DEVOIR SURVEILLÉ N°2 LE BARÈME

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**

L'usage de la calculatrice est interdit.

Le sujet est à rendre avec la copie

PREMIÈRE PARTIE

EXERCICE N°1 Automatismes (6 points)

Pour ce premier exercice, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1) Le double de l'inverse du carré de 7 est égal à :

1.a) $\dfrac{49}{2}$ **1.b)** $\dfrac{2}{49}$ **1.c)** $\dfrac{1}{98}$ **1.d)** 98

2) On considère la relation $F = \dfrac{a+b}{cd}$.

Lorsque $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$ et $d = -\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est :

2.a) $\dfrac{5}{4}$ **2.b)** $\dfrac{7}{2}$ **2.c)** $-\dfrac{7}{2}$ **2.d)** $-\dfrac{5}{2}$

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_2=-3$ et $u_5=-18$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

3.a) $u_n = 2-5n$ **3.b)** $u_n = 7-5n$

3.c) $u_n = 5n-13$ **3.d)** $u_n = -3n-3$

4) La suite u est géométrique , de raison 3 et de premier terme $u_1 = 7$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

4.a) $u_n = 7+3(n-1)$ **4.b)** $u_n = 7\times 3^{n-1}$

4.c) $u_n = 7+3^{n-1}$ **4.d)** $u_n = 3\times 7^{n-1}$

5) Un récipient contenant initialement un litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures le volume d'eau diminue de 15 %. On appelle un le volume d'eau restant dans le récipient la n^ième^ heure. On a alors :

5.a) $u_{n+1} = 0{,}85u_n$ **5.b)** $u_n = 0{,}15^n$

5.c) $u_{n+1} = u_n-0{,}15$ **5.d)** $u_n = 1-0{,}15n$

6) Que va afficher ce script en langage Python ?

```
u = 3
for loop in range(4):
    u = 2 * u - 1
print(u)
```

6.a) 33 **6.b)** 17

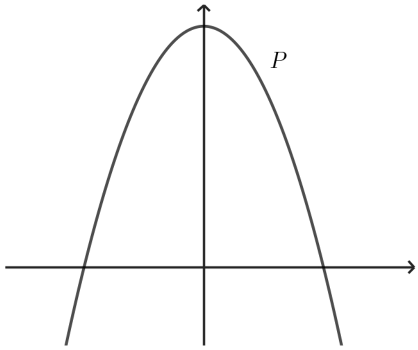
6.c) 9 **6.d)** 19

7) La somme $S = 1+7+^2+7^3+\ldots+7^{20}$ vaut :

7.a) $\dfrac{1-7^{20}}{6}$ **7.b)** $\dfrac{7^{20}-1}{6}$

7.c) $\dfrac{7^{21}-1}{6}$ **7.d)** $\dfrac{1-7^{21}}{6}$

8) On a représenté ci-contre une parabole *P*.
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole *P*.
Laquelle ?



8.a)	$x\mapsto x^2-20$	**8.b)**	$x\mapsto -x^2-20$
8.c)	$x\mapsto -x^2+20$	**8.d)**	$x\mapsto -x^2+20\,x$

---

9) Le prix d'un article est multiplié par 0,975.
Cela signifie que le prix de cet article a connu :

9.a)	une baisse de $2{,}5\ \%$	**9.b)**	une augmentation de $97{,}5\ \%$
9.c)	une baisse de $25\ \%$	**9.d)**	une augmentation de $0{,}975\ \%$

---

10) On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$$f_1\ :\ x\mapsto x^2-(1-x)^2 \qquad f_2\ :\ x\mapsto \frac{x}{2}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad f_3\ :\ x\mapsto \frac{5-\frac{2}{3}x}{0{,}7}$$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

10.a)	Aucune	**10.b)**	Toutes
10.c)	Uniquement la fonction f_1	**10.d)**	Uniquement les fonctions f_2 et f_3

---

11) Le prix d'un article est noté P . Ce prix augmente de $10\ \%$ puis baisse de $10\ \%$.
A l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1 . On peut affirmer que :

