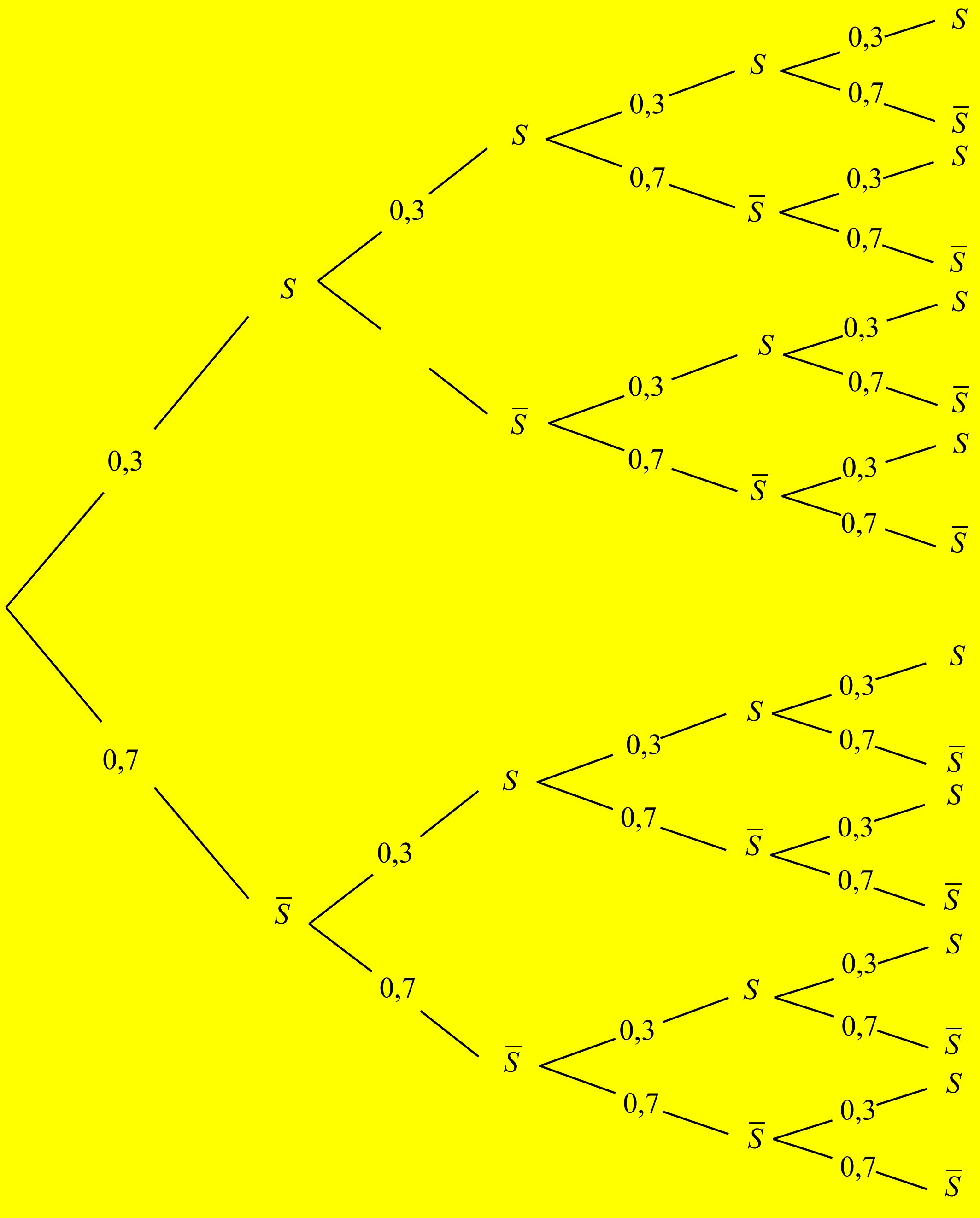
VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°1 *Le savoir-faire minimal (Le corrigé)*

1) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,3$.

