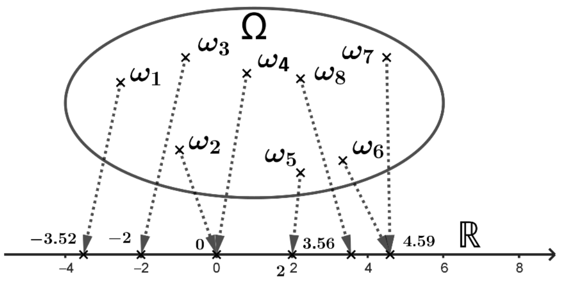
VARIABLES ALÉATOIRES

I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

Définition n°1. ***Variable aléatoire***

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$,
c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Exemple n°1.



$X : \Omega \to \mathbb{R}$

Ici,
$X(\omega_1) = -3{,}52$:
L'issue ω_1 a pour image -3,52 par la variable aléatoire X ….
$X(\omega_2) = 0$, etc.…

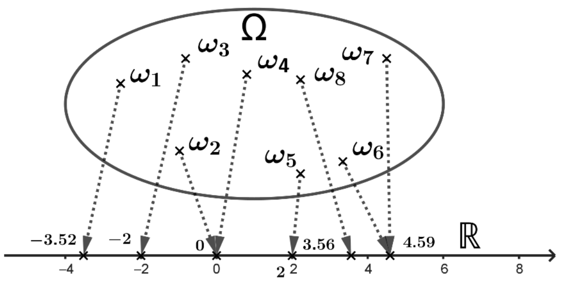
Remarque n°1.

Toutes les issues doivent avoir une image par X (car X est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

Connaissance n°1 ***Des notations***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :
- $\{X = a\}$ l'événement « X prend la valeur a »
- $\{X \leqslant a\}$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Exemple n°2.



$\{X = -3{,}52\}$ est en fait $\{\omega_1\}$,
$\{X = 0\}$ est en fait $\{\omega_2 , \omega_4\}$
$\{X = 1{,}5\}$ est en fait $\varnothing$
$\{X = -18\}$ aussi…
$\{X \leqslant 0\}$ est en fait $\{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4\}$
$\{X < 0\}$ est en fait $\{\omega_1 , \omega_3\}$
(il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de Ω , on peut parler de leur probabilité.
Par exemple :
$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2 , \omega_4\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\})$ ...
C'est pénible toutes ces accolades !

Connaissance n°2 ***Convention d'écriture***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :
- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférrieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de Ω, on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

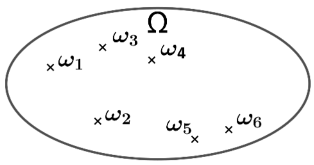
Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$), soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \dots , x_k$.

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à *k*.

Exemple n°3.

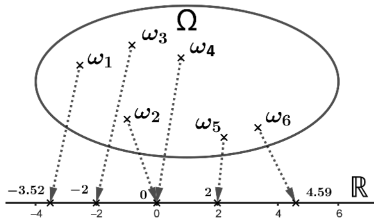
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	$4{,}59$	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0)+P(X = 2)+P(X = 4{,}59) = 1$

III Espérance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour X ? »

Définition n°3. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$), soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \dots , x_k$.

On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i)}$$

Remarque n°5.

$$\sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Exemple n°4. dans le contexte de l'exemple n°3

$E(X) = -3{,}52 \times P(X=-3{,}52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4{,}59 \times P(X=4{,}59)$

$E(X) = -3{,}52 \times 0{,}1 + (-2) \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}12 + 4{,}59 \times 0{,}18$

$E(X) = 0{,}2142$

L'espérance de X vaut 0,2142.

Propriété n°1. ***espérance et transformation affine***

Comme la somme des $P(X=x_i)$ vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i P(X=X_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités respectives.

Or :

▪ Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre *b* à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de *b*.

▪ Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul *a* toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par *a*.

Au final on peut écrire : $\boxed{E(aX+b) = a \times E(X) + b}$

IV Variance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de X autour de $E(X)$. Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

Définition n°4. ***Variance d'une variable aléatoire réelle***

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $x_{,}\ x_{,} \ldots , x_k$.

