Les droites

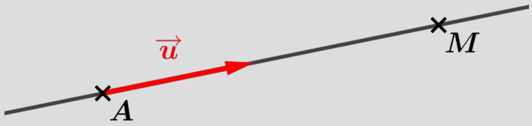
Dans tout ce chapitre, on se place dans un plan muni un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$

I Différentes façons de décrire une droite

I.1 Avec un point et un vecteur

Propriété n°1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point.



L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite.

preuve :

Fixons un point N tel que $\overrightarrow{AN}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et considérons la droite (AN) .

▪ Si un point M est tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont aussi colinéaires.
On en déduit que $(AN)//(AM)$ (au sens large)
et comme $A \in (AN)$ et $A \in (AM)$, ces droites sont confondues.
Ainsi $M \in (AN)$

▪ Si un point M appartient à (AN) alors $(AN)//(AM)$ (au sens large) et donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. ***cqfd***

Remarque n°1. ***(sur la preuve précédente)***

▪ Le deuxième point nous dit que tous les points de la droite (AN) répondent à la condition et le premier point nous dit qu'il n'y en a pas d'autre.

▪ Le point N existe il suffit de prendre l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition n°1. ***Vecteur directeur***

$\vec{u}$ est appelé un vecteur directeur de cette droite.

Remarque n°2.

Pour définir une droite, il nous suffit donc d'un vecteur non nul ET d'un point.

Remarque n°3.

Une fois le point A choisi, le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique : tout autre vecteur non nul qui lui est colinéaire engendrera la même droite.

preuve :

Remplacer $\vec{u}$ par l'autre vecteur en question dans la preuve de la propriété n°1…

Propriété n°2.

Soient A et B deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A ainsi que d' la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par B.
d et d' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

preuve :

Notons N et N' les images respectives de A et B par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On sait, grâce à la remarque n°1 et la preuve de la propriété n°1 que : d et (AN) sont confondues et que d' et (BN') le sont aussi.

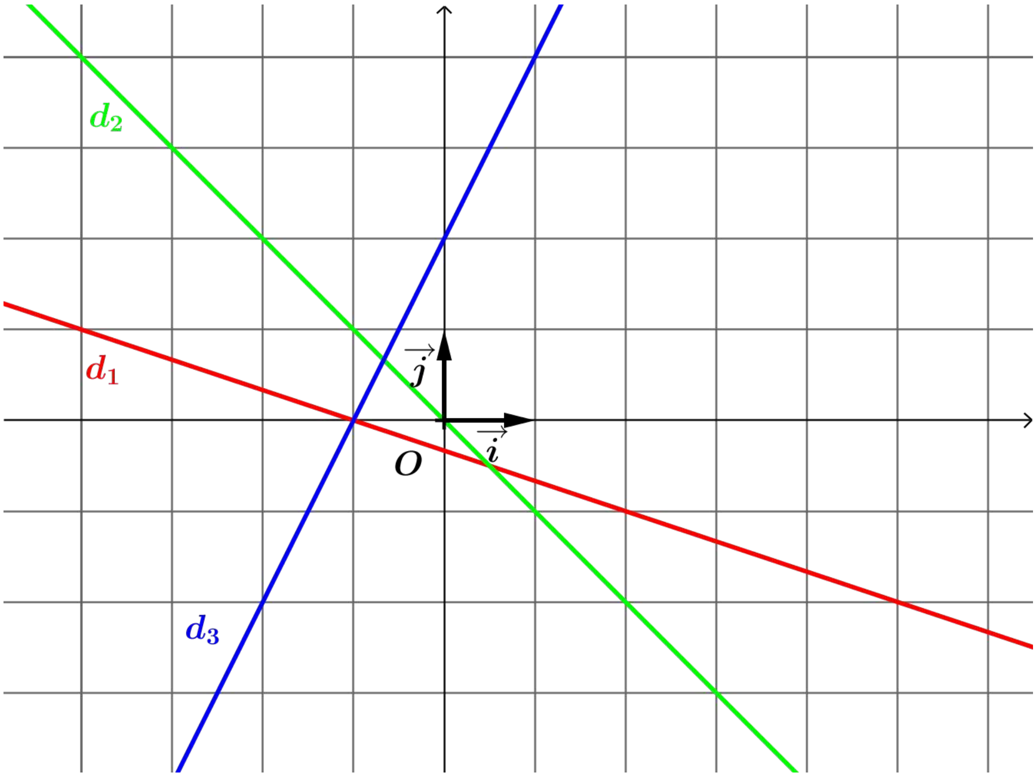
$d // d' \Leftrightarrow (AN)//(BN') \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN'}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

