# *FONCTIONS PART4*

## *I Extremums d'une fonction*

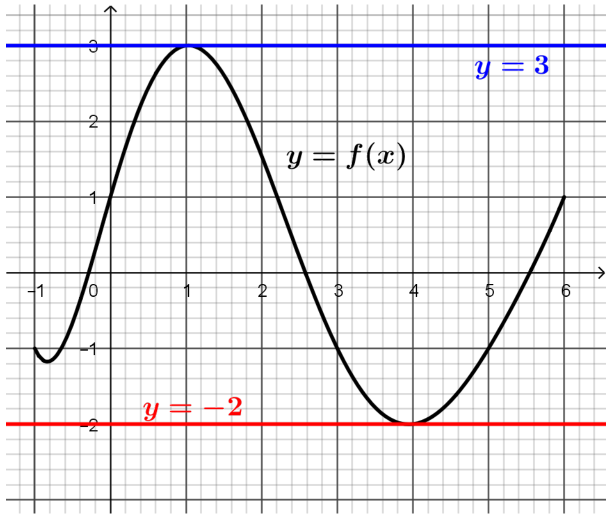
***Définition n°1.***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $c \in I$.

- On dit que $f(c)$ est un maximum de $f$ sur $I$ si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que $f(c)$ est un minimum de $f$ sur $I$ si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(c)$.

***Exemple n°1.***

Soit fonction $f$ définie sur $I=[-1\ ;\ 6]$ et représentée ci-dessous.




- $f$ admet un minimum sur $I$ qui est le nombre $-2 = f(4)$.
- $f$ admet un maximum sur $I$ qui est le nombre $3 = f(1)$.

***Remarque n°1.*** ***Extremum global ou local***

Dans l'exemple précédent, nous avons donné les extremums globaux de la fonction car nous avons considéré tout l'ensemble de définition.

On pourrait définir des extremums locaux en considérant un intervalle plus petit.

Par exemple, sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$, $f$ admet $-1=f(5)$ comme minimum et $1=f(6)$ comme maximum.

***Propriété n°1.*** ***(admise)***

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et dérivable sur $\mathring{I}$ et $c \in \mathring{I}$. Si $c$ est un extremum de $f$ alors $f'(c)=0$.

***Exemple n°2.***

Notons $g:\begin{cases}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{cases}$ la fonction carrée. Nous savons que $g$ admet un minimum en $c=0$. La propriété nous dit qu'alors $g'(0)=0$

Effectivement, pour tout $x$, $g'(x)=2x$ et $2\times 0=0$.

***Remarque n°2.***

La réciproque de cette propriété est fausse. Notons $h:\begin{cases}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{cases}$ la fonction cube. On a $h'(0)=3\times 0^2=0$ et pourtant la valeur $0$ n'est pas un extremum de la fonction. (Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

## II Un exemple d'étude de fonction

Après un énoncé quelconque, on nous annonce que tel ou tel phénomène peut être modélisé grâce à la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ 40]$ par :

$$f(x) = x^3 - 36x^2 + 285x - 250$$

**1)** Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$

**2)** En déduire les racines de $f$ .

**3)** Déterminer une expression de $f'(x)$ .

**4)** Montrer que $f'(x) = 3(x-5)(x-19)$ .

**5)** Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ .

**6)** Dresser le tableau des variations de $f(x)$ .

**7)** Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction $f$ ?

**8)** Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 7.

La correction qui résume les savoirs-faire sur les fonctions que vous devez maîtriser.

**1)** Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$ .

$$\begin{aligned}(x-1)(x-10)(x-25) &= (x-1)[x^2 - 25x - 10x + 250] \\ &= (x-1)[x^2 - 35x + 250] \\ &= x^3 - 35x^2 + 250x - x^2 + 35x - 250 \\ &= x^3 - 36x^2 + 285x - 250 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f(x)$ .
Par contre, on ne commence pas par écrire « $f(x) =$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.

Ainsi, on a bien : $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$ .

**2)** En déduire les racines de $f$ .

Les racines de $f$ sont $\boxed{1\ ;\ 10 \text{ et } 25}$ .

**3)** Déterminer une expression de $f'(x)$ .

On note l'expression de $f(x)$ donc sans le $'$

$f(x) = x^3 - 36x^2 + 285x - 250$

Puis on commence à déterminer celle de $f'(x)$ donc avec le $'$

$f'(x) = 3x^2 - 36 \times 2x + 285 \times 1 - 0$

On simplifie bien sûr cette expression

$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 72x + 285}$

**4)** Montrer que $f'(x) = 3(x-5)(x-19)$

$$\begin{aligned}3(x-5)(x-19) &= 3[x^2 - 19x - 5x + 95] \\ &= 3(x^2 - 24x + 95) \\ &= 3x^2 - 72x + 285 \\ &= f'(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f'(x)$
Par contre, on ne commence pas par écrire « $f'(x) =$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.

