PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Ce que l'on sait déjà

Définition n°1. ***Expérience aléatoire, issue,univers***

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience qui, renouvelée dans les mêmes conditions, ne donne pas à chaque essai les même résultats. Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont appelées les **issues**. L'ensemble des issues est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.
On notera Ω cet univers.

Remarque n°1.

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, Ω est fini. Autrement dit, il y a un nombre fini d'issues pour l'expérience aléatoire considérée.

Définition n°2. ***Événement élémentaires, événement, événement contraire***

Les issues sont aussi appelées événements élémentaires. Un événement A est un ensemble composé d'issues. L'événement contraire de A peut être noté $\overline{A}$, A^c , $\Omega \setminus A \dots$ (nous n'utiliserons que la première), c'est l'ensemble composé de toutes les issues qui ne sont pas dans A .
L'ensemble de tous les événements contenus dans Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition n°3. ***Probabilité***

Une probabilité est une application P de l'ensemble des parties de l'univers $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0\ ,\ 1]$ telle que la somme des probabilités des issues vaut 1. (attention les deux « P » sont différents)

Remarque n°2. ***Événement impossible, événement certain, événements incompatibles***

- L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est appelé événement impossible : $P(\emptyset) = 0$.
- L'ensemble Ω est appelé événement certain : $P(\Omega) = 1$.
- Si A et B deux événements sont tels que $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont incompatibles et dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

Exemple n°1. ***Le dé cubique (non pipé)***

Quand on jette un dé cubique et que l'on relève le nombre inscrit sur la face du dessus, on réalise une expérience aléatoire. Les issues sont alors $1,2,3,4,5$ et 6 et l'univers est donc $\Omega = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\}$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est composé des issues $2\ ,\ 4$ et 6 . On a donc $A = \{2\ ,\ 4\ ,\ 6\}$ et $\overline{A} = \{1\ ,\ 3\ ,\ 5\}$.

Comme le dé est non pipé : $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

(A est bien un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $P(A)$ appartient bien à $[0\ ,\ 1]$)

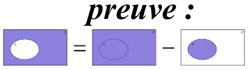
Remarque n°3.

Dans toute la suite de cours, Ω désignera l'univers et P la probabilité.

Propriété n°1. ***Probabilité de l'événement contraire***

Soit A un événement alors $\boxed{P(\overline{A}) = 1-P(A)}$

preuve :



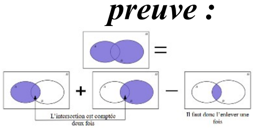
A s'écrit à l'aide certaines issues et $\overline{A}$ à l'aide de toutes les autres.
Donc $P(A)+P(\overline{A}) = 1$ d'après la définition n°3, et en soustrayant $P(A)$ à chaque membre, on obtient bien $P(\overline{A}) = 1-P(A)$. *cqfd*

Propriété n°2. ***Formule du crible (ou de Poincaré)***

Soit A et B deux événements alors

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)}$$

preuve :



$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap \overline{B})+P(A \cap B)+P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A)-P(A \cap B)+P(A \cap B)+P(B)-P(A \cap B) \\ &= P(A)+P(B)-P(A \cap B) \end{aligned}$$

cqfd

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E01

EXERCICE N°1 Remise en forme n°1

Dans son garage, Julien range des bidons et des bouteilles, qui peuvent être avec ou sans étiquette, selon la répartition ci-après :

	Bidon	Bouteille	Total
Avec étiquette	2	9	11
Sans étiquette	6	3	9
Total	8	12	20

Il prend un de ses récipients au hasard et on considère les événements :
A : « Le récipient a une étiquette. »
D : « Le récipient est un bidon. »
1) Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(D)$.
2) Décrire chacun des événements $A \cap D$, $A \cup D$, $\overline{A} \cap D$, par une phrase et donner sa probabilité.
3) Écrire l'événement « Le récipient est une Bouteille sans étiquette » à l'aide des événements A et D.
4) Associer les événements suivants à la valeur qui correspond :

Probabilité qu'une bouteille ait une étiquette.	▪	▪	$\frac{9}{20}$
Probabilité qu'un récipient avec étiquette est une bouteille.	▪	▪	$\frac{9}{11}$
Probabilité qu'un récipient soit une bouteille avec étiquette.	▪	▪	$\frac{9}{12}$

EXERCICE N°2 Remise en forme n°2

On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3.
On tire un jeton dans cette urne puis **on le remet dans l'urne** et on en tire un second : le résultat de l'expérience aléatoire est le produit des deux nombres obtenus.

