

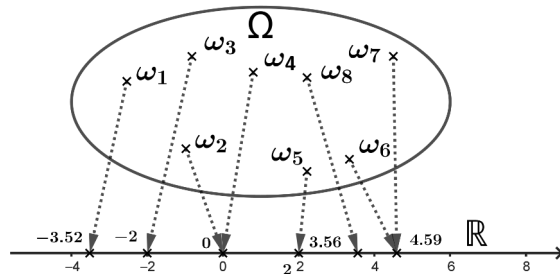
VARIABLES ALÉATOIRES

I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

Définition n°1. Variable aléatoire

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans \mathbb{R} , c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Exemple n°1.



$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ici,

$$X(\omega_1) = -3,52 :$$

L'issue ω_1 a pour image -3,52 par la variable aléatoire X

$$X(\omega_2) = 0 , \text{ etc....}$$

Remarque n°1.

Toutes les issues doivent avoir une image par X (car X est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

VARIABLES ALÉATOIRES

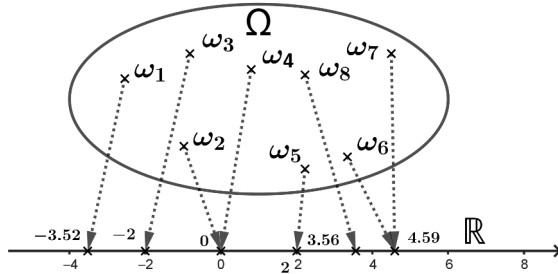
Connaissance n°1

Des notations

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $\{X = a\}$ l'événement « X prend la valeur a »
- $\{X \leq a\}$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

Exemple n°2.



$\{X = -3,52\}$ est en fait $\{\omega_1\}$,

$\{X = 0\}$ est en fait $\{\omega_2, \omega_4\}$

$\{X = 1,5\}$ est en fait \emptyset

$\{X = -18\}$ aussi...

$\{X \leq 0\}$ est en fait $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$\{X < 0\}$ est en fait $\{\omega_1, \omega_3\}$

(il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

VARIABLES ALÉATOIRES

Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de Ω , on peut parler de leur probabilité.

Par exemple :

$$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) \dots$$

C'est pénible toutes ces accolades !

Connaissance n°2 Convention d'écriture

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leq a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de Ω , on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

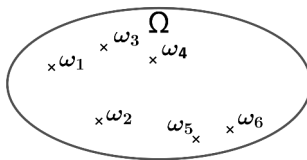
II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k .

Exemple n°3.



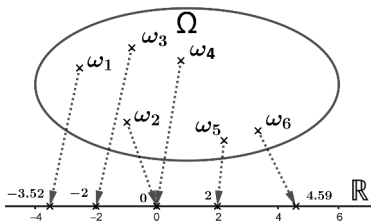
Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total

1



Loi de probabilité de X

x_i	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$

Total

1

- $P(X = 4,59) = 0,18$, $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1 *Méthode : Déterminer une loi de probabilité*

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de X .

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine Ω .

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$$X(\{1\}) = -5, \quad X(\{2\}) = 2, \quad X(\{3\}) = 1,$$

$$X(\{4\}) = 2, \quad X(\{5\}) = 1 \quad \text{et} \quad X(\{6\}) = 2$$

(Il y a trois images possibles : -5 ; 1 et 2)

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -5\} = \{1\}$$

$$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$$

$$\{X = 2\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	1	2	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	

Le plus gros du travail
est fait au brouillon

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°2 ***Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)***

Voici un jeu :

- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis on jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

