VARIABLES ALÉATOIRES E04C

EXERCICE N°1 *Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules*

(Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

1) Calculer l'espérance de X.

$E(X) = -2\times\frac{3}{10} + 4\times\frac{3}{10} + 6\times\frac{4}{10} = 3$

Ainsi : $\boxed{E(X) = 3}$

2) Calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.

▪ Calculons la variance :

$$V(X) = (-2-3)^2\times\frac{3}{10} + (4-3)^2\times\frac{3}{10} + (6-3)^2\times\frac{4}{10}$$

$$= 25\times\frac{3}{10} + 1\times\frac{3}{10} + 9\times\frac{4}{10}$$

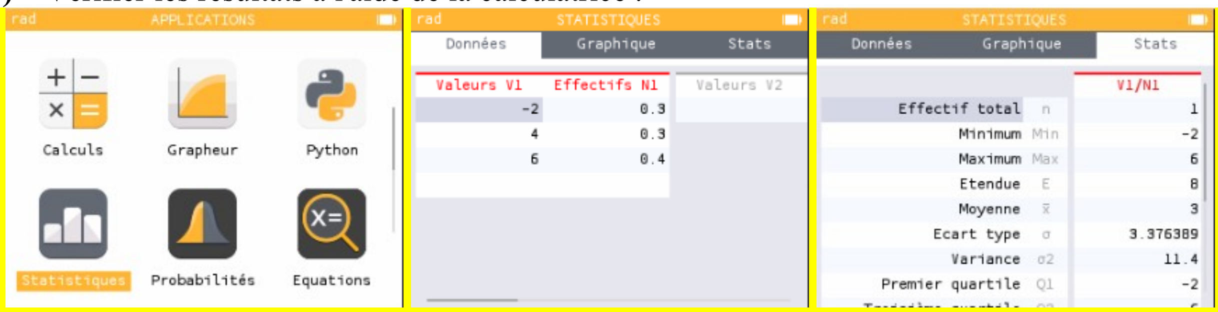
$\boxed{V(X) = 11{,}4}$

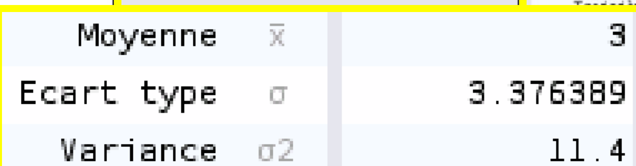
▪ On en déduit l'écart-type :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{11{,}4}}$ $\approx 3{,}376$ à 10^{-3} près .

3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .





4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Y = -2X+3$

On utilise bien sûr les formules du cours :

▪ $E(Y) = E(-2X+3) = -2E(X)+3 = -2\times3+3$ Ainsi : $\boxed{E(Y) = -3}$

▪ $V(Y) = V(-2X+3) = (-2)^2\times V(X) = 4\times11{,}4$ Ainsi : $\boxed{V(Y) = 45{,}6}$

▪ $\sigma(Y) = \sigma(-2X+3) = |-2|\times\sigma(X) = 2\times\sqrt{11{,}4}$ Ainsi : $\boxed{\sigma(Y) = 2\sqrt{11{,}4}}$

Hé mais si on avait utilisé directement la définition de $\sigma(Y)$?

$\sqrt{45{,}6} = \sqrt{4\times11{,}4} = \sqrt{4}\times\sqrt{11{,}4} = 2\sqrt{11{,}4}$

Alors on aurait bien sûr trouvé le même résultat.

5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire : $Z = 3Y-1$

▪ $E(Z) = E(3Y+1) = 3E(Y)+1 = 3\times(-3)+1$ Ainsi : $\boxed{E(Z) = -8}$

▪ $V(Z) = V(3Y+1) = 3^2\times V(Y) = 9\times45{,}6$ Ainsi : $\boxed{V(Z) = 410{,}4}$

▪ $\sigma(Z) = \sigma(3Y+1) = |3|\times\sigma(Y) = 3\times2\sqrt{11{,}4}$ Ainsi : $\boxed{\sigma(Z) = 6\sqrt{11{,}4}}$

Tiens, c'est marrant ce 3×2 … Je vous laisse y réfléchir…

Au passage : $9\times45{,}6 = 9\times4\times11{,}4$ ...

VARIABLES ALÉATOIRES E04C

EXERCICE N°2 Espérance, variance, écart-type : cas concret

(Calculatrice autorisée)

Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire.
▫ Si celui-ci est vert, on gagne 5 €,
▫ s'il est jaune on gagne 20 € et
▫ s'il est rouge on perd 4 €.

1) X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1.a) Déterminer la loi de probabilité de X.

