

LES VECTEURS

I Translations et vecteurs

Définition n°1. Translation qui transforme A en B .

On considère deux points A et B du plan.

On appelle translation qui transforme A en B la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

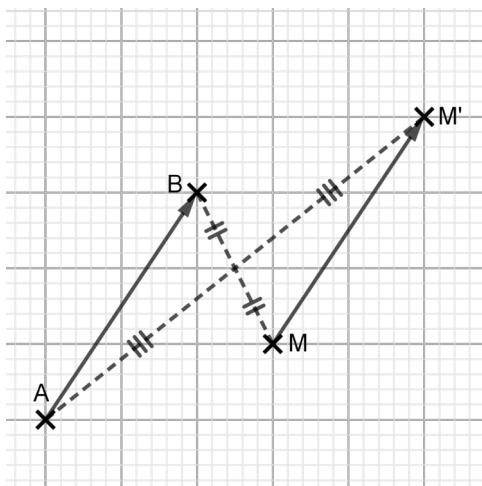


Figure 1

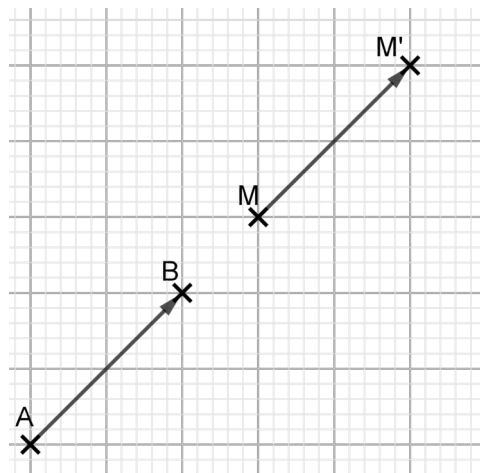


Figure 2

Le point M' est l'image du point M par la translation qui transforme A en B .

Remarque n°1.

Une translation est entièrement définie par la donnée de 3 informations :

- Une direction : on se déplace parallèlement à la droite (AB) ,
- Un sens : on se déplace comme de A vers B
- Une longueur : la distance parcourue est la même que la longueur AB .

Définition n°2. Le vecteur \overrightarrow{AB} , associé à la translation qui transforme A en B .

On considère deux points A et B du plan.

- Le vecteur \overrightarrow{AB} est la donnée des 3 informations qui caractérisent la translation qui transforme A en B .
- On le représente par une flèche comme sur les figures 1 et 2.
- A est l'origine du vecteur \overrightarrow{AB} et B est son extrémité.

Définition n°3. Vecteurs égaux

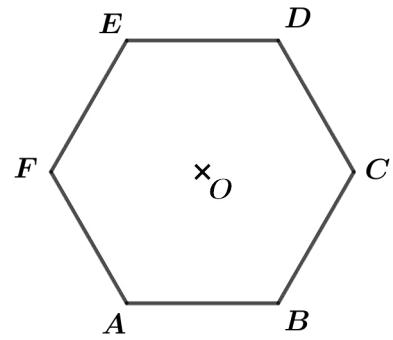
Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°1

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O .

- 1) Citer trois vecteurs égaux au vecteur \overrightarrow{BC} .
- 2) Déterminer le représentant du vecteur \overrightarrow{AB} d'origine F .
- 3) Nommer un représentant du vecteur \overrightarrow{BF} autre que lui-même.
- 4) Quelle est l'image du point F par la translation de vecteur \overrightarrow{BC} .



[geogebra](#)

LES VECTEURS

Propriété n°1.

Soient A, B, C et D quatre points.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

LES VECTEURS

preuve :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (AB) \parallel (DC)$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est non croisé.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = DC$

Le quadrilatère ABDC, non croisé, a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.

C'est un parallélogramme.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftarrow$ ABDC est un parallélogramme

Le quadrilatère ABDC étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux. En particulier $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$

Enfin le nom ABDC nous indique que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont le même sens.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

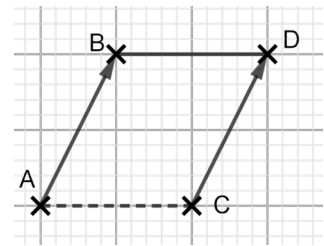


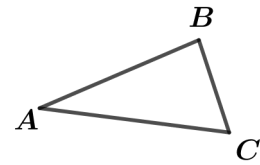
Figure 3

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°2

ABC est un triangle.

