CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE

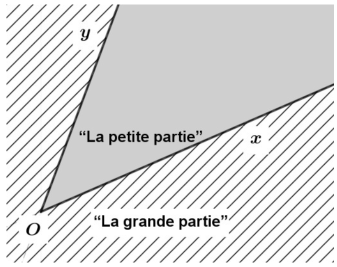
Remarque n°1.

Il peut être utile de se rafraîchir la mémoire avant de commencer : on pourra lire ce cours. Nous travaillerons toujours dans le plan.

I Définir le produit scalaire de deux vecteurs

Remarque n°2. ***Angle géométrique***

On ne définira pas ce qu'est un **angle géométrique**, on aura juste en tête une image : deux demi-droites de même origine séparent un plan en deux parties, l'angle géométrique qu'elle définissent est « la plus petite des deux parties ». $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOx}$ sont deux noms pour un même angle géométrique (*mais pas pour un angle orienté*).



θ se lit thêta

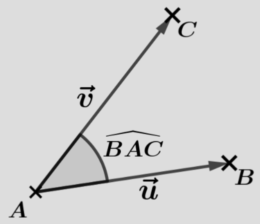
Quand on parlera de la **mesure d'un angle géométrique**, il faudra comprendre : **le réel compris entre 0 et π inclus** qui, exprimé en radian, peut correspondre à une mesure de l'angle donné.

Si $\theta \in [0\ ,\ \pi]$ est une mesure l'angle $\widehat{xOy}$ alors $-\theta$, $\theta+2\pi$,... peuvent l'être aussi. On choisira θ .

Définition n°1. ***Angle entre deux vecteurs***

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



Remarque n°3.

On fera comme tout le monde et on notera abusivement $\widehat{BAC}$ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Remarque n°4.

λ se lit lambda

α se lit alpha

Donnons nous un réel non nul λ , et notons α la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

- Si $\lambda > 0$, il paraît acceptable d'admettre que $\left(\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{u},\lambda\,\vec{v}}\right)$ définissent le même angle géométrique que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et donc que leur mesure vaut également α .
- Si $\lambda < 0$, il paraît moins facile d'admettre que $\left(\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{u},\lambda\,\vec{v}}\right)$ ont une mesure égale à $\pi-\alpha$ (Pour s'en convaincre, on regardera le cercle trigonométrique...)

Définition n°2. ***Norme d'un vecteur***

Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$ le réel positif défini par :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \underbrace{AB}_{\text{la longueur } AB}}$$

Définition n°3. ***Une définition du produit scalaire avec le cosinus***

Définition avec le cosinus

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)}$$

Remarque n°5. Et si l'un au moins des vecteurs est le vecteur nul ?

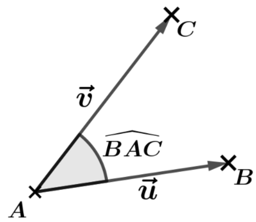
On ne peut pas définir un angle entre un vecteur et le vecteur nul, mais comme $\|\vec{0}\| = 0$, on convient qu'alors le produit scalaire vaut zéro.

Exemple n°1.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

$$= AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$



Propriété n°1. Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

$$\boxed{\left(\vec{u}\right)^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

preuve :

Évidente en se souvenant que $\cos(0) = 1$ ...

Propriété n°2. Le produit scalaire est symétrique

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

preuve :

▪ $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right)$ sont un seul et même angle géométrique donc leur cosinus respectifs sont égaux.

▪ De plus, comme $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont des nombres réels : $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|$.

▪ Donc : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}$

Propriété n°3. Compatibilité avec la multiplication par un réel (vecteur de gauche).

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et λ un nombre réel, alors

$(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

preuve :

▪ Si l'un au moins des deux vecteurs est nul alors l'égalité est évidente.

