

# ***DEVOIR SURVEILLÉ N°3 LE CORRIGÉ***

***Nom :***

***Prénom :***

***Classe :***

L'usage de la calculatrice est interdit.

Le sujet est à rendre avec la copie

Note	Observations
20	

J'ai le droit à un tiers-temps   
(cocher si c'est le cas)

# PREMIÈRE PARTIE

## EXERCICE N°1      Automatismes

*(6 points)*

*Pour ce premier exercice, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.*

1) L'inverse du triple de 13 est :

- |      |                |      |                |
|------|----------------|------|----------------|
| 1.a) | $\frac{1}{39}$ | 1.b) | $\frac{3}{13}$ |
| 1.c) | $\frac{13}{3}$ | 1.d) | 39             |
- 

2) On considère la relation  $H = a + \frac{b}{cd}$ .

Lorsque  $a = \frac{1}{8}$ ,  $b = 3$ ,  $c = 7$  et  $d = -\frac{1}{7}$ , la valeur de  $H$  est :

- |      |                 |      |                 |
|------|-----------------|------|-----------------|
| 2.a) | $\frac{23}{8}$  | 2.b) | $\frac{25}{8}$  |
| 2.c) | $-\frac{23}{8}$ | 2.d) | $-\frac{25}{8}$ |
- 

3) Une réduction de 90 % suivie d'une hausse de 60 % équivaut à :

- |      |                               |      |                          |
|------|-------------------------------|------|--------------------------|
| 3.a) | une diminution de 24 %        | 3.b) | une diminution de 30 %   |
| 3.c) | <b>une diminution de 84 %</b> | 3.d) | une augmentation de 16 % |
- 

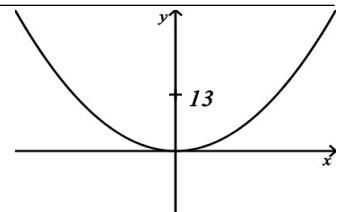
4) La suite  $u$  est géométrique, de raison 2 et de premier terme  $u_1 = 5$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

- |      |                     |      |                          |
|------|---------------------|------|--------------------------|
| 4.a) | $u_n = 5 + 2(n-1)$  | 4.b) | $u_n = 5 \times 2^{n-1}$ |
| 4.c) | $u_n = 5 + 2^{n-1}$ | 4.d) | $u_n = 2 \times 5^{n-1}$ |
- 

5) On a représenté ci-contre la parabole d'équation  $y = x^2$ .

On note  $(I)$  l'inéquation, sur  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 \leqslant 13$ .

L'inéquation  $(I)$  est équivalente à :



- |      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 5.a) | $x \leqslant -\sqrt{13}$ ou $x \geqslant \sqrt{13}$ | 5.b) | $-\sqrt{13} \leqslant x \leqslant \sqrt{13}$ |
| 5.c) | $x \leqslant \sqrt{13}$                             | 5.d) | $x = -\sqrt{13}$ ou $x = \sqrt{13}$          |
- 

6) Soit la fonction  $f$  telle que :  $f(3) = 1$  et  $f'(3) = 5$ .

Une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 3 est :

- |      |               |      |                                 |
|------|---------------|------|---------------------------------|
| 6.a) | $y = x + 2$   | 6.b) | $y = x - 8$                     |
| 6.c) | $y = 5x - 16$ | 6.d) | <b><math>y = 5x - 14</math></b> |
- 

1.a)	2.c)	3.c) une diminution de 84 %
4.b)	5.b)	6.d) $y = 5x - 14$

## DEUXIÈME PARTIE

### **EXERCICE N°2 Savoir-faire**

**(7 points)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable et en factorisant lorsque cela est demandé.

**1)**  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 - 12x + 7$  (il faut factoriser la dérivé)

▪ La fonction  $f$  est une somme algébrique de fonctions de références toutes dérивables sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est donc aussi et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - 5 \times 2x - 12 \times 1 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 2x^2 - 10x - 12}$$

▪ De plus, on peut écrire :

$$f'(x) = 2(x^2 - 5x - 6)$$

Or :  $-1$  est une racine évidente du trinôme  $x^2 - 5x - 6$ .

$$(-1)^2 - 5 \times (-1) - 6 = 0$$

On en déduit que :

$$f'(x) = 2(x+1)(x-x_2) \text{ avec } x_2 \in \mathbb{R}$$

Ici, on se souvient que  $x^2 - 5x - 6 = x^2 - Sx + P$  avec  $S = x_1 + x_2$  et  $P = x_1 \times x_2$

Par exemple  $P = -6 \Leftrightarrow (-1) \times x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = 6$

En développant et en identifiant, on obtient  $x_2 = 6$

D'où :

$$\boxed{f'(x) = 2(x+1)(x-6)}$$

▪ Si vous avez utilisé le discriminant :

$$f'(x) = 2(x^2 - 5x - 6)$$

Posons  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49$  le discriminant du trinôme  $x^2 - 5x - 6$ .

