FONCTION EXPONENTIELLE E04C

EXERCICE N°4 Changement de variable

1) Résoudre dans R l'équation $x^3+2x^2-3x = 0$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+2x-3) = 0$

1 est une racine évidente de x^2+2x-3 car $1^2+2\times 1-3 = 0$

De plus, on se souvient que $x^2+2x-3 = x^2-Sx+P$

avec $S = -2$ la somme des racines et $P = -3$ leur produit.

Si on note x_2 la deuxième racine alors $1\times x_2 = -3$ d'où $x_2 = -3$

On va donc pouvoir remplacer (x^2+2x-3) par $(x-1)(x+3)$

Si on a oublié cette méthode alors on utilise le discriminant.

Dans les deux cas, on fait les calculs au brouillon, ce qui nous évite la rédaction sur une copie…

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -3)$

On en déduit que $S = \{-3 ; 0 ; 1\}$

On pense à mettre les solutions dans l'ordre croissant.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

2.a) $x^6+2x^4-3x^2 = 0$

Ici il faut remarquer (oui je sais, il faut y penser…) que cela ressemble beaucoup à la question n°1 avec juste le fait d'avoir doublé les exposants.

Or $x^{2n} = (x^2)^n$

et donc en remplaçant x^2 par X on va se retrouver avec $X^3+2X^2-3X = 0$

On a changé de variable

Posons $X = x^2$

L'équation s'écrit alors $X^3+2X^2-3X = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = -3$

ou encore à

$x^2 = 0$ ou $x^2 = 1$ ou $x^2 = -3$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{x^2=0}$ ou $\overbrace{x = 1 \text{ ou } x = -1}^{x^2=1}$ (car $x^2 = -3$ n'a pas de solution réelle)

On en déduit que l'équation $x^6+2x^4-3x^2 = 0$ admet $\boxed{\text{trois solutions : } -1 ; 0 \text{ et } 1}$

zéro est ici une racine double.

Potentiellement, une équation comme celle-ci pourrait avoir jusqu'à 6 solutions distinctes

2.b) $e^{3x}+2e^{2x}-3e^x = 0$

Posons $X = e^x$

L'équation s'écrit alors $X^3+2X^2-3X = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = -3$

ou encore à

$e^x = 0$ ou $e^x = 1$ ou $e^x = -3$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{e^x=1}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

On en déduit que l'équation $e^{3x}+2e^{2x}-3e^x = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution : } 0}$