LA FONCTION EXPONENTIELLE E02C

EXERCICE N°1 Résoudre une équation (niveau 0)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^x = 1$ **2)** $e^x = e^{-1}$ **3)** $e^x - e = 0$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^x = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

2) $e^x = e^{-1}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Ainsi $\boxed{S = \{-1\}}$

3) $e^x - e = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$

Ainsi $\boxed{S = \{1\}}$

EXERCICE N°2 Résoudre une équation (niveau 1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{2x+4} = 1$ **2)** $e^{-3x+7} = e^{-2}$ **3)** $e^{x^2} - e = 0$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^{2x+4} = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^{2x+4} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+4} = e^0 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Ainsi $\boxed{S = \{-2\}}$

2) $e^{-3x+7} = e^{-2}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^{-3x+7} = e^{-2} \Leftrightarrow -3x+7 = -2 \Leftrightarrow x = 3$

Ainsi $\boxed{S = \{3\}}$

3) $e^{x^2} - e = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ou } x=1)$

Ainsi $\boxed{S = \{-1\ ,\ 1\}}$

EXERCICE N°3 Résoudre une inéquation (niveau 0)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $e^x > e$ **2)** $e^x \leqslant 0$ **3)** $e^x < e^{-2}$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^x > e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1\ ;+\infty[$

Ainsi $\boxed{S =]1\ ;+\infty[}$

2) $e^x \leqslant 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x \leqslant 0$

Or la fonction exponentielle est strictement positive. Soit $x \in \mathbb{R}$,

Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$

3) $e^x < e^{-2}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x < e^{-2} \Leftrightarrow x < -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ;-2[$

Ainsi $\boxed{S =]-\infty\ ;-2[}$

EXERCICE N°4 ***Résoudre une inéquation (niveau 1)***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{3x+1} > 1$ **2)** $e^{-2x+1} \geqslant e^4$ **3)** $e^{2x+1}+e^{5x-7} < 0$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^{3x+1} > 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{3x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{3x+1} > e^0 \Leftrightarrow 3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-1}{3} \,;\, +\infty\right[$$

Ainsi $\boxed{S = \left]\frac{-1}{3} \,;\, +\infty\right[}$

2) $e^{-2x+1} \geqslant e^4$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-2x+1} \geqslant e^4 \Leftrightarrow -2x+1 \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty \,;\, -\frac{3}{2}\right[$$

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty \,;\, -\frac{3}{2}\right[}$

On reste vigilant

3) $e^{2x+1}+e^{5x-7} < 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^{2x+1}+e^{5x-7} < 0$

Or la fonction exponentielle est strictement positive.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$e^{2x+1} > 0$ et $e^{5x-7} > 0$

d'où

$e^{2x+1}+e^{5x-7} > 0$

On ne risque donc pas de trouver une solution à notre équation…

Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$

EXERCICE N°5 ***Résoudre une équation (niveau 2)***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^x \times e^{2x} = 1$ **2)** $\left(e^x\right)^3 = e$ **3)** $\dfrac{e^{3x}}{e^2} = e$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^x \times e^{2x} = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^x \times e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{e^{x+2x} = e^0}_{\text{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow \underbrace{3x = 0}_{\text{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

2) $\left(e^x\right)^3 = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow \left(e^x\right)^3 = e \Leftrightarrow e^{3x} = e^1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

3) $\dfrac{e^{3x}}{e^2} = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{e^{3x}}{e^2} = e \Leftrightarrow e^{3x-2} = e^1 \Leftrightarrow 3x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}}$

EXERCICE N°6 Résoudre une inéquation (niveau 2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{x}\left(e-e^{-x}\right) > e^{3}-1$ **2)** $e^{2x-3} \leqslant e^{x}\times e^{-7x+2}$ **3)** $e^{x+2}\left(-e^{-2}+1\right) \geqslant -e^{x}+e^{5}$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^{x}\left(e-e^{-x}\right) > e^{3}-1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & e^{x}\left(e-e^{-x}\right) > e^{3}-1 \\
\Leftrightarrow\ & e^{x+1}-1 > e^{3}-1 \\
\Leftrightarrow\ & e^{x+1} > e^{3} \\
\Leftrightarrow\ & x+1 > 3 \\
\Leftrightarrow\ & x > 2 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left]2\ ;\ +\infty\right[
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{S = \left]2\ ;\ +\infty\right[}$