1.a) Dresser l'arbre de probabilités associé à cette expérience aléatoire.

Notons S le succès à l'épreuve de bernoulli qui est ici répétée 4 fois pour obtenir le schéma de Bernoulli réprésenté ci-dessous :



1.b) Dresser et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n=4$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Les cases ne sont qu'un repère visuel et ne sont pas nécessaire sur une copie.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

1.c) En déduire les expressions de $P(X=k)$ pour k entier variant de 0 à 4.

$P(X=0) = \mathbf{1} \times 0{,}3^0 \times 0{,}7^4$
$P(X=1) = \mathbf{4} \times 0{,}3^1 \times 0{,}7^3$
$P(X=2) = \mathbf{6} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2$
$P(X=3) = \mathbf{4} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^1$
$P(X=4) = \mathbf{1} \times 0{,}3^4 \times 0{,}7^0$

1.d) Calculer $P(X \geqslant 2)$. Arrondir le résultat à 10^{-2}.

$P(X \geqslant 2) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = 0{,}3483$

$\boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}35}$

2) On lance deux dés. On note X l'écart entre la plus grande et la plus petite des deux valeurs obtenues.

2.a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

Les valeurs possibles sont : $\boxed{0 \; ; \; 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \text{ et } 5}$

Quelques exemples : 5 et 5 : $5-5=0$; 6 et 5 : $6-5=1$ … 6 et 1 : $6-1=5$

2.b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Il s'agît de donner les valeurs possibles de X accompagnées de leur probabilité. Pour cela, on fait (en général) un tableau.

Avant cela, il nous faut déterminer ces probabilités…

On pourrait utiliser un arbre commençant par 6 branches donnant chacune naissance à 6 autres branches (vous pouvez le faire;)) mais ici, on va plutôt utiliser un tableau.

(Observez l'alignement des valeurs qui simplifie le comptage)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

On a 36 issues possibles (notre dénominateur avant simplication) et il suffit compter les issues favorables pour k (ce qui donnera notre numérateur avant simplication).

Il n'y a plus qu'à donner le tableau qui va décrire notre loi de probabilité.

$X=k$	0	1	2	3	4	5	total
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1
	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{36}{36}$

2.c) Déterminer l'espérance de X.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} \approx 1{,}94$$

$\boxed{E(X) \approx 1{,}94}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(12\ ;\ 0{,}4)$.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Ici on utilise la calculatrice…

Casio : [C'est ici]

Ti : [C'est ici]

1) Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

$\boxed{P(X=0)\ \approx\ 0{,}002}$; $\boxed{P(X=1)\ \approx\ 0{,}017}$ et $\boxed{P(X=2)\ \approx\ 0{,}064}$

2) En déduire $P(X\leqslant 3)$.

$P(X\leqslant 3)\ =\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\ \approx\ 0{,}225$

« En déduire » car il ne reste que $P(X=3)$ à calculer.

On peut aussi le faire directement à la calculatrice.

$\boxed{P(X\leqslant 3)\ \approx\ 0{,}225}$

3) Calculer $P_{X\leqslant 8}(X\geqslant 2)$.

$$P_{X\leqslant 8}(X\geqslant 2) = \frac{P(\{X\leqslant 8\}\ \cap\ \{X\geqslant 2\})}{P(X\leqslant 8)} = \frac{P(2\leqslant X\leqslant 8)}{P(X\leqslant 8)} = \frac{P(X\leqslant 8)-P(X<2)}{P(X\leqslant 8)}$$

Vous remarquerez, à la deuxième égalité, la présence d'accolades. Elles devraient apparaître partout mais quand la notation est suffisamment claire on s'en passe. En revanche, elles sont nécessaires ici pour écrire l'intersection.

