VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)***

En France,au 1er janvier 2018, 0,025 % de la population était centenaire, dont 83 % de femmes.
Les résultats seront arrondis à 10^{-5} .

1)
1.a) Quelle était la probabilité que dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard il y ait eu au moins personne centenaire ?

Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500. On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}00025$. ($X \sim \mathcal{B}(500\ ;\ 0{,}00025)$)

On peut le faire car le nombre d'habitants au Japon est (bien) plus grand que 5000 (10×500) et que bien sûr les personnes sont choisies au hasard.

Il s'agit donc de calculer $P(X\geqslant 1)$
Or $P(X\geqslant 1)\ =\ 1-P(X=0)$

On pourrait calculer $P(X\geqslant 1)$ directement, mais il faudrait alors calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ … $P(X=500)$.

Donc $P(X\geqslant 1)\ =\ 1-0{,}99975^{500}$

$$P(X=0)\ =\ \underbrace{\binom{500}{0}}_{1}\times\underbrace{0{,}00025^{0}}_{1}\times\underbrace{(1-0{,}00025)^{500-0}}_{0{,}99975^{500}}$$

Ainsi $\boxed{P(X\geqslant 1)\ \approx\ 0{,}11752}$

1.b) Et dans un groupe de 500 femmes ?

▪ Commençons par déterminer la probabilité qu'une femme soit centenaire.

L'énoncé nous donne la probabilité qu'un centenaire soit une femme…

Dans l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un japonais au hasard, notons :
C : La personne choisie est centenaire
F : La personne choisie est une femme.
On peut supposer que $P(F)\ =\ 0{,}5$

Selon Wikipédia, en 2019 au japon, le sex-ratio valait $\dfrac{94}{100}$

$$\text{sex-ratio}\ =\ \frac{\text{nombre d'hommes}}{\text{nombre de femmes}}$$

On en déduit la proportion de femmes : $\dfrac{100}{100+94}\ \approx\ 0{,}51546$

Notre approximation de 0,5 est donc justifiée.

$$P_F(C)\ =\ \frac{P(C\cap F)}{P}(F)\ =\ \frac{P(C)\times P_C(F)}{P(F)}\ =\ \frac{0{,}00025\times 0{,}83}{0{,}5}\ =\ 4{,}15\times 10^{-4}$$

Ainsi $P_F(C)\ =\ 0{,}000415$

▪ Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500 femmes . On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}000415$.
($X \sim \mathcal{B}(500\ ;\ 0{,}00415)$)
On calcule alors $P(X\geqslant 1)$ comme à la question précédente.
$P(X\geqslant 1)\ =\ 1-0{,}999585^{500}$
$\boxed{P(X\geqslant 1)\ \approx\ 0{,}18742}$

2) Au Japon, la proportion de centenaires était de 0,037 % en 2011. Quelle était la probabilité qu'il n'y ait pas eu de centenaire dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard à cette époque ?

Notons X le nombre de centenaires dans un groupe de 500. On peut considérer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}00037$. ($X \sim \mathcal{B}(500\ ;\ 0{,}00037)$)
Il s'agit donc de calculer $P(X=0)$
$P(X=0)\ =\ 0{,}99963^{500}$
$\boxed{P(X=0)\ \approx\ 0{,}83108}$

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

De 1987 à 1993, le Tapis vert était un jeu de la Française des jeux (à l'époque appelée France Loto). Le principe était le suivant :
pour jouer, il fallait miser entre 2 et 100 francs, puis, pour chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique), choisir une carte entre le 7 et l'as.
Un tirage était ensuite effectué sous contrôle d'huissier et à la télévision.
Si le joueur avait choisi deux des cartes tirées, il gagnait deux fois sa mise, s'il avait choisi trois des cartes tirées, il gagnait trente fois sa mise, et s'il avait choisi les quatre cartes tirées, il gagnait mille fois sa mise.

Un joueur a choisi ses quatre cartes. On note X le nombre de ses cartes qui seront tirées.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Pour avoir une loi binomiale, il faut avoir une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de mêmes paramètres (un schéma de Bernoulli).
Pour une carte tirée, on considère comme Succès le fait qu'elle soit celle choisie par le joueur.
On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\mathbf{\frac{1}{8}}$.
Les quatre couleurs ne s'influencent pas, donc chacune des **4** épreuves est indépendante des autres.
On peut donc dire que $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n=4 \text{ et } p=\frac{1}{8}}$.
($X \sim \mathscr{B}(4\ ;\ 0{,}125)$)

2) Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent ?

