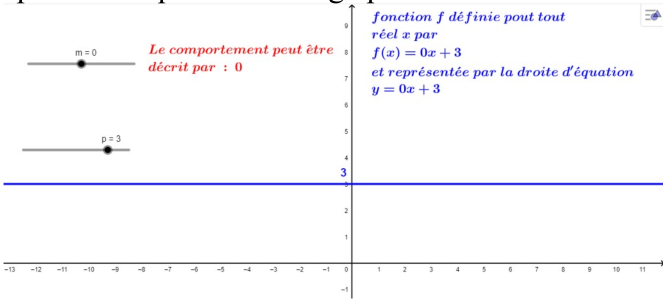
LA DÉRIVATION

I Introduction (un peu longue, pas nécessaire mais pas inutile...)

On sait qualifier le comportement d'une fonction : sur un intervalle donné, elle peut être croissante, décroissante ou constante. Graphiquement, cela se traduit par « la courbe monte, descend ou stagne ». On s'aperçoit très vite que certaines courbes montent ou descendent « plus vite » que d'autres… On aimerait donc être plus précis…
On souhaite pouvoir quantifier le comportement d'une fonction, c'est-à-dire le caractériser par un nombre.
Pour les fonctions constantes, c'est facile, elles ne varient pas ! Donc on va décrire leur comportement par zéro.
▪ Par exemple, à la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 3$ on associera zéro pour la description de ses variations. (On pourrait remplacer 3 par n'importe quel nombre, le raisonnement resterait le même…)
▪ Passons aux fonctions linéaires : Soit la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = mx$ où m est un nombre réel.
Nous savons que cette fonction est représentée par une droite d'équation réduite $y = mx$. Le comportement de la droite est donné par son coefficient directeur m. On pourra donc associer à la fonction g le nombre m pour quantifier son comportement.
▪ Les fonctions affines ne sont pas non plus difficiles à décrire puisque l'ordonnée à l'origine n'agit pas sur le comportement de la courbe mais seulement sur sa position.

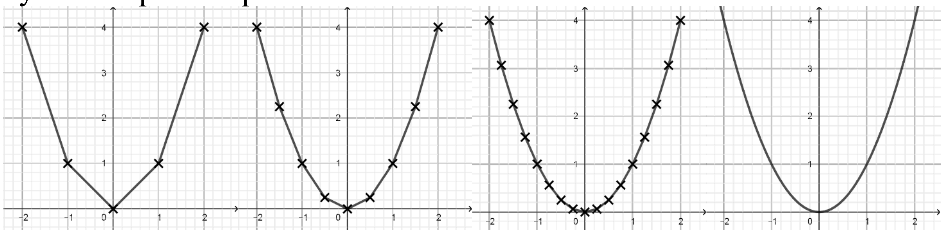
(Vous pouvez cliquer sur l'image pour faire varier m et p)



Ce qui nous a permis d'avancer jusque là, c'est que les fonctions dont nous avons parlé sont toutes représentées par des droites et qu'il est facile de quantifier le comportement d'une droite grâce à son coefficient directeur : m

Les autres fonctions ne sont pas représentées par des droites et un seul nombre ne suffira plus à décrire leur comportement.

Notre stratégie consistera alors à travailler sur de (très très) petits morceaux de la courbe qui, dans les bons cas ressembleront à des morceaux de droite, et essayer d'adapter ce que l'on vient de faire.



Plus les morceaux sont petits au mieux on approche la courbe...

On va passer du global au local…

LA DÉRIVATION

II Le point de vue local

II.1 Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

Définition n°1. Taux de variation / taux d'accroissement

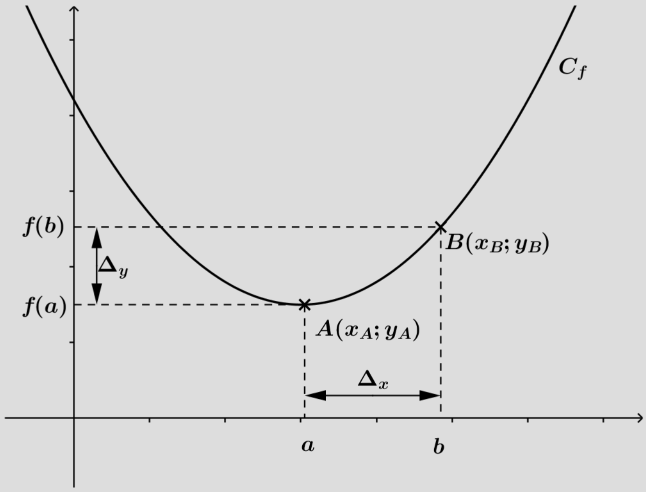
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b appartenant à I. On appelle taux de variation entre a et b le quotient :

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Le taux d'accroissement partage la même définition mais est plus utilisé lorsque la différence entre a et b devient « très petite ».

