Suites numériques E05

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Un capital de 4 000 € est placé à 2 % par an à intérêts composés.

> On rappelle le principe du placement à intérêts composés : à la fin de chaque année, les intérêts sont intégrés à l'ancien capital et génèrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite. Ainsi on pose : $V(0)=4\,000$.

1) Calculer le capital acquis à la fin de la 1e année puis de la 2e année.

Il s'agit de calculer $V(1)$ et $V(2)$.

$V(1) = V(0)+\frac{2}{100}\times V(0) = 4000+\frac{2}{100}\times 4000$, ainsi $\boxed{V(1)=4\,080}$

$V(2) = V(1)+\frac{2}{100}\times V(1) = 4080+\frac{2}{100}\times 4080$, ainsi $\boxed{V(2)=4\,161{,}6}$

Le capital acquis à la fin de la $\boxed{1^{ere} \text{ année vaut : } 4080\ €}$

et celui acquis à la fin de la $\boxed{2^{eme} \text{ année vaut : } 4161{,}5\ €}$

2) Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.

D'une part : $V(2)-V(1) = 4161{,}5-4080 = 81{,}6$

et d'autre part : $V(1)-V(0) = 4080-4000 = 80$

Ainsi $\boxed{\text{les différences entre deux termes successifs ne sont pas toutes égales}}$, ce qui prouve que le capital n'est pas en progression arithmétique.

3) Compléter la phrase suivante: « Augmenter quantité de 2 % revient à la multiplier par ... »

Augmenter une quantité de 2 % revient à la multiplier par $\boxed{1{,}02}$

4) En déduire que la suite V est géométrique préciser sa raison et le premier terme.

Pour passer d'un terme au suivant, on $\boxed{\text{multiplie à chaque fois par le même nombre}}$: 1,02.

On en déduit que V est géométrique, de $\boxed{\text{raison } q=1{,}02}$ et de $\boxed{1^{er} \text{ terme } V(0)=4000}$

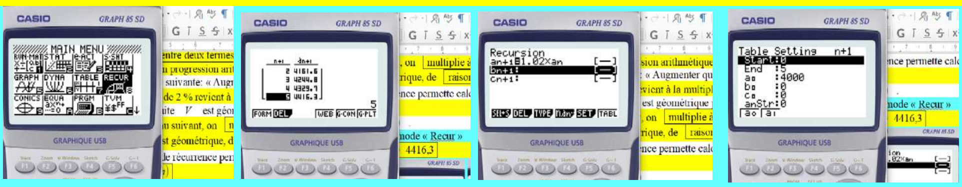
5) Écrire une formule de récurrence permette calculer $V(n+1)$ en fonction de $V(n)$.

$\boxed{V(n+1) = 1{,}02\times V(n)}$

6) Calculer et interpréter $V(5)$.

On utilise la calculatrice, avec le mode « Recur »

à l'aide la calculatrice : $\boxed{V(5) \approx 4416{,}3}$



Et on interprète :

$\boxed{\text{Le capital acquis à la fin de la } 5^{eme} \text{ année vaut environ } 4416{,}32\ €}$.

Suites numériques E05

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an.
En 2019, elle était de 8 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019+n)$. On a donc $u(0)=8000$.

1) Calculer les termes $u(1), u(2)$ et $u(3)$.

Une augmentation de 10 % correspond à un Coefficient Multiplicateur $CM=1{,}1$

$u(1) = u(0)\times 1{,}1 = 8000\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(1) = 8800}$

$u(2) = u(1)\times 1{,}1 = 8800\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(2) = 9680}$

$u(3) = u(2)\times 1{,}1 = 9680\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(3) = 10648}$

2) Donner la nature et la raison de la suite u .

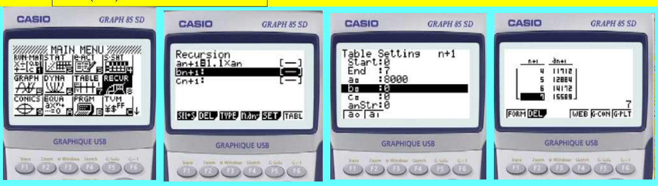
Pour passer d'un terme au suivant, on $\boxed{\text{multiplie à chaque fois par le même nombre}}$: 1,1.
On en déduit que $\boxed{u \text{ est géométrique}}$, de $\boxed{\text{raison } q=1{,}1}$ et de $\boxed{1^{\text{er}} \text{ terme } u(0)=8000}$

3) Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n+1)$ et $u(n)$.

$\boxed{u(n+1) = 1{,}1\times u(n)}$

4) Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2026.

