CALCUL LITTÉRAL

I Développer et réduire une expression

Définition n°1.

Développer c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Remarque n°1.

Réduire une expression, c'est « regrouper les termes semblables » et faire les calculs

Exemple n°1.

$(2x+3)(x-4)$	$=$	$2x^2-8x+3x-12$	$=$	$2x^2-5x-12$
produit	➔	somme	➔	expression réduite

I.1 La distributivité

Dans toute la suite de ce chapitre, a , b , c , d et k sont des nombres.

Propriété n°1. ***Simple distributivité***

$\boxed{k(a+b)=ka+kb}$ et $\boxed{k(a-b)=ka-kb}$

Exemple n°2.

$3x(7+2x)=21x+6\ x^2$ et $3x(7-2x)=21x-6\ x^2$

Remarque n°2.

$(7+2x)\times 3x\ =\ 3x(7+2x)$

Propriété n°2. ***Double distributivité***

$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$

Remarque n°3.

On n'oublie pas d'appliquer la règle des signes.

Méthode n°1.

$(2x+3)(x-4)$ L1

$=(+2x)\times(+x)+(+2x)\times(-4)+(+3)\times(+x)+(+3)\times(-4)$ L2

$=2\times x-2x\times 4+3\times x-3\times 4$ L3

$=2x^2-8x+3x-12$ L4

$=2x^2-5x-12$ L5

L2 ne s'écrit pas mais sert à trouver les signes de L3 en se rappelant que chaque flèche représente une multiplication. Il suffit d'appliquer la règle des signes au fur et à mesure.
L3 n'est pas nécessaire sur une copie (loin de là)
Pour résumer L2 et L3 sont des étapes mentales et seules L1 L4 et L5 sont à écrire.

Remarque n°4. .

Si il y a plus de termes dans les parenthèses, il suffit d'ajouter assez de flèches que ce soit dans la propriété n°1 ou dans la n°2.

Exercice n°1.

Développer et réduire :
$A=-2x(7-3x)$; $B=(4x-3)(5-3x)$ et $C=(2x+3y)(4-2z)$

I.2 Les identités remarquables

Propriété n°3. ***1re identité remarquable***

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

preuve : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

Exemple n°3.

$$(8+3x)^2=8^2+2\times8\times3x+(3x)^2=64+48x+9x^2=9x^2+48x+64$$

Remarque n°5.

Il est de coutume d'ordonner selon les puissances décroissantes de l'inconnue.

Propriété n°4. ***2e identité remarquable***

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

preuve : $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

Exemple n°4.

$$(8-3x)^2=8^2-2\times8\times3x+(3x)^2=64-48x+9x^2=9x^2-48x+64$$

Propriété n°5. ***3e identité remarquable***

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

preuve : $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Exemple n°5.

$$(8-3x)(8+3x)=8^2+(3x)^2=64-9x^2=-9x^2+64$$

Exercice n°2.

Développer et réduire :

$D=(1{,}5x+2)^2$; $E=(3x-2y)^2$; $F=(2x-1)(2x+1)$

Méthode n°2. ***Développer une expression « plus complexe »***

Développons et réduisons l'expression *G*.

$G=4(3x+2)^2-(x+2)(7-3x)$ L1

$G=4(9x^2+12x+4)-(7x-3x^2+14-6x)$ L2

$G=36x^2+48x+16-7x+3x^2-14+6x$ L3

$G=39x^2+47x+2$ L4

Dans L1, on identifie les produits à développer

Dans L2, on développe ces produits entre parenthèses (ou entre crochets).

Dans L3, on a distribué le facteur 4 sur la première expression entre parenthèses et on a écrit l'opposé de la seconde expression entre parenthèses (on a changé tous les signes à l'intérieur des parenthèses puis on a supprimé les parenthèses ainsi que le signe – qui était devant).

