LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°3 ***Suite auxiliaire (sans calculatrice)***

On donne la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12} \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 , on donnera les valeurs exactes.

- $u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_0^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}$, ainsi $\boxed{u_1 = \sqrt{3}}$
- $u_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+12} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{15}$, ainsi $\boxed{u_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}}$
- $u_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_2^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{4}+12} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{63}{4}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$, ainsi $\boxed{u_3 = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}}$

2) On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2-4$

2.a) Montrer que la suite v est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

- $v_0 = u_0^2-4 = 0-4$, ainsi $v_0 = -4$
- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2-4 \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2-4 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2+12)-4 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2-1 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2-4) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

« Astuce » de la mise en facteur de « force »

- On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = \frac{1}{4}}$ et de $\boxed{\text{premier terme } v_0 = -4}$

2.b) Exprimer v_n en fonction de n .

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = -4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

2.c) On a admet que pour tout entier n , $v_n > -4$. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = u_n^2-4 \Leftrightarrow u_n^2 = v_n+4 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{v_n+4}$ (car $v_n-4 > 0$)

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n = \sqrt{4-4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}}$.

2.d) Conjecturer alors la limite de la suite u .

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$

La suite v tend vers 0, « il reste » $\sqrt{4} = 2$