PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

I Les repères du plan

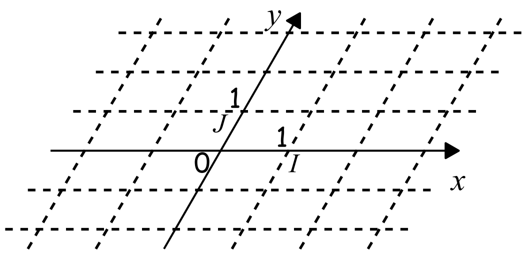
Définition n°1.

▪ On dit que le plan est muni d'un repère lorsque l'on a fixé dans ce plan deux axes graduées sécants en leur origine.
▪ On dit que le repère est orthogonal si les deux axes sont perpendiculaires.
▪ On dit que le repère est orthonormé, si il est orthogonal ET si les unités de longueurs sont les mêmes sur les deux axes.

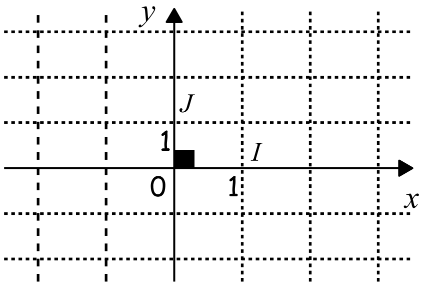
PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Remarque n°1.

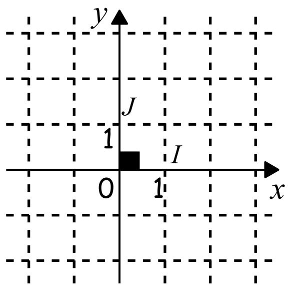
Dans les autres cas, on parle de repère cartésien (ou quelconque).



(O ; I ; J) est un repère quelconque



(O ; I ; J) est un repère orthogonal



(O ; I ; J) est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

Remarque n°2.

Dans un repère (O ; I ; J), on a, par définition :

$O(0;0)$; $I(1;0)$ et $J(0;1)$

Si le repère se nomme, par exemple, (C ; A ; E) alors :

$C(0;0)$; $A(1;0)$ et $E(0;1)$

Problèmes de géométrie

Propriété n°1. ***Alignement***

Soient $A(x_A \; ; y_A)$, $M(x_M \; ; y_M)$ et $B(x_B \; ; y_B)$ trois points du plan muni du repère $(O \; ; I \; ; J)$.

Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM} \; ; \overrightarrow{AB})=0$

Remarque n°3.

Toute combinaison de ces points fonctionne...

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

EXERCICE N°1

On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. On donne $A(1\ ;\ 2)$, $M(1{,}75\ ;\ 3{,}5)$ et $B(2\ ;\ 4)$

Démontrez que $A\,,B$ et M sont alignés.

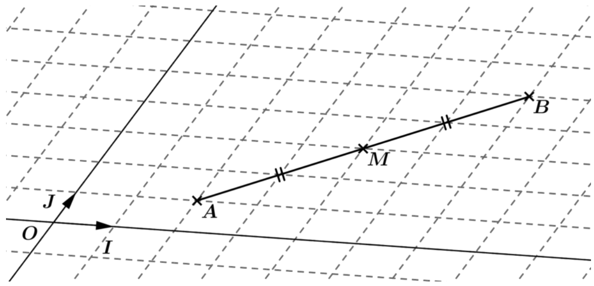
Propriété n°2. Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

Si $M(x_M\ ;\ y_M)$ est le **milieu** du segment $[AB]$ alors

$$\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

EXERCICE N°2 *Preuve de la propriété n°2*



On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

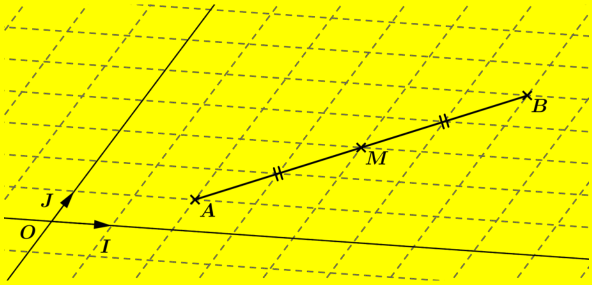
On donne $A(x_A\ ;\ y_A)$, $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Démontrez que si M est le **milieu** du segment $[AB]$ alors :

$\boxed{x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$

Si M est le milieu de $[AB]$ alors :

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$$



$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A - 2(x_M - x_A) \\ y_B - y_A - 2(y_M - y_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A - 2x_M + 2x_A \\ y_B - y_A - 2y_M + 2y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B + x_A - 2x_M \\ y_B + y_A - 2y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_A = 2x_M \\ y_B + y_A = 2y_M \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_B + x_A}{2} = x_M \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} = y_M \end{cases}$$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Propriété n°3. ***Longueur d'un segment dans un repère orthonormé.***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points plan du muni du repère **ORTHONORME** $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

preuve :

Évidente car c'est la norme de $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\|$

EXERCICE N°3

Dans le repère **orthonormé** $(O\ ;\ I\ ;\ J\ )$.

On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(2\ ;\ -1)$; $F(\ 2;3)$ et $G(5;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M centre du cercle circonscrit à EFG .

2) Le point $H(5;3)$ appartient-il au cercle ?

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

Dans le repère **orthonormé** $(O ; I ; J)$.

On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(2 ; -1)$; $F(2;3)$ et $G(5;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit à EFG .

Si un triangle est rectangle alors le centre de cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Donc M est le milieu de $[FG]$ et ses coordonnées sont :

$$x_M = \frac{x_F + x_G}{2} = \frac{2+5}{2} = 3,5 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_F + y_G}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Ainsi $\boldsymbol{M(3,5 \; ; \; 1)}$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

Dans le repère **orthonormé** $(O\ ;I\ ;J\ )$.

On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(2\ ;-1)$; $F(\ 2;3)$ et $G(5;-1)$.

2) Le point $H(5;3)$ appartient-il au cercle ?

Si la distance MH est égale à la longueur du rayon du cercle alors H appartient à ce cercle.

Le rayon du cercle vaut par exemple MF :

Comme le repère $(O\ ;I\ ;J\ )$ est orthonormé :

$$MF=\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_m-y_F)^2}=\sqrt{(3{,}5-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1{,}5^2+(-2)^2}=\sqrt{2{,}25+4}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$$

Calculons MH :

$$MH=\sqrt{(x_M-x_H)^2+(y_M-y_H)^2}=\sqrt{(3{,}5-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(-1{,}5)^2+(-2)^2}=\sqrt{2{,}25+4}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$$

On a $MH = MF$ par conséquent H appartient bien au cercle.

