

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 LE CORRIGÉ

Nom :

Prénom :

Classe :

EXERCICE N°1 Fonctions affines, équation, inéquations : les bases

5 points

1) Résoudre, dans \mathbb{R} les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle :

1.a) $4x+10 < 6x-3$

1.b) $\frac{x+6}{-7} \geq 2x-3$

$$\begin{aligned} 4x+10 &< 6x-3 \\ \Leftrightarrow 4x+10-(6x-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4x+10-6x+3 &< 0 \\ \Leftrightarrow -2x+13 &< 0 \\ \Leftrightarrow -2x &< -13 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-13}{-2} = 6,5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $] 6,5 ; +\infty [$

$$\begin{aligned} \frac{x+6}{-7} &\geq 2x-3 \\ \Leftrightarrow x+6 &\leq -7(2x-3) \\ \Leftrightarrow x+6 &\leq -14x+21 \\ \Leftrightarrow x+6-(-14x+21) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x+6+14x-21 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 15x-15 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 15x &\leq 15 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{15}{15} = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $] -\infty ; 1]$

2) Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3 ; 2)$ et $B(4 ; 0)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .

Les points A et B n'ayant pas la même abscisse, on sait que la droite (AB) admet une équation réduite de la forme :

$$y = mx + p$$

avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{4-(-3)} = \frac{-2}{7}$


et comme $A \in (AB)$:

$$2 = -\frac{2}{7} \times (-3) + p \Leftrightarrow 2 = \frac{6}{7} + p \Leftrightarrow p = 2 - \frac{6}{7} = \frac{14-6}{7} = \frac{8}{7}$$

On en déduit que l'équation réduite de (AB) est : $y = -\frac{2}{7}x + \frac{8}{7}$

3) On donne la fonction f , définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = -3x+6$.

3.a) Donner son tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

3.b) Déterminer son tableau de signes.

Posons x_0 la racine de la fonction affine f , on sait que $x_0 = \frac{-6}{-3} = 2$

De plus, le coefficient directeur de f est strictement négatif ($-3 < 0$).

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

On se place dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

On donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(2 ; 1), (3 ; 4)$ et $(-2 ; -3)$.

1) Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} \text{ on encore } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} -2-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} \text{ on encore } \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2) Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont-ils colinéaires ? Justifier.

$$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 1 \times (-4) - 3 \times (-4) = 8 \neq 0$$

On en déduit que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} **ne sont pas colinéaires**.

3) On pose le point $D(x_D ; y_D)$ tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3.a) Déterminer les coordonnées de D .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1+(-4) \\ 3+(-4) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$x_D - 2 = -3 \Leftrightarrow x_D = -1$$

et

$$y_D - 1 = -1 \Leftrightarrow y_D = 0$$

Donc **$D(-1 ; 0)$**

3.b) Donner la nature du quadrilatère ABDC.

$ABDC$ est un parallélogramme

Le point D est défini par la règle du parallélogramme (propriété n°3 si vous avez oublié)

3.c) En déduire, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{DC} (sans calcul...)

Puisque $ABDC$ est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

et que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On peut affirmer que **$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$**

Un musée propose deux tarifs.

- tarif A: chaque entrée coûte 6€.
- tarif B: on paye un abonnement à l'année de 16 € et chaque entrée coûte alors 4€.

La variable x désigne le nombre de fois où un visiteur a fréquenté le musée.

- 1) Donner l'expression de la fonction f qui modélise le budget annuel pour le musée avec le tarif A, et celle de g pour le tarif B.

On peut écrire :

$$f(x) = 6x \quad \text{et} \quad g(x) = 16 + 4x$$

- 2) Représenter ces deux fonctions dans le repère en annexe au dos de cette feuille.

Voir l'annexe

- 3) Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$;

D'après le graphique, pour $x > 8$, si $M(x; y_M) \in C_f$ et $N(x; y_N) \in C_g$ alors $y_M > y_N$. On en déduit que l'ensemble des solutions est : $] 8 ; +\infty [$

- 4) Résoudre par le calcul $f(x) > g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &> g(x) \\ \Leftrightarrow 6x &> 16 + 4x \\ \Leftrightarrow 6x - (16 + 4x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 6x - 16 - 4x &> 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 16 &> 0 \\ \Leftrightarrow 2x &> 16 \\ \Leftrightarrow x &> 8 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc : $] 8 ; +\infty [$

- 5) Alfred va au musée une fois tous les deux mois. Quel tarif doit-il choisir ?

Alfred va au musée 6 fois par an et $6 \notin] 8 ; +\infty [$ donc $f(6) \leq g(6)$.

