PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

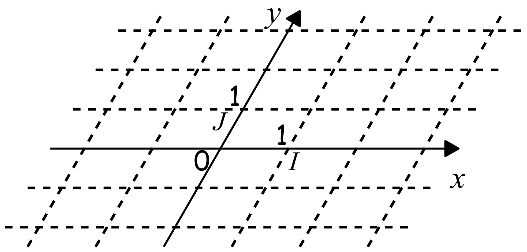
I Les repères du plan

Définition n°1.

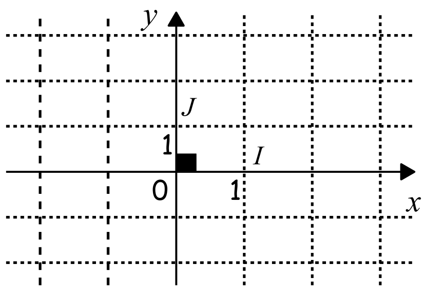
▪ On dit que le plan est muni d'un repère lorsque l'on a fixé dans ce plan deux axes graduées sécants en leur origine.
▪ On dit que le repère est orthogonal si les deux axes sont perpendiculaires.
▪ On dit que le repère est orthonormé, si il est orthogonal ET si les unités de longueurs sont les mêmes sur les deux axes.

Remarque n°1.

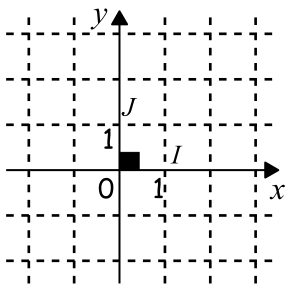
Dans les autres cas, on parle de repère cartésien (ou quelconque).



$(O\ ;\ I\ ;J\ )$ est un repère quelconque



$(O\ ;\ I\ ;J\ )$ est un repère orthogonal



$(O\ ;\ I\ ;J\ )$ est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

Remarque n°2.

Dans un repère $(O\ ; I\ ; J)$, on a, par définition :
$O(0;0)$; $I(1;0)$ et $J(0;1)$
Si le repère se nomme, par exemple, $(C\ ; A\ ; E)$ alors :
$C(0;0)$; $A(1;0)$ et $E(0;1)$

Propriété n°1. ***Alignement***

Soients $A(x_A\ ;\ y_A)$, $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ trois points du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB})=0$

Remarque n°3.

Toute combinaison de ces points fonctionne...

Propriété n°2. ***Coordonnées du milieu d'un segment***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan muni du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
Si $M(x_M\ ;\ y_M)$ est le **milieu** du segment $[AB]$ alors

$$\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

Propriété n°3. ***Longueur d'un segment dans un repère orthonormé.***

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points plan du muni du repère **ORTHONORME** $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

Propriété n°4. ***Aire d'un parallélogramme***

Si ABCD est un parallélogramme, alors son aire vaut la distance à zéro de $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$

II Distance d'un point à une droite

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$

Définition n°2. ***Projection orthogonale***

Soit A un point et (d) une droite.
Le projeté orthogonal de A sur (d) est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Exemple n°1.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

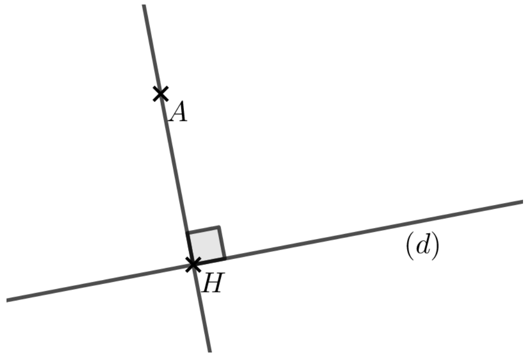


Figure 1

Propriété n°5.

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors pour tout point M de (d) distinct de H, on a : $AH < AM$

preuve :

Par définition du point H, le triangle AHM est rectangle en H.
Le théorème de Pythagore nous donne alors :
$AM^2 = AH^2 + HM^2 > AH^2$ (car $HM^2 > 0$).

Définition n°3. ***Distance d'un point à une droite***

Si le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) alors on appelle **distance du point A à la droite (d)** la longueur AH.

Définition n°4. ***Tangente à un cercle***

Soit A un point d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r.

La **tangente à $(\mathcal{C})$ au point** A est la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (OA).

