

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

En France, au 1^{er} janvier 2018, 0,025 % de la population était centenaire, dont 83 % de femmes. Les résultats seront arrondis à 10^{-5} .

1)

1.a) Quelle était la probabilité que dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard il y ait eu au moins une personne centenaire ?

Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500. On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0,00025$. ($X \sim \mathcal{B}(500; 0,00025)$)

On peut le faire car le nombre d'habitants au Japon est (bien) plus grand que 5000 (10×500) et que bien sûr les personnes sont choisies au hasard.

Il s'agit donc de calculer $P(X \geq 1)$

Or $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

On pourrait calculer $P(X \geq 1)$ directement, mais il faudrait alors calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$... $P(X=500)$.

Donc $P(X \geq 1) = 1 - 0,99975^{500}$

$$P(X=0) = \underbrace{\binom{500}{0}}_1 \times \underbrace{0,00025^0}_1 \times \underbrace{(1-0,00025)^{500-0}}_{0,99975^{500}}$$

Ainsi $P(X \geq 1) \approx 0,11752$

1.b) Et dans un groupe de 500 femmes ?

• Commençons par déterminer la probabilité qu'une femme soit centenaire.

L'énoncé nous donne la probabilité qu'un centenaire soit une femme...

Dans l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un japonais au hasard, notons :

C : La personne choisie est centenaire

F : La personne choisie est une femme.

On peut supposer que $P(F) = 0,5$

Selon Wikipédia, en 2019 au Japon, le sex-ratio valait $\frac{94}{100}$

$$\text{sex-ratio} = \frac{\text{nombre d'hommes}}{\text{nombre de femmes}}$$

On en déduit la proportion de femmes : $\frac{100}{100+94} \approx 0,51546$

Notre approximation de 0,5 est donc justifiée.

$$P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P(C) \times P_C(F)}{P(F)} = \frac{0,00025 \times 0,83}{0,5} = 4,15 \times 10^{-4}$$

Ainsi $P_F(C) = 0,000415$

• Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500 femmes. On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0,000415$.

($X \sim \mathcal{B}(500; 0,000415)$)

On calcule alors $P(X \geq 1)$ comme à la question précédente.

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,999585^{500}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,18742$$

2) Au Japon, la proportion de centenaires était de 0,037 % en 2011. Quelle était la probabilité qu'il n'y ait pas eu de centenaire dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard à cette époque ?

Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500. On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0,00037$. ($X \sim \mathcal{B}(500; 0,00037)$)

Il s'agit donc de calculer $P(X=0)$

$$P(X=0) = 0,99963^{500}$$

$$P(X=0) \approx 0,83108$$