EXERCICE N°4

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(3\ ;1)$ et $M(2\ ;4)$.

1) La symétrie de centre A transforme B en C .

1.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
1.b) En déduire les coordonnées du point C .

2) Soit N le point tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AN}$.

2.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?
2.b) Calculer les coordonnées du point N .

EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(2\ ;1)$, $C(-4\ ;3)$ et $D(-5\ ;0)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ puis celles du milieu de $[BD]$.

2) Démontrer que $AC=BD$

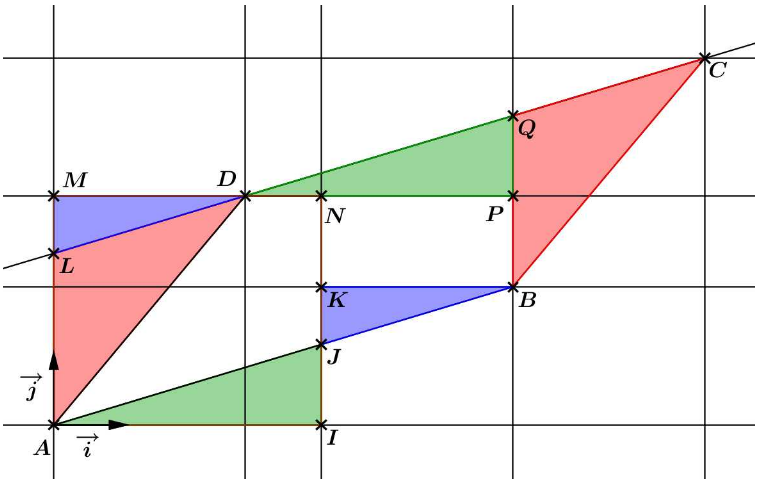
3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E02

EXERCICE N°1 *Calculer l'aire d'un parallélogramme avec des vecteurs*

On considère la figure ci-contre, dans laquelle :

- $(A\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ est un repère orthonormé;
- $ABCD$ est un parallélogramme;
- les triangles AIJ et DPQ sont égaux;
- les triangles ALD et BQC sont égaux;
- les triangles LMD et JKB sont égaux.



1) Montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à la somme des aires des rectangles $AMNI$ et $KNPB$.

2) On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ celles de $\overrightarrow{AD}$

On suppose que $0 < x' < x$ et que $0 < y < y'$.

2.a) Montrer que $MN = x - x'$.

2.b) En déduire que l'aire du rectangle $AMNI$ est égale à $(x - x')y'$.

2.c) Montrer que l'aire du rectangle $KNPB$ est égale à $x'(y' - y)$.

2.d) En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Propriété n°4. ***Aire d'un parallélogramme***

Si ABCD est un parallélogramme, alors son aire vaut la distance à zéro de $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$.

Réviser pour IE01

Problèmes de géométrie E02

EXERCICE N°2 On applique

Soient les points $A(-4\ ;\ -3)$, $B(1\ ;\ -4)$, $C(3\ ;\ 2)$ et $D(-2\ ;\ 3)$ dans une base orthonormée d'unités graphiques 1 cm.

1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Calculer son aire.

II Distance d'un point à une droite

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$

Définition n°2. Projection orthogonale

Soit A un point et (d) une droite.
Le projeté orthogonal de A sur (d) est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Exemple n°1.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

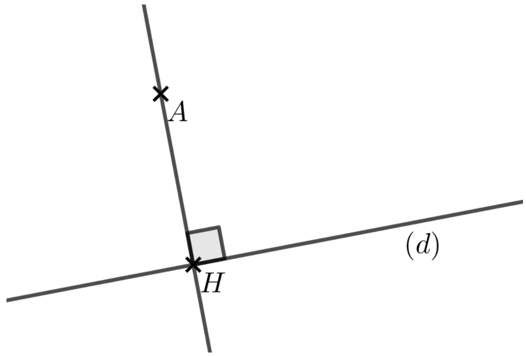


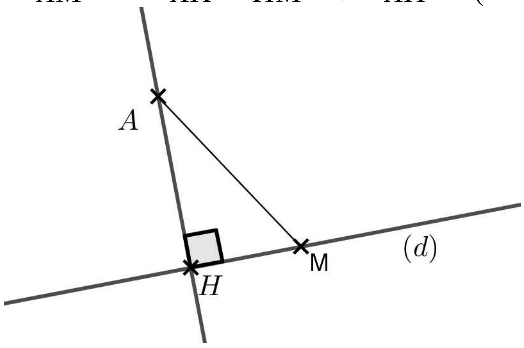
Figure 1

Propriété n°5.

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors pour tout point M de (d) distinct de H, on a : $AH < AM$

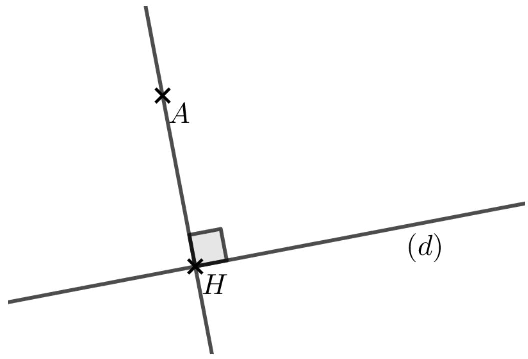
preuve :

Par définition du point H, le triangle AHM est rectangle en H.
Le théorème de Pythagore nous donne alors :
$AM^2 = AH^2 + HM^2 > AH^2$ (car $HM^2 > 0$).



Définition n°3. Distance d'un point à une droite

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors on appelle **distance du point A à la droite (d)** la longueur AH.



PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E03

EXERCICE N°1

Recopier et compléter :

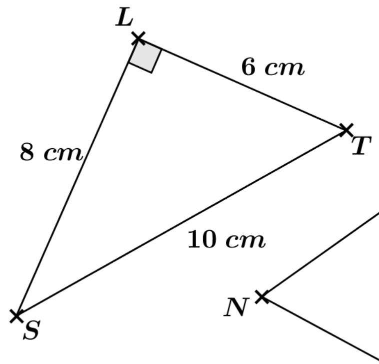
1) La distance du point S à la droite (TL) vaut … .