Ainsi, on a bien : $f'(x) = 3(x-5)(x-19)$ .

**5)** Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ .

On travaille avec la forme factorisée de $f'(x)$ .

Il y a 3 facteurs, on résoudra donc 3 inéquations qui nous permettront de savoir où placer les « + » dans le tableau (c'est pour cela que les inéquations sont du type « $>0$ » ):

$3>0$ est vraie quelque soit la valeur de $x$

$x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

$x-19>0 \Leftrightarrow x>19$

| $x$ | 0 | | 5 | | 19 | | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | + | \| | + | \| | + | |
| $x-5$ | | − | 0 | + | \| | + | |
| $x-19$ | | − | \| | − | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Les signes ne s'écrivent pas en dessous des nombres mais entre eux.

Étudions la 1ere colonne de signes (on va de haut en bas) :

Le 1er + signifie que pour tous les nombres ($x$) appartenant à $[0\ ;\ 5[$ , 3 est strictement positif (élémentaire mon cher Watson…).

Le − qui suit signifie que pour tous les nombres ($x$) appartenant à $[0\ ;\ 5[$ , $x-5$ est strictement négatif.

Le − suivant signifie que pour tous les nombres ($x$) appartenant à $[0\ ;\ 5[$ , $x-19$ est strictement négatif.

Sur $[0\ ;\ 5[$ les trois facteurs ont un signe constant, on peut donc appliquer sans risque la règle des signes pour obtenir que sur $[0\ ;\ 5[$ , $f'(x)$ est strictement positif

(« + par − par − ça donne + »)

On a fait la même chose avec les autres colonnes

**6)** Dresser le tableau des variations de $f(x)$ .

On va se servir de la question précédente et je vais ajouter une ligne cyan (et hé oui c'est la couleur utilisée ici) qui rappellera la dernière du tableau précédent. Cette ligne n'est pas à écrire sur la copie .

| $x$ | 0 | | 5 | | 19 | | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $f(0)=-250$ | $\nearrow$ | $f(5)=400$ | $\searrow$ | $f(19)=-972$ | $\nearrow$ | $f(40)=7550$ |

**7)** Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction $f$ ?

Le maximum vaut $7550$ et est atteint quand $x=40$

Le minimum vaut $-972$ et est atteint quand $x=19$

On peut remarquer que $400$ n'est qu'un maximum local (par exemple sur $[0\ ;\ 19]$ )

Il faut donc faire attention et ne pas oublier les valeurs extrêmes de l'ensemble de définition.

**8)** Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 7.

Une équation de la tangente au point d'abscisse est :

$y=f'(7)(x-7)+f(7)$

On remplace $f'(7)$ et $f(7)$ par leur valeur

$y=324(x-7)-72$

On développe et réduit l'expression

$\boxed{y=324x-2340}$

# *FONCTIONS PART4 E01*

## *EXERCICE N°1*

On donne la fonction $f$ définie sur $[-20\ ;\ 20]$ par : $f(x)=x^3-6x^2-135x+572$

**1)** Montrer que $f(x)=(x+11)(x-4)(x-13)$ .

**2)** En déduire les racines de $f$ .

**3)** Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ .

**4)** Montrer que $f'(x)=3(x-9)(x+5)$ .

**5)** Dresser le tableau de signe de $f'$ .

**6)** En déduire le tableau de variations de $f$ .

**7)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $10$ .

## *EXERCICE N°2*

On donne la fonction $f$ définie sur $[-20\ ;\ 40]$ par : $f(x)=x^3-33x^2-144x+3740$

**1)** Montrer que $f(x)=(x+11)(x-10)(x-34)$ .

**2)** En déduire les racines de $f$ .

**3)** Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ .

**4)** Montrer que $f'(x)=3(x-24)(x+2)$ .

**5)** Dresser le tableau de signe de $f'$ .

**6)** En déduire le tableau de variations de $f$ .

**7)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $-5$ .

## EXERCICE N°3 *tableur*

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de $x$ lecteurs est modélisé par la fonction $CT$ définie sur l'intervalle $[0 ; 500]$ par : $CT(x)=0{,}4x^3-7x^2+60x+120$

On appelle coût marginal au rang $x$, noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque $x$ pièces ont déjà été produites.