1) Représenter cette expérience aléatoire par un arbre puis par un tableau.
2) Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
3) Quelle est la probabilité que le résultat de cette expérience aléatoire soit pair ?

EXERCICE N°3 Remise en forme n°3

Dans un parc d'attractions, à un manège, le temps d'attente annoncé est 5 , 10 , 15 et 20 minutes avec les probabilités suivantes :

Temps d'attente (en min)	5	10	15	20
Probabilité	0,3	0,1	0,15	

1) Déterminer la probabilité d'attendre 20 minutes.

2) Déterminer la probabilité d'attendre au plus 10 minutes.

3) Déterminer la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.

4) Déterminer la probabilité d'attendre au moins 10 minutes.

5) Déterminer la probabilité d'attendre moins de 10 minutes.

II Qu'est-ce-qu'une probabilité conditionnelle ?

Définition n°4. Probabilité de A sachant B

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
La probabilité de A sachant B se note $P_B(A)$ et on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propriété n°3. Probabilité de A sachant B en cas d'équiprobabilité

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
Dans le cadre d'une situation **d'équiprobabilité** :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}}$$

Remarque n°4. Cardinal d'un ensemble fini

Soit A un ensemble fini, on appelle cardinal de A et on note $Card(A)$ le nombre d'éléments appartenant à A.

preuve :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}}{\dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} \times \frac{Card(\Omega)}{Card(B)} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E02

EXERCICE N°1 Avec la définition

(Calculatrice non nécessaire mais autorisée)

Dans un univers Ω , on considère deux événements A et B .

1) On donne $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.
Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

2) On donne $P_A(B) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.
Déterminer $P(A)$ et $P_B(A)$.

3) On donne $P_B(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}15$ et $P(A) = 0{,}45$.
Déterminer $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E02

EXERCICE N°2 ***Avec la propriété en cas d'équiprobabilité***

(Calculatrice non nécessaire mais autorisée)

Dans un univers Ω , on considère deux événements A et B .

1) On donne $Card(\Omega) = 50$, $Card(A) = 30$, $Card(B) = 15$ et $Card(A \cap B) = 12$
Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

2) On donne $Card(\Omega) = 50$, $P_A(B) = 0{,}525$, $Card(B) = 40$ et
$Card(A \cap B) = 21$.
3)
Déterminer $Card(A)$, $P(A)$ et enfin $P_B(A)$.

4) On donne $P_B(A) = 0{,}2$, $Card(B) = 105$ et $Card(A) = 70$.
Déterminer $Card(A \cap B)$ et $P_A(B)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Méthode n°1. ***Déterminer une probabilité conditionnelle avec un tableau croisé.***

Énoncé

Dans une classe de première de 35 élèves, on a étudié deux caractères :
La réussite et le travail à la maison.
Le résultat de cette étude est présenté dans le tableau suivant :

	R	$\overline{R}$	Total
T	**19** $Card(T \cap R)$	**6** $Card(T \cap \overline{R})$	**25** $Card(T)$
$\overline{T}$	3 $Card(\overline{T} \cap R)$	7 $Card(\overline{T} \cap \overline{R})$	10 $Card(\overline{T})$
Total	22 $Card(R)$	**13** $Card(\overline{R})$	35 $Card(\Omega)$

Situation d'équiprobabilité car

On choisit un élève au hasard dans cette classe.
On note les événements :
R : « L'élève est en situation de réussite »
T : « L'élève travaille à la maison »
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1) Déterminer $P_T(R)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

2) Déterminer la probabilité qu'un élève travaille sachant qu'il ne réussit pas.

Réponse

1) $P_T(R) = \dfrac{Card(R \cap T)}{Card(T)} = \dfrac{19}{25}$

Ce qui nous permet d'utiliser la propriété n°3

Cela signifie, que la probabilité qu'un élève réussisse sachant qu'il travaille vaut $\dfrac{19}{25}$.

2) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(T)$

$$P_{\overline{T}}(R) = \frac{Card(T \cap \overline{R})}{Card(\overline{R})} = \frac{6}{13}$$

Ainsi la probabilité qu'un élève travaille sachant qu'il ne réussit pas vaut $\dfrac{6}{13}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E02

EXERCICE N°3 Avec un tableau en cas d'équiprobabilité

(Calculatrice non nécessaire mais autorisée)

Inspiré du sésamath 1er Spé

Dans une boulangerie, on dispose d'une réduction si l'on choisit la formule « dessert mystère » pour laquelle le dessert accompagnant le menu est tiré au hasard.
Gérard choisit cette formule alors que les desserts encore disponibles sont répartis comme suit.