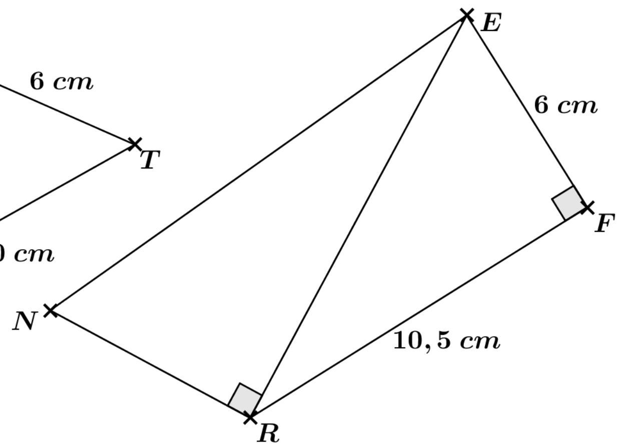
2) La distance du point T à la droite … est 6 cm.

3) Le point … est situé à 10,5 cm de la droite … .

4) Le point … est situé à … de la droite (RF) .

5) La distance du point E à la droite (NR) est comprise entre … et … .





Problèmes de géométrie E03

EXERCICE N°2

Un point M étant donné, construire trois droites $(d_1),(d_2)$ et (d_3) telles que M soit situé à 4 cm de chacune d'entre elles.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E03

EXERCICE N°3

Soient une droite (d) et un point E situé à 2 cm de (d).
Faire une figure puis placer tous les points situés à la fois à :
4 cm de (d) et à 3 cm du point E.

Définition n°4. Tangente à un cercle

Soit A un point d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r.

La **tangente à $(\mathcal{C})$ au point** A est la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (OA).

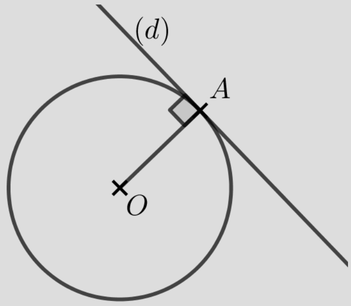


Figure 2

Propriété n°6.

Un cercle possède un unique point en commun avec sa tangente en l'un de ses points.

preuve :

Soit (d) la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A et M un point de (d).

D'après la propriété n°1, $OM > OA$ donc $M \notin (\mathcal{C})$.

Réviser pour IE02

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E04

EXERCICE N°1

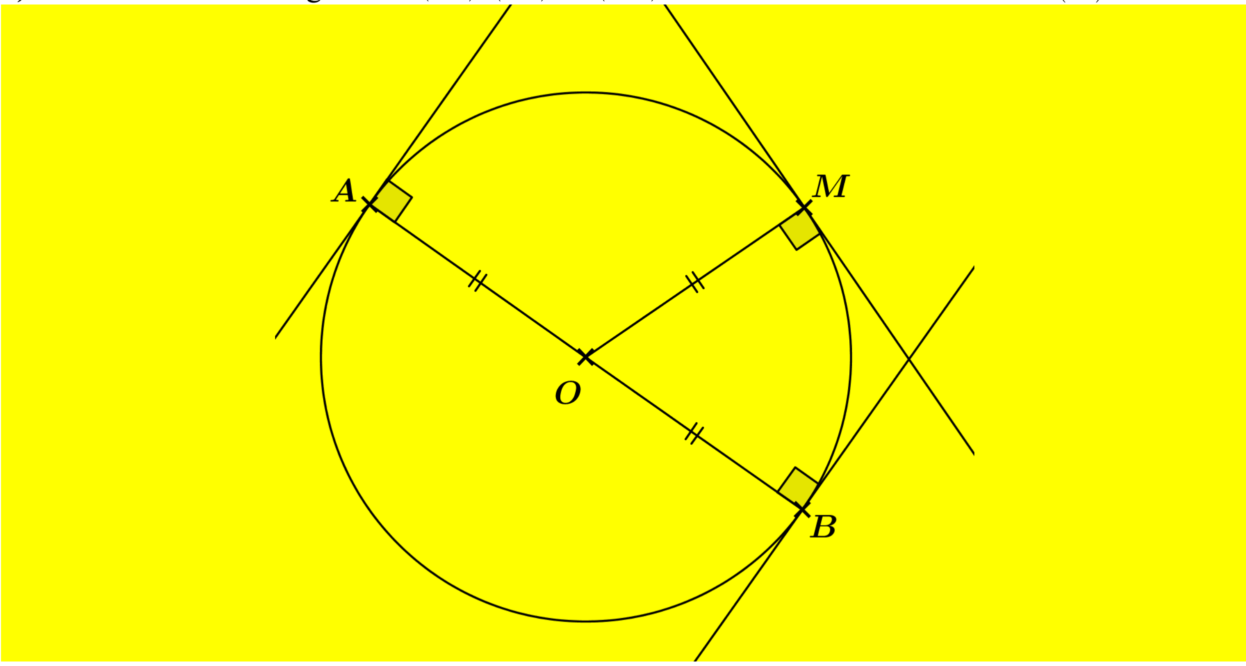
1) Tracer un cercle (C) de rayon 3,5 cm, tracer un diamètre $[AB]$ de ce cercle puis placer un point M sur (C) à 4 cm de B.

2) Construire trois tangentes $(d_A),(d_B)$ et (d_M) en A, B et M au cercle (C).

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E04

1) Tracer un cercle (C) de rayon 3,5 cm, tracer un diamètre $[AB]$ de ce cercle puis placer un point M sur (C) à 4 cm de B.

2) Construire trois tangentes $(d_A),(d_B)$ et (d_M) en A, B et M au cercle (C).



