ARITHMÉTIQUE E02C

L'objectif de cette activité est de démontrer que le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
Pour cela, nous avons besoin de quelques préparatifs…

EXERCICE N°1 La multiplication par 3

On donne un nombre entier natuel N .
Si N est un multiple de 10 alors il existe un entier naturel p tel que $N=p\times 10$

1) Démontrer qu'alors le chiffre des unités de $3N$ est zéro.

$3N = 3\times p\times 10 = (3\times p)\times 10$.
Or $3\times p$ est un nombre entier
Donc $(3\times p)\times 10$ est dans la table de 10 et par conséquent son chiffre des unités est zéro.

Si N n'est pas un mutliple de 10, alors son chiffre des unités peut être : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 (mais pas 0).

2) Démontrer qu'alors le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

▪ 1[er] cas : Si le chiffre des unités de N est 1 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+1$
$3N = 3(p\times 10+1) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 1$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 3.

▪ 2[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+2$
$3N = 3(p\times 10+2) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 2$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 6.

▪ 3[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+3$
$3N = 3(p\times 10+3) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 3$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 9.

▪ 4[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+4$
$3N = 3(p\times 10+4) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 4$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 8.

▪ 5[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 5 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+5$
$3N = 3(p\times 10+5) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 5$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 5.

▪ 6[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 6 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+6$
$3N = 3(p\times 10+6) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 6$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 8.

▪ 7[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 7 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+7$
$3N = 3(p\times 10+7) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 7$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 1.

▪ 8[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 6 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+8$
$3N = 3(p\times 10+8) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 8$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 4.

▪ 9[e] cas : Si le chiffre des unités de N est 9 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times 10+9$

$$3N = 3(p\times 10+9) = \underbrace{3\times p\times 10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times 9$$

On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 7.

Dans tous ces cas possibles, le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

On retient de cet exercice que :

Si un entier naturel N n'est pas un multiple de 10 alors son triple $3N$ n'est pas non plus un multiple de 10.

EXERCICE N°2 C'est quoi exactement un nombre décimal ?

Définition n°1.

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10.
Autrement dit :
Si a est un nombre décimal alors il existe deux entiers N et $q\geq 0$ tel que $a = \dfrac{N}{10^q}$.

Exemple n°1.

$$46{,}97 = \frac{4967}{10^2} \quad ; \quad -35{,}789 = -\frac{35789}{10^3}$$

Remarque n°1.

$$46{,}97 = \frac{4967}{10^2} = \frac{46970}{10^3} = \frac{469700}{10^4} = \ldots$$

Ce serait plus pratique si on choisissait tous la même écriture !
On conviendra de prendre le numérateur le plus proche possible de zéro.
Cela implique que :

Si le nombre déciimal a est non nul alors le numérateur N ne sera pas un multiple de 10.

1) Supposons que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal, qu'est ce que cela implique ?

Cela implique qu'il existe un entier naturel N , **non multiple de 10** et un entier q tel que : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{N}{10^q}$

EXERCICE N°3 Démonstration par l'absurde

Démontrez que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Supposons que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Alors il existe un entier naturel N , **non multiple de 10** et un entier q tel que :

$$\frac{1}{3} = \frac{N}{10^q}$$

Ce qui équivaut à $3N = 10^q$

Or :

D'une part : N n'étant pas multiple de 10, le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

D'autre part : le chiffre des unités de 10^q est zéro.

La dernière égalité est donc absurde.

On en déduit que $\dfrac{1}{3}$ ne pas être un nombre décimal.

Car en supposant le contraire, on aboutit à une absurdité.