LES VECTEURS

I Translations et vecteurs

Définition n°1. ***Translation qui transforme A en B.***

On considère deux points A et B du plan.
On appelle translation qui transforme A en B la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

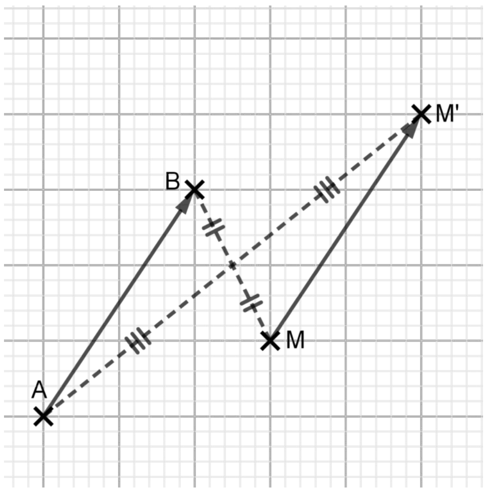


Figure 1

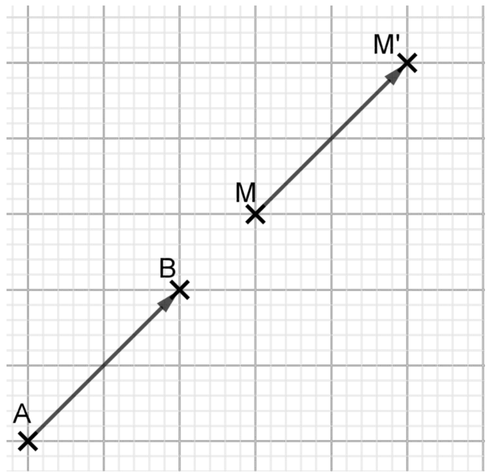


Figure 2

Le point M' est l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

Remarque n°1.

Une translation est entièrement définie par la donnée de 3 informations :
- Une direction : on se déplace parallèlement à la droite (AB) ,
- Un sens : on se déplace comme de A vers B
- Une longueur : la distance parcourue est la même que la longueur AB.

Définition n°2. ***Le vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***, associé à la translation qui transforme A en B.***

On considère deux points A et B du plan.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la donnée des 3 informations qui caractérisent la translation qui transforme A en B.
- On le représente par une flèche comme sur les figures 1 et 2.
- A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B est son extrémité.

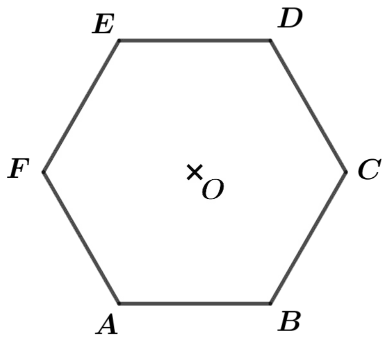
Définition n°3. ***Vecteurs égaux***

Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°1

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.



1) Citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2) Déterminer le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine F.

3) Nommer un représentant du vecteur $\overrightarrow{BF}$ autre que lui-même.

4) Quelle est l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

geogebra

LES VECTEURS

Propriété n°1.

Soients A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad ABDC$ est un parallélogramme.

preuve :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad (AB)//(DC)$
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad$ ABDC est non croisé.
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad AB=DC$

  Le quadrilatère ABDC, non croisé, a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.
  C'est un parallélogramme.

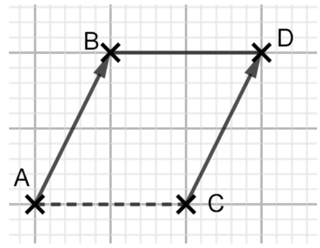


Figure 3

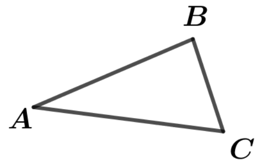
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftarrow$ ABDC est un parallélogramme

Le quadrilatère ABDC étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux. En particulier $(AB)//(DC)$ et $AB=DC$
Enfin le nom *ABDC* nous indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.
Ainsi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°2

ABC est un triangle.



