CROISSANCE LINÉAIRE

I Les suites arithmétiques

Définition n°1. ***Suite numérique***

Une **suite** numérique (ou simplement suite) est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

▪ Pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté :
u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 , on note alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions suivantes seront écrites pour le cas où $u_0 = 0$. Nous les adapterons selon les besoins des activités.

CROISSANCE LINÉAIRE

Exemple n°1.

Notation fonctionnelle	***Notation classique***
La suite $(u(n))_{n\geqslant 1}$ définie par : Pour $n \geqslant 1,\ u(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. $u(1)=2$, $u(2)=3$, $u(3)=5$, $u(4)=7$, $u(5)=11$ …	La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : Pour $n \geqslant 1,\ u_n$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=5$, $u_4=7$, $u_5=11$ …

Croissance linéaire

Définition n°2. Suite arithmétique

Une **suite arithmétique** est une suite telle que :
Il existe un nombre réel r tel que :

▪ Pour tout entier naturel n, on peut écrire $u(n+1) = u(n)+r$

▪ r est appelé la **raison de la suite**.

▪ l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$) , il suffit d'ajouter r au terme actuel ($u(n)$).

Remarque n°3. ***Attention à l'écriture***

En notation classique, cela donne « $u_{n+1} = u_n + r$ » qui ne veut pas dire la même chose que « $u_n + 1 = u_n + r$ ».

u_{n+1} est bien le terme suivant alors que $u_n + 1$ est le terme actuel augmenté de 1.

Il faudra donc apporter un soin particulier à l'écriture quand vous utiliserez la notation classique.

Exemple n°2.

Soit la suite arithmétique v de terme initial $v(0) = 4{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$. Les quatre premiers de v sont :

$v(0) = 4{,}5$, $v(1) = 6$, $v(2) = 7{,}5$ et $v(3) = 9$.

Remarque n°4. ***Attention aux rangs***

Le quatrième terme est ici $v(3)$ et pas $v(4)$

CROISSANCE LINÉAIRE E01

EXERCICE N°1 Prise en main

$(u(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $u(0)=-4$ et de raison $r = 2$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$ et r .

2) Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

3) Reprendre les questions 1) et 2) en utilisant la notation classique.

Croissance linéaire

Propriété n°1. ***Exprimer u(n) en fonction de n***

Une suite $\left(u(n)\right)$ est arithmétique de raison *r* si et seulement si :
Pour tout entier naturel *n*, on a $u(n) = u(0)+r\times n$

Remarque n°5.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1)+r\times(n-1)$

Exemple n°3.

Dans l'exemple n°2, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v(n) = 4{,}5+1{,}5n$.

CROISSANCE LINÉAIRE E01

EXERCICE N°2 u(n) en fonction de n (début à 0)

$(u(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $u(0)=-4$ et de raison $r = 2$.

1) Pour tout entier n , exprimer $u(n)$ en fonction de n .

2) Calculer les termes $u(10)$, $u(17)$ et $u(23)$.

3) Reprendre les questions 1) et 2) en utilisant la notation classique.

CROISSANCE LINÉAIRE

EXERCICE N°3 u(n) en fonction de n (début à 1)

$(w(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $w(1)=3$ et de raison $r = -1{,}5$.

1) Pour tout entier n , exprimer $w(n)$ en fonction de n .

2) Calculer les termes $w(10)$, $w(17)$ et $w(23)$.

3) $w(0)$ existe-t-il ?

4) Reprendre les questions 1) et 2) en utilisant la notation classique.

II Et la croissance linéaire dans tout ça ?

Propriété n°2. Pour la croissance

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:

- u est strictement croissante si et seulement si $r > 0$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$ et
- u est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple n°4.

La suite arithmétique w de raison $r = -2$ est strictement décroissante.

Remarque n°6.

