EXERCICE N°2

On lance 8 fois successivement un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenu sur les huit lancers.

On ne va bien sûr pas construire l'arbre en entier.

Chaque lancer a une probabilité de $\frac{1}{6}$ de donner un 6 (on pourrait appeler cela un Succès et le noter S) et de $\frac{5}{6}$ de ne pas en donner (On pourrait appeler cela un Échec et le noter $\overline{S}$).

On peut raisonnablement supposer que les lancers sont indépendants et donc qu'à chaque étape les probabilités restent les mêmes.

Arrivé au bout des huit épreuves, X peut prendre les valeurs entières de 1 à 8 inclus.

1.a) Calculer $P(X=0)$.

Pour arriver à $\{X=0\}$ il y a un seul chemin et toutes les branches ont pour probabilité $\frac{5}{6}$.

Autrement dit , il y a **1** chemin comportement **8** fois la probabilité $\frac{5}{6}$ et **0** fois la probabilité $\frac{1}{6}$

$$P(X=0)=\mathbf{1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathbf{8}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathbf{0}}$$

$$\boxed{P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^{8}}\approx 0{,}233$$

1.b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 sur les huit lancers ?

Il s'agit de calculer $P(X\geqslant 1)$:

Le « piège » est de tenter de calculer $P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=8)$

Or :

$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$\boxed{P(X\geqslant 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{8}}\approx 0{,}767$$

2) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibrée à six faces pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 devienne supérieure ou égale à 95 % ?

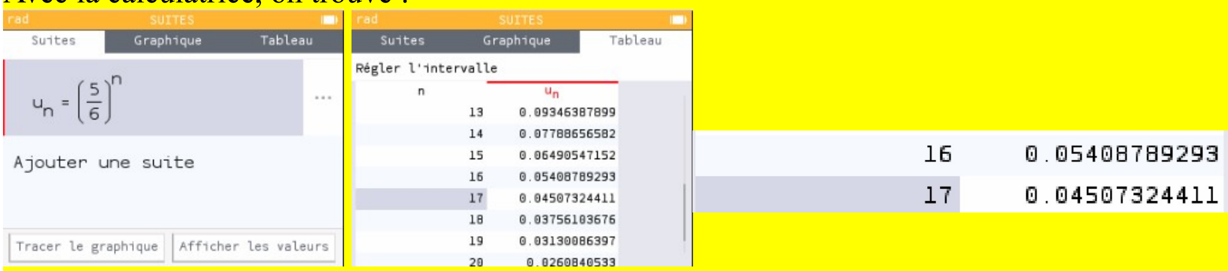
Cette fois, le dé n'est plus lancé 8 fois mais *n* fois avec *n* un nombre entier.

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$,

$$P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\geqslant 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\leqslant 0{,}05$$

Avec la calculatrice, on trouve :



$$\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\approx 0{,}054 > 0{,}05 \quad\text{et}\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{17}\approx 0{,}045 < 0{,}05$$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il faut lancer le dé au moins 17 fois}}$ pour avoir au moins 95 % de chance d'obtenir un six