LES SUITES NUMÉRIQUES M03

EXERCICE N°1 Suite arithmétique ou pas

VOIR LE CORRIGÉ

1) Soit v la suite définie par $v(n) = 0{,}5n^2 - 3.$ pour $n \geqslant 0$

1.a) Calculer les trois premiers termes de la suite v .
1.b) Représenter graphiquement les premiers termes de v .
1.c) D'après la représentation graphique, la suite v semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
1.d) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.

2) Soit w la suite définie par $w(n) = 3n - 1.$ pour $n \geqslant 0$

2.a) Calculer les trois premiers termes de la suite w .
2.b) Représenter graphiquement les premiers termes de . w
2.c) D'après la représentation graphique, la suite w semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
2.d) Démontrer que la suite w est arithmétique et préciser sa raison r .

EXERCICE N°2 Suite arithmétique et formule explicite : départ à 0

VOIR LE CORRIGÉ

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = -3$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
3) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

EXERCICE N°3 Suite arithmétique et formule explicite : départ à p=5

VOIR LE CORRIGÉ

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_5 = 35$ et de raison $r = -7$.

1) Pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_6 , u_7 et u_8 .
3) Pour tout entier $n \geqslant 5$, exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_{32} , u_{60} et u_{100} .
5) Quel est le rang du terme égal à -329 ? Justifier.

EXERCICE N°4 Suite arithmétique : Somme de termes

VOIR LE CORRIGÉ

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2) Exprimer le terme u_n en fonction de n . En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50} .
3) Calculer la somme S des 21 premiers termes de la suite et la somme S' des 51 premiers termes.

EXERCICE N°5 Suite arithmétique : Somme de termes

VOIR LE CORRIGÉ

Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = -3 + 7n$.

1) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
2) Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.
3) Quelle est la valeur du 51^e terme ?
4) Calculer la somme des 51 premiers termes.

LES SUITES NUMÉRIQUES M03C

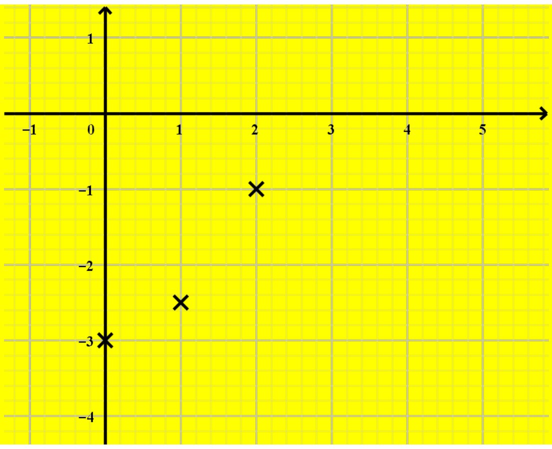
EXERCICE N°1 *Suite arithmétique ou pas* RETOUR À L'EXERCICE

1) Soit v la suite définie par $v(n) = 0{,}5n^2 - 3.$ pour $n \geqslant 0$

1.a) Calculer les trois premiers termes de la suite v .

$v(0) = 0{,}5 \times 0^2 - 3$ $\boxed{v(0) = -3}$	$v(1) = 0{,}5 \times 1^2 - 3$ $\boxed{v(1) = -2{,}5}$	$v(2) = 0{,}5 \times 2^2 - 3$ $\boxed{v(2) = -1}$

1.b) Représenter graphiquement les premiers termes de v .



1.c) D'après la représentation graphique, la suite v semble-t-elle arithmétique ? Justifier.

Si la suite était arithmétique, alors les points du nuage qui la représentent seraient alignés.
Or, ce n'est pas le cas.
Donc la suite n'est pas arithmétique.

1.d) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.

On sous-entend qu'il ne faut pas utiliser la représentation graphique.
Si la suite était arithmétique alors l'écart entre deux termes consécutifs serait constant.