LA DÉRIVATION

Remarque n°1.

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

LA DÉRIVATION E01

EXERCICE N°1 Taux de variation / taux d'accroissement

On considère la fonction f définie pour tout réels x par : $f(x) = x^2+4x$

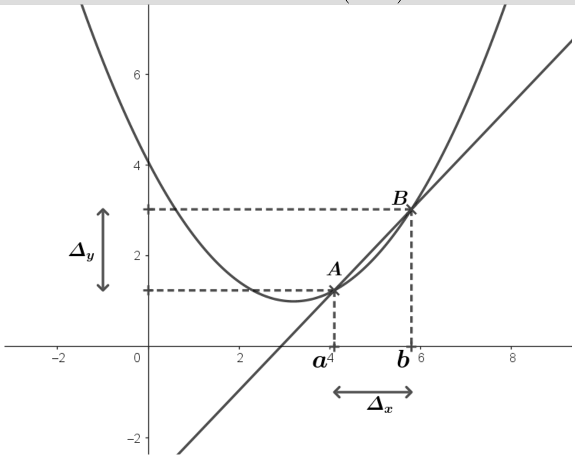
1) Calculer les images par f de 2 ; 3 ; -5 et -4 .

2) Calculer le taux d'accroissement entre les réels 2 et 3 .

3) Calculer le taux d'accroissement entre les réels -5 et -4 .

Remarque n°2.

Le taux de variation (ou d'accroissement) entre a et b est donc le coefficient directeur de la droite (AB).



Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation (ou d'accroissement) et taux d'évolution.

LA DÉRIVATION E01

EXERCICE N°2 Coefficient directeur

On considère la fonction f définie pour tout réels x par : $f(x) = x^2+4x$

On note C_f sa courbe représentative et on donne les points suivants :

$A(2 ; 12)$; $B(3 ; 21)$; $C(-5 ; 5)$ et $D(-4 ; 0)$

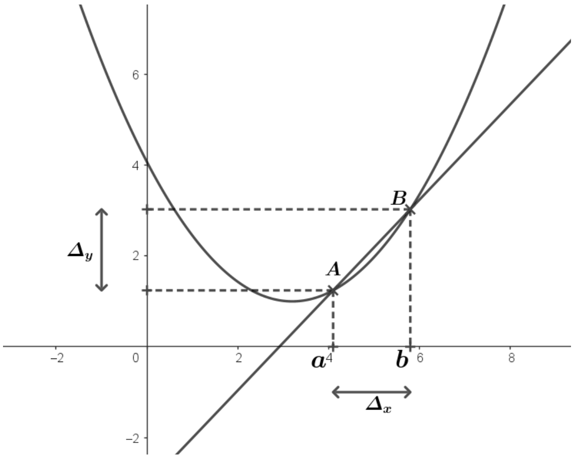
1) Vérifier que ces quatre points appartiennent à la courbe C_f .
2) Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
3) Calculer le coefficient directeur de la droite (CD) .

Définition n°2.

La droite (AB) est une sécante à la courbe C_f passant par A.

Remarque n°4.

Sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ la courbe se comporte « un peu comme » la droite (AB) dont le comportement peut être décrit par… le taux de variation.



Remarque n°5.

On aurait pu faire la même phrase avec B mais dans la suite on va « fixer » A et « faire varier » B.

II.2 Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points A et B sont proches l'un de l'autre.

Définition n°3. (un peu hors programme...pour le moment)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de f en a et on note si cela existe :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque n°6. Nombre dérivé d'une fonction f en a.

La notion de limite n'étant pas pour tout de suite, on se contentera de dire que :

$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Exemple n°1.

Soit $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2+5 \end{cases}$, déterminons le nombre dérivé de f en 3 .

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

En faisant « tendre h vers 0 » , on obtient 6.

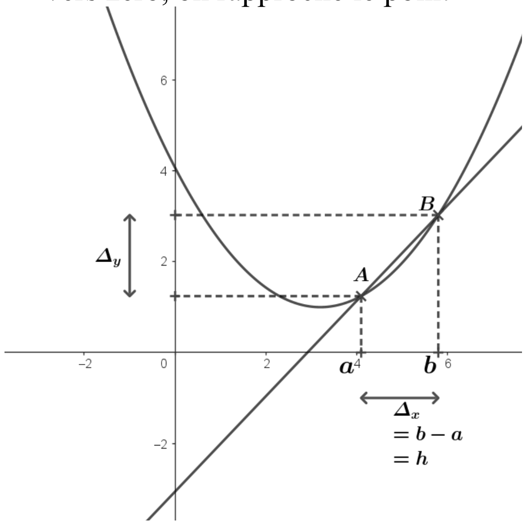
Donc $f'(3) = 6$.

