LA FONCTION CUBE

I Définition et étude de la fonction cube

Définition n°1.

La fonction cube est la fonction $g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction sur D_f .
« f est impaire » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f, f(-x) = -f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction cube est impaire

preuve :

Notons g la fonction cube.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g = \mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^3 = -x \times (-x) \times (-x) = -x^3 = -g(x)$
Ainsi g est impaire.

LA FONCTION CUBE E01

EXERCICE N°1

1) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3+2x$ est impaire.

2) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+1$ n'est pas impaire.

3) Conjecturer les conditions sur les réels a, b, c et d pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ soit impaire.

LA FONCTION CUBE

Remarque n°1.

Si une fonction est impaire, alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

Propriété n°2. Variations de la fonction cube

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

preuve :

Nous allons montrer que la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (Cela suffira car les deux intervalles ont un point commun).

▪ Soient $a < b \leqslant 0$

Nous devons montrer que $a^3 < b^3$ ce qui équivaut à $a^3-b^3 < 0$.

Remarquons que : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Comme $a < b \Leftrightarrow a-b < 0$

De plus $a^2>0$, $b^2\geqslant 0$ et $ab\geqslant 0$ (car a et b sont de même signe)

Ainsi $a^2+ab+b^2 > 0$

D'après la règle des signes : $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$

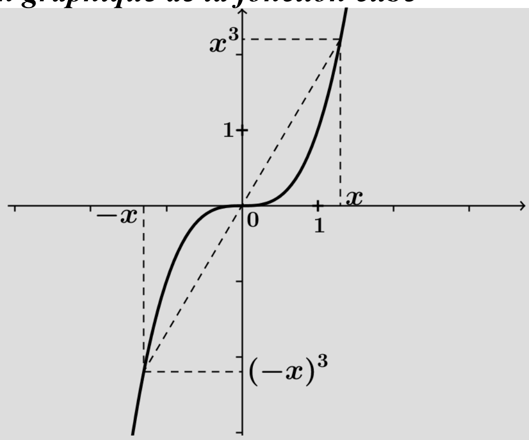
Et donc $a^3-b^3 < 0$.

La fonction cube bien strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

▪ La stricte croissance sur $[0\ ;\ +\infty[$ se démontre de la même manière et est laissée à titre d'exercice.

LA FONCTION CUBE

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction cube***



L’origine du repère est le centre de symétrie de la courbe

Remarque n°2. Parité, imparité et représentation graphique

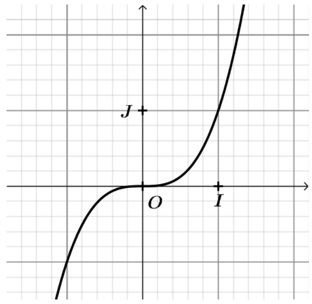
Dans un repère orthogonal, on donne C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur D_f .

▪ Si f est **paire** alors C_f est **symétrique** par rapport à l'**axe** des ordonnées.
▪ Si f est **impaire** alors C_f est **symétrique** par rapport au **centre** du repère.

En images : fonction paire , fonction impaire

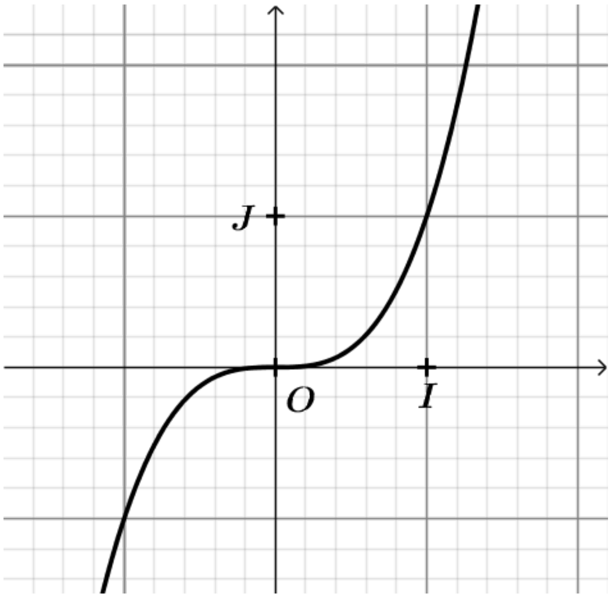
EXERCICE N°2

On considère ci-contre la courbe représentative de la fonction cube dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.



1) Lire graphiquement le(s) antécédent(s) du nombre 2 . On donnera le résultat au dixième près.

2) Quel est l'antécédent du nombre réel -2 ? Justifier la réponse.



LA FONCTION CUBE E01

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=-2x^3$.

1) Démontrer que cette fonction est impaire.

