STATISTIQUES À DEUX VARIABLES A01

EXERCICE N°1 Savoir vérifier qu'un point est sur une droite

Vérifier si les points proposés sont sur la droite d'équation donnée :

$D : y=4$	$A(-1\ ;\ 4)$	$B(0\ ;\ 1)$	$C(-5\ ;\ 4)$	$E(1254\ ;\ 4)$
$D' : x=-1$	$A(2\ ;\ -1)$	$B(-1\ ;\ 0)$	$C(-4\ ;\ 1)$	$E(-1\ ;\ -458)$
$D'' : y=3x+2$	$A(0\ ;\ 5)$	$B(-2\ ;\ -4)$	$C(5\ ;\ 17{,}1)$	$E(4520\ ;\ 13562)$

EXERCICE N°2 Savoir tracer une droite

Représenter les droites suivantes dont on donne les équations dans un repère :

1) $y=-2$ **2)** $x=4$ **3)** $y=4x-3$ **4)** $y=0,2x+2$ **5)** $y=\frac{2}{3}x-1$

Statistiques à deux variables A01

EXERCICE N°3 Retrouver l'équation d'une droite en connaissant le coefficient directeur

Déterminer les équations des droites passant par le point A et de coefficient directeur m :

1) $A(3\ ;-1)$ et $m = -4$ **2)** $A(-5\ ;3)$ et $m = 0$ **3)** $A\left(\frac{3}{4}\ ;\frac{-5}{2}\right)$ et $m = \frac{2}{3}$

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES A01

EXERCICE N°4 Déterminer l'équation d'une droite : cas général

Déterminer les équations des droites (AB) suivantes :

1) $A(-3\ ;\ 2)$ et $B(-1\ ;\ 4)$

2) $A\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -5\right)$ et $B\left(\frac{3}{2}\ ;\ -1\right)$

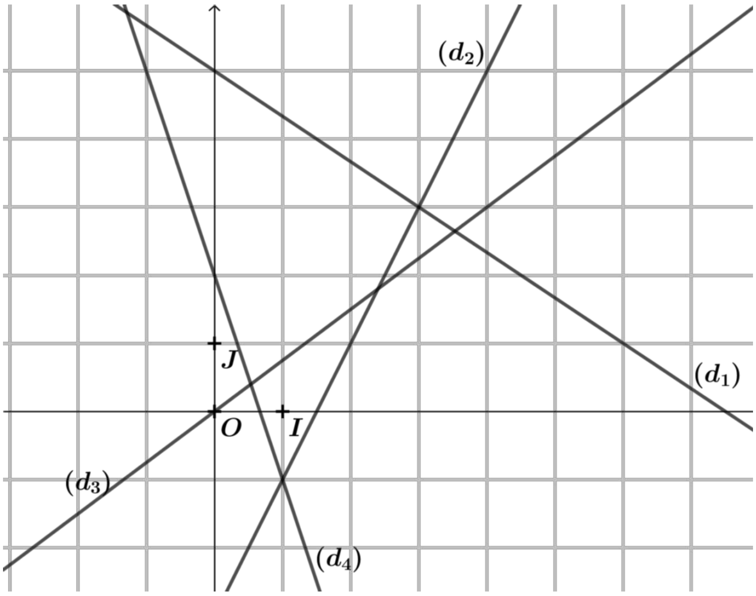
3) $A(3\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ 25)$

4) $A(5\ ;\ 6)$ et $B(9\ ;\ 6)$

EXERCICE N°5 Déterminer l'équation d'une droite à partir du graphique

On donne le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ ci-contre.

Déterminer l'équation de chacune des droites.



EXERCICE N°6 Trouver les intersections éventuelles avec les axes

1) Déterminer les points d'intersection de la droite d'équation $y=6x+4$ avec les axes du repère.
2) Déterminer les points d'intersection de la droite d'équation $y=-2x+3$ avec les axes du repère.

Statistiques à deux variables

I Représenter une série statistique à deux variables

Définition n°1. Série statistique à deux variables

Une série statistique à deux variables est une série statistique étudiant simultanément deux caractères sur un même échantillon de n individus extraits d'une population.