Remarque n°7.

Mais d'où sort ce h ?

C'est la variation absolue des abscisses : $h=\Delta_x=x_B-x_A$

En faisant tendre h vers zéro, on rapproche le point B du point A.



LA DÉRIVATION

EXERCICE N°3 Nombre dérivé par le calcul

On considère la fonction f définie pour tout réels x par : $f(x) = x^2+4x$. Soit $h \in \mathbb{R}$.

1) Simplifier l'expression $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}$.

(Si $h = 3-2 = 1$ *quelle question des exercices n°1 et n°2 retrouve-t-on ?)*

2) Déterminer le nombre dérivé de f en 2.

3) Simplifier l'expression $\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{(-5+h)-(-5)}$.

(Si $h = -4-(5) = 1$ *quelle question des exercices n°1 et n°2 retrouve-t-on ?)*

4) Calculer $f'(-5)$.

5) Déterminer le nombre dérivé de f en -2 .

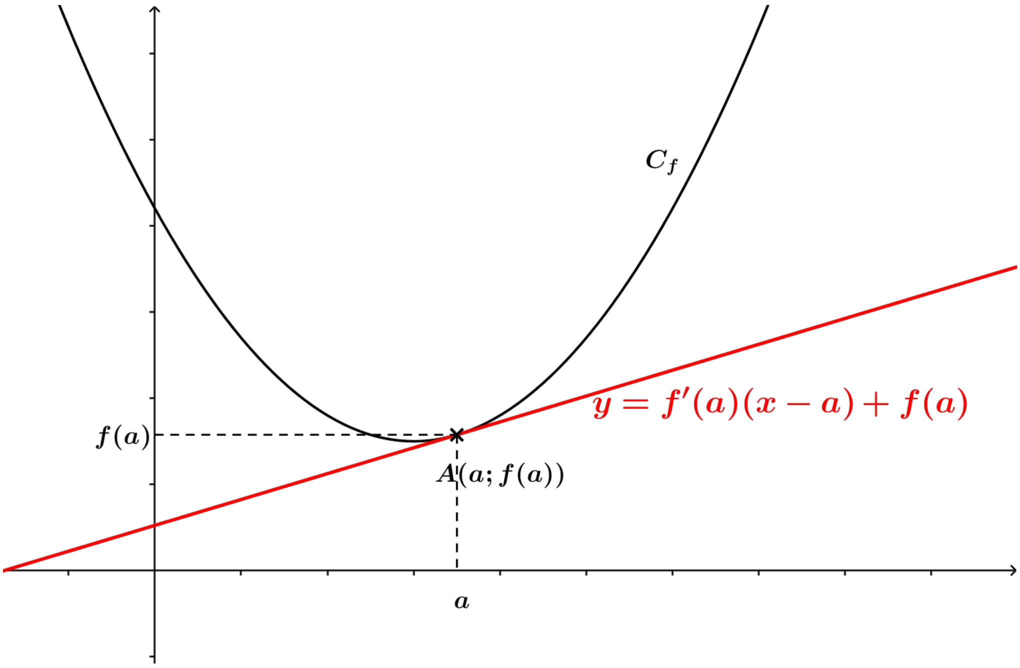
III Tangente à la courbe C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°5, nous allons faire « tendre B vers A » et notre sécante va devenir une tangente.

En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$, on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre », quand h tend vers 0 , vers $f'(a)$.

Définition n°4.

La tangente T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Géogebra (en ligne)

(à télécharger)

Remarque n°8.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à C_f , on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de C_f peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-a\,f'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

Géogebra (en ligne)

(à télécharger)

LA DÉRIVATION

Propriété n°1. Équation de la tangente

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

EXERCICE N°4 Nombre dérivé par lecture graphique.

