CROISSANCE EXPONENTIELLE

I Les suites géométriques

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions et propriétés suivantes seront écrites pour le cas où $u_0 = 0$. Nous les adapterons selon les besoins des activités.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Définition n°1. ***Suite géométrique***

Une **suite géométrique** est une suite telle que :
Il existe un nombre réel q tel que :
▪ Pour tout entier naturel n, on peut écrire $u(n+1) = u(n) \times q$
▪ q est appelé la **raison de la suite**.
▪ l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$) , il suffit de multiplier par q le terme actuel ($u(n)$).

Exemple n°1.

Soit la suite géométrique v de terme initial $v(0) = 4{,}5$ et de raison $r = 2$. Les quatre premiers de v sont :
$v(0) = 4{,}5$, $v(1) = 9$, $v(2) = 18$ et $v(3) = 36$.

Croissance exponentielle

Propriété n°1. ***Exprimer u(n) en fonction de n***

Une suite $(u(n))$ est géométrique de raison q si et seulement si :
Pour tout entier naturel n, on a $u(n) = u(0) \times q^n$

Remarque n°3.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$

Exemple n°2.

Dans l'exemple n°1, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v(n) = 4{,}5 \times 2^n$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°1   u(n) en fonction de n (début à 0)

$(u(n))$ est la suite géométrique de premier terme $u(0)=0{,}25$ et de raison $r = 2$.

1) Pour tout entier n , exprimer $u(n)$ en fonction de n .

2) Calculer les termes $u(10)$, $u(17)$ et $u(23)$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°2 **_u(n) en fonction de n (début à 1)_**

(w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_1 = 2$ et de raison $r = 1{,}1$.

1) Pour tout entier n , exprimer w_n en fonction de n .

2) Calculer les termes w_{10} , w_{17} et w_{23} .

3) w_0 existe-t-il ?

II Et la croissance exponentielle dans tout ça ?

Propriété n°2. ***Pour la croissance***

Soit u une suite géométrique de terme initial strictement positif et de raison $q \in \mathbb{R}$:

- u est strictement croissante si et seulement si $q > 1$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$ et
- u est constante si et seulement si $q = 0$ ou $q = 1$.

Remarque n°4.

Hé mais on a oublié le cas $q < 0$!

C'est juste qu'il n'est pas au programme. Pour les curieux : la suite est alors alternée (si un terme est positif alors son suivant est négatif et vice et versa).

Exemple n°3.

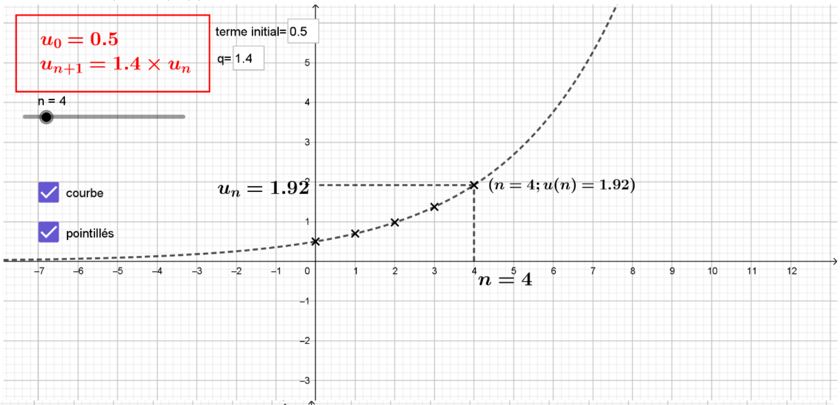
La suite géométrique w de terme initial $w_0 = 0{,}1$ de raison $r = 0{,}5$ est strictement décroissante.