Vous remarquerez également le « $X<2$ » dans la dernière égalité…

Pour obtenir $\{2\leqslant X\leqslant 8\}$ il faut enlever $\{X=0\},\{X=1\}$ *mais pas* $\{X=2\}$

$$P_{X\leqslant 8}(X\geqslant 2)\ =\ \frac{P(X\leqslant 8)}{P(X\leqslant 8)}-\frac{P(X<2)}{P(X\leqslant 8)}\ =\ 1-\frac{P(X<2)}{P(X\leqslant 8)}\ \approx\ 0{,}98$$

4) Calculer $P_{X>5}(X\leqslant 10)$.

$$P_{X>5}(X\leqslant 10) = \frac{P(\{X\leqslant 10\}\ \cap\ \{X>5\})}{P(X>5)} = \frac{P(5<X\leqslant 10)}{P(X>5)} = \frac{P(X\leqslant 10)-P(X\leqslant 5)}{1-P(X\leqslant 5)}$$

L'événement contraire à $\{X>5\}$ est $\overline{\{X>5\}}=\{X\leqslant 5\}$

$\boxed{P_{X>5}(X\leqslant 10)\ \approx\ 0{,}999}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°3 **(Le corrigé)**

Sofia dispose de 10 paires chaussettes, dont 8 paires n'ont aucun trou. Elle décide qu'elle fera une lessive dans une semaine. En attendant, chaque matin de la semaine, elle prend une nouvelle paire chaussettes au hasard dans son placard pour les porter ce jour-là.
On note X le nombre de paires de chaussettes sans trou qu'elle portera cette semaine.
La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

Sofia ne fera sa lessive que dans une semaine, donc, chaque jour le nombre de paires de chaussettes diminue. La probabilité une paire de chaussettes sans trou change d'un jour à l'autre.
Cette expérience correspond à un tirage sans remise et le nombre de succès (X ici) ne suit donc pas une loi binomiale.

Si sofia avait lavé ses chaussettes tous les jours (je sais je sais…) alors X aurait suivi une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=0,8$
Le tirage aurait alors été avec remise et cela aurait assuré l'indépendance des épreuves de Bernoulli successives.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Il arrive qu'un œuf de poule contienne deux jaunes. D'après un producteur d'œufs, 5 % des œufs que ses poules pondent contiennent deux jaunes. On achète une boîte de six œufs à ce producteur et on note X le nombre d'œufs contenant deux jaunes dans cette boîte.
La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

On peut raisonnablement supposer que le nombre d'œufs du producteur est grand (plusieurs milliers). Le fait de choisir un œuf pour le mettre dans la boite peut donc être considéré comme un tirage avec remise.
Pour remplir la boite, on répète donc 6 fois et de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,05. (5%)
Ainsi, la variable $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n=6 \text{ et } p=0{,}05}$

Mais comment savoir quand on peut « supposer que » ?

Si l'effectif de la population est plus de 10 fois plus grand que le nombres de tirages alors on peut supposer que le tirage se fait avec remise.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours pour laisser aux candidats le temps de se préparer.

Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury.

Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à tirage avec remise.

Un candidat a préparé 70 sujets. Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1) Quelle loi suit X ?

X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}7$ ($X \sim \mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}7)$)

Binomiale : les tirages se font avec remise (indépendance des tirages) et ils n'ont que deux issues.

0,7 : 70 sujets préparés sur les 100.

3 : le candidat tire 3 sujets.

($X \sim \mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}7)$) : c'est une autre façon d'écrire la phrase réponse.

2) Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun 3 sujets tirés ?

(arrondir le résultat à 10^{-3} *)*

Il s'agît de calculer $P(X=0)$

$$P(X=0) = \underbrace{\binom{3}{0}}_{1} \times \underbrace{0{,}7^0}_{1} \times \underbrace{(1-0{,}7)^{3-0}}_{0{,}3^3}$$

$$P(X=0) = 0{,}3^3$$

$$\boxed{P(X=0) = 0{,}027}$$

3) Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un trois sujets tirés ?

