ÉTUDE DE FONCTIONS E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^2+1$

1) Soient a et b deux réels tels que $3\leqslant a<b$

1.a) Démontrer que $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= (b-3)^2+1-[(a-3)^2+1] \\ &= (b-3)^2+1-(a-3)^2-1 \\ &= (b-3)^2-(a-3)^2 \qquad \text{On reconnaît la } 3^e \text{ indentité remarquable} \\ &= [(b-3)+(a-3)][(b-3)-(a-3)] \\ &= [b-3+a-3][b-3-a+3] \\ &= (b+a-6)(b-a) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

Si vraiment vous êtes coincés sur ce genre de question alors, au brouillon, vous développez et réduisez chaque membre (vous devez bien sûr trouver la même expression des deux côtés) ensuite, sur la copie :

« d'une part : (on recopie le 1er le développement trouvé au brouillon)
d'autre part : (on recopie le 2ème le développement trouvé au brouillon)
On constate l'égalité des deux expressions, ainsi... »

Cette méthode n'est pas la plus élégante, il ne faut donc pas en abuser...

1.b) Quel est le signe de $b+a-6$? Quel est le signe de $b-a$?

On sait que : $3\leqslant a<b$

- En particulier : $3\leqslant a$ et $3<b$

  $3\leqslant a$ équivaut à $3+b\leqslant a+b$

  $3<b$ équivaut à $3+3<b+3$ c'est à dire : $6<b+3$

On en déduit que $6 < 3+b \leqslant a+b$ que l'on peut simplifier en $6 < a+b$

Enfin

$6 < a+b$ équivaut à $6-6 < a+b-6$ c'est à dire : $0 < a+b-6$

Donc $a+b-6$ est strictement positive.

- En particulier : $a<b$

  $a<b$ équivaut à $a-a<b-a$ c'est à dire $0<b-a$

Donc $b-a$ est strictement positive.

1.c) En déduire le signe de $f(b)-f(a)$

On sait que : $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

Les deux facteurs du membre de droite étant strictement positifs, la règle des signes nous indique que :

$f(b)-f(a)>0$

1.d) En utilisant la définition du sens de variation d'une fonction, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[3\ ;+\infty[$.

$f(b)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(b)>f(a)$

Et bien sûr $f(b)>f(a) \Leftrightarrow f(a)<f(b)$

À l'aide des questions précédentes, nous avons démontré que pour tous a et b appartenant à $[3\ ;+\infty[$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [3\ ;+\infty[}$

2) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$.

On nous a montré la méthode dans les questions précédentes, à nous de refaire le cheminement tout seul…

Soient a et b deux réels tels que $a<b\leqslant 3$

On est, cette fois ci, sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et plus sur $[3\ ;\ +\infty[$.

On sait que : $f(b)-f(a)=(b-a)(b+a-6)$

pas la peine de le redémontrer

▪ Déterminons le signe de chacun des facteurs.

On sait que $a<b\leqslant 3$

- En particulier : $a<b$

$a<b \Leftrightarrow 0<b-a$

- En particulier : $a<3$ et $b\leqslant 3$

$b+a<b+b\leqslant b+3$ d'où $b+a<b+3$

De plus

$b\leqslant 3 \Leftrightarrow b+3\leqslant 3+3$ c'est à dire $b\leqslant 3 \Leftrightarrow b+3\leqslant 6$

Ensuite, $b+a<b+3$ et $b+3\leqslant 6$ nous indique que $b+a<6$

Enfin $b+a<6 \Leftrightarrow b+a-6<6-6$ c'est à dire : $b+a-6<0$

- Le facteur $b-a$ est donc strictement positif et le facteur $b-a-6$ est strictement négatif.

▪ Déterminons le signe de $f(b)-f(a)$:

D'après ce qui précède et la règle des signes, on peut affirmer que $f(b)-f(a)<0$

▪ Conclusion :

$f(b)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(a)>f(b)$

Nous avons démontré que pour tous a et b appartenant à $]-\infty\ ;\ 3]$, $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

Ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]-\infty\ ;\ 3]}$

3) La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui que vaut-il et en quelle valeur de x est-il atteint ?

f décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$ puis croissante sur $[3\ ;\ +\infty[$ donc si elle admet un extremum alors ce sera un minimum et il sera atteint en 3. (il faut vérifier qu'il est bien atteint…)

f admet un $\boxed{\text{minimum en } 3}$ et

ce minimum vaut : $\boxed{\text{ce minimum vaut : } f(3)=(3-3)^2+1=1}$

Remarques :

- Un exercice un peu plus long, vous vous y ferez et irez de plus en plus vite.
- Observez la « forme » de la fonction f au début . On appelle cela la forme canonique, elle vous sera très utile l'année prochaine.
- Prenez le temps de bien lire toutes les inégalités écrites. Parfois, « on passe » d'une inégalité large à une inégalité stricte et il est important de bien comprendre pourquoi on peut le faire à ce moment là, alors qu'en générale c'est impossible.

-Quand vous aurez bien assimilé le tiret précédent, vous comprendrez qu'en fait, on ne « passe » pas d'une inégalité large à une inégalité stricte mais qu'on en écrit une nouvelle...