ÉTUDE DE FONCTIONS

I Généralités

Définition n°1. Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de l'intervalle I. On dit que :

f admet un maximum en a sur I lorsque,
pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$

f admet un minimum en a sur I lorsque,
pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$

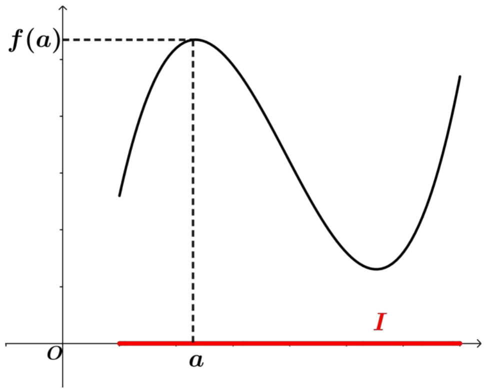
f admet un extremum en a sur I lorsque, f admet un maximum en a sur I ou f admet un minimum en a sur I.

Remarque n°1.

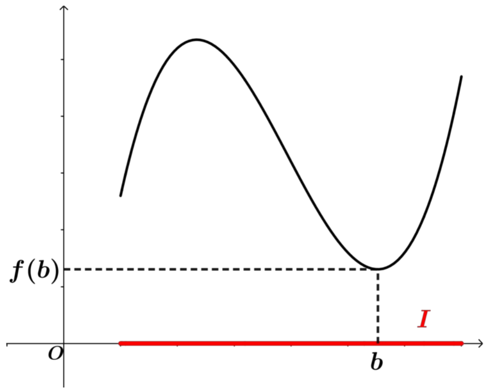
Le pluriel de « extremum » c'est « extrema » mais vous verrez souvent « extremums »…

ÉTUDE DE FONCTIONS

La fonction f possède un maximum sur I qui est $f(a)$ et qui est atteint en a.



La fonction f possède un minimum sur I qui est $f(b)$ et qui est atteint en b.



(f possède deux extrema sur I : un maximum et un minimum)

Définition n°2. **Croissance, décroissance**

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Remarque n°2. ***Le tableau de variations***

On peut résumer les variations d'une fonction sous la forme d'un **tableau de variations**. Les variations peuvent sur lire graphiquement ou se déduire de propriétés et de calculs. On pose $I=[d\ ,\ e]$

x	d		a		b		e
			$f(a)$				$f(e)$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$f(d)$				$f(b)$		

On trouve facilement les extrema avec le tableau de variations.

ÉTUDE DE FONCTIONS

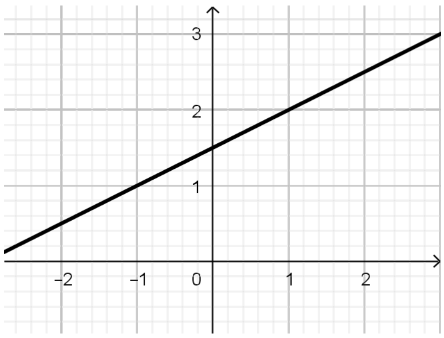
II Les fonctions de références

Les fonctions affines

$f(x)=mx+p$ avec m et p des réels

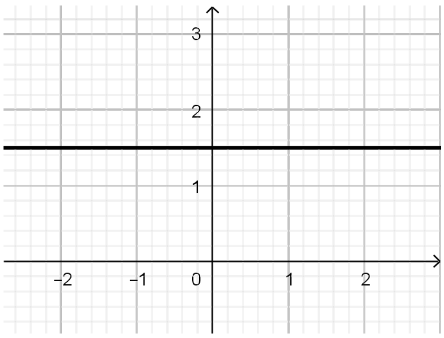
Le domaine de définition est : $D_f=\mathbb{R}$

$m>0$



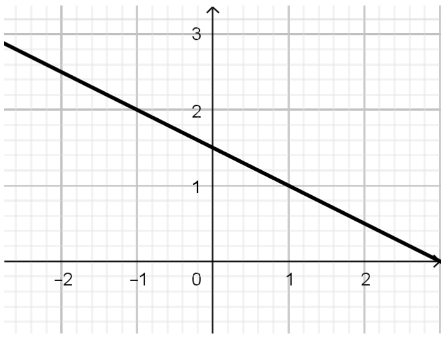
x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Variations	↗	0	↗
signes	$-$	0	$+$