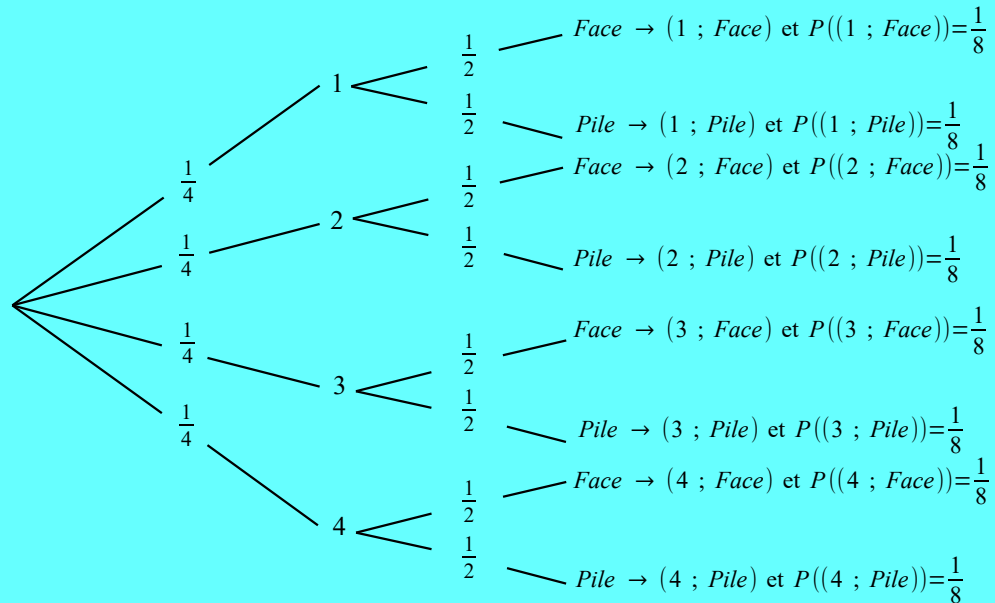
Donner la loi de probabilité de X .

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine Ω

Une issue de Ω est donc un couple, par exemple : $(2 ; Face)$, $(5 ; Pile)$ etc...

Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1; Face); (2; Face); (3; Face); (4; Face); (1; Pile); (2; Pile); (3; Pile); (4; Pile)\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	(1; Face)	(2; Face)	(3; Face)	(4; Face)	(1; Pile)	(2; Pile)	(3; Pile)	(4; Pile)	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

Issue	(1; Face)	(2; Face)	(3; Face)	(4; Face)	(1; Pile)	(2; Pile)	(3; Pile)	(4; Pile)
$X(Issue)$	-6 $= -4 - 2$	8 $= 10 - 2$	8 $= 10 - 2$	8 $= 10 - 2$	-6 $= -4 - 2$	3 $= 5 - 2$	-6 $= -4 - 2$	3 $= 5 - 2$

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -6\} = \{(1; Face)\} \cup \{(1; Pile)\} \cup \{(3; Pile)\}$$

$$\{X = 3\} = \{(2; Pile)\} \cup \{(4; Pile)\}$$

$$\{X = 8\} = \{(2; Face)\} \cup \{(3; Face)\} \cup \{(4; Face)\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-6	3	8	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1	

Le plus gros du travail est fait au brouillon

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On n'écrit pas
les accolades

On fait une partie :

- 1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
- 2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
- 3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
- 4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

On n'écrit pas les accolades

- 1) Déterminer $P(X = 8)$.
- 2) Déterminer $P(X \leq 0)$.
- 3) Déterminer $P(X > 7)$.
- 4) Déterminer $P(X < 20)$.

III *Espérance d'une variable aléatoire réelle*

Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour X ? »

Définition n°3. *Espérance d'une variable aléatoire réelle*

Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{k=i}^k x_i P(X=x_i)$$

Remarque n°5.

$$\sum_{k=i}^k x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Exemple n°4. *dans le contexte de l'exemple n°3*

$$E(X) = -3,52 \times P(X=-3,52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4,59 \times P(X=4,59)$$

$$E(X) = -3,52 \times 0,1 + (-2) \times 0,25 + 0 \times 0,35 + 2 \times 0,12 + 4,59 \times 0,18$$

$$E(X) = 0,2142$$

L'espérance de X vaut 0,2142.

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (*On dit alors que la variable aléatoire est centrée*)

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°2 *Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)*

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,00009	0,00001

Ce jeu est-il équitable ?

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».

On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le « triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.

Déterminer, en fonction de m , le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.



VARIABLES ALÉATOIRES

Propriété n°1. *espérance et transformation affine*

Comme la somme des $P(X=x_i)$ vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i)}{\sum_{i=1}^k P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités respectives.

Or :

- Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre b à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de b .
- Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul a toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par a .

Au final on peut écrire : $E(aX+b) = a \times E(X) + b$

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°1 *Linéarité de l'espérance*

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -4 ; 5 ; 10 et 100 , et telle que $E(Y) = 8$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 3Y + 60$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

1.b) Déterminer $E(Z)$.

