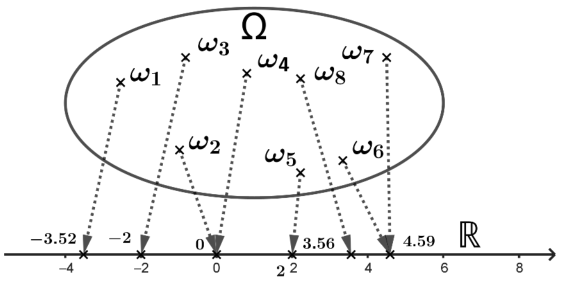
Variables aléatoires

I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

Définition n°1. ***Variable aléatoire***

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$,
c'est à dire si X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Exemple n°1.



$X:\Omega\to\mathbb{R}$

Ici,
$X(\omega_1) = -3{,}52$:
L'issue ω_1 a pour image -3,52 par la variable aléatoire X ….
$X(\omega_2) = 0$, etc.…

Remarque n°1.

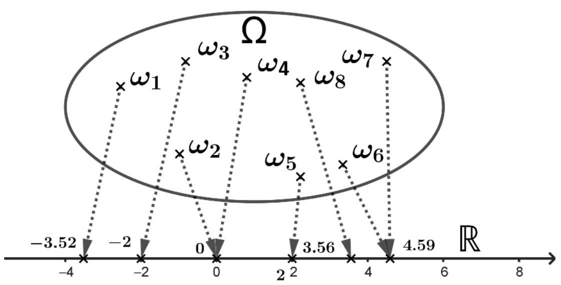
Toutes les issues doivent avoir une image par X (car X est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

Connaissance n°1 ***Des notations***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $\{X = a\}$ l'événement « X prend la valeur a »
- $\{X \leqslant a\}$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Exemple n°2.



$\{X = -3{,}52\}$ est en fait $\{\ \omega_1\ \}$,
$\{X = 0\}$ est en fait $\{\ \omega_2\ ,\ \omega_4\ \}$
$\{X = 1{,}5\}$ est en fait $\emptyset$
$\{X = -18\}$ aussi…
$\{X \leqslant 0\}$ est en fait $\{\ \omega_1\ ,\ \omega_2\ ,\ \omega_3\ ,\ \omega_4\ \}$
$\{X < 0\}$ est en fait $\{\ \omega_1\ ,\ \omega_3\ \}$
(il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de Ω , on peut parler de leur probabilité.
Par exemple :
$P(\{X = 0\}) = P(\{\ \omega_2\ ,\ \omega_4\ \}) = P(\{\ \omega_1\ \})+P(\{\ \omega_2\ \})$ ...
C'est pénible toutes ces accolades !

Connaissance n°2 ***Convention d'écriture***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement
 « X prend une valeur inférrieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de Ω, on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

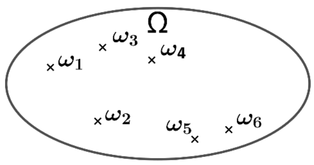
Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à *k*.

Exemple n°3.

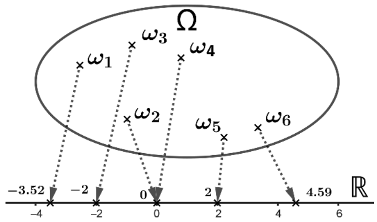
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	$4{,}59$	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4{,}59) = 1$

Variables aléatoires E01

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

▫ Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
▫ Si le résultat est pair on gagne deux euros.
▫ Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)

Voici un jeu :

▫ On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
▫ Puis un jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
▫ Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
▫ Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
▫ Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
▫ Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

On n'écrit pus les accolades

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On fait une partie :

1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit pus les accolades

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	…	0,08

1) Déterminer $P(X = 8)$.
2) Déterminer $P(X \leqslant 0)$.
3) Déterminer $P(X > 7)$.
4) Déterminer $P(X < 20)$.

III Espérance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour X ? »

Définition n°3. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$) , soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1 , x_2 , \dots , x_k$.
On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i)}$$

Remarque n°5.

$$\sum_{k=i}^{k} x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

Exemple n°4. dans le contexte de l'exemple n°3

$E(X) = -3{,}52 \times P(X=-3{,}52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4{,}59 \times P(X=4{,}59)$
$E(X) = -3{,}52 \times 0{,}1 + (-2) \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}12 + 4{,}59 \times 0{,}18$
$E(X) = 0{,}2142$
L'espérance de X vaut 0,2142.