- 1) Construire le représentant du vecteur \overrightarrow{AC} d'origine B .
- 2) Placer le point D tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

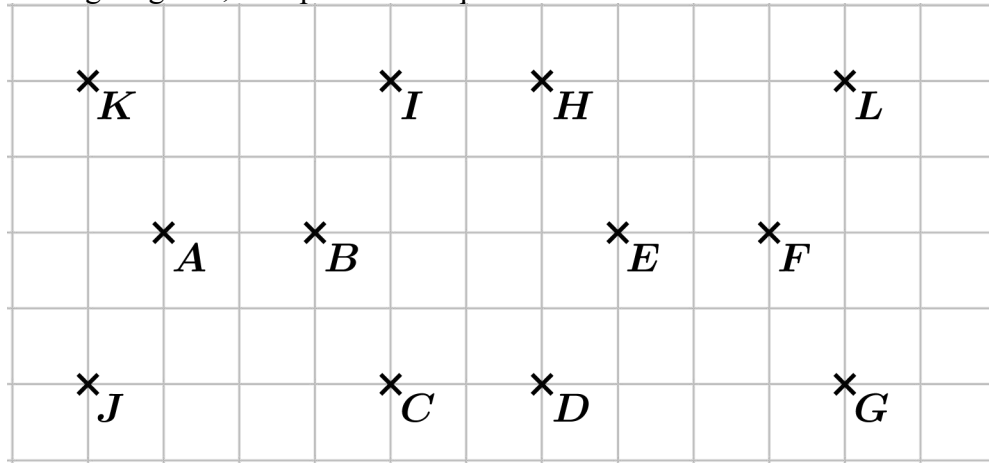


[geogebra](#)

LES VECTEURS E01

EXERCICE N°3

Sur un quadrillage régulier, on a placé douze points comme ci-dessous.



[geogebra](#)

1) Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

1.a) $\vec{IB} = \vec{AJ}$

1.b) L'image de D par la translation de vecteur \vec{EF} est C .

1.c) $\vec{EH} = \vec{KA}$

1.d) L'image de B par la translation de vecteur \vec{FL} est I .

1.e) $\vec{FG} = \vec{FL}$

1.f) $\vec{IH} = \vec{HL}$

2) Nommer au moins deux vecteurs égaux à \vec{AB}

3) Nommer au moins deux vecteurs égaux à \vec{EG}

4) Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$? Et de $ABCD$?

Faire les exercices de la Fiche M01 pour le prochain cours en classe entière.

LES VECTEURS

II Vecteurs et opérations

Définition n°4. Addition de deux vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} , on note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations associées et $t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ (Pour tout point X $t_{\vec{w}}(X) = t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(X))$)
 $\vec{u} + \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{w}$

Remarque n°2.

Cette définition un peu théorique ne nous servira pas cette année.
En revanche, la propriété suivante nous sera bien plus utile...

Propriété n°2. La relation de Chasles

Soient A, B et C trois points.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

LES VECTEURS

preuve :

La translation de vecteur \overrightarrow{AB} suivie de la translation de vecteur \overrightarrow{BC} se résume par la translation de vecteur \overrightarrow{AC} .

(Pour comprendre la définition : $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AC}}$)

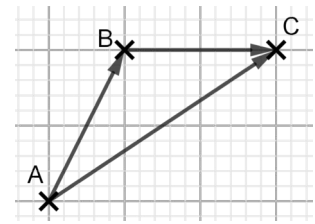


Figure 4

LES VECTEURS

Propriété n°3. Règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs de même origine)

Soient A, B et C trois points.

