LA FONCTION CARRÉ E06

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $(2x+3)(x-4) < 0$ **2)** $(-3x+6)(x-2) \geqslant 0$

1)

Pour résoudre $(2x+3)(x-4) < 0$, nous utilisons un tableau de signes :

- $2x+3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$

Pourquoi $>$? Parce qu'on cherche où mettre les « $+$ » dans le tableau.

- $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		4		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(2x+3)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 4\right[}$.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\ ;-\dfrac{3}{2}\right[$

$2x+3$ est toujours strictement négatif, $x-4$ est toujours négatif, cela nous permet d'affirmer que la règle des signes donnera toujours le même résultat : « $+$ ».

On peut raisonner de la même façon, sur chaque intervalle de la première ligne du tableau. C'est en cela que le tableau est utile…

Il n'y a plus qu'à lire la dernière pour trouver le(s) intervalle(s) vérifiant l'inégalité de départ.

2)

Pour résoudre , $(-3x+6)(x-2) \geqslant 0$ nous utilisons un tableau de signes :

- $-3x+6 > 0 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < \dfrac{-6}{-3} = 2$
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Tiens tiens, la même valeur…

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$(-3x+6)(x-2)$		$-$	0	$-$	

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \{2\}}$.

On peut aussi procéder comme suit si on a pensé à factoriser. :

$(-3x+6)(x-2) = -3(x-2)(x-2) = -3(x-2)^2$

Or pour tout réel x , $(x-2)^2 \geqslant 0$ d'où $-3(x-2)^2 \leqslant 0$

(Du coup, on sait que $(-3x+6)(x-2) \leqslant 0$ et on veut $(-3x+6)(x-2) \geqslant 0$ la seule possibilité est donc $(-3x+6)(x-2) = 0$)

On en déduit que l'inéquation $(-3x+6)(x-2) \geqslant 0$ n'admet qu'une $\boxed{\text{seule solution : } 2}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $x(2x+1)+x(3x-4) \geqslant 0$

2) $(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) < 0$

3) $4x^2-(x+1)^2 \leqslant 0$

4) $(2x+3)^2-(4x-5)^2 > 0$

1)

Pour tout réel x ,

$x(2x+1)+x(3x-4) = x[(2x+1)+(3x-4)] = x(5x-3)$

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(5x-3) \geqslant 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

- $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (élémentaire mon cher Watson...)
- $5x-3 > 0 \Leftrightarrow 5x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}=0{,}6$

x	$-\infty$		0		$0{,}6$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$5x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(5x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) \geqslant 0$ admet comme ensemble des solutions :

$\boxed{]-\infty\ ;\ 0] \cup [0{,}6\ ;\ +\infty[}$

2)

Pour tout réel x ,

$(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) = (2x+1)[(x-3)+(3x+4)] = (2x+1)(4x+1)$

On en déduit que $x(2x+1)+x(3x-4) < 0 \Leftrightarrow (2x+1)(4x+1) < 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

- $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$
- $4x+1 > 0 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) < 0$ admet comme ensemble des solutions :

$\boxed{\left]-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right[}$

3)

Pour tout réel x,

$$\underbrace{4x^2}_{a^2}-\underbrace{(x+1)^2}_{b^2} = \underbrace{(2x)^2}_{a^2}-\underbrace{(x+1)^2}_{b^2} = [(2x)+(x+1)][(2x)-(x+1)] = (3x+1)(x-1)$$

On en déduit que $4x^2-(x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) \leqslant 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes)… On commence à le savoir !

- $3x+1 > 0 \Leftrightarrow 3x > -1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$
- $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(3x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que a $4x^2-(x+1)^2 \leqslant 0$ admet comme ensemble des solutions :

$\boxed{\left[-\frac{1}{3}\ ;\ 1\right]}$

4)

Pour tout réel x,

$$\underbrace{(2x+3)^2}_{a^2}-\underbrace{(4x-5)^2}_{b^2} = [(2x+3)+(4x-5)][(2x+3)-(4x-5)] = (6x-2)(-2x+8)$$

On pourrait factoriser un peu plus : $(6x-2)(-2x+8) = -4(3x-1)(x-4)$
Mais cela ne sera pas utile ici.

- $6x-2 > 0 \Leftrightarrow 6x > 2 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
- $-2x+8 > 0 \Leftrightarrow -2x > -8 \Leftrightarrow x < \dfrac{-8}{-2}=4$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
$6x-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x+8$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(6x-2)(-2x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $(2x+3)^2-(4x-5)^2 > 0$ admet comme ensemble des solutions :

$\boxed{\left]\frac{1}{3}\ ;\ 4\right[}$