Ainsi $Cm(x)=CT(x+1)-CT(x)$

**1)** Calculer $Cm(5)$. Donner une interprétation.

**2)** On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de $x$.

Pour limiter les calculs nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | CT(x) | CT(x+1)-CT(x) | Approximation par CT'(x) | écart avec la valeur réelle |
| 2 | 0 | 120 | 53,4 | | |
| 3 | 1 | 173,4 | 41,8 | | |
| 4 | 2 | 215,2 | 32,6 | | |
| 5 | | | | | |

**2.a)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

**2.b)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

**2.c)** Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 MP3

Attention : Il ne peut y avoir de production d'un 501^e lecteur, par conséquent sur la dernière seules les colonnes A et B devront être complétées.

**3)** En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi, $Cm(x)\approx CT'(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 500$

**3.a)** Montrer que pour appartenant à l'intervalle $[0 ; 500]$, $Cm(x)=1{,}2x^2-12{,}8x+53{,}4$.

**3.b)** Calculer alors pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0 ; 500]$ $CT'(x)$ et proposer une approximation de $Cm(x)$.

**3.c)** Calculer $Cm(5)$ à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question 1. a.? Qu'en pensez-vous?

**3.d)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de $Cm(x)$ par $CT'(x)$ ?

**3.e)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

**3.f)** Observer l'intégralité de la colonne D.

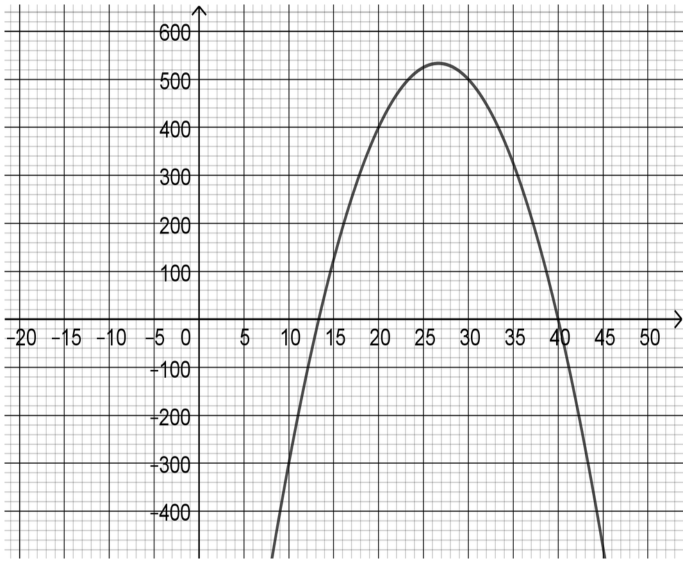
Que pensez-vous de cette approximation proposée pour le coût marginal?

# *FONCTIONS PART4 E02*

## *EXERCICE N°1* *E3C* *T1CMATH00099*

Une entreprise fabrique des lampes solaires. Elle ne peut pas produire plus de 5000 lampes par mois.
Le résultat qu'elle peut réaliser en un mois, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction $b$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On rappelle que lorsque le résultat est positif, on l'appelle bénéfice. L'axe des abscisses indique le nombre de lampes produites et vendues exprimé en centaines.




En utilisant le graphique :

**1)** Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**2)** Déterminer avec la précision que la lecture graphique permet, le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.

**3)** La fonction $b$ définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ est définie par l'expression suivante : $b(x)=-3x^2+160x-1600$ .

**3.a)** Montrer que $b(x)=(x-40)(-3x+40)$ .
**3.b)** Résoudre $b(x)=0$
**3.c)** Donner la valeur exacte du maximum de la fonction $b$ et en quel nombre il est atteint.

**_EXERCICE N°2_** **_E3C_** **_T1CMATH00099_**

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction $r$ définie sur l'intervalle $[200\ ;\ 400]$ par $r(x)=-0{,}01\,x^3+4\,x^2$ .

**1)** On admet que la fonction $r$ est dérivable sur $[200\ ;\ 400]$ et on note sa dérivée $r'$ . Calculer $r'(x)$ et montrer que $r'(x)=x(-0{,}03\,x+8)$

**2)** Donner le tableau de signe de la fonction dérivée $r'$ sur l'intervalle [200 ; 400].

**3)** En déduire le tableau de variation de la fonction $r$ sur l'intervalle [200 ; 400].

**4)** Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle [200 ; 400] ? En quelle valeur est-il atteint ?

**5)** Pour vérifier la solution de l'équation sur $r'(x)$ l'intervalle [200 ; 400], on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8) > 0:
        x = x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que renvoie l'instruction : `balayage(1)` ?