	Chocolat	Vanille	Total
Tartelette	8	11	19
Éclair	13	7	20
Total	21	18	39

On considère les événements E : « Son dessert est un éclair » et V : « Son dessert est à la vanille ».

1) Calculer $P_E(V)$, $P_V(E)$, $P_{\overline{E}}(V)$.

2) Gérard voit que son dessert est un éclair. Écrire la probabilité qu'il soit au chocolat comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

Remarque n°5.

On pourrait se demander si ces événements dépendent l'un de l'autre ou pas…
Mais au fait qu'est-ce que cela veut dire ?

III Indépendance de deux événements

Définition n°5. Événements indépendants

Soient A et B deux événements.
On dira que A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété n°4. Autre façon de vérifier l'indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements de **probabilité non nulle**.
A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

preuve :

▪ Soient A et B deux événements de **probabilité non nulle**.
▪ A et B sont indépendants équivaut à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
▪ Comme $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, en divisant chaque membre de l'égalité par $P(A)$ on obtient :

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ c'est à dire : $P_A(B) = P(B)$

▪ et en divisant chaque membre de la (toute) première égalité par $P(B)$, on obtient :

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ c'est à dire : $P_B(A) = P(A)$ *cqfd*

Remarque n°6.

On a obtenu trois caractérisations de l'indépendance de deux événements et donc dès que l'une est vérifiée, les autres le sont ou aussi et si l'une n'est pas vérifiée, les autres ne le sont pas non plus. On choisit, par conséquent, la plus pratique selon la situation.

Méthode n°2. ***Tester l'indépendance de deux événements.***

	R	$\overline{R}$	Total
T	**19** $Card(T \cap R)$	**6** $Card(T \cap \overline{R})$	**25** $Card(T)$
$\overline{T}$	3 $Card(\overline{T} \cap R)$	7 $Card(\overline{T} \cap \overline{R})$	10 $Card(\overline{T})$
Total	22 $Card(R)$	**13** $Card(\overline{R})$	35 $Card(\Omega)$

On se pose la question : Est-ce-que le fait de travailler influence ou non la réussite (ce qui équivaut à se demander si le fait de réussir influence ou non le fait de travailler). Autrement dit : Les événements T et R sont-ils indépendants ?

On va vérifier si $P_T(R) = P(R)$

$P_T(R) = \dfrac{19}{25}$ (d'après la question 1) et $P(R) = \dfrac{22}{35}$

Ainsi $P_T(R) \neq P(R)$ ce qui signifie que :

T et R ne sont pas indépendants (*je vous laisse en tirer vos conclusions*…)

(*On nuancera vos conclusions en exercices...*)

Remarque n°7.

Ici, on aurait pu choisir choisir n'importe qu'elle caractérisation mais comme $P_T(R)$ était déjà connu, on a gagné un peu de temps.

Remarque n°8.

Hé oui, cela peut paraître étrange, mais on préfère dire « pas indépendants » plutôt que « dépendants ». Cela permet sûrement de se rappeler que la propriété que l'on utilise permet de tester l'indépendance et pas la dépendance…

Remarque n°9. ***Ne pas confondre indépendance et incompatibilité***

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

« A et B indépendants » signifie que $P_A(B) = P(B)$ donc que le fait de connaître A ne donne donc aucune information sur B.

alors que :

« A et B incompatibles » signifie que $A \cap B = \emptyset$ c'est à dire que si A est réalisé alors B ne peut pas l'être. Ici le fait de connaître A donne beaucoup d'information sur B.

On comprend même ici que des événements indépendants ne peuvent pas être incompatibles et vice et versa…

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03

EXERCICE N°1 Appréhender la définition et la propriété

Soients Ω un univers et A et B deux événements de probabilité non nulle.

Dans chaque cas vérifier l'indépendance de A et B .

1) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$.

2) $P_A(B) = 0{,}3$ $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}15$.

3) $P(A) = 0{,}2$ $P(B) = 0{,}6$ $P(A \cup B) = 0{,}68$.

4) $P(\overline{A}) = 0{,}7$ $P(\overline{B}) = 0{,}8$ $P(A \cap B) = 0{,}06$.

EXERCICE N°2 **Démontrer l'indépendance**

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note

D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?

2) Que dire des événements D et N ?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03

EXERCICE N°3 Indépendance vs incompatibilité

Soient Ω un univers et A et B deux événements tels que : $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}3$.

1) Calculer les probabilités de $A \cap B$ et $A \cup B$ si A et B sont indépendants.

2) Calculer les probabilités de $A \cap B$ et $A \cup B$ si A et B sont incompatibles.

Probabilités conditionnelles E03

EXERCICE N°4 Des questions à se poser...

