

LA DÉRIVATION E07C

EXERCICE N°2 Du concret : Optimisation d'un bénéfice

Extrait du Sesamath 1^{er} spe n°81 p158

Une coopérative fabrique du jus de pomme. Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x dizaines de litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction $C : x \mapsto x^2 - x + 10$. Chaque dizaine de litres produite sera vendue 19 €.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction C ?

L'entreprise produit entre 0 et 200 litres de jus, donc le domaine de définition de C est $[0 ; 20]$

2) On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x dizaines de litres vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x .

$$R(x) = 19x$$

Chaque dizaine de litres est vendue 19 €.

3) On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x dizaines de litres de jus de pomme. Quel que soit x , on a $B(x) = R(x) - C(x)$. Montrer que la fonction bénéfice B est définie sur $[0 ; 20]$ par $B(x) = -x^2 + 20x - 10$.

Soit $x \in [0 ; 20]$,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 19x - (x^2 - x + 10) \\ &= 19x - x^2 + x - 10 \\ &= -x^2 + 20x - 10 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0 ; 20]$, $B(x) = -x^2 + 20x - 10$.

4) Étudier les variations de la fonction B sur $[0 ; 20]$.

B est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[0 ; 20]$, elle l'est donc aussi et pour tout $x \in [0 ; 20]$,

$$B'(x) = -2x + 20$$

On en déduit le tableau de variations suivante :

x	0	10	20
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	—10	90	—10

5) En déduire le nombre de litres que la coopérative doit produire afin d'obtenir un bénéfice maximum.

D'après le tableau de variations, la coopérative doit produire 100 L.

Attention à ne pas aller trop vite et oublier les unités de l'énoncé...