LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{8}{x}$

Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-2		‖ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		6		0

Calculons $f'(x)$ pour $x \in [1\ ;10]$

$f(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{8}{x}$

$f(x) = 0{,}5 \times x + 2 + 8 \times \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0{,}5 \times 1 + 0 + 8 \times \dfrac{-1}{x^2}$

$f'(x) = 0{,}5 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{0{,}5x^2 - 8}{x^2} = \dfrac{0{,}5[x^2+16]}{x^2} = \dfrac{0{,}5(x-4)(x+4)}{x^2}$

On a factorisé la dérivée afin de pouvoir justifier le tableau de signe (qui est basé sur la règle des signes) et bien sûr en déduire le sens de variation de f .

- $0{,}5$ est toujours positif ; x^2 est positif pour $x \in [1\ ;10]$
- $x-8 > 0 \Leftrightarrow x > 8$ et
- $x+8 > 0 \Leftrightarrow x > -8$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$0{,}5$		$+$	$\mid$	$+$	‖	$+$	$\mid$	$+$	
$x-8$		$-$	$\mid$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+8$		$-$	0	$+$	‖	$+$	$\mid$	$+$	
x^2		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-2		‖ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		6		

- $f(-8) = -3$ et $f(8) = 7$

Limite en $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}5x = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8}{x} = 0$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Limite en 0^-

- $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} 0{,}5x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{8}{x} = -\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Limite en 0^+

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} 0{,}5x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{8}{x} = +\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Limite en $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$