Soient Ω un univers et A et B deux événements de probabilité non nulle.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1) L'événement A et son événement contraire $\overline{A}$ sont indépendants.

2) Si A et B sont indépendants alors A et B ne sont pas incompatibles.

3) Si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P_B(A)$.

4) Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

EXERCICE N°5 Réussite et/ou travail

Dans une classe de première de 35 élèves, on a étudié deux caractères :

La réussite et le travail à la maison. Le résultat de cette étude est présenté dans le tableau suivant :

	R	$\overline{R}$	Total
T	12	9	21
$\overline{T}$	8	6	14
Total	20	15	35

On choisit un élève au hasard dans cette classe. On note les événements :

R : « L'élève est en situation de réussite »

T : « L'élève travaille à la maison »

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1) Déterminer $P(R)$ et $P_T(R)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ces résultats.

2) Dans ce contexte, le fait de travailler influence-t-il le fait de réussir ?

3) Dans ce contexte, le fait de ne pas travailler influence-t'il le fait de ne pas réussir ?

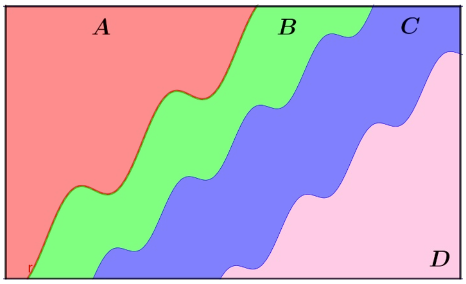
IV Arbre pondéré

Définition n°6. ***Partition***

Un univers Ω étant donné, on appelle partition de Ω toute collection finie de parties non vides de Ω qui vérifient :
- La réunion de ces parties égale Ω
- Ces parties sont deux à deux disjointes.

Exemple n°2.

L'univers Ω est représenté par le rectangle. Dans cet univers, les parties A, B, C et D sont bien disjointes et leur réunion égale Ω : elles forment donc bien une partition de Ω .



Définition n°7. ***Partition (version « technique »)***

Soit Ω un univers, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de probabilité non nulle. Ces événements forment une partition de Ω si et seulement si :
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$
- $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Remarque n°10.

- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

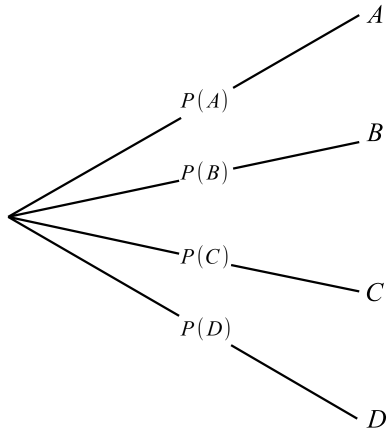
Dans l'exemple n°2, $n = 4$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ et $A_4 = D$

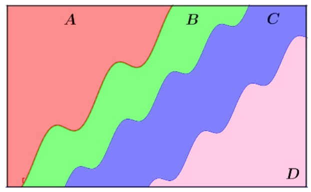
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Connaissance n°1 ***Un arbre pondéré très simple***

Supposons à présent, une expérience aléatoire dont l'univers est celui de l'exemple n°2. N'importe quelle issue appartient soit à l'événement A , soit à B soit à C soit à D (car on a une partition de l'univers).

On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.





On peut choisir A avec la probabilité $P(A)$, B avec la probabilité $P(B)$ etc.… jusque D .

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(\Omega) = 1$$

Définition n°8. ***Vocabulaire sur les arbres (première partie)***

Le point de départ de tous les segments s'appelle un nœud , les segments s'appellent des branches.

Propriété n°5.

Dans un arbre pondéré, à chaque nœud, la somme des probabilités des branches vaut 1.

preuve :

Un nœud représente le choix entre les différents éléments d'une partition.
D'une part, par définition ces derniers sont incompatibles entre eux et donc la probabilité de leur union égale la somme de leurs probabilités respectives. D'autres part leur union égale Ω et comme $P(\Omega) = 1$, la propriété est démontrée.

