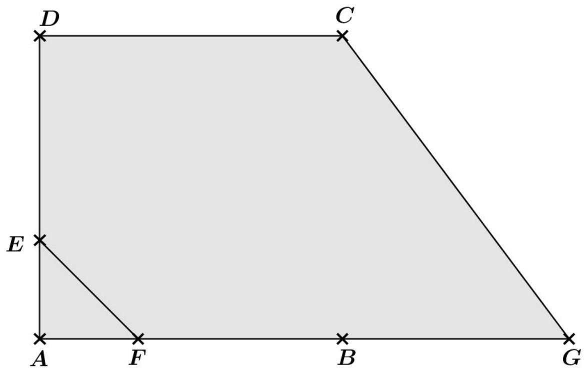
LA FONCTION CARRÉ E07

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. Soit G un point de la demi-droite $[AB)$ avec $BG = 3$ cm . Soit F un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AD]$ tels que le triangle AEF soit rectangle isocèle en A .

Où doit-on placer le point F pour que l'aire du triangle AEF soit égale au quart de l'aire du trapèze $AGCD$?



On sait que : $A_{AEF} = \dfrac{AF^2}{2}$ $\quad A_{ADCG} = A_{ADCB} + A_{CBG} = 4^2 + \dfrac{4\times 3}{2} = 22$

En posant $x = AF$, on peut traduire le problème $A_{AEF} = \dfrac{A_{ADCG}}{4}$ par :

$\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{22}{4} \Leftrightarrow x^2 = 11$

Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{11}$ et $\sqrt{11}$.

Comme AF est une longueur, il ne reste que $\sqrt{11}$.

Ainsi le point F doit être placé sur la demi-droite $[AG)$ à $\sqrt{11} \approx 3{,}3$ cm de A .

EXERCICE N°2 ***(Le corrigé)***

Soit n un nombre entier naturel.

1) Développer et réduire le nombre : $(n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

$$\begin{aligned}(n^2+n+1)(n^2-n+1) &= n^2(n^2-n+1)+n(n^2-n+1)+1(n^2-n+1)\\ &= n^4-n^3+n^2 \quad +n^3-n^2+n \quad +n^2-n+1\\ &= n^4+n^2+1\end{aligned}$$

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre n^4+n^2+1 est premier.

Si $n=0$ $n^4+n^2+1 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier.

On supposera donc $n>0$

D'après la question précédente, quelque soit la valeur de n , on aura :

$n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$

Comme un nombre premier possède exactement deux diviseurs, il est nécessaire que l'un des deux facteurs égale 1.

Cela ne peut être n^2+n+1 car pour n strictement positifs , n^2+n+1 est strictement supérieur à 1.

(faites le calcul avec quelques valeurs de n , si vous n'êtes pas convaincu)

Il reste donc : n^2-n+1 qui doit valoir 1.

Or : $n^2-n+1 = 1 \Leftrightarrow n^2-n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) = 0$

Cette équation produit admet deux solutions : 0 et 1.

Nous avons déjà éliminé 0.

Il ne nous reste plus qu'à tester le cas $n=1$

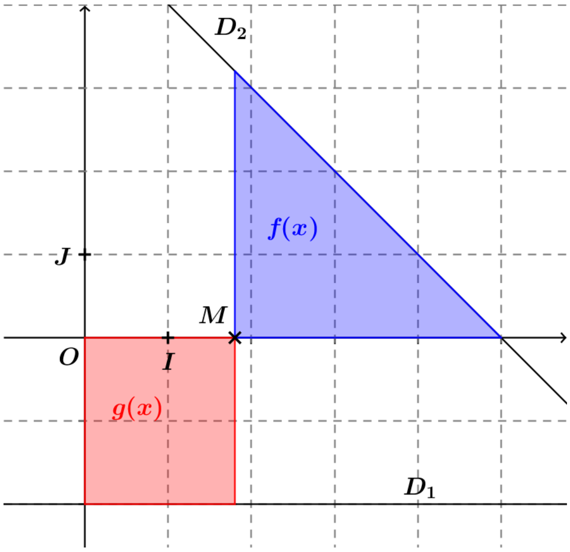
$1^4+1^2+1 = 3$

et 3 est bien un nombre premier.

En conclusion la seule valeur de n possible est $\boxed{1}$

EXERCICE N°3 *(Le corrigé)*

Dans un repère ci-dessous, on a tracé les droites D_1 et D_2 . Le point M est mobile sur l'axe des abscisses. On note x l'abscisse de M . On a $x \in [0 ; 5]$.



1) Exprimer l'aire de la surface du rectangle rouge, notée $g(x)$, en fonction de x .
2) Exprimer l'aire de la surface du triangle bleu rectangle isocèle en M , notée $f(x)$, en fonction de x .
3) Montrez que résoudre $f(x)>g(x)$ revient à résoudre $(x-7)^2-24 > 0$
4) Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$.
5) Donner l'ensemble des positions possibles de M pour que la surface bleue soit strictement plus grande que la rouge.

1)
$\boxed{g(x) = 2x}$

2)
Si on note E le point d'intersection de D_2 avec l'axe des abscisses alors $ME = 5-x$.

On en déduit que $\boxed{f(x) = \dfrac{(5-x)^2}{2}}$.

3)
$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x) > 0$ c
Or : d'une part,
$$f(x)-g(x) = \frac{(5-x)^2}{2}-2x = \frac{25-10x+x^2}{2}-\frac{4x}{2} = \frac{x^2-14x+25}{2}$$
d'où $f(x)-g(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-14x+25}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2-14x+25 > 0$
et d'autre part,
$(x-7)^2-24 = x^2-14x+49-24 = x^2-14x+25$
d'où $(x-7)^2-24 > 0 \Leftrightarrow x^2-14x+25 > 0$
On en déduit le résultat.