

VARIABLES ALÉATOIRES E06C

EXERCICE N°3 Utiliser les formules de transformation

Des bons d'achats sont à gagner au hasard dans un magasin et les probabilités de les obtenir sont données dans le tableau ci-dessous.

Bons d'achats en euros	1	2	3	4	5
Probabilités	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

X est la variable aléatoire donnant la valeur d'un bon d'achat.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- $E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,1$
 $E(X) = 2,7$
- $E(X^2) = 1^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,4 + 4^2 \times 0,1 + 5^2 \times 0,1$
 $E(X^2) = 8,7$
 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8,7 - 2,7^2$
 $V(X) = 1,41$

2) La gérante du magasin souhaite que la moyenne des bons d'achats soit égale à 3 et que la variance soit égale à 1. Elle demande alors d'utiliser une transformation affine qui à X associe $aX+b$ où a et b sont deux nombres réels avec $a > 0$. Calculer les valeurs de a et b à 10^{-2} près.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a > 0$ et posons $Y = aX+b$.

- $E(Y) = aE(X)+b$
 $E(Y) = 2,7a+b$
 - $V(Y) = a^2V(X)$
 $V(Y) = 1,41a^2$
 - $V(Y) = 1 \Leftrightarrow (a = -\sqrt{1,41} \text{ ou } a = \sqrt{1,41})$
Comme $a > 0$, il reste : $a = \sqrt{1,41}$
 - $E(X) = 3 \Leftrightarrow 2,7 \times \sqrt{1,41} + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 2\sqrt{1,41}$
- Ainsi $a \approx 1,19$ et $b \approx 0,63$