Le joueur gagne de l'argent dès le moment où il a au moins deux de ses cartes qui sont tirées.
Il s'agît donc de calculer $P(X\geqslant 2)$
On pourrait calculer $P(X=2)$; $P(X=3)$ et $P(X=4)$ puis les additionner… mais on n'aime pas faire les calculs. On va donc calculer la probabilité de l'événement contraire qui demande (un peu) moins de travail.

$$P(X\geqslant 2) = 1-\underbrace{P(X<2)}_{On\,ne\,prend\ pas\,2} = 1-\underbrace{P(X\leqslant 1)}_{\substack{il\,suffit\,donc\\ d'aller\ jusque\,1}}$$

$$\begin{aligned} P(X\geqslant 2) &= 1-P(X\leqslant 1)\\ &= 1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]\\ &= 1-\left[\left(\frac{7}{8}\right)^4+4\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^3\right]\end{aligned}$$

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{8}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{8}\right)^{4-0} \quad \text{et} \quad P(X=1) = \binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{8}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{8}\right)^{4-1}$$

$\boxed{P(X\geqslant 2) \approx 0{,}0789}$

3) Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

$$E(X) = np = 4\times\frac{1}{8}$$

On peut utiliser les lettres n et p car on a précisé leur signification à la question 1).
Ainsi $\boxed{E(X) = 0{,}5}$
Cela signifie qu'un joueur peut espérer avoir « la moitié d'une carte en commun avec le tirage ». Bien sûr, cela ne veut pas dire grand-chose.
Cela signifie qu'en moyenne le joueur a une chance sur deux d'avoir une carte en commun avec le tirage.

4) Ce joueur a misé 10 francs pour un tirage. On note Y ses gains.

4.a) Quelle sont les valeurs prises par Y ?

Les valeurs de Y dépendent de celles de X .

X	0	1	2	3	4
Y	0	0	20	300	10000
	(pas de gain)	(pas de gain)	(2 fois la mise de 10 francs)	(30 fois la mise de 10 francs)	(1000 fois la mise de 10 francs)

4.b) Donner la loi de probabilité de Y .

On donne la loi de Y sous la forme d'un tableau.

$Y=k$	0	20	300	10000	total
$P(Y=k)$	0,9211	0,0718	0,0068	0,0002	1
					En fait 0,9999 mais cela vient des arrondis. Avec les valeurs exactes on obtient bien sûr 1

▪ Pour que $Y=0$ il faut et il suffit que $X=0$ ou $X=1$

Donc $P(Y=0) = P(X\leqslant 1) \approx 0{,}9211$ (reprendre les calculs de la question 2)

▪ Pour que $Y=20$ il faut et il suffit que $X=2$

Donc $P(Y=20) = P(X=2) = \binom{4}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\left(\frac{7}{8}\right)^{4-2} \approx 0{,}0718$

▪ Pour que $Y=300$ il faut et il suffit que $X=3$

Donc $P(Y=300) = P(X=3) = \binom{4}{3}\times\left(\frac{1}{8}\right)^3\times\left(\frac{7}{8}\right)^{4-3} \approx 6{,}83\times 10^{-3} \approx 0{,}0068$

▪ Pour que $Y=10000$ il faut et il suffit que $X=4$

Donc $P(Y=10000) = P(X=4) = \binom{4}{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^4\times\left(\frac{7}{8}\right)^{4-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0{,}0002$

4.c) Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.

$E(Y) = 0\times P(Y=0)+20\times P(Y=20)+300\times P(Y=300)+10000\times P(Y=10000) \approx 5{,}476$

Les calculs ont été faits avec les valeurs écrites dans le tableau qui donne la loi de Y .

Ainsi $\boxed{E(Y) \approx 5{,}476}$

Cela signifie que le joueur peut espérer gagner environ 5 francs et 48 centimes chaque fois qu'il joue 10 francs

5) Le 29 mars 1988 eut lieu un tirage particulier : les quatre as ont été tirés. Beaucoup de gens ayant parié sur cette combinaison, les gains distribués ont été très supérieurs aux mises!
Quelle était la probabilité qu'un tel tirage se produise ?

La probabilité d'un tel tirage est $\boxed{P(X=4) = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0{,}0002}$

La probabilité de tirer quatre rois, quatre reines … ou quatres sept est la même.
Le problème est venu du fait qu'il y avait beaucoup de gens qui jouaient en général les quatres As plutôt qu'un autre carré...

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°3 ***(Le corrigé)***

Une crue centennale est une crue qui a une chance sur cent de se produire chaque année. La dernière crue centennale de la Seine à Paris a eu lieu en 1910. On note X le nombre de crues centennales qui auront lieu à Paris dans le siècle à venir.