On en déduit qu'Alfred doit choisir le **tarif A**

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et on donne le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On considère les points A, B et C vérifiant les relations suivantes :

$$2\vec{OA} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} ; 3\vec{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } 2\vec{BC} - \vec{OB} = \vec{u}$$

Déterminer les coordonnées des points A, B et C .

▪ $2\vec{OA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc \vec{OA} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De plus $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix}$ soit $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A - 0 \\ y_A - 0 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Par identification $A(2 ; 3)$

▪ $3\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc \vec{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

De plus $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - 2 \\ y_B - 3 \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$$x_B - 2 = 3 \Leftrightarrow x_B = 5$$

et :

$$y_B - 3 = 1 \Leftrightarrow y_B = 4$$

Donc $B(5 ; 4)$

▪ $2\vec{BC} - \vec{OB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2(x_C - x_B) - (x_B - x_O) \\ 2(y_C - y_B) - (y_B - y_O) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2(x_C - 5) - 5 \\ 2(y_C - 4) - 4 \end{pmatrix}$

ou encore $\begin{pmatrix} 2x_C - 15 \\ 2y_C - 12 \end{pmatrix}$.

De plus $2\vec{BC} - \vec{OB} = \vec{u}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$$2x_C - 15 = 3 \Leftrightarrow 2x_C = 18 \Leftrightarrow x_C = 9$$

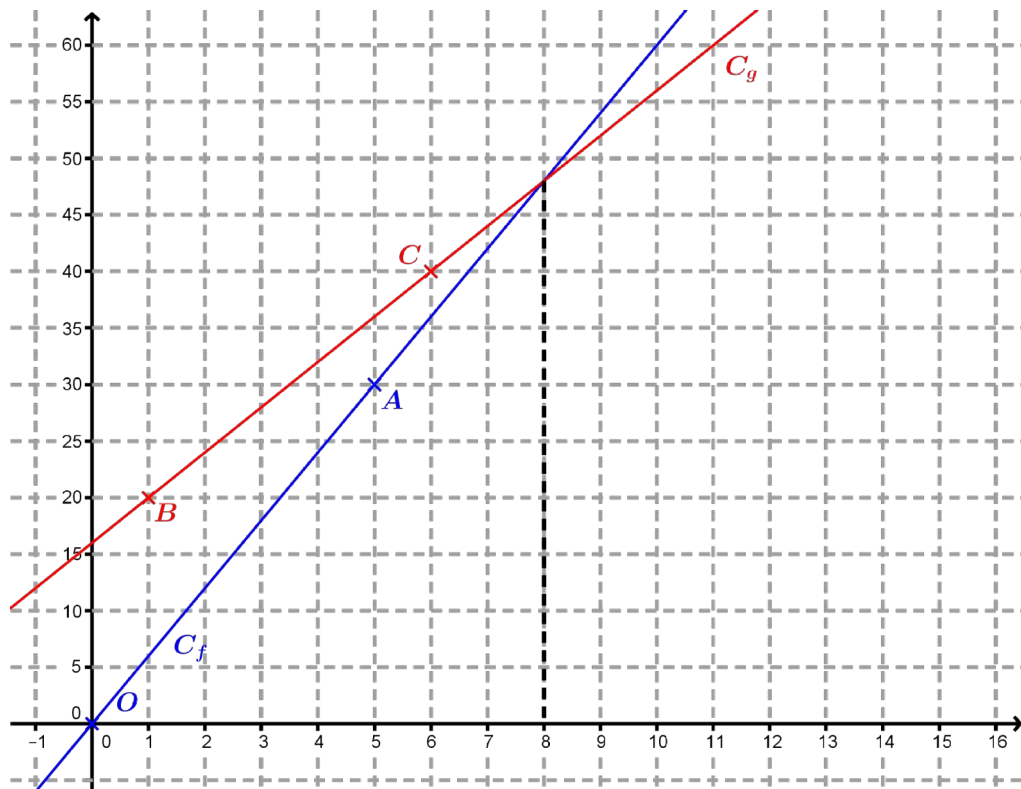
et

$$2y_C - 12 = 3 \Leftrightarrow 2y_C = 15 \Leftrightarrow y_C = 7,5$$

Donc $C(9 ; 7,5)$

ANNEXE

Repère correspondant à la question 2) de l'exercice n°3



Écrire ci-dessous la méthode (les calculs suffisent) qui vous a permis de tracer les représentations graphiques C_f et C_g

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite et pour représenter une droite il suffit d'en connaître deux points.

De plus, un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Ceci nous conduit aux tableaux suivants :

x	0	5
$f(x)$	0	30
point	$O(0; 0)$	$A(5; 30)$

x	1	6
$g(x)$	20	40
point	$B(1; 20)$	$C(6; 40)$

On a placé les points et tracé les droites.