

VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Une crue centennale est une crue qui a une chance sur cent de se produire chaque année. La dernière crue centennale de la Seine à Paris a eu lieu en 1910. On note X le nombre de crues centennales qui auront lieu à Paris dans le siècle à venir.

1)

1.a) Quelle loi de probabilité suit X ?

Chaque année, il y a une chance sur 100 qu'apparaisse une crue centennale : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0,01$ où le succès est la survenue de la crue.

Cette épreuve est répétée de manière indépendante chaque année pendant un siècle. On obtient ainsi un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètre $n=100$ et $p=0,01$

1.b) Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux crues centennales aient lieu durant le prochain siècle?

Il s'agit de calculer $P(X \geq 2)$

On pourrait calculer $P(X=2)$; $P(X=3)$ et $P(X=4)$ puis les additionner... mais on n'aime pas faire les calculs. On va donc calculer la probabilité de l'événement contraire qui demande (beaucoup) moins de travail.

$$P(X \geq 2) = 1 - \underbrace{P(X < 2)}_{\text{On ne prend pas 2}} = 1 - \underbrace{P(X \leq 1)}_{\substack{\text{il suffit donc} \\ \text{d'aller jusque 1}}}$$

Or : $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$

$$P(X=0) = \binom{100}{0} \times \left(\frac{1}{100}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100-0}$$

et

$$P(X=1) = \binom{100}{1} \times \left(\frac{1}{100}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100-1}$$

Ainsi $P(X \geq 2) \approx 0,26$

1.c) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 100 \times \frac{1}{100}$$

Ainsi $E(X) = 1$

Cela signifie que, sur une période de 100 ans on peut espérer avoir 1 crue.

2) Florian déclare « Ça fait plus de cent ans que la dernière crue centennale a eu lieu, il est de plus en plus probable que la prochaine arrive! ». A-t-il raison ?

Chaque année la probabilité d'une crue centennale est de 1 % indépendamment des années précédentes.

Il a donc tort .