

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E02C

EXERCICE N°4 Lien entre les racines et la forme développée réduite (Le corrigé)

La théorie :

On donne a , b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On note Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ et on suppose $\Delta > 0$.

On peut alors poser $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de f .

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$s = x_1 + x_2 \text{ et } p = x_1 x_2$$

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b) + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$$\begin{aligned} p &= x_1 x_2 \\ &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

La pratique :

2) En remarquant que 1 est une racine évidente de $3x^2 + 3x - 6$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que

$$3x^2 + 3x - 6 = ax^2 + bx + c \text{ avec } a=3 ; b=3 ; c=-6$$

$$\text{Posons } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81$$

Comme $\Delta > 0$ on a bien deux racines distinctes.

Posons alors $x_1 = 1$, d'après la question 1)

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ d'où } x_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\text{On en déduit que } 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$$

3) En remarquant que -1 est une racine évidente de $-2x^2 - 6x - 4$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que

$$-2x^2 - 6x - 4 = ax^2 + bx + c \text{ avec } a=-2 ; b=-6 ; c=-4$$

$$\text{Posons } \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4$$

Comme $\Delta > 0$ on a bien deux racines distinctes.

Posons alors $x_1 = -1$, d'après la question 1)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ d'où } -1 + x_2 = \frac{-6}{-2} \text{ ou encore } x_2 = 3 + 1 = 4$$

$$\text{On en déduit que } -2x^2 - 6x - 4 = -2(x+1)(x-4)$$