

CALCUL LITTÉRAL

I Développer et réduire une expression

Définition n°1.

Développer c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Remarque n°1.

Réduire une expression, c'est « regrouper les termes semblables » et faire les calculs

Exemple n°1.

$$\begin{array}{ccccc} (2x+3)(x-4) & = & 2x^2-8x+3x-12 & = & 2x^2-5x-12 \\ \text{produit} & \rightarrow & \text{somme} & \rightarrow & \text{expression réduite} \end{array}$$

I.1 La distributivité

Dans toute la suite de ce chapitre, a, b, c, d et k sont des nombres.

Propriété n°1.

Simple distributivité

$$\boxed{k(a+b)=ka+kb} \quad \text{et} \quad \boxed{k(a-b)=ka-kb}$$

Exemple n°2.

$$3x(7+2x)=21x+6x^2 \quad \text{et} \quad 3x(7-2x)=21x-6x^2$$

Remarque n°2.

$$(7+2x) \times 3x = 3x(7+2x)$$

Propriété n°2.

Double distributivité

$$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

Remarque n°3.

On n'oublie pas d'appliquer la règle des signes.

Méthode n°1.

$$\begin{array}{ll} (2x+3)(x-4) & \text{L1} \\ = (+2x) \times (+x) + (+2x) \times (-4) + (+3) \times (+x) + (+3) \times (-4) & \text{L2} \\ = 2 \times x - 2x \times 4 + 3 \times x - 3 \times 4 & \text{L3} \\ = 2x^2 - 8x + 3x - 12 & \text{L4} \\ = 2x^2 - 5x - 12 & \text{L5} \end{array}$$

L2 ne s'écrit pas mais sert à trouver les signes de L3 en se rappelant que chaque flèche représente une multiplication. Il suffit d'appliquer la règle des signes au fur et à mesure.

L3 n'est pas nécessaire sur une copie (loin de là)

Pour résumer L2 et L3 sont des étapes mentales et seules L1 L4 et L5 sont à écrire.

Remarque n°4.

Si il y a plus de termes dans les parenthèses, il suffit d'ajouter assez de flèches que ce soit dans la propriété n°1 ou dans la n°2.

Exercice n°1.

Développer et réduire :

$$A = -2x(7-3x) \quad ; \quad B = (4x-3)(5-3x) \quad \text{et} \quad C = (2x+3y)(4-2z)$$

I.2 Les identités remarquables

Propriété n°3. 1^{re} identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

preuve : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple n°3.

$$(8+3x)^2 = 8^2 + 2 \times 8 \times 3x + (3x)^2 = 64 + 48x + 9x^2 = 9x^2 + 48x + 64$$

Remarque n°5.

Il est de coutume d'ordonner selon les puissances décroissantes de l'inconnue.

Propriété n°4. 2^e identité remarquable

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

preuve : $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple n°4.

$$(8-3x)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 3x + (3x)^2 = 64 - 48x + 9x^2 = 9x^2 - 48x + 64$$

Propriété n°5. 3^e identité remarquable

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

preuve : $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemple n°5.

$$(8-3x)(8+3x) = 8^2 - (3x)^2 = 64 - 9x^2 = -9x^2 + 64$$

Exercice n°2.

Développer et réduire :

$$D = (1,5x+2)^2 \quad ; \quad E = (3x-2y)^2 \quad ; \quad F = (2x-1)(2x+1)$$

Méthode n°2. Développer une expression « plus complexe »

Développons et réduisons l'expression G.

$$G = 4(3x+2)^2 - (x+2)(7-3x) \quad \text{L1}$$

$$G = 4(9x^2 + 12x + 4) - (7x - 3x^2 + 14 - 6x) \quad \text{L2}$$

$$G = 36x^2 + 48x + 16 - 7x + 3x^2 - 14 + 6x \quad \text{L3}$$

$$G = 39x^2 + 47x + 2 \quad \text{L4}$$

Dans L1, on identifie les produits à développer

Dans L2, on développe ces produits entre parenthèses (ou entre crochets).

Dans L3, on a distribué le facteur 4 sur la première expression entre parenthèses et on a écrit l'opposé de la seconde expression entre parenthèses (on a changé tous les signes à l'intérieur des parenthèses puis on a supprimé les parenthèses ainsi que le signe - qui était devant).

