LES SUITES NUMÉRIQUES E07C

EXERCICE N°1 Du concret : Écologie

En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.

Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € par mégot laissé par terre.

Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an grâce à cette amende.

Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre de mégots jetés parterre pendant l'année $2019+n$. Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2019. On a $u_0=20\,000$.

1) Justifier par le calcul que $u_1=17000$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$u_1 = u_0-\frac{u_0\times 15}{100} = 20\,000-3\,000 = 17\,000$$

En 2020, le nombre de mégots jetés par terre devrait être de 17000.

2)

2.a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

Une diminution de 15 % correspond à un coefficient multiplicateur *CM* valant 0,85.
Ainsi, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 0,85.
Donc, la suite (u_n) est $\boxed{\text{géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q=0{,}85}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 20\,000}$

2.b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0\times q^n$$

$$\boxed{u_n = 20\,000\times 0{,}85^n}$$

2.c) Calculer le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2028. Arrondir le résultat à l'unité.

$2028 = 2019+9$, il s'agit donc de calculer u_9.

$$u_9 = 20\,000\times 0{,}85^9$$

$$u_9 \approx 4632$$

En 2028, le nombre de mégots jetés par terre devrait être d' $\boxed{\text{environ } 4632}$.

3) Le maire souhaite savoir combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028.

3.a) Exprimer la somme que le maire doit effectuer pour trouver ce nombre en fonction des termes de la suite (u_n).

Le maire doit effectuer $\boxed{\text{la somme des } 10 \text{ premiers termes de la suite } (u_n)}$.

On va de u_0 jusqu'à u_9, il y a donc bien 10 termes.

3.b) Trouver alors le nombre de mégots ramassés.

En notant S la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n), on peut écrire :

$$S = 20\,000\times\frac{1-0{,}85^{10}}{1-0{,}85}$$

$$S \approx 119\,017$$

Le nombre de mégots ramassés serait alors d' $\boxed{\text{environ } 119\,017}$.

EXERCICE N°2 Du concret : 1er appart !

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

1er contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.

2ème contrat: un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.

Pour le 1er contrat	Pour le 2ème contrat
	Une hausse de 2 % correspond à un Coefficient multiplicateur valant 1,02.
▪ mois n°1 : $\boxed{200\ €}$	▪ mois n°1 : $\boxed{200\ €}$
▪ mois n°2 : $200+5 = 205$ $\boxed{205\ €}$	▪ mois n°2 : $200\times1{,}02 = 204$ $\boxed{204\ €}$
▪ mois n°3 : $205+5 = 210$ $\boxed{210\ €}$	▪ mois n°3 : $204\times1{,}02 = 208{,}08$ $\boxed{208{,}08\ €}$

2) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier (c'est-à-dire du 36e mois).

Pour le 1er contrat	Pour le 2ème contrat
▪ Notons u_n le montant en euros payé pour le moins n° n .	▪ Notons v_n le montant en euros payé pour le moins n° n .
▪ $u_1 = 200$ et $u_{n+1} = u_n+5$	▪ $v_1 = 200$ et $v_{n+1} = 1{,}02\,v_n$
On reconnaît une suite arithmétique et on peut écrire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 200+5(n-1)$	On reconnaît une suite géométrique et on peut écrire que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = 200\times1{,}02^{n-1}$
▪ Donc $u_{36} = 200+5(36-1) = 375$	▪ Donc $v_{36} = 200\times1{,}02^{36-1} \approx 399{,}98$
Le montant du dernier loyer est $\boxed{375\ €}$	Le montant du dernier loyer est d' $\boxed{\text{environ } 399{,}98\ €}$

3) Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs.)

Il s'agit de calculer la somme des loyers pour chaque contrat.
Notons S_1 la somme des loyers pour le 1er contrat et S_2 celle pour le second.

