LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°1 Somme des premiers carrés

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est à dire $u_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite u .

- $u_1 = 1^2$, ainsi $\boxed{u_1 = 1}$.
- $u_2 = 1^2+2^2$, ainsi $\boxed{u_2 = 5}$.
- $u_3 = 1^2+2^2+3^2$, ainsi $\boxed{u_3 = 14}$.

2) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n+(n+1)^2}$

3) On pose v la suite définie par : Pour tout entier naturel n , $v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.a) Montrer que $v_1 = u_1$

$$v_1 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1 = u_1$$

3.b) Montrer que la suite v suit la même relation de récurrence que la suite u et conclure.

- Exprimons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- Calculons à présent $v_{n+1}+(n+1)^2$

$$v_n+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \qquad \text{factorisation par } (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

Or :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc :

$v_{n+1} = v_n+(n+1)^2$.

- La suite v suit bien la même relation de récurrence que la suite u .
- Comme, de plus, elles ont le même premier terme, on en conclut que :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n$.
- On a donc démontré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(Le résultat reste vrai pour $n=0$)

EXERCICE N°2 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne a et b deux nombres réels tels que : $a > 0$ et $b > \sqrt{a}$.

On donne également la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$.

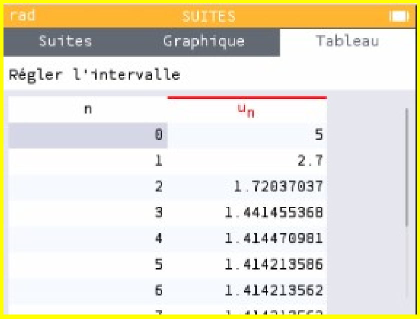
On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Notre but est de comprendre que le terme u_n tend vers $\sqrt{a}$.

1) Un premier cas : $a = 2$ et $b = 5$.

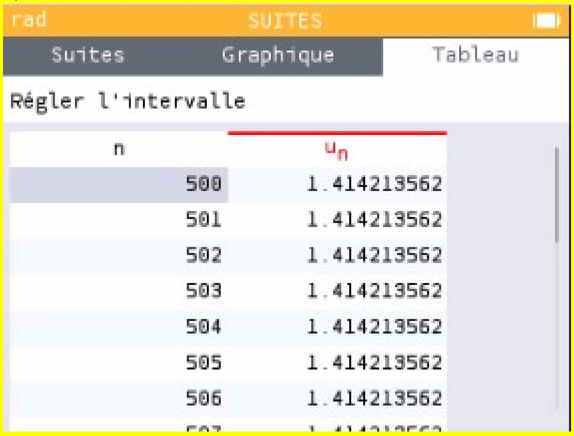
1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $\boxed{u_0 = 5}$
- $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(u_0+\dfrac{2}{u_0}\right) = \dfrac{1}{2}\left(5+\dfrac{2}{5}\right)$, ainsi $\boxed{u_1 = 2{,}7}$
- $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(u_1+\dfrac{2}{u_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2{,}7+\dfrac{2}{2{,}7}\right)$, ainsi $\boxed{u_2 \approx 1{,}72}$
- $u_3 = \dfrac{1}{2}\left(u_2+\dfrac{2}{u_2}\right)$, ainsi $\boxed{u_3 \approx 1{,}441}$
- $u_4 = \dfrac{1}{2}\left(u_3+\dfrac{2}{u_3}\right)$, ainsi $\boxed{u_4 \approx 1{,}414}$



1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec $\sqrt{a}$.

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 1,414213562

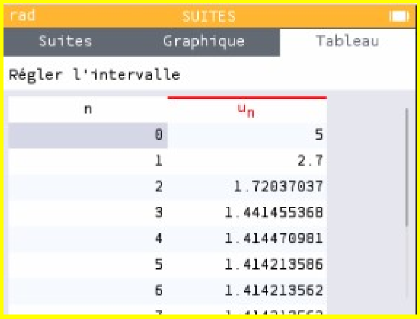


Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{2}$

2) Un premier cas : $a = 5$ et $b = 10$.