LES DROITES E01

EXERCICE N°1

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Par lecture graphique, décrire chacune des droites représentées ci-dessous, par un point et un vecteur directeur.



EXERCICE N°2

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ passant par le point $A(-1\ ;\ 2)$

1) Donner les coordonnées de deux autres vecteurs directeurs de d

2) Décrire une droite (strictement) parallèle à la droite d

EXERCICE N°3

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Représenter la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ passant par le point $A(-2\ ;\ 3)$ et la droite d' de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $B(-1\ ;\ 2)$

I.2 Avec une équation cartésienne

Propriété n°3.

Soient a, b et c trois nombres réels tels au moins l'un des nombres a et b est non nul.

L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A\ ;\ y_A)$ où A est un point tel que $ax_A+by_A+c=0$.

preuve :

Les préparatifs

Soient a, b et c trois nombres réels tels au moins l'un des nombres a et b est non nul.

Notons (C) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ et fixons $A(x_A\ ;\ y_A)$ appartenant à (C) c'est à dire que : $a\,x_A+b\,y_A+c=0$ ou encore : $c=-a\,x_A-b\,y_A$

Notons d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par A .

LES DROITES

Le plan

▪ Nous allons montrer dans un premier temps que tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation $a\,x+b\,y+c=0$ appartiennent à une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Nous aurons alors $(C)\subset d$

▪ Puis dans un second temps nous allons montrer que $d\subset(C)$, c'est à dire que si $M(x\ ;\ y)$ appartient à la droite d alors ses coordonnées vérifient $a\,x+b\,y+c=0$

LES DROITES

La preuve

▪ Dans ce premier temps , notre but est de démontrer que :

Si $M(x\ ;\ y)\in(C)$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u}) &= (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b) \\ &= a\,x-a\,x_A+b\,y-b\,y_A \\ &= a\,x+b\,y+\underbrace{(-a\,x_A-b\,y_A)}_{c} \\ &= ax+b\,y+c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont bien colinéaires, ce qui signifie que M appartient à la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A

▪ Dans ce second temps, notre but est de démontrer que :

Si $M(x\ ;\ y)\in d$ alors $a\,x+b\,y+c=0$ où $c=-a\,x_A-b\,y_A$

$$\begin{aligned} M(x\ ;\ y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\,,\vec{u})=0 \\ &\Leftrightarrow (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b)=0 \\ &\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A=0 \\ &\Leftrightarrow ax+by+\underbrace{(-ax_A-by_A)}_{c} \\ &\Leftrightarrow ax+by+c=0 \quad \text{, où } c=-ax_A-by_A \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient bien $a\,x+b\,y+c=0$

LES DROITES

Définition n°2. Équation cartésienne

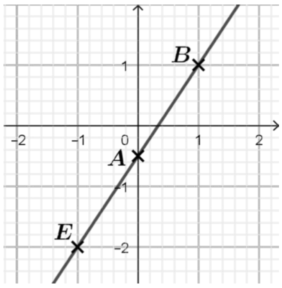
On dit alors que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite d

Remarque n°4.

La droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ passe par le point :
$A\left(\frac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$, sinon par $A\left(0\ ;\ \frac{-c}{b}\right)$

LES DROITES

Exemple n°1. De l'équation cartésienne vers un vecteur directeur



On se donne une droite D d'équation cartésienne : $3x-2y-1=0$.