Dans L4, on a réduit l'expression (et on l'a ordonnée selon les puissances décroissantes de l'inconnue)

II Factoriser une expression

L'idée est d'utiliser les propriétés du paragraphe précédent « dans l'autre sens ».

Définition n°2.

Factoriser, c'est transformer une somme (algébrique) en un produit.

Méthode n°3. Avec un facteur commun

Factoriser l'expression suivante :

$$H = (2x+1)(3x-5) - (2x+1)^2 + (8x+4)(7x-1) \quad L1$$

$$H = (\underline{2x+1})(3x-5) - (\underline{2x+1})(2x+1) + 4(\underline{2x+1})(7x-1) \quad L2$$

$$H = (2x+1)[(3x-5) - (2x+1) + 4(7x-1)] \quad L3$$

$$H = (2x+1)[3x-5-2x-1+28x-4] \quad L4$$

$$H = (2x+1)(29x-10) \quad L5$$

Dans L1, on identifie les produits (ici il y en a 3) et on cherche un facteur commun à chacun d'eux.

Dans L2, on fait apparaître le facteur commun, ici il s'agit de $(2x+1)$.

On remarque que « un seul $(2x+1)$ » est souligné, en effet $(2x+1)$ n'apparaît qu'une fois dans chaque produit.

Dans L3, on utilise la propriété n°1 de la droite vers la gauche (et si on a un doute, on relit la remarque n°4) en posant $k = (2x+1)$ $a = (3x-5)$ etc.

Dans L4, on développe l'expression obtenue entre crochets.

Dans L5, on réduit l'expression entre crochets et on s'assure qu'il n'y a plus de factorisation possible.

Exercice n°3.

Factoriser $I = (3x-2)^2 - (2+6x)(3x-2)$

Méthode n°4. Avec des identités remarquables

L'idée est de reconnaître les membres de droite des identités remarquables et d'utiliser ces identités de la droite vers la gauche.

En pratique, c'est surtout la 3^e qui est utile...

Exemple n°6. Avec la 1^{re} identité remarquable

$$9 + 4x^2 + 12x = 4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 12x + 3^2 = (2x+3)^2$$

Remarque n°6. essentielle

On a compris qu'on avait à faire à la 1^{re} identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...

On a repéré les valeurs de a et b et on a pas oublié de vérifier que $2 \times a \times b = 2 \times 2x \times 3 = 12x$

Exemple n°7. Avec la 2^e identité remarquable

$$-12x + 9 + 4x^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 12x + 3^2 = (2x-3)^2$$

Remarque n°7. essentielle

On a compris qu'on avait à faire à la 2^e identité remarquable car on s'est beaucoup entraîné à la développer...

On a repéré les valeurs de a et b et on a pas oublié de vérifier que $2 \times a \times b = 2 \times 2x \times 3 = 12x$

Exemple n°8. Avec la 3^e identité remarquable

$$(4x+2)^2 - (3x-7)^2 = [(4x+2) + (3x-7)][(4x+2) - (3x-7)] = (7x-5)(x+9)$$

Remarque n°8.

On oublie pas qu'on repère les membres de droite des identités remarquables.

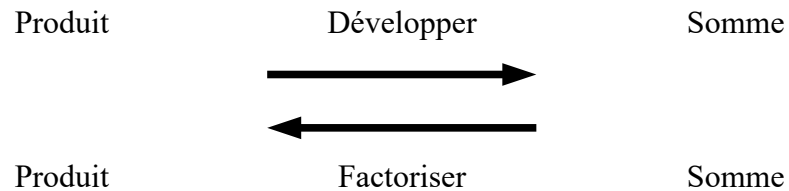
Ici $a^2 = (4x+2)^2$ donc $a = 4x+2$ et $b^2 = (3x-7)^2$ donc $b = 3x-7$

III Le résumé du cours

Dans les expressions qui suivent, a , b , c , d et k sont des nombres qui peuvent aussi prendre la forme d'expression.

Par exemple, il est possible d'avoir $a = 3x + 5 \dots$

III.1 Définition



III.2 Simple distributivité

produit	$k(a+b) = ka + kb$	somme
produit	$k(a-b) = ka - kb$	somme
produit	$k(a+b-c \dots) = ka + kb - kc \dots$	somme

III.3 double distributivité

produit	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	somme
---------	----------------------------------	-------

III.4 Les identités remarquables

produit	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	somme
produit	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	somme
produit	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	somme