EXERCICE N°2 *fonction affine et fonction inverse*

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= \frac{1}{3x+4}\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $3x+4\neq 0$.
On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

Se lit « R privé de moins quatre tiers ».

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= 3\times\frac{1}{x}+4\\ &= \frac{3}{x}+4\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.
On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

On notera que l'ordre dans lequel on compose a des conséquences sur le domaine de définition (c'est pour cela que la définition de départ a été qualifiée de « partielle »).

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ n'est pas un intervalle…

$$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{4}{3}\right[\ \cup\ \left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$$

- Pour $x\in\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{4}{3}\right[$

$(f\circ g)(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$, dont la dérivée s'exprime par $\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

Donc :

$$(f\circ g)'(x) = -\frac{3}{(3x+4)^2}$$

- De la même façon, pour $x\in\left]-\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$$(f\circ g)'(x) = -\frac{3}{(3x+4)^2}$$

$\mathbb{R}^*$ non plus...

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Donc :

- Pour $x\in\,]-\infty\ ;\ 0[$

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= 3\times\frac{-1}{x^2}+0\\ &= -\frac{3}{x^2}\end{aligned}$$

- De la même façon, pour $x\in\,]0\ ;\ +\infty[$

$$(g\circ f)'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 3$$

4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.

▪ Pour $x \in \left]-\infty \; ; -\frac{4}{3}\right[$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = 3\times f'(g(x)) = 3\times\frac{-1}{(g(x))^2} = 3\times\frac{-1}{(3x+4)^2} = \frac{-3}{(3x+4)^2}$$

▪ De la même façon, pour $x \in \left]-\frac{4}{3} \; ; +\infty\right[$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = \frac{-3}{(3x+4)^2}$$

▪ Pour $x \in \left]-\infty \; ; 0\right[$

$$f'(x)\times g'(f(x)) = -\frac{1}{x^2}\times g'(f(x)) = -\frac{1}{x^2}\times 3 = -\frac{3}{x^2}$$

g' est la fonction constante égale à 3

▪ De la même façon, pour $x \in \left]0 \; ; +\infty\right[$

$$f'(x)\times g'(f(x)) = -\frac{3}{x^2}$$

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la ligne concernant l'inverse dans le tableau de la propriété n°5 semble être cas particulier de la composition.