VARIABLES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (***On dit alors que la variable aléatoire est centrée***)

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

EXERCICE N°2 Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,00009	0,00001

Ce jeu est-il équitable ?

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».

On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le «triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.

Déterminer, en fonction de m, le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.

Propriété n°1. espérance et transformation affine

Comme la somme des $P(X=x_i)$ vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i P(X=X_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités respectives.
Or :
▪ Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre b à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de b.
▪ Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul a toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par a.
Au final on peut écrire : $\boxed{E(aX+b) = a \times E(X) + b}$

VARIABLES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°1 Linéarité de l'espérance

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -4 ; 5 ; 10 et 100 , et telle que $E(Y) = 8$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 3Y+60$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

1.b) Déterminer $E(Z)$.

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -4Y+5$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

2.b) Déterminer $E(R)$.

EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret

Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.
Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?

2) Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de R.

3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?

4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

IV Variance d'une variable aléatoire réelle

Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de X autour de $E(X)$. Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

Définition n°4. ***Variance d'une variable aléatoire réelle***

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel défini par :

$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$ c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)}$$

Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$\boxed{V(X) = (x_1-E(X))^2 \times P(X=x_1) + (x_2-E(X))^2 \times P(X=x_2) + \ldots (x_k-E(X))^2 \times P(X=x_k)}$$

Exemple n°5. ***Dans le contexte de l'exemple n°3***

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

On calcule d'abord l'espérance :

$E(X) = 0{,}2142$ (on l'a fait dans l'exemple n°4)

Puis on calcule la variance :

$V(X) = (-3{,}52-0{,}2142)^2 \times 0{,}1 + (-2-0{,}2142)^2 \times 0{,}25 + \ldots + (4{,}59-0{,}2142)^2 \times 0{,}18$

$V(X) \approx 6{,}4654$

Propriété n°2. ***variance et transformation***

Soit a et b deux nombres réels. $\boxed{V(aX+b) = a^2 \times V(X)}$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{k} (a x_i + b - E(aX+b))^2 \times P(X=x_1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (a x_i + b - aE(X) - b)^2 \times P(X=x_1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (a(x_i - E(X)))^2 \times P(X=x_1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a^2 (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_1) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_1) = a^2 \times V(X) \end{aligned}$$

Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimerait que $E(X)$ et $V(X)$ aient la même unité.
En effet si X est par exemple en euro alors $E(X)$ sera en euro mais $V(X)$ sera en « euro au carré »…
On va donc « se débarrasser de ce carré »…

V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition n°5. ***écart-type d'une variable aléatoire réelle***

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le réel défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple n°6. ***Toujours dans le contexte de l'exemple n°3***

On avait $V(X) \approx 6{,}4654$
Donc $\sigma(X) = V(X) \approx 2{,}5427$

Remarque n°9. ***écart-type et transformation affine***

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

VARIABLES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°1 ***Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules***

(Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

1) Calculer l'espérance de X.
2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.
3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .
4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -2X+3$
5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 3Y-1$

EXERCICE N°2 Espérance, variance, écart-type : cas concret

(Calculatrice autorisée)

Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire.

▫ Si celui-ci est vert, on gagne 5 €,
▫ s'il est jaune on gagne 20 € et
▫ s'il est rouge on perd 4 €.

1) X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1.a) Déterminer la loi de probabilité de X.

1.b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.

1.c) Interpréter la valeur de $E(X)$.

2) Vérifier les résultats de la question 1. en utilisant la calculatrice.

EXERCICE N°3 Au casino

Extrait du déclic 1er spé : 80 p 362

(Calculatrice autorisée)
(On arrondira les résultats au centième)

Une roulette de casino comporte 37 cases , numérotées de 0 à 36
On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti.

Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.

https://www.flickr.com/photos/129231073@N06/35234919293

1) Lorsqu'un joueur mise sur l'un des numéros, on dit qu'il fait un plein. Dans ce cas là, si le numéro misé sort, il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise. Sinon il perd sa mise au profit du casino. Un joueur mise 10 € et fait un plein. On note X son gain algébrique , en euros.

