LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2000 \times 0{,}4^x = 3000$

$$2000 \times 0{,}4^x = 3000$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4^x = 1{,}5$$
$$\Leftrightarrow \log(0{,}4^x) = \log(1{,}5)$$
$$\Leftrightarrow x\log(0{,}4) = \log(1{,}5)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(1{,}5)}{\log(0{,}4)}$$

On en déduit que l'équation admet $\boxed{\text{une unique solution : } \frac{\log(1{,}5)}{\log(0{,}4)}}$ dont une valeur approchée est $\boxed{-0{,}443 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $15 \times 2^x < 8$

$$15 \times 2^x < 8$$
$$\Leftrightarrow 2^x < \frac{8}{15}$$
$$\Leftrightarrow \log(2^x) < \log\left(\frac{8}{15}\right) \qquad \text{(car la fonction log est strictement croissante)}$$
$$\Leftrightarrow x\log(2) < \log\left(\frac{8}{15}\right)$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)} \approx -0{,}901$$

$(\log(2) > 0$ donc le sens de l'inégalité ne change pas$)$

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left]-\infty\ ;\ \frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)}\right[}$

Si on veut écrire l'ensemble des solutions, il faut garder la valeur exacte. Dans la pratique, on utilise la valeur approchée...

$$\frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)} = \frac{\log(8)-\log(15)}{\log(2)} = \frac{\log(2^3)-\log(15)}{\log(2)} = \frac{3\log(2)-\log(15)}{\log(2)} = 3 - \frac{\log(15)}{\log(2)}$$
$$= 3 - \frac{\log(3)+\log(5)}{\log(2)}$$

L'expression finale est-elle plus simple que l'expression de départ ? … Bof
À notre niveau, en général, on ne se fatiguera donc pas avec cette étape.
(L'époque des tables de log est révolue depuis longtemps...)