LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°1 ***Preuve pour la fonction dérivée de*** $x \mapsto \sqrt{x}$ ***(à retenir)***

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{x+h} > 0$ et $\sqrt{x} > 0$

Donc $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} > 0$ *cqfd*

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

$$\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

Quand h tend vers zéro, $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée est $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

4) À quoi servait la question 1) ?

Nous avons été amenés à diviser par l'expression $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, il fallait donc s'assurer que cela était toujours possible.