On considère la fonction f définie pour tout réels x par : $f(x) = x^2+4x$

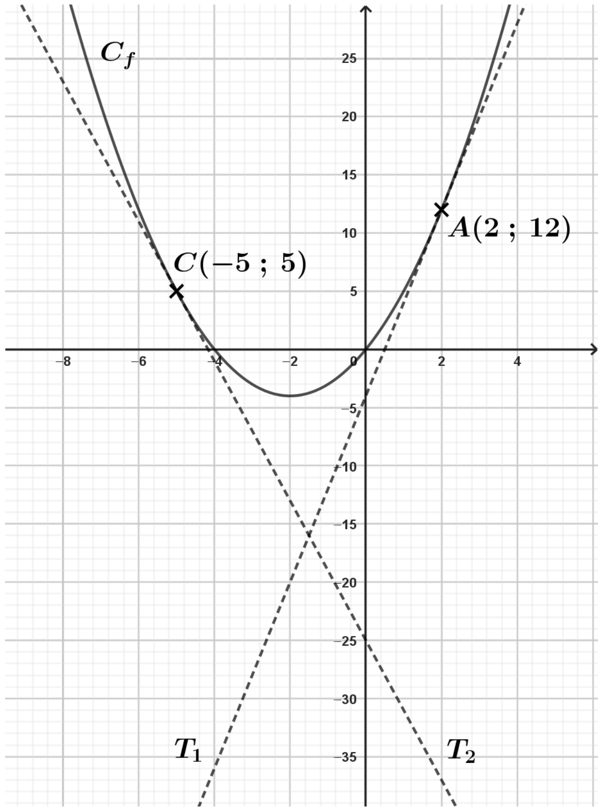
On note C_f sa courbe représentative et on donne les points suivants :
$A(2\ ;\ 12)$ et $C(-5\ ;\ 5)$.

Les droites T_1 et T_2 sont les tangentes à la courbe C_f respectivement en A et C .

1) Déterminer par lecture graphique le nombre dérivé de f en 2.

2) Déterminer par lecture graphique $f'(-5)$.

3) Déterminer par lecture graphique, l'équation réduite de T_2 .



EXERCICE N°5 Équation de la tangente

On considère la fonction f définie pour tout réels x par : $f(x) = x^2+4x$.

On note C_f sa courbe représentative et on donne les points suivants :

$A(2\ ;\ 12)$ et $C(-5\ ;\ 5)$.

1) Déterminer une équation de la tangente à la C_f au point A .

2) Déterminer une équation de la tangente à la C_f au point C .

(Eh oui C_f et C *c'est pas la même chose ! On reste attentif !)*

Remarque n°9.

Bon, tout ça c'est bien gentil mais quelle galère ce calcul du nombre dérivé !
Ce serait bien d'avoir une sorte de formule qui nous ferait gagner du temps…
Cela tombe bien, c'est l'objet du prochain paragraphe. On revient au global.

IV Le point de vue global

IV.1 Fonction dérivée d'une fonction

Définition n°5.

$f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel x appartenant à l'intérieur de I , $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intérieur de I et on appelle fonction dérivée de f , la fonction notée f' définie par

$f' := \begin{cases} \mathring{I} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$

LA DÉRIVATION

Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2+5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h} = 2x+h$$

En faisant « tendre h vers 0 » , on obtient $2x$.

Ainsi $f'(x)=2x$.

Ceci étant valable pour tout réel x , nous venons de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2x \end{cases}$

IV.2 Quelques fonctions dérivées de référence

Remarque n°10. ***Fonction dérivée d'une fonction constante***

Si f est une fonction constante sur I, autrement dit pour tout $x \in I$ $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors :

$f(x+h) - f(x) = k - k = 0$ pour tout h, on en déduit que $f'(x) = 0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

(On le savait depuis l'introduction…)

Remarque n°11. ***Fonction dérivée de la fonction identité***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \end{cases}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

(On le savait aussi...)

Propriété n°2. ***Fonction dérivée de la fonction carré***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ alors $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2x \end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « h tend vers 0 » .

Remarque n°12.

Cela confirme qu'on ne décrit plus le comportement à l'aide d'un seul nombre (puisque « $2x$ » varie avec x …).

Résumons cela dans un tableau et ajoutons-y quelques lignes que nous démontrerons en exercice.

LA DÉRIVATION

Propriété n°3. ***Fonctions dérivées des fonctions de références (admises ici)***

k est un nombre réel, n est un entier naturel non nul.

Nom de f	$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
Fonction constante	k	$\mathbb{R}$	0
Fonction identité	x	$\mathbb{R}$	1
Fonction carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
Fonction cube	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
Fonction puissance d'exposant n	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
Fonction inverse	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue	$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	1 si $x \geqslant 0$ -1 si $x<0$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (*une technique à retenir*) : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ admet pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

4) À quoi servait la question 1) ?

La dernière ligne du tableau appelle quelques précisions :

Définition n°6. ***Valeur absolue***

On appelle valeur absolue d'un nombre réel a, sa distance à zéro et on note alors $|a|$.

Exemple n°3.

$$|7{,}1| = 7{,}1 \quad \text{et} \quad |-7{,}1| = 7{,}1$$

LA DÉRIVATION

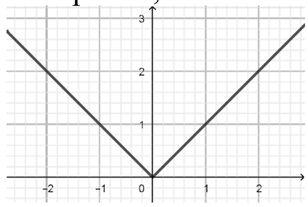
Définition n°7. ***La fonction valeur absolue***

La fonction valeur absolue est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$.

Remarque n°13.