Connaissance n°1 Représentation sous forme de tableau

On peut présenter une série statistique à deux variables à l'aide d'un tableau statistique de la forme suivante :

Valeurs du 1er caractère	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Valeurs du 2nd caractère	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Connaissance n°2 Représentation graphique : le nuage de points

On peut aussi représenter une série statistique à deux variables dans un repère orthogonal à l'aide d'un nuage de points :

$M_1(x_1 \; ; \; y_1)$, $M_2(x_2 \; ; \; y_2)$, $\dots$, $M_n(x_n \; ; \; y_n)$

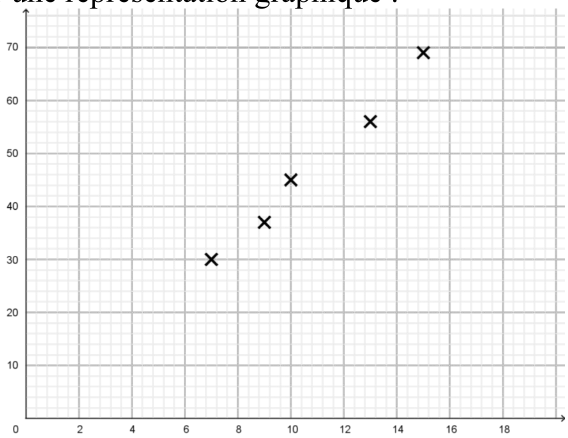
STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Exemple n°1. ***Ma petite entreprise ♪ ♫...***

Le tableau suivant présente l'évolution du nombre de clients et du chiffre d'affaires en milliers d'euros d'une micro-entreprise au cours des 6 mois :

Nombre de clients : x_i	7	9	10	13	15	18
Chiffre d'affaires : y_i	30	37	45	56	69	81

On peut en donner une représentation graphique :



Définition n°2. Le point moyen du nuage

On note $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ la moyenne des x_i et

$\overline{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$ la moyenne des y_i .

On appelle point moyen du nuage le point $G(\overline{x} \ ; \ \overline{y})$

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Méthode n°1. Déterminer le point moyen d'un nuage

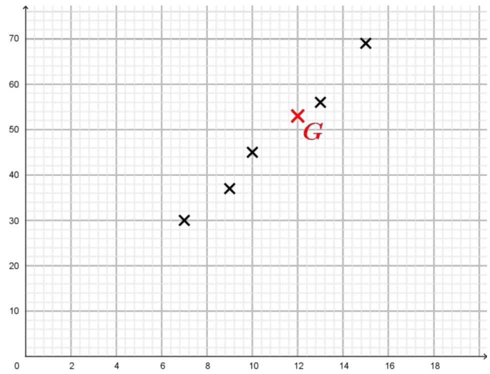
On va calculer le point moyen du nuage de l'exemple n°1

Notons $G(x_G\ ;\ y_G)$ le point moyen du nuage alors :

$$x_G = \frac{7+9+10+13+15+18}{6} = 12 \quad \text{et}$$

$$y_G = \frac{30+37+45+56+69+81}{6} = 53$$

Ainsi $\boxed{G(12\ ;\ 53)}$



STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E01

EXERCICE N°1

Une personne court sur un tapis roulant dont la vitesse peut être modifiée. On a relevé sa fréquence cardiaque en battements par minute selon l'intensité du travail fourni, exprimée en kilojoules.
Voici les résultats obtenus :

Intensité du travail fourni : x_i (en kJ)	10	12	15	22	34	45	53	60
Fréquence cardiaque : y_i (en $\text{battements}\cdot\text{min}^{-1}$)	69	80	88	97	114	126	145	158

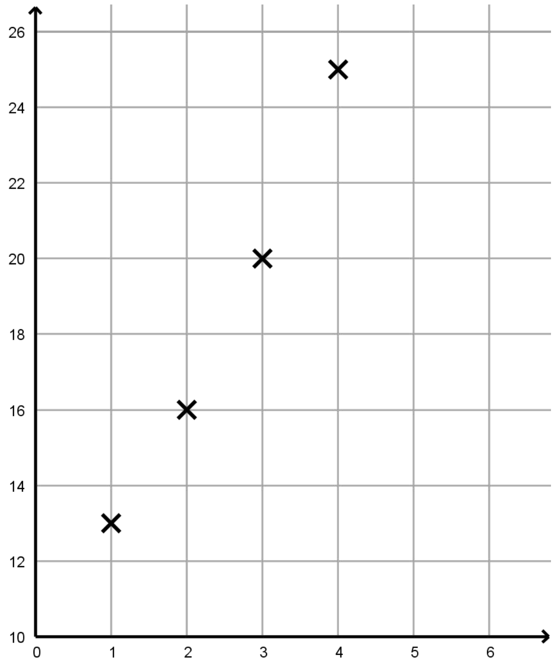
1) Construire le nuage de points représentant cette série statistique dans un repère orthogonal.