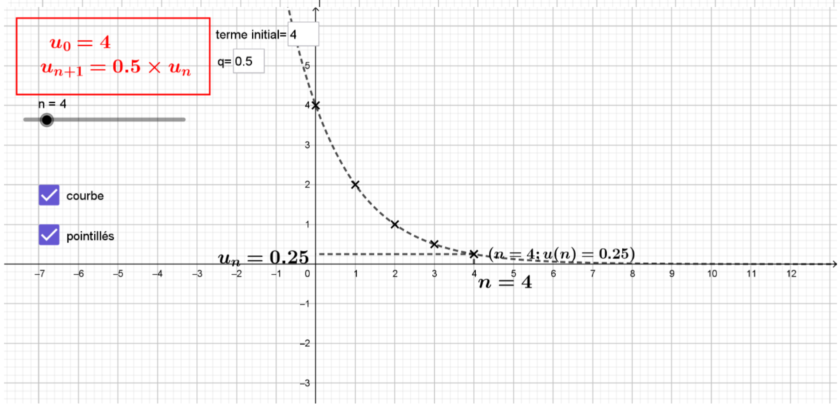
Remarque n°5.

- Si le terme initial est strictement négatif alors dans la propriété n°2 les mots « croissante » et « décroissante » sont échangés.
- Si le terme initial est nul alors tous les autres le sont aussi.

Remarque n°6. Représentation graphique

Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.





Les pointillés symbolisent la courbe à laquelle appartiennent les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°3 ***Sens de variation et représentation***

1) $(u(n))$ est la suite géométrique de premier terme $u(0)=0,1$ et de raison $r = 2$.
Déterminer le sens de variation de cette suite.

2) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de cette suite.

EXERCICE N°4 Sens de variation

Préciser la croissance de chacune des ces suites :

1) (u_n) est géométrique de raison $r = \dfrac{5}{4}$ avec $u_0 = 4$

2) (v_n) est géométrique de raison $r = \dfrac{4}{5}$ avec $v_1 = 4$

3) $w_0 = 3$ et pour tout entier naturel *n*, $w_{n+1} = \sqrt{7}\,w_n$

4) $t_1 = 201$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $t_{n+1} = 0{,}95\,t_n$

Remarque n°7. Pour le côté exponentielle

La courbe en pointillés est la représentation graphique d'une fonction exponentielle. Nous allons préciser cela tout de suite…

III Les fonctions exponentielles

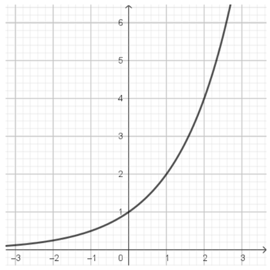
Définition n°2. ***Fonction exponentielle de base a***

Soit a un nombre réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = a^x$

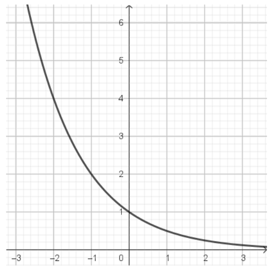
Exemple n°4.

Visualiser plus d'exemples

$f(x) = 2^x$ ($a = 2 > 1$)



$f(x) = 0{,}5^x$ ($a = 0{,}5 \in]0;1[$)



Remarque n°8.

Si x est un nombre entier alors a^x correspond à la puissance $x^{\text{ième}}$ de a.

EXERCICE N°5 *Les fonctions exponentielles : prise en main*

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 4 \times 2^x$

1) Calculer $f(0)$ et $f(3)$.

2) Donner une valeur approchée de $f(1{,}5)$ à 0,01 près.

EXERCICE N°6 **Les fonctions exponentielles : sens de variation**

Donner le sens de variation des fonctions f, g, h et k définies respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

1) $f(x) = 5\times 3^x$

2) $g(x) = 5\times 0{,}9^x$

3) $h(x) = 3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

4) $k(x) = 6^x$

Remarque n°9.

Comme pour les suites arithmétiques, on utilisera les suites géométriques pour modéliser des phénomènes à croissance exponentielle discrète et les fonctions exponentielles pour les phénomènes continus. Les fonctions exponentielles sont en quelque sorte le prolongement des suites géométriques.

IV Les outils à connaître

Propriété n°3. Règles de calculs

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels :

$\boxed{a^0 = 1}$; $\boxed{a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}}$; $\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}}$; $\boxed{\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$;

$\boxed{\left(a^x\right)^y = a^{x\times y}}$; $\boxed{a^x \times b^x = \left(a\times b\right)^x}$ et $\boxed{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$.

