

VARIABLES ALÉATOIRES E05C

EXERCICE N°2 Utiliser la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

Un jeu consiste à tirer une carte. Si c'est un cœur, on gagne k euros. Sinon, on perd 1 euro. On sait que la probabilité de gagner est $p = \frac{1}{4}$.

Trouvez la valeur de k pour laquelle la variance du gain est de 3.

On a :

$$E(X) = k \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{3}{4} = \frac{k}{4} - \frac{3}{4} = \frac{k-3}{4}$$

$$E(X^2) = k^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{k^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{k^2+3}{4}$$

et d'après la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{k^2+3}{4} - \left(\frac{k-3}{4}\right)^2 &= 3 \Leftrightarrow \frac{k^2+3}{4} - \frac{k^2-6k+9}{16} = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{4k^2+12-(k^2-6k+9)}{16} = \frac{48}{16} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3k^2+6k+3 = 48$$

$$\Leftrightarrow 3k^2+6k-45 = 0$$

Posons $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576$ le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$k_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = \frac{-6 - 24}{6} = -5 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 24}{6} = 3$$

On en déduit que les valeurs possibles de k sont -5 et 3 et on ne garde que 3 par cohérence.