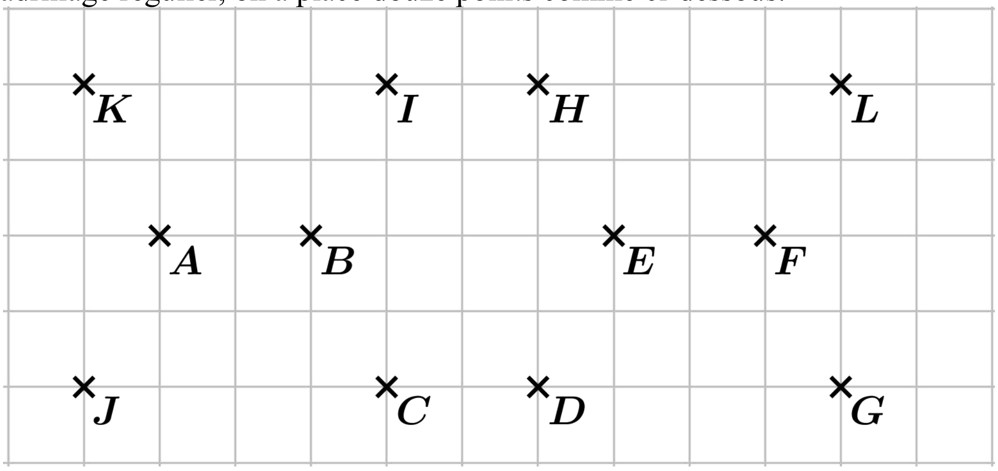
1) Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine B .
2) Placer le point D tel que $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.
3) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

geogebra

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°3

Sur un quadrillage régulier, on a placé douze points comme ci-dessous.



geogebra

1) Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

1.a) $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AJ}$

1.b) L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ est C .

1.c) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{KA}$

1.d) L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{FL}$ est I .

1.e) $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FL}$

1.f) $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{HL}$

2) Nommer au moins deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$

3) Nommer au moins deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{EG}$

4) Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$? Et de $ABCD$?

Faire les exercices de la Fiche M01 pour le prochain cours en classe entière.

II Vecteurs et opérations

Définition n°4. Addition de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations associées et $t_{\vec{w}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ (Pour tout point X $t_{\vec{w}}(X)=t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(X))$)

$$\vec{u}+\vec{v}\overset{\text{def}}{=}\vec{w}$$

Remarque n°2.

Cette définition un peu théorique ne nous servira pas cette année.
En revanche, la propriété suivante nous sera bien plus utile…

Propriété n°2. La relation de Chasles

Soient A, B et C trois points.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

preuve :

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ se résume par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(Pour comprendre la définition : $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AC}}$)

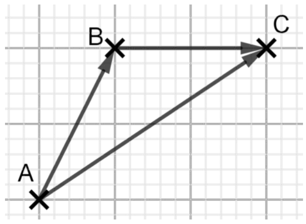


Figure 4

Propriété n°3. ***Règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs de même origine)***

Soient A, B et C trois points.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

preuve :

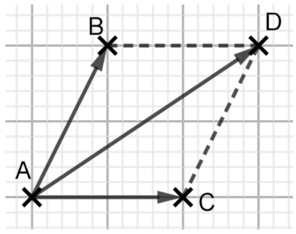


Figure 5

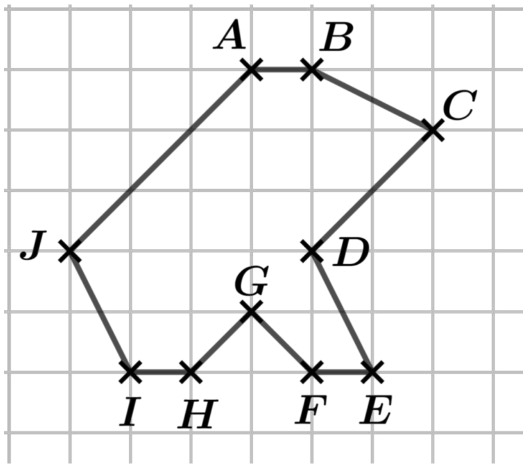
- ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
- D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
- Il suffit alors de remplacer $\overrightarrow{BD}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans l'égalité précédente pour obtenir $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

