EXERCICE N°4 Réinvestir d'anciennes connaissances

On donne A , B et C trois points distincts du plan.

1) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5{,}5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

$$0 = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})}\right)$$

Or $\|\overrightarrow{BC}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{CA}\| \neq 0$ (car les points A et C sont distincts).

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul

Donc :

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})}\right) = 0$$

ainsi :

$$\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en C .

2) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{AC}\| \neq 0$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$$

En remplaçant :

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1\times 1} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Le triangle étant isocèle en A , si l'un de ses angles mesure $\frac{\pi}{3}\ rad$ alors les deux autres aussi.

On conclut que le triangle ABC est équilatéral.

3) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{AC}\| \neq 0$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$$

En remplaçant :

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \frac{\frac{9}{2}}{3\times 3} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Le triangle étant isocèle en A , si l'un de ses angles mesure $\frac{\pi}{3}\ rad$ alors les deux autres aussi.

On conclut que le triangle ABC est équilatéral.