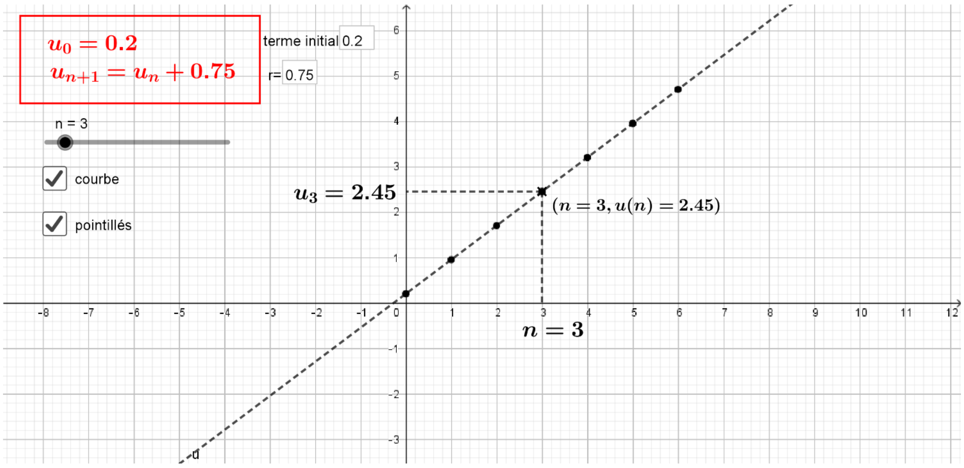
Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.

CROISSANCE LINÉAIRE

Propriété n°3. ***Pour le côté linéaire***

Si u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur une droite de coefficient directeur r .

Exemple n°5.



Remarque n°7.

Les pointillés symbolisent la droite sur laquelle sont alignés les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

EXERCICE N°4 Sens de variation et représentation

1) $(u(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $u(0)=-4$ et de raison $r = 2$.
Déterminer le sens de variation de cette suite.

2) Représenter graphiquement cette suite.

3) Déterminer l'équation réduite de la droite sur laquelle sont alignés les points de la suite.

EXERCICE N°5 Sens de variation et représentation

1) $(v(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $v(1)=3$ et de raison $r'=-2$.
Déterminer le sens de variation de cette suite.

2) Représenter graphiquement cette suite.

3) Déterminer l'équation réduite de la droite sur laquelle sont alignés les points de la suite.

CROISSANCE LINÉAIRE

Méthode n°1. ***Trouver l'équation réduite de la droite en pointillés***

▪ Si le terme initial est $u(0)$ alors $u(n) = u(0)+r\times n$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(0)+r\,x$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(v(n))$ de terme initial $v(0)=4{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$, on a $y = 4{,}5+1{,}5\,x$

▪ Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1)+(n-1)\times r$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(1)-r+r\,x$

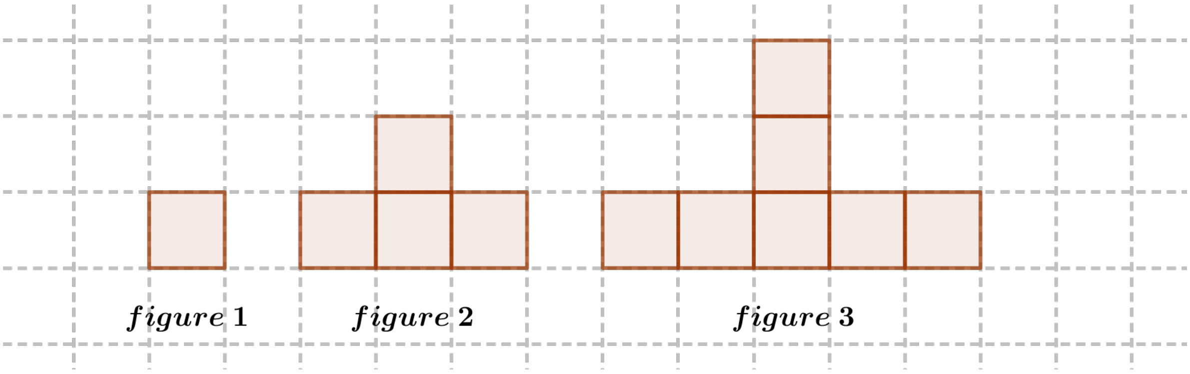
Par exemple, pour la suite arithmétique $(s(n))$ de terme initial $s(1)=6$ et de raison $r' = 1{,}5$, on a $y = 6-1{,}5+1{,}5\,x$ c'est à dire $y = 4{,}5+1{,}5\,x$.

