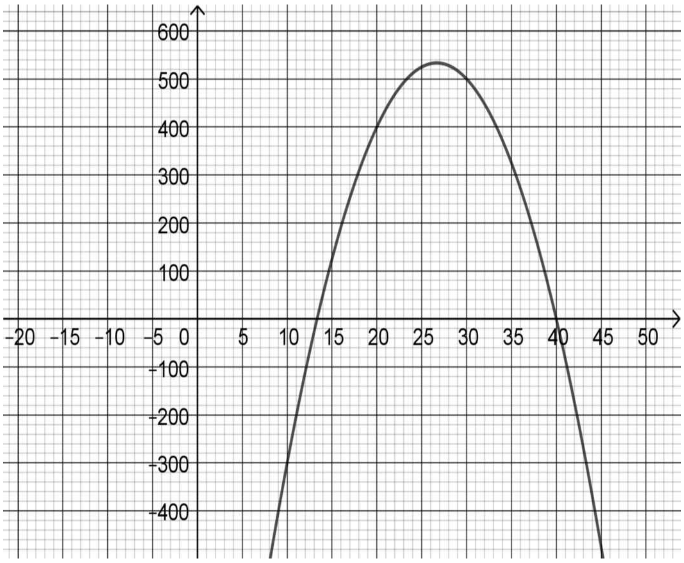
FONCTIONS PART4 E07

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)*** ***E3C*** ***T1CMATH00099***

Une entreprise fabrique des lampes solaires. Elle ne peut pas produire plus de 5000 lampes par mois.
Le résultat qu'elle peut réaliser en un mois, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction b dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On rappelle que lorsque le résultat est positif, on l'appelle bénéfice. L'axe des abscisses indique le nombre de lampes produites et vendues exprimé en centaines.



En utilisant le graphique :

1) Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$\boxed{b(10)=-300}$

En produisant 1000 lampes l'entreprise perd 30000 €

2) Déterminer avec la précision que la lecture graphique permet, le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.

L'entreprise peut réaliser un **bénéfice maximal** d'environ **54000 €** en produisant environ **2500 lampes**

3) La fonction b définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ est définie par l'expression suivante : $b(x)=-3x^2+160x-1600$.

3.a) Montrer que $b(x)=(x-40)(-3x+40)$.

$$\begin{aligned}(x-40)(-3x+40) &= \\ &= -3x^2+40x+120x-1600 \\ &= -3x^2+160x-1600 \\ &= b(x)\end{aligned}$$

Ainsi $b(x)=(x-40)(-3x+40)$

3.b) Résoudre $b(x)=0$

$b(x)=0 \Leftrightarrow (x-40)(-3x+40)=0$

Or : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'au moins de ses facteurs est nul.

$x-40=0$ ou $-3x+40=0$

$x=40$ $\quad$ $-3x=-40$ $\quad x=\dfrac{-40}{-3}=\dfrac{40}{3}$

Les solutions de l'équation $b(x)=0$ sont : $\boxed{\dfrac{40}{3} \text{ et } 40}$

3.c) Donner la valeur exacte du maximum de la fonction et en quel nombre il est atteint.

Commençons par déterminer la dérivée b' de la fonction b :

$b(x)=-3x^2+160x-1600$

$b'(x)=-3\times 2x+160\times 1-0$

$\boxed{b'(x)=-6x+160}$

Si la fonction b admet un maximum en x_0 alors $b'(x_0)=0$.

On va donc résoudre $b'(x)=0$

$$b'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+160= \Leftrightarrow -6x=-160 \Leftrightarrow x=\frac{-160}{-6} \Leftrightarrow x=\frac{80}{3}\approx 26{,}667$$

De plus :

$$b\left(\frac{80}{3}\right) = -3\times\left(\frac{80}{3}\right)^2+160\times\left(\frac{80}{3}\right)-1600 = -\frac{6400}{3}+\frac{12800}{3}-\frac{4800}{3} = \frac{1600}{3}\approx 533{,}33$$

On en déduit, à la vue du graphique, et de ce qui précède que le maximum est atteint en $\boxed{x_0=\frac{80}{3}}$ et qu'il vaut $\boxed{b\left(\frac{80}{3}\right) = \frac{1600}{3}}$

On a procéder ainsi pour illustrer la propriété n°1

On pouvait aussi dresser le tableau de variations et l'utiliser pour répondre à la question.

FONCTIONS PART4 E07

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)* **E3C** **T1CMATH00099**

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction r définie sur l'intervalle $[200\ ;\ 400]$ par $r(x)=-0{,}01x^3+4x^2$.

