VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

Ce cours est la suite du cours de première (premier QRcode) et utilise les notions abordées dans le précédent (second QRcode) . Il est donc bon de se rafraîchir la mémoire...

cliquables également

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

EXERCICE N°1 ***Pour se souvenir***

Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse.

Un lycée comporte 900 élèves, dont 270 sont en Terminale. On choisit trois élèves au hasard. Étant donné le grand nombre d'élèves, on assimile cet échantillon à un tirage avec remise.

1) La probabilité que les trois élèves choisis soient en Terminale est :

A 0,027	B 0,3	C 0,343	D 0,9

2) La probabilité qu'au plus deux des trois élèves soient en Terminale est d'environ :

A 0,26	B 0,4	C 0,6	D 0,97

3) La probabilité que k de ces trois élèves soient en Terminale est d'environ 0,441 alors la valeur de k est :

A 0	B 1	C 2	D 4

4) La probabilité qu'un de ces trois élèves ne soit pas en Terminale est d'environ :

A 0,19	B 0,41	C 0,7	D 0,9

5) Sachant qu'un des élèves est en Terminale, la probabilité qu'au moins un des deux autres soit aussi en Terminale est d'environ :

A 0,49	B 0,51	C 0,6	D 0,91

6) On répète cette expérience un grand nombre de fois. En moyenne, le nombre d'élèves de Terminale parmi les trois est :

A 0,9	B 1,2	C 1,5	D 1,8

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) A01

EXERCICE N°2 ***Revoir l'espérance***

200 billets de loterie valant 2 euros chacun sont vendus. Seulement deux billets permettent de gagner un lot : l'un permet de gagner 100 euros, l'autre permet de gagner 50 euros, les autres ne rapportent rien du tout.
On a acheté deux billets. On considère les événements suivants :

- A : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros »;
- B : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros».

1) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

2) On note X le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

Indication : il est important de prendre en compte l'argent dépensé pour acheter les billets.

3) Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeurs de X	$X=-4$	$X=46$	$X=96$	$X=146$
Issues correspondantes				
Probabilités correspondantes				

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

I Coefficients binomiaux

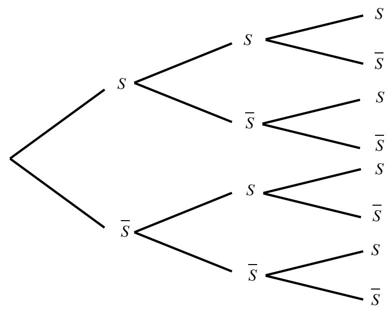
Définition n°1.

Soit n un nombre entier et p une probabilité (c.à.d $0 \leqslant p \leqslant 1$)
Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ sur l'arbre représentant le schéma de Bernoulli.
Ce coefficient est noté $\binom{n}{k}$, ce qui se lit : « ***k* parmi *n*** »

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

Exemple n°1.

On a modélisé un schéma de Bernoulli , $n=3$ et p est quelconque.
Il y a 3 chemins comportant exactement une fois l'issue S : $(S\ ,\ \overline{S}\ ,\ \overline{S})$, $(\overline{S}\ ,\ S\ ,\ \overline{S})$ et $(\overline{S}\ ,\ \overline{S}\ ,\ S)$ donc $\binom{3}{1} = 3$.



De même :
$\binom{3}{0}=1$; $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{2}=1$

Variables aléatoires (la suite)

Propriété n°1.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$$

preuve :

Soit une collection de n éléments.

▪ Il n'y a qu' une seule façon de ne prendre aucun élément parmi les n , de même il n'y a qu'une façon de tous les prendre. Donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

▪ Il y a n façons façons de prendre un élément parmi les n (chaque élément choisi donne une façon) donc $\binom{n}{1} = n$.

Enfin prendre un élément parmi les n revient à en laisser $n-1$ de côté. En inversant les rôles, on obtient $\binom{n}{n-1} = n$.

Propriété n°2.

