Variables aléatoires E05C

EXERCICE N°1 *Manipuler la formule de König-Huygens*

(Calculatrice autorisée)

Une usine fabrique des composants électroniques. On note X le nombre de composants défectueux dans un lot de 5. La loi de probabilité est la suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,42	0,31	0,15	0,08	0,03	0,01

1) Calculer $E(X)$.

$E(X) = 0\times0{,}42 + 1\times0{,}31 + 2\times0{,}15 + 3\times0{,}08 + +4\times0{,}03 + 5\times0{,}01$

$\boxed{E(X) = 1{,}02}$

2) Calculer $V(X)$ de deux manières différentes.

▪ Commençons par la définition : $V(X) = E((X-E(X))^2)$

$V(X) = 0{,}42\times(0-1{,}02)^2 + 0{,}31\times(1-1{,}02)^2 + 0{,}15\times(2-1{,}02)^2 + 0{,}08\times(3-1{,}02)^2 + 0{,}03\times(4-1{,}02)^2 + 0{,}01\times(5-1{,}02)^2$

$\boxed{V(X) = 1{,}3196}$

▪ Utilisons la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

▫ $E(X^2) = 0{,}42\times0^2 + 0{,}31\times1^2 + 0{,}15\times2^2 + 0{,}08\times3^2 + 0{,}03\times4^2 + 0{,}01\times5^2$

$E(X^2) = 2{,}36$

▫ $V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

$= 2{,}36-1{,}02^2$

$\boxed{V(X) = 1{,}3196}$

EXERCICE N°2 *Utiliser la formule de König-Huygens*

(Calculatrice autorisée)

Un jeu consiste à tirer une carte. Si c'est un cœur, on gagne k euros. Sinon, on perd 1 euro. On sait que la probabilité de gagner est $p = \frac{1}{4}$.

Trouvez la valeur de k pour laquelle la variance du gain est de 3.

On a :

$E(X) = k\times\frac{1}{4}-1\times\frac{3}{4} = \frac{k}{4}-\frac{3}{4} = \frac{k-3}{4}$

$E(X^2) = k^2\times\frac{1}{4}+(-1)^2\times\frac{3}{4} = \frac{k^2}{4}+\frac{3}{4} = \frac{k^2+3}{4}$

et d'après la formule de König-Huygens :

$V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

d'où

$$\frac{k^2+3}{4}-\left(\frac{k-3}{4}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{k^2+3}{4}-\frac{k^2-6k+9}{16} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k^2+12-(k^2-6k+9)}{16} = \frac{48}{16}$$

$$\Leftrightarrow 3k^2+6k+3 = 48$$

$$\Leftrightarrow 3k^2+6k-45 = 0$$

Posons $\Delta = 6^2-4\times3\times(-45) = 576$ le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$k_1 = \frac{-6-\sqrt{576}}{2\times3} = \frac{-6-24}{6} = -5$ et $k_2 = \frac{-6+\sqrt{576}}{2\times3} = \frac{-6+24}{6} = 3$

On en déduit que les valeurs possibles de k sont -5 et 3 et on ne garde que 3 par cohérence.