LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E02

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

En astronomie, la magnitude apparente, notée M, revient à mesurer combien une étoile apparaît brillante vue de la Terre. L'astronome Norman Pogson (1829-1891) a introduit la formule suivante : $\boxed{M=-2,5\log(E)+k}$

où E est l'éclat de l'étoile observée (puissance reçue par unité de surface) et k est une constante indépendante du choix de l'étoile.

L'étoile Véga a une magnitude apparente fixée à 0. On note E_0 l'éclat apparent de Véga.

1) Exprimer la constante k à l'aide de $\log(E_0)$.

Pour Véga $M=0$ et $M=-2,5\log(E_0)+k$

donc $M=0 \Leftrightarrow -2,5\log(E_0)+k=0 \Leftrightarrow k=2,5\log(E_0)$

Ainsi $\boxed{k = 2,5\log(E_0)}$

2) Montrer alors que $M = -2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$.

$$\begin{aligned} M &= -2,5\log(E)+k \\ &= -2,5\log(E)+2,5\log(E_0) \\ &= -2,5(\log(E)-\log(E_0)) \\ &= -2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \end{aligned}$$

3) Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga,

3.a) quel est le signe de sa magnitude apparente ?

Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga alors $E > E_0$ et par conséquent $\frac{E}{E_0} > 1$ donc $\log\left(\frac{E}{E_0}\right) > 0$ et $-2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) < 0$.

Ainsi la magnitude apparente de l'étoile est $\boxed{\text{négative}}$

3.b) Que peut-on dire de sa magnitude par rapport à celle de Véga ?

$\boxed{\text{Sa magnitude est inférieure à celle de Véga}}$.

4) Déterminer la magnitude apparente des astres suivants d'éclat E :

4.a)	**4.b)**	**4.c)**
Vénus : $E=69\times10^{-4}E_0$	Mars: $E=8,32\ E_0$	Neptune : $E=6,9\times10^{-4}E_0$

4.a)

$$M = -2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{69\times10^{-4}E_0}{E_0}\right) = -2,5\log(69\times10^{-4}) = -2,5(\log(69)-4)$$

Ainsi $\boxed{M \approx -5,4}$

4.b)

$$M = -2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{8,32\,E_0}{E_0}\right) = -2,5\log(8,32) = -2,5(\log(832)-2)$$

Ainsi $\boxed{M \approx -2,3}$

4.c)

$$M = -2,5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{6,9\times10^{-4}E_0}{E_0}\right) = -2,5\log(6,9\times10^{-4}) = -2,5(\log(69)-5)$$

Ainsi $\boxed{M \approx 7,9}$

On arrondira à 0,1 près.

5) Déterminer l'éclat des astres suivants de magnitude apparente M en fonction de E_0 :

5.a) Soleil: $M=-26{,}8$

5.b) Pleine lune : $M=-12{,}6$

5.c) Uranus : $M=5{,}7$

5.a)

$$M=-26{,}8 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -26{,}8 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 10{,}72 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{10{,}72}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{10{,}72} E_0}$

5.b)

$$M=-12{,}6 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -12{,}6 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 5{,}04 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{5{,}04}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{5{,}04} E_0}$

5.c)

$$M=5{,}7 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 5{,}7 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2{,}28 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{-2{,}28}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{-2{,}28} E_0}$