LA FONCTION CARRÉ E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

1) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4$

Démontrer que f est paire.

Traduction : Montrer que pour tout réel x , on a $f(-x) = f(x)$

Pour cela on détermine l'image de $-x$ par f et on constate que c'est $f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = 3\times(-x)^2+4 = 3x^2+4 = f(x)$

Ainsi pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ ce qui signifie que f est paire.

2) Plus généralement, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax^2+b$ où a est un réel non nul et b est un réel quelconque.

Démontrer que g est paire.

En observant la question 1) et surtout sa réponse, on constate que « 3 et 4 n'ont pas joué de rôle important » on peut donc sûrement *généraliser*. C'est l'objectif de cette question.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = a\times(-x)^2+b = ax^2+b = f(x)$

Ainsi pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ ce qui signifie que f est paire.

On peut aussi montrer que $f(-x)-f(x) = 0$ car $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x+4$

La fonction f est-elle est paire ? Justifier.

Traduction : Il faut montrer que l'on peut mettre en défaut l'égalité « $f(-x)=f(x)$ »

On va le faire de trois façons :

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = 3\times(-x)^2+2\times(-x)+4 = 3x^2-2x+4$

$f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas la même expression développée réduite, elles ne sont pas égales.

Donc f n'est pas paire.

Par exemple pour $x=1$, $f(-1) \neq f(1)$

2)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x)-f(x) = 3(-x)^2+2(-x)+4 - (3x^2+2x+4)$$
$$= 3x^2-2x+4-3x^2-2x-4 = -4x$$

Or l'expression $-4x$ n'est pas toujours nulle (prendre $x=1$ par exemple)

Donc f n'est pas paire.

3)

Donnons un contre-exemple :

Pour $x=1$, on a d'une part

$f(-1) = 3\times(-1)^2+2\times(-1)+4 = 3-2+4 = 5$

et d'autre part

$f(1) = 3\times1^2+2\times1+4 = 3+2+4 = 9$

Ainsi $f(-1) \neq f(1)$

Donc f n'est pas paire.

On a choisi « 1 » pour la simplicité des calculs mais n'importe quelle valeur a telle que $f(-a) \neq f(a)$ est bien sûr valable.

En fait, 1 et 2 se terminent par 3 et on pourrait se dire qu'elles sont inutiles néanmoins vous verrez plus tard que ce n'est pas toujours le cas...

LA FONCTION CARRÉ E01

EXERCICE N°3 Objectif Spé (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a est un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit paire.

On va chercher une condition nécessaire puis on va montrer qu'elle est suffisante.
(Plus tard, vous appellerez cela : L'analyse-synthèse.

Avec les données de l'énoncé, si f est paire alors pour tout réel x , $f(-x)=f(x)$
Cela implique que :
$$ax^2-bx+c = ax^2+bx+c \Leftrightarrow ax^2-bx+c - (ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow -2bx = 0$$
(pour la 1ere égalité)
$$f(-x) = a(-x)^2+b(-x)+c = ax^2-bx+c$$
(pour la 3eme égalité)
$$ax^2-bx+c - (ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow \cancel{ax^2} -bx+\cancel{c} -\cancel{ax^2} -bx-\cancel{c} = 0 \Leftrightarrow -2bx = 0$$
Cette dernière égalité étant vraie pour tout réel x , on en déduit que $\boxed{b=0}$
On vient de trouver notre condition nécessaire : Si f est paire alors $b=0$
Montrons à présent que cette condition est suffisante :
Supposons à présent que $b=0$ alors, pour tout réel x , $f(x) = ax^2+c$.
On a : $f(-x) = a(-x)^2+c = ax^2+c = f(x)$
Donc f est paire.

Ainsi $\boxed{\text{pour que } f \text{ soit paire il faut et il suffit que } b=0}$.