TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E02C

EXERCICE N°1 ***Les valeurs remarquables : cos(π/3), sin(π/3), cos(π/6) et sin(π/6)***

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère le cercle trigonométrique.

1) Démontrer que le triangle OMI est équilatéral.

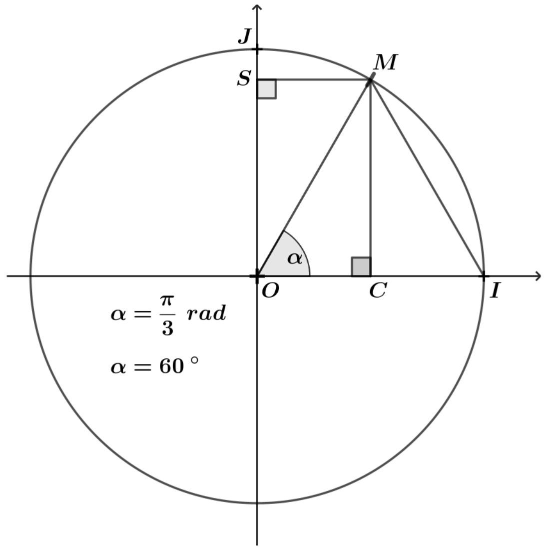
▪ On sait que $OM = OI = 1$

On en déduit que le triangle OMI est isocèle en O et ses angles à la base sont de même mesure.

▪ De plus, $\widehat{MOI} = \dfrac{\pi}{3} rad$.

Donc, $\widehat{OMI} = \widehat{MIO} = \dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3} rad$

▪ On en déduit que le triangle OMI est équilatéral.



2) Le point C est le projeté orthogonal de M sur (OI) .

2.a) Démontrer que (MC) est la médiatrice de $[OI]$.

▪ Le triangle OMI étant équilatéral, on a en particulier $MO = MI$.

Donc le point M appartient à la médiatrice du segment $[IO]$.

▪ On sait que la médiatrice d'un segment est perpendiculaire à la droite qui le supporte et que $(MC) \perp (OI)$.

Donc C appartient à la médiatrice du segment $[OI]$.

▪ On déduit des deux points précédents que (MC) est la médiatrice de $[OI]$.

2.b) En déduire que $OC = \dfrac{1}{2}$.

On sait que la médiatrice d'un segment le coupe perpendiculairement en son milieu.

On en déduit que C est le milieu de $[OI]$ et par conséquent que :

$OC = \dfrac{1}{2}$.

2.c) En remarquant que $\cos(\alpha) = OC$ et en utilisant les formules de seconde, démontrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ici $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, donc :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2.d) En utilisant une formule (obtenue par symétrie) du cours démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On sait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

En particulier, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ donne :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

3) Le point S est le projeté orthogonal du point M sur (OJ) .

3.a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OMC}$.

Dans le triangle OCM , rectangle en C , $\widehat{COM} = \frac{\pi}{3} rad$.

Donc : $\widehat{OMC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} rad$

3.b) Déterminer la longueur MC .

Dans le triangle OCM , rectangle en C ,

$$MC^2 + OC^2 = OM^2 \Leftrightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

MC étant une longueur, on en déduit que :

$$MC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.c) En remarquant que $\sin(\alpha) = OS = MC$ et en utilisant les formules de seconde, démontrer que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans le triangle OCM , rectangle en C , $\widehat{COM} = \frac{\pi}{3} rad$ et

$$\sin\left(\widehat{COM}\right) = \frac{MC}{OM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

3.d) En utilisant une formule (obtenue par symétrie) du cours démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

En particulier, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ donne :

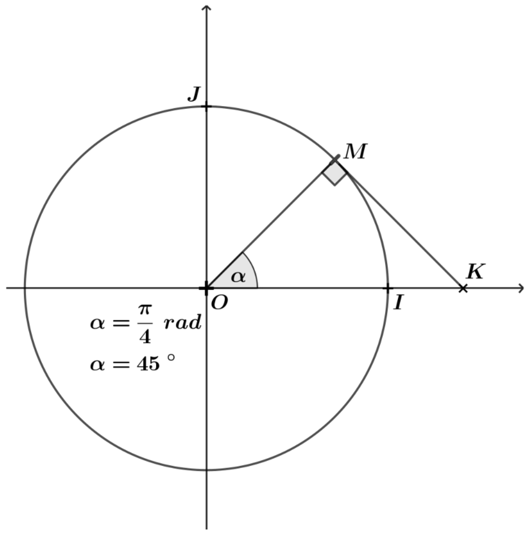
$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EXERCICE N°2 ***Les valeurs remarquables : cos(π/4) et sin(π/4)***

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère le cercle trigonométrique.



1) Démontrer que le triangle OMK, rectangle en M est également isocèle en M.

Dans le triangle OMK,

$\widehat{MKO} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $\widehat{MKO} = \widehat{KOM}$ et le triangle OMK est isocèle en M.

2) Démontrer que $OK = \sqrt{2}$.

Dans le triangle OMK, rectangle et isocèle en M.

On sait que :

$MK = OM = 1$

$OK^2 = OM^2 + OM^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

OK étant une longueur : $OK = \sqrt{2}$

3) En utilisant les formules de seconde, démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans le triangle OMK, rectangle en M.

$\cos(\widehat{KOM}) = \frac{OM}{OK} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\widehat{KOM}) = \frac{MK}{OK} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Or, $\widehat{KOM} = \frac{\pi}{4} rad$

Donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE N°3 Bonus : tan(π/3), tan(π/6) et tan(π/4)

On rappelle la formule de seconde (adaptée ici) :

$$\text{Si} \quad \alpha \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{alors} \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Déterminer les valeurs de tan(π/3), tan(π/6) , et tan(π/4).

- $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
- $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = \sqrt{3}$