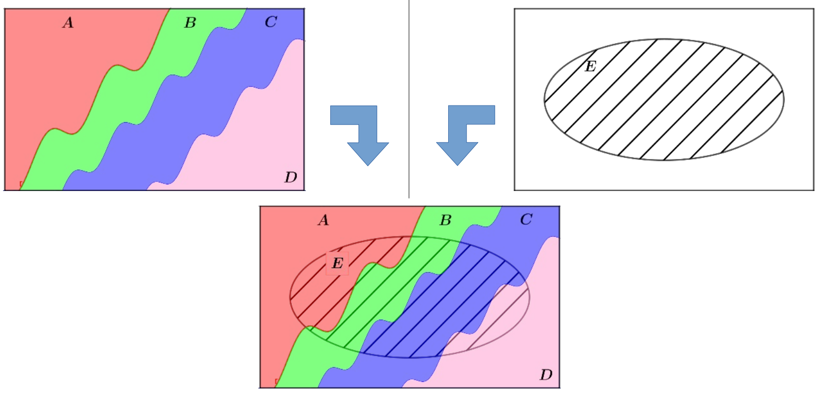
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Connaissance n°2 ***Deux arbres pondérés pour un même diagramme***

Nous considérons à présent deux partitions d'un même univers que nous « superposons » :

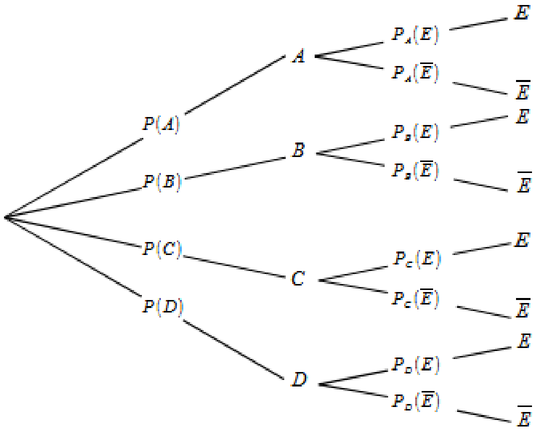
A, B, C et D forment une *partition n°1* de l'univers Ω .

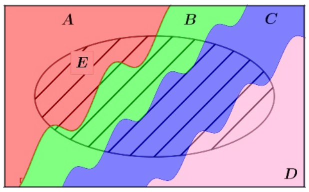
E et $\overline{E}$ forment une *partition n°2* de l'univers Ω .

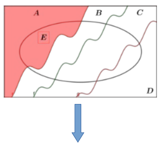


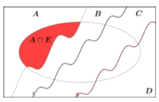
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si on considère en premier la partition n°1 alors on peut réaliser l'événement E sachant que A est réalisé, on peut réaliser E sachant que B est réalisé etc.… jusque D







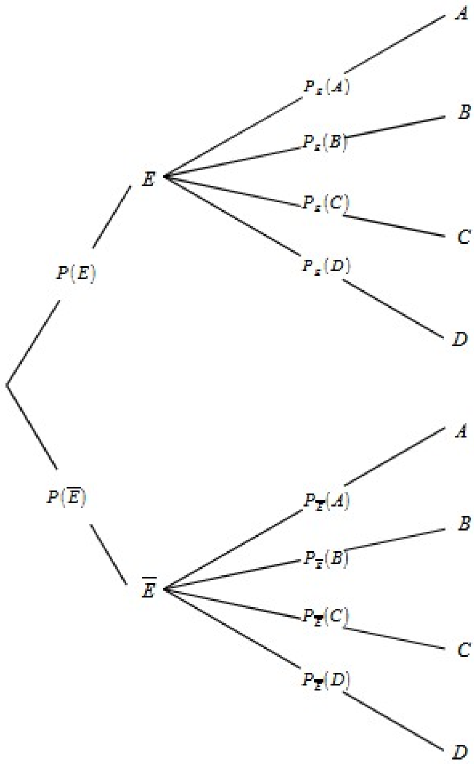


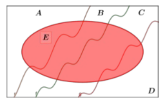
Si on suit la branche A puis la branche E alors on réalise l'événement $A \cap E$.
Or :

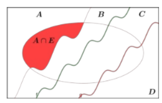
$$P(A)\times P_A(E) = P(A)\times\frac{P(A \cap E)}{P(A)} = P(A \cap E)$$

En suivant le chemin, on a multiplié les probabilités des branches.

Si on considère la partition n°2 en premier alors on peut réaliser l'événement A sachant que l'événement E est réalisé ou sachant qu'il n'est pas réalisé ($\overline{E}$), etc.… jusque D







Si on suit la branche E puis la branche A alors on réalise l'événement $A \cap E$.
Or :

$$P(E)\times P_E(A) = P(E)\times\frac{P(A \cap E)}{P(E)} = P(A \cap E)$$

En suivant le chemin, on a multiplié les probabilités des branches.

