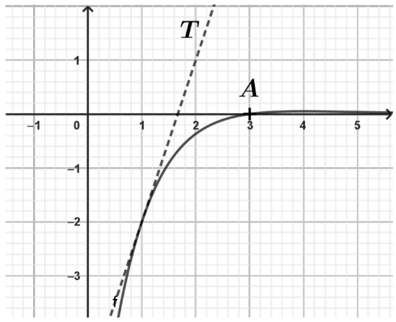
LA FONCTION EXPONENTIELLE E04C

EXERCICE N°1

On considère une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ où a et b sont deux réels.

Sa courbe représentative C_f a été tracée dans le repère ci-contre. C_f passe par le point $A(3\ ;\ 0)$ et la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 a été tracée dans le repère.



1) Déterminer la valeur de a et de b.

Pour $x \in \mathbb{R}$,
d'une part,

$$A \in C_f \Leftrightarrow f(3) = 0 \Leftrightarrow \frac{3a+b}{e^{-3}} = 0 \Leftrightarrow 3a+b = 0$$

et d'autre part,
Par lecture graphique, on obtient le point B .

$$B(1\ ;-2) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{a\times 1+b}{e^1} = -2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{e} = -2 \Leftrightarrow a+b = -2e$$

Il s'agit donc de résoudre le système $\begin{cases} 3a+b = 0 \\ a+b = -2e \end{cases}$.

En notant S son ensemble des solutions.

$$\begin{aligned}(a\ ;\ b) \in S &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b = 0 \\ a+b = -2e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a-3a = -2e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ -2a = -2e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3e \\ a = e \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{a = e}$ et $\boxed{b = -3e}$

2) Étudier les variations de la fonction f.

La fonction f est le quotient d'une fonction affine et de la fonction exponentielle qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ex-3e}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = ex-3e$ et $u'(x) = e$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$$f'(x) = \frac{e\times e^x-(ex-3e)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{(-ex+4e)e^x}{e^{2x}}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $-ex+4e > 0 \Leftrightarrow -ex > -4e \Leftrightarrow x < 4$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

▫ $e^{2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-ex+4e$	$+$	0	$-$
e^x	$+$		$+$
e^{2x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$ 0

$$f(4) = \frac{e\times 4-3e}{e^4} = \frac{e}{e^4} = e^{-3}$$

3) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

La formule de la tangente nous donne comme équation :

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

Or :

$$f(0) = \frac{e\times 0-3e}{e^0} = -3e$$

et

$$f'(0) = \frac{(-e\times 0+4e)e^0}{e^{2\times 0}} = 4e$$

On obtient :

$$\boxed{y = 4ex-3e}$$