Phénomènes aléatoires E02C

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire comptant 160 issues possibles et vérifiant :

$Card(A \cap B) = 35$; $Card(A) = 50$ et $Card(B) = 70$

1) Représenter la situation sous forme de tableau

	A	$\overline{A}$	Total
B	35	35 (=70-35)	70
$\overline{B}$	15 (=50-35)	75 (=90-15)	90 (=160-70)
Total	50	110 (=160-50)	160

Ce qui est entouré provient directement de l'énoncé, le reste s'obtient par calcul.

2) Calculer $p_A(B)$ et $p_B(A)$

Ici, on utilise directement la définition n°4

$$p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{35}{50} = 0{,}7$$

$$p_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)} = \frac{35}{70} = 0{,}5$$

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0,7$ et $Card(B)=50$

Calculer $Card(A \cap B)$

Ici, on va utiliser la définition n°4

On sait que :

$$p_B(A)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(B)}$$

En remplaçant par les données numériques, on obtient :

$$0,7=\frac{Card(A\cap B)}{50}$$

Ce qui équivaut à :

$$Card(A\cap B) = 0,7\times 50 = 35$$

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0{,}1$ et $Card(B)=8510$

Calculer $Card(A \cap B)$

Ici, on va encore utiliser la définition n°4

On sait que :

$$p_B(A)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(B)}$$

En remplaçant par les données numériques, on obtient :

$$0{,}1=\frac{Card(A\cap B)}{8510}$$

Ce qui équivaut à :

$$Card(A\cap B) = 0{,}1\times 8510 = 851$$

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A) = 0,5$ et $Card(A \cap B) = 14$

Calculer $Card(B)$

Ici, on va encore utiliser la définition n°4

On sait que :

$$p_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

En remplaçant par les données numériques, on obtient :

$$0,5 = \frac{14}{Card(B)}$$

Ce qui équivaut à :

$$Card(B) = \frac{14}{0,5} = 28$$

EXERCICE N°5 (Le corrigé)

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0{,}3$ et $Card(A \cap B)=21$

Calculer $Card(B)$

Ici, on va encore utiliser la définition n°4

On sait que :

$$p_B(A)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(B)}$$

En remplaçant par les données numériques, on obtient :

$$0{,}3=\frac{21}{Card(B)}$$

Ce qui équivaut à :

$$Card(B) = \frac{21}{0{,}3} = 70$$

EXERCICE N°6 (le corrigé)

Un commerçant vend deux types de guirlandes électriques pour Noël, des guirlandes d'intérieur et des guirlandes d'extérieur. Certaines guirlandes se révèlent défectueuses. Il possède un stock de 400 guirlandes.
On admet que :

- 6 % des guirlandes proposées à la vente sont défectueuses;
- 30 % de toutes les guirlandes sont d'extérieur;
- 5 % des guirlandes d'extérieur sont défectueuses.

1) Établir le tableau croisé d'effectifs.

	Défectueuses	*non Défectueuses*	Total
Extérieur	6 (=5 % de 120)	114 (=120 – 6)	120 (=30 % de 400)
Intérieur	18 (=24 – 6)	262 (= 280 – 18)	280 (=400 – 120)
Total	24 (=6 % de 400)	376 (=400 – 24)	400

2) Déterminer le cardinal de l'événement : « Les guirlandes sont d'intérieur et non défectueuses».

$$Card(Intérieur \ \cap \ non\ Défectueuses)=262$$

3) Calculer puis interpréter $p_{intérieur}(Défectueuses)$.

$$p_{intérieur}(Défectueuses) = \frac{Card(Intérieur \ \cap \ Défectueuses)}{Card(Intérieur)} = \frac{18}{280} = \frac{9}{140}$$

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°7 (Le corrigé)

Lors d'un contrôle antidopage à l'issue d'une compétition sportive, les sportifs peuvent être déclarés positifs (qu'ils soient dopés ou non) ou négatifs (qu'ils soient dopés ou non). L'étude porte sur 50 personnes.
Soit n l'effectif des dopés parmi les sportifs contrôlés
On sait que:
• 95 % des sportifs dopés sont déclarés positifs;
• 10 % des sportifs non dopés sont déclarés positifs

1) Établir le tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation.

	Dopé	*Non dopé*	Total
Positif	$0{,}95\,n$	$0{,}1(50-n)$	$5+0{,}85\,n$
Négatif	$0{,}05\,n$	$0{,}9(50-n)$	$45-0{,}85\,n$
Total	n	$50-n$	50

	Dopé	*Non dopé*	Total
Positif	$0{,}95\,n$ 95 % de n car il y a n dopés	$0{,}1(50-n)$ 10 % de (50 – n)	$5+0{,}85\,n$ $0{,}95\,n+0{,}1(50-n)$ $=0{,}95\,n+0{,}1\times 50-0{,}1\,n$ $=5+0{,}85\,n$
Négatif	$0{,}05\,n$ 100 % de n moins 95% de n	$0{,}9(50-n)$ 100 % de (50 – n) moins 10 % de (50 – n)	$45-0{,}85\,n$ $0{,}05\,n+0{,}9(50-n)$ $=0{,}05\,n+0{,}9\times 50-0{,}9\,n$ $=45-0{,}85\,n$
Total	Soit n l'effectif des dopés parmi les sportifs contrôlés	$50-n$ Le total moins les positifs	L'étude porte sur 50 personnes (les sportifs contrôlés)

2) Calculer, en fonction de n, l'effectif de l'événement « Le comité a commis une erreur ».

Le comité commet une erreur quand il déclare « Négatif » un sportif « Dopé » OU quand il déclare « Positif » un sportif « Non dopé ».
On en déduit que
l'effectif cherché vaut : $0{,}05\,n+0{,}1(50-n) = 0{,}05\,n+0{,}1\times 50-0{,}1\,n = \mathbf{5-0{,}05\,n}$

3) On choisit au hasard un sportif ayant été contrôlé

3.a) Montrer que la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé est de : $p_{Positif}(Dopé) = \dfrac{0{,}95\,n}{5+0{,}85\,n}$

$$p_{Positif}(Dopé) = \frac{Card(Positif \cap Dopé)}{Card(Positif)} = \frac{0{,}95\,n}{5+0{,}85\,n}$$

3.b) Résoudre . $p_{positif}(Dopé)>0{,}95$

$$\frac{0{,}95\,n}{5+0{,}85\,n} > 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}95\,n > 0{,}95\times(5+0{,}85\,n) \Leftrightarrow \underbrace{n > 5+0{,}85\,n}_{\text{on a divisé par 0,95 de chaque côté}} \Leftrightarrow 0{,}15\,n > 5 \Leftrightarrow n > \frac{5}{0{,}15} \approx 33{,}3$$

Comme n est un entier inférieur ou égal à 50, on en déduit que les solutions sont :
34 ; 35 ; … , 50

3.c) Interpréter ce résultat.

On peut dire qu'à partir de 34 sportifs dopés, le test est fiable à plus de 95 %.