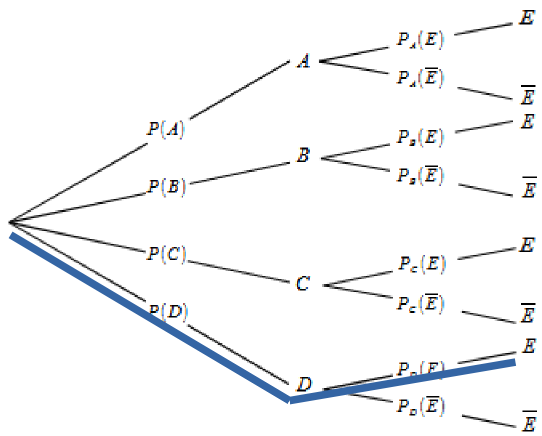
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition n°9. ***Vocabulaire sur les arbres (seconde partie)***

Une succession de branches de la racine de l'arbre jusqu'à un « événement final » s'appelle un chemin.

Méthode n°3.

Pour déterminer la probabilité d'une chemin, il suffit de multiplier les probabilités des branches qui le composent.



PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Propriété n°6. ***Formule des probabilités totales (admise)***

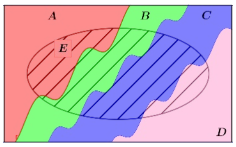
Soit Ω un univers, soit B un événement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$$

c'est à dire :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Remarque n°11. ***Une idée de la preuve pour n = 4***



Comme A, B, C et D forment une partition de l'univers on a , grâce à la connaissance n°2 :

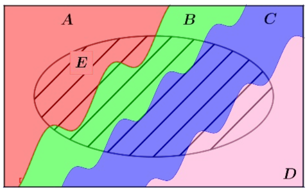
$$P(E) = \underbrace{P(E \cap A)}_{P(A) \times P_A(E)} + \underbrace{P(E \cap B)}_{P(B) \times P_B(E)} + \underbrace{P(E \cap C)}_{P(C) \times P_C(E)} + \underbrace{P(E \cap D)}_{P(D) \times P_A(D)}$$

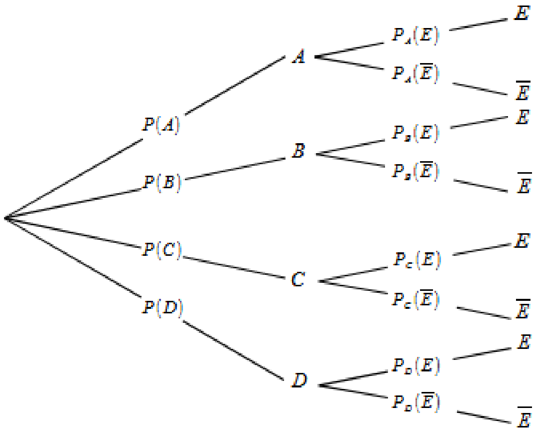
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Méthode n°4. ***Formule des probabilités totales et arbre pondérés***

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.

Exemple n°3.





$$P(E) = P(A)\times P_A(E) + P(B)\times P_B(E) + P(C)\times P_C(E) + P(D)\times P_A(D)$$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E04

EXERCICE N°1 Échauffement

Soient Ω un univers et A et B deux événements.

1) Compléter l'arbre ci-contre.

2) Calculer les probabilités suivantes :

2.a) $P(A \cap B)$.

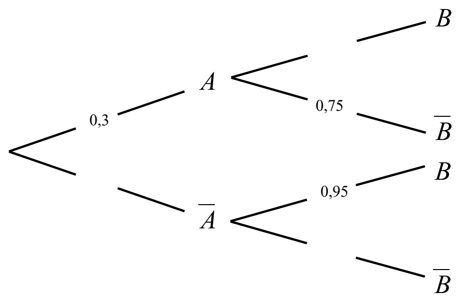
2.b) $P(A \cap \overline{B})$.

2.c) $P(\overline{A} \cap B)$.

2.d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

2.e) $P(B)$.

2.f) $P(\overline{B})$.



EXERCICE N°2 Utiliser un arbre pondéré

Le matin, Géraldine boit du café avec une probabilité $\frac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{5}{12}$.

Lorsqu'elle boit du café, elle y met du sucre la moitié du temps alors que quand elle boit du thé, elle y met du sucre $90\ \%$ du temps.

On appelle :

C l'événement : « elle boit du café ce matin »,

T l'événement : « elle boit du thé ce matin » et

S l'événement : « elle met du sucre dans sa boisson ce matin ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité qu'elle boive un café sucré ce matin ?

3) Déterminer la probabilité qu'elle ne mette pas de sucre dans sa boisson ce matin.

