

LA FONCTION EXPONENTIELLE

I Introduction

Nous allons tenter de résoudre une équation fonctionnelle, c'est à dire que l'on cherche toutes les fonctions vérifiant une condition donnée. On cherche les fonctions f définies sur \mathbb{R} qui vérifient la propriété suivante :

La condition $\rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

En français, on cherche les fonctions qui sont égales à leur dérivée et pour lesquelles l'image de 0 vaut 1.

Propriété n°1. Si une telle fonction existe alors elle ne s'annule pas

Si f est une fonction, définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

preuve :

▪ Soit f une telle fonction. Construisons la fonction h définie également sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) \times f(-x)$

▪ Montrons que h est dérivable sur \mathbb{R} :

$x \mapsto -x$ et f sont dérivables sur \mathbb{R} dont leur composée $g : x \mapsto f(-x)$ l'est aussi.

h étant le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , elle est dérivable sur \mathbb{R} .

▪ Montrons que h' est nulle :

On peut écrire que $h = f \times g$ et donc $h' = f' \times g + f \times g'$.

C'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= f'(x)f(x) - f(x)f'(x) && (\text{car } g'(x) = -f'(-x)) \\ &= f(x)f(x) - f(x)f(x) && (\text{car } f' = f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante égale à 1.

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc h est constante sur \mathbb{R} .

De plus $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$

▪ Montrons que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors on aurait $h(x) = 0$ ce qui est impossible.

Propriété n°2. Si une telle fonction existe alors elle est unique

Si f est une fonction, définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } f \text{ est unique.}$$

preuve :

▪ Soit f et g deux fonctions vérifiant la condition. Nous allons montrer qu'alors $f = g$.

▪ Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(h est bien définie car g ne s'annule pas d'après la propriété n°1)

▪ Montrons que h' est nulle :

f et g étant des fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui ne s'annulent pas, leur quotient $h = \frac{f}{g}$ est également dérivable sur \mathbb{R} et,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \\ h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ vérifient la condition}) \\ &= 0\end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante, égale à 1.

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc h est constante.

$$\text{De plus } h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.

▪ Montrons que $f = g$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$$

$$\text{Or, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = g(x)$$

Remarque n°1. Une telle fonction existe bien et nous allons l'étudier.

La preuve est admise en première mais nous en verrons une idée...

II La fonction Exponentielle et quelques-unes de ses propriétés

Définition n°1.

On appelle fonction Exponentielle et on note \exp l'unique fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Propriété n°3. La fonction \exp ne s'annule pas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$$

preuve :

Faite en introduction

Propriété n°4. L'exponentielle de la somme égale le produit des exponentielles

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

preuve :

$$\text{Soit } b \in \mathbb{R}, \text{ et } f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) \end{cases}$$

▪ Montrons que f est dérivable sur \mathbb{R}

Les fonctions \exp et $x \mapsto x+b$ sont dérivables sur \mathbb{R} donc leur composée aussi. f est ainsi dérivable sur \mathbb{R} .

▪ Montrons que $f' = f$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = f(x)$$

▪ Montrons que $f(0) = 1$

$$f(0) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$$

▪ Utilisons l'unicité de la fonction exponentielle pour montrer que $f = \exp$.

La fonction f vérifie la condition $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c'est donc la fonction \exp .

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \exp(x)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b) \quad \text{cqfd}$$

Propriété n°5. l'inverse de l'exponentielle égale l'exponentielle de l'opposé

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

puis en divisant chaque membre par le nombre $\exp(x)$ qui est non nul :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{cqfd}$$

Propriété n°6. La fonction \exp est strictement positive sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Propriété n°7. La fonction \exp et ses puissances $n^{\text{ième}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$(\exp(a))^n = \exp(na)$$

preuve :

▪ Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(na).$$

▪ On a :

$$u_0 = \exp(0 \times a) = 1$$

▪ Et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = u_n \times \exp(a)$$

▪ On reconnaît une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \exp(a)$.

▪ Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (\exp(a))^n$$

En identifiant terme à terme, on obtient le résultat.

cqfd.

III Le comportement de la fonction exponentielle.

Propriété n°8. La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R}

La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

autrement dit :

Pour tous nombres réels a et b : $a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)$

preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) > 0$ (d'après la propriété n°6)

La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive sur l'intervalle \mathbb{R} donc la fonction exponentielle est strictement croissante \mathbb{R} .

Remarque n°2.

La fonction exponentielle conserve donc les inégalités, ce qui signifie que l'on peut remplacer « $<$ » par « $>$, \leq ou \geq ».