▪ Supposons, à présent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et notons α « la » mesure de $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

▫ Si $\lambda = 0$ alors $\lambda\,\vec{u} = \vec{0}$ et donc $(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = 0$. De plus, comme $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est un nombre réel, $0\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a bien $(0\,\vec{u})\cdot\vec{v} = 0\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

▫ Si $\lambda > 0$ alors $\|\lambda\,\vec{u}\| = |\lambda|\times\|\vec{u}\| = \lambda\times\|\vec{u}\|$. De plus, $\left(\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}\right)$ a pour mesure α (voir la remarque n°4). Donc :

$$(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \|\lambda\,\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\Bigg(\underbrace{\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}}_{\alpha}\Bigg) = \lambda\left(\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\Bigg(\underbrace{\widehat{\vec{u},\vec{v}}}_{\alpha}\Bigg)\right) = \lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

▫ Si $\lambda < 0$ alors $\|\lambda\,\vec{u}\| = |\lambda|\times\|\vec{u}\| = -\lambda\times\|\vec{u}\|$. De plus, $\left(\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}\right)$ a pour mesure $\pi-\alpha$ (voir la remarque n°4). Donc :

$$(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \|\lambda\,\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\Bigg(\underbrace{\widehat{\lambda\,\vec{u},\vec{v}}}_{\pi-\alpha}\Bigg) = -\lambda\,\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left(-\cos\Bigg(\underbrace{\widehat{\vec{u},\vec{v}}}_{\alpha}\Bigg)\right) = \lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

▪ Dans tous les cas, on a bien $(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ *cqfd*

Propriété n°4. à droite ça marche aussi

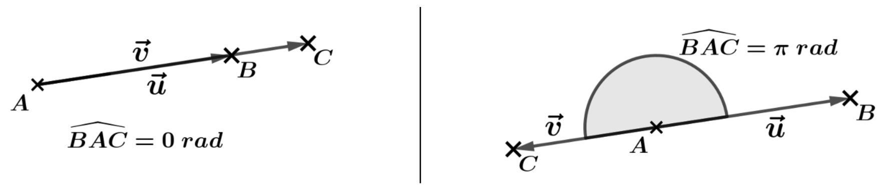
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et λ un nombre réel, alors

$\vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

preuve :

Par symétrie du produit scalaire (propriété n°1) et la propriété n°2 , le résultat demeure vrai. *cqfd*

Remarque n°6.



Si $\widehat{BAC} = 0$ rad ou $\widehat{BAC} = \pi$ rad alors les points A, B et C sont alignés (éventuellement B et C peuvent même être confondus si $AB = AC$).
Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction : ils sont colinéaires.
Comme $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, on obtient :

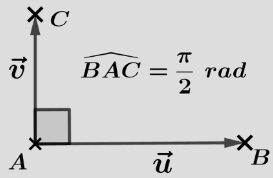
Propriété n°5. Produit scalaire et colinéarité

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et de **même sens** si et seulement si
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et de **sens contraires** si et seulement si
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

Définition n°4. Vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Si les droites **(AB) et (AC)** sont **perpendiculaires** alors on dit que les **vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.**



Remarque n°7.

Dans ce cas, et seulement dans ce cas $\cos(\widehat{BAC}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Par conséquent :

Propriété n°6. Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si **$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$**

Remarque n°8. Et si l'un au moins des vecteurs est le vecteur nul ?

On ne peut pas définir un angle entre un vecteur et le vecteur nul, mais comme $\|\vec{0}\| = 0$, on convient qu'alors le produit scalaire vaut zéro.

Remarque n°9.

D'après les remarques n°4 et n°7,
Le vecteur nul est à la fois colinéaire et orthogonal à tout vecteur.

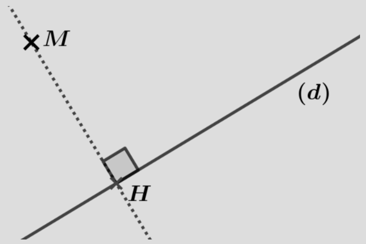
II D'autres façons de définir le produit scalaire

Remarque n°10.

Il peut parfois être utile, de voir les mêmes choses sous des angles différents.
Ici par exemple, il est possible de définir autrement le produit scalaire.
Par contre, deux définitions différentes d'un même objet doivent être équivalentes. De plus, en mathématiques, quand on a choisi une définition, les autres deviennent des propriétés qu'il faut alors démontrer à partir de la définition choisie. Nous admettrons ces démonstrations à notre niveau.

Définition n°5. ***Projeté orthogonal d'un point sur une droite***

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M .