Problèmes de géométrie E04

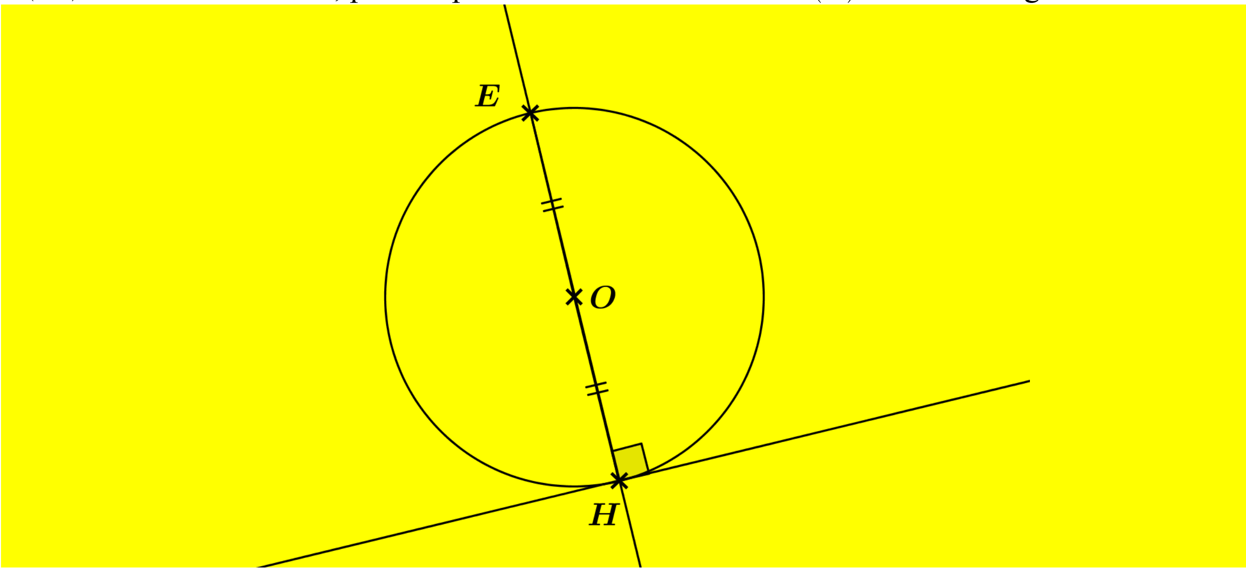
EXERCICE N°2

1) Tracer une droite (d) et placer un point E à 5 cm de (d) puis tracer le cercle (C_1) de diamètre 5 cm, passant par E et dont la droite (d) est une tangente.

2) Peut-on tracer un cercle (C_2) de diamètre 4,6 cm passant par E et dont la droite (d) est une tangente ? Justifier.

Problèmes de géométrie E04

1) Tracer une droite (d) et placer un point E à 5 cm de (d) puis tracer le cercle (C_1) de diamètre 5 cm, passant par E et dont la droite (d) est une tangente.



2) Peut-on tracer un cercle (C_2) de diamètre 4,6 cm passant par E et dont la droite (d) est une tangente ? Justifier.

Non, car le diamètre du cercle doit au moins égaler la distance de E à (d) (ici 5 cm)

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E04

EXERCICE N°3

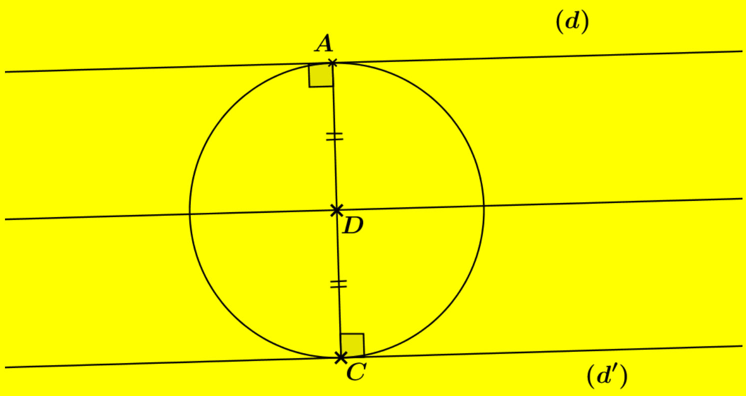
1) Tracer deux droites parallèles (d) et (d') .

2) Construire un cercle (C) tel que (d) et (d') soient toutes les deux tangentes à (C) . Quelle est la position de son centre ?

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E04

1) Tracer deux droites parallèles (d) et (d') .

2) Construire un cercle (C) tel que (d) et (d') soient toutes les deux tangentes à (C) . Quelle est la position de son centre ?



Son centre appartient à l’axe de symétrie de la figure composée des droites (d) et (d') qui est parallèle à ces dernière.

