

## FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Nous allons généraliser ce que nous avons appris sur la fonction carré. Il est donc judicieux d'avoir relu [ce cours](#) avant de commencer...

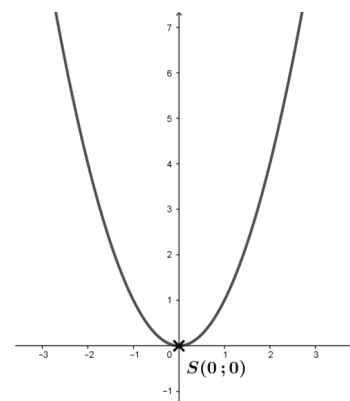
### I Jouons avec la parabole

Notons  $f$  la fonction carré, c'est à dire

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}.$$

Nous savons que sa représentation graphique est la parabole d'équation  $y = f(x)$  ou encore  $y = x^2$ .

Nous savons également que son sommet  $S$  a pour coordonnées  $(0 ; 0)$ .



#### I.1 Premier jeu

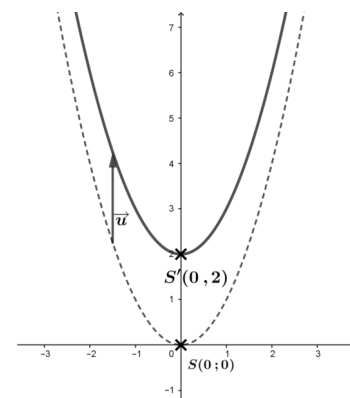
Amusons-nous à traduire cette parabole de deux unités selon l'axe des ordonnées et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(0 ; 2)$  ? c'est très bien!)

Nous n'avons pas changé les abscisses, par contre nous avons augmenté toutes les ordonnées de 2.

Notre nouvelle parabole a donc pour équation  $y = f(x)+2$  ou encore  $y = x^2+2$ . Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut

appeler  $g$  et telle que  $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+2 \end{cases}$

Son sommet  $S'$  a alors pour coordonnées  $(0 ; 2)$ .



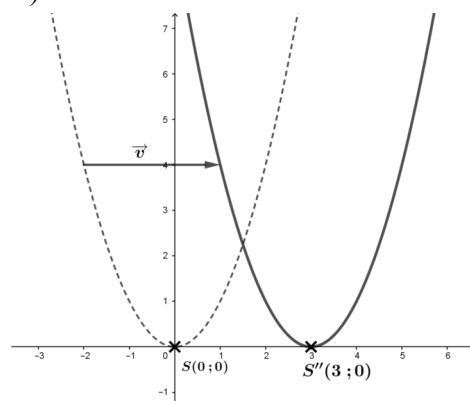
#### I.2 Deuxième jeu

Amusons-nous à traduire cette parabole de trois unités selon l'axe des abscisses et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur  $\vec{v}$  de coordonnées  $(3 ; 0)$  ? c'est très bien!)

Nous avons augmenté les abscisses de 3 mais nous n'avons pas changé les ordonnées. C'est à dire que si

$A(x_A ; y_A)$  est un point de la parabole de départ alors son image  $B(x_B ; y_B)$  est telle que :

$$\begin{cases} x_B = x_A + 3 \\ y_B = y_A \end{cases}.$$



De la première égalité, on déduit que  $x_A = x_B - 3$  et de la seconde, on déduit que  $y_B = y_A = f(x_A) = f(x_B - 3)$ . Notre nouvelle parabole a alors pour équation :  $y = f(x-3)$  ou encore  $y = (x-3)^2$ . (Comprenez bien d'où vient le « moins »). Elle représente une nouvelle fonction que l'on

peut appeler  $h$  et telle que  $h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-3)^2 \end{cases}$

Son sommet  $S''$  a alors pour coordonnées  $(3 ; 0)$ .

### I.3 Troisième jeu

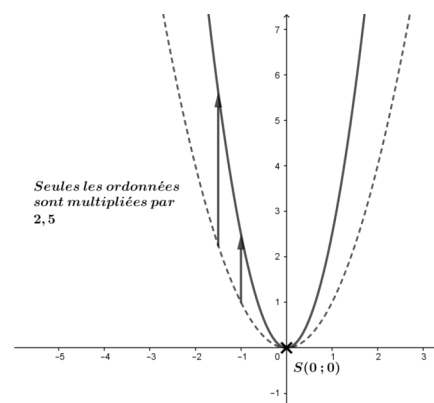
Amusons-nous à « déformer » cette parabole en multipliant les ordonnées par 2,5.

Notre nouvelle parabole a alors pour équation :  $y = 2,5 \times f(x)$  ou encore  $y = 2,5x^2$ .

Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler  $k$  et telle que

$$k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2,5x^2 \end{cases}$$

Son sommet reste le même :  $S(0 ; 0)$



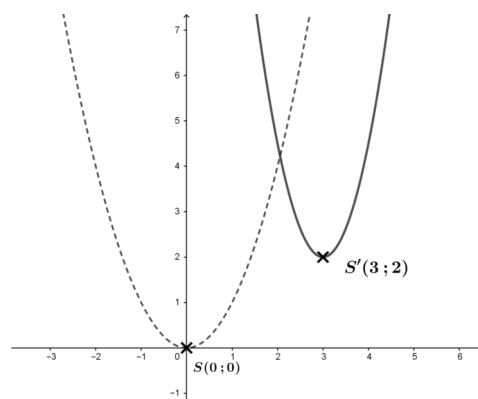
### I.4 Dernier Jeu

On combine les trois premiers jeux !

On obtient la parabole d'équation :  $y = 2,5(x-3)^2 + 2$  qui représente une fonction que l'on appelle  $l$  et

telle que  $l : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2,5(x-3)^2 + 2 \end{cases}$ .

Son sommet est alors le point  $S'(3 ; 2)$



Cliquer pour  
Visualiser

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Sur cette page, vous pourrez faire varier les trois paramètres ( $a=2,5$  ;  $\alpha=3$  et  $\beta=2$ ) afin d'observer en détail leur influence sur la parabole.

Rentrons à présent dans le vif du sujet...

## II Expressions des fonctions polynômes du second degré

### II.1 La forme développée réduite

#### Définition n°1. Le trinôme

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que pour tout réel  $x$ , on peut écrire  $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$

L'expression  $ax^2 + bx + c$  est appelée : Trinôme

#### Exemple n°1.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $l(x) = 2,5(x-3)^2 + 2$ .

On peut écrire :

$$l(x) = 2,5(x-3)^2 + 2$$

$$l(x) = 2,5[x^2 - 6x + 9] + 2$$

$$l(x) = 2,5x^2 - 15x + 24,5$$

Ainsi  $l(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a=2,5$ ,  $b=-15$  et  $c=24,5$

$l$  est donc une fonction polynôme du second degré.

#### Remarque n°1.

On devine, sur cet exemple, que toute fonction du type de celle que nous avons observée au dernier jeu est une fonction polynôme du second degré.

#### Exercice n°1.

Démontrez-le en partant de l'expression  $a(x - \alpha)^2 + \beta$  où  $a \neq 0$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels.

## II.2 La forme canonique

### Propriété n°1. (et définition)

Si  $f$  est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$

(avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ ) alors on peut l'écrire sous

sa forme canonique :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

### Remarque n°2.

C'est bien le « même  $a$  ».

Il faut retenir la formule de  $\alpha$  mais pas forcément celle de  $\beta$  car

$$\beta = f(\alpha)$$

### preuve : (de la propriété)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

(explications à la remarque n°3)

$$= a \left[ \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[ \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left[ \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right]$$

On a réduit au même dénominateur

$$= a \left[ \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right]$$

On a distribué  $a$

$$= a(x - \alpha)^2 + \beta$$

### Remarque n°3.

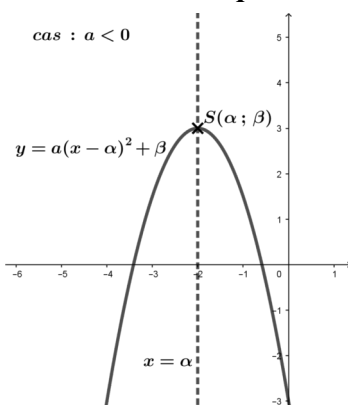
La troisième ligne semble peu naturelle... L'idée est la suivante :

$x^2 + \frac{b}{a}x$  est forcément le début de la première identité remarquable

$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ . En effet  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2$ . Le problème est

qu'il y a un terme « en trop », il faut donc l'enlever :  $-\left( \frac{b}{2a} \right)^2$

### Remarque n°4. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.



D'après nos petits jeux, nous pouvons dire que :

toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole

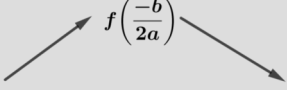
tournée vers le bas si  $a < 0$ , tournée vers le haut si  $a > 0$ ,

de sommet  $(\alpha ; \beta)$  et admettant pour axe de symétrie  $x = \alpha$

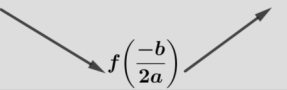
**Remarque n°5. Tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré**

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ )

$$a < 0$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

$$a > 0$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

**II.3 La forme factorisée**

Dans ce paragraphe,  $f$  est une fonction polynôme du second degré définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Nous savons que l'on peut écrire  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$ .