1.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

1.b) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

2) Lorsqu'un joueur mise sur 2 numéros différents, on dit qu'il fait un cheval point dans ce cas là, si l'un des numéros choisis sort, il remporte 17 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon, il la perd. Un joueur mise 10 € et fait un cheval. On note Y son gain algébrique, en euros .

2.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

2.b) Calculer l'écart-type $\sigma(Y)$.

3) Comparer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$, puis les écarts types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter dans le contexte.

VI Formule de Koenig-Huygens

Remarque n°10.

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

▪ Gardons à l'esprit que $E(X)$ est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^{k} E(X)^2 \times P(X=x_i) = E(X)^2 \times \sum_{i=1}^{k} P(X=x_i) = E(X)^2 \times 1$$

▪ Dans la même idée :

$$E(-2XE(X)) = \sum_{i=1}^{k} -2x_i E(X) \times P(X=x_i) = -2E(X) \times \sum_{i=1}^{k} x_i P(X=x_i) = -2E(X) \times E(X)$$

▪ On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + \underbrace{E(X)^2 \times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°1 Manipuler la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

Une usine fabrique des composants électroniques. On note X le nombre de composants défectueux dans un lot de 5. La loi de probabilité est la suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,42	0,31	0,15	0,08	0,03	0,01

1) Calculer $E(X)$.

2) Calculer $V(X)$ de deux manières différentes.

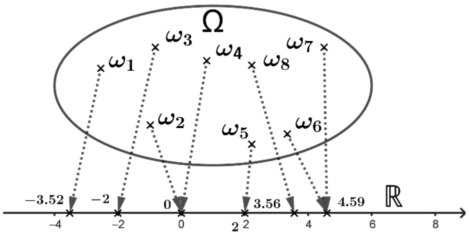
EXERCICE N°2 Utiliser la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

Un jeu consiste à tirer une carte. Si c'est un cœur, on gagne k euros. Sinon, on perd 1 euro. On sait que la probabilité de gagner est $p = \frac{1}{4}$.

Trouvez la valeur de k pour laquelle la variance du gain est de 3.

VII Le résumé du cours



Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini. On dit que X est une variable aléatoire réelle si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$,
c'est à dire si **X associe à chaque issue de Ω un nombre réel.**

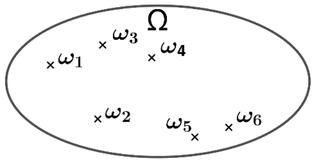
Convention d'écriture

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :
- $P(X = a)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur a »
- $P(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement « X prend une valeur inférrieure ou égale à a »
- on fait la même chose avec $<$, $>$ et $\geqslant$

Loi de probabilité

Soit n et k des entiers naturels ($k \leqslant n$), soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.
Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de chaque $P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à k.

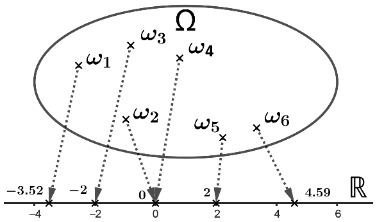
$n = 6$



Distribution (ou loi) de probabilité sur Ω

Issue ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Total
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1

$k = 5$



Loi de probabilité de X

x_i	$-3{,}52$	-2	0	2	$4{,}59$	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}15+0{,}2}$	0,12	0,18	1

- $P(X = 4{,}59) = 0{,}18$, $P(X = 4{,}58) = 0$
- $P(X \leqslant 0) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0{,}7$
- $P(X < 0) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) = 0{,}35$
- $P(X > 2) = P(X = 4{,}59) = 0{,}18$
- $P(X \geqslant 5) = 0$, $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geqslant -32) = P(X = -3{,}52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4{,}59) = 1$

Espérance de *X*

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=i}^{k} x_i P(X = x_i)}$$

ou encore :

$$\boxed{E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_k \times P(X = x_k)}$$

Variance de *X*	$\boxed{V(X) = E((X-E(X))^2)}$ ou encore : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)}$
Écart-type de *X*	$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$
	Les propriétés à retenir a et b sont des nombres réels.
Transformation affine, changement de variable **(selon les livres)**	$\boxed{E(aX+b) = a \times E(X) + b}$ $\boxed{V(aX+b) = a^2 \times V(X)}$ $\boxed{\sigma(aX+b) = \lvert a \rvert \times \sigma(X)}$
Formule de Koenig-Huygens	$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$