On prendra comme unités graphiques 1 cm pour 5kJ sur l'axe des abscisses et
1 cm pour 20 $battements\cdot min^{-1}$ sur l'axe des ordonnées
en prenant pour origine 60 $battements\cdot min^{-1}$.

2) Déterminer les coordonnées de G le point moyen du nuage et le placer dans le repère.

EXERCICE N°2

À 10h18, Mathilde a posté une photo de son équipe de volley sur sa page Instagram. Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de « Like » qu'elle a obtenus depuis sa publication.



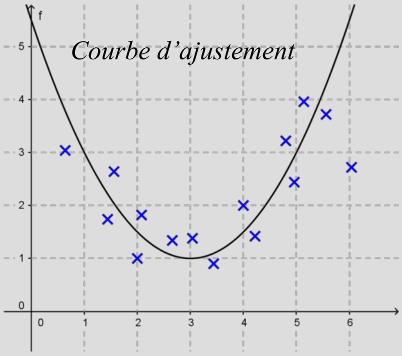
1) Recopier et compléter le tableau statistique suivant :

Heure	10h19	10h20			
Nombre de minutes x_i	1	2			
Nombre de « Like » y_i					

2) À 10 h 25, Mathilde a obtenu 38 « Like ». Donner les coordonnées du point que l'on peut rajouter au nuage de points.

II Ajustement affine

II.1 Le principe



Le problème d'ajustement d'un nuage de points consiste à trouver la courbe d'une fonction f qui approche (ajuste) au mieux les points du nuage. On établie alors une relation idéale (théorique) entre y et x de la forme $y=f(x)$. Grâce à cette courbe, on pourra faire des prévisions (approximations) de valeurs non données dans la série.

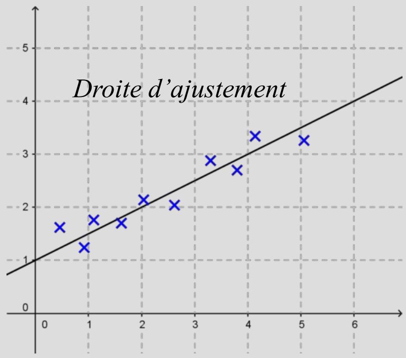
Si ces valeurs sont incluses dans la plage de données du tableau on parle d'interpolation et si elles sont à l'extérieur du tableau on parle d'extrapolation.

Remarque n°1.

Parfois, il n'existe pas de courbe d'ajustement.

II.2 Le cas particulier

L'ajustement affine est l'ajustement qui consiste à trouver une droite qui rende compte de la forme « aligné » d'un nuage en approchant au mieux les points qui le constituent.



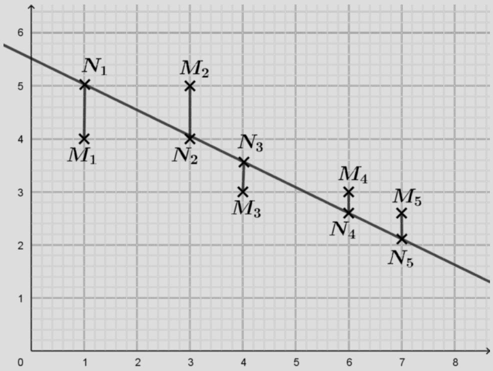
STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Connaissance n°3 La méthode des moindres carrées

On se donne une série statistique à deux variables que l'on représente par un nuage de points (les M_i) et on cherche à tracer une droite qui minimise la somme des $M_i N_i^2$ (Les N_i étant les points de la droite qui correspondent aux M_i).

On nomme cette droite :

droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.



Cette droite a pour équation :

$y = mx + p$

avec $m = \dfrac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$

et $p = \overline{y} - m\overline{x}$

Rassurez-vous c'est la calculatrice qui fera les calculs pour nous et nous remercions Yvan Monka pour son TUTORIEL.

Statistiques à deux variables

Propriété n°1. ***(admise)***

La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés passe par le point moyen du nuage de points de la série statistique.

