Probabilités conditionnelles

I Les définitions

On considère une expérience aléatoire dont l'univers, noté Ω, est fini et à partir duquel on définit une loi de probabilité.
Soit A et B deux événements de l'univers Ω.

Probabilités conditionnelles

Définition n°1. Événement contraire

On note $\overline{A}$ (et on lit « A barre ») l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

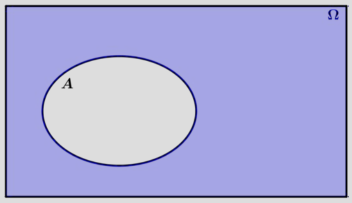

Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition n°2. Intersection de deux événements

On note $A \cap B$ (et on lit « A inter B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus à la fois dans A et B

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	
$\overline{A}$		

La case coloriée correspond à $A \cap B$

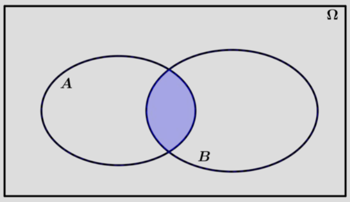

Diagramme de Venn illustrant $A \cap B$

Définition n°3. ***Union de deux événements***

On note $A \cup B$ (et on lit « A union B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou B.

	B	$\overline{B}$
A	$A \cup B$	$A \cup B$
$\overline{A}$	$A \cup B$	

Les cases coloriées correspondent à $A \cup B$

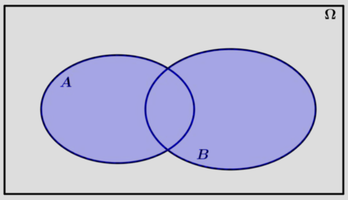

Diagramme de Venn illustrant $A \cup B$

Remarque n°1.

Attention, c'est un « ou inclusif » : l'événement peut appartenir à A, à B mais aussi à A et B en même temps

Probabilités conditionnelles

Définition n°4. Probabilité conditionnelle

On appelle **probabilité de** B **sachant** A et on note $p_A(B)$ le nombre défini par :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}}$$

Propriété n°1.

$$\boxed{p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

preuve :

$$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}}{\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}\times\frac{Card(\Omega)}{Card(A)} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)} = p_A(B)$$

Remarque n°2. ***rappel***

$Card(A)$ est le nombre d'événements élémentaires contenus dans A

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E01

EXERCICE N°1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire comptant 160 issues possibles et vérifiant :

$Card(A \cap B)=35$; $Card(A)=50$ et $Card(B)=70$

1) Représenter la situation sous forme de tableau

2) Calculer $p_A(B)$ et $p_B(A)$

EXERCICE N°2

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0{,}7$ et $Card(B)=50$

Calculer $Card(A \cap B)$

EXERCICE N°3

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0{,}1$ et $Card(B)=8510$

Calculer $Card(A \cap B)$

EXERCICE N°4

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0{,}5$ et $Card(A \cap B)=14$

Calculer $Card(B)$

EXERCICE N°5

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0,3$ et $Card(A \cap B)=21$

Calculer $Card(B)$

II Calculer et interpréter une probabilité conditionnelle.

Méthode n°1.

Un magasin de sport à la montagne dispose de 400 matériaux de glisse. Il propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.
Son matériel est constitué de 45 % de skis de piste, 36 % de snowboards et le reste de skis de randonnée.
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé.
Il a été constaté que la moitié des skis de piste, deux tiers des snowboards et le quart des skis de randonnée ont été abîmés pendant la journée.
Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise leur suivi.

On considère les événements suivants :

- P : « La fiche est celle d'une paire de skis de piste » ;
- S : « La fiche est celle d'un snowboard » ;
- R : « La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée » ;
- A : « Le matériel a été abîmé et nécessite une réparation » .

On représente la situation sous la forme d'un tableau :

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Résultat du contrôle \ Matériel	P	S	R	Total
A	90	96	19	205
$\overline{A}$	90	48	57	195
Total	180	144	76	400

$$p_A(R) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(A)} = \frac{19}{205} \approx 0,0927$$

Sachant que le matériau a été endommagé, il y a environ 9,27 % de chance que ce soit des skis de randonnée.

$$p_R(A) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(R)} = \frac{19}{76} = 0,25$$

Il y a une chance sur quatre qu'un ski de randonné soit endommagé

$$p_{\overline{A}}(S) = \frac{Card(\overline{A} \cap R)}{Card(\overline{A})} = \frac{48}{195} \approx 0,2462$$

On tire au hasard un matériau qui n'a pas été endommagé, la probabilité que ce soit un snowboard est d'environ 24,62 %.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E02

EXERCICE N°1

Pour le baptême de son fils, Camille a confectionné des paquets de dragées. La répartition des dragées est donnée dans le tableau ci-dessous. On choisit une dragée au hasard.

