Квадратна функція

I Означення та вивчення функції квадрата

Définition n°1.

Квадратна функція – це функція, визначенаг $g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{cases}$

Définition n°2.

Нехай f — функція, визначена на D_f .
« f **f парне** » значить, що : **За все** $\boldsymbol{x \in D_f,\ f(-x)=f(x)}$

Propriété n°1.

Квадратна функція парна.

preuve :

Позначимо g функцію квадрата.
Це є $x \in \mathbb{R}$ (оскільки $D_g=\mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^2 = -x\times(-x) = x^2 = g(x)$
Отже, g парне.

Remarque n°1.

Якщо функція парна, то її область визначення симетрична відносно нуля.

Définition n°3. ***зростання***, ***розпад***

Нехай f — функція, визначена на D_f , а $I \subset D_f$ — інтервал.
Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f строго зростає на I » значить, що :
Для всіх a і b , що належать I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » значить, що :
Для всіх a і b , що належать I , $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » значить, що :
Для всіх a і b , що належать I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » значить, що :
Для всіх a і b , що належать I , $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Remarque n°2.

Ми говоримо, що зростаюча функція зберігає порядок, а спадна змінює порядок.

Propriété n°2. ***Варіанти функції квадрата***

Квадратна функція строго спадає на $]-\infty\ ;\ 0]$ і строго зростає на $[0\ ;\ +\infty[$. Це дає наступну таблицю варіацій:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

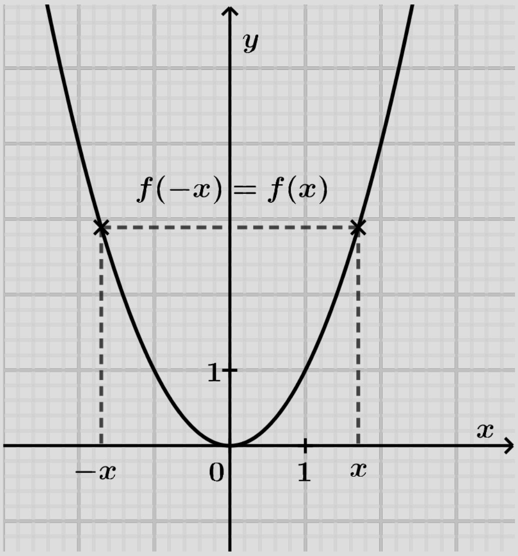
preuve :

▪ бути $a < b \leqslant 0$
$f(a)-f(b) = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
золото $a+b<0$ (оскільки a і b негативні) et $a-b<0$ (оскільки $a<b$)
Так $(a+b)(a-b) > 0$ з чого ми виводимо, що $f(a)>f(b)$
Таким чином, f строго спадає на $]-\infty\ ;\ 0]$.

▪ Таким же чином ми доводимо, що f строго зростає на $[0\ ;+\infty[$.
(Цю другу частину залишили як вправу)

Définition n°4. Графічне представлення

Графіком квадрата функції є парабола



Точка O, початок відліку, є вершиною параболи.

Propriété n°3.

Графічне зображення квадратичної функції допускає вісь ординат як вісь симетрії.

II Квадратні рівняння та нерівності.

II.1 Вкладення дійсного числа та округлення

Propriété n°4. Рівняння типу $x^2 = a$

Нехай a — дійсне число.
▪ чи $a > 0$ так:
рівняння $x^2 = a$ допускає два розв'язки: $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
▪ чи $a = 0$ так:
рівняння $x^2 = a$ допускає рішення : *нуль* .
▪ чи $a < 0$ так:
рівняння $x^2 = a$ не допускає вирішення.

preuve :

▪ Другий момент очевидний.
▪ Третя пов’язана з тим, що квадрат дійсного числа завжди додатний.
▪ Для першого пункту:
чи $a > 0$ так $\sqrt{a}$ існують.
Тоді наступні рівняння еквівалентні:

$$x^2 = a$$
$$x^2 - a = 0$$
$$\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right) = 0$$

Добуток множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із його множників дорівнює нулю.
Виводимо, що це рівняння допускає два розв’язки $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Remarque n°3.

Іноді корисно навести приблизні значення рішень, якщо вони існують. це те, що мотивує решту цього абзацу.

Propriété n°5. ***(зізнався)***

Нехай x — дійсне число, а n — відносне ціле.

Існує унікальне відносне ціле число a таке, що : $\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$

Définition n°5.

Ця дужка є десятковою дужкою від x до **x à 10^{-n} біля** .

Округлення x à 10^{-n} près яке з двох чисел $\frac{a}{10^n}$ і $\frac{a+1}{10^n}$ найближче до x .

За домовленістю, коли x рівновіддалений від $\frac{a}{10^n}$ і з $\frac{a+1}{10^n}$, округлення x à 10^{-n} près є $\frac{a+1}{10^n}$

Нерівності типу

Exemple n°1.

$\frac{16812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \frac{16813}{10^3}$ тому рамки 16,8127 à 10^{-3} є:

$16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ і округлення до 10^{-3} варто 16,813.

