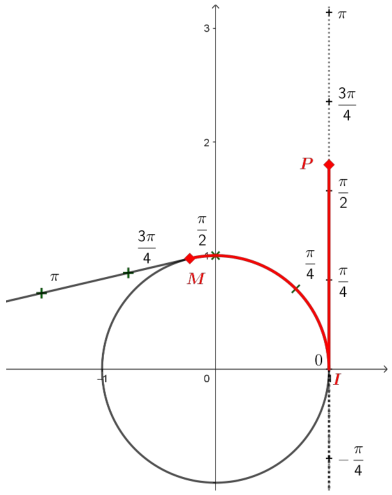
TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS

I Une nouvelle mesure d'unité d'angle : le radian

Dans un repère orthonormé, on se donne le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 unité centré en l'origine de ce repère. On souhaite se repérer ce cercle. Pour cela, on fixe le point de coordonnées $(1\ ,\ 0)$ comme point de référence. Comme il y a deux sens de parcours sur ce cercle, on décide que les déplacements dans le sens inverse des aiguilles d'une montre seront considérés comme positifs et ceux dans le sens des aiguilles d'une montre seront considérés comme négatifs. Il reste à définir une unité de longueur sur ce cercle et si elle pouvait coïncider avec celle du repère ce serait super… Pour cela, on va « enrouler la droite réelle » sur le cercle $\mathcal{C}$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Visualiser

On représente $\mathbb{R}$ par la droite D tangente au cercle $\mathcal{C}$ en I et à tout point P de D on fait correspondre un point M de $\mathcal{C}$ « en enroulant » $[I\,P]$ sur le cercle.

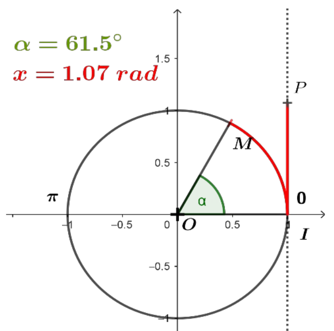


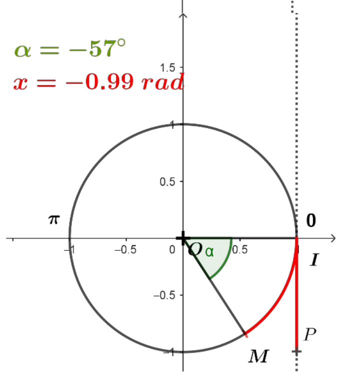
Définition n°1. ***Cercle trigonométrique, sens trigonométrique***

Par Jean-Michel du 01 — Travail personnel, CC BY-SA 4.0,

▪ Dans un repère orthonormé, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre, l'origine du repère, et de rayon 1.
▪ Il y a deux sens de parcours possible sur ce cercle :
 ▫ Le **sens trigonométrique** qui consiste à se déplacer selon le sens contraire des aiguilles d'une montre,
 ▫ l 'autre sens s'appelle le **sens inverse trigonométrique**.

Connaissance n°1 ***Le radian***





On peut donc repérer un point M sur le cercle trigonométrique en utilisant l'abscisse du point P .
On donne une unité à cette abscisse : le radian noté *rad*.
On peut aussi repérer M avec l'**angle orienté** $\widehat{IOM}$ (sa mesure, en degrés, est positive si on suit le sens trigonométrique et négative sinon). Il y a donc une relation entre les deux :

$$\boxed{\pi\,rad\ =\ 180\,°}$$

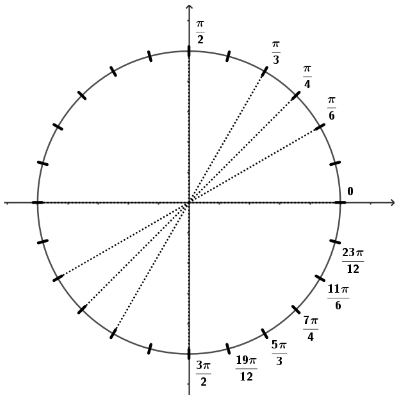
En effet, le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc son demi-périmètre vaut π et un angle plat mesure 180°…
À partir de maintenant, sauf mention du contraire, nous utiliserons le radian plutôt que le degré pour mesurer les angles.

