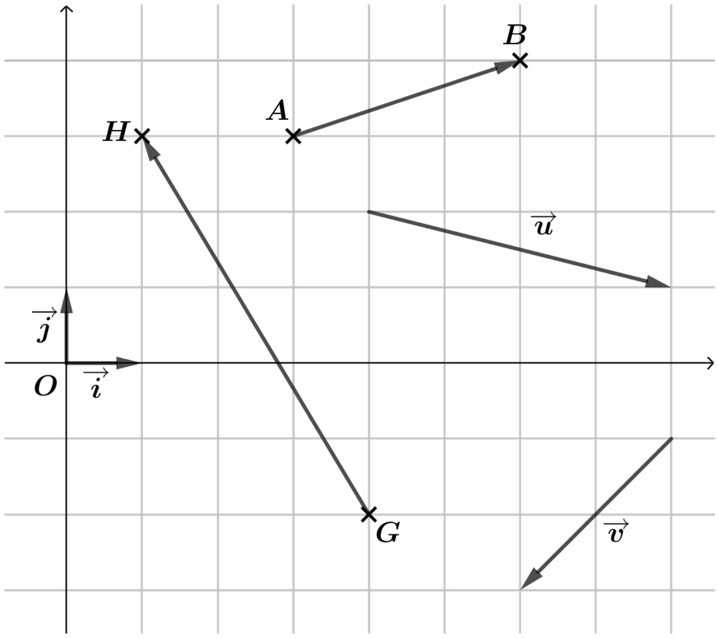
LES VECTEURS E03

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a décomposé chaque vecteur dans la base $(\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$:

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{GH} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$

$\overrightarrow{u} = 4\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ -1)$, $C(5\ ;\ 4)$ et $D(0\ ;\ 5)$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, on va se servir de la propriété n°1 du cours. Pour cela, on doit montrer que deux vecteurs sont égaux c'est à dire ici, qu'ils ont les mêmes coordonnées.

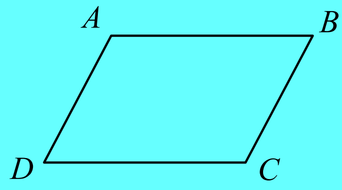
Les choix possibles sont :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$

On choisit par exemple le premier couple.

(Attention à bien les choisir avec le même sens)

(La figure est faite au brouillon et à main levée pour ne pas perdre de temps)



▪ Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ -1-0 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-0 \\ 4-5 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ce qui équivaut au fait que $ABCD$ est un parallélogramme.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3\ ;\ -2)$ et $E(11\ ;\ -3)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{DE}=2\vec{u}+3\vec{v}$.

On va calculer, d'une part les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ à l'aide des coordonnées des points D et E , et d'autre part, celles du vecteur $2\vec{u}+3\vec{v}$ comme dans l'exemple n°5 du cours.
On aura plus qu'à constater l'égalité.

On a d'une part :

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E-x_D\\y_E-y_D\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}11-3\\-3-(-2)\end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} .$$

Et d'autre part :

$$2\vec{u}+3\vec{v} \quad \text{a pour coordonnées} \quad \begin{pmatrix}2\times1 & + & 3\times2\\2\times(-2) & + & 3\times1\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\overrightarrow{DE}=2\vec{u}+3\vec{v}$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c}2\times1\\2\times(-2)\end{array}\right. & \begin{array}{c}+\\+\end{array} & \left.\begin{array}{c}3\times2\\3\times1\end{array}\right) \\ 2\vec{u} & + & 3\vec{v}\end{array}$$

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(-3\ ;\ 6)$ et $C(-7\ ;\ -1)$

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

L'idée est d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore (si vous l'avez vu comme cela) ou la caractérisation par l'égalité de Pythagore (si vous l'avez vu comme cela).
Pour cela, on a besoin de AB^2 ; BC^2 et AC^2 que l'on va obtenir en calculant les carrés des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Avant cela, on aura donc besoin de calculer les coordonnées de ces vecteurs.

▪ On sait que :

▫ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\6-2\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (-2)^2+4^2 = 4+16 = 20$

▫ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7-(-3)\\-1-6\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (-4)^2+(-7)^2 = 16+49 = 65$

▫ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$

d'où $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (-6)^2+(-3)^2 = 36+9 = 45$

▫ de plus $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 20+45 = 65$

▪ On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

▪ Ce qui équivaut, d'après l'égalité de Pythagore, au fait que le triangle ABC est rectangle en A .

$\|\overrightarrow{AB}\|$ est la norme (longueur) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc on peut écrire AB à la place de $\|\overrightarrow{AB}\|$ et donc AB^2 à la place de $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ (pour la fin de la rédaction).
En revanche, on n'écrira pas $\overrightarrow{AB}^2$ qui n'a pas encore de sens pour nous.

EXERCICE N°5 ***(Le corrigé)***

Dans un repère orthonormé, on donne les points $R(-1\ ;\ 3)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(8\ ;\ -2)$.

L'idée est d'utiliser la propriété n°1 du cours afin de déterminer les coordonnées de U et V .

1) Calculer les coordonnées du point U tel que $RSTU$ soit un parallélogramme.

Notons $U(x_U\ ;\ y_U)$

On donne un nom aux coordonnées de U afin de pouvoir en parler plus facilement ensuite.

On sait que :

$RSTU$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$

Vous pouvez remplacer « $\Leftrightarrow$ » par « équivaut à »

Or :

$\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} x_S - x_R \\ y_S - y_R \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -4-3 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{UT}\begin{pmatrix} x_T - x_U \\ y_T - y_U \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{UT}\begin{pmatrix} 8-x_U \\ -2-y_U \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 6 = 8 - x_U \\ -7 = -2 - y_U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -x_U \\ -5 = -y_U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x_U \\ 5 = y_U \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{U(2\ ;\ 5)}$

$\begin{cases} 6 = 8 - x_U \\ -7 = -2 - y_U \end{cases}$ hé oui car deux vecteurs égaux ont la même abscisse et la même ordonnée.

