

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°2 Suite auxiliaire et tableur

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

- Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + 2n^2 + 3n$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2
et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes
des suites u et v ?

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

- C2 : $=B2+2*A2^2+3*A2$
- B3 : $=2*B2+2*A2^2-A2$

2) Déterminer, en justifiant, une expression de
 v_n puis de u_n en fonction de n .

- Exprimons v_{n+1} en fonction v_n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\
 &= \underbrace{2u_n + 2n^2 - n}_{u_{n+1}} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\
 &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5 \\
 &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\
 &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\
 &= 2v_n
 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 7$

Pour v_0 , il suffit de lire la valeur dans le tableur...

- Exprimons v_n en fonction n :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = v_0 \times q^n, \text{ ainsi } v_n = 7 \times 2^n$$

- Exprimons u_n en fonction n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n \Leftrightarrow u_n = v_n - 2n^2 - 3n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$