(Il faut surtout retenir le dessin et l'égalité)

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°1

Compléter les égalités en n'utilisant que les points de la figure ci-contre :



1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\dots A} + \overrightarrow{A\dots}$

2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\dots} = \overrightarrow{HF}$

3) $\overrightarrow{D\dots} + \overrightarrow{C\dots} = \overrightarrow{\dots B}$

4) $\overrightarrow{E\dots} + \overrightarrow{\dots E} = \overrightarrow{\dots}$

geogebra

Définition n°5. Vecteur opposé, vecteur nul

Soit $\vec{u}$ un vecteur, on appelle **vecteur opposé à** $\boldsymbol{\vec{u}}$
et on note $\boldsymbol{-\vec{u}}$ le vecteur
→ qui a même direction et même longueur (ou norme) que $\vec{u}$
→ mais dont le sens est opposé à celui de $\vec{u}$

On alors $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
$\vec{0}$ est appelé le **vecteur nul**.

Exemple n°1.

- $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

- $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$

mais aussi

- $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

ou encore

- $-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$

(pensez bien au fait que le sens du vecteur se lit en suivant la flèche au dessus des lettres)

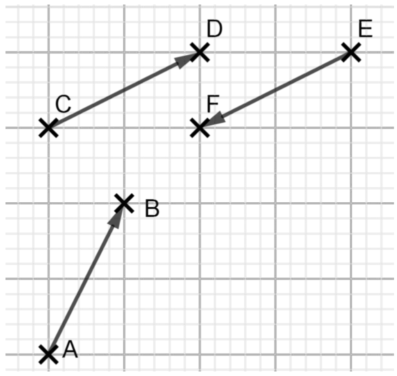


Figure 6

Définition n°6. ***Soustraction de vecteurs***

Pour soustraire un vecteur, on ajoute son opposé.

Exemple n°2.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°2

Écrire le plus simplement possible

1) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$

2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA}$

3) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}$

4) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}$

5) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$

6) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$

Propriété n°4. ***Vecteurs et milieu***

Soit A, I et B trois points.

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ est le milieu de } [AB]$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. (Inspirez vous de la propriété n°1)

EXERCICE N°3

Soit A, B et C trois points.

geogebra

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

3) Que peut-on dire du point C ? Justifier.

Les vecteurs E02

EXERCICE N°4

ABC est un triangle tel que $AB = 2{,}5\ cm$, $AC = 2\ cm$ et $BC = 3\ cm$.

geogebra

1) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2) Construire le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

3) À quel vecteur est égale la somme $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$?

Définition n°7. Multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)

Soit $\vec{u}$ et k un nombre réel. On appelle produit de $\vec{u}$ par k
et on note $k \cdot \vec{u}$ le vecteur

qui a la même direction que $\vec{u}$,

qui a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$,ou le sens contraire si $k < 0$

et dont la norme (la longueur) est multipliée par la distance à zéro de k .

Exemple n°3.

