

LES SUITES E06C

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.

Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € par mégot laissé par terre.

Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an grâce à cette amende.

Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre de mégots jetés par terre pendant l'année $2019+n$. Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2019. On a $u_0=20\,000$.

1) Justifier par le calcul que $u_1=17\,000$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$u_1 = u_0 - \frac{u_0 \times 15}{100} = 20\,000 - 3\,000 = 17\,000$$

En 2020, le nombre de mégots jetés par terre devrait être de 17000.

2)

2.a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

Une diminution de 15 % correspond à un coefficient multiplicateur CM valant 0,85.

Ainsi, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 0,85.

Donc, la suite (u_n) est géométrique de raison $q=0,85$ et de premier terme

$$u_0 = 20\,000$$

2.b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 20\,000 \times 0,85^n$$

2.c) Calculer le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2028. Arrondir le résultat à l'unité.

$2028 = 2019 + 9$, il s'agit donc de calculer u_9 .

$$u_9 = 20\,000 \times 0,85^9$$

$$u_9 \approx 4632$$

En 2028, le nombre de mégots jetés par terre devrait être d'environ 4632.

3) Le maire souhaite savoir combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028.

3.a) Exprimer la somme que le maire doit effectuer pour trouver ce nombre en fonction des termes de la suite (u_n) .

Le maire doit effectuer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n) .

On va de u_0 jusqu'à u_9 , il y a donc bien 10 termes.

3.b) Trouver alors le nombre de mégots ramassés.

En notant S la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n) , on peut écrire :

$$S = 20\,000 \times \frac{1 - 0,85^{10}}{1 - 0,85}$$

$$S \approx 119\,017$$

Le nombre de mégots ramassés serait alors d'environ 119 017.