Ajoutons une notation supplémentaire :  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

On peut alors écrire :

$$f(x) = a \left[ (x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Si  $\Delta < 0$  alors la factorisation n'est pas possible dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\Delta = 0$   $f(x) = a(x - \alpha)^2$

Si  $\Delta > 0$  alors

$$f(x) = a \left( x - \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

et comme  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  :

$$f(x) = a \left( x - \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

ou encore

$$f(x) = a \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Nous obtenons la propriété suivante :

**Propriété n°2. Forme factorisée**

Soit  $f$  est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ )

et posons  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,

▪ Si  $\Delta < 0$  alors  $f(x)$  n'admet pas de factorisation dans  $\mathbb{R}$

▪ Si  $\Delta = 0$  alors  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$

▪ Si  $\Delta > 0$  alors  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Remarque n°6. Résolution des équations du second degré**

La propriété suivante nous donne une méthode de résolution des équations à une inconnue du second degré.

On fait en sorte d'avoir zéro pour le membre de droite puis on réduit le membre de gauche de façon à obtenir un trinôme, on doit alors résoudre :

$$ax^2+bx+c = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels et } a \neq 0)$$

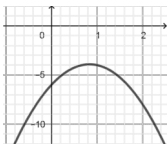
$$ax^2+bx+c = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels et } a \neq 0)$$

Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$  le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet une solution double : $-\frac{b}{2a}$	L'équation admet deux solutions :
		$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
		et
		$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

**Remarque n°7.**

$x_1$  et  $x_2$  sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

**Exemple n°2.**


Réolvons les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ .

$$\blacksquare -3x^2+5x-6 = 0$$

Posons  $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = -47$  le discriminant de cette équation.

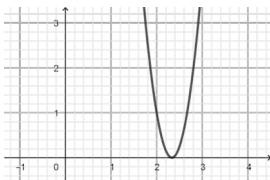
Comme  $\Delta < 0$ , cette équation n'admet aucune solution réelle.

$$\blacksquare 9x^2-42x+49 = 0$$

Posons  $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 9 \times 49 = 0$  le discriminant de cette équation.

Comme  $\Delta = 0$ , cette équation admet une unique solution :  $\frac{7}{3}$

$$\left( \frac{-(-42)}{2 \times 9} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3} \right)$$

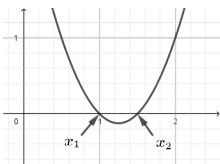


$$\blacksquare 2x^2-5x+3 = 0$$

Posons  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$  le discriminant de cette équation.

Comme  $\Delta > 0$ , cette équation admet deux solutions : 1 et 1,5

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1,5$$


**Remarque n°8.**

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas défini  $a$ ,  $b$  et  $c$ , nous n'avons donc pas utilisé ces lettres...

### III Le résumé du cours

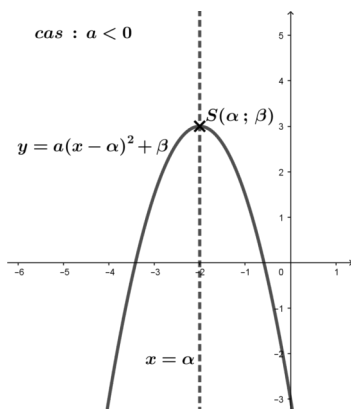
Fonction  
polynôme du  
second degré,  
Trinôme

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que pour tout réel  $x$ , on peut écrire  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ .  
L'expression  $ax^2 + bx + c$  est appelée : Trinôme

Forme canonique

Si  $f$  est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ ) alors on peut l'écrire sous sa forme canonique :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$  on a aussi  $\beta = f(\alpha)$



Cliquer pour  
Visualiser  
 $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Tableau de  
variation

toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole

tournée vers le bas si  $a < 0$ , tournée vers le haut si  $a > 0$ ,

de sommet  $(\alpha; \beta)$  et admettant pour axe de symétrie  $x = \alpha$

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ )

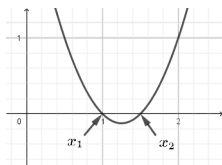
$a < 0$

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

$a > 0$

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Forme factorisée



Soit  $f$  est une fonction polynôme du second degré telle pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ ) et posons  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,

▪ Si  $\Delta < 0$  alors  $f(x)$  n'admet pas de factorisation dans  $\mathbb{R}$

▪ Si  $\Delta = 0$  alors  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$

▪ Si  $\Delta > 0$  alors  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$  (avec  $a, b$  et  $c$  des réels et  $a \neq 0$ )

Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$  le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$

L'équation n'admet aucune solution réelle.

$\Delta = 0$

L'équation admet une solution double :  $\frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Équation du  
second degré