1) On admet que la fonction r est dérivable sur $[200\ ;\ 400]$ et on note sa dérivée r' . Calculer $r'(x)$ et montrer que $r'(x)=x(-0{,}03x+8)$

Dans un premier temps :

$r(x)=-0{,}01x^3+4x^2$

$r'(x)=-0{,}01\times3x^2+4\times2x$

$\boxed{r'(x)=-0{,}03x^2+8x}$

Dans un second temps :

$$x(-0{,}03x+8) = -0{,}03x^2+8x$$
$$= r'(x)$$

Ainsi on a bien $r'(x)=x(-0{,}03x+8)$

2) Donner le tableau de signe de la fonction dérivée r' sur l'intervalle [200 ; 400].

$x>0$ quand $x>0$ (bah oui...)

$-0{,}03x+8>0 \Leftrightarrow -0{,}03x>-8 \Leftrightarrow x<\dfrac{-8}{-0{,}03}=\dfrac{800}{3}$ (On préfère avoir une fraction)

x	200		$\frac{800}{3}$		400
x		+	|	+	
$-0{,}03x+8$		+	0	$-$	
$r'(x)$		+	0	$-$	

3) En déduire le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle [200 ; 400].

x	200		$\frac{800}{3}$		400
$r(x)$	80000	↗	≈ 94815	↘	0

4) Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle [200 ; 400] ? En quelle valeur est-il atteint ?

Le **maximum** vaut **environ 94815** et

est **atteint en** $\mathbf{\dfrac{800}{3}}\approx 266{,}67$

5) Pour vérifier la solution de l'équation sur $r'(x)$ l'intervalle [200 ; 400], on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8) > 0:
        x = x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que renvoie l'instruction : `balayage(1)` ?

Elle renvoie le couple (266 ; 267) qui indique que la solution est comprise entre 266 et 267.

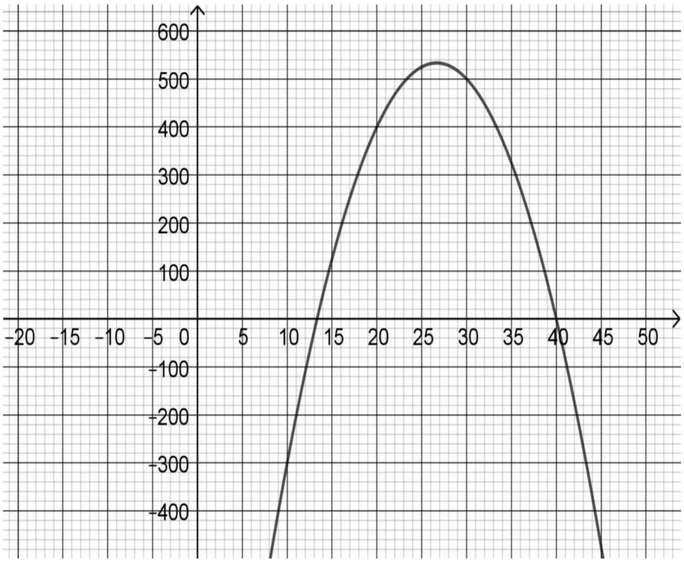
```
>>> balayage(1)
(266, 267)
```

FONCTIONS PART4 E07

EXERCICE N°1 ***E3C*** ***T1CMATH00099***

Une entreprise fabrique des lampes solaires. Elle ne peut pas produire plus de 5000 lampes par mois.
Le résultat qu'elle peut réaliser en un mois, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction b dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On rappelle que lorsque le résultat est positif, on l'appelle bénéfice. L'axe des abscisses indique le nombre de lampes produites et vendues exprimé en centaines.



En utilisant le graphique :

1) Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2) Déterminer avec la précision que la lecture graphique permet, le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.

3) La fonction b définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est définie par l'expression suivante : $b(x)=-3x^2+160x-1600$.

3.a) Montrer que $b(x)=(x-40)(-3x+40)$.
3.b) Résoudre $b(x)=0$
3.c) Donner la valeur exacte du maximum de la fonction b et en quel nombre il est atteint.

EXERCICE N°2 ***E3C*** ***T1CMATH00099***

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction r définie sur l'intervalle $[200\,;\,400]$ par $r(x)=-0{,}01x^3+4x^2$.

1) On admet que la fonction r est dérivable sur $[200\,;\,400]$ et on note sa dérivée r' . Calculer $r'(x)$ et montrer que $r'(x)=x(-0{,}03x+8)$

2) Donner le tableau de signe de la fonction dérivée r' sur l'intervalle [200 ; 400].

3) En déduire le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle [200 ; 400].

4) Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle [200 ; 400] ? En quelle valeur est-il atteint ?

5) Pour vérifier la solution de l'équation sur $r'(x)$ l'intervalle [200 ; 400], on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8) > 0:
        x = x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que renvoie l'instruction : `balayage(1)` ?