LES SUITES NUMÉRIQUES E05C

EXERCICE N°1 *Comportement d'une suite définie explicitement*

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2+n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+1)^2+(n+1)-[n^2+n] \\ &= n^2+2n+1+n+1-n^2-n \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

Or $n \geqslant 0$ donc $2n+2 > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement croissante}}$.

Car : $u_{n+1}-u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3^n}{7^{n+1}}$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = > 0$, ce qui nous permet ce qui suit.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{7^{n+2}}}{\dfrac{3^n}{7^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{7^{n+2}} \times \frac{7^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{7} < 1$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

En fait, ce n'est pas tout à fait gratuit :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{3}{7} v_n < v_n \text{ et donc } v_{n+1} < v_n$$

et $\dfrac{3}{7} v_n < v_n$ car $\dfrac{3}{7} < 1$ (d'où la comparaison avec 1)

3) La suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = -5^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1}-w_n = -5^{n+1}-(-5^n) = -5^{n+1}+5^n = 5^n(-5+1) = -4 \times 5^n < 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite est strictement décroissante}}$.

4) La suite t définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = (-5)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1}-t_n = (-5)^{n+1}-(-5)^n = (-5)^n(-5-1) = -6 \times (-5)^n$$

Or :

si n est pair $(-5)^n > 0$ d'où $-6 \times (-5)^n < 0 \Leftrightarrow t_{n+1}-t_n < 0$

et si n est impair $(-5)^n < 0$ d'où $-6 \times (-5)^n > 0 \Leftrightarrow t_{n+1}-t_n > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite n'est pas monotone}}$.