(arrondir le résultat à 10^{-3} *)*

Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$

au moins 1

Or :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$$

Les événements $\{X \geqslant 1\}$ et $\{X=0\}$ sont complémentaires.

Ainsi $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}3^3$

$$\boxed{P(X \geqslant 1) = 0{,}973}$$

4) Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

On sait que $E(X) = 0{,}7 \times 3$

Ainsi $\boxed{E(X) = 2{,}1}$

Cela signifie que le candidat peut espérer avoir deux sujets qu'il a préparé sur les trois qu'il va devoir choisir.

EXERCICE N°6 ***(Le corrigé)***

Dans la pièce de théâtre *Rosencrantz and Guildenstern sont morts* de Tom Stoppard (1966), le personnage de Rosencrantz lance une pièce 92 fois d'affilée et obtient toujours face.
Quelle est la probabilité que cela se produise ?

Notons X le nombre de fois où on obtient « face » après 92 lancers.
On doit supposer que la pièce est bien équilibrée.
Les lancers étant indépendants les uns des autres, on peut dire que :
X suit une loi binomiale de paramètres $n=92$ et $p=0,5$.
Il s'agît alors de calculer $P(X=92)$

$$P(X=92) = \underbrace{\binom{92}{92}}_{1}\times\underbrace{0,5^0}_{1}\times\underbrace{(1-0,5)^{92-0}}_{0,5^{92}}$$

$$P(X=92) = 0,5^{92}$$

$$\boxed{P(X=92) \approx 2\times10^{-28}}$$

soit environ 0,0000000000000000000000000002
ou encore 0,000 000 000 000 000 000 000 000 02 %
ou encore deux cent-millionnièmes de milliardièmes de milliardièmes de pourcents...

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°1 Le savoir-faire minimal

1) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,3$.

1.a) Dresser l'arbre de probabilités associé à cette expérience aléatoire.

1.b) Dresser et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n=4$.

1.c) En déduire les expressions de $P(X=k)$ pour k entier variant de 0 à 4 .

1.d) Calculer $P(X\geqslant 2)$. Arrondir le résultat à 10^{-2} .

2) On lance deux dés. On note X l'écart entre la plus grande et la plus petite des deux valeurs obtenues.

2.a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

2.b) Déterminer la loi de probabilité de X .

2.c) Déterminer l'espérance de X .

EXERCICE N°2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(12\ ;\ 0,4)$.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1) Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

2) En déduire $P(X\leqslant 3)$.

3) Calculer $P_{X\leqslant 8}(X\geqslant 2)$.

4) Calculer $P_{X>5}(X\leqslant 10)$.

EXERCICE N°3

Sofia dispose de 10 paires chaussettes, dont 8 paires n'ont aucun trou. Elle décide qu'elle fera une lessive dans une semaine. En attendant, chaque matin de la semaine, elle prend une nouvelle paire chaussettes au hasard dans son placard pour les porter ce jour-là.

On note X le nombre de paires de chaussettes sans trou qu'elle portera cette semaine.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

EXERCICE N°4

Il arrive qu'un œuf de poule contienne deux jaunes. D'après un producteur d'œufs, 5 % des œufs que ses poules pondent contiennent deux jaunes. On achète une boîte de six œufs à ce producteur et on note X le nombre d'œufs contenant deux jaunes dans cette boîte.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

EXERCICE N°5

Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours pour laisser aux candidats le temps de se préparer.

Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury.

Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à tirage avec remise.

Un candidat a préparé 70 sujets. Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1) Quelle loi suit X ?

2) Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun 3 sujets tirés ?

(arrondir le résultat à 10^{-3})

3) Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un trois sujets tirés ?

(arrondir le résultat à 10^{-3})

4) Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

EXERCICE N°6

Dans la pièce de théâtre *Rosencrantz and Guildenstern sont morts* de Tom Stoppard (1966), le personnage de Rosencrantz lance une pièce 92 fois d'affilée et obtient toujours face.

Quelle est la probabilité que cela se produise ?