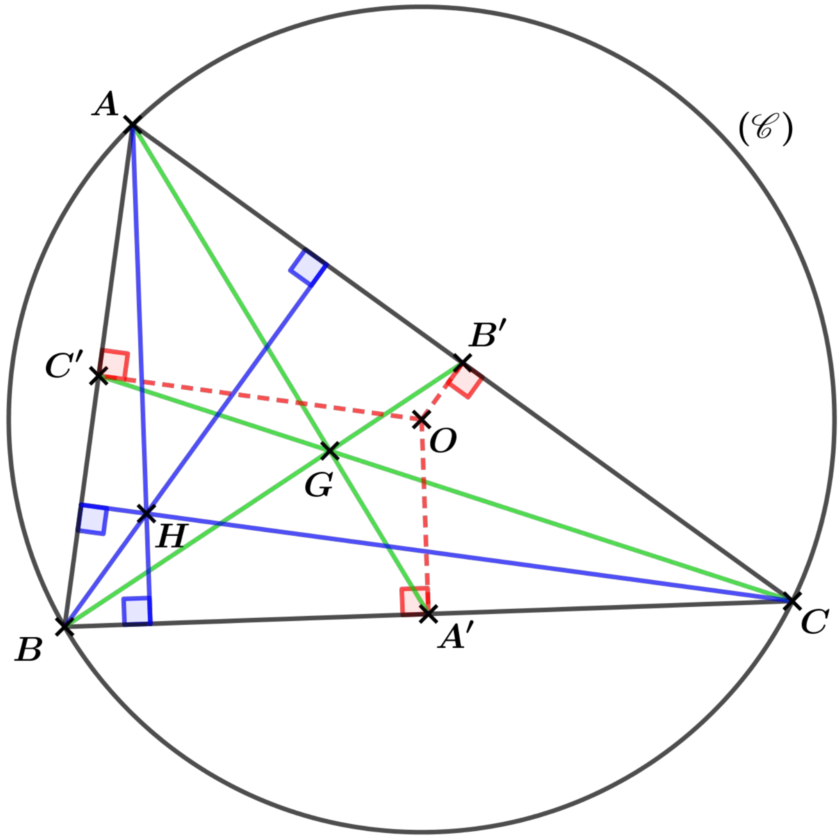
Les vecteurs Objectif S le corrigé

EXERCICE N°1 Droite d'Euler d'un triangle

ABC est un triangle. On note :

- A', B' et C' les milieux respectifs des côtés ; $[BC], [AC]$ et $[AB]$
- son cercle circonscrit de centre O
- G son centre de gravité;
- H son orthocentre.

Figure cliquable



Rappels :

• Le centre de gravité G est le point de concours des médianes

• L'orthocentre H est le point de concours des hauteurs.

• Le centre O du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices.

• La droite passant par les points G, H et O s'appelle la droite d'Euler.

1) X est le point vérifiant $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1.a) Démontrer que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$

$\overrightarrow{AX}$	$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}$	Relation de Chasles
	$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	par définition de X
	$= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C}$	$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ et deux relations de Chasles
	$= 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$	A' milieu de $[BC] \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$
	$= 2\overrightarrow{OA'}$	

1.b) Justifier que le point X appartient à la hauteur issue de A .

On se place dans le triangle ABC .

Nous savons que :

$\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$

En particulier, les droites (AX) et (OA') sont parallèles.

De plus, les droites (OA') et (BC) sont perpendiculaires.

Or : Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc (AX) est la hauteur issue de A, ce qui justifie bien sûr que X appartient à la hauteur issue de A.

1.c) Démontrer également que $\overrightarrow{BX}=2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CX}=2\overrightarrow{OC'}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BX} &= \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OX}\\ &= \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C}\\ &= 2\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}\\ &= 2\overrightarrow{OB'}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OX}\\ &= \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'B}\\ &= 2\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}\\ &= 2\overrightarrow{OC'}\end{aligned}$$

1.d) Justifier que les points X et H sont confondus.

Pour les même raisons qu'à la question 1b) X appartient également aux hauteurs issues respectivement de B et C

2) On sait que G vérifie la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2.a) Démontrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=\vec{0} \qquad \text{d'après la question 1)}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OH}=-3\overrightarrow{GO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

2.b) Que peut-on dire des points O,G et H ?

Nous savons que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$
En particulier, les droites (OH) et (OG) sont parallèles (au sens large)
Comme elles ont de plus un point commun, on en déduit qu'elles sont confondues.
Ainsi les points O,G et H sont bien alignés.

3) On note H_1 le symétrique de H par rapport à A' .

3.a) Justifier que $\overrightarrow{HH_1}=2\overrightarrow{A'H_1}$.

$$\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{A'H_1} = \overrightarrow{A'H_1}+\overrightarrow{A'H_1} = 2\overrightarrow{A'H_1}$$

3.b) Sachant que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$, démontrer que $\overrightarrow{AH_1}=2\overrightarrow{OH_1}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_1} &= \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH_1}\\ &= 2\overrightarrow{OA'}+2\overrightarrow{A'H_1} \qquad \text{d'après la question précédente}\\ &= 2\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'H_1}\right)\\ &= 2\overrightarrow{OH_1}\end{aligned}$$

3.c) En déduire la position de O sur $[AH_1]$.

On en déduit que O est le milieu de $[AH_1]$.

3.d) Qu'en déduit-on pour le point H_1 ?

On sait que $[OA]$ est un rayon du cercle (**C**) .
Donc $[AH_1]$ est un diamètre de (**C**) ce qui implique que $H_1 \in$ (**C**)

3.e) De la même manière, que peut-on dire des points H_2 et H_3 , symétriques respectifs de H par rapport à B' et C' ?

De la même manière, on peut montrer que H_2 et H_3 appartiennent au cercle