp et ses puissances n[ième]***

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$\boxed{(\exp(a))^n = \exp(na)}$$

preuve :

▪ Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(na)$.

▪ On a :

$u_0 = \exp(0 \times a) = 1$

▪ Et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = u_n \times \exp(a)$

▪ On reconnaît une suite suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \exp(a)$.

▪ Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (\exp(a))^n$

En identifiant terme à terme, on obtient le résultat. *cqfd.*

III Le comportement de la fonction exponentielle.

Propriété n°8. ***La fonction exp est strictement croissante sur*** $\mathbb{R}$

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
autrement dit :
Pour tous nombres réels a et b : $\boxed{a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)}$

preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ (d'après la propriété n°6)
La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante $\mathbb{R}$.

Remarque n°2.

La fonction exponentielle conserve donc les inégalités, ce qui signifie que l'on peut remplacer « $<$ » par « $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$ ».
Cela sera utile pour les inéquations.

Remarque n°3.

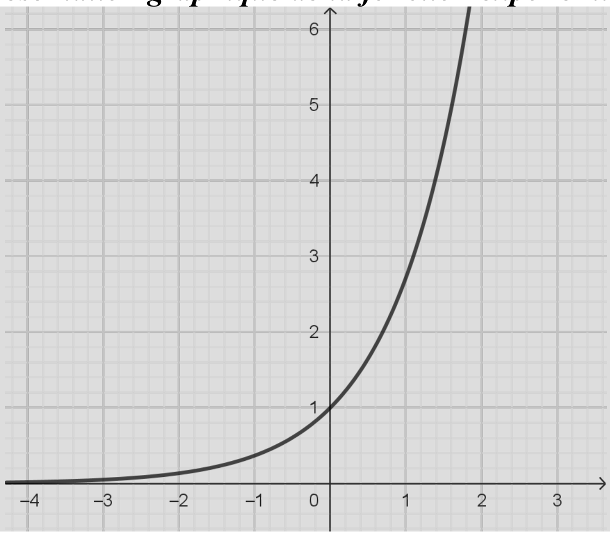
La propriété n°8, nous permet d'affirmer que si un nombre admet un antécédent par la fonction exp alors cet antécédent est unique.

Propriété n°9. ***Corollaire de la propriété n°8***

Pour tous nombres réels a et b :

$$\boxed{\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b}$$

Connaissance n°1 ***La représentation graphique de la fonction exponentielle.***



IV Une nouvelle notation pour la fonction exponentielle

Remarque n°4.

Les propriétés n°4, n°5 et n°8 nous rappelle les propriétés sur les puissances.
Par exemple,
$7^{2+3} = 7^2 \times 7^3$ ressemble beaucoup à $\exp(2+3) = \exp(2)\times\exp(3)$
Comme $7^1 = 7$, on est tenté de regarder $\exp(1)$. Ce nombre n'est malheureusement pas entier, ce n'est même pas une fraction (vous le démontrerez un jour) mais il est aussi important que le nombre π . Pour cela, on va lui donner un nom.

Définition n°2.

- On note e le nombre $\exp(1)$
- On a : $\boxed{e \approx 2{,}71828}$
- Pour tout réel x , on pose $\boxed{e^x = \exp(x)}$

Remarque n°5. Résumé des propriétés avec la nouvelle notation

Soit a et b des réels et n un entier naturel .

$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$, $\boxed{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$, $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ et $\boxed{e^{na} = \left(e^a\right)^n}$

$\boxed{a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)}$ et aussi avec $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$

$\boxed{\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b}$

V Le résumé du cours

La définition de exp

On appelle fonction Exponentielle et on note exp l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$$

exp ne s'annule pas

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) \neq 0}$$

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)}$$

exp est strictement positive

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) > 0}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$\boxed{(\exp(a))^n = \exp(na)}$$

exp est strictement croissante

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Équations et Inéquations

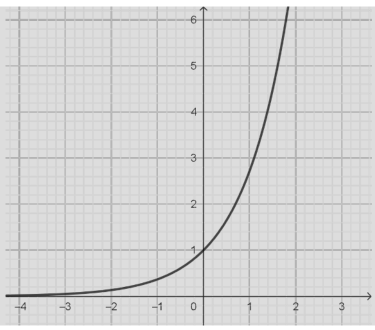
Pour tous nombres réels a et b :

$\boxed{\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b}$

$\boxed{a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)}$

et aussi avec $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$

Représentation graphique de exp



Nouvelle notation de exp

- On note e le nombre $\exp(1)$
- On a : $\boxed{e \approx 2{,}71828}$
- Pour tout réel x , on pose $\boxed{e^x = \exp(x)}$

Propriétés algébriques de exp

Soit a et b des réels et n un entier naturel .

$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$, $\boxed{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$, $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ et $\boxed{e^{na} = (e^a)^n}$

Équations et Inéquations

$\boxed{a < b \Leftrightarrow e^a < e^b}$ et aussi avec $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$

$\boxed{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$