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ où D le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

LES VECTEURS

preuve :

- ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
- Il suffit alors de remplacer \overrightarrow{BD} par \overrightarrow{AC} dans l'égalité précédente pour obtenir $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

(Il faut surtout retenir le dessin et l'égalité)

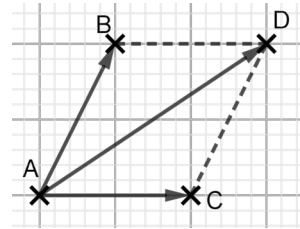


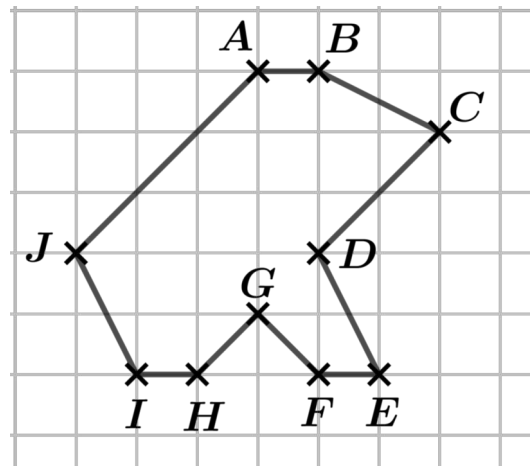
Figure 5

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°1

Compléter les égalités en n'utilisant que les points de la figure ci-contre :

- 1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{...A} + \overrightarrow{A...}$
- 2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{...} = \overrightarrow{HF}$
- 3) $\overrightarrow{D...} + \overrightarrow{C...} = \overrightarrow{...B}$
- 4) $\overrightarrow{E...} + \overrightarrow{...E} = \overrightarrow{...}$



geogebra

LES VECTEURS

Définition n°5. Vecteur opposé, vecteur nul

Soit \vec{u} un vecteur, on appelle **vecteur opposé** à \vec{u}
et on note $-\vec{u}$ le vecteur

- qui a même direction et même longueur (ou norme) que \vec{u}
- mais dont le sens est opposé à celui de \vec{u}

On alors $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$\vec{0}$ est appelé le **vecteur nul**.

LES VECTEURS

Exemple n°1.

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

$$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$$

mais aussi

$$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

ou encore

$$-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$$

(pensez bien au fait que le sens du vecteur se lit en suivant la flèche au dessus des lettres)

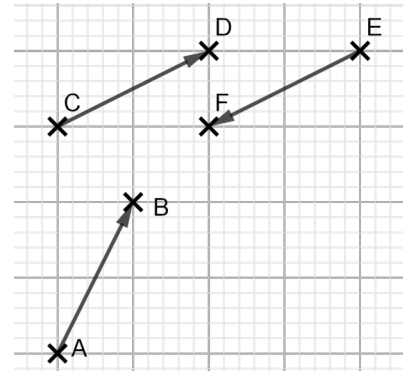


Figure 6

LES VECTEURS

Définition n°6. *Soustraction de vecteurs*

Pour soustraire un vecteur, on ajoute son opposé.

Exemple n°2.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°2

Écrire le plus simplement possible

1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$

2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$

3) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$

4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$

5) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$

6) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

LES VECTEURS

Propriété n°4. Vecteurs et milieu

Soit A, I et B trois points.

$$\vec{AI} = \vec{IB} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. (Inspirez vous de la propriété n°1)

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°3

Soit A , B et C trois points.

[geogebra](#)

- 1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- 2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$
- 3) Que peut-on dire du point C ? Justifier.

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°4

ABC est un triangle tel que $AB=2,5 \text{ cm}$, $AC=2 \text{ cm}$ et $BC=3 \text{ cm}$.

[geogebra](#)

- 1) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- 2) Construire le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
- 3) À quel vecteur est égale la somme $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$?

LES VECTEURS

Définition n°7. Multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)

Soit \vec{u} et k un nombre réel. On appelle produit de \vec{u} par k et on note $k \cdot \vec{u}$ le vecteur

qui a la même direction que \vec{u} ,

qui a le même sens que \vec{u} si $k > 0$, ou le sens contraire si $k < 0$

et dont la norme (la longueur) est multipliée par la distance à zéro de k .

LES VECTEURS

Exemple n°3.