Or : $\begin{array}{l} v(1) - v(0) = 0{,}5 \\ v(2) - v(1) = 1{,}5 \end{array}$ donc $v(1) - v(0) \neq v(2) - v(1)$

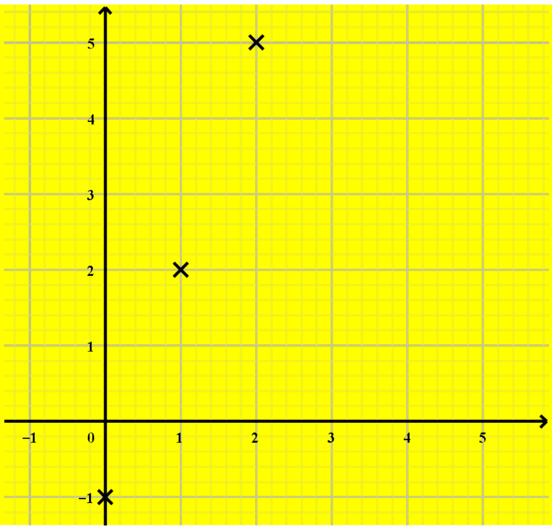
Ainsi, la suite ne peut pas arithmétique.

2) Soit w la suite définie par $w(n) = 3n-1.$ pour $n \geqslant 0$

2.a) Calculer les trois premiers termes de la suite w .

$w(0) = 3\times 0-1$ $\boxed{w(0) = -1}$	$w(1) = 3\times 1-1$ $\boxed{w(1) = 2}$	$w(2) = 3\times 2-1$ $\boxed{w(2) = 5}$

2.b) Représenter graphiquement les premiers termes de w .



2.c) D'après la représentation graphique, la suite w semble-t-elle arithmétique ? Justifier.

Les points du nuage représentant semblent alignés donc la suite semble bien arithmétique.

2.d) Démontrer que la suite w est arithmétique et préciser sa raison r .

On sous-entend qu'il ne faut pas utiliser la représentation graphique.
On va montrer que l'écart entre deux termes consécutifs est toujours le même.
On ne peut pas se contenter d'un contre-exemple comme à la question n°1. Il faut passer par le calcul littéral.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w(n+1)-w(n) &= \underbrace{3(n+1)-1}_{w(n+1)} - \underbrace{[3n-1]}_{w(n)} \\ &= 3n+3-1 - 3n+1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier naturel n , $w(n+1)-w(n) = 3$

ce qui équivaut à $w(n+1) = w(n)+3$ c'est à dire la définition par récurrence d'une suite arithmétique.

On en déduit que la suite w est bien arithmétique de raison $r = 3$.

LES SUITES NUMÉRIQUES M03C

EXERCICE N°2 ***Suite arithmétique et formule explicite : départ à 0*** RETOUR À L'EXERCICE

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = -3$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n + r$, d'où $\boxed{u_{n+1} = u_n - 3}$

u_{n+1} en fonction de u_n « signifie que » u_{n+1} est à gauche du « = » et que dans le membre de droite, il n'y a pas « autre chose » que u_n , des nombres et des symboles opératoires.
Contre-exemple : dans $u_{n+1} = u_n + r$, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n et de r .

2) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .

- $u_1 = u_0 + r = 7-3$, ainsi $\boxed{u_1 = 4}$
- $u_2 = u_1 + r = 4-3$, ainsi $\boxed{u_2 = 1}$
- $u_3 = u_2 + r = 1-3$, ainsi $\boxed{u_3 = -2}$

3) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = u_0 + nr$, d'où $\boxed{u_n = 7-3n}$

4) Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

- $u_{10} = 7-3\times10$, ainsi $\boxed{u_{10} = -23}$
- $u_{17} = 7-3\times17$, ainsi $\boxed{u_{17} = -44}$
- $u_{23} = 7-3\times23$, ainsi $\boxed{u_{23} = -62}$

EXERCICE N°3 ***Suite arithmétique et formule explicite : départ à p=5*** RETOUR À L'EXERCICE

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_5 = 35$ et de raison $r = -7$.

1) Pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$,

$\boxed{u_{n+1} = u_n - 7}$

On commence à 5

2) Calculer les termes u_6 , u_7 et u_8 .