Exemple n°5.

- $10{,}45^0 = 1$; - $5{,}7^{-3{,}1} = \dfrac{1}{5{,}7^{3{,}1}}$;
- $1{,}2^{3{,}4} \times 1{,}2^{-5{,}6} = 1{,}2^{3{,}4+(-5{,}6)} = 1{,}2^{-2{,}2}$;
- $\dfrac{1{,}2^{3{,}4}}{1{,}2^{-5{,}6}} = 1{,}2^{3{,}4-(-5{,}6)} = 1{,}2^9$;
- $\left(5{,}8^{3{,}1}\right)^{-2{,}7} = 5{,}8^{3{,}1\times(-2{,}7)} = 5{,}8^{-8{,}37}$ et
- $4{,}1^{7{,}1} \times 3{,}2^{7{,}1} = \left(4{,}1\times 3{,}2\right)^{7{,}1} = 15{,}17^{7{,}1}$

EXERCICE N°7 Règles de calcul

Écrire les expressions suivantes sous la forme a^x où a est un entier et x un réel.

$A = 7^{3,1} \times 4^{3,1}$

$B = 4 \times 2^{-5,7}$

$C = 7 \times \dfrac{7^{3,1}}{7^{2,5}}$

$D = \dfrac{6^{4,5}}{2^{4,5}}$

$E = 9^3 \times \left(9^{2,5}\right)^2$

$F = \dfrac{17^{5,1}}{17^{4,1} \times 17}$

Propriété n°4. Taux d'évolution et Coefficient Multiplicateur

Soit t un taux d'évolution et CM le coefficient multiplicateur correspondant, on a alors la relation suivante :

$$\boxed{CM = 1+t}$$

Exemple n°6.

▪ Pour une hausse de 32 %, on a $t = 0{,}32$ et $CM = 1{,}32$

▪ Pour une baisse de 32 %, on a $t = -0{,}32$ et $CM = 0{,}68$

Remarque n°10. ***Taux d'évolution global t_g : Attention***

On rappelle que les taux d'évolution ne s'additionnent pas.

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % correspondent à une baisse de 4 % .
($t_1=0,2 \rightarrow CM_1=1,2$, $t_2=-0,2 \rightarrow CM_2=0,8$,
$CM_g=1,2\times0,8=0,96$ $\rightarrow$ $t_g=-0,04$ soit une baisse de 4%)

Propriété n°5. ***Racine n[ième]***

Soit c un nombre réel positif ou nul, l'équation $x^n = c$ admet une unique solution réelle : $c^{\frac{1}{n}}$.

Exemple n°7. $x^5 = 2{,}5$ ***admet pour unique solution réelle :*** $2{,}5^{\frac{1}{5}}$ **.**

CROISSANCE EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°8 ***Racine n^ième^***

Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ les équations suivantes :

On donnera, si nécessaire, une valeur arrondie à 0,01 près des éventuelles solutions.

1) $3x^3 = 81$

2) $5x^4 = 100$

Propriété n°6. ***Le taux moyen***

Si CM_g est un coefficient multiplicateur global obtenu à partir de n coefficients multiplicateurs alors le taux moyen t_m s'obtient avec la formule : $\boxed{t_m = CM_g^{\frac{1}{n}} - 1}$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Méthode n°1. Calculer un taux moyen à l'aide du Coefficient Multiplicateur moyen.

Énoncé

On applique successivement une hausse de 11 %, une baisse de 9 % et enfin une hausse de 10 %. Déterminer le taux d'évolution moyen.

« Au brouillon »

Posons $t_1 = 0{,}11$, $t_2 = -0{,}09$, $t_3 = 0{,}1$ et les coefficients multiplicateurs correspondants : $CM_1 = 1{,}11$, $CM_2 = 0{,}91$, $CM_3 = 1{,}1$.

On calcule le coefficient multiplicateur global : $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3$ $CM_g = 1{,}11111$.