On peut écrire :

$$\vec{CD} = 2 \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{GH} = -0,5 \cdot \vec{FE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{FE}$$

Par contre,

Il n'existe pas de nombre k tel que

$$\vec{AB} = k \cdot \vec{EF}$$

(car ces vecteurs n'ont pas la même direction)

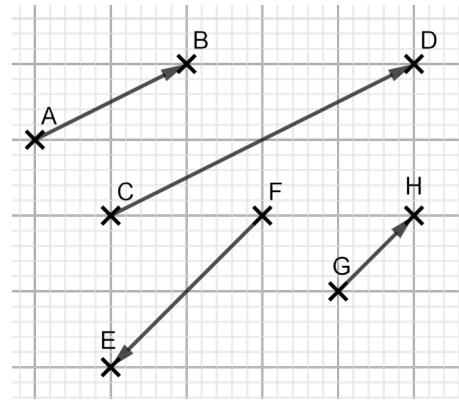


Figure 7

Remarque n°3.

Il faut bien comprendre que nous avons multiplié un vecteur par nombre et que cela n'a rien à voir avec le fait de multiplier deux vecteurs entre eux. Il faudra avancer un peu dans les maths pour en parler...

LES VECTEURS E02

EXERCICE N°5

- 1) Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 3\text{ cm}$ et $BC = 2\text{ cm}$.
- 2) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.

[Geogebra](#)

Faire les exercices de la Fiche M02 pour le prochain cours en classe entière.

Réviser pour IE01

LES VECTEURS

III Vecteurs et coordonnées

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on définit deux « vecteurs de base » :

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OI} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \overrightarrow{OJ}$$

Pour un vecteur \overrightarrow{AB} quelconque, la relation de Chasles nous permet d'écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

avec C étant choisi tel que $(AC) \parallel (OI)$
et $(CB) \parallel (OJ)$.

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 6 \cdot \vec{e}_1 - 4 \cdot \vec{e}_2$$

On écrira plus simplement :

$$\overrightarrow{AB} \ (6 ; -4) \text{ ou } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

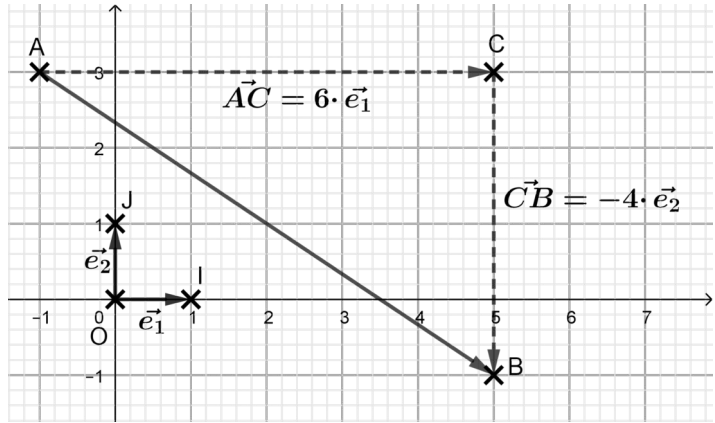


Figure 8

geogebra

LES VECTEURS

Définition n°8. Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
 $\vec{e}_1 = \vec{OI}$ et $\vec{e}_2 = \vec{OJ}$. Alors, pour tout vecteur \vec{u} , il existe deux nombres x et y tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$

On appellera :

x l'abscisse de \vec{u}

y l'ordonnée de \vec{u}

(x, y) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2)

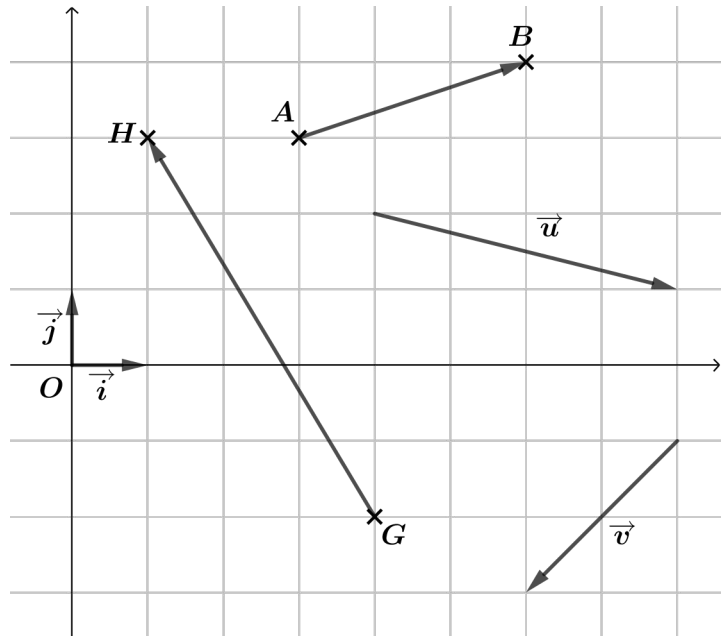
Remarque n°4.

