LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E04

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

L'échelle de Richter, basée sur les mesures faites par les sismographes, exprime la magnitude M d'un séisme. Cette magnitude se calcule selon la formule :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

1) Que vaut la magnitude M lorsque

1.a) $A = A_0$?

$$M = \log\left(\frac{A_0}{A_0}\right) = \log(1)$$

Ainsi $\boxed{M=0}$

1.b) $A = 10\times A_0$?

$$M = \log\left(\frac{10\times A_0}{A_0}\right) = \log(10)$$

Ainsi $\boxed{M=1}$

1.c) $A = 10\,000\times A_0$?

$$M = \log\left(\frac{10\ 000\times A_0}{A_0}\right) = \log(10\ 000)$$

Ainsi $\boxed{M=4}$

2) Un séisme est dit « léger », provoquant des secousses d'objet à l'intérieur des maisons et quelques faibles dommages, lorsque sa magnitude est comprise entre 4 et 5.
Montrer qu'alors son amplitude est telle que : $10^4\times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5\times A_0$.

$$4 \leqslant M \leqslant 5 \Leftrightarrow 4 \leqslant \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \leqslant 5 \Leftrightarrow 10^4 \leqslant \frac{A}{A_0} \leqslant 10^5 \Leftrightarrow 10^4\times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5\times A_0$$

3) La magnitude connue la plus importante est de 9,5. Elle a été enregistrée au Chili en mai 1960. Exprimer son amplitude A en fonction de A_0 .
(On donnera une valeur approchée de l'amplitude sous la forme $a\times 10^b\times A_0$, $a<10$ et b entier naturel).

$$M = 9{,}5 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 9{,}5 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{9{,}5} = 3162277660 \approx 3{,}2\times 10^9$$

On en déduit que $\boxed{\text{l'amplitude valait approximativement } 3{,}2\times 10^9\times A_0}$

4) Un pays vient de connaître un séisme de magnitude 8 suivi d'une réplique de magnitude 4.
Un journaliste écrit alors que la réplique a été deux fois moins puissante que le premier séisme.
Que pensez-vous de cette affirmation du journaliste ? Argumentez votre réponse.

▪ Calculons les deux amplitudes :

$$M = 8 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 8 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^8 \Leftrightarrow A=10^8\times A_0$$

$$M = 4 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^4 \Leftrightarrow A=10^4\times A_0$$

▪ Calculons le rapport des deux.

$$\frac{10^4\times A_0}{10^8\times A_0} = 10^{-4}$$

▪ On en déduit que $\boxed{\text{la réplique était 10000 fois moins puissante que le premier séisme}}$.
$\boxed{\text{L'affirmation du journaliste est donc fantaisiste...}}$

La formule de la magnitude a été simplifiée pour l'exercice (pour les curieux : ici par exemple)
En revanche les proportions restent valables : De façon approximative quand la magnitude augmente de 1 ($+1$) l'amplitude est multipliée par 10 ($\times 10$)

$+1 \rightarrow \times 10$
$+2 \rightarrow \times 100$
$+3 \rightarrow \times 1000$
$\vdots \qquad \vdots$

