PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°1 Démontrer l'indépendance (Le corrigé)

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note
D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?

On va utiliser la propriété n°4

On a
d'une part :

$$P(N)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(T)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad P(N)\times P(T)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

d'autre part :

$$P(N\cap T)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Ainsi $P(N\cap T)\neq P(N)\times P(T)$

On en déduit que $\boxed{N \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants}}$.

Si les événements avaient été indépendants, on aurait eu l'égalité, ce qui n'est pas le cas.

2) Que dire des événements D et N ?

On va faire la même chose.

On a
d'une part :

$$P(N)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(D)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad P(N)\times P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

d'autre part :

$$P(N\cap T)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Ainsi $P(N\cap T)=P(N)\times P(T)$

On en déduit que $\boxed{N \text{ et } D \text{ sont indépendants}}$.

On apprend ici que N et T s'influencent l'un l'autre (ils ne sont pas indépendants)
alors que N et D ne s'influencent pas l'un l'autre…
Essayez de voir cela sans faire de calcul...

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0{,}3$, $P_B(A) = 0{,}7$ et $P_A(B)=0{,}3$

.

A et B sont-ils indépendants?

On a $P_B(A) \neq P(A)$ donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,5$.

Calculer $P(A \cap B)$.

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,5$
Ainsi $\boxed{P(A \cap B) = 0,3}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°4 ***(Le corrigé)***

Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ et $P(A) = \frac{2}{3}$

Quelle valeur doit prendre $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

Pour que A et B soient indépendants, il faut et il suffit que :
$P(A \cap B) \neq 0$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc : $\frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{5}$

Ainsi $\boxed{P(B) \text{ doit prendre la valeur } \frac{3}{5}}$

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

	Externe	Demi-P	Interne	Total
Sportif	22	12	6	40
Non sportif	30	18	12	60
Total	52	30	18	100

Pensez à compléter le tableau avec les effectifs marginaux.

Notons
S « l'élève est sportif »
E « l'élève est externe »
D « l'élève est demi-pensionnaire »
I « l'élève est interne »

1) Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?

On a
▪ d'une part :
$$P(S) = \frac{40}{100} = 0{,}4 \quad \text{et} \quad P(E) = \frac{52}{100} = 0{,}52$$
donc $P(S) \times P(E) = 0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}208$
▪ et d'autre part :
$$P(S \cap E) = \frac{22}{100} \; 0{,}22$$
$$P(S \cap E) \neq P(S) \times P(E)$$
On en déduit que $\boxed{\text{les deux événements ne sont pas indépendants}}$.

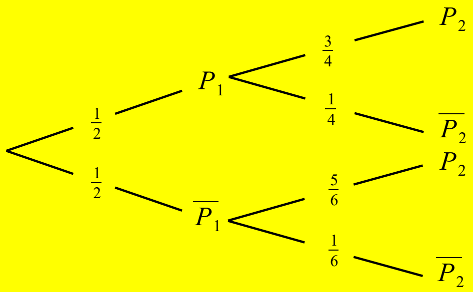
2) Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

On a
▪ d'une part :
$$P(\overline{S}) = \frac{60}{100} = 0{,}6 \quad \text{et} \quad P(D) = \frac{30}{100} = 0{,}3$$
donc $P(\overline{S}) \times P(D) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$
▪ et d'autre part :
$$P(\overline{S} \cap D) = \frac{18}{100} \; 0{,}18$$
$$P(\overline{S} \cap D) = P(\overline{S}) \times P(D)$$
On en déduit que $\boxed{\text{les deux événements sont indépendants}}$.

EXERCICE N°6

On lance deux pièces de monnaie successivement.
La première pièce est équilibrée.
La deuxième ne l'est pas et vérifie les conditions suivantes :
- Si la première pièce donne pile, la deuxième pièce donne pile trois fois sur quatre.
- Si la première pièce donne face, la deuxième pièce donne face cinq fois sur six.

Répresentons la situation :



1) Donner la probabilité d'avoir pile au 1er lancer.

Comme la pièce est bien équilibrée, la probabilité d'avoir pile au 1er lancer vaut $\boxed{\frac{1}{2}}$.

2) Calculer la probabilité d'avoir pile au 2e lancer.

D'après notre figure, il s'agît de calculer $P(P_2)$

$$P(P_2) = P(P_1)\times P_{P_1}(P_2) + P(\overline{P_1})\times P_{\overline{P_1}}(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{5}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right) = \frac{19}{24}$$

$$\boxed{P(P_2) = \frac{19}{24}}$$

3) Calculer la probabilité d'avoir deux fois pile, et en déduire que les événements :
« obtenir pile au 1er lancer » et « obtenir pile au 2e lancer » ne sont pas indépendants.

D'après notre figure :
▪ d'une part,
avoir deux fois pile est représenté par $P_1 \cap P_2$ et :

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)\times P_{P_1}(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

▪ et d'autre part,
« obtenir pile au 1er lancer » est représenté par P_1
et « obtenir pile au 2e lancer » est représenté par P_2

$$P(P_1)\times P(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{19}{24} = \frac{19}{48}$$

▪ $P(P_1 \cap P_2) \neq P(P_1)\times P(P_2)$

On en déduit que $\boxed{\text{les événements ne sont pas indépendants}}$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°1 Démontrer l'indépendance

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note
D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?
2) Que dire des événements D et N ?

EXERCICE N°2

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0,3$, $P(\overline{A}) = 0,7$ et $P_A(B)=0,3$.

A et B sont-ils indépendants?

EXERCICE N°3

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,5$.

Calculer $P(A \cap B)$.

EXERCICE N°4

Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$ et $P(A) = \dfrac{2}{3}$

Quelle valeur doit prendre $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

EXERCICE N°5

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

1) Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

EXERCICE N°6

On lance deux pièces de monnaie successivement.
La première pièce est équilibrée.
La deuxième ne l'est pas et vérifie les conditions suivantes :
- Si la première pièce donne pile, la deuxième pièce donne pile trois fois sur quatre.
- Si la première pièce donne face, la deuxième pièce donne face cinq fois sur six.

1) Donner la probabilité d'avoir pile au 1er lancer.
2) Calculer les probabilités d'avoir pile au 2e lancer.
3) Calculer la probabilité d'avoir deux fois pile, et en déduire que les événements :
« obtenir pile au 1er lancer » et « obtenir pile au 2^{e} lancer » ne sont pas indépendants.