FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E01C

EXERCICE N°3 Autour de la forme développée réduite, je passe à l'abstraction (Le corrigé)

Deux définitions :

Soient f et g définies toutes les deux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Si f et g sont affines alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ (avec a , b , c et d des nombres réels)

1) Montrer que la somme de deux fonctions affines ne pas être une fonction polynomiale du second degré.

Si f et g sont affines , pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= ax+b + cx+d\\ &= \underbrace{(a+c)}_{m}x+\underbrace{b+d}_{p}\end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

On a même démontré que la somme de deux fonctions affines est une fonction affine...

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré.

Analyse :

On cherche une condition nécessaire

Supposons que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= (ax+b)(cx+d)\\ &= acx^2 + adx+bcx + bd\\ &= \underbrace{ac}_{A}x^2+\underbrace{(ad+bc)}_{B}x+\underbrace{bd}_{C}\end{aligned}$$

Pour avoir fonction polynomiale du second degré, il faut (condition nécessaire) que $A \neq 0$ ce qui signifie $ac \neq 0$.

Pour pouvoir reconnaître une fonction polynomiale du second degré, il faut que $ac \neq 0$.

Synthèse :

On vérifie que la condition nécessaire que l'on vient de trouver est suffisante.

Supposons, à présent que $ac \neq 0$.

Dans ce cas, on reconnaît bien la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré dans la dernière expression de $(fg)(x)$.

Conclusion :

Pour que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré, il faut et il suffit que $ac \neq 0$, c'est à dire que aucune des deux ne soit constante.