

LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°3 Tangentes parallèles à une droite donnée

Extrait du déclie 1^{er} spé 74 p 122

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3x^3 - x^2 - x + 1$$

Déterminer les tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = -8x + 2$.

On précisera l'abscisse des points de tangence et leurs équations réduites respectives.

On parle de tangentes donc on doit penser « dérivée » et se souvenir que le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente...

On doit aussi savoir que « droites parallèles = même coefficient directeur »

La droite d'équation $y = -8x + 2$ a pour coefficient directeur -8 .

▪ Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = -8$

f est une somme de fonctions de référence définies et dérивables sur \mathbb{R} donc f l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3 \times 3x^2 - 2x - 1 + 0 \quad \text{ou encore :} \quad f'(x) = -9x^2 - 2x - 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8 \\ \Leftrightarrow -9x^2 - 2x - 1 &= -8 \\ \Leftrightarrow -9x^2 - 2x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Posons $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-9) \times 7 = 4 + 4 \times 63 = 4 + 252 = 256$, le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{256}}{2 \times (-9)} = \frac{2 - 16}{-18} = \frac{-14}{-18} = \frac{7}{9}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{256}}{2 \times (-9)} = \frac{2 + 16}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

▪ On en déduit qu'il y a deux tangentes à C_f possibles :

▪ La première se situe au point d'abscisse -1 et admet comme équation

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

Or :

$$f(-1) = -3(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 - 1 + 1 + 1 = 4$$

et

$$f'(-1) = -8$$

On obtient :

$$y = -8(x + 1) + 4$$

qui se réduit à :

$$y = -8x - 4$$

▪ La seconde situe au point d'abscisse $\frac{7}{9}$ et admet comme équation :

$$y = f'\left(\frac{7}{9}\right)\left(x - \frac{7}{9}\right) + f\left(\frac{7}{9}\right)$$

Or :

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -3\left(\frac{7}{9}\right)^3 - \left(\frac{7}{9}\right)^2 - \frac{7}{9} + 1 = -\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 = \frac{-343 - 147 - 189 + 243}{243} = -\frac{436}{243}$$

et

$$f'\left(\frac{7}{9}\right) = -8$$

$$\text{On en déduit } y = -8x + \frac{1076}{243}$$

<i>Aide au calcul</i>
$\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 = -\frac{436}{243}$
$-\frac{56}{9} - \frac{436}{243} = \frac{1076}{243}$