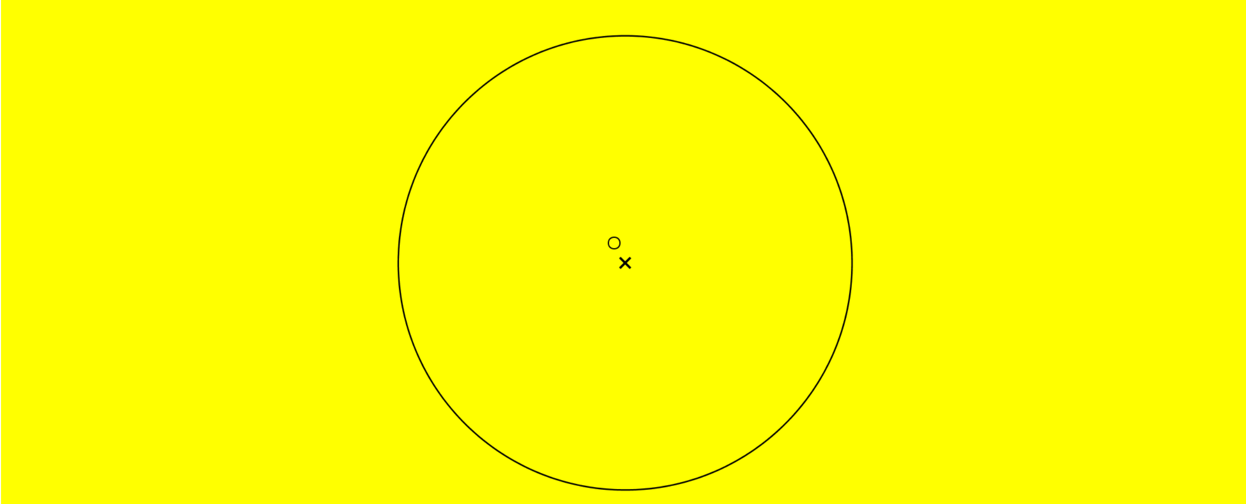
Problèmes de géométrie E04

EXERCICE N°4 Objectif Spé

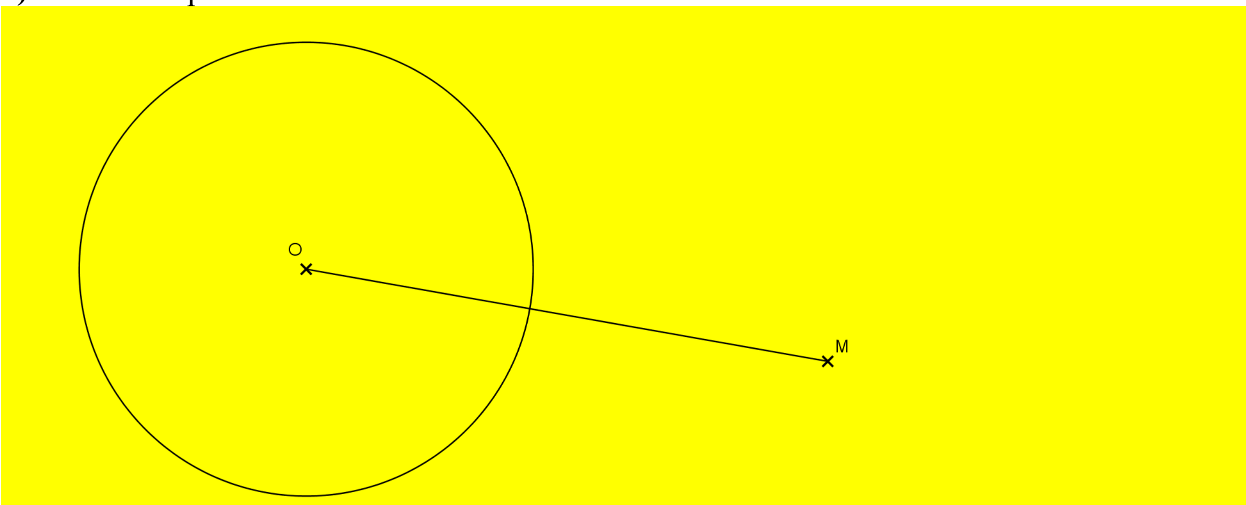
1) Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm.
2) Placer un point M à 7 cm de O.
3) Construire toutes les tangentes au cercle (C) passant par M.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E04

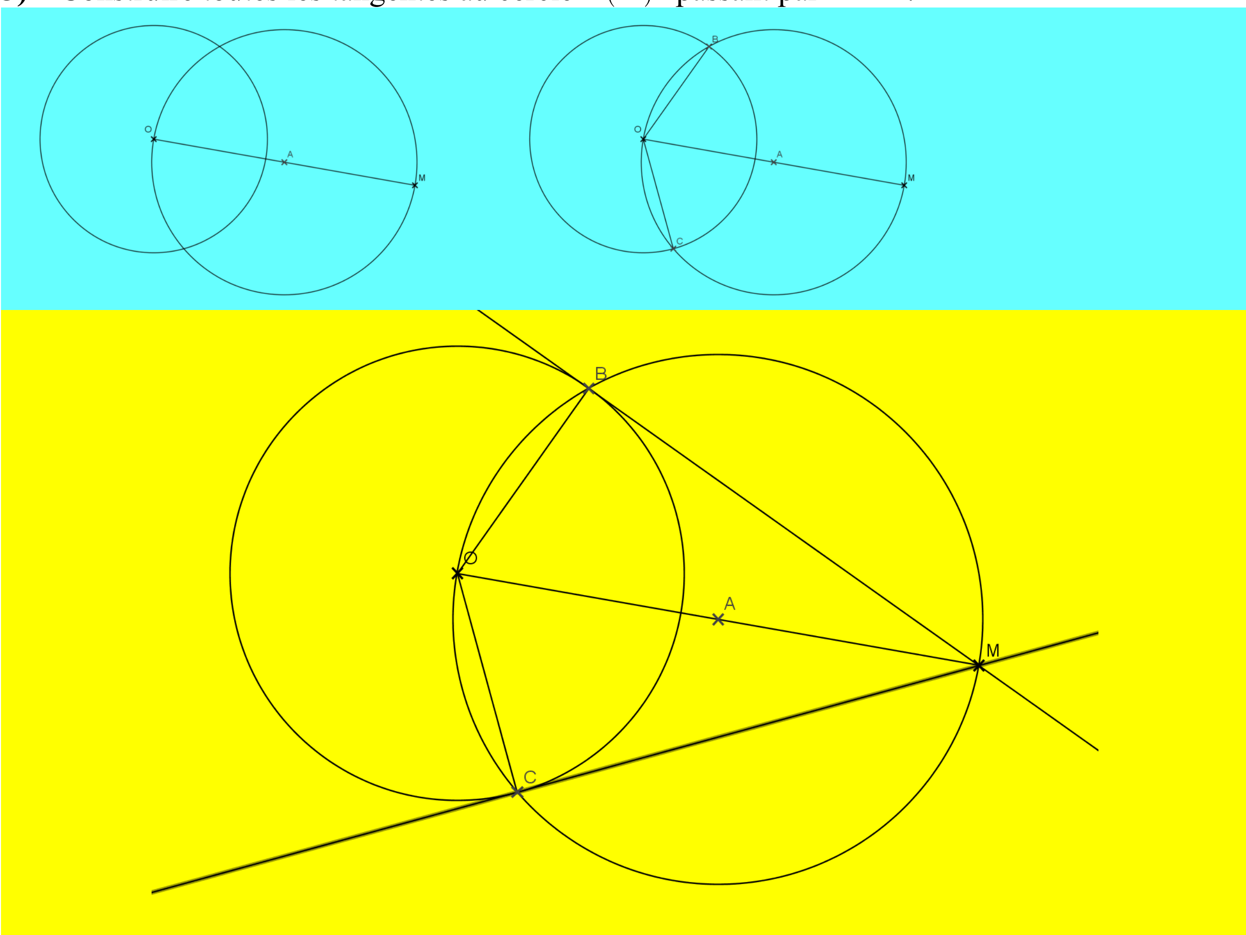
1) Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm.



2) Placer un point M à 7 cm de O.



3) Construire toutes les tangentes au cercle (C) passant par M.



III Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans ce paragraphe, on se donne un triangle ABC rectangle en B.

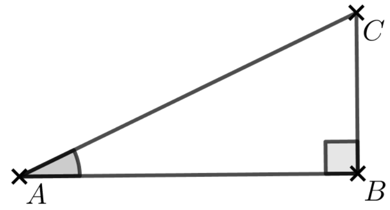


Figure 3

Définition n°5.

- $[AC]$ est l'hypoténuse.
- $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
- $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Définition n°6. ***cosinus, sinus, tangente***

Dans le triangle ABC, rectangle en B.

- $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{AB}{AC}$ (« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)
- $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AC}$ (« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AB}$ (« sinus égale côté apposé sur côté adjacent »)

Remarque n°4.

Pour l'angle $\widehat{BCA}$, il suffit d'échanger les lettres A et C dans tout ce qui précède.