On peut aussi la définir de la façon plus explicite, suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Elle apparaît donc clairement affine par morceaux et on comprend mieux la dernière ligne du tableau précédent.

Propriété n°4. ***(admise ici)***

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

Remarque n°14.

On progresse mais que fait-on par exemple pour $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 17$?
On lit le paragraphe suivant…

IV.3 Fonctions dérivées et opérations

Voici un second tableau tout aussi important à connaître que le précédent et nous donnerons les démonstrations en exercice.

Propriété n°5. Fonctions dérivées et opérations (admises ici)

On se donne u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et on note u' et v' leur fonction dérivée.
a et b sont des nombres réels

Nom	$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
Produit par une constante	$k\times u(x)$	I	$k\times u'(x)$
Somme	$u(x)+v(x)$	I	$u'(x)+v'(x)$
Produit	$u(x)\times v(x)$	I	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
Inverse	$\dfrac{1}{u(x)}$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
Quotient	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\forall x\in I, v(x)\neq 0$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x}{(v(x))^2}$
Composée d'une fonction et d'une fonction affine	$u(ax+b)$	$\forall x\in\mathbb{R}, ax+b\in I$	$a\times u'(ax+b)$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$.

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

2) $g_1 : x \mapsto x+2$; $g_2 : x \mapsto x + 3\pi\sqrt{7}$

3) $g_3 : x \mapsto 4x+5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x + 8{,}5$;

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2 - 4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2 + 5x - 1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2 + 6x + \sqrt{3}$

5) $h_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^3 - 4x^2 + 3x - 7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3 + \sqrt{5}x^2 - \dfrac{14}{3}x + 33$

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n + 2x^2 + \dfrac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x} + 8x^{15} - \dfrac{4}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x} + 7|x| - \dfrac{7}{x}$

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

LA DÉRIVATION E03

Définition partielle :

Soit f et g deux fonctions.
On appelle composée de f par g et on note $f \circ g$ la fonction :
$f \circ g : x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

cliquez-moi

EXERCICE N°1 fonction affine et fonction carré

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+4 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ la fonction carré. Pour $x \in \mathbb{R}$:

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$.
2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

EXERCICE N°2 fonction affine et fonction inverse

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

LA DÉRIVATION E03

EXERCICE N°3 fonction affine et fonction racine carrée

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

EXERCICE N°4 fonction affine et fonction valeur absolue

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

LA DÉRIVATION E04

EXERCICE N°1 Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse a .

1) $f(x) = 4x^3-5x+3$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$.

2) $f(x) = -7t^2-\dfrac{3}{t}+5$, $I =]0\ ;+\infty[$, $a = 3$.

3) $f(x) = (2x-3)^3(x^2+1)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -1$.

4) $f(x) = \dfrac{4x^5-10x^2+3}{2x}$, $I =]-\infty\ ;0[$, $a = -1$.

LA DÉRIVATION E04

EXERCICE N°2 Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis calculer le nombre dérivé de f en a .

Aide au calcul
$125\times105 = 13125$
$54\times11^4 = 790614$

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$, $I = [0 ; +\infty[$, $a = 1$.

2) $f(t) = (2t+1)^3(5-3t)^4$ $I = \mathbb{R}$, , $a = -2$.

3) $f(x) = \dfrac{3+x^2}{(5x-10)^4}$, $I =]2 ; +\infty[$, $a = 3$.

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2}$, $I =]0 ; 3]$, $a = 1$.

LA DÉRIVATION E04

EXERCICE N°3 Tangentes parallèles à une droite donnée

Extrait du déclic 1er spé 74 p 122

Aide au calcul

$-\frac{343}{243}-\frac{49}{81}-\frac{7}{9}+1 = -\frac{436}{243}$

$\frac{56}{9}-\frac{436}{243} = \frac{1076}{243}$

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^3-x^2-x+1$$

Déterminer les tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = -8x+2$.
On précisera l'abscisse des points de tangence et leurs équations réduites respectives.

EXERCICE N°4 Tangentes passant par un point donné

Extrait du déclic 1er spé 99 p 127

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

et on note C_f sa courbe représentative.

On souhaite déterminer les tangentes à C_f passant par le point $M(0\ ;\ 2)$.

1) Démontrer que la tangente t_a au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe C_f a pour équation réduite :

$$y = -\frac{4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2} \ .$$

2) Montrer que $M(0\ ;\ 2) \in T_a \Leftrightarrow a^2-a^4 = 0$.

3) Conclure.

Remarque n°15.

Il ne nous reste plus qu'à faire le lien entre les variations d'une fonction et sa fonction dérivée.