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

preuve :

Soit une collection de n éléments dans laquelle nous fixons un élément quelconque et soit un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Dans l'ensemble des parties contenant k éléments parmi les n disponibles, il y a deux possibilités : soit les parties contiennent l'élément fixé, soit elles ne le contiennent pas (bien sûr, ces deux ensembles de parties sont disjoints).

▪ Dénombrons celles qui contiennent l'élément fixé :
L'élément fixé étant choisi d'office, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre $k-1$ puisque l'élément fixé est déjà choisi. On a donc $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

▪ Dénombrons, à présent, celles qui ne contiennent pas l'élément fixé :
L'élément fixé étant exclu, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre k . On a donc $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

▪ Au final pour obtenir les $\binom{n}{k}$ parties possibles, il faut réunir les $\binom{n-1}{k-1}$ parties contenant l'élément fixé et les $\binom{n-1}{k}$ ne le contenant pas.

Ainsi $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

II Le triangle de Pascal

Source : Wikipédia

La propriété n°2, nous permet de construire ce qu'on appelle le triangle de Pascal.
C'est un tableau triangulaire tel que la ligne n donne les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

La théorie

$n=0$	$\binom{0}{0}$					
$n=1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
$n=2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
$n=3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
$n=4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$n=5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k}$$

La pratique

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

EXERCICE N°1

Interpréter les coefficients binomiaux suivants en termes de nombre de chemins d'un arbre de probabilités :

1) $\binom{3}{1}$ **2)** $\binom{5}{2}$ **3)** $\binom{7}{0}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°2

Donner les valeurs de :

1) $\binom{5687}{1}$ **2)** $\binom{75}{0}$ **3)** $\binom{734}{734}$ **4)** $\binom{2510}{2509}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°3

Construire le triangle de pascal jusqu'à la ligne $n=7$.

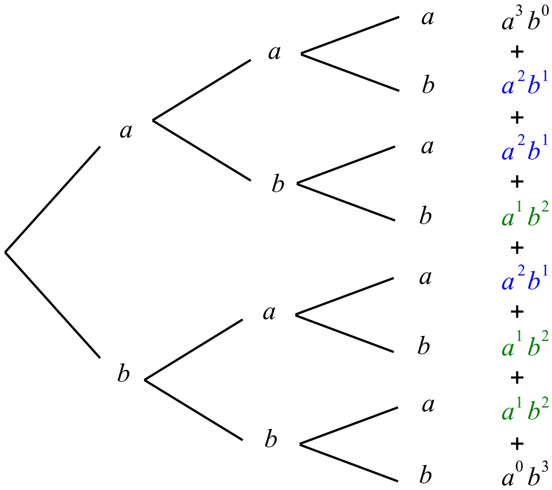
Variables aléatoires (la suite)

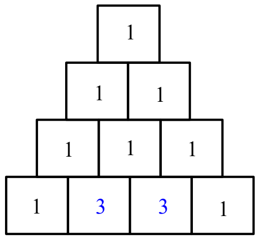
Remarque n°1. Comment développer $(a+b)^n$? (pour la culture...)

Un intérêt du triangle de Pascal est de faciliter le développement des binômes de Newton ($(a+b)^n$ pour n entier naturel).

Exemple n°2. Un exemple avec $(a+b)^3$.

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$





VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°4

1) Développer et réduire $(a+b)^8$.

2) Développer et réduire $(2x+3)^5$.

Toutes ces notions nous permettent d'aborder le dernier paragraphe de ce chapitre.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

III Loi binomiale

Définition n°2.

Soit X la variable aléatoire correspondant au **nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli** de paramètres n et p. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.

On la note $\mathscr{B}(\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{p})$

Variables aléatoires (La suite)

Propriété n°3.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ,\ p)$.
Pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,
la probabilité que X égale k est :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}}$$

Remarque n°2.

p étant la probabilité de succès à une épreuve de Bernoulli, la probabilité de l'échec vaut bien sûr $1-p$.
Pour que $X=k$, il faut k succès (p^k) et
$n-k$ échecs ($(1-p)^{n-k}$) .

preuve :

Dans l'arbre associé à cette expérience aléatoire, si un chemin comporte k succès alors il comporte aussi $n-k$ échecs.
Or : la probabilité de l'issue associée à un tel chemin vaut $p^k \times (1-p)^{n-k}$
et par définition, il existe $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.