1)

1.a) Quelle loi de probabilité suit X ?

Chaque année, il y a une chance sur 100 qu'apparaisse une crue centennale : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}01$ où le succès est la survenue de la crue.

Cette épreuve est répétée de manière indépendante chaque année pendant un siècle. On obtient ainsi un schéma de Bernoulli.

La varible aléatoire X qui compte le nombre de succés suit donc $\boxed{\text{une loi binomiale de paramètre } n=100 \text{ et } p=0{,}01}$

1.b) Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux crues centennales aient lieu durant le prochain siècle?

Il s'agît de calculer $P(X\geqslant 2)$

On pourrait calculer $P(X=2)$; $P(X=3)$ et $P(X=4)$ puis les additionner… mais on n'aime pas faire les calculs. On va donc calculer la probabilité de l'événement contraire qui demande (beaucoup) moins de travail.

$$P(X\geqslant 2)\ =\ 1-\underbrace{P(X<2)}_{\text{On ne prend pas } 2}\ =\ 1-\underbrace{P(X\leqslant 1)}_{\substack{\text{il suffit donc} \\ \text{d'aller jusque } 1}}$$

Or : $P(X\geqslant 2)\ =\ 1-P(X\leqslant 1)$

$$P(X=0)\ =\ \binom{100}{0}\times\left(\frac{1}{100}\right)^{0}\times\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100-0}$$

et

$$P(X=1)\ =\ \binom{100}{1}\times\left(\frac{1}{100}\right)^{1}\times\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100-1}$$

Ainsi $\boxed{P(X\geqslant 2)\ \approx\ 0{,}26}$

1.c) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.

$$E(X)\ =\ np\ =\ 100\times\frac{1}{100}$$

Ainsi $\boxed{E(X)\ =\ 1}$

Cela signifie que, sur une période de 100 ans on peut espère avoir 1 crue.

2) Florian déclare « Ça fait plus de cent ans que la dernière crue centennale a eu lieu, il est de plus en plus probable que la prochaine arrive! ». A-t-il raison ?

Chaque année la probabilité d'une crue centennale est de 1 % indépendamment des années précédentes.

$\boxed{\text{Il a donc tort}}$.

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1

En France,au 1er janvier 2018, 0,025 % de la population était centenaire, dont 83 % de femmes.
Les résultats seront arrondis à 10^{-5} .

1)
1.a) Quelle était la probabilité que dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard il y ait eu au moins personne centenaire ?
1.b) Et dans un groupe de 500 femmes ?

2) Au Japon, la proportion de centenaires était de 0,037 % en 2011. Quelle était la probabilité qu'il n'y ait pas eu de centenaire dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard à cette époque ?

EXERCICE N°2

De 1987 à 1993, le Tapis vert était un jeu de la Française des jeux (à l'époque appelée France Loto). Le principe était le suivant :
pour jouer, il fallait miser entre 2 et 100 francs, puis, pour chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique), choisir une carte entre le 7 et l'as.
Un tirage était ensuite effectué sous contrôle d'huissier et à la télévision.
Si le joueur avait choisi deux des cartes tirées, il gagnait deux fois sa mise, s'il avait choisi trois des cartes tirées, il gagnait trente fois sa mise, et s'il avait choisi les quatre cartes tirées, il gagnait mille fois sa mise.

Un joueur a choisi ses quatre cartes. On note X le nombre de ses cartes qui seront tirées.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent ?
3) Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.
4) Ce joueur a misé 10 francs pour un tirage. On note Y ses gains.
4.a) Quelle sont les valeurs prises par Y ?
4.b) Donner la loi de probabilité de Y .
4.c) Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.
5) Le 29 mars 1988 eut lieu un tirage particulier : les quatre as ont été tirés. Beaucoup de gens ayant parié sur cette combinaison, les gains distribués ont été très supérieurs aux mises!
Quelle était la probabilité qu'un tel tirage se produise ?

EXERCICE N°3

Une crue centennale est une crue qui a une chance sur cent de se produire chaque année. La dernière crue centennale de la Seine à Paris a eu lieu en 1910. On note X le nombre de crues centennales qui auront lieu à Paris dans le siècle à venir.

1)
1.a) Quelle loi de probabilité suit X ?
1.b) Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux crues centennales aient lieu durant le prochain siècle?
1.c) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.

2) Florian déclare « Ça fait plus de cent ans que la dernière crue centennale a eu lieu, il est de plus en plus probable que la prochaine arrive! ». A-t-il raison ?