▪ On détermine Ω .
R : « rouge », V : « vert » et J : « Jaune »
$\Omega = \{R\ ;\ V\ ;\ J\}$
▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	R	V	J	Total
Probabilité	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)
$X(\{R\}) = -4$, $X(\{V\}) = 5$, $X(\{J\}) = 20$

(Il y a trois images possibles : $-4\ ;\ 5$ et 20)
▪ On regroupe les antécédents :
Ici c'est évident.
▪ On calcule la probabilité de chaque événement :

Le plus gros du travail est fait au brouillon

▫ $P(\{X = -4\}) = P(\{R\}) = \frac{1}{2}$

▫ $P(\{X = 5\}) = P(\{V\}) = \frac{3}{10}$

▫ $P(\{X = 20\}) = P(\{J\}) = \frac{1}{5}$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-4	5	20	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

1.b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.

▪ $E(X) = -4\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{3}{10} + 20\times\frac{1}{5} = -2+1,5+4$

Ainsi , $\boxed{E(X) = 3,5}$

▪
$$V(X) = (-4-3,5)^2\times\frac{1}{2} + (5-3,5)^2\times\frac{3}{10} + (20-3,5)^2\times\frac{1}{5}$$
$$= 56,25\times\frac{1}{2} + 2,25\times\frac{3}{10} + 272,25\times\frac{1}{5}$$

Ainsi : $\boxed{V(X) = 83,25}$

▪ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{83,25}$

Ainsi : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{83,25}}$

1.c) Interpréter la valeur de $E(X)$.

Pour un grand nombre de parties jouées, on peut espérer gagner en moyenne 3,5 euros à chaque fois.

2) Vérifier les résultats de la question 1. en utilisant la calculatrice.

C'est la même manipulation qu'à l'exercice précédent…

VARIABLES ALÉATOIRES E04C

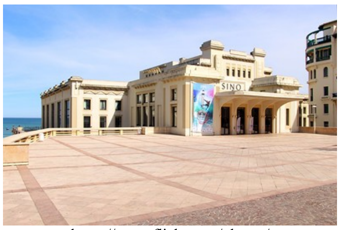
EXERCICE N°3 Au casino

Extrait du déclic 1er spé : 80 p 362

(Calculatrice autorisée)
(On arrondira les résultats au centième)

Une roulette de casino comporte 37 cases , numérotées de 0 à 36
On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti.

Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.



https://www.flickr.com/photos/129231073@N06/35234919293

1) Lorsqu'un joueur mise sur l'un des numéros, on dit qu'il fait un plein. Dans ce cas là, si le numéro misé sort, il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise. Sinon il perd sa mise au profit du casino. Un joueur mise 10 € et fait un plein. On note X son gain algébrique , en euros.

1.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

Ici, il ne faut pas oublier les pertes...

$$E(X) = 350\times\frac{1}{37} + (-10)\times\frac{36}{37}$$

$$E(X) \approx -0{,}27$$

1.b) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

▪ Commençons par la variance :

$$V(X) = (350-E(X))^2\times\frac{1}{37} + (-10-E(X))^2\times\frac{36}{37}$$

$$\boxed{V(X) \approx 3408{,}04}$$

▪ On en déduit que :

$$\sigma(X) = \sqrt{3408{,}04}$$

$$\boxed{\sigma(X) \approx 58{,}38}$$

Pourquoi a-t-on écrit $E(X)$ à la place de $-0{,}27$?
Parce qu'on est maniaque et pis c'est tout !
Plus sérieusement, c'est possible mais attention à ne pas utiliser le symbole « = ».

$$V(X) \approx (350-(-0{,}27))^2\times\frac{1}{37} + (-10-(-0{,}27))^2\times\frac{36}{37}$$

2) Lorsqu'un joueur mise sur 2 numéros différents, on dit qu'il fait un cheval point dans ce cas là, si l'un des numéros choisis sort, il remporte 17 fois sa mise et récupère sa mise ; sinon, il la perd. Un joueur mise 10 € et fait un cheval. On note Y son gain algébrique, en euros .

2.a) Quel gain le joueur peut-il espérer ?

$$E(Y) = 170\times\frac{2}{37} + (-10)\times\frac{35}{37}$$

$E(Y) \approx -0{,}27$ (Encore !)

2.b) Calculer l'écart-type $\sigma(Y)$.

▪ Commençons par la variance :

$$V(Y) = (170-E(X))^2\times\frac{2}{37} + (-10-E(Y))^2\times\frac{35}{37}$$

$$\boxed{V(X) \approx 1656{,}68}$$

▪ On en déduit que :

$$\sigma(X) = \sqrt{1656{,}68}$$

$$\boxed{\sigma(X) \approx 40{,}7}$$

3) Comparer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$, puis les écarts types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter dans le contexte.

▪ Les espérances sont les mêmes donc sur un grand nombre de partie, les deux joueurs peuvent espérer le même gain moyen à chaque fois.

▪ $\sigma(X)$ est bien plus grand que $\sigma(Y)$ donc le premier joueur prend beaucoup plus de risques que le second.