LA FONCTION EXPONENTIELLE E03C

EXERCICE N°1 Étudier les variations d'une fonction (niveau 1)

Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \mapsto e^{x} - e\,x$ **2)** $g : x \mapsto e^{-5x} + 5x$ **3)** $h : x \mapsto e^{2x} - 2x + 1$

1)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = e^{x} - e$

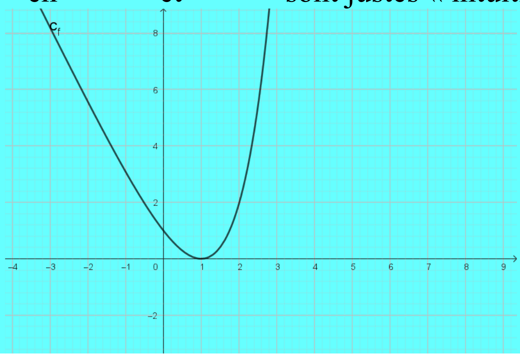
▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{x} > e^{1} \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(1) = e^{1} - e \times 1 = e - e = 0$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



2)

- g est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = -5e^{-5x}+5$

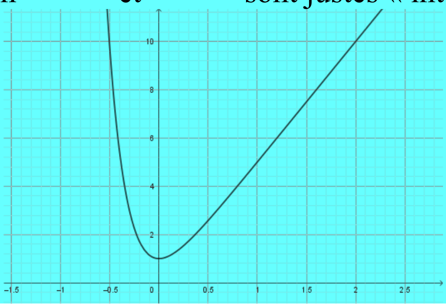
- Dressons le tableau de signes de g' pour en déduire le tableau de variations de g.

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow -5e^{-5x}+5 > 0 \\ &\Leftrightarrow -5\left(e^{-5x}-1\right) > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car -5<0} e^{-5x}-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-5x} < e^{0} \\ &\Leftrightarrow -5x < 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car -5<0} x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0) = e^{-5\times 0}+5\times 0 = 1+0 = 1$

Cette année les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



3)

- h est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$h'(x) = 2e^{2x} - 2$

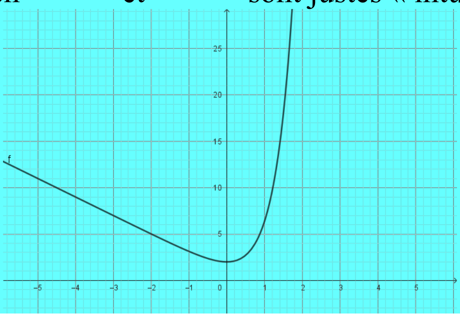
- Dressons le tableau de signes de h' pour en déduire le tableau de variations de h.

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2e^{2x} - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(e^{2x} - 1\right) > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, 2>0} e^{2x} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} > e^{0} \\ &\Leftrightarrow 2x > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, 2>0} x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0) = e^{2\times 0} - 2\times 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$

Cette année les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



EXERCICE N°2 ***Étudier les variations d'une fonction (niveau 2)***

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto (x+1)e^x$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{4x}{e^x}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{4e^x}{x}$ avec $D = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

1)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = u(x)v(x)$

avec

$u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

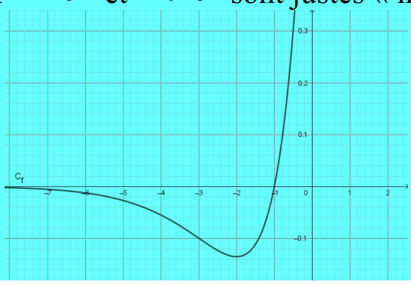
▫ $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



2)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{4x}{e^x} = 4xe^{-x}$$

Ainsi

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$u(x) = 4x$ et $u'(x) = 4$

$v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$

d'où

$$f'(x) = 4e^{-x} - 4x \times (-e^{-x}) = 4(1+x)e^{-x}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ 4 est un nombre positif.

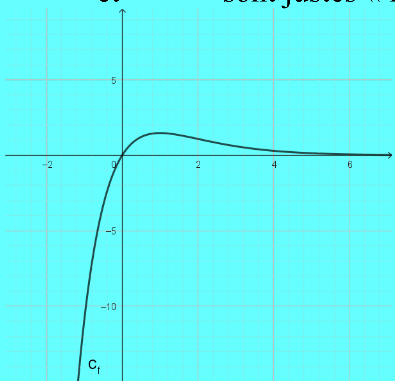
▫ $1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

▫ $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
4		+		+	
$1-x$		+	0	−	
e^{-x}		+		+	
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

$$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = 4e^x$ et $u'(x) = 4e^x$

$v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

d'où

$$f'(x) = \frac{4e^x \times x - 1 \times 4e^x}{x^2} = \frac{(4x-4)e^x}{x^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

▫ $4x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

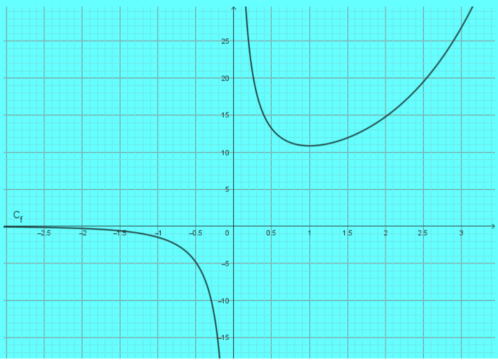
▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

▫ $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$4e$	↗	$+\infty$

$$f(1) = \frac{4e^1}{1} = 4e$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi qu'en 0^- et 0^+ sont justes « intuitives ».



