FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

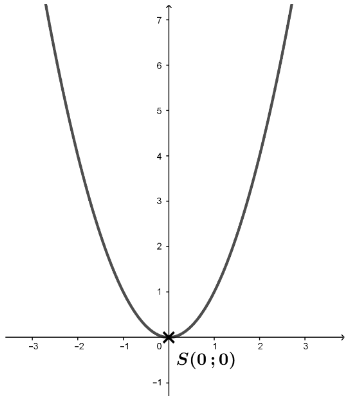
Nous allons généraliser ce que nous avons appris sur la fonction carré. Il est donc judicieux d'avoir relu ce cours avant de commencer...

I Jouons avec la parabole

Notons f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$.

Nous savons que sa représentation graphique est la parabole d'équation $y = f(x)$ ou encore $y = x^2$.

Nous savons également que son sommet S a pour coordonnées $(0\ ;0)$.



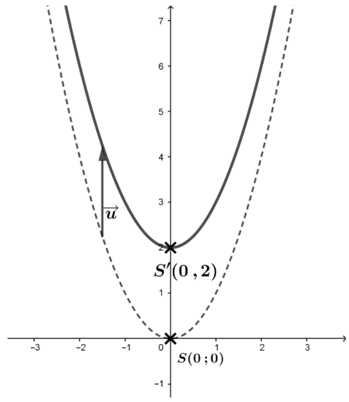
I.1 Premier jeu

Amusons-nous à translater cette parabole de deux unités selon l'axe des ordonnées et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0\ ;2)$? c'est très bien!)

Nous n'avons pas changé les abscisses, par contre nous avons augmenté toutes les ordonnées de 2.

Notre nouvelle parabole a donc pour équation $y = f(x)+2$ ou encore $y = x^2+2$. Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler g et telle que $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\ \mapsto x^2+2\end{cases}$

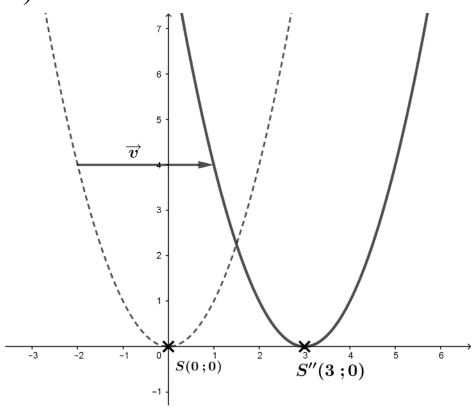
Son sommet S' a alors pour coordonnées $(0\ ;2)$.



I.2 Deuxième jeu

Amusons-nous à translater cette parabole de trois unités selon l'axe des abscisses et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(3\ ;0)$? c'est très bien!)

Nous avons augmenté les abscisses de 3 mais nous n'avons pas changé les ordonnées. C'est à dire que si $A(x_A\ ;\ y_A)$ est un point de la parabole de départ alors son image $B(x_B\ ;\ y_B)$ est telle que : $\begin{cases}x_B=x_A+3\\ y_B=y_A\end{cases}$.

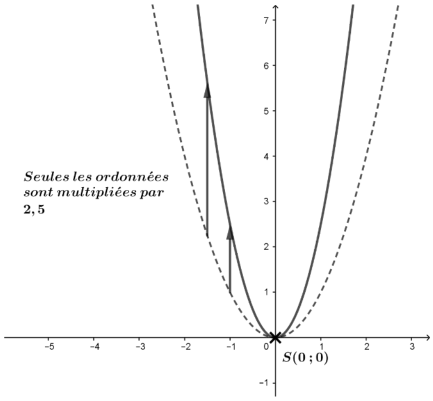


De la première égalité, on déduit que $x_A=x_B-3$ et de la seconde, on déduit que $y_B = y_A = f(x_A) = f(x_B-3)$. Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = f(x-3)$ ou encore $y = (x-3)^2$. (Comprenez bien d'ou vient le « moins »). Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler h et telle que $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\ \mapsto (x-3)^2\end{cases}$

Son sommet S'' a alors pour coordonnées $(3\ ;0)$.