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E02

EXERCICE N°1

Utilitaire calculs

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire brut de 2015 à 2019.

Année: x_i	2015	2016	2017	2018	2019
SMIC horaire: y_i (en €)	9,61	9,67	9,76	9,88	10,03

Source: https.//www.insee.fr/fr/statistiques/1 375188

1) Représenter le nuage de points de la série statistique dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques
1 cm pour 1 an sur l'axe des abscisses en prenant pour origine 2014 et
10 cm pour 1 € sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 9,40 €.

2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3} près.

3) Représenter la droite Δ sur le graphique de la question 1).

4) Déterminer, par le calcul, le SMIC horaire brut estimé pour l'année 2025.

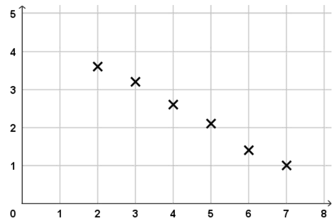
5) Déterminer, par le calcul, à partir de quelle année on peut estimer que le SMIC horaire brut dépassera 10,90€.

EXERCICE N°2

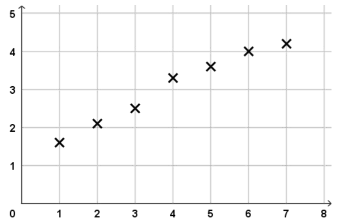
Utilitaire calculs

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

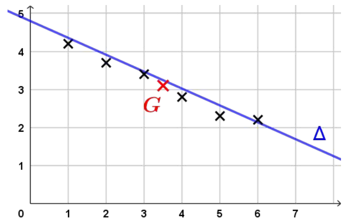
1) Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables. Un ajustement affine de ce nuage de points est envisageable.



2) Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables.
La droite d'équation $y=0,5x+2$ réalise un bon ajustement affine.



3) Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables. G est le point moyen du nuage.
La droite Δ est la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.



STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E02

EXERCICE N°3

Utilitaire calculs

Pour chacune des deux séries statistiques à deux variables suivantes, répondre aux questions.

Série n°1					
x_i	1	2	3	4	5
y_i	123	129	135	140	145

Série n°2						
t_i	18	20	21	25	28	30
N_i	24	44	62	100	132	14

1) Déterminer les coordonnées du point moyen G .

2) Déterminer, à l'aide de la calculatrice l'équation de Δ , la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près).

3) Vérifier que $G \in \Delta$.

4) Déterminer les coordonnées d'un autre point appartenant à Δ .

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E03

EXERCICE N°1

Depuis 2012, une étude a établi que le montant moyen des achats en ligne en France y (en euros) suivant l'année x est donné par la relation $y=-4{,}3x+8\,740$. Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques années :

1) Estimer le montant moyen des achats en ligne en 2021.

2) Estimer en quelle année le montant moyen des achats en ligne deviendra inférieur à 45 €.

Utilitaire calculs

EXERCICE N°2

On a relevé, de l'année 2010à l'année 2019, le nombre licences sportives N délivrées dans une ville suivant l'année x. On estime que la droite d'équation $N=112x-216540$ fait un bon ajustement affine de la situation. Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques années:

1) Estimer le nombre de licences sportives délivrée cette ville en 2025.

2) Estimer en quelle année le nombre de licences sportives délivrées dans cette ville dépassera 10000.

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E03

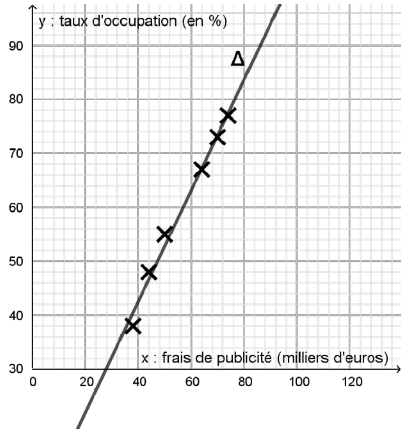
EXERCICE N°3

Une population de bactéries placées dans un liquide se multiplie. On a étudié pendant 6 heures l'évolution du nombre N de bactéries, en millions, en fonction du temps t, en heures.
On estime que la droite d'équation $N = 9{,}26t + 1{,}5$ fait un bon ajustement affine de la situation.
Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques heures :

1) Estimer le nombre de bactéries au bout d'un jour.

