LA FONCTION CARRÉ E07

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Soit n un nombre entier naturel.

1) Développer et réduire le nombre : $(n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

$$\begin{aligned}(n^2+n+1)(n^2-n+1) &= n^2(n^2-n+1)+n(n^2-n+1)+1(n^2-n+1)\\ &= n^4-n^3+n^2 \quad +n^3-n^2+n \quad +n^2-n+1\\ &= n^4+n^2+1\end{aligned}$$

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre n^4+n^2+1 est premier.

Si $n=0$ $n^4+n^2+1 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier.

On supposera donc $n>0$

D'après la question précédente, quelque soit la valeur de n , on aura :

$n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$

Comme un nombre premier possède exactement deux diviseurs, il est nécessaire que l'un des deux facteurs égale 1.

Cela ne peut être n^2+n+1 car pour n strictement positifs , n^2+n+1 est strictement supérieur à 1.

(faites le calcul avec quelques valeurs de n , si vous n'êtes pas convaincu)

Il reste donc : n^2-n+1 qui doit valoir 1.

Or : $n^2-n+1 = 1 \Leftrightarrow n^2-n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) = 0$

Cette équation produit admet deux solutions : 0 et 1.

Nous avons déjà éliminé 0.

Il ne nous reste plus qu'à tester le cas $n=1$

$1^4+1^2+1 = 3$

et 3 est bien un nombre premier.

En conclusion la seule valeur de n possible est $\boxed{1}$