I.3 Troisième jeu

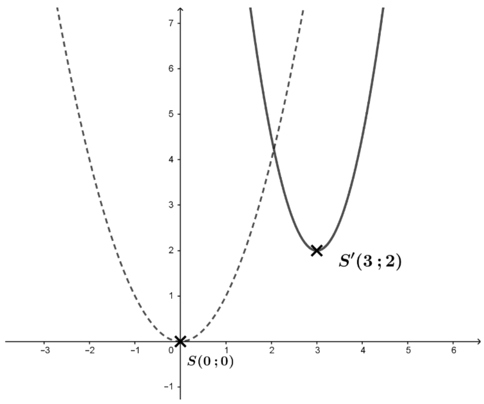
Amusons-nous à « déformer » cette parabole en multipliant les ordonnées par 2,5.
Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = 2{,}5 \times f(x)$ ou encore $y = 2{,}5x^2$.
Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler k et telle que $k:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5x^2\end{cases}$.
Son sommet reste le même : $S(0\ ;\ 0)$



I.4 Dernier Jeu

On combine les trois premiers jeux !

On obtient la parabole d'équation : $y = 2{,}5(x-3)^2+2$ qui répresente une fonction que l'on appeler l et telle que $l:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5(x-3)^2+2\end{cases}$.
Son sommet est alors le point $S'(3\ ;\ 2)$



Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Sur cette page, vous pourrez faire varier les trois paramètres ($a=2{,}5$; $\alpha=3$ et $\beta=2$) afin d'observer en détail leur influence sur la parabole.
Rentrons à présent dans le vif du sujet…

II Expressions des fonctions polynomiales du second degré

II.1 La forme développée réduite

Définition n°1. ***Le trinôme***

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x , on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$ avec a , b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$
L'expression ax^2+bx+c est appelée : Trinôme

Exemple n°1.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$.
On peut écrire :

$l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$

$l(x) = 2{,}5[x^2-6x+9]+2$

$l(x) = 2{,}5x^2-15x+24{,}5$

Ainsi $l(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=2{,}5$, $b=-15$ et $c=24{,}5$
l est donc une fonction polynomiale du second degré.

Remarque n°1.

On devine, sur cet exemple, que toute fonction du type de celle que nous avons observée au dernier jeu est une fonction polynomiale du second degré.

Exercice n°1.

Démontrez-le en partant de l'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ où $a \neq 0$; α et β sont des nombres réels.

II.2 La forme canonique

Propriété n°1. (et définition)

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$

(avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous

sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha=\dfrac{-b}{2a}}$ et $\beta = \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$

Remarque n°2.

C'est bien le « même a ».
Il faut retenir la formule de α mais pas forcément celle de β car $\boxed{\beta = f(\alpha)}$

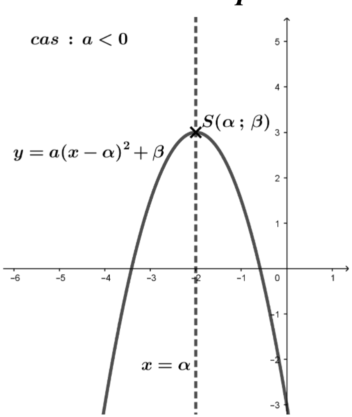
preuve : (de la propriété)

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] && \text{(explications à la remarque n°3)}\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}\right] && \text{On a réduit au même dénominateur}\\
&= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a} && \text{On a distribué } a\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta
\end{aligned}$$

Remarque n°3.

La troisième ligne semble peu naturelle… L'idée est la suivante :
$x^2+\frac{b}{a}x$ est forcément le début de la première identité remarquable $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. En effet $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Le problème est qu'il y a un terme « en trop », il faut donc l'enlever : $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Remarque n°4. Représentation graphique d'une fonction polynomiale du second degré.