2) $e^{2x-3} \leqslant e^{x}\times e^{-7x+2}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & e^{2x-3} \leqslant e^{x}\times e^{-7x+2} \\
\Leftrightarrow\ & e^{2x-3} \leqslant e^{-6x+2} \\
\Leftrightarrow\ & 2x-3 \leqslant -6x+2 \\
\Leftrightarrow\ & 8x \leqslant 5 \\
\Leftrightarrow\ & x \leqslant \frac{5}{8} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{5}{8}\right]
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ \frac{5}{8}\right]}$

3) $e^{x+2}\left(-e^{-2}+1\right) \geqslant -e^{x}+e^{5}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & e^{x+2}\left(-e^{-2}+1\right) \geqslant -e^{x}+e^{5} \\
\Leftrightarrow\ & -e^{x}+e^{x} \geqslant -e^{x}+e^{5} \\
\Leftrightarrow\ & e^{x} \geqslant e^{5} \\
\Leftrightarrow\ & x \geqslant 5 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left[5\ ;\ +\infty\right[
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{S = \left[5\ ;\ +\infty\right[}$

EXERCICE N°7 Résoudre une équation (niveau 3)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(x+2)(e^x-1) = 0$ **2)** $(e^{-x}-e)^2 = 0$ **3)** $e^x(-2x+4) = 0$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

1) $(x+2)(e^x-1) = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S$

$\Leftrightarrow (x+2)(e^x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2 = 0 \quad \text{ou} \quad e^x-1 = 0)$

$\Leftrightarrow (x = -2 \quad \text{ou} \quad e^x = 1)$

$\Leftrightarrow (x = -2 \quad \text{ou} \quad e^x = e^0)$ *pas utile sur une copie*

$\Leftrightarrow (x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 0)$

$\Leftrightarrow x \in \{-2\ ;\ 0\}$

Ainsi $\boxed{S = \{-2\ ;\ 0\}}$

2) $(e^{-x}-e)^2 = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$x \in S$

$\Leftrightarrow (e^{-x}-e)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}-e = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e^1$ *pas utile sur une copie*

$\Leftrightarrow -x = 1$

$\Leftrightarrow x = -1$

$\Leftrightarrow x \in \{-1\}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

3) $e^x(-2x+4) = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$x \in S$

$\Leftrightarrow e^x(-2x+4) = 0$

$\Leftrightarrow (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad -2x+4 = 0)$

$\underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad}_{car\ \exp\ ne\ s'annule\ pas} \quad -2x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

$\Leftrightarrow x \in \{-2\}$

Ainsi $\boxed{S = \{-2\}}$

EXERCICE N°8 Résoudre une inéquation (niveau 4)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^x - 3xe^x = 0$

2) $xe^x - x = 0$

3) $-2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0$

4) $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

1) $e^x - 3xe^x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & e^x - 3xe^x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^x(1-3x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad 1-3x = 0) \\
& \underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad}_{\text{car exp ne s'annule pas}} 1-3x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -3x = -1 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

2) $xe^x - x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & xe^x - x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(e^x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x - 1 = 0) \\
\Leftrightarrow\ & (x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x = 1) \\
\Leftrightarrow\ & (x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \{0\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

3) $-2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & -2e^{x+1} + 5xe^{x+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{x+1}(-2+5x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad -2+5x = 0) \\
& \underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad}_{\text{car exp ne s'annule pas}} -2+5x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 5x = 2 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{2}{5} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{\frac{2}{5}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}$

4) $2xe^{-x}-x^2e^{-x} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$
\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & e^{-x}\left(2x-x^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-x}\times x(2-x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{-x} = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0\right) \\
\underbrace{\Leftrightarrow\qquad\qquad}_{car\ \exp\ ne\ s'annule\ pas}\ & \left(x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2\right) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \{0\ ;\ 2\}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\ ;\ 2\}}$