Remarque n°1.

On gardera en tête que la mesure en rad d'un angle α est la longueur (au signe près) de l'arc $\widehat{IM}$.

TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E01

EXERCICE N°1 Comprendre le cercle trigonométrique et le radian



1) Compléter le cercle trigonométrique ci-contre avec les valeurs manquantes (penser à simplifier les fractions).

2) Sans faire de calcul, proposer une valeur simplifiée pour $\pi+\frac{\pi}{6}$ rad et pour $\frac{\pi}{6}-\pi$ rad .

3) Sans faire de calcul, proposer une valeur simplifiée pour $\frac{11\pi}{6}+16\pi$ rad et pour $\frac{11\pi}{6}-998\pi$ rad .

4) Sans faire de calcul, proposer une valeur simplifiée pour $\frac{5\pi}{3}+19\pi$ rad et pour $\frac{5\pi}{3}-79\pi$ rad .

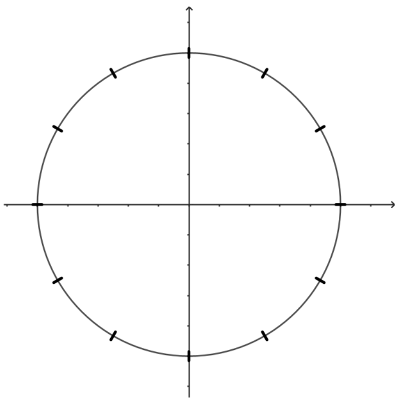
5) Sans faire de calcul, proposer une autre valeur pour $-\frac{\pi}{3}$ rad et pour $-\frac{\pi}{6}$ rad ainsi que pour $\pi-\frac{\pi}{3}$ rad et pour $\pi-\frac{\pi}{6}$ rad .

6) Traduire toutes les mesures d'angle des réponses précédentes en degrés.

EXERCICE N°2 Trouver l'intrus

Dans chaque cas, trois des quatre nombres sont associés à un même point du cercle trigonométrique. Trouver l'intrus et placer le point correspondant aux trois nombres sur le cercle trigonométrique.

A :	-7π	8π	3π	11π
B :	$\frac{13\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$
C :	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{3}$



EXERCICE N°3 Savoir tracer son cercle et comprendre les symétries

1) Tracer le cercle trigonométrique et placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

2) Placer le point B , symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

3) Placer le point C , symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

4) Placer le point D , symétrique de A par rapport à O . Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

5) Tracer la première bissectrice (d) (la droite d'équation $y = x$) et placer le point E , symétrique de A par rapport à (d) . Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

II Une nouvelle façon de voir la trigonométrie

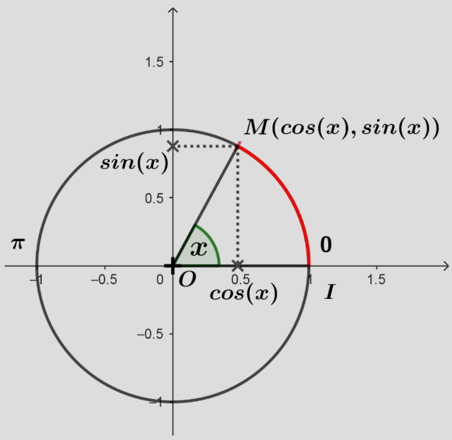
Nous savons définir le cosinus et le sinus d'un angle aigu (dont la mesure est comprise en $0\,rad$ et $\frac{\pi}{2}\,rad$) à l'aide d'un triangle rectangle (page 3 de ce cours)

On aimerait pouvoir faire la même chose pour n'importe quelle mesure d'angle.