Comme pour les points, on notera indifféremment $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°1

Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{GH} , \vec{u} et \vec{v} dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.



LES VECTEURS

Méthode n°1. Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB}

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

LES VECTEURS

Exemple n°4.

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées
 $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ -1 - 3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

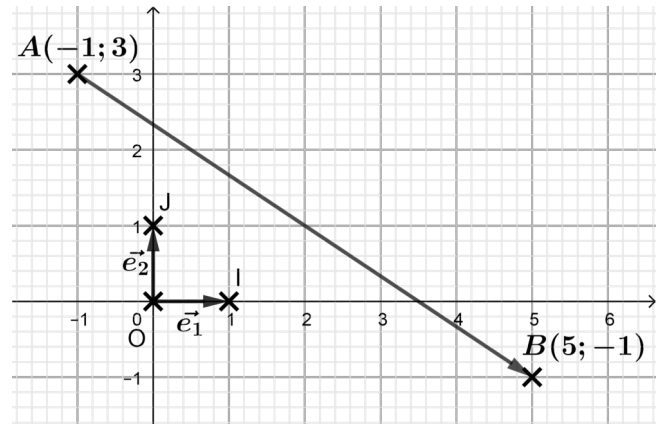


Figure 9

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°2

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2 ; 0)$, $B(3 ; -1)$, $C(5 ; 4)$
et $D(0 ; 5)$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

LES VECTEURS

Propriété n°5. Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Les coordonnées de K milieu de $[AB]$ sont $K\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

preuve :

Notons $K(x_K ; y_K)$.

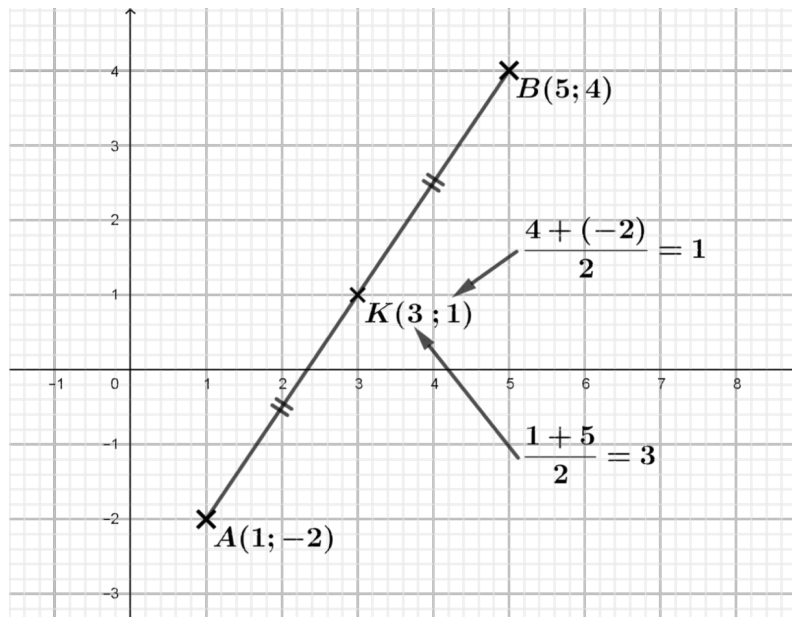
$$K \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \vec{KA} + \vec{KB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_K + x_B - x_K = 0 \\ y_A - y_K + y_B - y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_K = 0 \\ y_A + y_B - 2y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_K \\ y_A + y_B = 2y_K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = x_K \\ \frac{y_A + y_B}{2} = y_K \end{cases}$$



LES VECTEURS

Exercice n°1. ***À vous de jouer***

Dans le repère $(O ; I ; J)$

On donne le parallélogramme $ABCD$ avec $A(4 ; 5,2)$ et $C(1,4 ; 3)$.