11.a)	$P_1\ =\ P$	**11.b)**	$P_1\ >\ P$	**11.c)**	$P_1\ <\ P$	**11.d)**	Cela dépend de P

---

12) La quantité $2\,x^2-4\,x-6$ est égale pour tout $x\ \in\ \mathbb{R}$ à :

12.a)	$2(x-1)(x-3)$	**12.b)**	$(x+1)(2\,x-6)$
12.c)	$(2\,x-3)(x-2)$	**12.d)**	$(2\,x+2)(x+3)$

---

1)	$\frac{2}{49}$	**2)**	$-\frac{7}{2}$	**3)**	$u_n\ =\ 7-5\,n$
4)	$u_n\ =\ 7\times 3^{n-1}$	**5)**	$u_{n+1}\ =\ 0{,}85\,u_n$	**6)**	33
7)	$\frac{7^{21}-1}{6}$	**8)**	$x\mapsto -x^2+20$	**9)**	une baisse de $2{,}5\ \%$
10)	Toutes	**11)**	$P_1\ <\ P$	**12)**	$(x+1)(2\,x-6)$

$12\times 0{,}5$ *point*

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE N°2 ***Suite arithmétique, suite géométrique*** ***(4 points)***

À l'issue d'une étude conduite pendant plusieurs années, on modélise l'évolution du prix du m^2 d'un appartement neuf dans une ville française de la manière suivante :
À partir d'un prix de 4 200 € le m^2 en 2025, on applique chaque année une augmentation annuelle de 3 %.

1) Calculer, selon ce modèle, le prix du m^2 d'un appartement neuf dans cette ville en 2026 et en 2027.

0,5 pt

▪ En 2026 :

$$4200+\frac{3}{100}\times 4200 = 4200+3\times 42 = 4200+126 = 4326$$

le prix du m^2 sera alors de $\boxed{4326\ €}$.

0,5 pt

▪ En 2027 :

$$4326+\frac{3}{100}\times 4326 = 4326+3\times 43{,}26 = 4326+129{,}78 = 4455{,}78$$

le prix du m^2 sera alors de $\boxed{4455{,}78\ €}$.

Aide au calcul

$3\times 4326 = 12978$
$432600+12978 = 445578$
$4200\times 0{,}97^4 \approx 3718$
$4200\times 0{,}97^5 \approx 3607$
$4200\times 0{,}97^6 \approx 3498$
$4200\times 1{,}03^4 \approx 4727$
$4200\times 1{,}03^5 \approx 4869$
$4200\times 1{,}03^6 \approx 5015$

2) On considère la suite de terme général u_n qui permet d'estimer, avec ce modèle, le prix en euro du m^2 d'un appartement neuf l'année $2025+n$. On a donc $u_0 = 4\,200$.

2.a) Quelle est la nature de la suite u ?
On se justifiera et on précisera les éléments caractéristiques de la suite u .

1 pt

Augmenter une quantité de 3 % revient à la multiplier par 1,03.
Ainsi, pour passer d'une année à la suivante, on multiplie par 1,03.
On en déduit que la suite u est $\boxed{\text{géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q = 1{,}03}$ et de $\boxed{1^{\text{er}} \text{ terme } u_0 = 4200}$.

2.b) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

0,5 pt

Pour tout entier naturel n ,
$u_n = u_0\times q^n$
$\boxed{u_n = 4200\times 1{,}03^n}$

3) Selon ce modèle, pourra-t-on acheter en 2030, un appartement de 40 m^2 si l'on dispose d'une somme de 200 000 € ?

0,5 pt

$2030 = 2025+5$, on va donc calculer u_5 pour connaître le prix du m² en 2030.
$u_5 = 4200\times 1{,}03^5$
$u_5 \approx 4868{,}95$

0,5 pt

De plus $\dfrac{200\,000}{40} = 5000$, donc avec un budget de 200000 euros on aller jusque 5000 € au m² .