Définition n°2. ***Sinus et cosinus d'un angle (mesuré en radian)***

Dans un repère orthonormé.

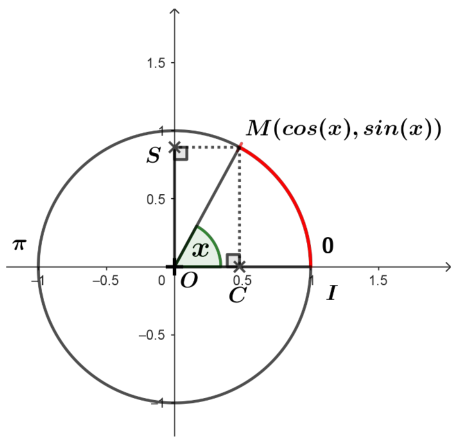
Soit $x \in \mathbb{R}$, la mesure d'un angle et M le point du cercle trigonométrique qui lui est associé.



On appelle :
cos(x) l'abscisse de M
et
sin(x) l'ordonnée de M

Remarque n°2. ***On ne contredit pas l'ancienne définition, on la prolonge***

Quand $x \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ les deux définitions coïncident, en effet :



- Le repère étant orthonormé, le triangle OCM est rectangle en C .

On peut ainsi écrire $\cos(x) = \frac{OC}{OM}$

De plus $[OM]$ est un rayon du cercle trigonométrique : $OM = 1$

Donc $\cos(x) = OC$

Comme l'abscisse de M est ici positive, on peut conclure que $\cos(x)$ égale bien cette abscisse.

- On fait la même chose dans le triangle OSM pour $\sin(x)$.

Propriété n°1.

Soit $x \in \mathbb{R}$, la mesure en radian d'un angle.

$$\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}\ ,\ \boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$$

et

$$\boxed{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1}$$

preuve :

On note $M(\cos(x)\ ,\ \sin(x))$

- Les inégalités sont évidentes car M appartient au cercle trigonométrique.
- Pour l'égalité :

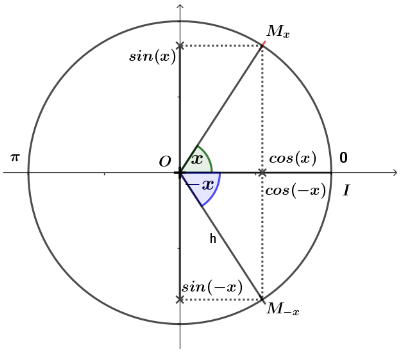
$OM^2 = (x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2 = (\cos(x)-0)^2+(\sin(x)-0)^2$

Or $OM = 1$

Donc $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1$ *cqfd*

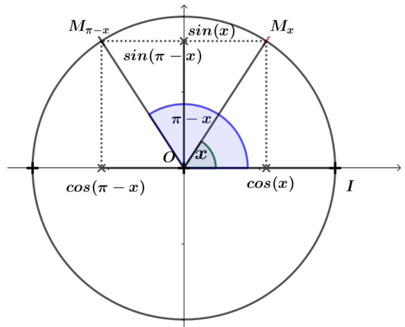
Propriété n°2. ***Angles associés (vive la symétrie!)***

Soit $x \in \mathbb{R}$ (*la mesure en radian d'un angle qui est aussi la longueur au signe près de l'arc* $\widehat{IM}$*.... ça suffit on a compris !*)



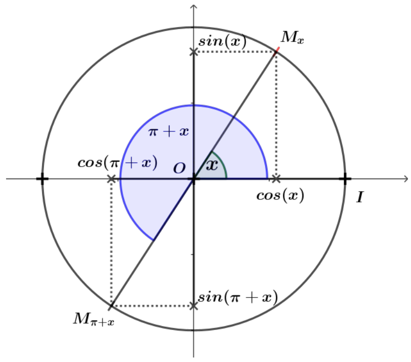
$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$$
et
$$\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$$