On identifie : $a=3$, $b=-2$ et $c=-1$

On peut alors déterminer un vecteur directeur de D : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

et un point appartenant à D : $A\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$

Ici on a utilisé la remarque n°4, mais on peut bien sûr trouver d'autres points :
le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ est aussi un point de D

Exemple n°2. ***Du vecteur directeur vers une équation cartésienne***

On se donne une droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ passant par le point $E(-1\ ;\ -2)$. On identifie : $a=3\,,b=-2$

(relire la propriété n°3 pour comprendre le « - »devant le « 2 »)

On calcule alors $c\ =\ -ax_E-by_E\ =\ -3\times(-1)-(-2)\times(-2)\ =\ -1$

On peut alors écrire une équation cartésienne de D : $3x-2y-1=0$

Remarque n°5.

D possède une infinité d'équations cartésiennes, par exemple :

$6x-4y-2=0$, $-6x+4y+2=0$, $30x-20y-10=0$ …

LES DROITES E02

EXERCICE N°1

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(6\ ;\ -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

LES DROITES E02

EXERCICE N°2

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

On donne les points $A(2\ ;\ 4)$; $B(-1\ ;\ 5)$ et $C(3\ ;\ 1)$.

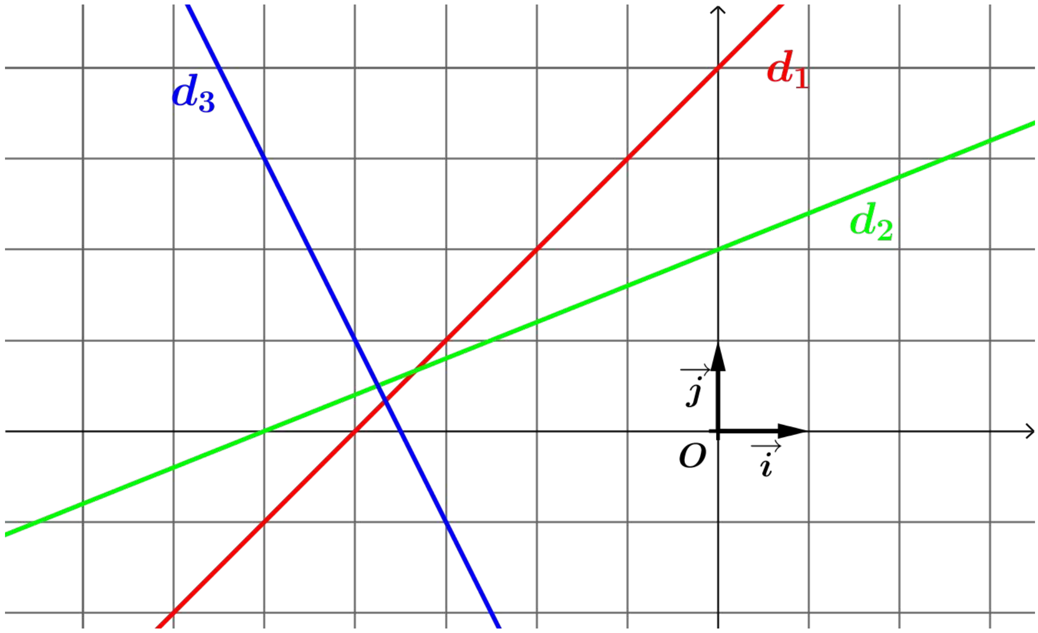
1)
1.a) Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AC)
1.b) En déduire une équation cartésienne de la droite (AC)

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC)

EXERCICE N°3

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites représentées ci-dessous.



LES DROITES E02

EXERCICE N°4

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1) Représenter :
1.a) la droite d d'équation $2x+3y-4=0$
1.b) et la droite d' d'équation $x-y+5=0$
(On omettra souvent le mot « cartésienne », il sera sous-entendu)
2) le point $A(-3\ ;\ 2)$ appartient-il à l'une de ces droites ?

