LA DÉRIVATION E03C

Définition partielle :

cliquez-moi

Soit f et g deux fonctions.
On appelle composée de f par g et on note $f \circ g$ la fonction :
$f \circ g : x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

EXERCICE N°1 fonction affine et fonction carré

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+4 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ la fonction carré. Pour $x \in \mathbb{R}$:

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x+4) \\ &= (3x+4)^2 \\ &= 9x^2+24x+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 3x^2+4 \end{aligned}$$

On retient que l'ordre dans lequel on compose est important.

2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.

$(f \circ g)'(x) = 18x+24$

$(g \circ f)'(x) = 6x$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$f'(x) = 2x$

$g'(x) = 3$

4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.

$$\begin{aligned} g'(x) \times f'(g(x)) &= 3 \times f'(g(x)) \\ &= 3 \times 2(3x+4) \\ &= 18x+24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) \times g'(f(x)) &= 2x \times g'(f(x)) \\ &= 2x \times 3 \\ &= 6x \end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à 3

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées :

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

EXERCICE N°2 ***fonction affine et fonction inverse***

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{1}{x}\end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= \frac{1}{3x+4}\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $3x+4\neq 0$.
On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

Se lit « R privé de moins quatre tiers ».

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= 3\times\frac{1}{x}+4\\ &= \frac{3}{x}+4\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.
On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

On notera que l'ordre dans lequel on compose a des conséquences sur le domaine de définition (c'est pour cela que la définition de départ a été qualifiée de « partielle »).

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

$\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ n'est pas un intervalle…

$$\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{4}{3}\right[\ \cup\ \left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$$

▪ Pour $x\in\left]-\infty\ ;\ -\frac{4}{3}\right[$

$(f\circ g)(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$, dont la dérivée s'exprime par $\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

Donc :

$$(f\circ g)'(x) = -\frac{3}{(3x+4)^2}$$

▪ De la même façon, pour $x\in\left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$$(f\circ g)'(x) = -\frac{3}{(3x+4)^2}$$

$\mathbb{R}^*$ non plus...

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Donc :

▪ Pour $x\in\left]-\infty\ ;\ 0\right[$

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= 3\times\frac{-1}{x^2}+0\\ &= -\frac{3}{x^2}\end{aligned}$$

▪ De la même façon, pour $x\in\left]0\ ;\ +\infty\right[$

$$(g\circ f)'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 3$$

4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.

▪ Pour $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{4}{3}\right[$

$$\begin{aligned} g'(x)\times f'(g(x)) &= 3\times f'(g(x)) \\ &= 3\times\frac{-1}{(g(x))^2} \\ &= 3\times\frac{-1}{(3x+4)^2} \\ &= \frac{-3}{(3x+4)^2} \end{aligned}$$

▪ De la même façon, pour $x \in \left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = \frac{-3}{(3x+4)^2}$$

▪ Pour $x \in \left]-\infty\ ;\ 0\right[$

$$\begin{aligned} f'(x)\times g'(f(x)) &= -\frac{1}{x^2}\times g'(f(x)) \\ &= -\frac{1}{x^2}\times 3 \\ &= -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à 3

▪ De la même façon, pour $x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$

$$f'(x)\times g'(f(x)) = -\frac{3}{x^2}$$

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la ligne concernant l'inverse dans le tableau de la propriété n°5 semble être cas particulier de la composition.

EXERCICE N°3 fonction affine et fonction racine carrée

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= \sqrt{3x+4}\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie il faut et il suffit que $3x+4\geqslant 0$.
Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $3x+4>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $\left[\dfrac{-4}{3}\ ;\ +\infty\right[$,
et que son domaine de dérivabilité est : $\left]\dfrac{-4}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x})\\ &= 3\times\sqrt{x}+4\\ &= 3\sqrt{x}+4\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie, il faut et il suffit que $x\geqslant 0$,
et pour qu'elle soit dérivable, il faut et il suffit que $x>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $[0\ ;\ +\infty[$.
Et que le domaine de dérivabilité de $f\circ g$ est $]0\ ;\ +\infty[$.

