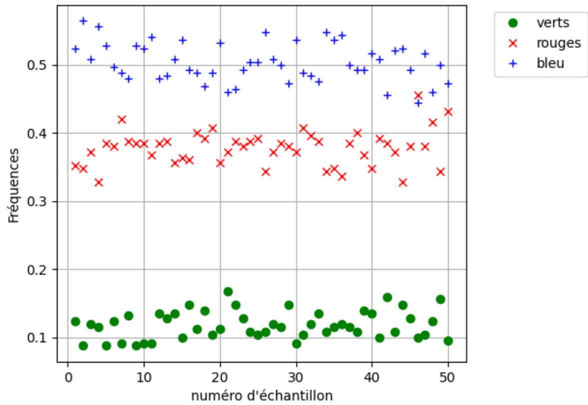
VARIABLES ALÉATOIRES E06C

EXERCICE N°1

(Calculatrice autorisée)

Dans son jeu vidéo favori, Bérildée peut ouvrir des coffres dont le contenu est aléatoire. Ils peuvent contenir des émeraudes vertes qui valent dix points, des rubis rouges qui valent 5 points ou un voleur bleu qui lui vole 5 points. Le graphique ci-dessous donne les fréquences obtenues pour 50 échantillons de taille 200 de l'ouverture d'un coffre. Les points bleus représentent les fréquences d'obtention d'un voleur, les points rouges celles des rubis, et les points verts celles des émeraudes.



1) À l'aide de ce graphique, donner une estimation de la probabilité d'obtention d'une émeraude à ce jeu.

La probabilité semble se situer autour de 0,12

Toute valeur comprise entre 1,10 et 1,30 serait acceptée mais le corrigé sera fait avec valeur. (Cela serait un excellent exercice que de refaire la correction avec la valeur que vous avez choisie)

2) Bérildée a-t-elle intérêt à ouvrir les coffres dans ce jeu ?

On peut estimer la probabilité d'obtention d'un rubis à 0,38 et celle du voleur à 0,5.

$0{,}12+0{,}38+0{,}5 = 1$ tout va bien !

Si vous décidez de travailler avec d'autres valeurs alors assurez-vous que leur somme vaut bien 1.

Notons X la variable aléatoire donnant le gain de Bérildée :

x_i	-5	5	10	Total
$P(X = x_i)$	0,12	0,38	0,5	1

On a alors :

$E(X) = -5\times0{,}12 + 5\times0{,}38 + 10\times0{,}5$

$E(X) = 6{,}3$

L'espérance étant strictement positive $\boxed{\text{Bérildée a intérêt à ouvrir les coffres}}$.

La minute littéraire :

Avoir intérêt à (+ infinitif) : il a intérêt à signer rapidement le bail. La construction avoir intérêt de est littéraire et vieillie : « Les hommes peuvent faire des injustices parce qu'ils ont intérêt de les commettre » (Montesquieu)

EXERCICE N°2

On lance 8 fois successivement un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenu sur les huit lancers.

On ne va bien sûr pas construire l'arbre en entier.

Chaque lancer a une probabilité de $\frac{1}{6}$ de donner un 6 (on pourrait appeler cela un Succès et le noter S) et de $\frac{5}{6}$ de ne pas en donner (On pourrait appeler cela un Échec et le noter $\overline{S}$).

On peut raisonnablement supposer que les lancers sont indépendants et donc qu'à chaque étape les probabilités restent les mêmes.

Arrivé au bout des huit épreuves, X peut prendre les valeurs entières de 1 à 8 inclus.

1.a) Calculer $P(X = 0)$.

Pour arriver à $\{X = 0\}$ il y a un seul chemin et toutes les branches ont pour probabilité $\frac{5}{6}$.

Autrement dit , il y a **1** chemin comportement **8** fois la probabilité $\frac{5}{6}$ et **0** fois la probabilité $\frac{1}{6}$

$$P(X = 0) = \mathbf{1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathbf{8}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathbf{0}}$$

$$\boxed{P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{8}} \approx 0{,}233$$

1.b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 sur les huit lancers ?

Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

Le « piège » est de tenter de calculer $P(X = 1)+P(X = 2)+\ldots+P(X = 8)$

Or :

$$P(X \geqslant 1) = 1-P(X = 0)$$

$$P(\overline{A}) = 1-P(A)$$

$$\boxed{P(X \geqslant 1) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{8}} \approx 0{,}767$$

2) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibrée à six faces pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 devienne supérieure ou égale à 95 % ?

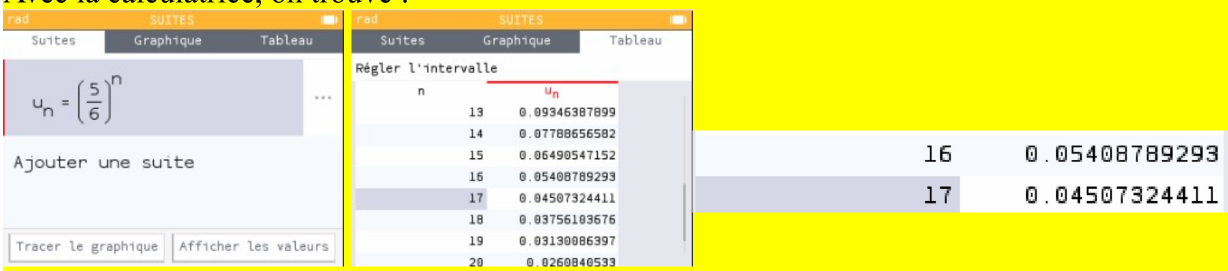
Cette fois, le dé n'est plus lancé 8 fois mais *n* fois avec *n* un nombre entier.

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$,

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \geqslant 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \leqslant 0{,}05$$

Avec la calculatrice, on trouve :



$$\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0{,}054 > 0{,}05 \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0{,}045 < 0{,}05$$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il faut lancer le dé au moins } 17 \text{ fois}}$ pour avoir au moins 95 % de chance d'obtenir un six

EXERCICE N°3 Utiliser les formules de transformation

Des bons d'achats sont à gagner au hasard dans un magasin et les probabilités de les obtenir sont données dans le tableau ci-dessous.

Bons d'achats en euros	1	2	3	4	5
Probabilités	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

X est la variable aléatoire donnant la valeur d'un bon d'achat.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

▪ $E(X) = 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}4 + 4\times 0{,}1 + 5\times 0{,}1$

$\boxed{E(X) = 2{,}7}$

▪ $E(X^2) = 1^2\times 0{,}2 + 2^2\times 0{,}2 + 3^2\times 0{,}4 + 4^2\times 0{,}1 + 5^2\times 0{,}1$

$E(X^2) = 8{,}7$

$V(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = 8{,}7-2{,}7^2$

$\boxed{V(X) = 1{,}41}$

2) La gérante du magasin souhaite que la moyenne des bons d'achats soit égale à 3 et que la variance soit égale à 1 . Elle demande alors d'utiliser une transformation affine qui à X associe $aX+b$ où a et b sont deux nombres réels avec $a > 0$. Calculer les valeurs de a et b à 10^{-2} près.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a > 0$ et posons $Y = aX+b$.

▪ $E(Y) = aE(X)+b$

$\boxed{E(Y) = 2{,}7a+b}$

▪ $V(Y) = a^2V(X)$

$\boxed{V(Y) = 1{,}41a^2}$

▪ $V(Y) = 1 \Leftrightarrow \left(a = -\sqrt{1{,}41} \text{ ou } a = \sqrt{1{,}41}\right)$

Comme $a > 0$, il reste : $\boxed{a = \sqrt{1{,}41}}$

▪ $E(X) = 3 \Leftrightarrow 2{,}7\times\sqrt{1{,}41}+b = 3 \Leftrightarrow$ $\boxed{b = 3-2\sqrt{1{,}41}}$

Ainsi $\boxed{a \approx 1{,}19 \quad \text{et} \quad b \approx 0{,}63}$