DEVOIR SURVEILLÉ N°6 (LE CORRIGÉ)

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**

EXERCICE N°1 *(10 points)*

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\ ;\ 20]$. Le coût total de production de x tonnes de produit, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$.

1) On suppose que toute la production est vendue. La recette totale, exprimée en milliers d'euros, est donnée par la fonction r définie sur $[0\ ;\ 20]$ par : $r(x) = 108x$. La fonction associée au bénéfice exprimé en milliers d'euros est donnée par la fonction B définie pour tout x $[0\ ;\ 20]$ de par $B(x) = r(x) - C(x)$.

Vérifier que pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 20]$, on a : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 192x$.

2 pts

$$\begin{aligned} B(x) &= r(x) - C(x) \\ &= 108x - (x^3 - 30x^2 + 300x) \\ &= 108x - x^3 + 30x^2 - 300x \\ &= -x^3 + 30x^2 - 192x \end{aligned}$$

2) Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ 20]$, la fonction dérivée associée au bénéfice B admet comme expression $B'(x) = 3(4-x)(x-16)$.

2 pts

D'une part,

$$B'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 192 = -3x^2 + 60x - 192$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} & -3(x-4)(x-16) \\ =\ & -3[x^2 - 16x - 4x + 64] \\ =\ & -3[x^2 - 20x + 64] \\ =\ & -3x^2 + 60x - 192 = B'(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $B'(x) = -3(x-4)(x-16)$

3) Dresser le tableau de variations sur $[0\ ;\ 20]$, de la fonction B.

2 pts

- -3 est toujours négatif,
- $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$,
- $x-16 > 0 \Leftrightarrow x > 16$.

x	0		4		16		20
-3		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-16$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\searrow$	-352	$\nearrow$	512	$\searrow$	160

4) En déduire la quantité que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Donner la valeur en milliers d'euros de ce bénéfice.

2 pts

D'après le tableau de variations l'entreprise doit fabriquer et vendre $\boxed{16\ \text{T}}$ pour un obtenir un bénéfice maximal de $\boxed{512\,000\ €}$

5) Le directeur commercial de cette entreprise souhaite déterminer les quantités à produire et à vendre pour obtenir un bénéfice strictement positif. Il affirme que si l'entreprise fabrique et vend entre 8 et 20 tonnes de produit, alors son objectif est atteint, à savoir le bénéfice est strictement positif. Le chef de production quant à lui affirme qu'il faudrait fabriquer et vendre entre 10 et 20 tonnes pour atteindre l'objectif.

Pour chacune des deux affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

2 pts

$B(8) = -128$ $\boxed{\text{Le directeur commercial se trompe}}$ car pour 8 T de produit vendu l'entreprise perd 128 000 euroset $B(10) = 80$ et d'après le tableau de variations pour $10 \leqslant x \leqslant 20$, $B(x) > 0$.

$\boxed{\text{Le chef de production a raison}}$.

EXERCICE N°2 *(10 points)*

Une entreprise produit et vend des courgettes. Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.
On note $C(x)$ le coût de production, exprimé en euros, de x tonnes de courgettes.
La fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ 16]$ et elle est donnée par :
$C(x)=x^3-15x^2+78x-650$
Chaque tonne de courgettes est vendue 150 euros.
On rappelle que le bénéfice correspond à la différence entre la recette et le coût de production.

1) Vérifier que le bénéfice $B(x)$ s'exprime par : $B(x)=-x^3+15x^2+72x+650$.

2 pts

Chaque tonne de courgettes étant vendue 150 euros, on peut affirmer que la recette est donnée par la fonction R définie pour tout $x\in[0\ ;\ 16]$ par $R(x)=150x$.
On a alors :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x)-C(x)\\ &= 150x-(x^3-15x^2+78x-650)\\ &= 150x-x^3+15x^2-78x+650\\ &= -x^3+15x^2+72x+650 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $B(x)=-x^3+15x^2+72x+650$

2) On admet que la fonction Best dérivable sur $[0\ ;\ 16]$ et on note B'sa dérivée.
Déterminer $B'(x)$.

2 pts

$B'(x)=-3x^2+15\times 2x+72$
$\boxed{B'(x)=-3x^2+30x+72}$

3) Montrer que $B'(x)=-3(x+2)(x-12)$ pour x appartenant à $[0\ ;\ 16]$.

2 pts

$$\begin{aligned} &-3(x+2)(x-12)\\ =\ &-3[x^2-12x+2x-24]\\ =\ &-3(x^2-10x-24)\\ =\ &-3x^2+30x+72\ =\ B'(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $B'(x)=-3(x+2)(x-12)$

4) À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction B sur $[0\ ;\ 16]$.

2 pts

- -3 est toujours négatif,
- $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$,
- $x-12>0 \Leftrightarrow x>12$.

x	0		12		16
-3		$-$	|	$-$	
$x+2$		$+$	|	$+$	
$x-12$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	650	↗	1946	↘	1546

5) Quelle quantité de courgettes l'entreprise doit-elle produire et vendre pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

2 pts

D'après le tableau de variations, l'entreprise obtiendra un $\boxed{\text{bénéfice maximal de 1946 euros}}$ en vendant $\boxed{\text{12 Tonnes de courgettes}}$