Remarque n°5.

On n'oublie pas de préciser à chaque dans quel triangle rectangle on travaille.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E05

EXERCICE N°1

1) Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AC=5$ cm et $\widehat{ABC}=55°$.
Calculer les distances AB et BC en centimètres, arrondies au dixième.

2) En déduire une valeur approchée de l'aire du triangle ABC au mm² près.

EXERCICE N°2

Soit RST un triangle rectangle en R tel que $RS = 6 \text{ cm}$ et $RT = 5 \text{ cm}$.

Donner un encadrement au centième près de la mesure des angles $\widehat{RST}$ et $\widehat{RTS}$.

EXERCICE N°3

Soit RST un triangle rectangle en R et H le projeté orthogonal de R sur la droite (ST) . On donne $\widehat{RTS}=40°$ et $ST=7 \text{ cm}$.

Calculer RT , RS et RH en centimètre arrondis au centième.

EXERCICE N°4

Dans un repère orthonormé, on donne $A(3\ ;-4)$, $B(7\ ;-1)$ et $C(13\ ;-9)$.

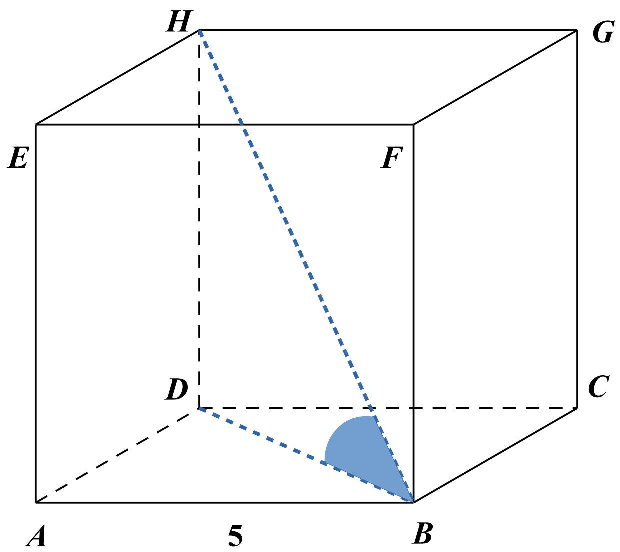
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en degré arrondie à 0,1 près.

EXERCICE N°5

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 5.

1) Calculer la longueur DB (valeur exacte).

2) En déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{DBH}$ arrondie à l'unité .



Propriété n°7.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$

preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC, rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}=\frac{BC}{AC}\times\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AB}=\tan(x)$$

Propriété n°8.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}$

Réviser pour IE03

preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC , rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

$$(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1$$

l'avant dernière égalité étant justifiée par le théorème de Pythagore.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°1 ***Objectif Spé***

On donne x la mesure d'un angle aigu. Démontrer les égalités suivantes :

1) $(\cos(x)+\sin(x))^2 = 1+2\sin(x)\cos(x)$

2) $(\cos(x))^2-(\sin(x))^2 = 1-2(\sin(x))^2$

3) $1+(\tan(x))^2 = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

4) $1+\dfrac{1}{(\tan(x))^2} = \dfrac{1}{(\sin(x))^2}$

Remarque n°6.

Très souvent, vous simplifierez ces écritures de la façon suivante :

1) $(\cos x+\sin x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

2) $\cos^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$

3) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $1+\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°2 Valeurs remarquables part 1

On considère un triangle OMH rectangle en H tel que $\widehat{MOH} = 60°$ et $OH = \frac{1}{2}$.
Soit I le symétrique de O par rapport à H .

1) Montrer que le triangle OMI est équilatéral.
2) En déduire la valeur exacte de $\cos(60°)$ puis de $\sin(60°)$.
3) En déduire la valeur exacte de $\cos(30°)$ puis de $\sin(30°)$.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°3 Valeurs remarquables part 2

On considère un triangle OMH rectangle en H tel que $\widehat{MOH}=45\,°$ et $OM=1$.

1) Montrer que le triangle OMH est également isocèle puis en déduire la valeur exacte de la longueur OH .
2) En déduire la valeur exacte de $\cos(45\,°)$ puis de $\sin(45\,°)$.

Problèmes de géométrie E06

EXERCICE N°4 Tableau des valeurs remarquables de la trigonométrie.

En vous aidant des deux exercices précédents compléter le tableau et l'apprendre par cœur !

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1				0
$\sin(x)$	0				1
$\tan(x)$	0				« infini »

Problèmes de géométrie E06

En vous aidant des deux exercices précédents compléter le tableau et l'apprendre par cœur !

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	« infini »

Problèmes de géométrie E07

EXERCICE N°1

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, placer le point $U(8\ ;\ 7)$ et le point T milieu de $[OU]$.

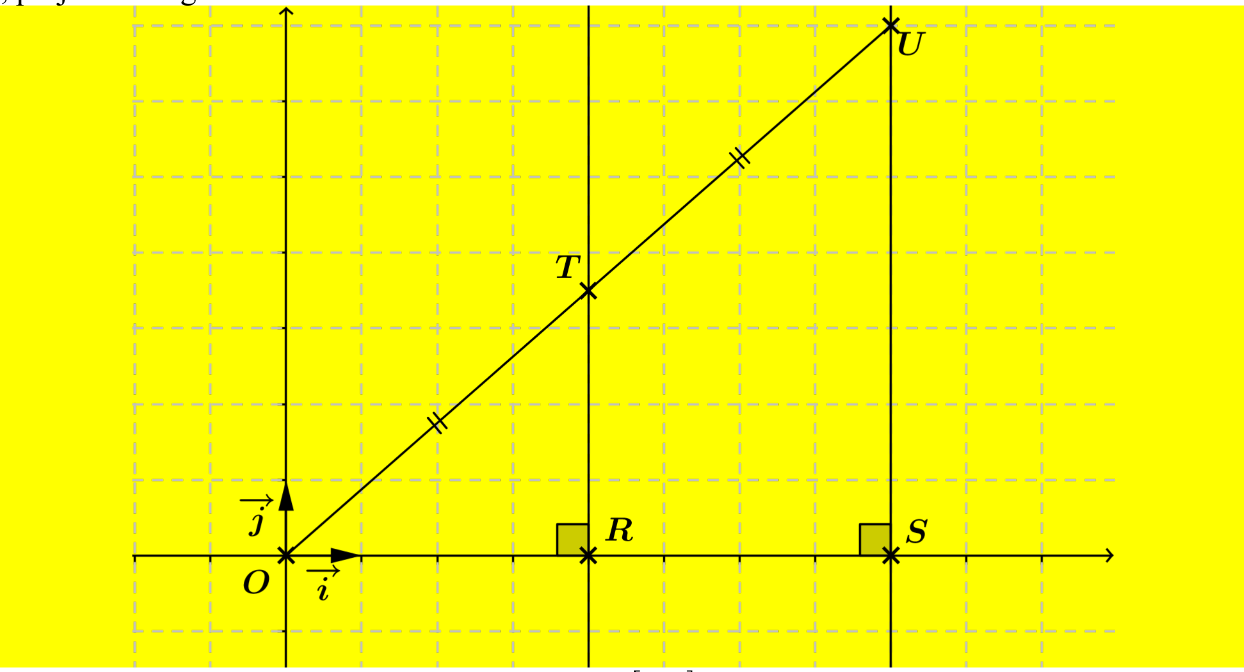
1) Construire le point R , projeté orthogonal de T sur l'axe des abscisses et le point S , projeté orthogonal de U sur l'axe des abscisses.