2) Estimer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries dépassera 100 000 000.

EXERCICE N°4



Afin d'orienter ses investissements, une petite chaîne d'hôtels réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Elle établit un lien entre le taux d'occupation, exprimé en %, et le montant des frais de publicité :
On donne ci-contre le nuage de points obtenu pour cette étude ainsi qu'une droite Δ fournissant un bon ajustement affine de ce nuage.

1) Estimer graphiquement le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000€.

2) Estimer graphiquement le montant des frais de publicité laissant espérer un taux d'occupation de 80 %.

3) On admet que Δ a pour coefficient directeur $1{,}03$ et passe par le point $A(10\ ;\ 11{,}73)$. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ puis retrouver les résultats obtenus aux questions 1) et 2) par le calcul.

EXERCICE N°5

Un hypermarché propose à ses clients six modèles d'ordinateurs portables. Il réalise une étude sur le volume des ventes suivant le prix de vente de ce produit. Voici les résultats :

Prix de l'ordinateur x_i (en €)	300	350	400	450	500	600
Nombre d'unités vendues y_i	210	190	160	152	124	102

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal (*unités graphiques:* 1 *cm pour* 50€ *sur l'axe des abscisses et* 1 *cm pour* 10 *unités sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine le point de coordonnées* $(250\ ;\ 100)$).

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3) Déterminer la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrées (*Calculatrice* !).

4) La direction souhaite proposer un nouveau modèle à la vente, au prix de 430 €. Déterminer graphiquement une estimation du nombre de ventes de ce nouveau modèle.

Utilitaire calculs

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E04

Dans certains cas, le nuage de points « ne suit pas une droite » mais un autre type de courbe. L'idée est alors de « redresser le nuage » afin de pouvoir faire un ajustement affine. Les exercices suivants vous présentent « ce genre de redressement ».

EXERCICE N°1

Une entreprise spécialisée dans les panneaux photovoltaïques pour camping-car a mené une étude visant à déterminer à quel prix maximal ses clients seraient prêts à acheter l'un de ses produits.
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix maximal x_i (en €)	50	100	150	200	250
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	646	401	224	101	34

1) Représenter sur la calculatrice le nuage de points de cette série statistique (Tutoriel) . Un ajustement affine de ce nuage est-il envisageable ? Justifier.
2) On pose $z=\sqrt{y}$ (*C'est ici qu'on « redresse » le nuage*)
2.a) Reproduire et compléter le tableau suivant (arrondir à 10^{-2} près) :

x_i	50	100	150	200	250
z_i					

2.b) Représenter sur la calculatrice le nuage de point de cette le série statistique. Un ajustement affine de ce nouveau nuage de points est-il envisageable ? Justifier.
2.c) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-1} près).
2.d) En déduire une expression de y en fonction de x .Vérifier que pour un prix de 100 euros, le nombre d'acheteurs potentiels est cohérent avec l'effectif du tableau.
2.e) Estimer le nombre de clients prêts à acheter ce produit jusqu'à 280 euros.

Utilitaire calculs

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES E04

EXERCICE N°2

Au cours de l'hydrolyse alcaline du nitrobenzoate d'éthyle, se dégrade en nitrobenzoate et en éthanol. Dans le tableau suivant, on a mesuré en fonction du temps t, exprimé en minutes, la concentration C du nitrobenzoate d'éthyle, exprimé en millimoles par litre.

t_i	0	1	2	3	4	6	8	10
C_i	50	32,5	27,6	21,3	17,2	14,1	10	8,2

1) À l'aide de la calculatrice, représenter le nuage de points de cette série statistique. Un ajustement affine semble-t-il pertinent ?

2) On pose $y = \dfrac{100}{C}$

2.a) Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant si nécessaire les résultats à 10^{-2} près.

t_i	0	1	2	3	4	6	8	10
y_i								

2.b) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-2} près).

2.c) En déduire une expression de C en fonction de t.

2.d) En utilisant ce modèle, estimer la concentration du nitrobenzoate d'éthyle au bout de 8 minutes et 30 secondes (résultat arrondi à 10^{-1} près).

2.e) Déterminer par le calcul à quel moment il restera $5\ \text{mmol}\cdot\text{L}$ de nitrobenzoate d'éthyle. On donnera un résultat arrondi à la minute près.

Utilitaire calculs