FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E03C

EXERCICE N°1 Discriminant pour résoudre des équations (Le corrigé)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $3x^2+6x-24 = 0$

Posons $\Delta = 6^2-4\times3\times(-24) = 18$ le discriminant de cette équation. $\Delta > 0$,il y a donc deux solutions :

$\boxed{x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{18}}{2\times3} = -1-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}}$ et

$\boxed{x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{18}}{2\times3} = -1+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}}$

2) $5x^2+10\sqrt{2}x-30 = 0$

Posons $\Delta = (10\sqrt{2})^2-4\times5\times(-30) = 800$ le discriminant de cette équation. $\Delta > 0$,il y a donc deux solutions :

$\boxed{x_1 = \dfrac{-10\sqrt{2}-\sqrt{800}}{2\times5} = -3\sqrt{2}}$ et

$\boxed{x_2 = \dfrac{-10\sqrt{2}+\sqrt{800}}{2\times5} = \sqrt{2}}$

3) $2x^2-12x+19 = 0$

Posons $\Delta = (-12)^2-4\times2\times19 = -8$ le discriminant de cette équation. $\Delta < 0$,il n'y a donc $\boxed{\text{aucune solution}}$.

4) $2x^2+11x-6 = 4x^2-10x+4$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$2x^2+11x-6 = 4x^2-10x+4$

$2x^2+11x-6-(4x^2-10x+4) = 0$

$-2x^2+21x-10 = 0$

On a bien précisé que les 4 assertions (« phrases mathématique ») étaient équivalentes (elles « signifient la même chose ») c'est à dire que rechercher les solutions de la première équation revient à chercher celles de la dernière. C'est grâce à cela qu'on a pu conclure.

Posons $\Delta = 21^2-4\times(-2)\times(-10) = 361$ le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-21-19}{2\times(-2)} = 10$ et

$x_2 = \dfrac{-21+19}{2\times(-2)} = -\dfrac{1}{2}$

On en déduit que :

$\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 10\right\}}$

EXERCICE N°2 Discriminant oui mais pas toujours !

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $4x^2-14x+49 = 0$

On doit toujours penser à vérifier si on a affaire à une identité remarquable. (Dans ce cas, on aura à faire une factorisation)

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$4x^2-14x+49 = 0$

$(2x-7)^2 = 0$

Cette dernière équation admet une solution double : $\frac{7}{2}$

On en déduit que $\boxed{S = \left\{\frac{7}{2}\right\}}$

2) $5x^2-2x = 0$

On vérifie aussi, si on a affaire à une factorisation évidente…

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$5x^2-2x = 0$

$x(5x-2) = 0$

$(x = 0 \text{ ou } 5x-2=0)$

$\left(x = 0 \text{ ou } x=\frac{2}{5}\right)$

On en déduit que $\boxed{S = \left\{0 \; ; \; \frac{2}{5}\right\}}$

3) $(3x-1)^2-(2x+5)^2 = 0$

3^e^ identité remarquable !

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$(3x-1)^2-(2x+5)^2 = 0$

$[(3x-1)-(2x+5)][(3x-1)+(2x+5)] = 0$

$(x-6)(5x+4) = 0$

$(x-6 = 0 \text{ ou } 5x+4=0)$

$\left(x = 6 \text{ ou } x=-\frac{4}{5}\right)$

On en déduit que $\boxed{S = \left\{-\frac{4}{5} \; ; \; 6\right\}}$

4) $x^2 = 49$

Ici, c'est immédiat.
(voir la propriété n°4 du cours de seconde)

$x^2 = 49$

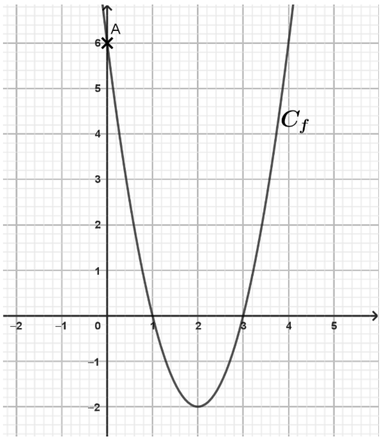
Cette équation admet $\boxed{\text{deux solutions} : -7 \text{ et } 7}$

EXERCICE N°3 Le lien entre les racines et la parabole

Dans chaque question, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et leur représentation graphique est une parabole.

Dans chaque cas déterminez les racines quand elles existent, donnez l'ensemble des solutions de l'équation proposée et déterminez la forme factorisée du trinôme quand c'est possible.

1)



C_f a pour équation réduite $y=f(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$

La parabole coupe l'axe des abscisses en 1 et 3 , donc les racines sont 1 et 3

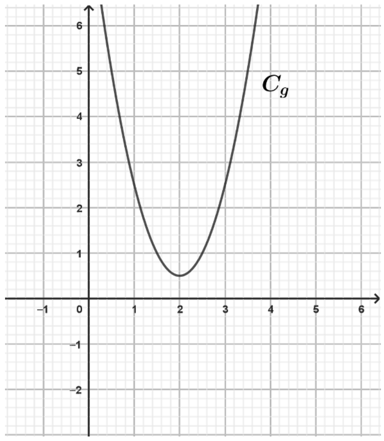
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{1\ ;\ 3\}$.

On peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f(x) = a(x-1)(x-3)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

De plus $A(0\ ;\ 6) \in C_f$, nous donne
$6 = a(0-1)(0-3) \Leftrightarrow a = 2$

Ainsi $\boxed{f(x) = 2(x-1)(x-3)}$

2)



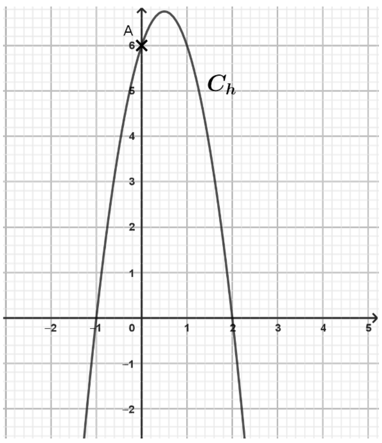
C_g a pour équation réduite $y=g(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$

La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, donc il n'y a pas de racine et l'ensemble des solutions est vide .

Pour finir, on ne peut pas factoriser $g(x)$ dans $\mathbb{R}$

Hé mais pourquoi on ajoute « dans $\mathbb{R}$ » ? … patience…

3)



C_h a pour équation réduite $y=h(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $h(x) = 0$

La parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et 2 , donc les racines sont -1 et 2

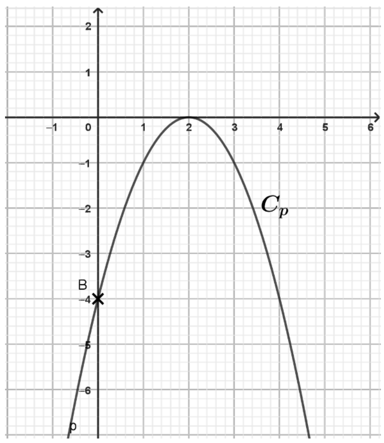
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{-1\ ;\ 2\}$.

On peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $h(x) = a(x+1)(x-2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

De plus $A(0\ ;\ 6) \in C_f$, nous donne
$6 = a(0+1)(0-2) \Leftrightarrow a = -3$

Ainsi $\boxed{h(x) = -3(x+1)(x-2)}$

4)



C_p a pour équation réduite $y=p(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $p(x) = 0$

La parabole coupe l'axe des abscisses en 2 , donc il y a une racine double : 2

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{2\}$

On peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $p(x) = a(x-2)^2$ avec $a \in \mathbb{R}$.

De plus $B(0\ ;\ -4) \in C_f$, nous donne
$-4 = a(0-2)^2 \Leftrightarrow a = -2$

Ainsi $\boxed{p(x) = -2(x-2)^2}$

EXERCICE N°4 Comment résoudre des inéquations ?

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

L'idée est de comparer un produit de facteurs à zéro.

Pourquoi ?

Parce qu'on pourra facilement étudier le signe de chaque facteur et que l'on pourra appliquer ensuite la règle des signes pour obtenir le signe du produit (et donc la comparaison à zéro...)

Exemples généraux :

1) $2x^2+11x-6 \leqslant 4x^2-10x+4$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Pour $x \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$2x^2+11x-6 \leqslant 4x^2-10x+4$

$2x^2+11x-6 - (4x^2-10x+4) \leqslant 0$

On ne change pas le sens d'une d'inégalité en soustrayant un même nombre à chaque membre (et oui $4x^2-10x+4$ est un nombre même si il dépend du nombre x)

$-2x^2+21x-10 \leqslant 0$

Posons $\Delta = 21^2-4\times(-2)\times(-10) = 361$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-21-19}{2\times(-2)} = 10$ et $x_2 = \dfrac{-21+19}{2\times(-2)} = -\dfrac{1}{2}$

La dernière inéquation est donc équivalente à :

$-2(x-10)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0$

Or :

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ avec a ; b et c des réels , $a \neq 0$ et possédant deux racines distinctes alors

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retient avec l'une des deux phrases suivantes :

Le trinôme est du signe de moins a entre les racines.

Ou

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

(Retenez en une sur les deux et oubliez l'autre!)

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		10		$+\infty$
$-2(x-10)\left(x+\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{S = \left]-\infty \,;\, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [10 \,;\, +\infty[}$

2) $9x^2-6x+1 > 4x^2+20x+25$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow 9x^2-6x+1 > 4x^2+20x+25 \Leftrightarrow 5x^2-26x-24 > 0$

Posons $\Delta = (-26)^2-4\times5\times(-24) = 1156$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-(-26)-34}{2\times5} = -\dfrac{4}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-(-26)+34}{2\times5} = 6$

La dernière inéquation est donc équivalente à :

$5(x-6)\left(x+\dfrac{4}{5}\right) > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		6		$+\infty$
$5(x-6)\left(x+\frac{4}{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]6\ ;\ +\infty\right[}$

Des cas particuliers :

3) $5x^2-7x+21 < 3x^2-5x+2$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow 5x^2-7x+21 < 3x^2-5x+2 \Leftrightarrow 2x^2-2x+19 < 0$

Posons $\Delta = (-2)^2-4\times2\times19 = -148$ le discriminant de ce dernier trinôme. $\Delta < 0$, il n'y a donc aucune racine .

Dans ce cas, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, ce qui signifie que le signe ne change pas. Il reste à le déterminer : c'est le signe de a dans ax^2+bc+c (revenez aux jeux)

On en déduit que le trinôme est du même signe que son coefficient dominant $2 > 0$.

On en déduit que $\boxed{S = \emptyset}$

4) $x^2 \geqslant 64$

C'est dans le cours de seconde : propriétés n°6 et 7

Cette équation admet comme ensemble de solutions : $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -8\right[\cup \left]8\ ;\ +\infty\right[}$