Remarque n°8.

▪ Quand on étudie un phénomène discret à croissance linéaire, on utilise les suites arithmétiques.
▪ Quand on étudie un phénomène continu à croissance linéaire, on utilise les fonctions affines.

EXERCICE N°6 Discret ou continu

Combien y aura-t-il de carrés dans la figure 8 ?



CROISSANCE LINÉAIRE E02

EXERCICE N°1 Reconnaître une suite arithmétique grâce à des données numériques

Pour chaque question, on donne les premiers termes d'une suite. Il faut décider si la suite est arithmétique ou pas et, le cas échéant, donner sa raison.

1) 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; 23

2) 3 ; 8 ; 11 ; 16 ; 19 ; 24

3) 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96

CROISSANCE LINÉAIRE E02

EXERCICE N°2 Reconnaître une suite arithmétique grâce à une relation

Dans chaque question, on donne une relation (valable pour tout entier naturel n) pour la suite considérée. Il faut décider si la suite est arithmétique ou pas et, le cas échéant, donner sa raison.

1) $u(n+1)-u(n) = 17$

2) $v_{n+1} = v_n-3$

3) $w_{n+1} = 2w_n+3$

4) $s(n+1) = n+2$

EXERCICE N°3 Reconnaître une suite arithmétique grâce à un texte

Dans chaque question, une relation est décrite. Il faut décider si la suite est arithmétique ou pas et, le cas échéant, donner sa raison.

1) La suite u a pour premier terme $u_0 = 3$ et chaque autre terme est obtenu en soustrayant 2 au précédent.

2) La suite v a pour premier terme $v_1 = 0{,}5$ et chaque autre terme est obtenu en ajoutant 4,1 au précédent.

3) La suite w a pour premier terme $w(0) = 5$ et chaque autre terme est obtenu en multipliant le précédent par 3.

Croissance linéaire E02

EXERCICE N°4 Exprimer u_n en fonction de n et trouver la droite support

Donner le terme général des suites suivantes, puis donner l'équation réduite de la droite sur laquelle sont alignés les points de leur représentation graphique.

1) u est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

2) v est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $v(1) = 2$.

3) w est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{4}$ et de premier terme $w(1) = 0$.

EXERCICE N°5 ***Suite arithmétique et calcul littéral***

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} + 7 = 0 \end{cases}$.

1) Démontrer que la suite u est arithmétique et préciser ses élément caractéristiques.

2) Exprimer u_n de n et calculer le centième terme de u

EXERCICE N°6 Suite arithmétique, représentation graphique et droite support

Soit u la suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u(0) = 10$.

1) Représenter les trois premiers termes de cette suite dans un repère adapté.
2) Tracer la droite passant par ces points et en déduire $u(3)$ et $u(4)$.

EXERCICE N°7 Suite arithmétique définie par son terme général et droite support

Soit v la suite arithmétique définie pour entier naturel *n* par : $v_n = 1{,}2 - 0{,}4n$.

1) Représenter les trois premiers termes de cette suite dans un repère adapté.
2) Tracer la droite passant pas ces points et en déduire $v(3)$ et $v(4)$.

EXERCICE N°8 **Suite arithmétique définie grâce à l'équation réduite de la droite support**

Soit la fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = 2+3x$. On considère la suite w définie pour tout entier naturel n par : $w_n = f(n)$.

Donner la nature cette suite ainsi que ses éléments caractéristiques.

CROISSANCE LINÉAIRE E03

EXERCICE N°1 Calculer un seuil

1) Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 25+12n$.
Déterminer à partir de quel rang n , on a $u_n > 200$.