LES DROITES E02

Correction de l'exercice n°4

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Représenter :

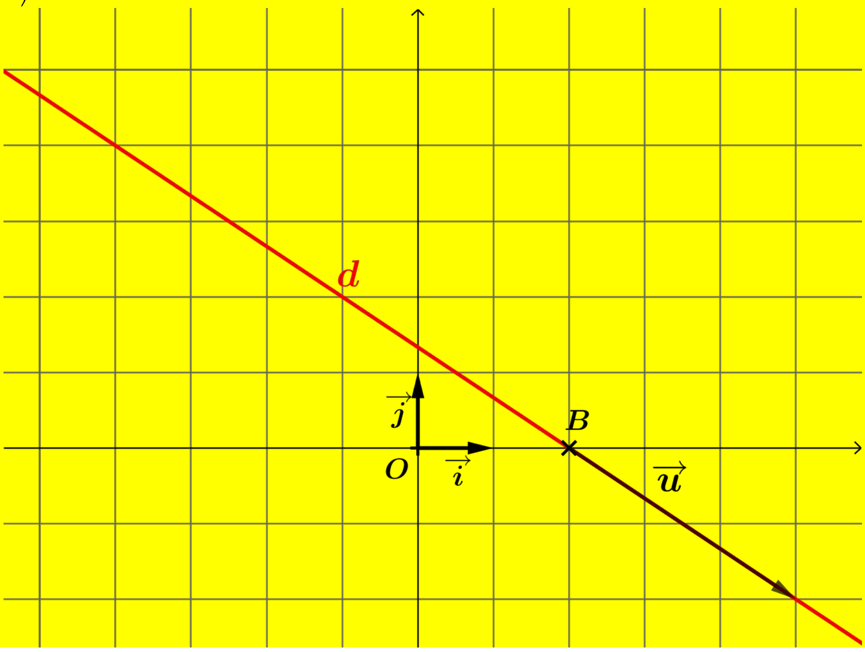
1.a) la droite d d'équation $2x+3y-4=0$

Le point de coordonnées $\left(0\ ;\frac{4}{3}\right)$ appartient à d mais n'est pas pratique à placer, on en cherche donc un autre.

On remarque que $2\times2+3\times0-4=0$ On choisit donc le point $B(2\ ;0)$

On note $B(2\ ;0)$ qui appartient à d car $2\times2+3\times0-4=0$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$



LES DROITES E02

Correction de l'exercice n°4

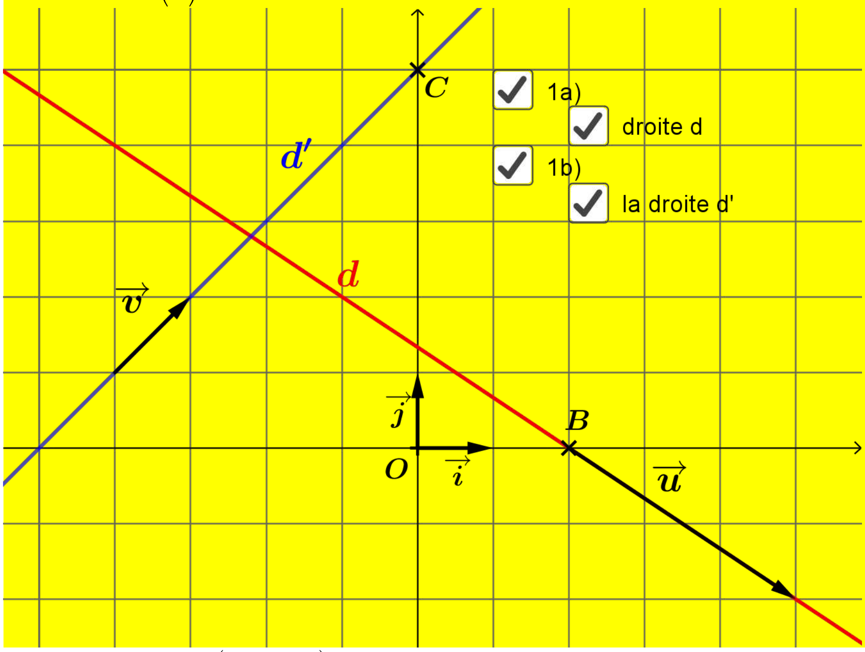
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

1.b) et la droite d' d'équation $x-y+5=0$

(On omettra souvent le mot « cartésienne », il sera sous-entendu)

On note $C(0\ ;\ 5)$ qui appartient à d' car $0-5+5=0$

On note $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



2) le point $A(-3\ ;\ 2)$ appartient-il à l'une de ces droites ?