2) Montrer que le point R est le milieu de $[OS]$ et calculer ses coordonnées.

Problèmes de géométrie E07

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, placer le point $U(8\ ;\ 7)$ et le point T milieu de $[OU]$.

1) Construire le point R, projeté orthogonal de T sur l'axe des abscisses et le point S, projeté orthogonal de U sur l'axe des abscisses.

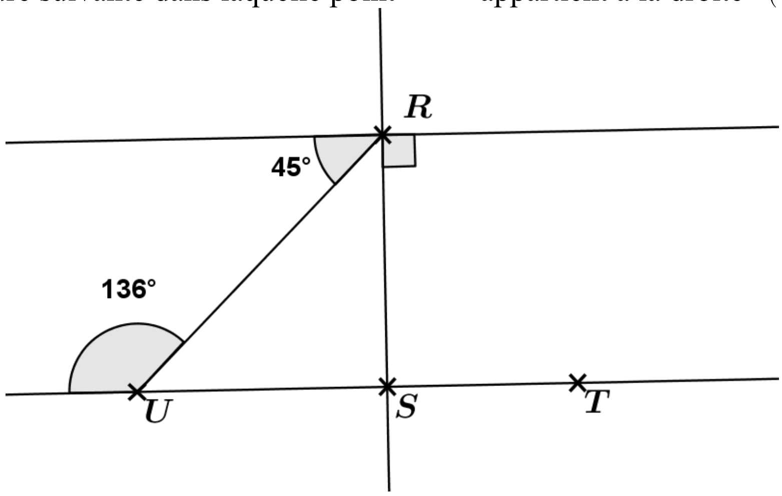


2) Montrer que le point R est le milieu de $[OS]$ et calculer ses coordonnées.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

EXERCICE N°2 Démontrer par l'absurde

On considère la figure suivante dans laquelle point T appartient à la droite (US)



En raisonnant par l'absurde, montrer que le point S n'est pas le projeté orthogonal du point R sur la droite (UT) .

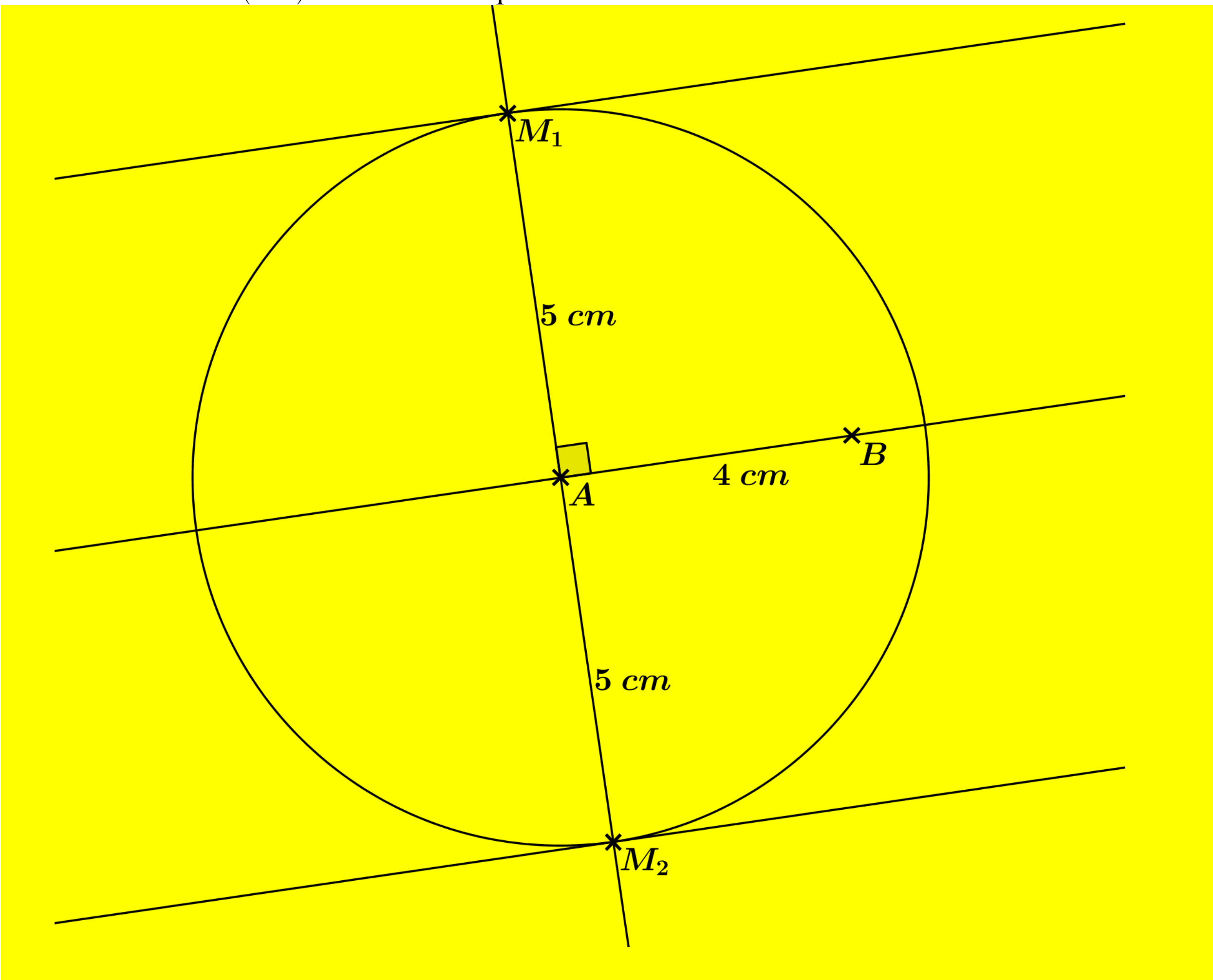
Problèmes de géométrie E07

EXERCICE N°3

A et B sont deux points distants de 4cm. Déterminer l'ensemble des points M situés à 5 cm de la droite (AB) et à 5 cm du point A.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E07

sont deux points distants de 4cm. Déterminer l'ensemble des points M situés à 5 cm de la droite (AB) et à 5 cm du point A.