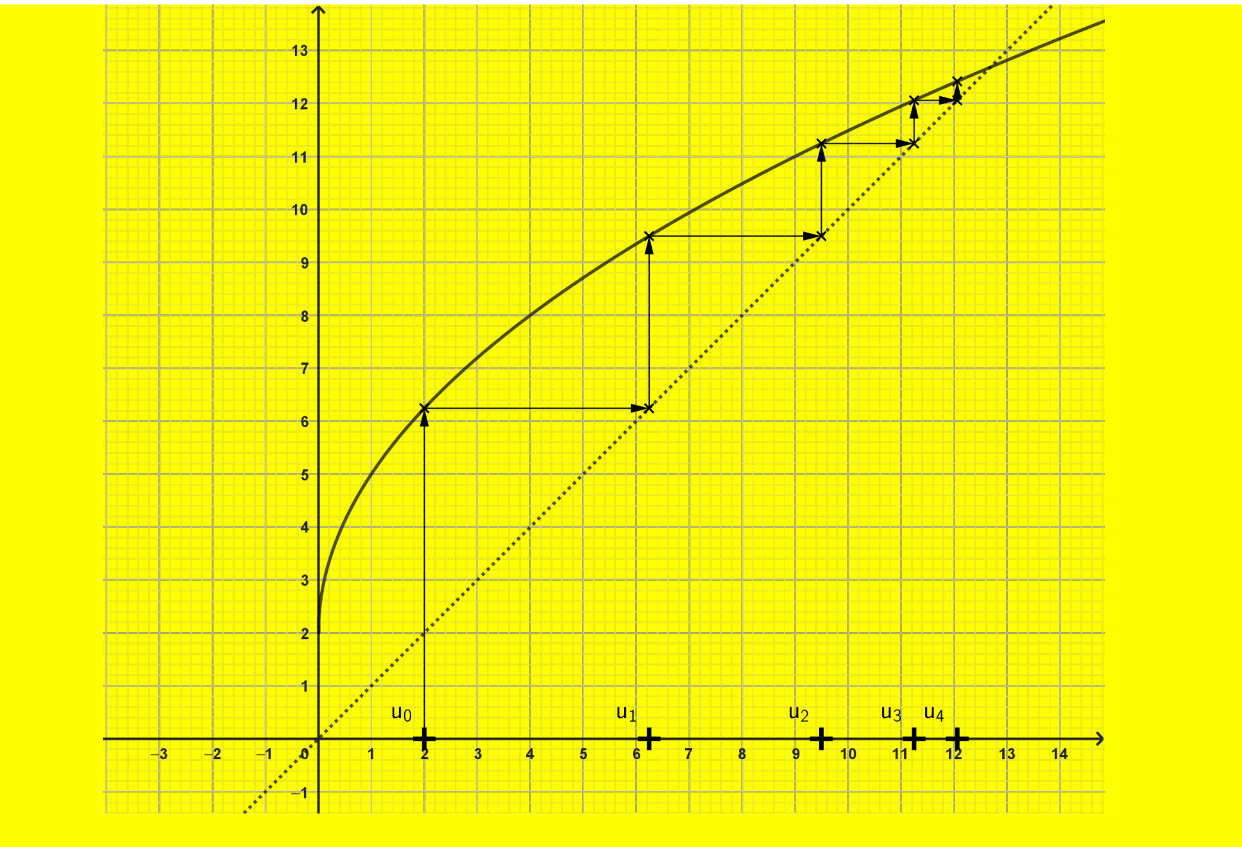
0,5 pt

$u_5 < 5000$
On en déduit qu' $\boxed{\text{on pourra acheter}}$.

EXERCICE N°3 Escalier de convergence (2 points)

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

avec f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dont la courbe représentative (C) est représentée ci-dessous.



1 pt

1) Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessous les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite u en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) et en laissant apparaître les traits de construction.

0,5 pt

2) Conjecturer le sens de variation de u.

La suite u semble strictement croissante .

0,5 pt

3) Conjecturer, si elle existe, la limite de u.

La suite u semble converger vers environ 12,7 .

EXERCICE N°4 Suite arithmético-géométrique (4 points)

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n+3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n-6$.

1 pt

1) Montrer que v est une suite géométrique de raison 0,5 dont on précisera le premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-6 \\ &= 0{,}5u_n+3-6 \\ &= 0{,}5u_n-3 \\ &= 0{,}5\left(u_n-\frac{3}{0{,}5}\right) \\ &= 0{,}5(u_n-6) \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0=7-6=1$.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

0,5 pt

- $v_n = v_0 \times q^n$

$\boxed{v_n = 0{,}5^n}$

0,5 pt

- $v_n = u_n - 6 \Leftrightarrow u_n = v_n + 6$

$\boxed{u_n = 0{,}5^n + 6}$

3) On note $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{100}$. Déterminer la valeur exacte de S.

$$S = 1 \times \frac{1-0{,}5^{100+1}}{1-0{,}5} = \frac{1-0{,}5^{101}}{0{,}5} = \frac{1}{0{,}5} - \frac{0{,}5^{101}}{0{,}5} = 2-0{,}5^{100}$$

1 pt

$\boxed{S = 2-0{,}5^{100}}$

$S = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ est aussi accepté.

4) En déduire une valeur exacte de la somme $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} S' &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{100} \\ &= v_0+6 + v_1+6 + \ldots + v_{100}+6 \\ &= 101 \times 6 + v_0 + v_1 + \ldots + v_{100} \\ &= 606 + S \\ &= 606 + 2 - 0{,}5^{100} \end{aligned}$$

1 pt

$\boxed{S' = 608-0{,}5^{100}}$

$S' = 608-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ est aussi accepté.

EXERCICE N°5 Suite arithmético-géométrique (4 points)

Le 1er janvier 2025, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $2025+n$.

	A	B
1	n	Un
2	0	[illegible]
3	1	[illegible]
4	2	[illegible]
5	3	1364,5
6	4	1328,05
7	5	1295,245
8	6	1265,7205
9	7	1239,14845
10	8	1215,233605
11	9	1193,710245
12	10	1174,33922
13	11	1156,905298
14	12	1141,214768
15	13	1127,093291
16	14	1114,383962
17	15	1102,945566
18	16	1092,651009
19	17	1083,385908
20	18	1075,047318
21	19	1067,542586
22	20	1060,788327
23	21	1054,709495
24	22	1049,238545
25	23	1044,314691
26	24	1039,883222
27	25	1035,894899
28	26	1032,305409
29	27	1029,074869
30	28	1026,167382
31	29	1023,550643
32	30	1021,195579
33	31	1019,076021
34	32	1017,168419
35	33	1015,451577

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite U. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.

- $\boxed{U_0 = 1500}$ d'après l'énoncé.

Diminuer une quantité de 10 % revient à la multiplier par 0,9.
Donc

0,5 pt

$$U_1 = 0{,}9\times U_0+100 \qquad U_2 = 0{,}9\times U_1+100$$
$$U_1 = 1350+100 \qquad U_2 = 1305+100$$
$$\boxed{U_1 = 1450} \qquad \boxed{U_2 = 1405}$$

- $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{1450}{1500} = \dfrac{29}{30}$

Si U était géométrique alors sa raison vaudrait $\dfrac{29}{30}$.

Or : $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1405}{1450} = \dfrac{281}{290} \neq \dfrac{29}{30}$

Aide au calcul
$$\frac{145}{150} = \frac{29}{30}$$
$$\frac{1405}{1450} = \frac{281}{290}$$

0,5 pt

Donc $\boxed{\text{la suite } U \text{ n'est pas géométrique}}$.

- $U_1-U_0 = 1450-1500 = -50$

Si U était arithmétique alors sa raison vaudrait -50.
Or : $U_2-U_1 = 1405-1450 = -45 \neq -50$

0,5 pt

Donc $\boxed{\text{la suite } U \text{ n'est pas arithmétique}}$.