Y = dragées / X = couleur	Chocolat	Amandes	Total
Bleu	45	30	75
Rose	35	30	65
Total	80	60	140

1) Déterminer la probabilité d'avoir des dragées au chocolat parmi les paquets bleus.
2) Déterminer la probabilité d'avoir des paquets roses parmi les dragées aux amandes.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E02

EXERCICE N°2

On considère deux événements A et B d'une expérience aléatoire. L'effectif de chaque événement est donné dans le tableau ci-après.

	A	$\overline{A}$	Total
B	45		
$\overline{B}$		15	37
Total		21	

1) Recopier et compléter le tableau.
2) $Card(\overline{A})$, $Card(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $Card(\overline{A} \cap B)$.
3) Calculer $p_A(\overline{B})$. Interpréter les résultats.

EXERCICE N°3

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire comportant 100 issues possibles et vérifiant :

$Card(A \cap B)=21$, $Card(A)=40$ et $Card(B)=25$.

1) Calculer $p_A(B)$.
2) Calculer $p_B(A)$
3) Calculer $Card(A \cup B)$
4) Calculer $Card(A \cap \overline{B})$

EXERCICE N°4

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire comportant 90 issues possibles et vérifiant :

$Card(A \cap B)=10$, $Card(A)=20$ et $Card(B)=15$.

1) Calculer $Card(A \cup B)$
2) Calculer $Card(A \cap \overline{B})$
3) Calculer $Card(\overline{A \cap B})$
4) Calculer $p_A(B)$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03

EXERCICE N°1

Un commerçant vend deux types de guirlandes électriques pour Noël, des guirlandes d'intérieur et des guirlandes d'extérieur. Certaines guirlandes se révèlent défectueuses. Il possède un stock de 400 guirlandes.
On admet que :

- 6 % des guirlandes proposées à la vente sont défectueuses;
- 30 % de toutes les guirlandes sont d'extérieur;
- 5 % des guirlandes d'extérieur sont défectueuses.

1) Établir le tableau croisé d'effectifs.
2) Déterminer le cardinal de l'événement : « Les guirlandes sont d'intérieur et non défectueuses».
3) Calculer puis interpréter $p_{intérieur}(Défectueuses)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03

EXERCICE N°2

Une entreprise possède deux *serres* A et B qui produisent chacune deux types de fleurs (des tulipes ou des narcisses). Lors du printemps 2018, elle a vendu 350 kg de fleurs.
On sait que:
- la fréquence de la production des tulipes est 0,72;
- $P_{Tulipes}(Serre\ \ A)=0{,}35$;
- $p_{Narcisses}(Serre\ \ B)=0{,}8$.

1) Recopier et compléter le tableau croisé des effectifs suivant.

Y = serre / X = fleurs	*A*	*B*	Total
Tulipes			
Narcisses			
Total			

2) Établir le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.
3) En déduire le pourcentage des fleurs venant de la *serre* A .

EXERCICE N°3

Lors d'un contrôle antidopage à l'issue d'une compétition sportive, les sportifs peuvent être déclarés positifs (qu'ils soient dopés ou non) ou négatifs (qu'ils soient dopés ou non). L'étude porte sur 50 personnes.

Soit n l'effectif des dopés parmi les sportifs contrôlés

On sait que:

• 95 % des sportifs dopés sont déclarés positifs;

• 10 % des sportifs non dopés sont déclarés positifs

1) Établir le tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation.

2) Calculer, en fonction de n , l'effectif de l'événement « Le comité a commis une erreur ».

3) On choisit au hasard un sportif ayant été contrôlé

3.a) Montrer que la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé est de : $p_{Positif}(Dopé) = \dfrac{0{,}95\,n}{5+0{,}85\,n}$

3.b) Résoudre . $p_{positif}(Dopé) > 0{,}95$

3.c) Interpréter ce résultat.