On a donc bien : $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°1

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}3)$.

Calculer , à 10^{-2} près :

1) $P(X=1)$

2) $P(X=3)$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°2

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}4$.

Calculer, à 10^{-2} près :

1) $P(X=3)$

2) $P(X<3)$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°3

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0{,}75$.

Calculer, à 10^{-2} près :

1) $P(X=5)$

2) $P(X\geqslant 6)$

Variables aléatoires (La suite)

Propriété n°4.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$
alors son espérance est : $\boxed{E(X) = n\times p}$

Variables aléatoires (la suite) E02

EXERCICE N°4

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0{,}2$.
Quelle est son espérance?

EXERCICE N°5

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(30\ ;\ 0{,}75)$.

Calculer $E(X)$.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°6

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(45 ; 0{,}2)$ et la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(30 ; 0{,}3)$.

Laquelle de ces deux variables aléatoires a l'espérance la plus élevée ?

Variables aléatoires (la suite)

Exemple n°3. ***Se servir d'une loi binomiale***

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°1

On s'intéresse à la probabilité, à 10^{-3} près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

La réponse

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°1

On s'intéresse à la probabilité, à 10^{-3} près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

La réponse

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$

▪ *On justifie ensuite l'indépendance afin d'avoir notre schéma de Bernoulli.*
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le fait d'être bénéficiaire de la CMUC pour une des personnes choisies est indépendant de celui des autres.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°1

On s'intéresse à la probabilité, à 10^{-3} près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

La réponse

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$
▪ *On justifie ensuite l'indépendance afin d'avoir notre schéma de Bernoulli.*
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le fait d'être bénéficiaire de la CMUC pour une des personnes choisies est indépendant de celui des autres.
▪ *Puis on peut décrire notre loi binomiale,*
Ainsi, en notant X, le nombre de personnes étant bénéficiaires de la CMUC, on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}053$

Variables aléatoires (La suite)

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°1

On s'intéresse à la probabilité, à 10^{-3} près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

La réponse

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$

▪ *On justifie ensuite l'indépendance afin d'avoir notre schéma de Bernoulli.*
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le fait d'être bénéficiaire de la CMUC pour une des personnes choisies est indépendant de celui des autres.

▪ *Puis on peut décrire notre loi binomiale,*
Ainsi, en notant X , le nombre de personnes étant bénéficiaires de la CMUC, on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}053$

▪ *Et enfin on peut faire les calculs.*
Il s'agît donc de calculer $P(X=4)$

$$P(X=4) = \binom{20}{4}\times 0{,}053^4\times(1-0{,}053)^{20-4} = 210\times 0{,}053^4\times 0{,}947^{16}$$

$$\boxed{P(X=4) \approx 0{,}016}$$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°2

Si on prélevait un grand nombre d'échantillons de taille 20. Combien y aurait-il de bénéficiaires de la CMUC en moyenne dans chaque échantillon ?

Variables aléatoires (La suite)

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°2

Si on prélevait un grand nombre d'échantillons de taille 20. Combien y aurait-il de bénéficiaires de la CMUC en moyenne dans chaque échantillon ?

La réponse

Il s'agît de calculer l'espérance de X
Comme X suit $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}053)$ alors
$E(X) = 20 \times 0{,}0{,}53 = 1{,}06$

$\boxed{\text{Chaque groupe comporterait en moyenne } 1 \text{ personne bénéficiaire de la CMUC}}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°1 Le savoir-faire minimal

1) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,3$.

1.a) Dresser l'arbre de probabilités associé à cette expérience aléatoire.

1.b) Dresser et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n=4$.

1.c) En déduire les expressions de $P(X=k)$ pour k entier variant de 0 à 4 .

1.d) Calculer $P(X \geqslant 2)$. Arrondir le résultat à 10^{-2} .

2) On lance deux dés. On note X l'écart entre la plus grande et la plus petite des deux valeurs obtenues.