EXERCICE N°3 Un rangement particulier

Émile a rangé les chaussettes de son père dans deux tiroirs. Il a mis 5 chaussettes noires, 3 chaussettes grises et 2 chaussettes blanches dans un tiroir, et 7 chaussettes noires et 3 chaussettes grises dans l'autre. Son père choisit au hasard une chaussette dans chaque tiroir.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité p_1 que le père ait une chaussette blanche et une chaussette noire?

3) Quelle est la probabilité p_2 que le père ait des chaussettes assorties ?

4) Quelle est la probabilité p_3 que le père ait au moins une chaussette noire ?

Probabilités conditionnelles E04

EXERCICE N°4 Tennis

(*Calculatrice autorisée*)

Sur l'ensemble d'un tournoi de tennis, un joueur a réussi 426 des 659 premiers services et 92,7 % de ses seconds services.

On choisit un service de joueur au hasard et on note :

R_1 : « Le joueur a réussi réussi son premier service »
R_2 : « Le joueur a réussi réussi son second service »

1) Construire un arbre de probabilités représentant la situation.

2) Calculer la probabilité que le joueur ait commis une double faute ce jour-là.
(Arrondir à 10^{-4} *, puis donner la probabilité sous forme de pourcentage)*

V Succession de deux épreuves indépendantes

Remarque n°12.

Nous ne ferons pas de distinction entre « expérience aléatoire » et « épreuve », les deux étant surtout utilisés comme synonymes afin d'éviter les répétitions…

Définition n°10.

Quand on réalise deux expériences aléatoires l'une après l'autre et que les résultats de l'une n'influencent pas ceux de l'autre, on dit qu'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exemple n°4.

On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

▪ Épreuve n°1 :

On lance une pièce de monnaie truquée de façon à obtenir Pile deux fois plus souvent que Face et on note le côté obtenu.

On note :

P : « Obtenir Pile » et

F : « Obtenir Face »

Son univers est alors : $\Omega_1=\{P \; ; \; F\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°1			
Issue	P	F	Total
Probabilité	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

▪ Épreuve n°2 :

On tire une boule dans une urne contenant 5 boules Noires, 3 boules Rouges et 2 boules Blanches et on note la couleur obtenue.

On note :

N : « La boule tirée est Noire » ;

R : « La boule tirée est Rouge » et

B : « La boule tirée est Blanche »

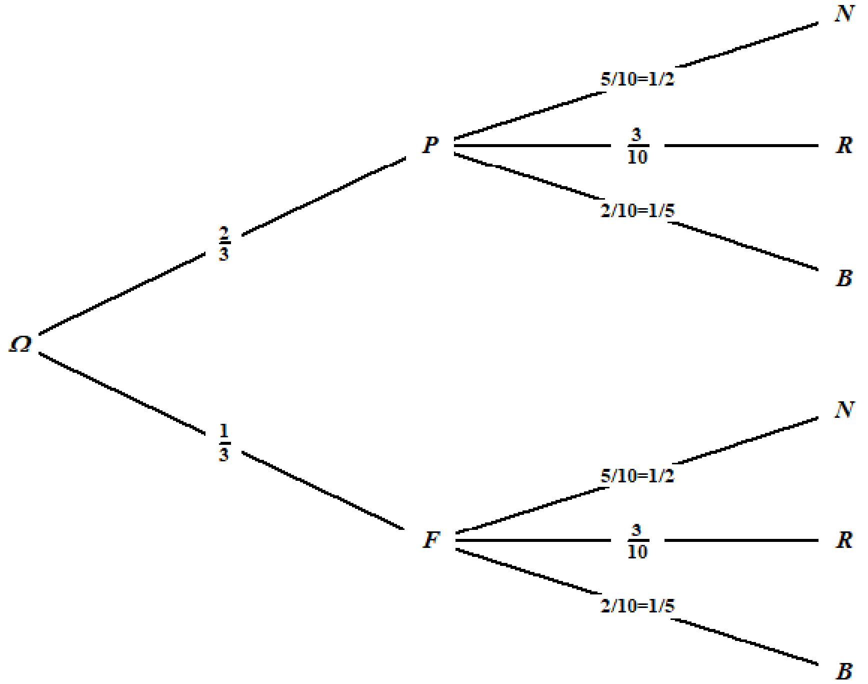
Son univers est alors : $\Omega_2=\{N \; ; \; R \; ; \; B\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°2				
Issue	N	R	B	Total
Probabilité	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	1

