LES VECTEURS E05

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)***

On se place dans un repère orthonormé et on considère les quatre points $A(-2\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -3)$, $C(1\ ;\ 1)$ et $D(5\ ;\ -3)$.

1) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

▪ Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ -3-1 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

▪ Calculons à présent le déterminant :

$$det\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right)\ =\ 2\times 4-(-4)\times 1\ =\ 12$$

Ainsi $\boxed{det\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right)\ =\ 12}$

2) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

▪ Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 1-1 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix} x_B-x_D \\ y_B-y_D \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix} 0-5 \\ -3-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

▪ Calculons à présent le déterminant :

$$det\left(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{DB}\right)\ =\ 3\times 0-0\times(-5)\ =\ 0$$

Ainsi $\boxed{det\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right)\ =\ 0}$

LES VECTEURS E05

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

1) On se place dans un repère orthonormé et on considère les trois points $A(-2\ ;\ -3)$, $B(4\ ;\ -2)$, $C(8\ ;\ 0)$

1.a) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

▪ Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -2-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8-(-2) \\ 0-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

▪ Calculons à présent le déterminant :

$$det(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}) = 6\times3-10\times1 = 8$$

Ainsi $\boxed{det(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}) = 18}$

1.b) Que peut-on en déduire pour ces deux vecteurs ?

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

1.c) Écrire, si possible une égalité avec ces deux vecteurs.

Ce n'est pas possible car ils ne sont pas colinéaires.

On parle ici d'une égalité du type $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$.
Il est toujours possible d'écrire par exemple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ mais cela n'a que très peu d'intérêt...

2) Reprendre la question 1) avec $A(-2\ ;\ -3)$, $B(4\ ;\ -2)$, $C(16\ ;\ 0)$

▪ Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -2-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16-(-2) \\ 0-(-3) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

▪ Calculons à présent le déterminant :

$$det(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = 6\times3-18\times1 = 0$$

Ainsi $\boxed{det(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = 0}$

On en déduit que ces deux vecteurs sont colinéaires.

On peut écrire que : $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$ ou que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

EXERCICE N°3 *(Le corrigé)*

x est un nombre réel. On se place dans une base orthonormée.

1) Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\x-2\end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\vec{v}$? Justifier.

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires équivaut à : $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

Or : $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 5(x-2)-3\times 11$

Nous devons résoudre l'équation $5(x-2)-3\times 11 = 0$.

$$5(x-2)-3\times 11 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x-10-33 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x-43 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x = 43$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{43}{5}=8{,}6$$

Cette équation admet une solution : 8,6

On en déduit qu'il existe bien un réel : $\boxed{8{,}6}$ tel que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\vec{v}$.

2) Soient les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ tels que $\vec{w}=\begin{pmatrix}x\\2x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{t}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{w}$ soit colinéaire à $\vec{t}$? Justifier.

On procède de la même manière.

$$det(\vec{w}\ ,\ \vec{t}) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x-(-3)(2x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x-[-6x-3] = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x+6x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8x = -3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{8} = -0{,}375$$

Cette équation admet une solution : $-0{,}375$

On en déduit qu'il existe bien un réel : $\boxed{-0{,}375}$ tel que $\vec{w}$ soit colinéaire à $\vec{t}$.

3) Soient les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ tels que $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{s}=\begin{pmatrix}2x-3\\3x-1\end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que $\vec{r}$ soit colinéaire à $\vec{s}$? Justifier.

On procède de la même manière.

$$det(\vec{r}\ ,\ \vec{s}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(3x-1)-(x+1)(2x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-x-[2x^2-3x+2x-3] = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-x-[2x^2-x-3] = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-x-2x^2+x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -3$$

Cette équation n'admet aucune solution.

On en déduit qu'il $\boxed{\text{n'existe pas}}$ de réel tel que $\vec{r}$ soit colinéaire à $\vec{s}$.