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



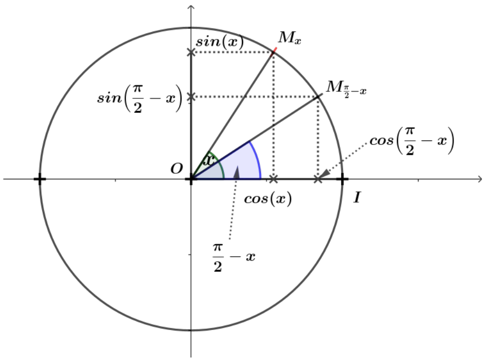
$$\boxed{\cos(\pi-x) = -\cos(x)}$$
et
$$\boxed{\sin(\pi-x) = \sin(x)}$$

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



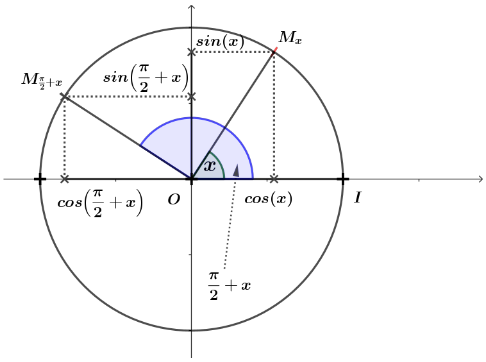
$$\boxed{\cos(\pi+x) = -\cos(x)}$$
et
$$\boxed{\sin(\pi+x) = -\sin(x)}$$

Symétrie par rapport au centre du repère



$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)}$$
et
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)}$$

Symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$



$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)}$$
et
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)}$$

Symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$ puis par rapport à l'axe des ordonnées

Propriété n°3. ***Les valeurs remarquables de la trigonométrie***

x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\infty$

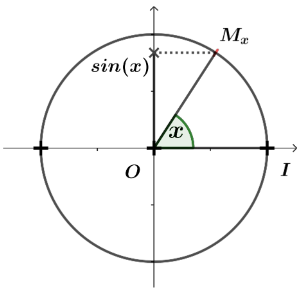
Remarque n°3.

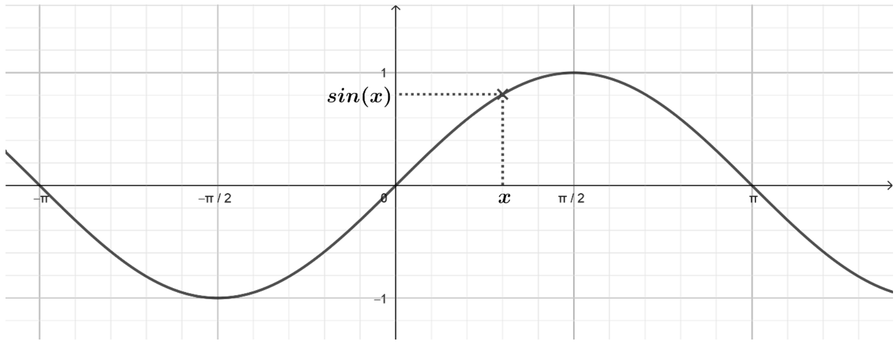
Avec les angles associés, il suffit de connaître les 5 « valeurs principales » de $\cos(x)$ pour retrouver le reste. Néanmoins connaître par cœur la partie grisée vous fera gagner beaucoup de temps.

III Les fonctions trigonométriques

III.1 La fonction sinus

En enroulant, la droite réelle autour du cercle trigonométrique, on a réussi à donner une valeur de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ pour chaque réel x. On peut donc définir deux nouvelles fonctions sur $\mathbb{R}$ tout entier.





Définition n°3. ***La fonction sinus***

On appelle fonction sinus et on note « sin » la fonction définie par :

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

Remarque n°4.

À chaque fois que l'on parcourt 2π on fait un tour du cercle trigonométrique et on revient par conséquent à notre point de départ.