On peut écrire :

$\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH} = -0{,}5\cdot\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{FE}$

Par contre,
Il n'existe pas de nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{EF}$
(car ces vecteurs n'ont pas la même direction)

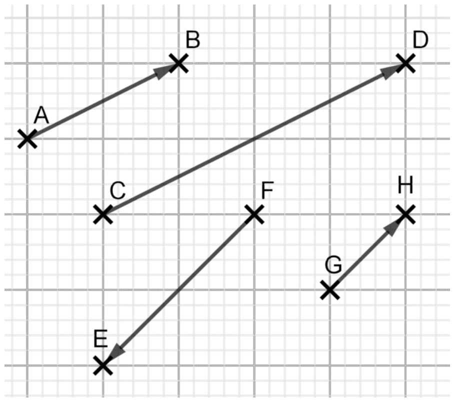


Figure 7

Remarque n°3.

Il faut bien comprendre que nous avons multiplié un vecteur par nombre et que cela n'a rien à voir avec le fait de multiplier deux vecteurs entre eux. Il faudra avancer un peu dans les maths pour en parler…

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°5

1) Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 3\,cm$ et $BC = 2\,cm$.

2) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.

Geogebra

Faire les exercices de la Fiche M02 pour le prochain cours en classe entière.

Réviser pour IE01

III Vecteurs et coordonnées

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{OJ}$

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque, la relation de Chasles nous permet d'écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
avec C étant choisi tel que (AC) // (OI) et (CB) // (OJ).
On a alors :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 6 \cdot \vec{e_1} - 4 \cdot \vec{e_2}$
On écrira plus simplement :
$\overrightarrow{AB}\ (6\ ;-4)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

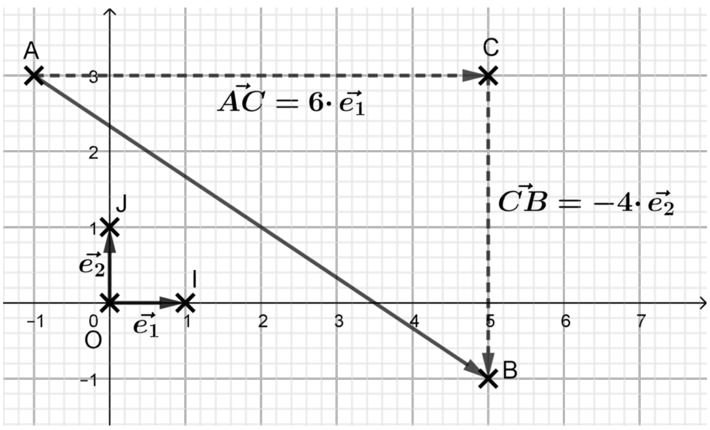


Figure 8

geogebra

Définition n°8. Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{OJ}$. Alors, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux nombres x et y tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}$
On appellera :
x l'abscisse de $\vec{u}$
y l'ordonnée de $\vec{u}$
$(x\ ,\ y)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2})$

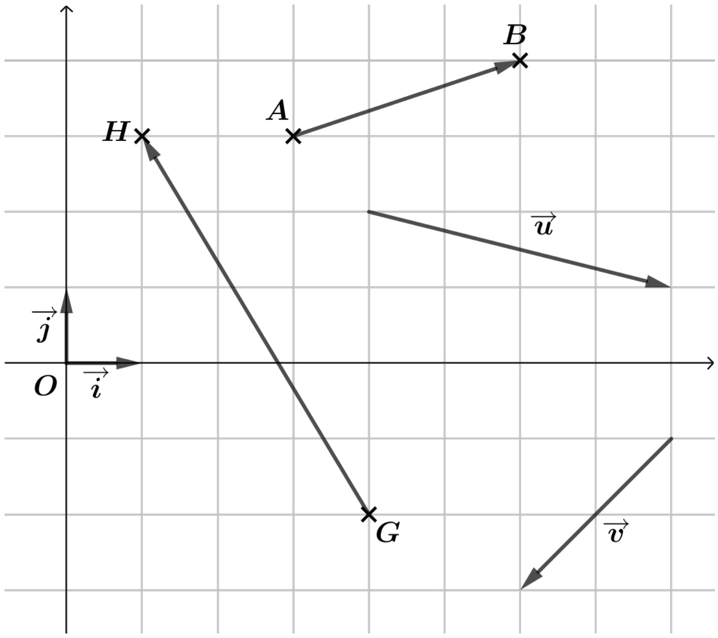
Remarque n°4.