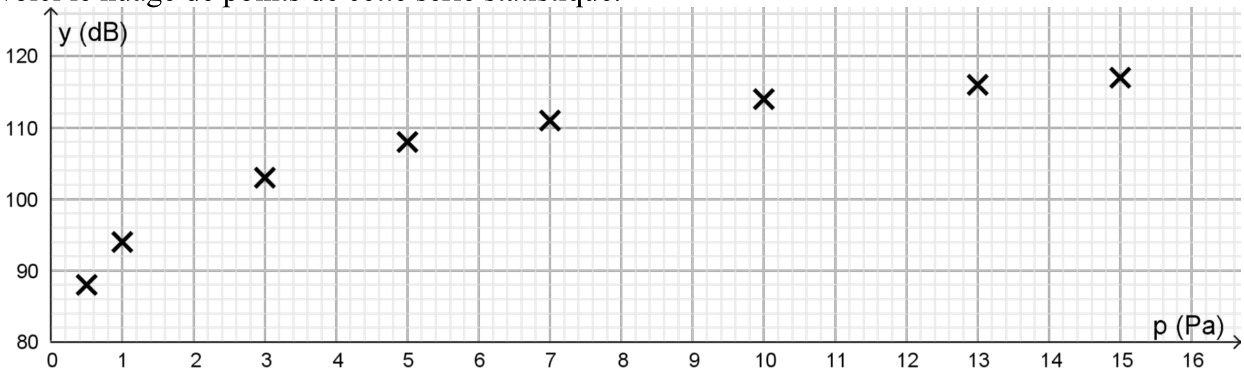
La fonction logarithme décimal E04

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

Dans une grande salle de concert, pendant huit soirées différentes, on a relevé la pression acoustique ambiante (en Pascal : Pa) ainsi que le niveau d'intensité sonore (en décibel : dB) du bruit responsable de cette pression. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Pression acoustique : p_i	0,5	1	3	5	7	10	13	15
Intensité sonore : y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

Voici le nuage de points de cette série statistique.



1) Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

Les points du nuages ne semblent pas suffisamment alignés.

Donc $\boxed{\text{un ajustement affine ne semble pas pertinent}}$.

2) On pose $x = \log(p)$. Reproduire et compléter te tableau suivant en arrondissant les valeurs de x à 10^{-2} près.

x_i								
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

x_i	$-0,3$	0	0,48	0,7	0,85	1	1,11	1,18
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

3) Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 dB sur l'axe des ordonnées en prenant 80 pour origine), représenter le nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

Les points semblent alignés donc l'ajustement affine semble être pertinent.

(à ce stade, seuls les points sont placés dans le repère…)

4) Calculer les coordonnées du point moyen $G(x_G\ ;\ y_G)$ du nuage et placer ce point sur le graphique.

$$x_G = \frac{-0,3+0+\ldots+1,11+1,18}{8} \approx 0,62$$

$$y_G = \frac{88+94+\ldots+116+117}{8} \approx 106,4$$

Ainsi $\boxed{G(0,62\ ;\ 106,4)}$

(à ca stade, la droite n'est pas encore tracée…)

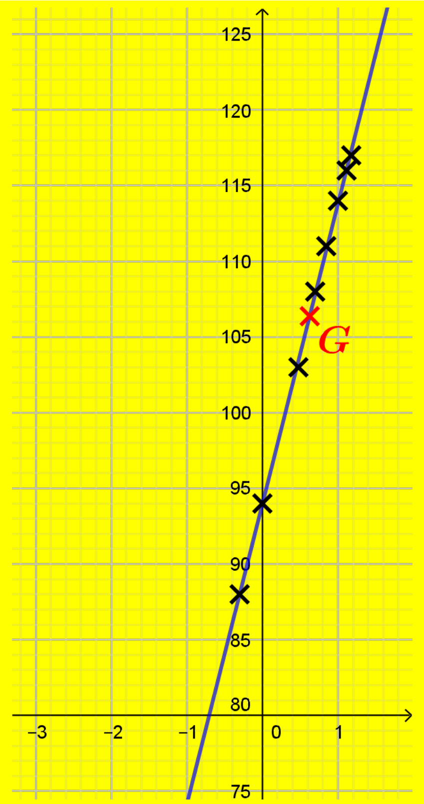
5) Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près). Tracer cette droite dans le repère.

À l'aide la calculatrice : $\boxed{y = 19,8x+93,9}$

(La figure est à présent complète)

6) Lors d'un concert de hard rock, l'oreille des spectateurs peut être soumise à la pression de 20 Pa. Estimer par le calcul l'intensité sonore atteinte lors d'un tel concert (résultat arrondi au décibel près).