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -4Y + 5$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

2.b) Déterminer $E(R)$.

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret

Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

- 1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?
- 2) Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de R .
- 3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?
- 4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

IV Variance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de X autour de $E(X)$. Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

Définition n°4. Variance d'une variable aléatoire réelle

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ et soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k .

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ c'est à dire :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X = x_2) + \dots + (x_k - E(X))^2 \times P(X = x_k)$$

Exemple n°5. Dans le contexte de l'exemple n°3

x_i	-3,52	-2	0	2	4,59	Total
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18	1

On calcule d'abord l'espérance :

$$E(X) = 0,2142 \text{ (on l'a fait dans l'exemple n°4)}$$

Puis on calcule la variance :

$$V(X) = (-3,52 - 0,2142)^2 \times 0,1 + (-2 - 0,2142)^2 \times 0,25 + \dots + (4,59 - 0,2142)^2 \times 0,18$$

$$V(X) \approx 6,4654$$

Propriété n°2. variance et transformation

Soit a et b deux nombres réels. $V(aX + b) = a^2 \times V(X)$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^k (a x_i + b - E(aX + b))^2 \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (a x_i + b - a E(X) - b)^2 \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (a (x_i - E(X)))^2 \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k a^2 (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) = a^2 \times V(X) \end{aligned}$$

Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimerait que $E(X)$ et $V(X)$ aient la même unité.

En effet si X est par exemple en euro alors $E(X)$ sera en euro mais $V(X)$ sera en « euro au carré »...

On va donc « se débarrasser de ce carré »...

V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition n°5. écart-type d'une variable aléatoire réelle

Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple n°6. Toujours dans le contexte de l'exemple n°3

On avait $V(X) \approx 6,4654$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,5427$

Remarque n°9. écart-type et transformation affine

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

VI Formule de Koenig-Huygens

Remarque n°10.

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

▪ Gardons à l'esprit que $E(X)$ est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^k E(X)^2 \times P(X=x_i) = E(X)^2 \times \sum_{i=1}^k P(X=x_i) = E(X)^2 \times 1$$

▪ Dans la même idée :

$$E(-2XE(X)) = \sum_{i=1}^k -2x_i E(X) \times P(X=x_i) = -2E(X) \times \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = -2E(X) \times E(X)$$

▪ On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

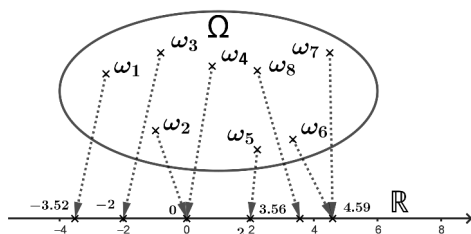
$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + \underbrace{E(X)^2}_{+E(X)^2} = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

VII Le résumé du cours



Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si

X est une application de Ω dans \mathbb{R} ,
c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω
un nombre réel.

**Convention
d'écriture**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

▪ $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »

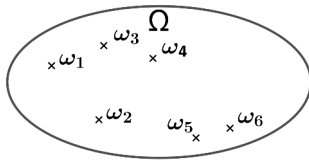
▪ $P(X \leq a)$ la probabilité de l'événement
« X prend une valeur inférieure ou égale à a »

▪ on fait la même chose avec $<$, $>$ et \geq

**Loi de
probabilité**

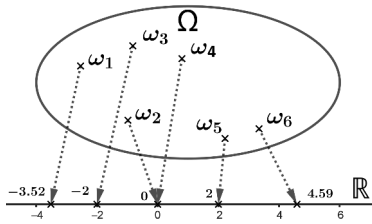
Soit n et k des entiers naturels ($k \leq n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$
un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs
 x_1, x_2, \dots, x_k .

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque
 $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k .



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1



Loi de probabilité de X

x_i	-3,52	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4,59) = 0,18$, $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

Espérance de X

$$E(X) = \sum_{k=i}^k x_i P(X=x_i)$$

ou encore :

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Variance de X

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

ou encore :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

Écart-type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Les propriétés à retenir

a et b sont des nombres réels.

$$E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$$

Transformation affine, changement de variable (selon les livres)

Formule de Koenig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$