EXERCICE N°3 ***Somme des premiers carrés***

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est à dire $u_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

3) Calculer les trois premiers termes de la suite u.

- $u_1 = 1^2$, ainsi $\boxed{u_1 = 1}$.
- $u_2 = 1^2+2^2$, ainsi $\boxed{u_2 = 5}$.
- $u_3 = 1^2+2^2+3^2$, ainsi $\boxed{u_3 = 14}$.

4) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n+(n+1)^2}$

5) On pose v la suite définie par : Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5.a) Montrer que $v_1 = u_1$

$$v_1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1 = u_1$$

5.b) Montrer que la suite v suit la même relation de récurrence que la suite u et conclure.

- Exprimons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- Calculons à présent $v_n+(n+1)^2$

$$v_n+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \qquad \text{factorisation par } (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

Or :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc :

$v_{n+1} = v_n+(n+1)^2$.

- La suite v suit bien la même relation de récurrence que la suite u.
- Comme, de plus, elles ont le même premier terme, on en conclut que :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n$.
- On a donc démontré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

On ne change pas cette somme en ajoutant zéro, donc on peut commencer à $k = 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

(Le résultat reste vrai pour $n=0$ puisque $0 = 0$)