

LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1: x \mapsto 5$; $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4: x \mapsto 2\pi$; $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction nulle .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = 0 , f_2'(x) = 0 , f_3'(x) = 0 , f_4'(x) = 0 , f_5'(x) = 0 .$$

2) $g_1: x \mapsto x+2$; $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à 1 .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_1'(x) = 1 , g_2'(x) = 1 .$$

3) $g_3: x \mapsto 4x+5$; $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante k ($k=4$ pour g_3 et $k=\sqrt{7}$ pour g_4) et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à k .

Ainsi : $g_3': x \mapsto 4$ et $g_4': x \mapsto \sqrt{7}$

4) $h_1: x \mapsto 3x^2-4$; $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$

▪ Pour h_1 :

h_1 est la forme $3 \times u + v$

où $u: x \mapsto x^2$ et $v: x \mapsto -4$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

h_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_1'(x) = 3u'(x) + v'(x)$$

$$= 3 \times 2x + 0$$

$h_1'(x) = 6x$

▪ Pour h_2 :

h_2 est la forme $4 \times u + 5 \times v + w$

où $u: x \mapsto x^2$, $v: x \mapsto x$ et $w: x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_2 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_2'(x) = 4u'(x) + 5 \times v'(x) + w'(x)$$

$$= 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$

$h_2'(x) = 8x+5$

▪ Pour h_3 :

h_3 est la forme $-2,5 \times u + 6 \times v + w$

où $u: x \mapsto x^2$, $v: x \mapsto x$ et $w: x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_3 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_3'(x) = -2,5u'(x) + 6v'(x) + w'(x)$$

$$= -2,5 \times 2x + 6 \times 1 + 0$$

$$h_3'(x) = -5x + 6$$

$$5) \quad h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3 - 4x^2 + 3x - 7\sqrt{11} \quad ; \quad h_5: x \mapsto -\pi x^3 + \sqrt{5}x^2 - \frac{14}{3}x + 33$$

▪ Pour h_4 :

h_4 est la forme $\frac{5}{2} \times u - 4 \times v + 3 \times w - t$

où $u: x \mapsto x^3$, $v: x \mapsto x^2$, $w: x \mapsto x$ et $t: x \mapsto -7\sqrt{11}$

Or :

u, v, w et t sont définies et dérivables sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$, $w'(x) = 1$ et $t'(x) = 0$

Donc

h_4 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_4'(x) = \frac{5}{2} \times u'(x) - 4 \times v'(x) + 3 \times w'(x) - t'(x)$$

$$= \frac{5}{2} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 - 0$$

$$h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2 - 8x + 3$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

▪ Pour h_5 :

h_5 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_5 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_5'(x) = \pi \times 3x^2 + \sqrt{5} \times 2x - \frac{14}{3} \times 1 + 0$$

$$h_5'(x) = 3\pi x^2 + 2\sqrt{5}x - \frac{14}{3}$$

On fait bien attention
à arrêter le radical
avant le x

$$6) \quad h_6: x \mapsto 3x^n + 2x^2 + \frac{3}{x} \quad ; \quad h_7: x \mapsto 5\sqrt{x} + 8x^{15} - \frac{4}{x} \quad ; \quad h_8: x \mapsto 5\sqrt{x} + 7|x| - \frac{7}{x}$$

▪ Pour h_6 :

h_6 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$, donc h_6 est définie et dérivable sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :

$x: x \mapsto x^n$ et $x: x \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} qui contient $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et

$x: x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est définie et dérivable que sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

On ne garde que la partie commune pour tout le monde :

$$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[\cap \mathbb{R} =] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$$

$$\forall x \in] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[,$$

n est un
entier naturel

$$h_6'(x) = 3 \times nx^{n-1} + 2 \times 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_6'(x) = 3nx^{n-1} + 4x - \frac{3}{x^2}$$

▪ Pour h_7 :

h_7 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc h_7 est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[,$$

$$h_7'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times 15x^{14} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_7'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}$$

▪ Pour h_8 :

h_8 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc h_8 est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[,$$

$$h_8'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 7 \times 1 - 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_8'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7$$

On a « mis la constante à la fin »

$$7) \quad h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7) \quad ; \quad h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour h_9 :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2 - 21x + 8x - 28 \\ &= 6x^2 - 13x - 28 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_9 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$h_9'(x) = 6 \times 2x - 13 \times 1 - 0$$

$$h_9'(x) = 12x - 13$$

▪ Pour h_{10} :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 28x + 49 \end{aligned}$$

Ainsi, h_{10} est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_{10} est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$h_{10}'(x) = 4 \times 2x - 28 \times 1 - 0$$

$$h_{10}'(x) = 4x - 28$$