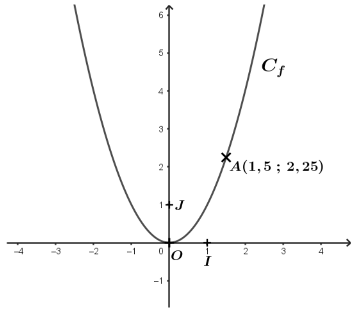
EXERCICE N°1 J'ai compris les jeux et je maîtrise les notations (Le corrigé)

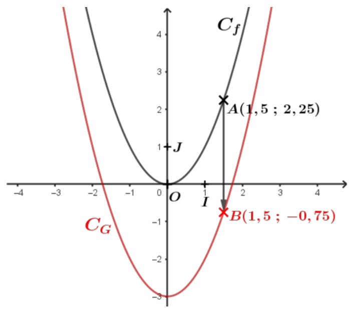


On note f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,\ I\ ,\ J)$. On donne le point $A(1,5\ ;\ 2,25)$.

1) Vérifiez que $A\in C_f$.

Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe.
La courbe C_f a pour équation $y = f(x)$ (ici $y = x^2$), on va donc remplacer x par l'abscisse de A : $1,5$ et y par l'ordonnée de A : $2,25$ dans cette équation puis vérifier qu'on a bien une égalité…

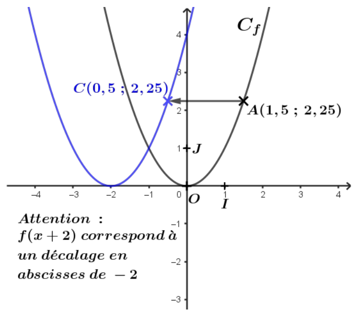
On a : $f(x_A) = x_A^2 = 1,5^2 = 2,25 = y_A$
Ainsi $y_A = f(x_A)$ ce qui signifie que $A\in C_f$.



2) On pose $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)-3\end{cases}$ et C_g sa courbe représentative.
Déterminez $g(1,5)$ en vous aidant du point A.

$g(1,5) = f(1,5)-3 = f(x_A)-3 = y_A-3 = 2,25-3 = -0,75$
Ainsi $\boxed{g(1,5) = -0,75}$

Remarquez qu'on n'a eu besoin d'aucun calcul ! (je sais, ils n'étaient pas très durs mais cela ne sera peut-être pas toujours le cas…)



3) On pose $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x+2)\end{cases}$ et C_h sa courbe représentative.
Déterminez $h(-0,5)$ en vous aidant du point A.

$h(-0,5) = f(1,5-2+2) = f(1,5) = f(x_A) = y_A = 2,25$
Ainsi $\boxed{h(-0,5) = 2,25}$

EXERCICE N°2 Autour de la forme développée réduite (Le corrigé)

Parmi les fonctions suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont des fonctions polynomiales du second degré.

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+3)^2 - 5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x+3)^2 - 5 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 5 \\ &= x^2 + 6x + 4 \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(x+7) - 5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2(x+7) - 5 \\ &= 2x + 14 - 5 \\ &= 2x + 9 \end{aligned}$$

On reconnaît la forme développée réduite d'une fonction affine. Ce **n'est donc pas** une fonction polynomiale du second degré.

3) $h_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (4x-3)(2x+7) \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (4x-3)(2x+7) \\ &= 8x^2 + 28x - 6x - 21 \\ &= 8x^2 + 22x - 21 \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

4) La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 2(x-7)^2 + 1$.

Remarquez que la fonction n'est pas décrite de la même façon : cela ne change (presque) rien.
En revanche, évitez de parler de « la fonction $g(x)$ », en effet g est une fonction alors que $g(x)$ est un nombre : c'est l'image du nombre x par la fonction g .

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x-7)^2 + 1 \\ &= 2(x^2 - 14x + 49) + 1 \\ &= 2x^2 - 28x + 50 \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

(en fait c'est la forme développée réduite de l'image de x par la fonction g mais on s'autorise cet écart...)

5) La fonction h_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $h_2(x) = (4x^2+8)(2-5x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= (4x^2+8)(2-5x) \\ &= 8x^2 - 20x^3 + 16 - 40x \\ &= -20x^3 + 8x^2 - 40x + 16 \end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

6) $h_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (2x+1)(7-15x) + (1+6x)(5x-3) \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_3(x) &= (2x+1)(7-15x) + (1+6x)(5x-3) \\ &= [-30x^2 - x + 7] + [30x^2 - 13x - 3] \\ &= -30x^2 - x + 7 + 30x^2 - 13x - 3 \\ &= -14x + 4 \end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

EXERCICE N°3 *Autour de la forme développée réduite, je passe à l'abstraction (Le corrigé)*

Deux définitions :

Soient f et g définies toutes les deux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▪ On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

▪ On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Si f et g sont affines alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ (avec a , b , c et d des nombres réels)

1) Montrer que la somme de deux fonctions affines ne pas être une fonction polynomiale du second degré.