Cela sera utile pour les inéquations.

Remarque n°3.

La propriété n°8, nous permet d'affirmer que si un nombre admet un antécédent par la fonction \exp alors cet antécédent est unique.

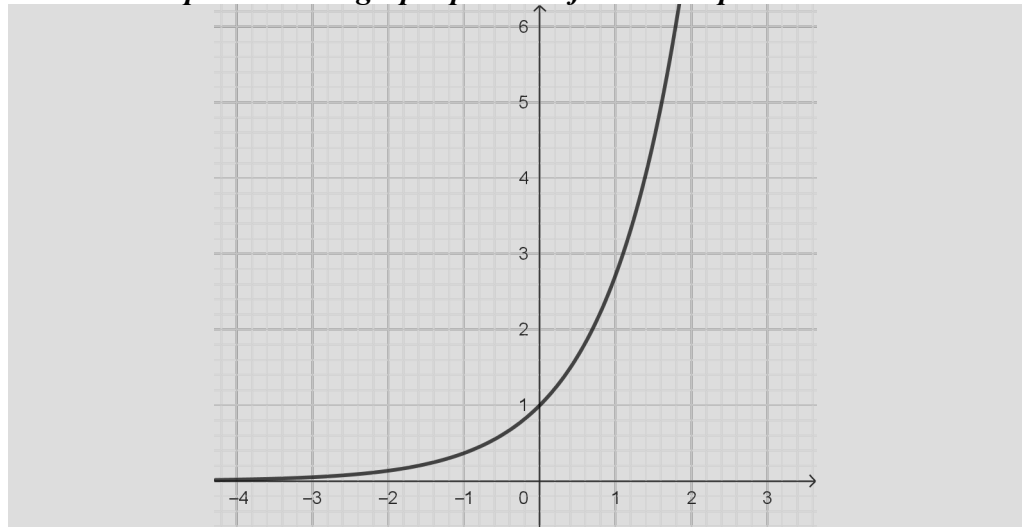
Propriété n°9. Corollaire de la propriété n°8

Pour tous nombres réels a et b :

$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

Connaissance n°1

La représentation graphique de la fonction exponentielle.



IV Une nouvelle notation pour la fonction exponentielle

Remarque n°4.

Les propriétés n°4, n°5 et n°8 nous rappellent les propriétés sur les puissances.

Par exemple,

$$7^{2+3} = 7^2 \times 7^3 \text{ ressemble beaucoup à } \exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$$

Comme $7^1 = 7$, on est tenté de regarder $\exp(1)$. Ce nombre n'est malheureusement pas entier, ce n'est même pas une fraction (vous le démontrerez un jour) mais il est aussi important que le nombre π . Pour cela, on va lui donner un nom.

Définition n°2.

▪ On note e le nombre $\exp(1)$

▪ On a : $e \approx 2,71828$

▪ Pour tout réel x , on pose $e^x = \exp(x)$

Remarque n°5. Résumé des propriétés avec la nouvelle notation

Soit a et b des réels et n un entier naturel .

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}, \quad \boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}, \quad \boxed{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}} \text{ et } \boxed{e^{na} = (e^a)^n}$$

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)} \quad \text{et aussi avec } >, \leq \text{ ou } \geq$$

$$\boxed{\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b}$$

V Le résumé du cours

La définition de exp

On appelle fonction Exponentielle et on note \exp l'unique fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

exp ne s'annule pas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$$

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

exp est strictement positive

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$(\exp(a))^n = \exp(na)$$

exp est strictement croissante

La fonction exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Équations et Inéquations

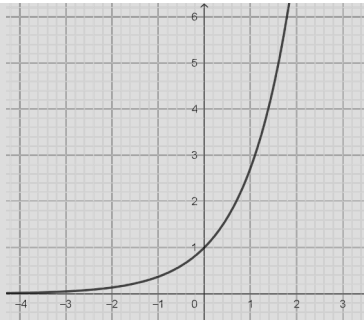
Pour tous nombres réels a et b :

$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)$$

et aussi avec $>$, \leq ou \geq

Représentation graphique de exp



Nouvelle notation de exp

▪ On note e le nombre $\exp(1)$

▪ On a : $e \approx 2,71828$

▪ Pour tout réel x , on pose $e^x = \exp(x)$

Propriétés algébriques de exp

Soit a et b des réels et n un entier naturel.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \text{ et } e^{na} = (e^a)^n$$

Équations et Inéquations

$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b \quad \text{et aussi avec } >, \leq \text{ ou } \geq$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$