EXERCICE N°3 Étudier les variations d'une fonction (niveau 3)

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ avec $D = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

2) $f : x \mapsto (-2x+3)e^{2x+4}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{6e^x}{x-5}$ avec $D = \mathbb{R}\backslash\{5\} =]-\infty\ ;\ 5[\ \cup\ ]5\ ;\ +\infty[$

1)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto e^x - 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = e^x+1$ et $u'(x) = e^x$

$v(x) = e^x-1$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$$f'(x) = \frac{e^x\times(e^x-1)-e^x\times(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1-(e^x+1))}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

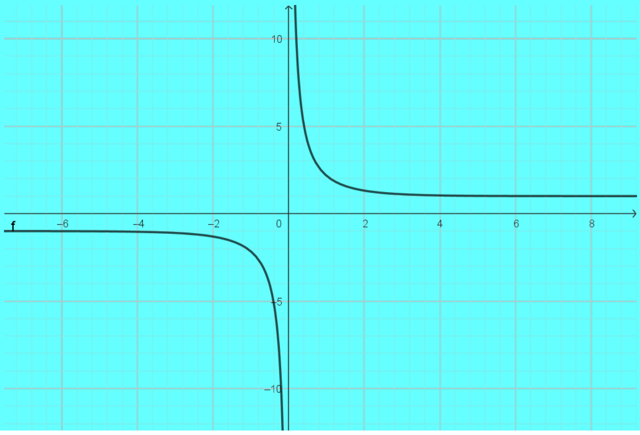
▫ -2 est un nombre négatif

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

▫ $(e^x-1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
e^x		$+$		$+$	
$(e^x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi qu'en 0^- et 0^+ sont justes « intuitives ».



2)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = u(x) \times v(x)$

avec

$u(x) = -2x+3$ et $u'(x) = -2$

$v(x) = e^{2x+4}$ et $v'(x) = 2e^{2x+4}$

d'où

$f'(x) = -2 \times e^{2x+4} + (-2x+3) \times 2e^{2x+4} = (-4x+4)e^{2x+4}$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

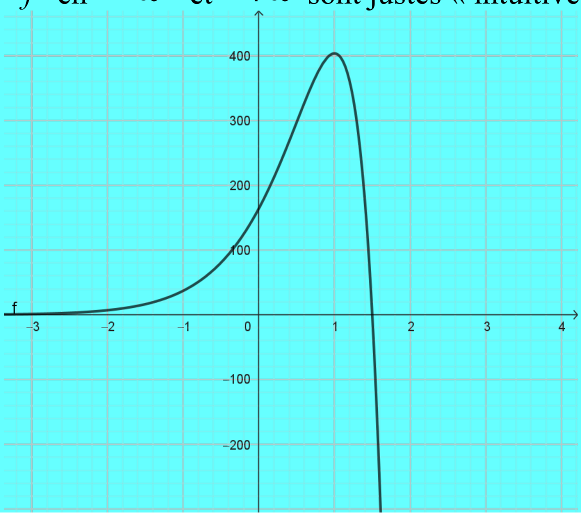
▫ $-4x+4 > 0 \Leftrightarrow -4x > -4 \Leftrightarrow x < 1$

▫ $e^{2x+4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^{2x+4}		$+$		$+$	
$-4x+4$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^6	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = (-2 \times 1 + 3)e^{2 \times 1 + 4} = e^6$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, de plus $x \mapsto x-5$ ne s’annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{5\}$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = 6e^x$ et $u'(x) = 6e^x$

$v(x) = x-5$ et $v'(x) = 1$

d’où

$$f'(x) = \frac{6e^x \times (x-5) - 6e^x \times 1}{(x-5)^2} = \frac{(x-5-1)\times 6e^x}{(x-5)^2} = \frac{6(x-6)e^x}{(x-5)^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

▫ 6 est un nombre positif

▫ $x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$

▫ $e^x > 0$ pour tout $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

▫ $(x-5)^2 > 0$ pour tout $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
6		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-6$		$-$	|	$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x-5)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$6e^6$	↗	$+\infty$

$$f(5) = \frac{6e^6}{6-5} = 6e^6$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».