

LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°1 Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse a .

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 3$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 1 + 0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 5$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = 1$

d'où

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 5 \times 1 + 3 = 2$$

et

$$f'(1) = 12 \times 1^2 - 5 = 7$$

Ainsi :

$$y = 7(x-1) + 2$$

qui se réduit à :

$$y = 7x - 5$$

2) $f(x) = -7t^2 - \frac{3}{t} + 5$, $I =]0 ; +\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = -7 \times 2t - 3 \times \frac{-1}{t^2} + 0$$

$$f'(x) = -14t + \frac{3}{t^2}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = 3$

d'où

$$f(3) = -7 \times 3^2 - \frac{3}{3} + 5 = -59$$

et

$$f'(3) = -14 \times 3 + \frac{3}{3^2} = -42 + \frac{1}{3} = \frac{-126+1}{3} = -\frac{125}{3}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{125}{3}(x-3) - 59$$

qui se réduit à :

$$y = -\frac{125}{3}x + 184$$

3) $f(x) = (2x-3)^3(x^2+1)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

avec :

$$u(x) = (2x-3)^3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 3 \times 2 \times (2x-3)^2 = 6(2x-3)^2$$

et

$$v(x) = x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 6(2x-3)^2(x^2+1) + 2x(2x-3)^3 \\ &= (2x-3)^2[6(x^2+1) + 2x(2x-3)] \\ &= (2x-3)^2(6x^2+6 + 4x^2-6x) \\ &= (2x-3)^2(10x^2 + 6x+6) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2(2x-3)^2(5x^2-3x+3)$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.

Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.

Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$$f'(x) = 40x^4 - 144x^3 + 186x^2 - 126x + 54$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$$f(-1) = (2(-1)-3)^3((-1)^2+1) = (-5)^3 \times 2 = -250$$

et

$$f'(-1) = 2(2(-1)-3)^2(5(-1)^2-3(-1)+3) = 2 \times (-5)^2 \times 11 = 550$$

Ainsi :

$$y = 550(x+1) - 250$$

qui se réduit à :

$$y = 550x + 300$$

$$4) \quad f(x) = \frac{4x^5 - 10x^2 + 3}{2x} \quad , \quad I =]-\infty ; 0[\quad , \quad a = -1 .$$

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = 4x^5 - 10x^2 + 3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4 \times 5x^4 - 10 \times 2x + 0 = 20x^4 - 20x$$

et

$$v(x) = 2x \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(20x^4 - 20x) - 2(4x^5 - 10x^2 + 3)}{(2x)^2} \\ &= \frac{2[x(20x^4 - 20x) - (4x^5 - 10x^2 + 3)]}{(2x)^2} \\ &= \frac{2(20x^5 - 20x^2 - 4x^5 + 10x^2 - 3)}{2x \times 2x} \\ &= \frac{16x^5 - 10x^2 - 3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{16x^5 - 10x^2 - 3}{2x^2}}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$$f(-1) = \frac{4(-1)^5 - 10(-1)^2 + 3}{2(-1)} = \frac{-4 - 10 + 3}{-2} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

et

$$f'(-1) = \frac{16(-1)^5 - 10(-1)^2 - 3}{2(-1)^2} = \frac{-16 - 10 - 3}{2} = -\frac{29}{2}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{29}{2}(x+1) + \frac{11}{2}$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -\frac{29}{2}x - 9}$$

LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°2 Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis calculer le nombre dérivé de f en a .

1) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$, $I = [0 ; +\infty[$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = \sqrt{2x+1} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

et

$$v(x) = 3x+2 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 3$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(3x+2) - 3\sqrt{2x+1}}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{(3x+2) - 3(2x+1)}{\sqrt{2x+1}(3x+2)^2} \\ &= \frac{3x+2-6x-3}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{-3 \times 1 - 1}{(3 \times 1 + 2)^2 \sqrt{2 \times 1 + 1}} = -\frac{4}{5^2 \sqrt{3}}$$

$$f'(1) = -\frac{4}{25\sqrt{3}}$$

« On n'aime pas trop les racines au dénominateur »...

$$\frac{-4 \times \sqrt{3}}{25\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{25 \times 3}$$

On pourrait également écrire :

$$f'(1) = -\frac{4\sqrt{3}}{75}$$

2) $f(t) = (2t+1)^3(5-3t)^4$ $I = \mathbb{R}$, $a = -2$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on peut écrire :
 $f(t) = u(t) \times v(t)$

avec :

$$u(t) = (2t+1)^3 \text{ d'où } u'(t) = 3 \times 2 \times (2t+1)^2 = 6(2t+1)^2$$

et

$$v(t) = (5-3t)^4 \text{ d'où } v'(t) = 4 \times (-3)(5-3t)^3 = -12(5-3t)^3$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^4 + (-12)(5-3t)^3(2t+1)^3 \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t+(-2)(2t+1)] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t-4t-2] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3) \end{aligned}$$

$$f'(t) = 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3)$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.

Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.

Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$$f'(x) = 4536t^6 - 20088t^5 + 24030t^4 + 4164t^3 - 16320t^2 - 300t + 2250 \quad \text{mais bon...}$$

▪ Pour finir :

$$f'(-2) = 6(2(-2)+1)^2(5-3(-2))^3(-7(-2)+3) = 6 \times (-3)^2 \times 11^3 \times (-11) = -54 \times 11^4$$

$$f'(-2) = -790614$$

Aide au calcul
 $125 \times 105 = 13125$
 $54 \times 11^4 = 790614$

3) $f(x) = \frac{3+x^2}{(5x-10)^4}$, $I =]2 ; +\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = 3+x^2 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 2x$$

et

$$v(x) = (5x-10)^4 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 4 \times 5 \times (5x-10)^3 = 20(5x-10)^3$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(5x-10)^4 - 20(5x-10)^3(3+x^2)}{((5x-10)^4)^2} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[x(5x-10) - 10(3+x^2)]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[5x^2 - 10x - 30 - 10x^2]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3(-5x^2 - 10x - 30)}{(5x-10)^8} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-2(5x-10)^3(5x^2+10x+30)}{(5x-10)^8}$$

▪ Pour finir :

$$f'(3) = \frac{-2(5 \times 3 - 10)^3(5 \times 3^2 + 10 \times 3 + 30)}{(5 \times 3 - 10)^8} = -2 \times 5^3 \times 105 = -2 \times 125 \times 105 = -2 \times 13125$$

$$f'(3) = -26250$$

Aide au calcul

$$\begin{aligned} 125 \times 105 &= 13125 \\ 54 \times 11^4 &= 790614 \end{aligned}$$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{x^2}$, $I =]0 ; 3]$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = \sqrt{6-2x} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{6-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$$

et

$$v(x) = x^2 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{-1}{\sqrt{6-2x}}x^2 - 2x\sqrt{6-2x}}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{-x^2 - 2x(6-2x)}{\sqrt{6-2x}}}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 - 12x + 4x^2}{x^4\sqrt{6-2x}} \\ &= \frac{3x^2 - 12x}{x^4\sqrt{6-2x}} \\ &= \frac{3x(x-4)}{x^4\sqrt{6-2x}} \\ &= \frac{3(x-4)}{x^3\sqrt{6-2x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x-12}{x^3\sqrt{6-2x}}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{3 \times 1 - 12}{1^3\sqrt{6-2 \times 1}} = \frac{-9}{\sqrt{4}} = \frac{-9}{2}$$

$$\boxed{f'(1) = \frac{-9}{2}}$$

LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°3 Tangentes parallèles à une droite donnée

Extrait du déclin 1^{er} spé 74 p 122

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3x^3 - x^2 - x + 1$$

Déterminer les tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = -8x + 2$.

On précisera l'abscisse des points de tangence et leurs équations réduites respectives.

On parle de tangentes donc on doit penser « dérivée » et se souvenir que le nombre dérivé et le coefficient directeur de la tangente...