Pour le 1er contrat	Pour le 2ème contrat
$S_1 = 36\times\dfrac{200+375}{2}$	$S_2 = 200\times\dfrac{1-1{,}02^{36}}{1-1{,}02}$
$S_1 = 10350$	$S_2 \approx 10398{,}87$

On a $S_2 < S_1$, on en déduit que $\boxed{\text{globalement le 1}^{\text{er}} \text{ contrat est plus avantageux}}$.

EXERCICE N°3 Du concret : Héritage

Mathilde a reçu 80 000 € en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 8%. Mais chaque année, elle doit retirer 4000 € pour payer les impôts dus à ce placement. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement.

1) Expliquer pourquoi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation suivante: $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.

Une augmentation de 8 % correspond à un coefficient multiplicateur valant 1,08.
Ainsi, chaque année le capital est multiplié par 1,08. Ensuite Mathilde retire 4000 € à ce nouveau montant pour payer les impôts.
Au final pour passer d'un terme au suivant, on multiplie le terme par 1,08 puis on enlève 4000 au résultat : $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.

2) Calculer à la calculatrice les premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? Géométrique ?

On peut utiliser la calculatrice… En général trois termes suffisent

▪ Calculons les trois premiers termes :

$\boxed{C_0 = 80\,000}$;

$C_1 = 1{,}08\times 80\,000-4000$, ainsi $\boxed{C_1 = 82\,400}$

$C_2 = 1{,}08\times 82\,400-4000$, ainsi $\boxed{C_2 = 84\,992}$

▪ Montrons que la suite n'est pas arithmétique :

Bien sûr, on a d'abord fait les calculs au brouillon pour savoir où l'on va...

$C_1 - C_0 = 82400-80000 = 2400$

$C_2 - C_1 = 84922-82400 = 2592$

Les différence successives ne sont pas toutes égales donc la suite ne peut pas être arithmétique.

▪ Montrons que la suite n'est pas géométrique :

Bien sûr, on a d'abord fait les calculs au brouillon pour savoir où l'on va…

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{82\,400}{80000} = 1{,}03$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{84\,992}{82\,400} \approx 1{,}031$$

Les quotients successifs ne sont pas tous égaux donc la suite ne pas être géométrique.

3) On considère la suite auxiliaire (U_n) définie par : $U_n = C_n-50\,000$.

3.a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

▪ $U_0 = C_0-50\,000 = 80000-50000 = 30000$

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= C_{n+1}-50\,000\\ &= 1{,}08\,C_n-4000-50000\\ &= 1{,}08\,C_n-54000\\ &= 1{,}08\left(C_n-\frac{54000}{1{,}08}\right)\\ &= 1{,}08\left(C_n-50000\right)\\ &= 1{,}08\,U_n\end{aligned}$$

« Astuce » à retenir : on met « de force » en facteur et « Oh miracle... »

▪ On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = 1{,}08}$ et de premier terme $\boxed{U_0 = 30000}$.

3.b) Exprimer U_n puis C_n en fonction de n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = C_n - 50\,000 \Leftrightarrow C_n = U_n + 50000$

Or, d'après la question précédente la suite U est géométrique et on peut écrire $U_n = 30000 \times 1{,}08^n$.

Donc, en remplaçant :

$C_n = 30000 \times 1{,}08^n + 50000$

3.c) De quelle somme Mathilde disposera-t-elle au bout de 5 ans ?

Il s'agit de calculer C_5

$C_5 = 30000 \times 1{,}08^5 + 50000 \approx 94079{,}84$

Mathilde disposera d' $\boxed{\text{environ } 94\,079{,}84 \text{ €}}$.

3.d) Mathilde veut acheter une maison à 180000 €. Combien d'années devra-t-elle attendre avant de disposer de cette somme ?

Avec l'aide de la calculatrice,

$C_{19} \approx 179041{,}03$ et $C_{20} \approx 189\,828{,}71$

Il est important de montrer que C_{20} est bien le premier terme qui convient, c'est pour cela qu'il faut donner la valeur de C_{19} .

On en déduit que $\boxed{\text{Mathilde devra attendre } 20 \text{ ans}}$.