Nos deux épreuves sont clairement indépendantes.
Nous allons à présent en construire une troisième à partir de ces deux là.
On enchaîne l'épreuve n°1 et n°2.
On obtient alors notre succession de deux épreuves indépendantes.
Son univers est alors :

$$\Omega=\{(P,N) \; ; (P,R) \; ; (P,B) \; ; (F,N) \; ; (F,R) \; ; (F,B)\}$$

Pour déterminer sa loi de probabilité, on va utiliser un arbre pondéré.



$$p((P,N))=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$p((P,R))=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$$

$$p((P,B))=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

$$p((F,N))=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$p((F,R))=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

$$p((F,B))=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

Loi de probabilité de l'expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes							
Issue	(P,N)	(P,R)	(P,B)	(F,N)	(F,R)	(F,B)	Total
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	1
	$\frac{10}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{30}{30}$

VI Le résumé du cours

(Le paragraphe I doit bien sûr être connu, on résume ce qui est nouveau)

Probabilité conditionnelle de A sachant B

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
La probabilité de A sachant B se note $P_B(A)$ et on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle de A sachant B pour les tableaux croisés.

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
Dans le cadre d'une situation **d'équiprobabilité** :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}}$$

$$P_T(R) = \frac{Card(R \cap T)}{Card(T)} = \frac{19}{25}$$

$$P_{\overline{T}}(R) = \frac{Card(T \cap \overline{R})}{Card(\overline{R})} = \frac{6}{13}$$

	R	$\overline{R}$	Total
T	**19** $Card(T \cap R)$	**6** $Card(T \cap \overline{R})$	**25** $Card(T)$
$\overline{T}$	3 $Card(\overline{T} \cap R)$	7 $Card(\overline{T} \cap \overline{R})$	10 $Card(\overline{T})$
Total	22 $Card(R)$	**13** $Card(\overline{R})$	35 $Card(\Omega)$

Indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements.
On dira que A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ne pas confondre Indépendants et Incompatibles

Les notions d'indépendance et d'incompatibilité n'ont rien avoir l'une avec l'autre.

Comment tester l'indépendance de deux événements

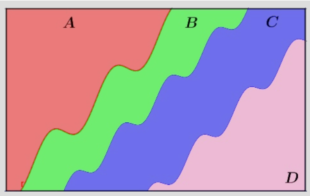
Si de plus A et B sont de **probabilité non nulle** alors
Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont **indépendants**
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

Partition de l'univers

Un univers Ω étant donné, on appelle partition de Ω toute collection finie de parties non vides de Ω qui vérifient :

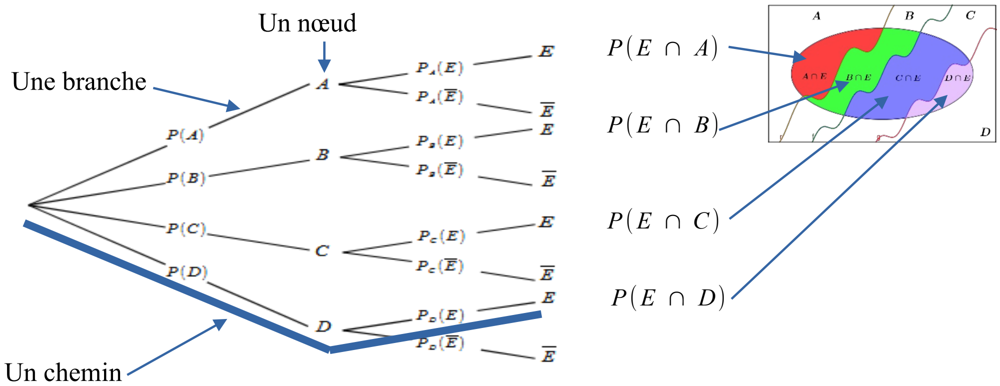
- La réunion de ces parties égale Ω
- Ces parties sont deux à deux disjointes.



A, B, C et D forment une partition de l'univers

Il faudra connaître la définition technique l'année prochaine...

Arbre pondéré (ou de probabilités)



Les règles sur les arbres pondérés

▪ La somme des probabilités des branches d'un nœud vaut toujours 1.

$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1$, $P_A(E)+P_A(\overline{E}) = 1$, ….

▪ Quand on suit un chemin, on multiplie les probabilités des branches.

$P(D)\times P_D(E) = P(A \cap E)$

▪ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.

$P(E) = P(A)\times P_A(E) + P(B)\times P_B(E) + P(C)\times P_C(E) + P(D)\times P_A(D)$

Grâce à

Formules des probabilités totales

Soit Ω un univers, soit B un événement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω , alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\times P_{A_k}(B)$$

c'est à dire :

$$P(B) = P(A_1)\times P_{A_1}(B) + P(A_2)\times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)\times P_{A_n}(B)$$