2) Pour tout entier naturel n, On admet la relation de récurrence $U_{n+1} = 0{,}9\,U_n+100$.
Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n-1000$. Démontrer alors que la suite V est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

0,5 pt

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1}-1000 \\ &= 0{,}9\,U_n+100-1000 \\ &= 0{,}9\,U_n-900 \\ &= 0{,}9\left(U_n-\frac{900}{0{,}9}\right) \\ &= 0{,}9\left(U_n-1000\right) \\ &= 0{,}9\,V_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0{,}9\,V_n$.
On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = 0{,}9}$ et de premier terme $\boxed{V_0=1500-1000=500}$.

3) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$V_n = V_0 \times q^n$

$\boxed{V_n = 500 \times 0{,}9^n}$

0,25 pt

4) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$V_n = U_n - 1000 \Leftrightarrow U_n = V_n + 1000$

$\boxed{U_n = 500 \times 0{,}9^n + 1000}$

0,25 pt

5) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 500 \times 0{,}9^{n+1} + 1000 - [500 \times 0{,}9^n + 1000] \\ &= 500 \times 0{,}9^{n+1} + 1000 - 500 \times 0{,}9^n - 1000 \\ &= 500 \times 0{,}9^{n+1} - 500 \times 0{,}9^n \\ &= 0{,}9(500 \times 0{,}9 - 500) \\ &= -50 \times 0{,}9^n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n$.

0,5 pt

6) En déduire alors le sens de variation de la suite U.

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n < 0$

donc

$U_{n+1} < U_n$

On reconnaît une suite $\boxed{\text{strictement décroissante}}$.

0,5 pt

7) Au 1er janvier 2025, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenu par recopie vers le bas après avoir saisie la formule `=0,9*B2+100` dans la cellule B3.

À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

$1500 - 300 = 1200$, Ainsi l'entreprise ne sera plus en sureffectif quand le nombre d'employés ne dépassera plus 1200.

D' après la feuille de calcul ,

$u_8 \approx 1215 > 1200$ et

$u_9 \approx 1194 < 1200$.

De plus $2025 + 9 = 2034$,

On en déduit que c'est $\boxed{\text{à partir de } 2034}$ que l'entreprise ne sera plus en sureffectif.

0,5 pt

EXERCICE N°6 **(Bonus : 1,5 points)**

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}*$, $u_n = \dfrac{3^n+1}{3^n-1}$.

1) Démontrer que la suite u est strictement décroissante.

1 pt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}-\frac{3^n+1}{3^n-1} \\ &= \frac{(3^{n+1}+1)(3^n-1) - (3^{n+1}-1)(3^n+1)}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \\ &= \frac{3^{2n+1}-3^{n+1}+3^n-1 - [3^{2n+1}+3^{n+1}-3^n-1]}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \\ &= \frac{3^{2n+1}-3^{n+1}+3^n-1 - 3^{2n+1}-3^{n+1}+3^n+1}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \\ &= \frac{-2\times 3^{n+1}+2\times 3^n}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \\ &= \frac{3^n(-2\times 3+2)}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \\ &= \frac{-4\times 3^n}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-4\times 3^n}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)}$

Or $-4\times n^3 < 0$, « $3^{n+1}-1 \geqslant 8 > 0$ et $3^n-1 \geqslant 2 > 0$

Donc

$u_{n+1}-u_n < 0$

qui équivaut à

$u_{n+1} < u_n$

On en déduit que la suite u est strictement décroissante .

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n - 1 = \dfrac{2}{3^n-1}$.

0,25 pt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{3^n+1}{3^n-1}-1 \\ &= \frac{3^n+1-(3^n-1)}{3^n-1} \\ &= \frac{2}{3^n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 = \dfrac{2}{3^n-1}$.

3) La suite u converge-t-elle vers une valeur et si oui laquelle ? (On ne demande qu'une conjecture)

0,25 pt

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{2}{3^n-1}$ tend vers 0

d'où $u_n - 1$ aussi

Ainsi $\boxed{u_n \text{ tend vers } 1}$