Propriété n°7. ***Définition du produit scalaire avec la projection orthogonale (admise)***

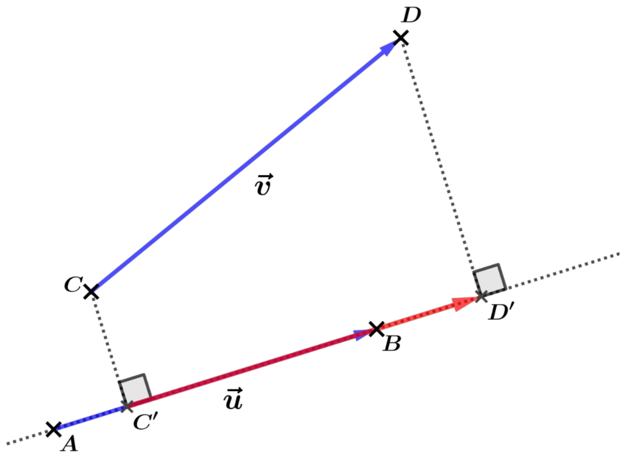
Définition avec le projeté orthogonal

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ainsi que les points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB) . On a alors :

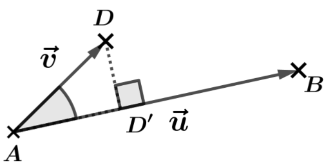
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB\times C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB\times C'D' & \text{sinon} \end{cases}$$

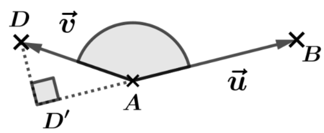
(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$)

Le cas général



Deux cas particuliers, pour comprendre : C et A confondus.





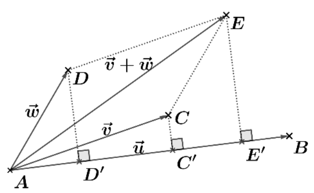
Remarque n°11. ***Une idée de la preuve***

Le cas général, peut toujours être ramené à l'un des deux cas particuliers en choisissant correctement le représentant du vecteur $\vec{v}$. On voit ainsi le lien avec la définition utilisant le cosinus…On remarquera aussi que dans le triangle ADD' rectangle en D' , on a $\cos\left(\widehat{DAD'}\right) = \dfrac{AD'}{AD}$ et on verra encore mieux le lien avec la première définition….

Propriété n°8. ***Compatibilité avec la somme de deux vecteurs (admise)***

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Remarque n°12. ***Une idée de la preuve***



- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ donc $AC' = DE'$ d'où $AE' = AD' + AC'$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = AB\times AE' = AB\times(AD'+AC') = AB\times AD' + AB\times AC'$
  $= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Propriété n°9. ***Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire (admise)***

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs ainsi que λ et μ deux nombres réels.

▪ symétrie

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$$

▪ bilinéarité

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})} \quad \boxed{(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}} \quad \boxed{(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v}}$$

Remarque n°13. ***Une idée de la preuve***

Les propriétés n°2 , 3 , 4 et 8 (qui ne sont pas « mises en valeur » par un fond gris) servent à établir cette propriété n°9 qui, elle, est par contre à retenir absolument !

Propriété n°10. ***Définition du produit scalaire par les normes***

Définition avec les normes

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}$$

preuve :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans la dernière égalité, on obtient le résultat. *cqfd*

Remarque n°14.

C'est très bien tout ça, mais quand on parle de vecteurs, on utilise souvent des coordonnées (revoir le paragraphe III du cours de seconde) pour transformer nos questions géométriques en questions algébriques. Peut-on donc « traduire le produit scalaire en terme de coordonnées » ?

Propriété n°11. ***Définition du produit scalaire avec les coordonnées (admise)***

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si leurs coordonnées **dans un repère orthonormé** sont $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

Remarque n°15. ***Une idée de la preuve***

Notons $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2})$ une base de vecteurs pour notre repère orthonormé.

▪ On a alors : $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$ (ortho) et $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$ (normé) .

▪ On sait alors que $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, $\vec{v} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$,

et : $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{e_1}+y\vec{e_2})\cdot(x'\vec{e_1}+y'\vec{e_2})$

Il reste alors à utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le premier point pour finir… Essayez !

