ARITHMÉTIQUE E04

EXERCICE N°1 Critère de divisibilité par 3 : pourquoi ça marche ?

1) Expliquer pourquoi un nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 9 est forcément divisible par 3 (par exemple : 999 999).

Nous savons qu'un nombre entier quelconque peut s'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k$ où n est un nombre entier naturel et pour k entier allant de 0 à n a_k est un chiffre.
(On rappelle qu'il y a 10 chiffres : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + \ldots + a_n \times 10^n\right)$$

Un exemple pour comprendre :

$$489\,123 = 3\times 10^0 + 2\times 10^1 + 1\times 10^2 + 9\times 10^3 + 8\times 10^4 + 4\times 10^5$$

que l'on prendra la liberté d'écrire plutôt :

$$489\,123 = 4\times 10^5 + 8\times 10^4 + 9\times 10^3 + 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 3\times 10^0$$

2) Compléter la démonstration suivante :
Soit N un entier naturel, alors il existe n un entier naturel et $a_0, \ldots, a_n$ des chiffres tels que :

$$N = \sum_{k=0}^{\ldots} \ldots \times 10^k = \sum_{k=0}^{n} \ldots (10^k - 1 + 1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1) + \sum_{k=0}^{n=0} a_k$$

Or pour tout k , entier compris entre 0 et n inclus $10^k - 1$ est un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 9.

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1)$ est …………………………………… d'après la question 1).

On en déduit que : $(N$ est divisible par $3)$ équivaut à $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \text{ est divisible par } 3\right)$

EXERCICE N°2 Une application : un tiers n'est pas décimal

Nous allons démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal en faisant un raisonnement par l'absurde.