$A \notin d$ car $2\times(-3)+3\times2-4\neq0$

$A \in d'$ car $-3-2+5=0$

I.3 Avec une équation réduite

Propriété n°4.

Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
Une équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $x=k$ avec $k\in\mathbb{R}$

preuve :

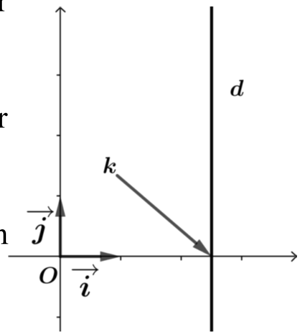
L'axe des ordonnées est une droite qui est dirigée par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

La droite d lui étant parallèle elle est aussi dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne est alors $1\times x+0\times y+c=0$ que l'on note bien sûr

$x+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$

En posant $k=-c$, on obtient bien $x=k$.



Remarque n°6.

La droite étant parallèle à l'axe des ordonnées, tous ses points ont la même abscisse : k

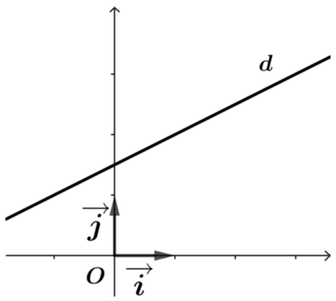
Définition n°3. ***Équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.***

L'équation $\boxed{\boldsymbol{x=k}}$ est appelée : **équation réduite** de d .

Propriété n°5. ***Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées***

Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'**équation réduite** de d peut s'écrire $\boxed{\boldsymbol{y=mx+p}}$ avec m et p des nombres réels.

preuve :



Puisque d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on peut trouver deux réels a et b avec $b \neq 0$ tels que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige d.

(si on avait $b=0$ alors d serait parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas)

On sait alors qu'une équation cartésienne de d est :

$ax+by+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$

On peut réduire cette équation en isolant y :

$y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$

(c'est possible car $b \neq 0$, d'où l'importance de ne pas être parallèle à l'axe des ordonnées)

Il suffit alors de poser : $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$ pour obtenir : $y=mx+p$

LES DROITES

Définition n°4. ***(petit rappel)***

m est **la pente** ou le **coefficient directeur** de d et
p est **l'ordonnée à l'origine** de d

Remarque n°7.

Soit f une fonction affine telle que $f(x)=mx+p$ alors sa représentation graphique a pour équation $y=mx+p$ et nous savons à présent que c'est bien une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. (Souvenez-vous de la propriété n°1 du cours fonctions affines et équations)

Remarque n°8.

Si une droite d admet comme équation réduite $y=mx+p$ alors on peut écrire : $mx-y+p=0$ et en déduire qu'un vecteur directeur de d est : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

La propriété suivante est alors évidente.

Propriété n°6.

Soient d et d' d'équations réduites respectives :
$y=mx+p$ et $y=m'x+p'$
Alors : $\boldsymbol{d // d' \Leftrightarrow m=m'}$

Propriété n°7.

Soit d d'équation réduite $y=mx+p$
Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à d, alors :
$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

preuve :

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un coefficient directeur de d et on remarque aussi que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ en est un autre. Par conséquent ces vecteurs sont colinéaires et on peut écrire :

$$\begin{aligned}det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u})=0 &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m-(y_B-y_A)\times 1\ =\ 0\\ &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m=y_B-y_A\\ &\Leftrightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\end{aligned}$$

Les droites E03

EXERCICE N°1

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

d désigne la droite d'équation $y=-2x-5$, les points suivants appartiennent-ils à d ?

$A(-1\ ;\ 7)$; $B(2\ ;\ -9)$; $C\left(\dfrac{13}{4}\ ;\ 1{,}5\right)$.

LES DROITES E03

EXERCICE N°2

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

On considère les points $A(-3\ ;\ 1)$; $B(5\ ;\ 4)$; $C(2\ ;\ -2)$ et $D(5\ ;\ -1)$

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) Les droites (AC) et (BD) sont-elles sécantes ?