$19,8\times\log(20)+93,9 \approx 120$ soit $\boxed{\text{environ 120 dB}}$



LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E04

EXERCICE N°1

L’échelle de Richter, basée sur les mesures faites par les sismographes, exprime la magnitude M d'un séisme. Cette magnitude se calcule selon la formule :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

1) Que vaut la magnitude M lorsque

1.a) $A = A_0$? **1.b)** $A = 10 \times A_0$? **1.c)** $A = 10\,000 \times A_0$?

2) Un séisme est dit « léger », provoquant des secousses d'objet à l’intérieur des maisons et quelques faibles dommages, lorsque sa magnitude est comprise entre 4 et 5.
Montrer qu'alors son amplitude est telle que : $10^4 \times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5 \times A_0$.

3) La magnitude connue la plus importante est de 9,5. Elle a été enregistrée au Chili en mai 1960. Exprimer son amplitude A en fonction de A_0 .
(On donnera une valeur approchée de l'amplitude sous la forme $a \times 10^b \times A_0$, $a < 10$ et b entier naturel).

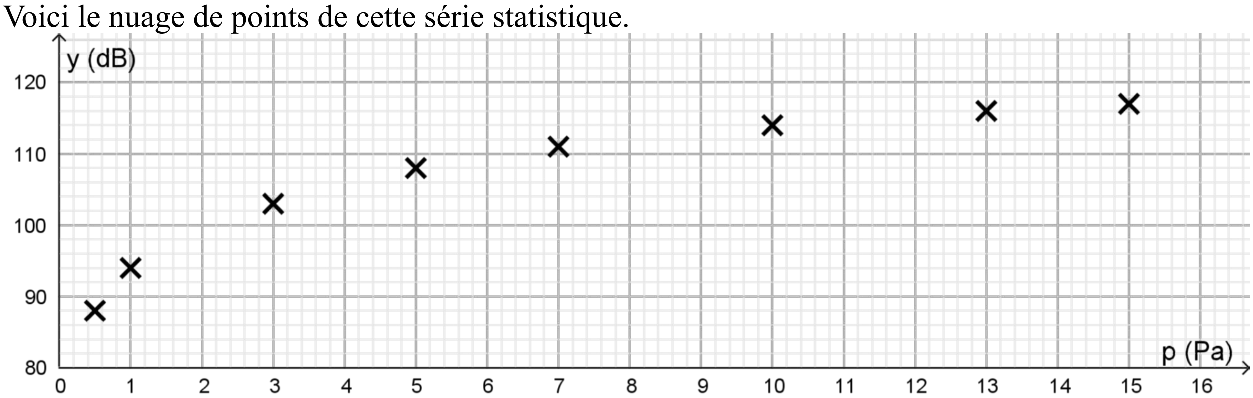
4) Un pays vient de connaître un séisme de magnitude 8 suivi d’une réplique de magnitude 4.
Un journaliste écrit alors que la réplique a été deux fois moins puissante que le premier séisme.
Que pensez-vous de cette affirmation du journaliste ? Argumentez votre réponse.

EXERCICE N°2

Dans une grande salle de concert, pendant huit soirées différentes, on a relevé la pression acoustique ambiante (en Pascal : Pa) ainsi que le niveau d'intensité sonore (en décibel : dB) du bruit responsable de cette pression. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Pression acoustique : p_i	0,5	1	3	5	7	10	13	15
Intensité sonore : y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

Voici le nuage de points de cette série statistique.



1) Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

2) On pose $x = \log(p)$. Reproduire et compléter te tableau suivant en arrondissant les valeurs de x à 10^{-2} près.

x_i								
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

3) Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 dB sur l'axe des ordonnées en prenant 80 pour origine), représenter le nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

4) Calculer les coordonnées du point moyen $G(x_G\ ;\ y_G)$ du nuage et placer ce point sur le graphique.

5) Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près). Tracer cette droite dans le repère.

6) Lors d'un concert de hard rock, l'oreille des spectateurs peut être soumise à la pression de 20 Pa. Estimer par le calcul l'intensité sonore atteinte lors d'un tel concert (résultat arrondi au décibel près).