On notera encore l'importance de l'ordre dans lequel on compose…

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f\circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main…

Soit h tel que $x+h\in\left]\dfrac{-4}{3}\ ;\ +\infty\right[$,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x) &= \frac{\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}}{h}\\
&= \frac{\left(\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}\right)\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\
&= \frac{\left(\sqrt{3(x+h)+4}\right)^2-\left(\sqrt{3x+4}\right)^2}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\
&= \frac{3(x+h)+4-(3x+4)}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\
&= \frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\
&= \frac{3}{\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}}\end{aligned}$$

Oh mais ça ressemble beaucoup à l'exercice n°1 de la fiche E02 !

Or : cette dernière expression tend vers $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ quand h tend vers zéro.

Pour les plus observateurs : il faudrait être sûr que $x+h$ continue d'appartenir à $\left]\dfrac{-4}{3}\ ;\ +\infty\right[$ quand h tend vers zéro. Rassurez-vous, c'est bien le cas.

On en déduit que $(f\circ g)'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

▪ Pour $(g\circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Donc :

$$(g\circ f)'(x) = 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+0$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 3$$

Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.

$$g'(x)\times f'(g(x)) = 3\times f'(g(x))$$
$$= 3\times\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$$
$$= 3\times\frac{1}{2\sqrt{3x+4}}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$f'(x)\times g'(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times g'(f(x))$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\times 3$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

g' est la fonction constante égale à 3

4) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la dernière ligne du tableau semble simplifier beaucoup les choses !

EXERCICE N°4 ***fonction affine et fonction valeur absolue***

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= |3x+4| \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour que cette fonction soit dérivable,
il faut et il suffit que $3x+4\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g(|x|)\\ &= 3\times|x|+4\\ &= 3|x|+4 \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $g\circ f$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}^*$.

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f\circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main...

$f\circ g(x) = |3x+4| = \begin{cases}3x+4 & \text{, si } 3x+4 \geqslant 0\\ -(3x+4) & \text{, si } 3x+4 < 0\end{cases}$ que l'on va « simplifier ».

$$f\circ g(x) = |3x+4| = \begin{cases}3x+4 & \text{, si } x \geqslant -\dfrac{4}{3}\\ -(3x+4) & \text{, si } x < -\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

On en déduit que :

$$(f\circ g)'(x) = \begin{cases}3 & \text{, si } x > -\dfrac{4}{3}\\ -3 & \text{, si } x < -\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$f\circ g$ n'est pas dérivable en $\dfrac{-4}{3}$: il faudrait que 3 égale -3…

▪ Pour $(g\circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Donc :

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases}3\times 1+0 & \text{, si } x > 0\\ 3\times(-1)+0 & \text{, si } x < 0\end{cases}$$

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases}3 & \text{, si } x > 0\\ -3 & \text{, si } x < 0\end{cases}$$

$g\circ f$ n'est pas dérivable en 0 : il faudrait que 3 égale -3…

LA DÉRIVATION E03

Définition partielle :

cliquez-moi

Soit f et g deux fonctions.
On appelle composée de f par g et on note $f\circ g$ la fonction :
$f\circ g : x\mapsto f\circ g(x) = f(g(x))$

EXERCICE N°1 fonction affine et fonction carré

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ la fonction carré. Pour $x\in\mathbb{R}$:

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$
4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$
5) Comparer les questions 2) et 4)

EXERCICE N°2 fonction affine et fonction inverse

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$
4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$
5) Comparer les questions 2) et 4)

EXERCICE N°3 fonction affine et fonction racine carrée

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$
4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$
5) Comparer les questions 2) et 4)

EXERCICE N°4 fonction affine et fonction valeur absolue

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$