PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

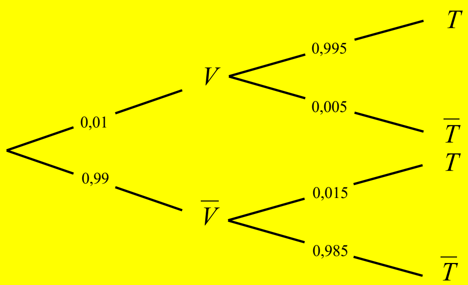
Dans une région, 1 % de la population est contaminée par un virus. On propose un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :
• 99,5 % des personnes porteuses du virus ont un test positif ;
• 98,5 % des personnes non porteuses du virus ont un test négatif.

Insistons un peu : les probabilités qui précèdent sont bien des probabilités conditionnelles :
Sachant que la personne est porteuse du virus, il y a 99,5 % que le test soit positif.
Sachant que la personne n'est pas porteuse du virus, il y a 98,5 % que le test soit négatif.
Quand on va construire l'arbre, ces probabiltés vont donc apparaître en second.

On choisit une personne de cette population au hasard et on fait lui fait passer le test. On note
V l'événement « la personne choisie est porteuse du virus » et
T l'événement « la personne choisie a un test positif».

Tous les résultats suivants seront arrondis à 10^{-4} *près.*

1) À l'aide des données de l'énoncé, modéliser la situation par un arbre de probabilités.



2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0248.

D'après l'arbre :
$P(T) = 0{,}01 \times 0{,}995 + 0{,}99 \times 0{,}015 = 0{,}0248$

3) Que peut-on dire de l'affirmation suivante : « on estime qu'une personne ayant un test positif a environ 40 % de chance d'être porteuse du virus » ? Interpréter ce résultat.

Il sagît de calculer $P_T(V)$

Pour insister encore : dans l'énoncé, on nous a donné $P_V(T)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{T})$

$$P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}995}{0{,}0248} \approx 0{,}4012 \quad \text{soit environ} \quad 40{,}12\,\%$$

L'affirmation est donc $\boxed{\text{vraie}}$.
Cela signifie qu'avec un test positif, il n'y a que 40 % de chance d'avoir réellement le virus.

4) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas porteuse du virus sachant que son test est négatif. Interpréter ce résultat.

Il sagît de calculer $P_{\overline{T}}(\overline{V})$

$$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{V})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}99 \times 0{,}985}{\underbrace{0{,}01 \times 0{,}005 + 0{,}99 \times 0{,}985}_{\text{pensez à la question 2}}} \approx 0{,}9999$$

$$\boxed{P_{\overline{T}}(\overline{V}) \approx 0{,}9999}$$

Une personne ayant un test négatif est quasi-certaine (à 99,99 %) de ne pas avoir le virus.

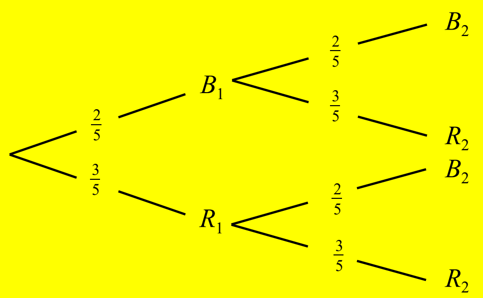
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Un sac contient deux jetons bleus et trois jetons rouges. On tire au hasard deux jetons successivement et avec remise.
On note :

B_1 l'événement « le premier jeton tiré est bleu »,
B_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est bleu »,
R_1 l'événement « le premier jeton tiré est rouge » et
R_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est rouge».

1) Construire un arbre de probabilités modélisant la situation.



2) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient bleus.

Il s'agît de calculer $P(B_1 \cap B_2)$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{4}{25}}$ (ou 0,16 ou 16%)

On suit une branche : $\cap$ pour les événements et $\times$ pour leurs probabilités

3) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient de même couleur.

Il s'agît de calculer $P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2))$

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{13}{25}}$ (ou 0,52 ou 52%)

On suit une branche : $\cap$ pour les événements et $\times$ pour les probabilités
On change de branche : $\cup$ pour les événements et $+$ pour les probabilités

4) Calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.