On calcule le coefficient multiplication moyen CM_m en résolvant dans $\mathbb{R}$ l'équation : $CM_m^{\ 3} = CM_g$ ce qui nous donne $CM_m = CM_g^{\frac{1}{3}}$ soit $CM_m = 1{,}11111^{\frac{1}{3}}$.

et enfin on calcule le taux moyen t_m : $t_m = CM_m - 1 = 1{,}11111^{\frac{1}{3}} - 1$

Bien sûr, sur la copie on résume un peu…

Réponse

Notons t_m le taux moyen cherché.

$$t_m = (1{,}11 \times 0{,}91 \times 1{,}1)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0{,}0357$$

Soit une $\boxed{\text{hausse moyenne d'environ } 3{,}57\ \%}$.

EXERCICE N°9 Taux moyen

Un météorologue amateur estime que le niveau de précipitations dans son village a doublé en 10 ans. Calculer l'évolution annuelle moyenne du niveau de précipitations. (On arrondira à 0,01%).

EXERCICE N°10 Déterminer un seuil

On considère la suite (u_n) telle que $u_1 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 0{,}9 \times u_n$

1) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de *n*.

2) Calculer u_1 et u_8

3) Déterminer le rang n, à partir duquel, $u_n < 5$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E02

EXERCICE N°1 Reconnaître une croissance exponentielle

On suit l'évolution d'une quantité sur plusieurs périodes. Dans chaque cas, préciser s'il s'agit ou non d'un phénomène à croissance exponentielle.

1) La quantité augmente chaque période de 50 %.

2) La quantité est augmentée de 50 unités à chaque période.

3) La quantité double à chaque période.

4) La quantité diminue de 30 % à chaque période.

5) La quantité est diminuée de 30 unités à chaque période.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E02

EXERCICE N°2 ***Déterminer le terme général (et un nouveau symbole)***

Préciser la nature puis donner le terme général des suites proposées :

1) $u : \begin{cases} u(0) = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = 4u(n) \end{cases}$

2) $v : \begin{cases} v_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 0{,}5\, v_n \end{cases}$

EXERCICE N°3 Sens de variation d'une suite

Préciser la nature puis déterminer le sens de variation des suites proposées :

1) $u : \begin{cases} u(0) = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = 5u(n) \end{cases}$

2) $v : \begin{cases} v_1 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 0{,}95 v_n \end{cases}$

CROISSANCE EXPONENTIELLE E02

EXERCICE N°4 Sens de variation d'une fonction exponentielle

Chacune des fonctions suivantes est de la forme : $k\times a^x$. Pour chaque cas, préciser k et a et donner le sens de variation de la fonction. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

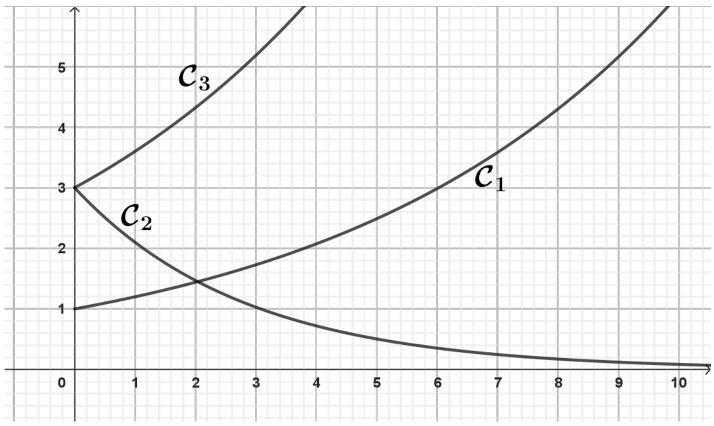
1) $f(x) = 5\times 0{,}5^x$ **2)** $g(x) = \frac{1}{2}\times 3^x$ **3)** $h(x) = 2\times 1{,}05^x$

4) $k(x) = 7^x$ **5)** $m(x) = 7\times 0{,}3^x$ **6)** $n(x) = 0{,}7^x$

EXERCICE N°5 Reconnaître une fonction exponentielle sur un graphique

On considère les fonctions f , g et h dont les courbes sont tracées dans le repère ci-contre.
Elles sont respectivement définies pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

- $f(x) = 3 \times 0{,}7^x$
- $g(x) = 3 \times 1{,}2^x$
- $h(x) = 1{,}2^x$



Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

EXERCICE N°6 Taux moyen

Déterminer les taux moyens associés aux taux d'évolution globale et au nombre de périodes données. *On arrondira, si nécessaire, à 0,01 % près.*

1) Une hausse globale de 15 % sur cinq périodes.