III Quelques applications du produit scalaire

III.1 Un ensemble de points défini par un produit scalaire

Propriété n°12.

Soit A et B deux points du plan, I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-\frac{1}{4}AB^2}$$

preuve :

(L'idée la suivante : $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont « deux choses qui varient », c'est trop ! On cherche à se ramener « à une seule chose qui varie » d'où l'idée de passer par le point I qui « fera le lien »)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) && \text{(relation de Chasles)}\\
&= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) && \text{(car I est le milieu de } [AB])\\
&= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA} && \text{(bilinéarité)}\\
&= (\overrightarrow{MI})^2 - (\overrightarrow{IA})^2 &&\\
&= MI^2 - IA^2 && \text{(or } IA = \tfrac{1}{2}AB\text{)}\\
&= MI^2-\frac{1}{4}AB^2 &&
\end{aligned}$$

cqfd

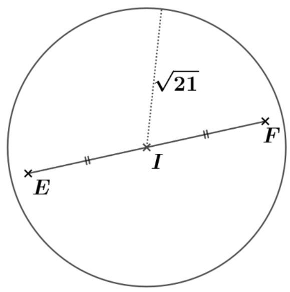
Méthode n°1. Lieu géométrique défini par un produit scalaire

Énoncé

Dans le plan, on donne les points E et F tels que le segment $[EF]$ mesure 8 cm.
Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = 5$.

Réponse

▪ Notons I le milieu de $[EF]$.



▪ On sait que :
$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = MI^2-\frac{1}{4}EF^2$

▪ En remplaçant :
$5 = MI^2-\frac{1}{4}\times 8^2$

▪ En isolant MI^2 :
$MI^2 = 5+\frac{1}{4}\times 8^2 = 21$

▪ Comme MI est une longueur, on en déduit que $MI = \sqrt{21}$.

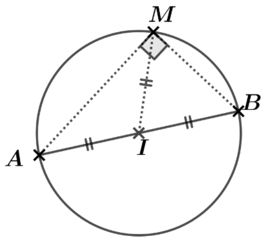
▪ L'ensemble cherché est donc :

$\boxed{\text{le cercle de centre, le milieu de } [EF]\text{, et de rayon } \sqrt{21} \text{ cm}}$

Propriété n°13. Un cas particulier : lien entre triangle rectangle et cercle circonscrit

Soit A et B deux points du plan, l'ensemble des points M du plan tels que que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

preuve :



Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle

▪ On pose I le milieu de $[AB]$ ainsi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-\frac{1}{4}AB^2$.

▪ Si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

En remplaçant : $0 = MI^2-\frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

et comme MI est une longueur : $MI = \frac{AB}{2}$ donc M est sur le cercle.

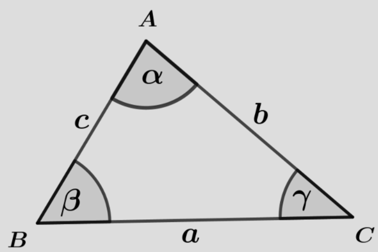
▪ Réciproquement si M est sur le cercle alors $MI = \frac{AB}{2}$ d'où $MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ et donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ *cqfd*

III.2 Un prolongement du théorème de Pythagore

Propriété n°14. Loi des cosinus (Théorème d'Al-Kashi)

Dans un triangle ABC , on pose :
$a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$
ainsi que :
$\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$
On a alors :

$$\boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$



preuve :

$$\begin{aligned}
a^2 &= BC^2\\
&= \overrightarrow{BC}^2\\
&= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\
&= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= BA^2 + AC^2 - 2BA\times AC\times\cos(\widehat{BAC})\\
&= c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha
\end{aligned}$$

cqfd

Remarque n°16.

On a bien sûr les deux autres autres formules :

$\boxed{b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta}$ et $\boxed{c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$

qui se démontrent de la même façon. (Essayez d'en faire une sans le modèle)

Remarque n°17. Un peu d'histoire

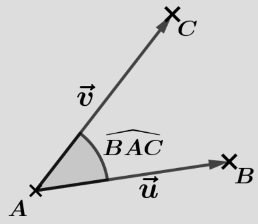
Al-Kashi (Mathématicien et Astronome Perse) est né vers 1380 et décédé en 1429. Il énonce ce théorème dans son livre Miftah al-hisab (« Clé de l'arithmétique »).