$\Delta > 0$ , il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5-7}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5+7}{2} = 6$$

D'où  $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$  puis  $\boxed{f'(x) = 2(x+1)(x-6)}$

▪ et si vous n'avez pas pensé à factoriser par 2 :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 100 + 96 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{196}}{2 \times 2} = \frac{10-14}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-10)+\sqrt{196}}{2 \times 2} = \frac{10+14}{4} = 6$$

(Sans la calculatrice, c'est déjà moins facile...)

**2)**  $f(x) = \frac{7x-3}{2x+5}$

▪ Recherchons les valeurs interdites pour trouver les domaines de définition et de dérivation.

$$2x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ On va donc travailler sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

▪ La fonction  $f$  est un quotient de fonctions de références toutes dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$ ,

elle l'est donc aussi et pour tout  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$ ,

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = 7x-3 \text{ et } u'(x) = 7$$

$$v(x) = 2x+5 \text{ et } v'(x) = 2$$

d'où

$$f'(x) = \frac{7(2x+5) - 2(7x-3)}{(2x+5)^2} = \frac{14x+35 - 14x+6}{(2x+5)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{41}{(2x+5)^2}}$$

3)  $f(x) = 4x\sqrt{2x-5}$

▪ Recherchons les valeurs interdites pour trouver les domaines de définition et de dérivabilité.

Pour que  $\sqrt{2x-5}$  soit définie il faut et il suffit que  $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Par contre pour la dérivabilité il faut et il suffit que  $2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

(Souvenez-vous, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0)

On va donc travailler sur  $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$

▪ La fonction  $f$  est composée de fonctions de références toutes dérивables sur  $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$ ,

elle l'est donc aussi et pour tout  $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$ ,

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec :

$$u(x) = 4x \quad \text{et} \quad u'(x) = 4$$

$$v(x) = \sqrt{w(x)} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} \quad \text{avec} \quad w(x) = 2x-5 \quad \text{et} \quad w'(x) = 2$$

$$\text{ainsi } v(x) = \sqrt{2x-5} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

d'où

$$f'(x) = 4\sqrt{2x-5} + 4x \times \frac{1}{\sqrt{2x-5}} = \frac{4(2x-5)+4}{\sqrt{2x-5}} = \frac{8x-20+4}{\sqrt{2x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{8x-16}{\sqrt{2x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{8(x-2)}{\sqrt{2x-5}}$$

est encore mieux même si cela n'est pas demandé.

4)  $f(x) = (5x-3)^3(2x+1)$  (il faut factoriser la dérivé)

▪ La fonction  $f$  est une somme algébrique de fonctions de références toutes dérivables sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est donc aussi et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

avec :

$$u(x) = (5x-3)^3 \quad \text{et} \quad u'(x) = 3 \times 5(5x-3)^{3-1} = 15(5x-3)^2$$

$$v(x) = 2x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2$$

d'où

$$f'(x) = 15(5x-3)^2 \times (2x+1) + 2 \times (5x-3)^3 = (5x-3)^2[15(2x+1)+2(5x-3)]$$

$$f'(x) = (5x-3)^2(40x+9)$$

Une entreprise fabrique et vend  $x$  tonnes d'un certain produit par jour,  $x$  étant compris entre 10 et 100. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en centaines d'euros est donné par  $C(x) = 0,2x^2 + 8x + 500$ .

### Partie A

Le coût moyen unitaire  $C_m$  de fabrication d'une tonne de produit est exprimé en centaines d'euros et est égal, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I = [10 ; 100]$  à :  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

- 1) Justifier que la fonction  $C_m$  est dérivable sur  $I$ , et que pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $C_m'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2}$ .

