VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :
On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.
▫ Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
▫ Si le résultat est pair on gagne deux euros.
▫ Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euro.
On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X.

▪ On détermine Ω.
$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω.

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)
$X(\{1\}) = -5$, $X(\{2\}) = 2$, $X(\{3\}) = 1$,
$X(\{4\}) = 2$, $X(\{5\}) = 1$ et $X(\{6\}) = 2$
(Il y a trois images possibles : -5 ; 1 et 2)
▪ On regroupe les antécédents :
$\{X = -5\} = \{1\}$
$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$
$\{X = 2\} = \{4\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

Le plus gros du travail est fait au brouillon

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :
▫ $P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$
▫ $P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\})+P(\{5\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
▫ $P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	1	2	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°2 *Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)*

Voici un jeu :

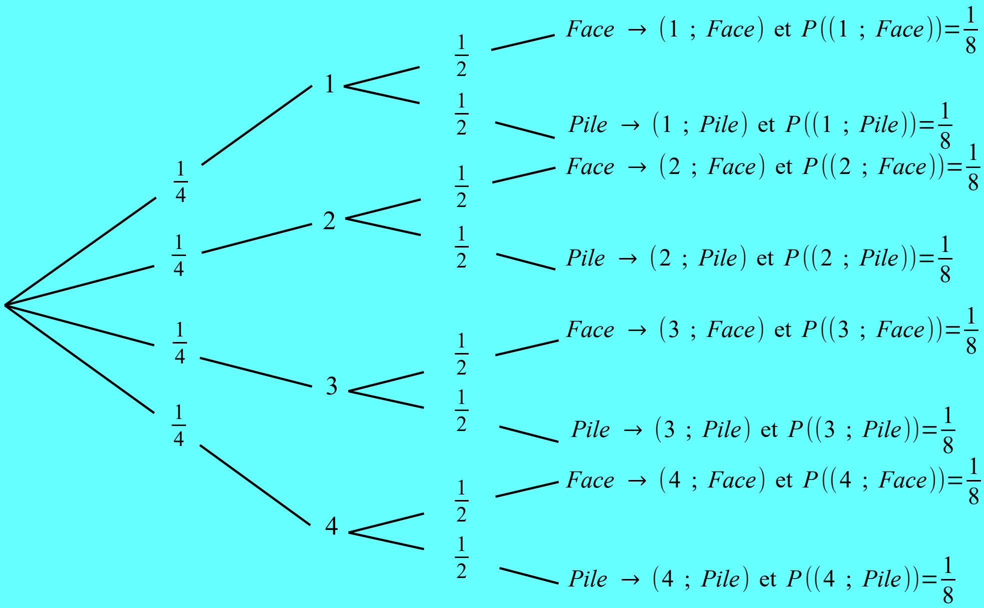
- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis un jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X.

On convient de ne plus écrire les accolades

- On détermine Ω

Une issue de Ω est donc un couple, par exemple : $(2\ ;\ Face)$, $(5\ ;\ Pile)$ etc...
Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1;Face);(2;Face);(3;Face);(4;Face);(1;Pile);(2;Pile);(3;Pile);(4;Pile)\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	$(1;Face)$	$(2;Face)$	$(3;Face)$	$(4;Face)$	$(1;Pile)$	$(2;Pile)$	$(3;Pile)$	$(4;Pile)$	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

Issue	$(1;Face)$	$(2;Face)$	$(3;Face)$	$(4;Face)$	$(1;Pile)$	$(2;Pile)$	$(3;Pile)$	$(4;Pile)$
$X(Issue)$	-6 $=-4-2$	8 $=10-2$	8 $=10-2$	8 $=10-2$	-6 $=-4-2$	3 $=5-2$	-6 $=-4-2$	3 $=5-2$

- On regroupe les antécédents :

$\{X = -6\} = \{(1;Face)\} \cup \{(1;Pile)\} \cup \{(3;Pile)\}$
$\{X = 3\} = \{(2;Pile)\} \cup \{(4;Pile)\}$
$\{X = 8\} = \{(2;Face)\} \cup \{(3;Face)\} \cup \{(4;Face)\}$

Le plus gros du travail est fait au brouillon

- On calcule la probabilité de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-6	3	8	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

EXERCICE N°3 ***Utiliser une loi de probabilité***

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

On n'écrit plus les accolades

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On fait une partie :

1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.

$\boxed{P(X = 3) = \frac{1}{4}}$

2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.

Il s'agit de calculer $P(X < 0)$

Ici, la seule valeur strictement négative est -6 donc :

$P(X < 0) = P(X = -6) = \frac{5}{8}$

Ainsi $\boxed{P(X < 0) = \frac{5}{8}}$

3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.

Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 3)$

$P(X \geqslant 3) = P(X = 3)+P(X = 8) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Ainsi $\boxed{P(X \geqslant 3) = \frac{3}{8}}$

4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

Il s'agit de calculer $P(X < 8)$

$P(X < 8) = P(X = -6)+P(X = 3) = \frac{5}{8}+\frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

Ainsi $\boxed{P(X < 8) = \frac{7}{8}}$

EXERCICE N°4 ***Utiliser une loi de probabilité***

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit plus les accolades

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	…	0,08

1) Déterminer $P(X = 8)$.

$$\begin{aligned} P(X = 8) &= 1-(P(X = -8)+P(X = 0)+P(X = 7)+P(X = 20)) \\ &= 1-(0{,}4+0{,}12+0{,}3+0{,}08) \\ &= 1-0{,}9 \\ &= 0{,}1 \end{aligned}$$

$\boxed{P(X = 8) = 0{,}1}$

2) Déterminer $P(X \leqslant 0)$.

$P(X \leqslant 0) = P(X = -8)+P(X = 0) = 0{,}4+0{,}12 = 0{,}52$

Ainsi,

$\boxed{P(X \leqslant 0) = 0{,}52}$

3) Déterminer $P(X > 7)$.

$P(X > 7) = P(X = 8)+P(X = 20) = 0{,}1+0{,}08 = 0{,}18$

Ainsi,

$\boxed{P(X > 7) = 0{,}18}$

4) Déterminer $P(X < 20)$.

On pourrait additionner toutes les probabilités sauf celle de $\{X = 20\}$ mais on peut aller plus vite en se souvenant que la somme des probabilités égale 1.

$P(X < 20) = 1-P(X = 20) = 1-0{,}08 = 0{,}92$

$\boxed{P(X < 20) = 0{,}92}$