▪ Commençons par $P(B_2)$

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

Ainsi $\boxed{P(B_2) = \frac{2}{5}}$

▪ Terminons par $P(R_2)$

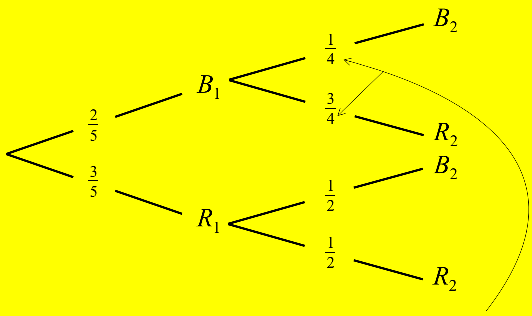
$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Ainsi $\boxed{P(R_2) = \frac{3}{5}}$

5) Reprendre toutes les questions précédentes en considérant que les tirages s'effectuent sans remise.

Nous numéroterons les questions a) b) c) et d) pour éviter toute confusion.

5.a)



Comme à présent, le tirage s'effectue sans remise, il ne reste que 4 boules au 2[e] tirage.

Pour les $\frac{1}{2}$ on a bien sûr simplifié $\frac{2}{4}$ …

5.b)

Il s'agît de calculer $P(B_1 \cap B_2)$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{1}{10}}$ (ou 0,1 ou 10%)

5.c)

Il s'agît de calculer $P((B_1 \cap B_2)\cup(R_1 \cap R_2))$

$$P((B_1 \cap B_2)\cup(R_1 \cap R_2)) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{20} + \frac{3}{10} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{2}{5}}$ (ou 0,4 ou 40%)

5.d)

▪ Commençons par $P(B_2)$

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{20} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

Ainsi $\boxed{P(B_2) = \frac{2}{5}}$

▪ Terminons par $P(R_2)$

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{6}{20} + \frac{3}{10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Ainsi $\boxed{P(R_2) = \frac{3}{5}}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

On lance simultanément un dé jaune et un dé bleu, tous les deux à six faces.
Le dé jaune possède des faces numérotées $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6$. Le dé bleu possède des faces numérotées de 1 à 6.

On note :
D l'événement « la face obtenue par le dé jaune est le nombre 2 »,
E l'événement « la face obtenue par le dé jaune est un nombre pair » et
pour tout entier k ,
$\{S=k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est égale à k », et
$\{S\geqslant k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est supérieure ou égale à k ».

bleu \ jaune	1	1	2	2	5	6
1	$(1\ ;\ 1)$	$(1\ ;\ 1)$	$(1\ ;\ 2)$	$(1\ ;\ 2)$	$(1\ ;\ 5)$	$(1\ ;\ 6)$
2	$(2\ ;\ 1)$	$(2\ ;\ 1)$	$(2\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 5)$	$(2\ ;\ 6)$
3	$(3\ ;\ 1)$	$(3\ ;\ 1)$	$(3\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 2)$	$(3\ ;\ 5)$	$(3\ ;\ 6)$
4	$(4\ ;\ 1)$	$(4\ ;\ 1)$	$(4\ ;\ 2)$	$(4\ ;\ 2)$	$(4\ ;\ 5)$	$(4\ ;\ 6)$
5	$(5\ ;\ 1)$	$(5\ ;\ 1)$	$(5\ ;\ 2)$	$(5\ ;\ 2)$	$(5\ ;\ 5)$	$(5\ ;\ 6)$
6	$(6\ ;\ 1)$	$(6\ ;\ 1)$	$(6\ ;\ 2)$	$(6\ ;\ 2)$	$(6\ ;\ 5)$	$(6\ ;\ 6)$

Il ya 36 issues.

1) Les événements D et $\{S=7\}$ sont-ils indépendants ?

▪ $D=\{(1\ ;\ 2)\ ;\ (1\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 2)\ ;\ \dots\ ;\ (6\ ;\ 2)\ ;\ (6\ ;\ 2)\}$

Ainsi $P(D)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

▪ $\{S=7\}=\{(6\ ;\ 1)\ ;\ (6\ ;\ 1)\ ;\ (5\ ;\ 2)\ ;\ (5\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 5)\ ;\ (1\ ;\ 6)\}$

Ainsi $P(\{S=7\})=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

▪ $D\cap\{S=7\}=\{(5\ ;\ 2)\ ;\ (5\ ;\ 2)\}$

Ainsi $P(D\cap\{S=7\})=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

▪ On a $P(D)\times P(\{S=7\})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$

Donc $P(D)\times P(\{S=7\})=P(D\cap\{S=7\})$ et

$\boxed{\text{les événements } D \text{ et } \{S=7\} \text{ sont indépendants}}$

2) Les événements E et $\{S\geqslant 8\}$ sont-ils indépendants?