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$V(X) = E((X-E(X))^2)$ c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)}$$

Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$\boxed{V(X) = (x_1-E(X))^2 \times P(X=x_1) + (x_2-E(X))^2 \times P(X=x_2) + \ldots (x_k-E(X))^2 \times P(X=x_k)}$$

Exemple n°5. ***Dans le contexte de l'exemple n°3***

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

On calcule d'abord l'espérance :

$E(X) = 0{,}2142$ (on l'a fait dans l'exemple n°4)

Puis on calcule la variance :

$V(X) = (-3{,}52-0{,}2142)^2 \times 0{,}1 + (-2-0{,}2142)^2 \times 0{,}25 + \ldots + (4{,}59-0{,}2142)^2 \times 0{,}18$

$V(X) \approx 6{,}4654$

Propriété n°2. ***variance et transformation***

Soit a et b deux nombres réels. $\boxed{V(aX+b) = a^2 \times V(X)}$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{k}(a\,x_i+b-E(aX+b))^2\times P(X=x_1)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(a\,x_i+b-aE(X)-b)^2\times P(X=x_1)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(a(x_i-E(X)))^2\times P(X=x_1)\\ &= \sum_{i=1}^{k}a^2(x_i-E(X))^2\times P(X=x_1)\\ &= a^2\sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times P(X=x_1) \;=\; a^2\times V(X) \end{aligned}$$

Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimerait que $E(X)$ et $V(X)$ aient la même unité.
En effet si X est par exemple en euro alors $E(X)$ sera en euro mais $V(X)$ sera en « euro au carré »…
On va donc « se débarrasser de ce carré »…

V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition n°5. écart-type d'une variable aléatoire réelle

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple n°6. Toujours dans le contexte de l'exemple n°3

On avait $V(X) \approx 6{,}4654$
Donc $\sigma(X) = V(X) \approx 2{,}5427$

Remarque n°9. écart-type et transformation affine

$$\sigma(aX+b) = |a|\times\sigma(X)$$

VI Formule de Koenig-Huygens

Remarque n°10.

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

▪ Gardons à l'esprit que $E(X)$ est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^{k}E(X)^2\times P(X=x_i) = E(X)^2\times\sum_{i=1}^{k}P(X=x_i) = E(X)^2\times 1$$

▪ Dans la même idée :

$$E(-2\,X\,E(X)) = \sum_{i=1}^{k}-2\,x_i\,E(X)\times P(X=x_i) = -2\,E(X)\times\sum_{i=1}^{k}x_i\,P(X=x_i) = -2\,E(X)\times E(X)$$

▪ On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2-2\,X\,E(X)+(E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2)-2\,E(X\,E(X))+E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

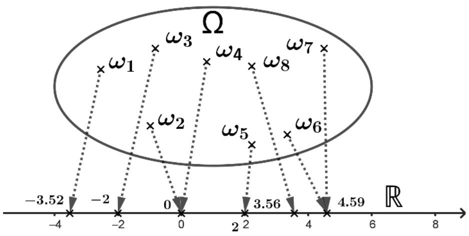
$$V(X) = E(X^2)-\underbrace{2\,E(X)\,E(X)}_{-2\,E(X)^2}+\underbrace{E(X)^2\times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2)-(E(X))^2$$

Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{V(X) = E(X^2)-(E(X))^2}$$

VII Le résumé du cours



Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est à dire si **X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.**

Convention d'écriture

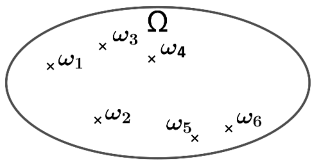
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur infèrrieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Loi de probabilité

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$) , soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \ldots , x_k$.
Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k.

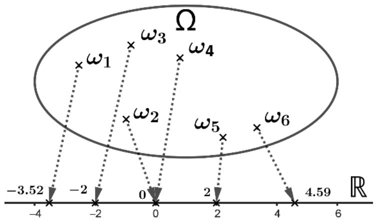
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	$4{,}59$	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52)+P(X = -2)+P(X = 0)+P(X = 2)+P(X = 4{,}59) = 1$

Espérance de *X*

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i)}$$

ou encore :

$$\boxed{E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \ldots + x_k \times P(X=x_k)}$$

Variance de *X*	$$\boxed{V(X) = E((X-E(X))^2)}$$ ou encore : $$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times P(X=x_i)}$$
Écart-type de *X*	$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Les propriétés à retenir

a et b sont des nombres réels.

Transformation affine, changement de variable **(selon les livres)**

$$\boxed{E(aX+b) = a\times E(X) + b}$$

$$\boxed{V(aX+b) = a^2\times V(X)}$$

$$\boxed{\sigma(aX+b) = |a|\times\sigma(X)}$$

Formule de Koenig-Huygens

$$\boxed{V(X) = E(X^2)-(E(X))^2}$$