2) Soit la suite v définie $v(0) = 3$ et pour tout entier naturel n par $v(n+1) = v(n)+4$.
Déterminer à partir de quel rang n , on a $v(n) > 1500$.

3) Soit w la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de terme initial $w_1 = 150$.
Déterminer à partir de quel rang les termes de w sont strictement négatifs.

EXERCICE N°2 Discret ou continu, modélisation d'un phénomène

On s'intéresse à la position selon le temps et par rapport à l'origine d'un cycliste se déplaçant à vitesse constante sur un axe gradué.

1) S'agit-il d'un phénomène discret ou continu.

2) Préciser son type de croissance.

3) On suppose de plus que la vitesse vaut 35km/h. Proposer une modélisation du phénomène.

CROISSANCE LINÉAIRE E03

EXERCICE N°3 Discret ou continu, modélisation d'un phénomène, calcul de seuil

Le tarif de location d'un maison, fixé initialement à 7000 € par an en 2015, augmente chaque année de 400 €.

1) L'évolution annuelle du loyer est-elle un phénomène discret ou continu ?

2) Quel est son type de croissance ?

3) Proposer une modélisation de ce phénomène.

4) Déterminer le tarif en 2027 .

5) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel dépassera 17000 € .

CROISSANCE LINÉAIRE E04

EXERCICE N°1 Économie

Une usine produit des stylos dont le coût de fabrication unitaire est de 1,50 €. À ce coût de fabrication s'ajoutent 800 € de frais fixes. On suppose que le coût de production $c(x)$ de x milliers de stylos obéit à une croissance linéaire.

1) Calculer le coût de fabrication de 7500 stylos.

2) La fonction c correspond-elle à une évolution continue ? Justifier ?

EXERCICE N°2 Démographie

Une ville française comptait 28 400 habitants en 2006. Depuis sa population diminue linéairement et en 2022, elle est était de 21 200 habitants.

1) Quelle est la diminution annuelle de la population ?

2) Quels sont la raison et le premier terme de la suite v ?

3) Si la tendance de la diminution de la population se poursuit, en quelle année la population de cette ville sera-t-elle inférieure à 20000 habitants ?

EXERCICE N°3 Physique

En France l'unité de mesure de la température est le degré Celsius, noté °C. Dans certains pays anglo-saxons l'unité est le degré Fahrenheit, noté °F.

La conversion des degrés Celsius en degré Fahrenheit s'obtient à l'aide d'une fonction affine f qui à une température c en degrés Celsius fait correspondre une température $f(c)$ en degrés Fahrenheit. Pour un californien, l'eau gèle à 32°F et bout à 212°F.

1) Déterminer l'expression algébrique de $f(c)$.

2) À l'aide de cette expression, répondre aux questions suivantes :

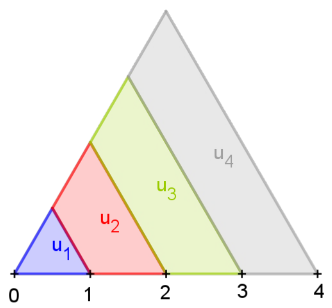
2.a) Quelle est la température « normale » du corps humain en °F ?

2.b) S'il fait 90°F à Los Angeles, est-ce une température supportable ? Justifier.

2.c) Peut-on trouver une température qui s'exprime par le même nombre en °C et en °F ?

EXERCICE N°4 Géométrie

La figure ci-contre indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger.



Tous les triangles sont équilatéraux.

u_1 , u_2 , u_3 et u_4 représentent les aires des surfaces colorées correspondantes.

On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Question pour les spécialistes : Démontrez-le et expliquer-le à vos camarades non spécialistes.

1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4

2) Montrer que $u_n = \dfrac{(2n-1)\sqrt{3}}{4}$

3) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $u_{n+1}-u_n$.

4) En déduire que la suite u est arithmétique et préciser sa raison r .