IV Le résumé du cours

Le vocabulaire à connaître

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

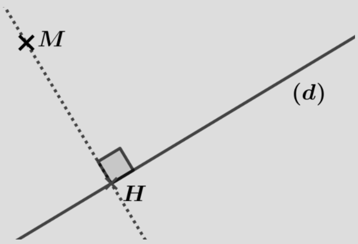
On appelle angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$ le réel positif défini par :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \underbrace{AB}_{\text{la longueur } AB}}$$

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M .



Les différentes définitions du produit scalaire

Définition avec le cosinus

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})}$$

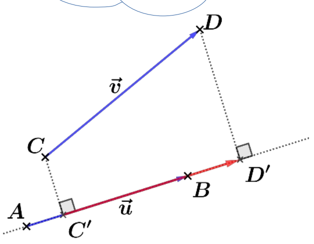
(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors on convient que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$)

Définition avec le projeté orthogonal

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ainsi que les points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB) . On a alors :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB\times C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB\times C'D' & \text{sinon} \end{cases}}$$

(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors on convient que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$)



Définition avec les normes

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}$$

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si leurs coordonnées **dans un repère orthonormé** sont $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

Les propriétés à connaître

α : *alpha*
β : *bêta*
γ : *gamma*
λ : *lambda*
μ : *mu*
θ : *thêta*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs ainsi que λ et μ deux nombres réels.

▪ symétrie

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$$

▪ bilinéarité

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})} \qquad \boxed{(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}} \qquad \boxed{(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v}}$$

▪ carré scalaire

$$\boxed{(\vec{u})^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

▪ produit scalaire et colinéarité

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

▪ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et de **même sens** si et seulement si

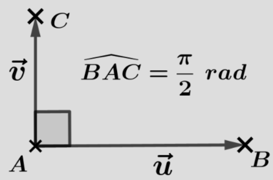
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

▪ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et de **sens contraires** si et seulement si

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

▪ vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Si les droites (AB) **et** (AC) sont **perpendiculaires**
alors on dit que les **vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.**



▪ produit scalaire et orthogonalité

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si **$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$**

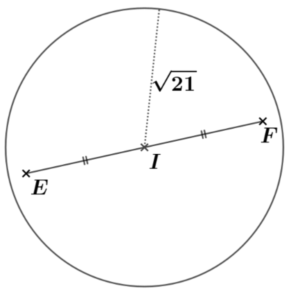
▪ particularité du vecteur nul : $\vec{0}$

▪ Le vecteur nul est à la fois colinéaire et orthogonal à tout vecteur.

▪ Si un vecteur est colinéaire à tous les vecteurs du plan alors c'est le vecteur nul

▪ Si un vecteur est orthogonal à tous les vecteurs du plan alors c'est le vecteur nul

Les applications à connaître



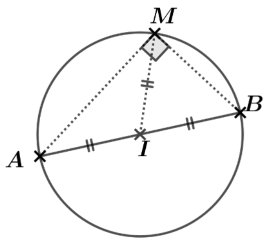
(Pour répondre à une question du type : Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = un\,nombre$)

Soit A et B deux points du plan, I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$$

On trouve le rayon (si il existe) en isolant MI^2 :

$$MI^2 = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \frac{1}{4}AB^2$$



Le cas particulier : lien entre triangle rectangle et cercle circonscrit

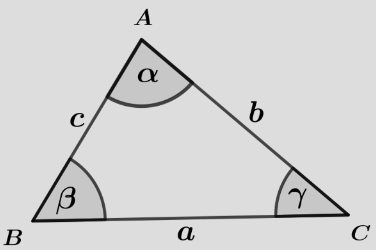
Soit A et B deux points du plan, l'ensemble des points M du plan tels que que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Loi des cosinus (ou théorème d'Al-Kashi)

α : *alpha*
β : *bêta*
γ : *gamma*
λ : *lambda*
μ : *mu*
θ : *thêta*

Dans un triangle ABC , on pose :
$a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$
ainsi que :
$\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$
On a alors :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha}$$



ainsi que $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta}$ et $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma}$

V Le résumé des exercices