$2026 = 2019+7$, il s'agît donc de calculer $u(7)$.
à l'aide de la calculatrice $\boxed{u(7) \approx 15589}$



En réalité, l'arrondi donnerait plutôt 15590, mais cette année, nous faisons confiance à la calculatrice…

5) Déterminer en quelle année la population aura doublé.

à l'aide de la calculatrice $u(7) \approx 15589$ et $u(8) \approx 17148$
On en déduit que la population aura doublé en $2019+8=$ $\boxed{2027}$

6) Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019+n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc: $v(n)=u(n+1)-u(n)$.

6.a) Calculer $v(1), v(2)$ et $v(3)$.

$v(1) = u(1+1)-u(1) = u(2)-(1) = 9680-8800$, ainsi $\boxed{v(1) = 880}$

$v(2) = u(2+1)-u(2) = u(3)-(2) = 10648-9680$, ainsi $\boxed{v(2) = 968}$

$v(3) = u(3+1)-u(3) = u(4)-(3) = 11712-10648$, ainsi $\boxed{v(3) = 1064}$

6.b) La suite v est-elle arithmétique ? Géométrique? Le démontrer.

On commence par calculer au brouillon les premières différences de deux termes successifs et on constate qu'elles ne sont pas égales, On essaie alors les premiers quotients de deux termes successifs et là ça marche. Attention, à ce stade nous n'avons qu'une conjecture (il semble que).
On va donc démontrer que la suite est géométrique.

Démontrons que la suite v est géométrique :
Soit n un entier naturel.

On serait tenté de considérer $\dfrac{v(n+1)}{v(n)}$. C'est rarement une bonne idée et en plus il faudrait justifier que tous les termes sont nuls (hé oui, on fait un quotient, il faut s'assurer qu'il existe…)
Voici donc une méthode classique qui pour nous marchera à chaque fois.

$v(n+1) = u(n+2)-u(n+1) = 1{,}1\times u(n+1)-1{,}1\times u(n) = 1{,}1[u(n+1)-u(n)]=1{,}1\times v(n)$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $\boxed{v(n+1) = 1{,}1\times v(n)}$ ce qui prouve que la suite $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q=1{,}1}$.

Comment ça marche ?
On exprime $v(n+1)$ en fonction de l'autre suite, puis à l'aide des propriétés de cette autre suite on fait apparaître $v(n)$ (en général grâce à une factorisation).

6.c) Calculer la somme: $v(1)+v(2)+v(3)+v(4)+v(5)+v(6)+v(7)$.

Comme v est géométrique, il suffit d'utiliser la formule suivante :

$\boxed{v(1)\times\dfrac{1-1{,}1^7}{1-1{,}1} \approx 8349}$ à l'unité.

EXERCICE N°3

Cet exercice étudie la désintégration du carbone 14 (C_{14}) et son utilisation pour la datation des fossiles.

Soit $v(0), v(1), v(n)$, le nombre d'atomes de carbone 14 respectivement à l'instant $t=0$; 1 siècle après ; n siècles après.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement, d'environ 1,24 % par siècle.
Les rayons cosmiques produisent dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement.
Le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la Terre est donc constant.
Les tissus animaux et végétaux vivants contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère.
À leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse. Celui-ci se désintègre dans les conditions vues ci-dessus.

1) Quelle est la nature (arithmétique ou géométrique) de la suite v ? Préciser sa raison.

Une diminution de $1{,}24\,\%$ correspond à un coefficient multiplicatif $CM = 1-0{,}0124 = 0{,}9876$.
Ainsi pour passer d'un terme au suivant on multiplie à chaque fois par $0{,}9876$.
Donc la suite $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ et de $\boxed{\text{raison } q=0{,}9876}$.

2) Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du C_{14} initial. Justifier que son âge est environ 24 000 ans.

Ici, contrairement à d'habitude, on ne connaît aucun terme de la suite. Mais ce n'est pas un problème puisque l'on va raisonner en terme de proportion et non de quantité.

24000 ans correspond à 240 siècles.
Or :

$$v(240) = 0{,}9876 \times v(239) = 0{,}9876^2 \times v(238) = 0{,}9876^3 \times v(237) = \ldots = 0{,}9876^{240} \times v(0)$$

Ainsi $v(240) \approx 0{,}05 \times v(0) = \dfrac{5}{100} \times v(0)$

à la calculatrice $0{,}9876^{240} \approx 0{,}050056$ à 10^{-6} près

Autrement dit, $\boxed{v(240) \text{ représente } 5\,\% \text{ de } v(0)}$

On peut donc affirmer que si le squelette contient 5 % du C_{14} initial alors il a environ 24000 ans.