II.2 ~~*Нерівності типу*~~ $x^2 \leqslant k$ et $x^2 \geqslant k$

Нерівності типу

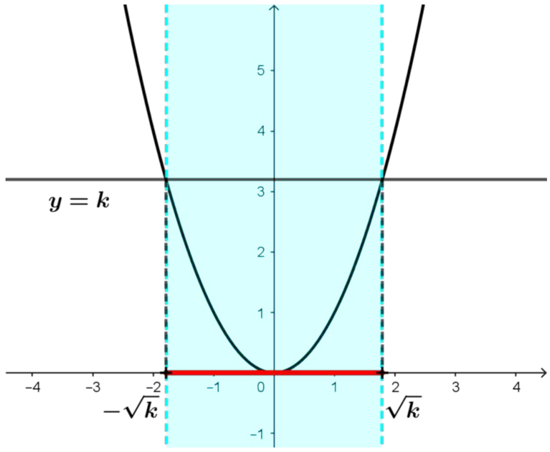
Propriété n°6.

в $\mathbb{R}$, нерівність $x^2 \leqslant k$ допускає як набір рішень S :

чи $k>0$ так $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

чи $k=0$ так $S=\{0\}$

чи $k<0$ так $S=\varnothing$



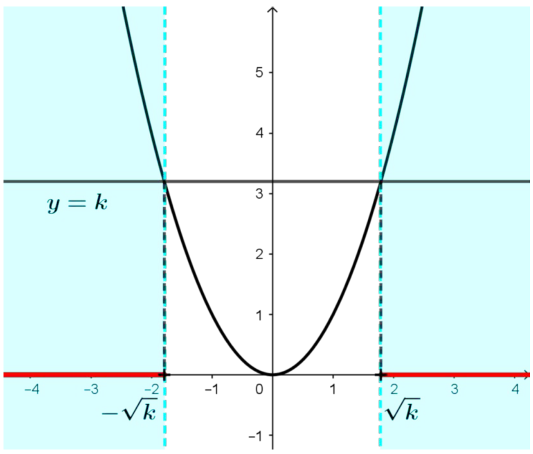
preuve :

Propriété n°7.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors
$S=]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}]\ \cup\ [\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k \leqslant 0$ alors $S=\mathbb{R}$



preuve :

Remarque n°4.

У двох попередніх доказах ми розв'язували нерівності добутку. Використаний метод можна узагальнити у вигляді таблиці знаків. Чим мотивований останній абзаце.

II.3 Inéquations produits.

Exemple n°2.

Розв’яжемо в $\mathbb{R}$ наступну нерівність:

$$(4x-7)(5-2x)(3x+2) \leqslant 0$$

Почнемо з розв’язання наступних нерівностей:

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Вказує нам, де поставити "+" в масиві знаків

Для останнього рядка ми використовуємо правило знака.

Тепер створимо таку діаграму знаків:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$5-2x$		$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$(4x-7)(5-2x)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Позначивши S множину розв’язків:

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°5.

Метод однаковий незалежно від кількості факторів.

III Короткий зміст курсу

Квадратна функція

Квадратна функція – це функція, визначена
$g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

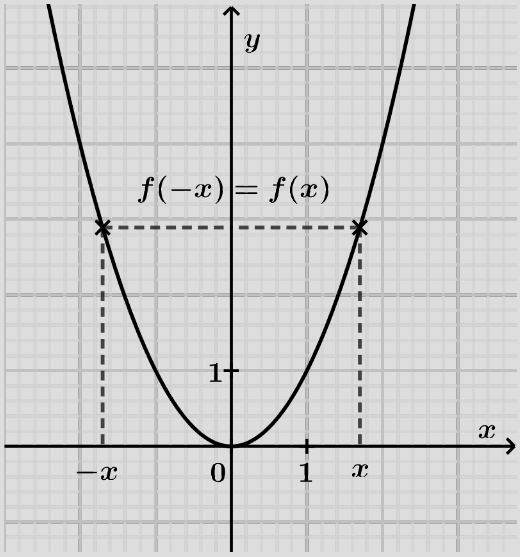
Це навіть, що означає:

за все x, $g(-x)=g(x)$

Його варіації підсумовані в наступній таблиці:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Точка *O*, початок відліку, є вершиною параболи.
Вісь ординат є віссю симетрії параболи.



f функція і $I \subset D_f$ un intervalle, a, b в I

Строгий ріст на I	$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
Суворе зменшення на I	$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
Зростання на I	$a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$
Розпад на I	$a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Нехай a — дійсне число.
▪ чи $a > 0$ так: рівняння $x^2 = a$ допускає два рішення: $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
▪ чи $a = 0$ так: рівняння $x^2 = a$ допускає рішення : *нуль* .
▪ чи $a < 0$ так: рівняння $x^2 = a$ не допускає вирішення.

Нехай x — дійсне число, а n — відносне ціле.

Існує унікальне відносне ціле число a таке, що: $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$

Ця дужка є десятковою дужкою **x à 10^{-n} près** .

Округлення x à 10^{-n} près est, що з двох чисел $\dfrac{a}{10^n}$ et $\dfrac{a+1}{10^n}$ хто ближче до x .

За умовами, коли x знаходиться на однаковій відстані від $\dfrac{a}{10^n}$ et de $\dfrac{a+1}{10^n}$, округлення x à 10^{-n} près є $\dfrac{a+1}{10^n}$

▪ в $\mathbb{R}$, нерівність $x^2 \leqslant k$ допускає як набір рішень S :
чи $k > 0$ так $S = [-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$
чи $k = 0$ так $S = \{0\}$
чи $k < 0$ так $S = \varnothing$

▪ в $\mathbb{R}$, нерівність $x^2 \geqslant k$ допускає як набір рішень S :
чи $k > 0$ так $S =]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

чи $k \leqslant 0$ так $S = \mathbb{R}$