2.a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

2.b) Déterminer la loi de probabilité de X .

2.c) Déterminer l'espérance de X .

Variables aléatoires (la suite) E03

EXERCICE N°2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(12\ ;\ 0{,}4)$.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1) Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

2) En déduire $P(X\leqslant 3)$.

3) Calculer $P_{X\leqslant 8}(X\geqslant 2)$.

4) Calculer $P_{X>5}(X\leqslant 10)$.

Variables aléatoires (la suite) E03

EXERCICE N°3

Sofia dispose de 10 paires chaussettes, dont 8 paires n’ont aucun trou. Elle décide qu'elle fera une lessive dans une semaine. En attendant, chaque matin de la semaine, elle prend une nouvelle paire chaussettes au hasard dans son placard pour les porter ce jour-là.

On note X le nombre de paires de chaussettes sans trou qu'elle portera cette semaine.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°4

Il arrive qu'un œuf de poule contienne deux jaunes. D'après un producteur d’œufs, 5 % des œufs que ses poules pondent contiennent deux jaunes. On achète une boîte de six œufs à ce producteur et on note X le nombre d’œufs contenant deux jaunes dans cette boîte.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°5

Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours pour laisser aux candidats le temps de se préparer.

Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury.

Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à tirage avec remise.

Un candidat a préparé 70 sujets. Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1) Quelle loi suit X ?

2) Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun 3 sujets tirés ?
(arrondir le résultat à 10^{-3})

3) Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un trois sujets tirés ?
(arrondir le résultat à 10^{-3})

4) Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°6

Dans la pièce de théâtre *Rosencrantz and Guildenstern sont morts* de Tom Stoppard (1966), le personnage de Rosencrantz lance une pièce 92 fois d'affilée et obtient toujours face.
Quelle est la probabilité que cela se produise ?

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1

En France,au 1er janvier 2018, 0,025 % de la population était centenaire, dont 83 % de femmes.
Les résultats seront arrondis à 10^{-5} .

1)
1.a) Quelle était la probabilité que dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard il y ait eu au moins personne centenaire ?
1.b) Et dans un groupe de 500 femmes ?

2) Au Japon, la proportion de centenaires était de 0,037 % en 2011. Quelle était la probabilité qu'il n'y ait pas eu de centenaire dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard à cette époque ?

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°2

De 1987 à 1993, le Tapis vert était un jeu de la Française des jeux (à l'époque appelée France Loto). Le principe était le suivant :
pour jouer, il fallait miser entre 2 et 100 francs, puis, pour chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique), choisir une carte entre le 7 et l'as.
Un tirage était ensuite effectué sous contrôle d'huissier et à la télévision.
Si le joueur avait choisi deux des cartes tirées, il gagnait deux fois sa mise, s'il avait choisi trois des cartes tirées, il gagnait trente fois sa mise, et s'il avait choisi les quatre cartes tirées, il gagnait mille fois sa mise.

Un joueur a choisi ses quatre cartes. On note X le nombre de ses cartes qui seront tirées.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent ?
3) Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.
4) Ce joueur a misé 10 francs pour un tirage. On note Y ses gains.
4.a) Quelle sont les valeurs prises par Y ?
4.b) Donner la loi de probabilité de Y .
4.c) Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.
5) Le 29 mars 1988 eut lieu un tirage particulier : les quatre as ont été tirés. Beaucoup de gens ayant parié sur cette combinaison, les gains distribués ont été très supérieurs aux mises!
Quelle était la probabilité qu'un tel tirage se produise ?

EXERCICE N°3

Une crue centennale est une crue qui a une chance sur cent de se produire chaque année. La dernière crue centennale de la Seine à Paris a eu lieu en 1910. On note X le nombre de crues centennales qui auront lieu à Paris dans le siècle à venir.

1)
1.a) Quelle loi de probabilité suit X ?
1.b) Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux crues centennales aient lieu durant le prochain siècle?
1.c) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.

2) Florian déclare « Ça fait plus de cent ans que la dernière crue centennale a eu lieu, il est de plus en plus probable que la prochaine arrive! ». A-t-il raison ?