Comme pour les points, on notera indifféremment $\vec{u}(x\ ,\ y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°1

Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GH}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$
dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.



Les vecteurs

Méthode n°1. ***Calculer les coordonnées du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$

Dans un repère $(O \; ; I \; ; J)$, on se donne $A(x_A \; ; y_A)$ et $B(x_B \; ; y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple n°4.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

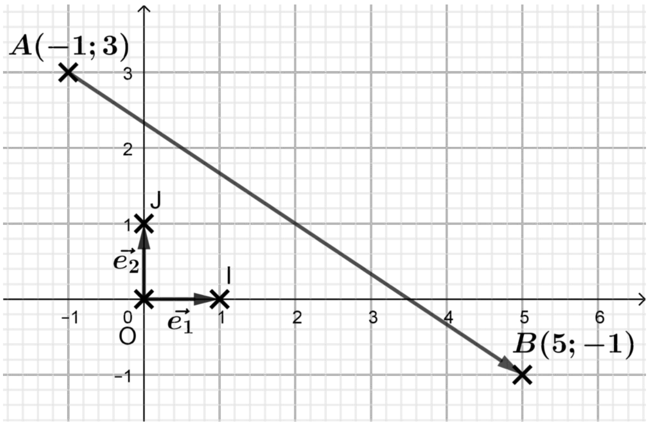


Figure 9

EXERCICE N°2

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ -1)$, $C(5\ ;\ 4)$ et $D(0\ ;\ 5)$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Propriété n°5. Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Les coordonnées de K milieu de $[AB]$ sont $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

preuve :

Notons $K(x_K\ ;\ y_K)$.

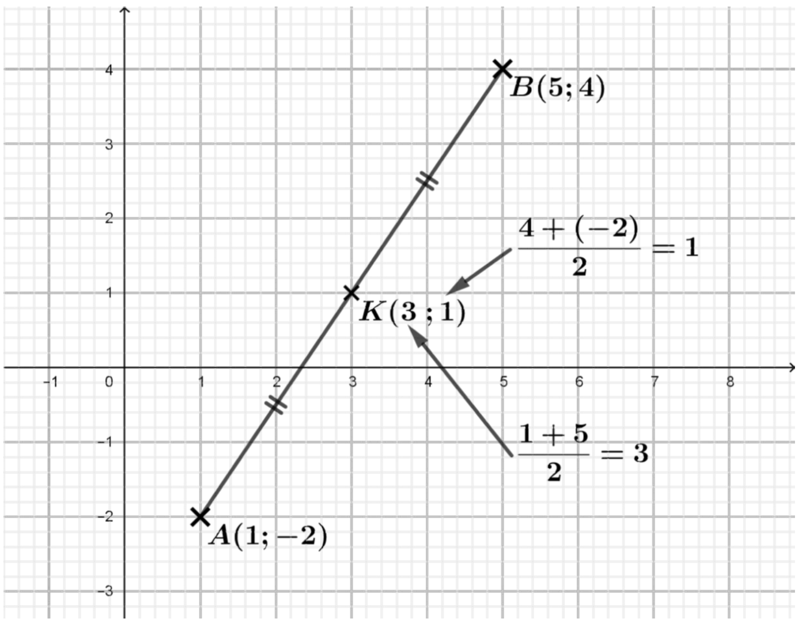
$$K \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A-x_K+x_B-x_K = 0 \\ y_A-y_K+y_B-y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B-2x_K = 0 \\ y_A+y_B-2y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B = 2x_K \\ y_A+y_B = 2y_K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{} = x_K \\ \dfrac{y_A+y_B}{2} = y_K \end{cases}$$



LES VECTEURS

Exercice n°1. ***À vous de jouer***

Dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

On donne le parallélogramme $ABCD$ avec $A(4\ ;\ 5{,}2)$ et $C(1{,}4\ ;\ 3)$.