L'accolade signifie que « les deux égalités sont vraies en même temps ».

2) Calculer les coordonnées du point V tel que $RVST$ soit un parallélogramme.

C'est la même chose…

Notons $V(x_V\ ;\ y_V)$

On sait que :

$RVST$ st un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{RV} = \overrightarrow{ST}$

Or :

$\overrightarrow{RV}\begin{pmatrix} x_V - x_R \\ y_V - y_R \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{RV}\begin{pmatrix} x_V-(-1) \\ y_V-3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} x_T - x_S \\ y_T - y_S \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 5-8 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x_V + 1 = -3 \\ y_V - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_V = -4 \\ y_V = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{V(-4\ ;\ 1)}$

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°6 (Le corrigé)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $I(1\ ;\ -5)$, $J(7\ ;\ 2)$, $K(16\ ;\ 4)$ et $L(10\ ;\ -3)$.

Montrer que $IJKL$ est un losange.

On peut montrer que les quatre côtés ont la même longueur ou démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.
Nous choisissons la seconde méthode.

Calculons les coordonnées et les normes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LK}$ et, $\overrightarrow{JK}$

- $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-(-5) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

  $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2 = 6^2+7^2=36+49=85$

- $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 16-10 \\ 4-(-3) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

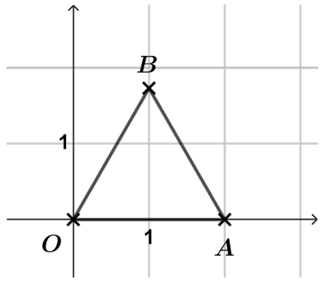
Comme $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont égaux le calcul de la norme de $\overrightarrow{LK}$ est inutile.

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ signifie que $IJKL$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 16-7 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\left\|\overrightarrow{JK}\right\|^2 = 9^2+2^2=81+4=85$
- Ainsi $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{JK}\right\|^2$ et comme $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{JK}\right\|$ sont positifs (ce sont des longueurs) :
  $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \left\|\overrightarrow{JK}\right\|$
- Le parallélogramme $IJKL$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

EXERCICE N°7 (Le corrigé)

Déterminer les coordonnées du point B sur la figure ci-contre sachant que OAB est un triangle équilatéral de côté $2\,cm$.



De manière évidente le point B a pour abscisse 1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = 2$. Notons y l'ordonnée de B

Le triangle OAB est équilatéral donc $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$.

Or : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

Donc $\|\overrightarrow{OB}\|^2 = 4$

On évite de travailler avec des racines carrées.

se traduit par :

$1+y^2 = 4$

ou encore

$y^2 = 3$

Cette équation possède deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

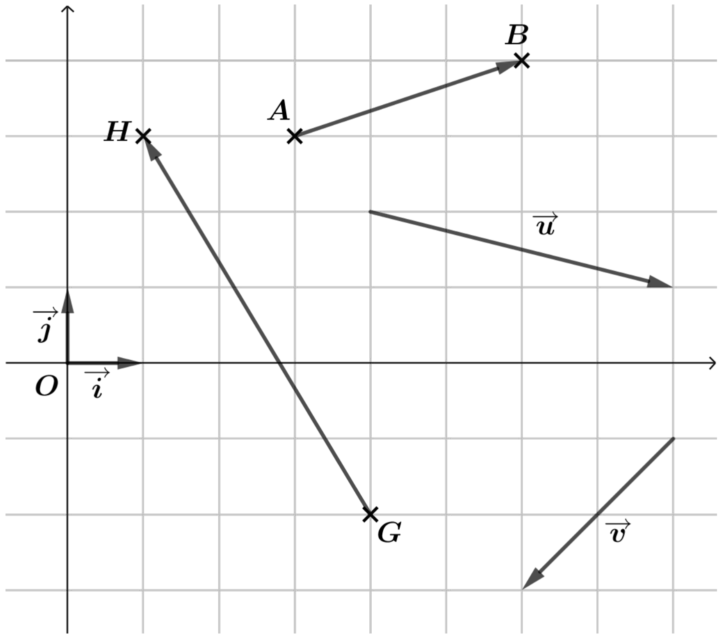
De manière évidente $y>0$ (voir la figure)

Enfin : $\boxed{B(1\ ;\ 3)}$

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°1

Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GH}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$.



EXERCICE N°2

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\ ;0)$, $B(3\ ;-1)$, $C(5\ ;4)$ et $D(0\ ;5)$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

EXERCICE N°3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3\ ;-2)$ et $E(11\ ;-3)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{DE}=2\vec{u}+3\vec{v}$.

EXERCICE N°4

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\ ;2)$, $B(-3\ ;6)$ et $C(-7\ ;-1)$

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $R(-1\ ;3)$, $S(5\ ;-4)$ et $T(8\ ;-2)$.

1) Calculer les coordonnées du point U tel que $RSTU$ soit un parallélogramme.

2) Calculer les coordonnées du point V tel que $RVST$ soit un parallélogramme.

EXERCICE N°6

Dans un repère orthonormé, on considère les points $I(1\ ;-5)$, $J(7\ ;2)$, $K(16\ ;4)$ et $L(10\ ;-3)$.

Montrer que $IJKL$ est un losange.

EXERCICE N°7

Déterminer les coordonnées du point B sur la figure ci-contre sachant que OAB est un triangle équilatéral de côté $2\,cm$.