Autrement dit :

Propriété n°4. ***La fonction sinus est 2π - périodique***

Pour tout réel x,

$$\boxed{\sin(x+2\pi) = \sin(x)}$$

On dit alors que la fonction sinus est 2π-périodique .

Remarque n°5.

Si on connaît le comportement de la fonction sinus sur un intervalle de longueur 2π alors on connaît son comportement sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est un des gros avantages des fonctions périodiques.

Connaissance n°2 ***Tableau des variations de sinus sur $[-\pi, \pi]$***

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

Remarque n°6.

On a vu aussi que dans la propriété n°2 que, pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$

Autrement dit :

Propriété n°5. ***La fonction sinus est impaire***

La fonction sinus est une fonction impaire.

Remarque n°7.

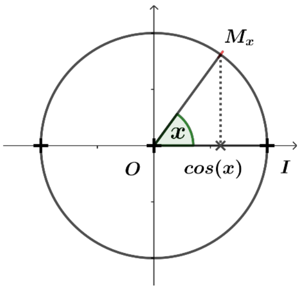
Donc, pour connaître le comportement de la fonction sinus, il suffit de connaître son comportement pour les nombres positifs.

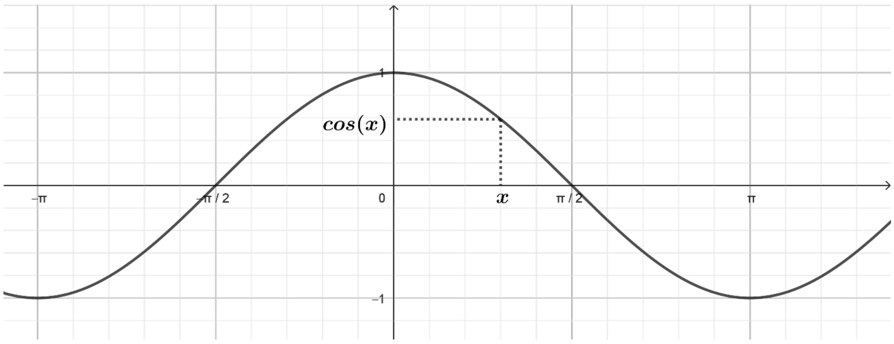
C'est un des gros avantages des fonctions impaires.

Remarque n°8.

Si on réunit les remarques n°5 et n°7, il suffit de connaître le comportement de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ pour le connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier !

III.2 La fonction cosinus





Définition n°4. La fonction cosinus

On appelle fonction cosinus et on note « cos » la fonction définie par :

$$\text{sin}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\cos(x)\end{cases}$$

Remarque n°9.

À chaque fois que l'on parcourt 2π on fait un tour du cercle trigonométrique et on revient par conséquent à notre point de départ.
Autrement dit :

Propriété n°6. La fonction cosinus est 2π - périodique

Pour tout réel x ,

$$\boxed{\cos(x+2\pi)\ =\ \cos(x)}$$

On dit alors que la fonction cosinus est 2π -périodique .

Remarque n°10.

Si on connaît le comportement de la fonction cosinus sur un intervalle de longueur 2π alors on connaît son comportement sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est un des gros avantages des fonctions périodiques.

Connaissance n°3 Tableau des variations de sinus sur $[-\pi\ ,\ \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

Remarque n°11.

On a vu aussi que dans la propriété n°2 que, pour tout réel x , $\cos(-x)\ =\ \cos(x)$
Autrement dit :

Propriété n°7. La fonction cosinus est paire

La fonction cosinus est une fonction paire.

Remarque n°12.

Donc, pour connaître le comportement de la fonction sinus, il suffit de connaître son comportement pour les nombres positifs.
C'est un des gros avantages des fonctions paires.

Remarque n°13.

Si on réunit les remarques n°10 et n°12, il suffit de connaître le comportement de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ pour le connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier !