FONCTIONS AFFINES ET ÉQUATIONS SPE01

Dans cette fiche, toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, les définitions qui suivent sont « allégées » en conséquence et ne doivent pas vous servir de référence pour la suite de vos études.

I Une première opération sur les fonctions affines

Définition n°1. ***Addition de deux fonctions affines***

Soit f et g deux fonctions affines, on appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Exemple n°1.

On donne f et g définies respectivement pour tout x par : $f(x) = 7x+2$ et $g(x) = 3x-5$. On a :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (7x+2)+(3x-5)\\ &= 7x+2+3x-5\\ &= 10x-3\end{aligned}$$

Ainsi $(f+g)(x) = 10x-3$

Remarque n°1.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

On a donc $f+g = g+f$

On dit que l'addition des fonctions affines est commutative.

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on donne a, b, c et d des nombres réels et on définit, pour tout x, $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$

Remarque n°2. ***La fonction nulle est neutre***

La fonction nulle que nous allons noter n, est définie pour tout x par $n(x) = 0$.

C'est bien une fonction affine puisque l'on peut l'écrire : $n(x) = 0x+0$.

De plus, pour une fonction affine quelconque f, on a $f+n = n+f = f$.

En effet, pour tout x :

$(f+n)(x) = f(x)+n(x) = f(x)+0 = f(x)$

et

$(n+f)(x) = n(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x)$

On dit que la fonction *nulle* est un élément neutre pour l'addition des fonctions affines.

EXERCICE N°1 La somme de deux fonctions affines est affine

1) Déterminer l'expression réduite de $(f+g)(x)$.

2) En déduire que la somme de deux fonctions affines est affine.

EXERCICE N°2 Fonction opposée d'une fonction affine

On donne h, la fonction affine définie par $h(x) = 4x+7$ et la fonction affine g définie par $g(x) = cx+d$

1) Déterminer c et d pour que $h+g = n$ c'est à dire que : pour tout x, $h(x)+g(x) = 0$

2) Même question avec $f(x) = ax+b$

Remarque n°3. Et si on faisait pareil pour la multiplication

On peut définir le produit de f et g par :
Pour tout *x*, $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Malheureusement, le produit de deux fonctions affines n'est pas forcément une fonction affine.

EXERCICE N°3 Un contre-exemple

On donne $h(x) = 4x+7$ et $k(x) = 3x+5$.

1) Déterminer l'expression réduite de $(h \times k)(x)$.
2) En déduire que $h \times k$ n'est pas une fonction affine.

II Une autre opération sur les fonctions affines : la composition

Définition n°2. La composée de deux fonctions affines

Soit f et g deux fonctions affines.
On note $f \circ g$ (et on prononce « f rond g ») , la fonction définie par :
Pour tout *x* : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Exemple n°2.

On donne f et g définies respectivement pour tout *x* par : $f(x) = 7x+2$ et $g(x) = 3x-5$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x-5) \\ &= 7(3x-5)+2 \\ &= 21x-35+2 \\ &= 21x-33 \end{aligned}$$

Remarque n°4.

On tombe sur une fonction affine ! … Mais est-ce toujours le cas ?

EXERCICE N°4 La composée de deux fonctions affines est affine

Toujours avec $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$

1) Déterminer l'expression réduite de $f \circ g(x)$.
2) En déduire que $f \circ g$ est une fonction affine.

Remarque n°5. À la recherche de l'élément neutre

Nous avons vu que la fonction nulle était un élément neutre pour l'addition des fonctions affines. Ce n'est pas le cas pour la composition des fonctions affines.

EXERCICE N°5 Un contre-exemple

Avec $f(x) = 7x+2$ et $n(x) = 0$
1) Déterminer les expressions réduites de $f \circ n$ et de $n \circ f$
2) En déduire que la fonction nulle n'est un élément neutre pour la composition des fonctions affines.

Remarque n°6. La fonction identité révèle sa neutralité

La fonction identité que nous allons noter ici *I* est définie pour tout *x*, par :
$I(x) = x$

$f \circ I(x) = f(I(x))$ $= f(x)$	$I \circ f(x) = I(f(x))$ $= f(x)$

Remarque n°7. Fonction réciproque

Comme pour l'addition, on aimerait pouvoir, pour une fonction f donnée, disposer d'une fonction g telle que $f \circ g = g \circ f = I$

EXERCICE N°6 Un exemple

On donne f et g définies respectivement pour tout x par : $f(x) = 2x+8$ et $g(x) = 0{,}5x-4$.

Vérifier que les expressions réduites de $f \circ g(x)$ et de $g \circ f(x)$ sont égales à $I(x) = x$

EXERCICE N°7 On généralise

On donne les fonctions f et g définies respectivement pour tout x par :
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$

Déterminer c et d en fonction de a et b pour que $f \circ g = g \circ f = I$.

Remarque n°8.

Tout à l'air de fonction comme pour l'addition...
Malheureusement, il faut faire plus attention qu'avec l'addition car :
La composition de fonctions n'est pas commutative

EXERCICE N°8 Un contre-exemple

On donne f et g définies respectivement pour tout x par : $f(x) = 7x+2$ et $g(x) = 3x-5$.

On sait déjà que $f \circ g(x) = 21x-33$.

1) Déterminer l'expression réduite de $g \circ f(x)$ c'est à dire de $g(f(x))$.
2) En déduire que de manière générale : $f \circ g \neq g \circ f$

EXERCICE N°9 Parfois ça marche quand même !

On donne les fonctions f et g définies respectivement pour tout x par :
$f(x) = 2x+4$ et $g(x) = 3x+8$

1) Vérifier les expressions réduite de $f \circ g(x)$ et de $g \circ f(x)$ sont égales.
On dit que f et g commutent.

2) Proposer une fonction affine h (autre que g) telle que f et h commutent.

EXERCICE N°10 Pour chercher

On donne les fonctions f et g définies respectivement pour tout x par :
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$

Proposer une relation entre a, b, c et d pour f et g commutent.