EXERCICE N°4

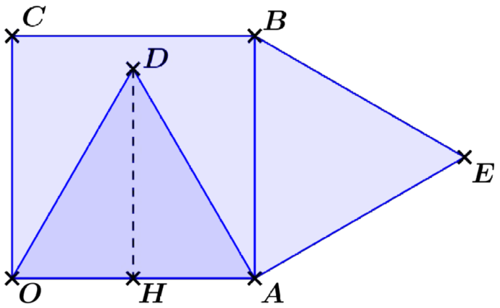
$OABC$ est un carré de côté 1, les triangle ODA et ABE sont équilatéraux.

On se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right)$

1) Calculer la hauteur DH du triangle OAD

2) Déterminer les coordonnées des point C, D et E.

3) Démontrer que les points C, D et E sont alignés.



geogebra

EXERCICE N°5 Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit

On considère un triangle ABC non aplati. Soient d_1, d_2 et d_3 les médiatrices des côtés de ABC .

geogebra

1) Soit O le point d'intersection de d_1 et d_2 . Montrer que $OA=OB=OC$.

2) En déduire que B et C sont sur le cercle de centre O et passant par A .

On appelle ce cercle : cercle circonscrit au triangle ABC .

3) Montrer que O appartient aussi à d_3 .

Les médiatrices d'un triangle sont donc concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

EXERCICE N°6 Hauteurs d'un triangle et orthocentre

On considère un triangle ABC non aplati. Soient d_1 la parallèle à la droite (BC) passant par A, d_2 la parallèle à la droite (AC) passant par B et d_3 parallèle à la droite (AB) passant par C.

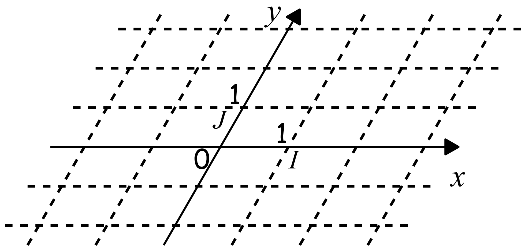
Les droites d_2 et d_3 se coupent en A', d_1 et d_3 coupent en B' et d_1 et d_2 se coupent en C'.

geogebra

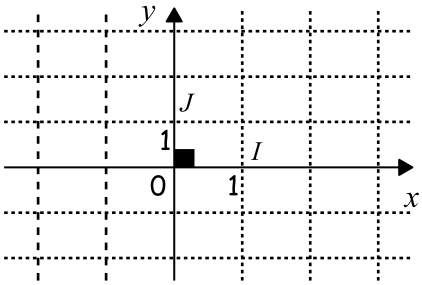
1) Montrer que $AB'CB$ et $C'ACB$ sont des parallélogrammes.
2) En déduire que A est le milieu de $[B'C']$.
3) Montrer par un raisonnement analogue que B et C sont les milieux respectifs des segments $[A'C']$ et $[A'B']$.
4) Dans le triangle ABC, on appelle Δ_1 la hauteur issue de A, Δ_2 la hauteur issue de B et Δ_3 hauteur issue de C. Montrer que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices des côtés du triangle $A'B'C'$
5) Sachant que ces trois médiatrices sont concourantes (voir exercice précédent), en déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Les hauteurs d'un triangles sont concourantes en un point qui se nomme l'orthocentre du triangle .

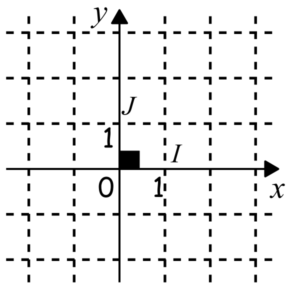
IV Le résumé du cours



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère quelconque



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthogonal



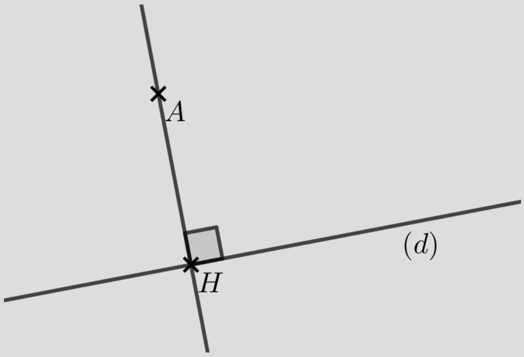
$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB})=0$	Repère
M milieu du segment [AB] alors $\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$	Tous
$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}$ ou $\boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$	Uniquement ORTHONORME

Le point H s'appelle le **projeté orthogonal du point A sur la droite** (d) car $(AH)\perp(d)$

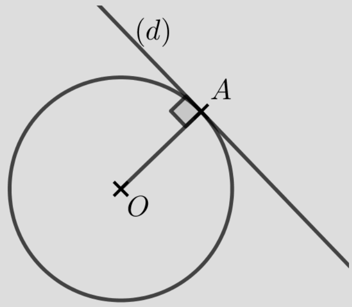
La longueur AH s'appelle la **distance du point A à la droite** (d) .

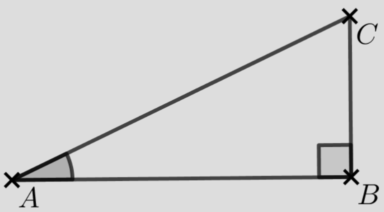
Si $M\in(d)$ distinct de H alors $AM>AH$.



(d) est **la tangente au cercle au point** A car $(OA)\perp(d)$

Il y a **un seul point commun entre la tangente et le cercle.**





Dans le triangle ABC , rectangle en B .

- $\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB}{AC}$

(« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)

- $\sin(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AC}$

(« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)

- $\tan(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AB}$

(« sinus égale côté apposé sur côté adjacent »)

$\boxed{\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$ et $\boxed{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}$