LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $5^x > 1$ **2)** $2^x \leqslant 1$

3) $\log(2x) > 1$ **4)** $\log(3x-1) \leqslant 0$

1)

$$5^x > 1 \Leftrightarrow \underbrace{\log(5^x) > \log(1)}_{\substack{\text{car la fonction log} \\ \text{est strictement croissante}}} \Leftrightarrow x\log(5) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{x > \frac{0}{\log(5)}}_{\text{car } \log(5)>0} \Leftrightarrow x > 0$$

On en déduit que cette inéquation admet comme $\boxed{\text{ensemble des solutions : }]0\ ;\ +\infty[}$

2)

$$2^x \leqslant 1 \Leftrightarrow \underbrace{\log(2^x) \leqslant \log(1)}_{\substack{\text{car la fonction log} \\ \text{est strictement croissante}}} \Leftrightarrow x\log(2) \leqslant 0 \Leftrightarrow \underbrace{x \leqslant \frac{0}{\log(2)}}_{\text{car } \log(2)>0} \Leftrightarrow x \leqslant 0$$

On en déduit que cette inéquation admet comme $\boxed{\text{ensemble des solutions : }]-\infty\ ;\ 0]}$

3)

On se place dans $]0\ ;\ +\infty[$ pour résoudre cette inéquation.

$$\log(2x) > 1 \Leftrightarrow \underbrace{10^{\log(2x)} > 10^1}_{\substack{\text{car la fonction exponentielle} \\ \text{de base 10 est strictement} \\ \text{croissante}}} \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$$

On en déduit que cette inéquation admet comme $\boxed{\text{ensemble des solutions : }]5\ ;\ +\infty[}$

4)

On va donc se placer dans $\left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ pour résoudre cette équation.

$$\log(3x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \underbrace{10^{\log(3x-1)} \leqslant 10^0}_{\substack{\text{car la fonction exponentielle} \\ \text{de base 10 est strictement} \\ \text{croissante}}} \Leftrightarrow 3x-1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{2}{3}$$

On en déduit que cette inéquation admet comme $\boxed{\text{ensemble des solutions : } \left]\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right]}$

Si on avait pas fait attention au domaine de validité (voir exercice n°1) alors on aurait donné comme ensemble des solutions : $\boxed{\left]-\infty\ ;\ \frac{2}{3}\right]}$

Remarquez la différence entre les questions :
1) et 2) on sert de (compose par) la fonction log dans chaque membre de l'inégalité et cette inégalité est conservée car la fonction log est croissante.
3) et 4) cette fois-ci on sert de (compose par) la fonction exponentielle de base 10 ($x \to 10^x$) dans chaque membre de l'inégalité et cette inégalité est conservée car la fonction exponentielle de base 10 est croissante.