

TABLEAUX CROISÉS, FRÉQUENCES

I Croisement de deux variables catégorielles

Définition n°1.

Soit deux variables A et B étudiées sur un même ensemble E d'individus. On peut croiser ces deux variables dans un tableau d'effectifs, à deux entrées.

$\text{Card}(A)$ est le nombre d'individus ayant le caractère A .

	B	non B	Total
A	$\text{Card}(A \cap B)$	$\text{Card}(A \cap \bar{B})$	$\text{Card}(A)$
non A	$\text{Card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{Card}(\bar{A})$
Total	$\text{Card}(B)$	$\text{Card}(\bar{B})$	$\text{Card}(E)$

Définition n°2.

- La fréquence de A dans l'ensemble E est $f(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$
- Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition de la variable A .
- Les fréquences marginales en colonne donnent la répartition de la variable B .
- La fréquence conditionnelle de B dans A est $f_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$

Exemple n°1.

Un groupe représentatif de 500 personnes se répartit suivant deux variables catégorielles:

- le sexe (A : féminin et non A : masculin)
- la Profession et Catégorie Socioprofessionnelle (PCS) réparties en 4 groupes comme ci-dessous.

	$PCS 1$	$PCS 2$	$PCS 3$	$PCS 4$	Total	Fréquences marginales
A	25	125	105	5	260	$\frac{260}{500} = 0,52$
non A	15	90	130	5	240	$\frac{240}{500} = 0,48$
Total	40	215	235	10	500	1
Fréquences marginales	$\frac{40}{500} = 0,08$	$\frac{215}{500} = 0,43$	$\frac{235}{500} = 0,47$	$\frac{10}{500} = 0,02$	1	

$PCS1$: Agriculteurs, artisans, commerçants et chefs d'entreprise

$PCS2$: Cadres, prof. intellectuelles sup., prof. Intermédiaires

$PCS3$: Employés, ouvriers

$PCS4$: Autres professions ou catégories

- Les fréquences marginales en colonnes donnent la répartition des PCS dans le groupe, indépendamment du sexe des individus. Ainsi, 47% des personnes du groupe sont employés ou ouvriers.

- Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition du sexe, indépendamment de la PCS des individus. Ainsi 52% des personnes du groupe sont des femmes

- La fréquence conditionnelle de la $PCS3$ dans les personnes de sexe féminin

$$\text{est : } f_A(PCS3) = \frac{\text{Card}(A \cap PCS3)}{\text{Card}(A)} = \frac{105}{260} = \frac{21}{52} \approx 0,404$$

- La fréquence conditionnelle des femmes dans les $PCS3$ du groupe est:

$$f_{PCS3}(A) = \frac{\text{Card}(A \cap PCS3)}{\text{Card}(PCS3)} = \frac{105}{235} = \frac{21}{47} \approx 0,447$$

II Les tableaux à connaître

Tableau croisé d'effectifs				La colonne Total donne les effectifs marginaux de la couleur.
Y=Vin X=couleur	y ₁ =Bordeaux	y ₂ =Bourgogne	Total	
x ₁ =Blanc	5	4	9	Combien y a-t-il de Blancs ? → 9
x ₂ =Rouge	3	7	10	Combien y a-t-il de Rouges ? → 10
Total	8	11	19	Combien y a-t-il de bouteilles ? → 19

La ligne « Total » donnent les effectifs marginaux du vin.
Combien y a-t-il de Bordeaux ? → 8
Combien y a-t-il de Bourgogne ? → 11

Combien y-a-t-il de Bourgognes Rouges ? → 7

Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global				La colonne Total donne les fréquences marginales de la couleur.
Y=Vin X=couleur	y ₁ =Bordeaux	y ₂ =Bourgogne	Total	
x ₁ =Blanc	$\frac{5}{19} \approx 0,26$	$\frac{4}{19} \approx 0,21$	$\frac{9}{19} \approx 0,47$	Quelle est la fréquence de Blanc parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 0,47 ou 47 %
x ₂ =Rouge	$\frac{3}{19} \approx 0,16$	$\frac{7}{19} \approx 0,37$	$\frac{10}{19} \approx 0,53$	Quelle est la proportion de Rouge parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 0,53 ou 53 %
Total	$\frac{8}{19} \approx 0,42$	$\frac{11}{19} \approx 0,58$	1	

La ligne « Total » donnent les fréquences marginales du vin.
Quelle est la proportion de Bordeaux parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 42 %
Quelle est la fréquence des Bourgogne parmi l'ensemble des bouteilles ? → environ 58 %

Quelle est La fréquence (conjointe) des Bourgogne Rouges parmi l'ensemble des bouteilles ?
→ environ 37 %

Un tableau des fréquences conditionnelles				Ici, on a les fréquences conditionnelles du vin sachant qu'il est rouge.(Y sachant x ₂) On pourrait de même construire les tableaux pour : (Y sachant x ₁) , (X sachant y ₁) et (X sachant y ₂)
Y=vin	y ₁ =Bordeaux	y ₂ =Bourgogne	Total	
x ₂ =Rouge	$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{7}{10} = 0,7$	$\frac{10}{10} = 1$	

Quelle est proportion de Bordeaux parmi les vins rouges ?
→ $f_{x_2}(y_1) = \frac{\text{Card}(y_1 \cap x_2)}{\text{Card}(x_2)} = 0,3$ ou 30 %
Quelle est la fréquence des Bourgogne Rouges ?
→ $f_{x_2}(y_2) = \frac{\text{Card}(y_2 \cap x_2)}{\text{Card}(x_2)} = 0,7$ ou 70 %

Pour (Y sachant x₂)
On a restreint le tableau à la ligne rouge.
Voir le tableau croisé des effectifs.