

VARIABLES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

$$E(X) = -6 \times \frac{1}{12} + (-3) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{5}{24} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{8}$$

$$E(X) = -0,5 + (-1) + 0 + 1 + 0,75$$

$$\boxed{E(X) = 0,25}$$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

y_i	$\underbrace{-6,25}_{=-6-0,25}$	$\underbrace{-3,25}_{=-3-0,25}$	$\underbrace{-0,25}_{=0-0,25}$	$\underbrace{3,75}_{=4-0,25}$	$\underbrace{5,75}_{=6-0,25}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (*On dit alors que la variable aléatoire est centrée*)

$$E(Y) = -6,25 \times \frac{1}{12} + (-3,25) \times \frac{1}{3} + -0,25 \times \frac{5}{24} + 3,75 \times \frac{1}{4} + 5,75 \times \frac{1}{8}$$

$$E(Y) = (-6-0,25) \times \frac{1}{12} + (-3-0,25) \times \frac{1}{3} + (0-0,25) \times \frac{5}{24} + (4-0,25) \times \frac{1}{4} + (6-0,25) \times \frac{1}{8}$$

Tiens tiens $-0,25$ revient souvent...

$$E(Y) = \underbrace{-6 \times \frac{1}{12} + (-3) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{5}{24} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{8}}_{E(X)} - 0,25 \times \left[\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{5}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}_{\text{somme des probabilités des issues ...}} \right]$$

$$E(Y) = E(X) - 0,25$$

$$E(Y) = 0,25 - 0,25$$

$$\boxed{E(Y) = 0}$$

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

La réponse attendue est bien sûr oui mais la justification va demander un peu de travail et c'est ce qui motive la propriété n°1.