

LA FONCTION CUBE E02

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie pour tout réel par $f(x) = x^3 - x^2$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.

- 1) Conjecturer graphiquement les solutions l'équation $f(x) = 0$.

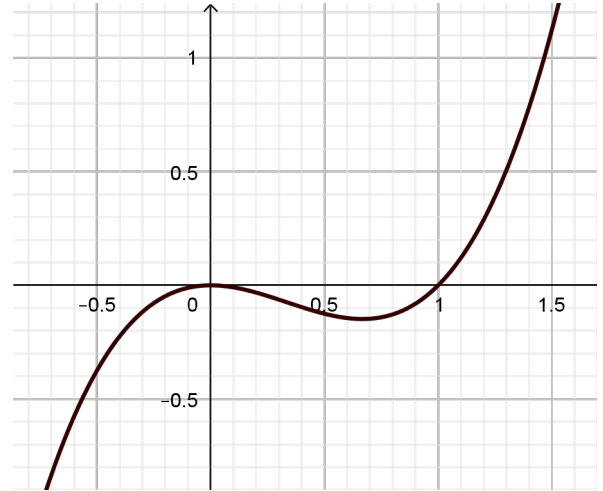
La courbe coupe l'axe des abscisses en 0 et 1. On peut donc penser que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 0 et 1.

- 2) Démontrer la conjecture précédente.

Nous allons résoudre l'équation $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

(un produit de facteurs est nul si et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul)



x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x^2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0) \\ \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1) \end{aligned}$$

(hé mais le carré a disparu ! Ah oui : propriété n°6)

Les solutions sont donc 0 et 1.

(On peut aussi écrire : « l'ensemble des solutions est $\{0 ; 1\}$ »)

- 3) En utilisant le graphique, déterminer le signe de $f(x)$.

La courbe est « en dessous de l'axe des abscisses » jusque 1, puis est au dessus. Il y a aussi deux points de contact avec l'axe des abscisses qui ont pour abscisse respectives 0 et 1.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x) &\text{ est strictement négative sur }]-\infty ; 0[\cup]0 ; 1[\\ f(x) &\text{ est strictement positive sur }]1 ; +\infty[\\ f(x) &\text{ vaut zéro sur } \{0 ; 1\} \end{aligned}$$

- 4) Démontrer la conjecture graphique de la question 3.

On va dresser un tableau de signes.

$$f(x) = x^2(x-1) = x \times x \times (x-1)$$

- $x > 0$ quand $x > 0$ (Bah oui)
- $x > 0$ quand $x > 0$ (Encore !)
- $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	—	0	+	+
x	—	0	+	+
$x-1$	—		—	0
$f(x)$	—	0	—	0

La dernière ligne du tableau nous donne le signe de $f(x)$

Remarque 1 : Vous avez pu constater que certaines lignes peuvent paraître inutiles. Nous sommes encore en formation donc on applique la méthode à la lettre pour s'en souvenir.

Remarque 2 :

On pourra aller plus vite plus tard :

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 0)$$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	-	0	+	

La dernière ligne du tableau nous donne le signe de $f(x)$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$



La droite d'équation $y=1$ et la courbe ont un seul point d'intersection dont l'abscisse est entre 1,4 et 1,5

6) En utilisant le graphique, donner le tableau variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$

x	1		$+\infty$
$f(x)$	0		$+\infty$

7) Calculer les valeurs exactes de $f(1,46)$ et $f(1,47)$ En utilisant la question 6, justifier que la solution de l'équation $f(x)=1$ est comprise entre 1,46 et 1,47 .

Avec la calculatrice :

$$f(1,46) = 0,980536$$

$$f(1,47) = 1,015623$$

$$f(1,46) < f(x)=1$$

Comme f est strictement croissante d'après la question 6, on en déduit que $1,46 < x$ (sinon on ne peut pas avoir $f(1,46) < f(x)$ car f conserve les inégalités)

De la même façon : $x < 1,47$

Ainsi $1,46 < x < 1,47$

Remarque : Plus tard, vous verrez qu'il manque en fait un argument essentiel qui est la continuité de la fonction (En première approche : on a pas besoin de lever le crayon pour dessiner sa représentation graphique) mais cela n'est pas exigible à notre niveau.

8) En utilisant la calculatrice, déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-4} qui contient solution de l'équation $f(x)=1$.

On sait que $1,46 < x < 1,47$, on va donc faire une première table des valeurs de $f(x)$ avec un pas 10^{-3}

x	Y1
1.464	0.9944
1.465	0.9979
1.466	1.0015
1.467	1.005

On en déduit que $1,465 < x < 1,466$

On fait ensuite une seconde table avec un pas de 10^{-4}

x	Y1
1.4654	0.9993
1.4655	0.9997
1.4656	1.0001
1.4657	1.0004

$1,4655 < x < 1,4656$

Remarque : Vous pouvez faire directement la table avec un pas de 10^{-4} (essayez vous verrez ce qui est le plus pratique)