

# VARIABLES ALÉATOIRES E05C

## EXERCICE N°2 Utiliser la formule de König-Huygens

(Calculatrice autorisée)

Un jeu consiste à tirer une carte. Si c'est un cœur, on gagne  $k$  euros. Sinon, on perd 1 euro. On sait que la probabilité de gagner est  $p = \frac{1}{4}$ .

Trouvez la valeur de  $k$  pour laquelle la variance du gain est de 3.

On a :

$$E(X) = k \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{3}{4} = \frac{k}{4} - \frac{3}{4} = \frac{k-3}{4}$$

$$E(X^2) = k^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{k^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{k^2+3}{4}$$

et d'après la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{k^2+3}{4} - \left(\frac{k-3}{4}\right)^2 &= 3 \Leftrightarrow \frac{k^2+3}{4} - \frac{k^2-6k+9}{16} = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{4k^2+12-(k^2-6k+9)}{16} = \frac{48}{16} \\ &\Leftrightarrow 3k^2+6k+3 = 48 \\ &\Leftrightarrow 3k^2+6k-45 = 0 \end{aligned}$$

Posons  $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576$  le discriminant de cette dernière équation.  $\Delta > 0$ , il y a donc deux solutions :

$$k_1 = \frac{-6-\sqrt{576}}{2 \times 3} = \frac{-6-24}{6} = -5 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{-6+\sqrt{576}}{2 \times 3} = \frac{-6+24}{6} = 3$$

On en déduit que les valeurs possibles de  $k$  sont  $-5$  et  $3$  et on ne garde que  $3$  par cohérence.