LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°3 *Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)*

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

$d(a-c)+a(b-d) = ad-cd+ab-ad = ab-cd$

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

Les fonctions f *et* g sont définies sur I .
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par f ou g .

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} = \frac{\overbrace{f(x+h)}^{a}\overbrace{g(x+h)}^{b}-\overbrace{f(x)}^{c}\overbrace{g(x)}^{d}}{h}$$

$$= \frac{\overbrace{g(x)}^{d}\overbrace{[f(x+h)-f(x)]}^{(a-c)}+\overbrace{f(x+h)}^{a}\overbrace{[g(x+h)-g(x)]}^{(b-d)}}{h}$$

$$= g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $(fg): x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Pour tout $x \in I$, quand h tend vers zéro,

$g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x+h)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tend vers $\boxed{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}$.