

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°4 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne a et b deux nombres réels tels que : $a > 0$ et $b > \sqrt{a}$.

On donne également la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Notre but est de comprendre que le terme u_n tend vers \sqrt{a} .

1) Un premier cas : $a = 2$ et $b = 5$.

1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 5$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{2}{5} \right)$, ainsi $u_1 = 2,7$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{2}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2,7 + \frac{2}{2,7} \right)$, ainsi $u_2 \approx 1,72$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{2}{u_2} \right)$, ainsi $u_3 \approx 1,441$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left(u_3 + \frac{2}{u_3} \right)$, ainsi $u_4 \approx 1,414$

n	u_n
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec \sqrt{a} .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 1,414213562

N début	500
N fin	520
Pas	1
Valider	

n	u_n
500	1.414213562
501	1.414213562
502	1.414213562
503	1.414213562
504	1.414213562
505	1.414213562
506	1.414213562

Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$	1.414213562
------------	-------------

2) Un premier cas : $a = 5$ et $b = 10$.

2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 10$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{5}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{5}{10} \right)$, ainsi $u_1 = 5,25$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{5}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5,25 + \frac{5}{5,25} \right)$, ainsi $u_2 \approx 3,101$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{5}{u_2} \right)$, ainsi $u_3 \approx 2,357$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left(u_3 + \frac{5}{u_3} \right)$, ainsi $u_4 \approx 2,239$

n	u_n
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec \sqrt{a} .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 2,236067977

Régler l'intervalle

N début	500
N fin	520
Pas	1

Valider

n	u_n
500	2.236067977
501	2.236067977
502	2.236067977
503	2.236067977
504	2.236067977
505	2.236067977
506	2.236067977

Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$	2.236067977
------------	-------------