Déterminer les coordonnées du centre K de $ABCD$.

LES VECTEURS

Propriété n°6. Opérations et coordonnées de vecteur

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont des nombres ainsi qu'un nombre k .

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$-\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} k a \\ k b \end{pmatrix}$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. Revenez à la définition n°8 et utilisez les définitions du deuxième paragraphe.

LES VECTEURS

Exemple n°5.

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} -2,1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ alors , par exemple :

$3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \times (-2,1) - 2 \times 3 \\ 3 \times 2,3 - 2 \times 1,5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -12,3 \\ 3,9 \end{pmatrix}$

Remarque n°5.

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3 ; -2)$ et $E(11 ; -3)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

LES VECTEURS

Propriété n°7. Calcul de la norme d'un vecteur

Dans un repère ORTHONORME $(O ; I ; J)$, on se donne $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
alors la norme (ou longueur) de \vec{u} , qui se note $\|\vec{u}\|$, s'obtient grâce à
l'égalité :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

preuve :

On utilise la décomposition de la figure n°8 et on applique le théorème de Pythagore au triangle ABC qui est rectangle en C car le repère est orthonormé.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°4

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1 ; 2)$, $B(-3 ; 6)$ et $C(-7 ; -1)$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $R(-1 ; 3)$, $S(5 ; -4)$ et $T(8 ; -2)$.

- 1) Calculer les coordonnées du point U tel que $RSTU$ soit un parallélogramme.
- 2) Calculer les coordonnées du point V tel que $RVST$ soit un parallélogramme.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°6

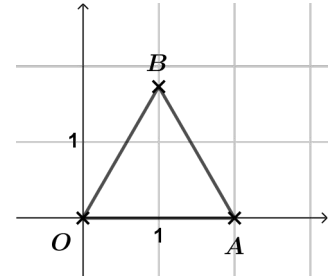
Dans un repère orthonormé, on considère les points $I(1 ; -5)$, $J(7 ; 2)$, $K(16 ; 4)$ et $L(10 ; -3)$.

Montrer que $IJKL$ est un losange.

LES VECTEURS E03

EXERCICE N°7

Déterminer les coordonnées du point B sur la figure ci-contre sachant que OAB est un triangle équilatéral de côté 2 cm .



[Geogebra](#)

Faire les exercices de la Fiche M03 à votre rythme (sur une semaine)

LES VECTEURS E04

EXERCICE N°1

Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(2x-4 ; x)$$

$$S((6x-4)^2 ; 7x-3)$$

$$T((9x-2)(4x-3) ; x^2-3)$$

$$U(15x-14 ; x^2-6x)$$

Montrer que, quelle que soit la valeur de x , $RSTU$ est un parallélogramme.

LES VECTEURS E04

EXERCICE N°2 *Python*

- 1) Créer une fonction en Python qui, à partir des coordonnées de deux points A et B dans un repère orthonormé, calcule la distance AB .

- 2) Créer une seconde fonction utilisant la première et qui, à partir des coordonnées de deux points A et O dans un repère orthonormé et d'un réel R positif, indique si le point A appartient au disque de centre O et de rayon R .

LES VECTEURS E04

EXERCICE N°3

$ABCD$ est un parallélogramme et on définit les points S et V tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrer que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Faire les exercices de la Fiche M04 à votre rythme (sur une semaine)

Réviser pour IE02

LES VECTEURS

IV La colinéarité

Définition n°9. Vecteurs colinéaires

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs
On dit que

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque n°6.

D'après la définition n°7, des vecteurs colinéaires sont des vecteurs qui ont la même direction.

LES VECTEURS

Définition n°10. Déterminant de deux vecteurs

Soient $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
On appelle déterminant de \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ le nombre
 $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$

Exemple n°6.

Dans la base orthonormée $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$, pour $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 \times 5 - (-2) \times 3 = 26$$

LES VECTEURS

Propriété n°8.