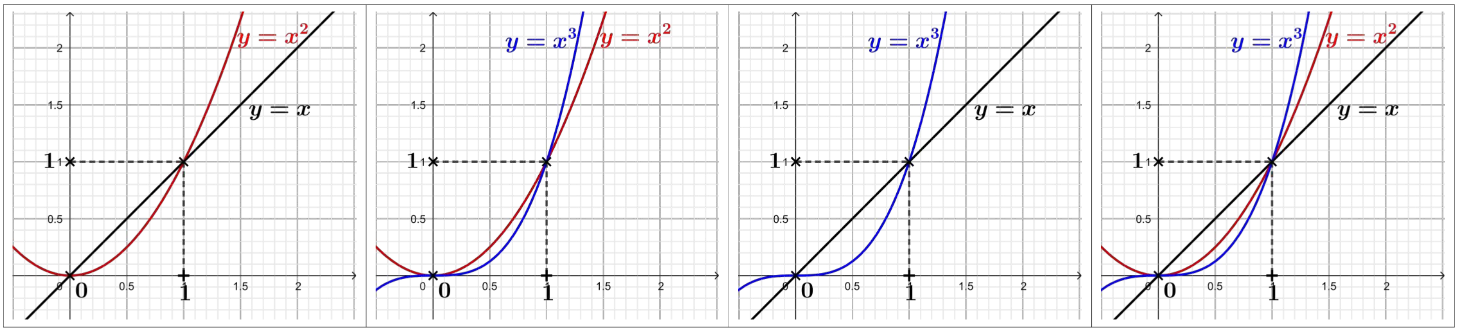
2) Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?

3) Sans calcul, donner la valeur de $f(200)+f(-200)$.

II Comparaison des fonctions identité, carré et cube

Propriété n°4.

▪ Pour $x \in]0\ ;\ 1[$, $x > x^2 > x^3$
▪ Pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x < x^2 < x^3$
▪ Et bien sûr $0=0^2=0^3$ et $1=1^2=1^3$



preuve :

▪ Comparons $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ pour $x \in]0\ ;\ 1[$

$x^2 - x = x(x-1)$

$x > 0$ et $x - 1 < 0$

d'après la règle des signes : $x(x-1) < 0$ et donc $x^2 - x < 0$ ce qui équivaut à $x^2 < x$

La comparaison pour $x \in]0\ ;\ 1[$ de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ est laissée à titre d'exercice (la méthode est la même, faites le!).

On a donc bien, pour $x \in]0\ ;\ 1[$, $x > x^2 > x^3$

▪ Les comparaisons pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$ sont laissées à titre d'exercices (c'est encore la même méthode, faites le!)

On a donc bien, pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x < x^2 < x^3$

▪ Enfin les égalités sont évidentes.

LA FONCTION CUBE E01

EXERCICE N°4

Sans utiliser de calculatrice, comparer les nombres suivants :

1) $0{,}3\ ;\ 0{,}3^2\ ;\ 0{,}3^3$

2) $5{,}6\ ;\ 5{,}6^2\ ;\ 5{,}6^3$

3) $\frac{1}{3}\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^2\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^3$

4) $\frac{1}{\pi}\ ;\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\ ;\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^3$

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°1

On veut résoudre graphiquement l'équation $2x^3-8=0$.

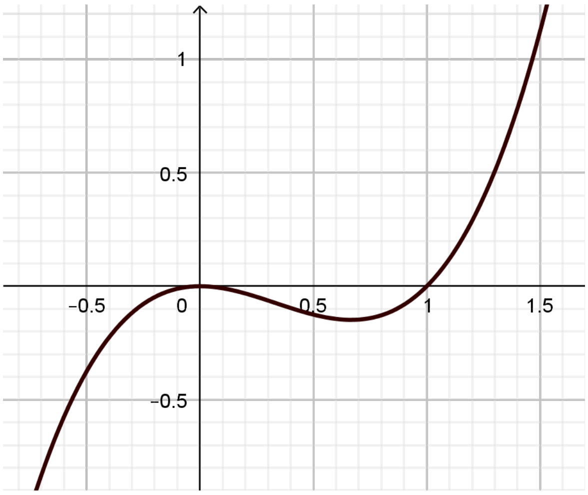
1) Tracer la courbe représentative de la fonction cube.
2) Montrer que la résolution de l'équation donnée se ramène à résoudre l'équation $x^3=4$.
3) Résoudre graphiquement cette dernière équation et donner la(les) solution(s) au dixième près.

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie pour tout réel par $f(x)=x^3-x^2$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



1) Conjecturer graphiquement les solutions l'équation $f(x)=0$.

2) Démontrer la conjecture précédente.

3) En utilisant le graphique, déterminer le signe de $f(x)$.

4) Démontrer la conjecture graphique de la question 3.

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$

6) En utilisant le graphique, donner le tableau variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$

7) Calculer les valeurs exactes de $f(1{,}46)$ et $f(1{,}47)$ En utilisant la question 6, justifier que la solution de l'équation $f(x)=1$ est comprise entre $1{,}46$ et $1{,}47$.

8) En utilisant la calculatrice, déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-4} qui contient solution de l'équation $f(x)=1$.

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°3 Objectif Spé

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 \leqslant 8x$.

2) On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3+x+6 \geqslant 4x^2$.

2.a) Développer et réduire l'expression $(x+1)(x-2)(x-3)$.

2.b) En déduire la résolution de l'inéquation proposée.

3) Inventez votre inéquation à résoudre et donnez-en la correction.