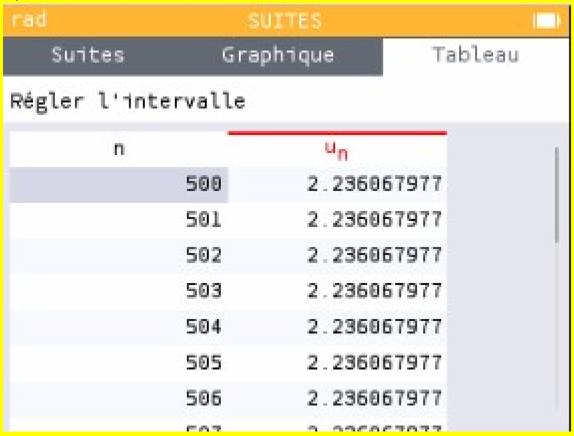
2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $\boxed{u_0 = 10}$
- $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0+\frac{5}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(10+\frac{5}{10}\right)$, ainsi $\boxed{u_1 = 5{,}25}$
- $u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1+\frac{5}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(5{,}25+\frac{2}{5{,}25}\right)$, ainsi $\boxed{u_2 \approx 3{,}101}$
- $u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2+\frac{5}{u_2}\right)$, ainsi $\boxed{u_3 \approx 2{,}357}$
- $u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3+\frac{5}{u_3}\right)$, ainsi $\boxed{u_4 \approx 2{,}239}$



2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec $\sqrt{a}$.

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 2,236067977



Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{5}$

EXERCICE N°3 Suite auxiliaire (sans calculatrice)

On donne la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12} \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 , on donnera les valeurs exactes.

- $u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_0^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}$, ainsi $\boxed{u_1 = \sqrt{3}}$
- $u_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+12} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{15}$, ainsi $\boxed{u_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}}$
- $u_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_2^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{4}+12} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{63}{4}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$, ainsi $\boxed{u_3 = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}}$

2) On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2-4$

2.a) Montrer que la suite v est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

- $v_0 = u_0^2-4 = 0-4$, ainsi $v_0 = -4$
- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2-4 \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2-4 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2+12)-4 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2-1 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2-4) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

« Astuce » de la mise en facteur de « force »

- On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = \dfrac{1}{4}}$ et de $\boxed{\text{premier terme } v_0 = -4}$

2.b) Exprimer v_n en fonction de n .

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = -4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

2.c) On a admet que pour tout entier n , $v_n > -4$. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = u_n^2-4 \Leftrightarrow u_n^2 = v_n+4 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{v_n+4}$ (car $v_n-4 > 0$)

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n = \sqrt{4-4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}}$.

2.d) Conjecturer alors la limite de la suite u .

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$

La suite v tend vers 0, « il reste » $\sqrt{4} = 2$

EXERCICE N°4 Suite auxiliaire et tableur

▪ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n+2n^2-n$.
▪ Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
pour tout entier naturel n, $v_n = u_n+2n^2+3n$.

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre : Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

▪ C2 : =B2+2*A2^2+3*A2

▪ B3 : =2*B2+2*A2^2-A2

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

▪ Exprimons v_{n+1} en fonction v_n :
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1) \\ &= \underbrace{2u_n+2n^2-n}_{u_{n+1}}+2(n+1)^2+3(n+1) \\ &= 2u_n+2n^2-n+2n^2+4n+2+3n+3+5 \\ &= 2u_n+4n^2+6n+10 \\ &= 2(u_n+2n^2+3n+5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } v \text{ est géométrique de raison } q = 2 \text{ et de premier terme } v_0 = 7}$

Pour v_0, il suffit de lire la valeur dans le tableur...

▪ Exprimons v_n en fonction n :
$\forall n \in \mathbb{N}$
$v_n = v_0 \times q^n$, ainsi $\boxed{v_n = 7\times 2^n}$

▪ Exprimons u_n en fonction n :
Soit $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = u_n+2n^2+3n \Leftrightarrow u_n = v_n-2n^2-3n = 7\times 2^n-2n^2-3n$
Ainsi,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 7\times 2^n-2n^2-3n}$