$m=0$



f est constante sur $\mathbb{R}$

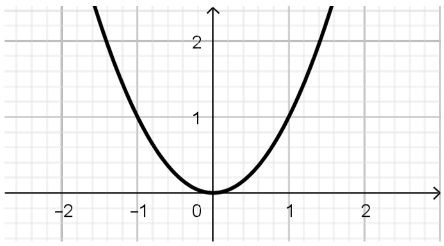
$m<0$



x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Variations	↘	0	↘
signes	$+$	0	$-$

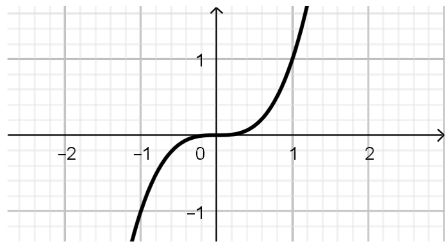
ÉTUDE DE FONCTIONS

La fonction carré : $f(x)=x^2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	$\searrow$	0	$\nearrow$
signes	$+$	0	$+$

La fonction cube : $f(x)=x^3$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

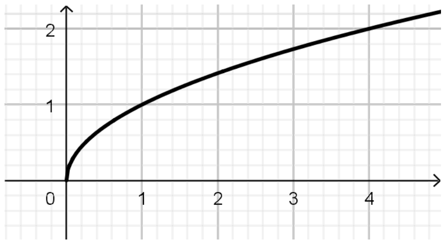


x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signes	$-$	0	$+$

ÉTUDE DE FONCTIONS

La fonction racine carrée: $f(x)=\sqrt{x}$

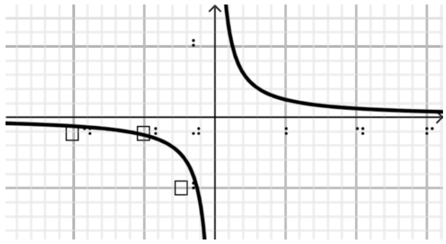
$D_f=[0\ ;\ +\infty[$



x	0		$+\infty$
Variations		$\nearrow$	
signes		$+$	

La fonction inverse : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$D_f=]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	
signes		$-$	$\|$	$+$	

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^2+1$

1) Soient a et b deux réels tels que $3\leqslant a<b$

1.a) Démontrer que $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

1.b) Quel est le signe de $b+a-6$? Quel est le signe de $b-a$?

1.c) En déduire le signe de $f(b)-f(a)$

1.d) En utilisant la définition du sens de variation d'une fonction, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$

2) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$

3) La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui que vaut-il et en quelle valeur de x est-il atteint ?

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-6x+12$

1) Conjecturer le minimum m de f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier le signe de $f(x)-m$ pour valider la conjecture.

EXERCICE N°3

1) Soit l'expression $A=(3x-2)^2-16$

1.a) Développer et réduire A

1.b) Factoriser A

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(3x-2)^2-16$

2.a) Calculer les images de 0 ; 1 et -3

2.b) Déterminer par le calcul, s'ils existent, les antécédents de 0 ; -16 et -25

2.c) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?

2.d) Déterminer l'extremum de cette fonction.

ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°4

On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de -2 par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

2) Conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\ ;-2[$ et sur $]-2\ ;+\infty[$

3) Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle , $]-2\ ;+\infty[$ tels que $a<b$.

3.a) Montrer que $f(b)-f(a)\ =\ \dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}$

3.b) à l'aide de la règle des signes démontrer que $f(b)-f(a)\leqslant 0$ sur $]-2\ ;+\infty[$ **.**

3.c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]-2\ ;+\infty[$.

4)

4.a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$.

4.b) Vérifier la conjecture en résolvant algébriquement l'équation $f(x)=4$.

5) Montrer que $f(x)-2\ =\ \dfrac{-2x-3}{x+2}$

6) En utilisant un tableau de signes, déterminer l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 2$.

EXERCICE N°5

Quelle valeur maximale peut-on obtenir quand on soustrait à un nombre réel son carré ?

EXERCICE N°6

Quelle somme minimale peut-on obtenir quand on ajoute un nombre strictement positif à son inverse ?