Dans base orthonormée , $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ on se donne $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

LES VECTEURS

preuve :

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Supposons \vec{u} et \vec{v} colinéaires, alors il existe un nombre k tel que

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow a = kc \text{ et } b = kd$$

▪ Si $c=0$ alors $a=k \times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $d=0$ alors $b=k \times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $c \neq 0$ et $d \neq 0$ alors $\frac{a}{c} = k = \frac{b}{d}$, d'après l'égalité des produits en

croix : $ad=bc$ qui équivaut à $ad-bc=0$

LES VECTEURS

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
 $ad - bc = 0$ équivaut à $ad = bc$
- Si $c \neq 0$ et $d \neq 0$ alors on pose $k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
ainsi $a = kc$ et $b = kd \Leftrightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v}$ et \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- Si $c = 0$ alors $ad = 0$ et $a = 0$ ou $d = 0$
 - Si $d = 0$ alors $\vec{v} = \vec{0}$ et \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
 - Si $a = 0$ et $d \neq 0$ alors on pose $k = \frac{b}{d}$ ainsi
 $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ et \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- Les autres cas, $d = 0$, $a = 0$ et $b = 0$ se traitent de la même façon et on obtient que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

LES VECTEURS

Méthode n°2. Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Énoncé :

Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, déterminer le coefficient de proportionnalité.

$$\mathbf{1) \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \mathbf{2) \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{z} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

LES VECTEURS

Réponse :

$$\mathbf{1)} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-18) - 6 \times (-6) = 0$$

On en déduit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

$$\frac{2}{-6} = \frac{6}{-18} = -\frac{1}{3}$$

On précise que $\vec{u} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

$$\mathbf{2)} \quad \det(\vec{w}, \vec{z}) = -5 \times (-7) - 3 \times 12 = -1 \neq 0$$

On en déduit que \vec{w} et \vec{z} ne sont pas colinéaires.

LES VECTEURS E05

EXERCICE N°1

On se place dans un repère orthonormé et on considère les quatre points $A(-2 ; 1)$,
 $B(0 ; -3)$, $C(1 ; 1)$ et $D(5 ; -3)$.

- 1) Calculer le déterminant des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} .
- 2) Calculer le déterminant des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{DB} .

LES VECTEURS E05

EXERCICE N°2

- 1) On se place dans un repère orthonormé et on considère les trois points $A(-2 ; -3)$, $B(4 ; -2)$, $C(8 ; 0)$
- 1.a) Calculer le déterminant des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- 1.b) Que peut-on en déduire pour ces deux vecteurs ?
- 1.c) Écrire, si possible, une égalité avec ces deux vecteurs.
- 2) Reprendre la question 1) avec $A(-2 ; -3)$, $B(4 ; -2)$ et $C(16 ; 0)$

LES VECTEURS E05

EXERCICE N°3

x est un nombre réel. On se place dans une base orthonormée.

1) Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ x-2 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que \vec{u} soit colinéaire à \vec{v} ? Justifier.

LES VECTEURS E05

2) Soient les vecteurs \vec{w} et \vec{t} tels que $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que \vec{w} soit colinéaire à \vec{t} ? Justifier.

LES VECTEURS E05

3) Soient les vecteurs \vec{r} et \vec{s} tels que $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2x-3 \\ 3x-1 \end{pmatrix}$.

Existe-il un réel x tel que \vec{r} soit colinéaire à \vec{s} ? Justifier.

Faire les exercices de la Fiche M05 à votre rythme (sur une semaine)

V Le résumé du cours

Un vecteur c'est trois informations

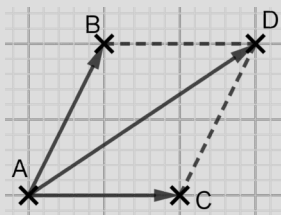
- Une direction (on se déplace sur une droite)
- Un sens (sur cette droite on choisit un sens)
- Une norme ou longueur

Soient A, B, C et D quatre points.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Règle du parallélogramme



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \quad \text{où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.}$$

Vecteur opposé : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ même direction, même norme, sens contraire

Vecteur nul : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]$$

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on se donne $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

$$\text{Les coordonnées de } \overrightarrow{AB} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

On se donne $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont des nombres ainsi qu'un nombre k .

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$-\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} k a \\ k b \end{pmatrix}$$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc = 0$$

Si le repère est ORTHONORME $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$