IV.4 Variations d'une fonction et signe de la dérivée

Propriété n°6. ***(admise ici)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

▪ Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) \geqslant 0$

▪ Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) \leqslant 0$

▪ Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x) = 0$

Propriété n°7. ***(admise ici)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

▪ Si pour tout x de I $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I

▪ Si pour tout x de I $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I

▪ Si pour tout x de I $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

LA DÉRIVATION E05

EXERCICE N°1 Méthode : dérivée et tableau de variation

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné, puis dresser le tableau de signes de f' et en déduire son tableau de variations sur I .

1) $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ $I =]-4 ; 4[$

2) $f : x \mapsto 9x - 5 + \frac{16}{x-2}$ $I =]3 ; 6[$

EXERCICE N°2 Étude de fonction avec une fonction auxiliaire

On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{3}x^3 - x + 2}$ sur $I =]-2\ ;\ 2[$.

Partie n°1 : f est définie et dérivable sur I .

On pose $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

1) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur I .
2) Étudier le signe de g' sur I .
3) Dresser alors le tableau de variations de g sur I .
4) En déduire le signe de g sur I à l'aide de ses extrema sur I .
5) Justifier alors que f est bien définie et dérivable sur I .

Partie n°2 : étude de f sur I .

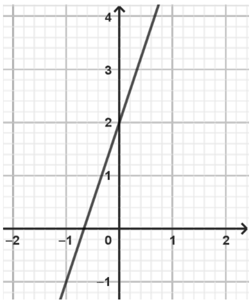
6) Déterminer f' , la fonction dérivée de la fonction f sur I .
7) Étudier le signe de f' sur I .
8) Dresser alors le tableau de variations de f sur I .

LA DÉRIVATION E06

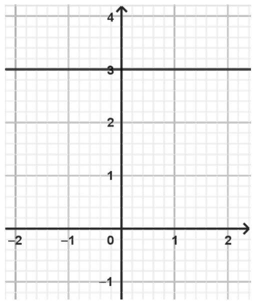
EXERCICE N°3 Comprendre graphiquement le lien entre une fonction et sa dérivée

Dans chaque cas, on donne deux courbes C_1 et C_2 qui représentent respectivement les fonctions f_1 et f_2 . Décider si f_2 peut être la fonction dérivée de f_1 .