Si f et g sont affines , pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= ax+b + cx+d\\ &= \underbrace{(a+c)}_{m}x+\underbrace{b+d}_{p}\end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

On a même démontré que la somme de deux fonctions affines est une fonction affine...

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré.

Analyse :

On cherche une condition nécessaire

Supposons que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= (ax+b)(cx+d)\\ &= acx^2 + adx+bcx + bd\\ &= \underbrace{ac}_{A}x^2+\underbrace{(ad+bc)}_{B}x+\underbrace{bd}_{C}\end{aligned}$$

Pour avoir fonction polynomiale du second degré, il faut (condition nécessaire) que $A \neq 0$ ce qui signifie $ac \neq 0$.

Pour pouvoir reconnaître une fonction polynomiale du second degré, il faut que $ac \neq 0$.

Synthèse :

On vérifie que la condition nécessaire que l'on vient de trouver est suffisante.

Supposons, à présent que $ac \neq 0$.

Dans ce cas, on reconnaît bien la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré dans la dernière expression de $(fg)(x)$.

Conclusion :

Pour que le produit de deux fonctions affines soit une fonction polynomiale du second degré, il faut et il suffit que $ac \neq 0$, c'est à dire que aucune des deux ne soit constante.

EXERCICE N°4 *La méthode de complétion du carré (Le corrigé)*

Le principe

1) Soit a un nombre réel. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2ax = (x+a)^2-a^2$

$(x+a)^2-a^2 = x^2+2ax+a^2-a^2 = x^2+2ax$

Application

2) À l'aide de l'égalité que vous venez de démontrer, déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

2.a) x^2+4x+7 **2.b)** x^2+7x-8 **2.c)** x^2-3x+6 **2.d)** x^2+bx+5 où $b \in \mathbb{R}$

2.a) x^2+4x+7

$$x^2+4x+7 = x^2+2\times\underbrace{2}_{a}\times x+7 = (x+2)^2-2^2+7 = (x+2)^2+3$$

Ainsi $\boxed{x^2+4x+7 = (x+2)^2+3}$

2.b) x^2+7x-8

$$x^2+7x-8 = x^2+2\times\underbrace{\frac{7}{2}}_{a}\times x-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2+7x-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}}$

2.c) x^2-3x+6

$$x^2-3x+6 = x^2-2\times\underbrace{\frac{3}{2}}_{a}\times x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2-3x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$

2.d) x^2+bx+5 où $b \in \mathbb{R}$

$$x^2+bx+5 = x^2+2\times\underbrace{\frac{b}{2}}_{a}\times x+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{-b^2+20}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2+bx+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{-b^2+20}{4}}$

3) Adaptez la méthode pour déterminer la forme canonique des trinômes suivants

3.a) $3x^2-5x+8$ **3.b)** $6x^2+7x-2$ **3.c)** $-4x^2+3x-7$

3.a) $3x^2-5x+8$

$$3x^2-5x+8 = 3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}\right] = 3\left[x^2-2\times\frac{\frac{5}{3}}{2}x+\frac{8}{3}\right] = 3\left[x^2-2\times\frac{5}{6}x+\frac{8}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{36}\right]$$

$$= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{12}$$

Ainsi $\boxed{3x^2-5x+8 = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{12}}$

3.b) $6x^2+7x-2$

$$6x^2+7x-2 = 6\left[x^2+\frac{7}{6}x-\frac{2}{6}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{\frac{7}{6}}{2}x-\frac{1}{3}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{7}{12}x-\frac{1}{3}\right]$$

$$= 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{7}{12}\right)^2-\frac{1}{3}\right] = 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}\right]$$

$$= 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{24}$$

Ainsi $\boxed{6x^2+7x-2 = 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{24}}$

3.c) $-4x^2+3x-7$

$$-4x^2+3x-7 = -4\left[x^2+\frac{3}{-4}x-\frac{7}{-4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{\frac{3}{4}}{2}x+\frac{7}{4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{3}{8}x+\frac{7}{4}\right]$$

$$= -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{4}\right] = -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{103}{64}\right]$$

$$= -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{183}{16}$$

Ainsi $\boxed{-4x^2+3x-7 = -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{103}{16}}$