On doit aussi savoir que « droites parallèles = même coefficient directeur »

La droite d'équation $y = -8x + 2$ a pour coefficient directeur -8 .

▪ Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = -8$

f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} donc f l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3 \times 3x^2 - 2x - 1 + 0 \text{ ou encore : } f'(x) = -9x^2 - 2x - 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8 \\ \Leftrightarrow -9x^2 - 2x - 1 &= -8 \\ \Leftrightarrow -9x^2 - 2x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Posons $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-9) \times 7 = 4 + 4 \times 63 = 4 + 252 = 256$, le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{256}}{2 \times (-9)} = \frac{2 - 16}{-18} = \frac{-14}{-18} = \frac{7}{9}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{256}}{2 \times (-9)} = \frac{2 + 16}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

▪ On en déduit qu'il y a deux tangentes à C_f possibles :

▪ La première se situe au point d'abscisse -1 et admet comme équation

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

Or :

$$f(-1) = -3(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 - 1 + 1 + 1 = 4$$

et

$$f'(-1) = -8$$

On obtient :

$$y = -8(x + 1) + 4$$

qui se réduit à :

$$y = -8x - 4$$

▪ La seconde se situe au point d'abscisse $\frac{7}{9}$ et admet comme équation :

$$y = f'\left(\frac{7}{9}\right)\left(x - \frac{7}{9}\right) + f\left(\frac{7}{9}\right)$$

Or :

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -3\left(\frac{7}{9}\right)^3 - \left(\frac{7}{9}\right)^2 - \frac{7}{9} + 1 = -\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 = \frac{-343 - 147 - 189 + 243}{243} = -\frac{436}{243}$$

et

$$f'\left(\frac{7}{9}\right) = -8$$

On en déduit $y = -8x + \frac{1076}{243}$

Aide au calcul

$$\begin{aligned} -\frac{343}{243} - \frac{49}{81} - \frac{7}{9} + 1 &= -\frac{436}{243} \\ -\frac{56}{9} - \frac{436}{243} &= \frac{1076}{243} \end{aligned}$$

EXERCICE N°4 **Tangentes passant par un point donné**Extrait du déclin 1^{er} spé 99 p 127

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

et on note C_f sa courbe représentative.

On souhaite déterminer les tangentes à C_f passant par le point $M(0 ; 2)$.

1) Démontrer que la tangente t_a au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe C_f a pour équation réduite :

$$y = -\frac{4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}.$$

La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

La tangente au point d'abscisse a admet comme équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

qui s'écrit :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}(x-a) + \frac{2}{a^2+1}$$

ou :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x - \frac{-4a}{(a^2+1)^2}a + \frac{2}{a^2+1}$$

ou encore

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{4a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{2}{a^2+1}$$

puis

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{4a^2+2(a^2+1)}{(a^2+1)^2}$$

et enfin

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}$$

cqfd

2) Montrer que $M(0 ; 2) \in T_a \Leftrightarrow a^2 - a^4 = 0$.

Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe.

$$M(0 ; 2) \in T_a \Leftrightarrow 2 = \frac{-4a}{(a^2+1)^2} \times 0 + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6a^2+2-2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{6a^2+2-2(a^4+2a^2+1)}_{(a^2+1)^2 \neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^4+2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2-a^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2-a^4 = 0$$

cqfd

3) Conclure.

$$a^2 - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2(1 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2(1 - a)(1 + a) = 0$$

On en déduit trois valeurs possibles pour a : -1 ; 0 et 1 ,
et donc trois tangentes possibles :

$$\blacksquare y = \frac{-4(-1)}{((-1)^2+1)^2}x + \frac{6(-1)^2+2}{((-1)^2+1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{y = x+2}$$

$$\blacksquare y = \frac{-4 \times 0}{(0^2+1)^2}x + \frac{6 \times 0^2+2}{(0^2+1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{y = 2}$$

$$\blacksquare y = \frac{-4 \times 1}{(1^2+1)^2}x + \frac{6 \times 1^2+2}{(1^2+1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{y = -x+2}$$