▪ $E=\{(1\ ;\ 2)\ ;\ (1\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 2)\ ;\ \dots\ ;\ (6\ ;\ 2)\ ;\ (6\ ;\ 2)\ ;\ (1\ ;\ 6)\ ;\ \dots\ (6\ ;\ 6)\}$

Ainsi $P(E)=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$

▪ $\{S\geqslant 8\}=\{(6\ ;\ 2)\ ;\ (6\ ;\ 2)\ ;\ (3\ ;\ 5)\ ;\ (4\ ;\ 5)\ ;\ (5\ ;\ 5)\ ;\ (6\ ;\ 5)\ ;\ (2\ ;\ 6)\ ;\ (3\ ;\ 6)\ ;\ (4\ ;\ 6)\ ;\ (5\ ;\ 6)\ ;\ (6\ ;\ 6)\}$

Ainsi $P(\{S\geqslant 8\})=\dfrac{11}{36}$

▪ $E\cap\{S\geqslant 8\}=\{(6\ ;\ 2)\ ;\ (6\ ;\ 2)\ ;(2\ ;\ 6)\ ;\ (3\ ;\ 6)\ ;\ (4\ ;\ 6)\ ;\ (5\ ;\ 6)\ ;\ (6\ ;\ 6)\}$

Ainsi $P(E\cap\{S\geqslant 8\})=\dfrac{7}{36}$

▪ On a $P(E)\times P(\{S\geqslant 8\})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11}{36}=\dfrac{11}{72}$

Donc $P(E)\times P(\{S\geqslant 8\})\neq P(E\cap\{S\geqslant 8\})$ et

$\boxed{\text{les événements } E \text{ et } \{S\geqslant 8\} \text{ ne sont pas indépendants}}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1

Dans une région, 1 % de la population est contaminée par un virus. On propose un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :
• 99,5 % des personnes porteuses du virus ont un test positif ;
• 98,5 % des personnes non porteuses du virus ont un test négatif.

On choisit une personne de cette population au hasard et on fait lui fait passer le test. On note
V l'événement « la personne choisie est porteuse du virus » et
T l'événement « la personne choisie a un test positif».

Tous les résultats suivants seront arrondis à 10^{-4} *près.*

1) À l'aide des données de l'énoncé, modéliser la situation par un arbre de probabilités.
2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0248.
3) Que peut-on dire de l'affirmation suivante : « on estime e personne ayant un test positif a environ 40 % de :es d'être porteuse du virus » ? Interpréter ce résultat.
4) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas porteuse du virus sachant que son test est négatif. Interpréter ce résultat.

EXERCICE N°2

Un sac contient deux jetons bleus et trois jetons rouges. On tire au hasard deux jetons successivement et avec remise.
On note :
B_1 l'événement « le premier jeton tiré est bleu »,
B_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est bleu »,
R_1 l'événement « le premier jeton tiré est rouge » et
R_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est rouge».

1) Construire un arbre de probabilités modélisant la situation.
2) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient bleus.
3) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient de même couleur.
4) Calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.

5) Reprendre toutes les questions précédentes en considérant que les tirages s'effectuent sans remise.

EXERCICE N°3

On lance simultanément un dé jaune et un dé bleu, tous les deux à six faces.
Le dé jaune possède des faces numérotées $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6$. Le dé bleu possède des faces numérotées de 1 à 6.

On note :
D l'événement « la face obtenue par le dé jaune est le nombre 2 »,
E l'événement « la face obtenue par le dé jaune est un nombre pair » et
pour tout entier k ,
$\{S=k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est égale à k », et
$\{S\geqslant k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est supérieure ou égale à k ».

1) Les événements D et $\{S=7\}$ sont-ils indépendants ?
2) Les événements E et $\{S\geqslant 8\}$ sont-ils indépendants?