LES DROITES E03

EXERCICE N°3

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

Démontrer le point $S(-3\ ;\ 4)$ est le point d'intersection de la droite d d'équation $y=-5x-11$ et de la droite d' d'équation $y=2x+10$

II Systèmes d'équations

II.1 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition n°5. Qu'est-ce qu'un système ?

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$

où a, b, k, a', b' et k' sont des nombres réels.

Exemple n°3.

$\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ est un système d'inconnues x et y

Définition n°6. Qu'est-ce qu'une solution d'un système ?

Une solution d'un système de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $(x \; ; \; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Exemple n°4.

Pour $\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$,

Le couple $(-2 \; ; \; 5)$ est une solution de ce système. En effet :

$-(-2)+5=7$ ET $2\times(-2)+3\times5=11$

Par contre le couple $(2 \; ; \; 9)$ n'est pas une solution de ce système. En effet :

$-2+9=7$ mais $2\times2+3\times9\neq11$

Dès que l'une, au moins, des deux équations n'est pas vérifiée, le couple n'est pas solution.

Définition n°7. Qu'est-ce-que résoudre un système ?

Résoudre un système c'est trouver TOUTES les solutions.

II.2 Systèmes et droites quel rapport ?

Remarque n°9.

Dans le système $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$

en posant $c=-k$ et $c'=-k'$, on peut écrire :

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

On peut alors considérer que :

$ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite d et que $a'x+b'y+c'=0$ est une équation cartésienne d'une droite d'

Une solution du système représente alors les coordonnées d'un point commun aux deux droites et par conséquent résoudre le système revient à trouver TOUS les points commun à d et d'.

Il y a donc trois cas de figure possibles :

▪ Les **droites sont sécantes**, elles n'ont qu'un seul point commun et donc le système possède **une est une seule solution** : Les coordonnées $(x_0 \; ; \; y_0)$ du point d'intersection des deux droites.
L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{\{(x_0 \; ; \; y_0)\}}$

▪ Les **droites sont** (strictement) **parallèles**, elles n'ont aucun point commun et donc le système n'a **aucune solution**.
L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{\varnothing}$

▪ Les **droites sont confondues** (les deux équations définissent la même droite), il y a une **infinité de solutions** qui est l'ensemble des couples $(x \; ; \; y)$ vérifiant $a\,x+b\,y+c=0$ (ou $a'\,x+b'\,y+c'=0$ puisque c'est pareil…)
L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{\{(x \; ; \; y) \mid a\,x+b\,x+c=0\}}$

II.3 Comment résoudre un système ?

Méthode n°1. La méthode par substitution

Résoudre le système : $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans l'une des équations

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(8+2x)=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On substitue à y sa valeur en fonction de x

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+16=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On simplifie

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-21}{7} \\ y=8+2x \end{cases}$ On résout l'équation d'inconnue x

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=8+2\times(-3) \end{cases}$ On remplace x par sa valeur dans l'autre équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ On détermine y

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-3}\ ;\ \mathbf{2})\}$

LES DROITES E04

EXERCICE N°1

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de substitution :

1) $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+5y=-6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3a+b=3 \\ 5a+2b=-4 \end{cases}$

Méthode n°2. La méthode par combinaison

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+3y=1 & (L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 & (2L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-11 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ -4x+5\times(-1)=-13 \end{cases} \quad \text{On remplace } y \text{ par sa valeur}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{On résout l'équation restante}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-1} \ ; \ \mathbf{2})\}$

EXERCICE N°2

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de combinaison:

1) $\begin{cases} -x+10y=-1 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2a+5b=-3 \\ 5a+2b=3 \end{cases}$

LES DROITES E04

EXERCICE N°3

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 4x-5x+3=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3a-b-21=0 \\ 4a-3b-4=0 \end{cases}$

LES DROITES E05

EXERCICE N°1

Au restaurant, la famille Alister a payé 112 € pour trois menus « adulte » et un menu « enfant».
La famille Lambert a payé 94 € pour deux menus « adulte» et deux menus « enfant».