- $u_6 = u_5 + r = 35 - 7$, ainsi $\boxed{u_6 = 28}$
- $u_7 = u_6 + r = 28 - 7$, ainsi $\boxed{u_7 = 21}$
- $u_8 = u_7 + r = 21 - 7$, ainsi $\boxed{u_8 = 14}$

3) Pour tout entier $n \geqslant 5$, exprimer u_n en fonction de n .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = u_5 + r(n-5)$

On commence à 1
donc on enlève 1

$\boxed{u_n = 35 - 7(n-5)}$

4) Donner alors les valeurs de u_{32} , u_{60} et u_{100} .

- $u_{32} = 35 - 7 \times (32-5)$, ainsi $\boxed{u_{32} = -154}$
- $u_{60} = 35 - 7 \times (60-5)$, ainsi $\boxed{u_{60} = -350}$
- $u_{100} = 35 - 7 \times (100-5)$, ainsi $\boxed{u_{100} = -630}$

5) Quel est le rang du terme égal à -329 ? Justifier.

Notons n le rang cherché,

$u_n = -329 \Leftrightarrow 35 - 7(n-5) = -329 \Leftrightarrow -7(n-5) = -364 \Leftrightarrow n-5 = 52 \Leftrightarrow n = 57$

Ainsi $u_{57} = -329$ donc le $\boxed{\text{rang cherché est } 57}$.

EXERCICE N°4 ***Suite arithmétique : Somme de termes*** *RETOUR À L'EXERCICE*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

- $u_1 = u_0+r = 7{,}5+1{,}5$, ainsi $\boxed{u_1 = 9}$
- $u_2 = u_1+r = 9+1{,}5$, ainsi $\boxed{u_2 = 10{,}5}$
- $u_3 = u_2+r = 10{,}5+1{,}5$, ainsi $\boxed{u_3 = 12}$

2) Exprimer le terme u_n en fonction de n . En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50} .

- Pour tout entier naturel n .

$u_n = u_0+nr$, ainsi $\boxed{u_n = 7{,}5+1{,}5n}$

- $u_{20} = 7{,}5+1{,}5\times 20$, ainsi $\boxed{u_{20} = 37{,}5}$
- $u_{50} = 7{,}5+1{,}5\times 50$, ainsi $\boxed{u_{50} = 82{,}5}$

3) Calculer la somme S des 21 premiers termes de la suite et la somme S' des 51 premiers termes.

La formule de la remarque n°7 est souvent plus pratique...

Le 21^{e} terme de la suite est $u_{20} = 37{,}5$, on en déduit que :

$$S = 21\times\frac{7{,}5+37{,}5}{2}$$

$$\boxed{S = 472{,}5}$$

EXERCICE N°5 ***Suite arithmétique : Somme de termes*** RETOUR À L'EXERCICE

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -3+7n$.

1) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

- $v_0=-3+7\times0$, ainsi $\boxed{v_0=-3}$
- $v_1=-3+7\times1$, ainsi $\boxed{v_1=4}$
- $v_2=-3+7\times2$, ainsi $\boxed{v_2=11}$

2) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.

Montrons que l'écart entre deux termes consécutifs de la suite est toujours le même.
Soit n un entier naturel.

$v_{n+1}-v_n = -3+7(n+1)-(-3+7n)$

$v_{n+1}-v_n = -3+7n+7+3-7n$

$v_{n+1}-v_n = 7$

On en déduit que $\boxed{v_{n+1} = v_n+7}$ et on reconnaît une suite arithmétique de raison $\boxed{\text{raison } 7}$.

3) Quelle est la valeur du 51e terme ?

Le 51e terme est ici v_{50} :

$v_{50} = -3+7\times50$

$\boxed{v_{50} = 347}$

4) Calculer la somme des 51 premiers termes.

Nous savons que le 51e terme est $v_{50} = 347$

En notant S la somme cherchée, on peut écrire :

$S = 51\times\dfrac{-3+347}{2}$

$\boxed{S = 8772}$