■ La fonction  $C_m$  est un quotient de fonctions de références toutes dérивables sur  $I$ , de plus  $x \mapsto x$  ne s'annule pas sur  $I$ . Donc  $C_m$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$C_m'(x) = \frac{(0,4x+8)x - 1(0,2x^2+8x+500)}{x^2} = \frac{0,4x^2+8x-0,2x^2-8x-500}{x^2} = \frac{0,2x^2-500}{x^2}$$

- 2) En déduire la quantité de produit fabriqué quotidiennement pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

Nous allons étudier le signe de  $C_m'$  pour en déduire le tableau de variations de  $C_m$  sur  $I$ .

$$C_m'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2} = \frac{0,2(x^2 - 2500)}{x^2} = \frac{0,2(x-50)(x+50)}{x^2}$$

- 0,2 est un nombre positif
- $x-50 > 0 \Leftrightarrow x > 50$
- $x+50 > 0 \Leftrightarrow x > -50$

$x$	10	50	100
$0,2$	+		+
$x-50$	-	0	+
$x+50$	+		+
$x^2$	+		+
$C_m'(x)$	-	0	+
$C_m(x)$	600	28	33

$$C_m(10) = \frac{0,2 \times 10^2 + 8 \times 10 + 500}{10} = \frac{20 + 80 + 500}{10} = 60$$

$$C_m(50) = \frac{0,2 \times 50^2 + 8 \times 50 + 500}{50} = \frac{500 + 400 + 500}{50} = \frac{1400}{50} = 28$$

Aide au calcul  
 $\frac{0,2 \times 50^2 + 8 \times 50 + 500}{50} = 28$

$$C_m(100) = \frac{0,2 \times 100^2 + 8 \times 100 + 500}{100} = \frac{2000 + 800 + 500}{100} = \frac{3300}{100} = 33$$

D'après le tableau de variations, la quantité cherchée est 50 tonnes et le coût est 2800 euros

### Partie B

- 3) Le prix de vente **d'une tonne** de produit dépend de la quantité  $x$  produite et s'exprime, en centaines d'euros, par la relation :  $p(x) = 62 - \frac{x}{4}$ .

**3.a)** Déterminer la recette totale obtenue avec une production et une vente de 40 tonnes de produit.

Pour 40 tonnes, le prix de vente vaudra  $p(40)$  centaines d'euros,

$$p(40) = 62 - \frac{40}{4} = 52$$

Soit 5200 euros la tonne

La recette totale vaudra alors  $40 \times p(40)$  centaines d'euros,

$$40 \times p(40) = 40 \times 5200 = 208000$$

Soit une recette totale de 208000 euros.

**3.b)** Déterminer en fonction de la quantité  $x$  produite et vendue le montant de la recette totale  $R(x)$ .

Pour  $x \in [10 ; 100]$ ,

$$R(x) = x \times p(x) = x \left( 62 - \frac{x}{4} \right)$$

On généralise la question précédente.

$$R(x) = 62x - \frac{x^2}{4}$$

**4)** Le bénéfice  $B$ , en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de  $x$  tonnes de produit est égal, pour tout réel  $x$  de  $I$ , à :  $B(x) = R(x) - C(x)$ .

**4.a)** Montrer qu'alors  $B$  est la fonction définie sur  $I$  par  $B(x) = -0,45x^2 + 54x - 500$ .

Pour  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 62x - \frac{x^2}{4} - (0,2x^2 + 8x + 500) \\ &= 62x - \frac{x^2}{4} - 0,2x^2 - 8x - 500 \\ &= -0,45x^2 + 54x - 500 \end{aligned}$$

cqfd

**4.b)** Combien de tonnes l'entreprise doit produire et vendre afin d'obtenir un bénéfice maximum ? Donner le montant de ce bénéfice.

$B(x)$  est de la forme  $ax^2 + bx + c$ , avec  $a = -0,45$ ;  $b = 54$  et  $c = -500$

La représentation graphique est donc une parabole tournée vers le haut car  $a > 0$  et de sommet  $S(\alpha ; \beta)$

$$\text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-0,45)} = \frac{-54}{-0,9} = \frac{54}{9} = \frac{54}{9} \times 10 = 60$$

et

$$\beta = B(60) = -0,45 \times 60^2 + 54 \times 60 - 500 = 1120$$

On en déduit que l'entreprise doit vendre 60 tonnes pour un bénéfice maximal de 112000 euros.

Bien sur vous pouviez étudier les variations de la fonction  $B$  sur  $[10 ; 100]$

$$(B'(x) = -0,9x + 54 > 0) \Leftrightarrow x > 60$$

$x$	10	50	100
$B'(x)$		+	0
$B(x)$	-5	1120	400

On en déduit que l'entreprise doit vendre 60 tonnes pour un bénéfice maximal de 112000 euros.

***BROUILLON***