2) Une baisse globale de 20 % sur quatre périodes.

3) Une hausse globale de 1,2 % sur deux périodes.

4) Une baisse globale de 70 % sur 10 périodes.

EXERCICE N°7 Recherche de seuil

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}_+$ par :
$f(x) = 8\times 0{,}5^x$ et $g(x) = 0{,}1\times 1{,}5^x$.

1) Afficher les courbes à la calculatrice.

2) Déterminer à partir de quelle valeur entière de x, on a $f(x) < g(x)$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E03

EXERCICE N°1 Étude de suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $r = 0{,}9$ et de terme initial $u_0 = 10$.

1) Déterminer u_1 et u_3 .

2) Déterminer le terme général de la suite u .

3) Déterminer en justifiant le sens de variation de u .

4) Dans un repère, placer les quatre premiers termes de la suite.

5) Déterminer à partir de quelle valeur de n, on a $u_n < 5$.

EXERCICE N°2 Sciences de la vie et de la terre

À la suite d'une intoxication alimentaire, on étudie l'élimination d'une toxine chez un cheval au cours du temps. À l'instant initial, la concentration est de 30 µg/L. On sait que la concentration de la toxine dans le sang baisse de 4,5 % chaque jour. On note $f(t)$ la concentration de la toxine en µg/L au bout de t jours.

1) Expliquer pourquoi on peut utiliser un modèle de décroissance exponentielle pour décrire l'évolution de la concentration.

2) Déterminer les valeurs de k et de a telles que $f(t) = k \times a^t$ pour $t \geqslant 0$.

3) Déterminer la concentration présente au bout de 12 h.

4) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

5) Afficher la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice et déterminer au bout de combien de jours la concentration aura diminué de moitié.

6) On considère que la toxine ne représente plus un danger pour le cheval lorsque la concentration tombe en dessous de 15 % de la concentration initiale. Déterminer au bout de combien de temps le cheval sera hors de danger.

CROISSANCE EXPONENTIELLE E03

EXERCICE N°3 *Économie*

Simon dépose sur son livret d'épargne 20 000 euros au taux composé annuel de 3 % le 1[er] janvier 2023. Les intérêts sont calculés par rapport à la somme disponible en début d'année.
On note $u(n)$ le montant disponible sur son livret d'épargne n années après, on a donc $u(0) = 20\,000$.

1) Calculer $u(1)$ et $u(2)$.
2) Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. En déduire la nature de la suite u .
3) Déterminer le terme général de la suite u .
4) Combien d'années Simon devra-t-il laisser son argent en banque s'il veut doubler son dépôt initial ?

Son banquier lui propose une autre formule : son épargne lui rapporterait chaque année 4 % de la somme initiale.

On note $v(n)$ le montant disponible sur son livret d'épargne n années après.
5) Déterminer la somme disponible au bout de deux ans.
6) Déterminer la nature de la suite v . Préciser le premier terme et la raison.
7) En déduire une expression de $v(n)$ en fonction de n .
8) Quelle formule peut-on conseiller à Simon ? Discuter selon la durée du placement.

EXERCICE N°4 Sciences sociales

Une enquête de l'Institut National des Hautes Études de la Sécurité et de la Justice s'intéresse à la diffusion des informations à travers les réseaux sociaux. L'Institut cite une étude du chercheur D. Watts, qui a relevé que :

- 93 % du temps, une information est diffusée par un utilisateur, mais elle n'est jamais relayée.
- 6,8 % du temps, une information est relayée à une ou deux personnes qui vont la relayer au maximum une seule fois.
- 0,2 % du temps, l'information est cascadée de manière exponentielle.

Interpréter dans chacun des cas ce qui se passe si une personne diffuse une rumeur sur un réseau social. On pourra discuter des limites de ces modélisations.