LA DÉRIVATION E08C

EXERCICE N°1 Position relative d'une courbe et de sa tangente en un point

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2$$

et C_f sa représentation graphique dans un repère.

1.a) Déterminer $f'(x)$, l'expression de la dérivée de la fonction f.

f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2x}$

1.b) Dresser le tableau de variation de f (justifier).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

On veut étudier le signe de la dérivée pour en déduire les variations de la fonction.
Il est plus facile d'étudier le signe d'un produit que celui d'une somme… On va donc factoriser la dérivée.

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

- $x > 0$ quand... $x > 0$
- $3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

On en déduit le tableau de signe de f' dont on déduira le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{-4}{27}$	$\nearrow$	

1.c) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$

Or :

$f(2) = 2^3 - 2^2 = 4$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 = 8$

On obtient :

$y = 8(x-2) + 4$

qui se réduit à :

$\boxed{y = 8x - 12}$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

Il faut remarquer ici que $g(x) = f(x) - (8x-12)$

2.a) Déterminer $g'(x)$, l'expression de la dérivée de la fonction g.

La fonction g est une somme algébrique de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{g'(x) = 3x^2 - 2x - 8}$

2.b) Dresser le tableau de variation de g .

▪ Commençons par factoriser $g(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
notons Δ le discriminant de $g(x)$, $\Delta = (-2)^2 + 4 \times 3 \times (-8) = 100$.
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{100}}{2\times 3} = \frac{2-10}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

et

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{100}}{2\times 3} = \frac{2+10}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

▪ On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{g'(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)} .$$

Dressons à présent le tableau de signes de g' suivi du tableau de variation de g .
▫ 3 est un nombre positif
▫ $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
(ainsi le facteur $(x-2)$ est positif quand $x > 2$)
▫ $x+\frac{4}{3} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$
(ainsi le facteur $\left(x+\frac{4}{3}\right)$ est positif quand $x > -\frac{4}{3}$)

x	$-\infty$		$\frac{-4}{3}$		2		$+\infty$
3		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\frac{4}{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{500}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

▫ $g\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{500}{27}$
▫ $g(2) = 2^3 - 2^2 - 8 \times 2 + 12 = 0$

Aide au calcul
$g\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{500}{27}$

2.c) En déduire la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 2 .

Le tableau de variation de g nous indique que lorsque que x est proche de 2, $g(x) \geqslant 0$.
Or $g(x) = f(x) - (8x-12)$
Donc $f(x) \geqslant 8x-12$
Ce qui signifie que C_f est, **localement, au dessus la droite d'équation** $y = 8x-12$.
Cela veut dire quoi $g(x) \geqslant 0$ quand x est « proche de deux » ?

Cela signifie qu'on peut trouver un intervalle I ouvert et centré en 2 tel que que pour tout $x \in I$ $g(x) \geqslant 0$. Par exemple ici, on pourrait choisir $I =]2-0{,}7 \,;\, 2+0{,}7[$ ou n'importe quoi à la place de 0,7 tant que **cette partie du tableau reste vraie**.

	2	
$+$	|	$+$
$-$	0	$+$
$+$	|	$+$
$-$	0	$+$
$\searrow$	0	$\nearrow$