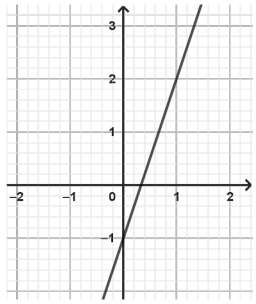
1) C_1



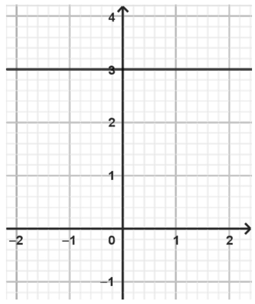
C_2



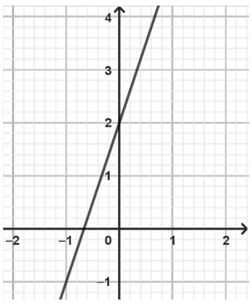
2) C_1



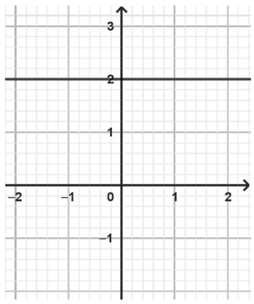
C_2



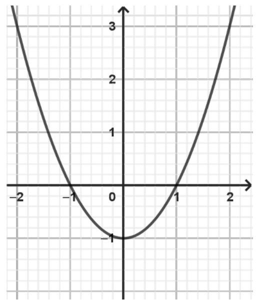
3) C_1



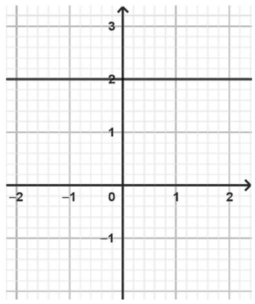
C_2



4) C_1

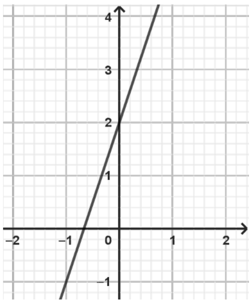


C_2

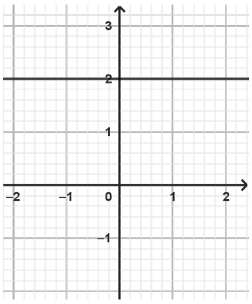


LA DÉRIVATION E06

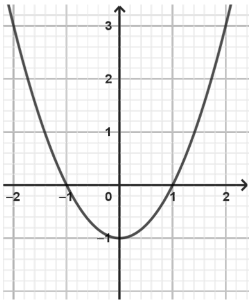
5) C_1



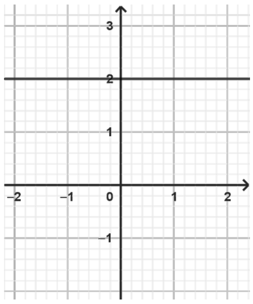
C_2



6) C_1

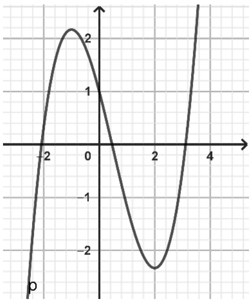


C_2

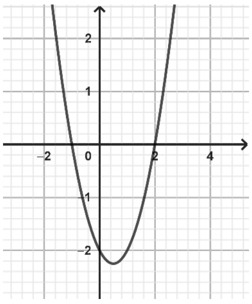


LA DÉRIVATION E06

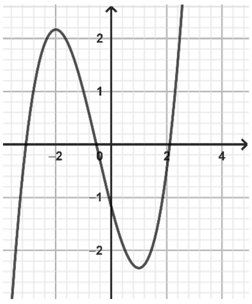
7) C_1



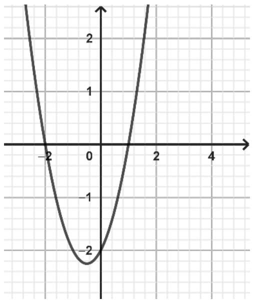
C_2



8) C_1

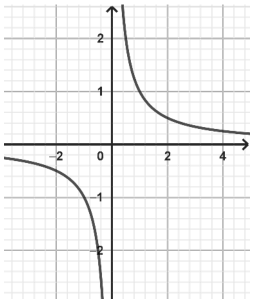


C_2

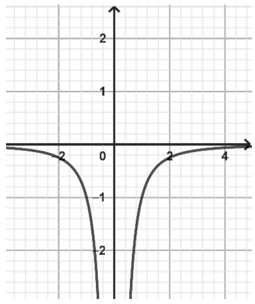


La dérivation E06

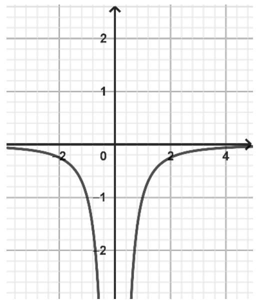
9) C_1



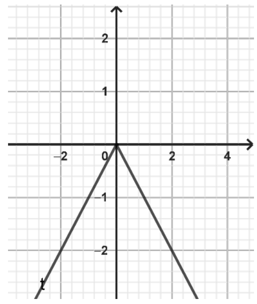
C_2



10) C_1

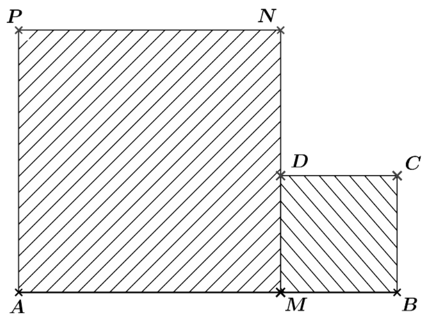


C_2



EXERCICE N°1 Du concret : Optimisation d'une aire

Extrait du Sesamath 1er spe n°48 p155



Soit un segment $[AB]$ de longueur 10 et M un point de ce segment. Du même côté de ce segment, on construit deux carrés $AMNP$ et $MBCD$. On pose $AM = x$ et on étudie l'aire du domaine formé par ces deux carrés en fonction de x.

1) À quel intervalle I appartient le réel x ?

2) Soit $f(x)$ l'aire du domaine. Montrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

3) Justifier que la fonction f est dérivable sur I et déterminer $f'(x)$ pour tout x de I.

4) En déduire les variations de f sur I et la valeur de x pour laquelle l'aire du domaine est minimale.

EXERCICE N°2 Du concret : Optimisation d'un bénéfice

Extrait du Sesamath 1er spe n°81 p158

Une coopérative fabrique du jus de pomme. Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x dizaines de litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction $C : x \mapsto x^2 - x + 10$. Chaque dizaine de litres produite sera vendue 19 €.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction C ?

2) On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x dizaines de litres vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

3) On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x dizaines de litres de jus de pomme. Quel que soit x, on a $B(x)=R(x)-C(x)$. Montrer que la fonction bénéfice B est définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $B(x)=-x^2+20x-10$.

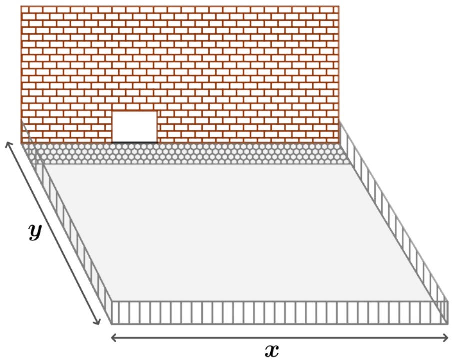
4) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 20]$.