1) En appelant x le prix d'un menu «adulte » et y le prix d'un menu « enfant», écrire un système d'équations qui permet de trouver le prix de chacun des menus.

2) Résoudre le système.

3) Donner le prix du menu « adulte» et celui du menu « enfant».

EXERCICE N°2

Valérie dispose d'une somme de 100 € pour acheter des livres qu'elle choisit dans deux séries différentes A et B. Si elle choisit 4 livres de la série A et 5 livres de la série B, il lui manque 3 €. Si elle choisit 5 livres de la série A et 3 livres de la série B, il lui reste 0,50 €.

1) Traduire les données par un système.

2) Déterminer le prix d'un livre de chaque sorte.

EXERCICE N°3

Lors d'un examen, il y a deux sortes de questions les questions « faciles » valent 2 points et les « difficiles » 5 points. Pour chaque question, si on a juste, on a le maximum de points, sinon, on a zéro. Alice a obtenu 70 points avec 17 réponses correctes.

À combien de questions de chaque sorte a-t-elle correctement répondu ?

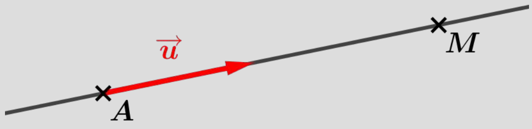
EXERCICE N°4

J’ai deux fois l’âge que vous aviez quand j’avais l’âge que vous avez. Quand vous aurez l’âge que j’ai, nous aurons à nous deux 63 ans.

Quel est mon âge ?

III Le résumé du cours

On peut définir une droite à l'aide d'**un vecteur directeur** et d'un point $A(x_A\ ;\ y_A)$.



$M(x\ ;\ y)$ est sur la droite $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u})=0$

équation cartésienne

On peut définir une droite à l'aide d'une **équation cartésienne** : $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

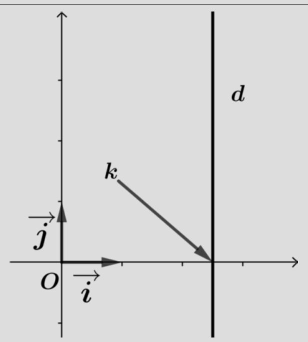
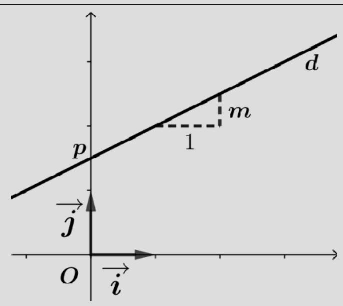
Un **vecteur directeur** est alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ et la droite passe par le point :

$A\left(\frac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$, sinon par $A\left(0\ ;\ \frac{-c}{b}\right)$

Chaque droite possède une infinité d'équations cartésiennes (il suffit de multiplier a, b et c par un même nombre non nul)

équation réduite

On peut réduire une équation cartésienne afin d'obtenir une **équation réduite**.

Si la droite est **PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme : $\boldsymbol{x=k}$	Si la droite est **NON PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme : $\boldsymbol{y=mx+p}$ m est la pente ou le coefficient directeur p est l'ordonnée à l'origine
Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ($\vec{u}=\vec{j}$)	Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$
	 Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ appartiennent à d alors : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Chercher les points communs à deux droites revient à résoudre un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** : $\begin{cases}\boldsymbol{ax+by=k} & \text{une équation cartésienne de } d\\ \boldsymbol{a'x+b'y=k'} & \text{une équation cartésienne de } d'\end{cases}$

- Si les droites sont sécantes l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x_0\ ;\ y_0})\}$ où $(x_0\ ;\ y_0)$ représente les coordonnées du point d'intersection de d et d' (il y a donc une solution unique)
- Si les droites sont confondues, l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x\ ;\ y})\ |\ \boldsymbol{ax+bx=k}\}$ (il y a donc une infinité de solutions).
- Si les droites sont parallèles, l'ensemble des solutions est vide . (il n'y a aucune solution)

Il faut savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues, pour cela il faut être capable de reproduire les deux méthodes de la page 6.