

# LA DÉRIVATION E02

## EXERCICE N°1    Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  (autrement dit :  $x$  est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ), non nul ( $*$ )) et soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture  $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$  en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir :  $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$  a pour expression conjuguée  $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ )

- 1) Justifier que  $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$  ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression :  $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

## EXERCICE N°2    Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ , soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x+h \in I$ . Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = k \times u(x)$

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
- 2) Simplifier l'expression  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $f: x \mapsto k \times u(x)$ .

## EXERCICE N°3    Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

### Préliminaires

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, démontrer que  $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$ .

### La preuve

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$ , tel que  $x+h \in I$ .

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
- 2) En utilisant les préliminaires, montrer que : 
$$\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $(fg): x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$ .

## EXERCICE N°4    Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1)  $f_1: x \mapsto 5$  ;  $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$  ;  $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$  ;  $f_4: x \mapsto 2\pi$  ;  $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2)  $g_1: x \mapsto x+2$  ;  $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3)  $g_3: x \mapsto 4x+5$  ;  $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$  ;
- 4)  $h_1: x \mapsto 3x^2-4$  ;  $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$  ;  $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5)  $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$  ;  $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6)  $h_6: x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$  ;  $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$  ;  $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7)  $h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$  ;  $h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$

$n$  est un entier naturel.

# LA DÉRIVATION E02

## EXERCICE N°1    Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  (autrement dit :  $x$  est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ), non nul ( $*$ )) et soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture  $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$  en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir :  $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$  a pour expression conjuguée  $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ )

- 1) Justifier que  $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$  ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression :  $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

## EXERCICE N°2    Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ , soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x+h \in I$ . Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = k \times u(x)$

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
- 2) Simplifier l'expression  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $f: x \mapsto k \times u(x)$ .

## EXERCICE N°3    Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

### Préliminaires

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, démontrer que  $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$ .

### La preuve

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in I$  et soit  $h \in \mathbb{R}$ , tel que  $x+h \in I$ .

- 1) Pourquoi impose-t-on  $x+h \in I$  ?
- 2) En utilisant les préliminaires, montrer que : 
$$\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en  $x$  de la fonction  $(fg): x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$ .

## EXERCICE N°4    Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1)  $f_1: x \mapsto 5$  ;  $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$  ;  $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$  ;  $f_4: x \mapsto 2\pi$  ;  $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2)  $g_1: x \mapsto x+2$  ;  $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3)  $g_3: x \mapsto 4x+5$  ;  $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$  ;
- 4)  $h_1: x \mapsto 3x^2-4$  ;  $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$  ;  $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5)  $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$  ;  $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6)  $h_6: x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$  ;  $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$  ;  $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7)  $h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$  ;  $h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$