EXERCICE N°2 Étudier les variations d'une fonction (niveau 2)

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto (x+1)e^x$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{4x}{e^x}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{4e^x}{x}$ avec $D = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

1)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = u(x)v(x)$

avec

$u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

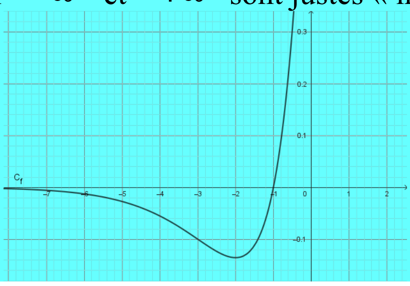
▫ $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



2)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{4x}{e^x} = 4xe^{-x}$$

Ainsi

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$u(x) = 4x$ et $u'(x) = 4$

$v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$

d'où

$$f'(x) = 4e^{-x} - 4x \times (-e^{-x}) = 4(1+x)e^{-x}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

▫ 4 est un nombre positif.

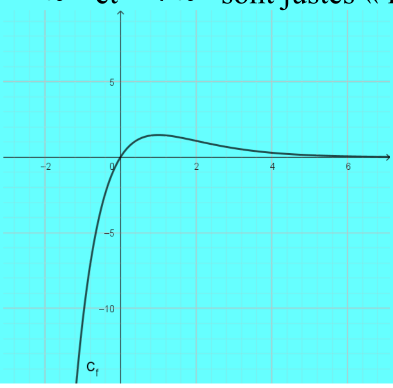
▫ $1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

▫ $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
4		$+$		$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

$$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = 4e^x$ et $u'(x) = 4e^x$

$v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

d'où

$$f'(x) = \frac{4e^x \times x - 1 \times 4e^x}{x^2} = \frac{(4x-4)e^x}{x^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

▫ $4x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

▫ $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$4e$	↗	$+\infty$

$$f(1) = \frac{4e^1}{1} = 4e$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi qu'en 0^- et 0^+ sont justes « intuitives ».