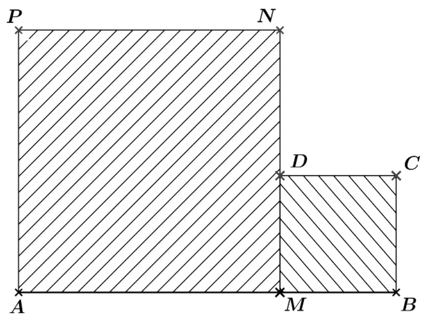
LA DÉRIVATION E07C

EXERCICE N°1 Du concret : Optimisation d'une aire

Extrait du Sesamath 1[er] spe n°48 p155

Soit un segment $[AB]$ de longueur 10 et M un point de ce segment. Du même côté de ce segment, on construit deux carrés $AMNP$ et $MBCD$. On pose $AM = x$ et on étudie l'aire du domaine formé par ces deux carrés en fonction de x.



1) À quel intervalle I appartient le réel x ?

$\boxed{I = [0\ ;\ 10]}$

2) Soit $f(x)$ l'aire du domaine. Montrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

Soit $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= AM^2 + MB^2 \\ &= x^2 + (10-x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien , pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$

3) Justifier que la fonction f est dérivable sur I et déterminer $f'(x)$ pour tout x de I.

f est une somme de fonctions de références dérivables sur I , elle est donc dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$f'(x) = 2 \times 2x - 20 \times 1 + 0$

$\boxed{f'(x) = 4x - 20}$

4) En déduire les variations de f sur I et la valeur de x pour laquelle l'aire du domaine est minimale.

Dressons le tableau de variations de f sur I :

x	0		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	100	$\searrow$	50	$\nearrow$	100

On en déduit que $\boxed{\text{l'aire sera minimale pour } x = 5}$