D'après nos petits jeux, nous pouvons dire que :

$\boxed{\text{toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole}}$

$\boxed{\text{tournée vers le bas si } a<0}$, $\boxed{\text{tournée vers le haut si } a>0}$,

$\boxed{\text{de sommet } (\alpha\ ;\ \beta)}$ et admettant pour $\boxed{\text{axe de symétrie } x=\alpha}$

Remarque n°5. ***Tableau de variation d'une fonction polynomiale du second degré***

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$

$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$

II.3 La forme factorisée

Dans ce paragraphe, f est une fonction polynomiale du second degré définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2+bx+c$. Nous savons que l'on peut écrire $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Ajoutons une notation supplémentaire : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = a\left[(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si $\Delta < 0$ alors la factorisation n'est pas possible dans $\mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x-\alpha)^2$

Si $\Delta > 0$ alors

$$f(x) = a\left(x-\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et comme $\alpha=\frac{-b}{2a}$:

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

ou encore

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Nous obtenons la propriété suivante :

Propriété n°2. ***Forme factorisée***

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x,
$f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\Delta = b^2-4ac$,

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque n°6. ***Résolution des équations du second degré***

La propriété suivante nous donne une méthode de résolution des équations à une inconnue du second degré.
On fait en sorte d'avoir zéro pour le membre de droite puis on réduit le membre de gauche de façon à obtenir un trinôme, on doit alors résoudre :
$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de cette équation.

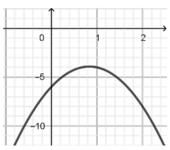
$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet une solution double : $\dfrac{-b}{2a}$	L'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque n°7.

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

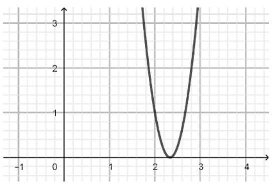
Exemple n°2.

Résolvons les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.



- $-3x^2+5x-6 = 0$

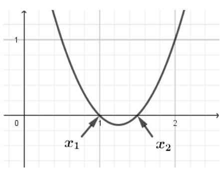
Posons $\Delta = 5^2-4\times(-3)\times(-6) = -47$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet $\boxed{\text{aucune solution réelle}}$.



- $9x^2-42x+49 = 0$

Posons $\Delta = (-42)^2-4\times9\times49 = 0$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : }\dfrac{7}{3}}$

($\dfrac{-(-42)}{2\times9} = \dfrac{2\times3\times7}{2\times3\times3}$)



- $2x^2-5x+3 = 0$

Posons $\Delta = (-5)^2-4\times2\times3 = 1$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta > 0$, cette équation admet $\boxed{\text{deux solutions : 1 et 1,5}}$

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times2} = 1{,}5$$

Remarque n°8.

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas défini a, b et c, nous n'avons donc pas utilisé ces lettres...

III Le résumé du cours

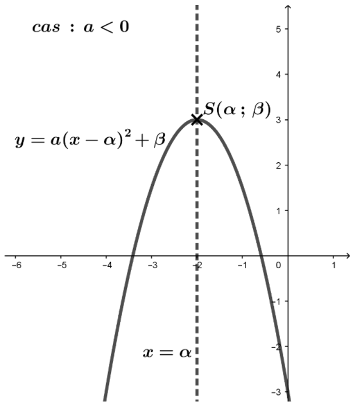
Fonction polynôme du second degré, Trinôme

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$
avec a, b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$
L'expression ax^2+bx+c est appelée : $\boxed{\text{Trinôme}}$

Forme canonique

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$
(avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha = \dfrac{-b}{2a}}$ et $\beta = \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$ on a aussi $\boxed{\beta = f(\alpha)}$



Cliquer pour Visualiser $y = a(x-\alpha)^2+\beta$

toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole

tournée vers le bas si $a<0$, tournée vers le haut si $a>0$,

de sommet $(\alpha\ ;\ \beta)$ et admettant pour axe de symétrie $x=\alpha$

Tableau de variation

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$

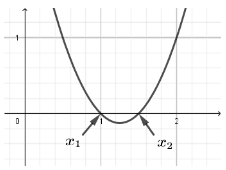
$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Forme factorisée

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\Delta = b^2-4ac$,

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$



Équation du second degré

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune solution réelle.	Une solution double : $\dfrac{-b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

IV Le résumé des exercices et activités