Dans L4, on a réduit l'expression (et on l'a ordonnée selon les puissances décroissantes de l'inconnue)

II Factoriser une expression

L'idée est d'utiliser les propriétés du paragraphe précédent « dans l'autre sens ».

Définition n°2.

Factoriser, c'est transformer une somme (algébrique) en un produit.

Méthode n°3. ***Avec un facteur commun***

Factoriser l'expression suivante :

$H=(2x+1)(3x-5)-(2x+1)^2+(8x+4)(7x-1)$ L1

$H=\underline{(2x+1)}(3x-5)-\underline{(2x+1)}(2x+1)+4\underline{(2x+1)}(7x-1)$ L2

$H=(2x+1)[(3x-5)-(2x+1)+4(7x-1)]$ L3

$H=(2x+1)[3x-5-2x-1+28x-4]$ L4

$H=(2x+1)(29x-10)$ L5

Dans L1, on identifie les produits (ici il y en a 3) et on cherche un facteur commun à chacun d'eux.
Dans L2, on fait apparaître le facteur commun, ici il s'agît de $(2x+1)$.
On remarque que « un seul $(2x+1)$ » est souligné, en effet $(2x+1)$ n'apparaît qu'une fois dans chaque produit.
Dans L3, on utilise la propriété n°1 de la droite vers la gauche (et si on a un doute, on relit la remarque n°4) en posant $k=(2x+1)$ $a=(3x-5)$ etc.
Dans L4, on développe l'expression obtenue entre crochets.
Dans L5, on réduit l'expression entre crochets et on s'assure qu'il n'y a plus de factorisation possible.

Exercice n°3.

Factoriser $I=(3x-2)^2-(2+6x)(3x-2)$

Méthode n°4. ***Avec des identités remarquables***

L'idée est de reconnaître les membres de droite des identités remarquables et d'utiliser ces identités de la droite vers la gauche.
En pratique, c'est surtout la 3e qui est utile…

Exemple n°6. ***Avec la 1re identité remarquable***

$9+4x^2+12x=4x^2+12x+9=(2x)^2+12x+3^2=(2x+3)^2$

Remarque n°6. ***essentielle***

On a compris qu'on avait à faire à la 1re identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...
On a repéré les valeurs de a et b et on a pas oublié de vérifier que $2\times a\times b=2\times 2x\times 3=12x$

Exemple n°7. ***Avec la 2e identité remarquable***

$-12x+9+4x^2=4x^2-12x+9=(2x)^2-12x+3^2=(2x-3)^2$

Remarque n°7. ***essentielle***

On a compris qu'on avait à faire à la 2e identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...
On a repéré les valeurs de a et b et on a pas oublié de vérifier que $2\times a\times b=2\times 2x\times 3=12x$

Exemple n°8. ***Avec la 3e identité remarquable***

$(4x+2)^2-(3x-7)^2=[(4x+2)+(3x-7)][(4x+2)-(3x-7)]=(7x-5)(x+9)$

Remarque n°8.

On oublie pas qu'on repère les membres de droite des identités remarquables.
Ici $a^2=(4x+2)^2$ donc $a=4x+2$ et $b^2=(3x-7)^2$ donc $b=3x-7$

III Le résumé du cours

Dans les expressions qui suivent, ***a*** , ***b*** , ***c*** , ***d*** et ***k*** sont des nombres qui peuvent aussi prendre la forme d'expression.
Par exemple, il est possible d'avoir $a=3x+5$ …

III.1 Définition

Produit	Développer $\longrightarrow$	Somme
Produit	$\longleftarrow$ Factoriser	Somme

III.2 Simple distributivité

produit	$\boxed{k(a+b)=ka+kb}$	somme
produit	$\boxed{k(a-b)=ka-kb}$	somme
produit	$k(a+b-c\ldots)=ka+kb-kc\ldots$	somme

III.3 double distributivité

produit	$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$	somme

III.4 Les identités remarquables

produit	$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$	somme
produit	$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$	somme
produit	$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$	somme