5) En déduire le nombre de litres que la coopérative doit produire afin d'obtenir un bénéfice maximum.

EXERCICE N°3 Du concret : Optimisation d'un prix

Extrait du Déclic 1[er] spe n°87 p 124

Le gérant d'un magasin de sport souhaite faire construire une aire rectangulaire à l'extérieur du magasin pour permettre aux clients de tester certains produits. Il veut que cette zone occupe $200\ \text{m}^2$ et que soit installée, sur trois de ses côtés, une clôture en bois coûtant 12 € le mètre. De plus , le long du côté attenant au mur du magasin, il fera poser une rangée de dalle en béton à 15 € le mètre.



Soient y la largeur et x la longueur du rectangle délimitant la zone. Le gérant aimerait connaître les valeurs de x et y qui minimiserait le prix de l'entourage de cette aire sachant que x est compris entre 10 et 40 m .

1) Montrer que $y = \dfrac{200}{x}$

2) Montrer que le prix p de la construction de l'entourage peut s'exprimer en fonction de x et que $p(x) = 27x + \dfrac{4800}{x}$

3) Étudier les variations de p sur l'intervalle $[10\ ;\ 40]$.

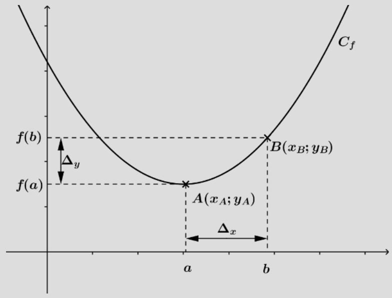
4) Déterminer les dimensions de la zone pour que le prix de l'entourage soit minimal. Combien le gérant devra-t-il payer ?

V Le résumé du cours

Taux de variation

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :

taux de variation : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$



où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

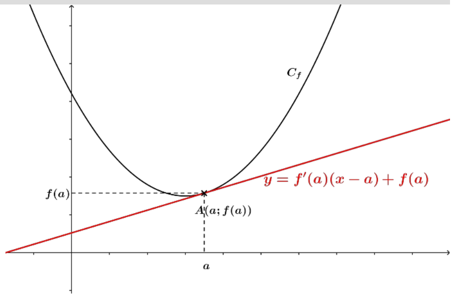
Nombre dérivé

$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Tangente, coefficient directeur et nombre dérivé

La **tangente** T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $f'(a)$.

Équation de la tangente en *a*



Fonction dérivée

Si f est dérivable sur I , on note f' sa fonction dérivée et pour tout x dans I $f'(x)$ vaut le nombre dérivé de la fonction f en x .

Fonctions dérivées de référence

k est un nombre réel, n est un entier naturel non nul.

Nom de f	$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
Fonction constante	k	$\mathbb{R}$	0
Fonction identité	x	$\mathbb{R}$	1
Fonction carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
Fonction cube	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
Fonction puissance d'exposant n	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
Fonction inverse	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue	$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	1 si $x\geqslant 0$ -1 si $x<0$

Valeur absolue

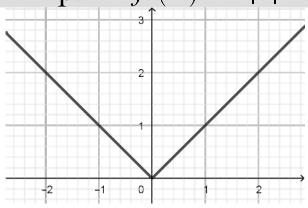
On appelle valeur absolue d'un nombre réel a, sa distance à zéro et on note alors $|a|$.

Exemple : $|7{,}1| = 7{,}1$ et $|-7{,}1| = 7{,}1$

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ (Elle est affine par morceaux)



La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

Fonctions dérivée et opérations

On se donne u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et on note u' et v' leur fonction dérivée.
a et b sont des nombres réels

Nom	$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
Produit par une constante	$k\times u(x)$	I	$k\times u'(x)$
Somme	$u(x)+v(x)$	I	$u'(x)+v'(x)$
Produit	$u(x)\times v(x)$	I	$u'(x)v(x)+u(x)'v(x)$
Inverse	$\dfrac{1}{u(x)}$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
Quotient	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\forall x\in I, v(x)\neq 0$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)'v(x)}{(v(x))^2}$
Composée d'une fonction et d'une fonction affine	$u(ax+b)$	$\forall x\in\mathbb{R}, ax+b\in I$	$a\times u'(ax+b)$

Variations d'une fonction et signe de la dérivée

comportement implique signe

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$
- Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$
- Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)=0$

Signe implique comportement

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$ alors f est croissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$ alors f est décroissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)=0$ alors f est constante sur I