Déterminer les coordonnées du centre K de $ABCD$.

Propriété n°6. Opérations et coordonnées de vecteur

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont des nombres ainsi qu'un nombre k .

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

$k\cdot\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. Revenez à la définition n°8 et utilisez les définitions du deuxième paragraphe.

Exemple n°5.

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2{,}1\\2{,}3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$ alors , par exemple :

$3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\times(-2{,}1)-2\times 3\\3\times 2{,}3-2\times 1{,}5\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-12{,}3\\3{,}9\end{pmatrix}$

Remarque n°5.

Le vecteur nul $\boxed{\vec{0}\text{ a pour coordonnées }\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3\ ;-2)$ et $E(11\ ;-3)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{DE}=2\vec{u}+3\vec{v}$.

Propriété n°7. ***Calcul de la norme d'un vecteur***

Dans un repère ORTHONORME $(O \; ; \; I \; ; \; J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

alors la norme (ou longueur) de $\vec{u}$, qui se note $\|\vec{u}\|$, s'obtient grâce à l'égalité :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

preuve :

On utilise la décomposition de la figure n°8 et on applique le théorème de Pythagore au triangle ABC qui est rectangle en C car le repère est orthonormé.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°4

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(-3\ ;\ 6)$ et $C(-7\ ;\ -1)$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $R(-1\ ;\ 3)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(8\ ;\ -2)$.

1) Calculer les coordonnées du point U tel que $RSTU$ soit un parallélogramme.

2) Calculer les coordonnées du point V tel que $RVST$ soit un parallélogramme.

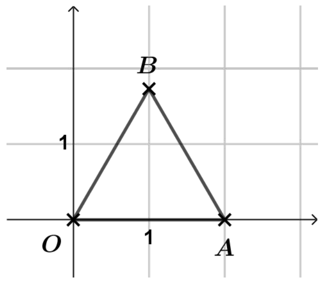
EXERCICE N°6

Dans un repère orthonormé, on considère les points $I(1\ ;\ -5)$, $J(7\ ;\ 2)$, $K(16\ ;\ 4)$ et $L(10\ ;\ -3)$.

Montrer que $IJKL$ est un losange.

EXERCICE N°7

Déterminer les coordonnées du point B sur la figure ci-contre sachant que OAB est un triangle équilatéral de côté $2\,cm$.



Geogebra

Faire les exercices de la Fiche M03 à votre rythme (sur une semaine)

LES VECTEURS E04

EXERCICE N°1

Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$R(2x-4\ ;\ x)$ $\quad$ $S((6x-4)^2\ ;\ 7x-3)$

$T((9x-2)(4x-3)\ ;\ x^2-3)$ $\quad$ $U(15x-14\ ;\ x^2-6x)$

Montrer que, quelle que soit la valeur de x , $RSTU$ est un parallélogramme.

LES VECTEURS E04

EXERCICE N°2 Python

1) Créer une fonction en Python qui, à partir des coordonnées de deux points A et B dans un repère orthonormé, calcule la distance AB.

2) Créer une seconde fonction utilisant la première et qui, à partir des coordonnées de deux points A et O dans un repère orthonormé et d'un réel R positif, indique si le point A appartient au disque de centre O et de rayon R.

EXERCICE N°3

$ABCD$ est un parallélogramme et on définit les points S et V tels que $\overrightarrow{AV}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS}=2\overrightarrow{CD}$.

Montrer que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Faire les exercices de la Fiche M04 à votre rythme (sur une semaine)

Réviser pour IE02

IV La colinéarité

Définition n°9. Vecteurs colinéaires

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs
On dit que

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque n°6.

D'après la définition n°7, des vecteurs colinéaires sont des vecteurs qui ont la même direction.

Définition n°10. ***Déterminant de deux vecteurs***

Soient $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ le nombre $\boldsymbol{det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})\ =\ ad-bc}$

Exemple n°6.

