

LA FONCTION CARRÉ E06

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

1) $x(2x+1)+x(3x-4) \geq 0$

2) $(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) < 0$

3) $4x^2-(x+1)^2 \leq 0$

4) $(2x+3)^2-(4x-5)^2 > 0$

1)

Pour tout réel x ,

$$x(2x+1)+x(3x-4) = x[(2x+1)+(3x-4)] = x(5x-3)$$

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x(5x-3) \geq 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les mêmes solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

▪ $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (élémentaire mon cher Watson...)

▪ $5x-3 > 0 \Leftrightarrow 5x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5} = 0,6$

x	$-\infty$	0	$0,6$	$+\infty$
x		$-$	0	$+$
$5x-3$		$-$	$ $	$+$
$x(5x-3)$		$+$	0	$+$

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) \geq 0$ admet comme ensemble des solutions :

$$]-\infty ; 0] \cup [0,6 ; +\infty[$$

2)

Pour tout réel x ,

$$(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) = (2x+1)[(x-3)+(3x+4)] = (2x+1)(4x+1)$$

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) < 0 \Leftrightarrow (2x+1)(4x+1) < 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les mêmes solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

▪ $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

▪ $4x+1 > 0 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$
$4x+1$		$-$	$ $	$+$
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$+$

On en déduit que $(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) < 0$ admet comme ensemble des solutions :

$$\left]-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right[$$

3)

Pour tout réel x ,

$$\underbrace{4x^2}_{a^2} - \underbrace{(x+1)^2}_{b^2} = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{(x+1)^2}_{b^2} = [(2x) + (x+1)][(2x) - (x+1)] = (3x+1)(x-1)$$

On en déduit que $4x^2 - (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) \leq 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les mêmes solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes)... On commence à le savoir !

- $3x+1 > 0 \Leftrightarrow 3x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
- $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$ $ $+$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0 $+$
$(3x+1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0 $+$

On en déduit que $4x^2 - (x+1)^2 \leq 0$ admet comme ensemble des solutions :

$$\left[-\frac{1}{3} ; 1 \right]$$

4)

Pour tout réel x ,

$$\underbrace{(2x+3)^2}_{a^2} - \underbrace{(4x-5)^2}_{b^2} = [(2x+3) + (4x-5)][(2x+3) - (4x-5)] = (6x-2)(-2x+8)$$

On pourrait factoriser un peu plus : $(6x-2)(-2x+8) = -4(3x-1)(x-4)$

Mais cela ne sera pas utile ici.

- $6x-2 > 0 \Leftrightarrow 6x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $-2x+8 > 0 \Leftrightarrow -2x > -8 \Leftrightarrow x < \frac{-8}{-2} = 4$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	4	$+\infty$
$6x-2$	$-$	0	$+$	$ $ $+$
$-2x+8$	$+$	$ $	$+$	0 $-$
$(6x-2)(-2x+8)$	$-$	0	$+$	0 $-$

On en déduit que $(2x+3)^2 - (4x-5)^2 > 0$ admet comme ensemble des solutions :

$$\left] \frac{1}{3} ; 4 \right[$$