Dans la base orthonormée $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$, pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})\ =\ 4\times5-(-2)\times3\ =\ 26$

Propriété n°8.

Dans base orthonormée , $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

preuve :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})\ =\ 0$

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, alors il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v} \Leftrightarrow a=kc$ et $b=kd$

▪ Si $c=0$ alors $a=k\times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $d=0$ alors $b=k\times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $c\neq 0$ et $d\neq 0$ alors $\frac{a}{c}=k=\frac{b}{d}$, d'après l'égalité des produits en croix : $ad=bc$ qui équivaut à $ad-bc=0$

LES VECTEURS

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

$ad - bc = 0$ équivaut à $ad = bc$

▪ Si $c \neq 0$ et $d \neq 0$ alors on pose $k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ainsi $a = kc$ et $b = kd$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $c = 0$ alors $ad = 0$ et $a = 0$ ou $d = 0$

▪ Si $d = 0$ alors $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $a = 0$ et $d \neq 0$ alors on pose $k = \frac{b}{d}$ ainsi $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Les autres cas, $d = 0$, $a = 0$ et $b = 0$ se traitent de la même façon et on obtient que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

LES VECTEURS

Méthode n°2. Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Énoncé :

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, déterminer le coefficient de proportionnalité.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-18\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$

LES VECTEURS

Réponse :

1) $det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-18) - 6 \times (-6) = 0$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\frac{2}{-6} = \frac{6}{-18} = -\frac{1}{3}$

On précise que $\vec{u} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

2) $det(\vec{w}, \vec{z}) = -5 \times (-7) - 3 \times 12 = -1 \neq 0$

On en déduit que $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs E05

EXERCICE N°1

On se place dans un repère orthonormé et on considère les quatre points $A(-2\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -3)$, $C(1\ ;\ 1)$ et $D(5\ ;\ -3)$.

1) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

EXERCICE N°2

1) On se place dans un repère orthonormé et on considère les trois points $A(-2\ ;\ -3)$, $B(4\ ;\ -2)$, $C(8\ ;\ 0)$

1.a) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.b) Que peut-on en déduire pour ces deux vecteurs ?

1.c) Écrire, si possible, une égalité avec ces deux vecteurs.

2) Reprendre la question 1) avec $A(-2\ ;\ -3)$, $B(4\ ;\ -2)$ et $C(16\ ;\ 0)$

EXERCICE N°3

x est un nombre réel. On se place dans une base orthonormée.

1) Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ x-2 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\vec{v}$? Justifier.

LES VECTEURS E05

2) Soient les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ tels que $\vec{w}=\begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{w}$ soit colinéaire à $\vec{t}$? Justifier.

LES VECTEURS E05

3) Soient les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ tels que $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2x-3 \\ 3x-1 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{r}$ soit colinéaire à $\vec{s}$? Justifier.

Faire les exercices de la Fiche M05 à votre rythme (sur une semaine)

V Le résumé du cours

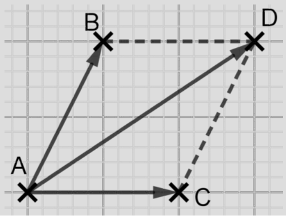
Un vecteur c'est trois informations $\left\{ \begin{array}{l} \text{▪ Une direction (on se déplace sur une droite)} \\ \text{▪ Un sens (sur cette droite on choisit un sens)} \\ \text{▪ Une norme ou longueur} \end{array} \right.$

Soient A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad ABDC$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Règle du parallélogramme



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

Vecteur opposé : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ même direction, même norme, sens contraire

Vecteur nul : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$

$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ est le milieu de } [AB]}$

$\boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ est le milieu de } [AB]}$

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont des nombres ainsi qu'un nombre k.

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $det(\vec{u} , \vec{v}) = ad - bc = 0$

Si le repère est ORTHONORME $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$