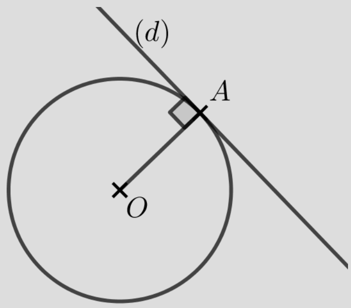


Figure 2

Propriété n°6.

Un cercle possède un unique point en commun avec sa tangente en l'un de ses points.

preuve :

Soit (d) la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A et M un point de (d).
D'après la propriété n°1, $OM > OA$ donc $M \notin (\mathcal{C})$.

III Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans ce paragraphe, on se donne un triangle ABC rectangle en B.

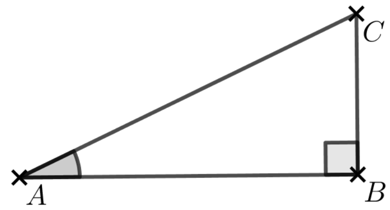


Figure 3

Définition n°5.

- $[AC]$ est l'hypoténuse.
- $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
- $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Définition n°6. ***cosinus, sinus, tangente***

Dans le triangle ABC, rectangle en B.

- $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{AB}{AC}$ (« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)
- $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AC}$ (« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{BC}{AB}$ («tangente égale côté apposé sur côté adjacent »)

Remarque n°4.

Pour l'angle $\widehat{BCA}$, il suffit d'échanger les lettres A et C dans tout ce qui précède.

Remarque n°5.

On n'oublie pas de préciser à chaque dans quel triangle rectangle on travaille.

Propriété n°7.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{\mathbf{\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}}$

preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC, rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}=\frac{BC}{AC}\times\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AB}=\tan(x)$$

Propriété n°8.

Si x est la mesure d'un angle aigu alors : $\boxed{\mathbf{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}}$

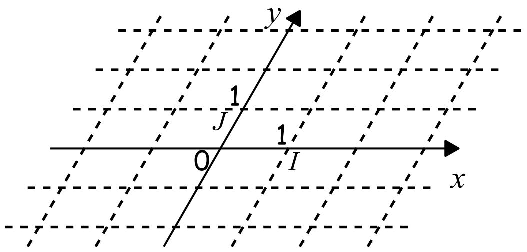
preuve :

Soit x la mesure d'un angle aigu, alors il existe un triangle ABC, rectangle en B tel que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ égale x.
(La *figure 3* illustre cette situation)
Nous avons les égalités suivantes :

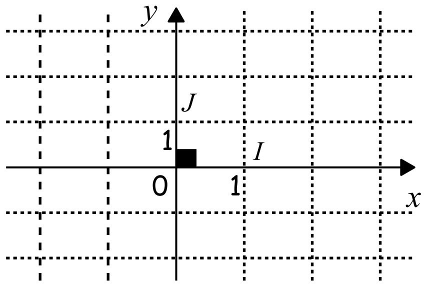
$$(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1$$

l'avant dernière égalité étant justifiée par le théorème de Pythagore.

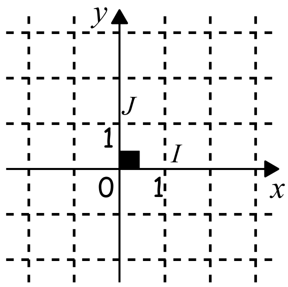
IV Le résumé du cours



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère quelconque



$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthogonal



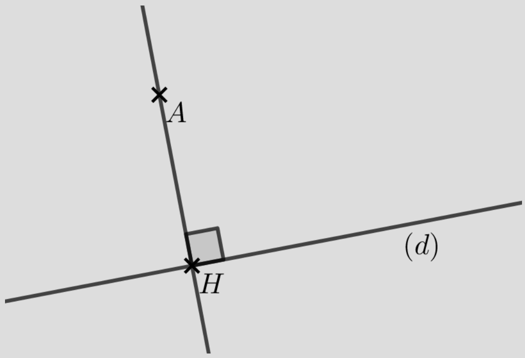
$(O\ ;\ I\ ;J)$ est un repère orthonormé ($OI = OJ$)

	Repère
Les points A, M et B sont alignés si et seulement $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB})=0$	
M milieu du segment [AB] alors $\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$	Tous
$\boxed{AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}$ ou $\boxed{AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$	Uniquement ORTHONORME
Si ABCD est un parallélogramme, alors son aire vaut la distance à zéro de $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$	

Le point H s'appelle le **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)** car $(AH)\perp(d)$

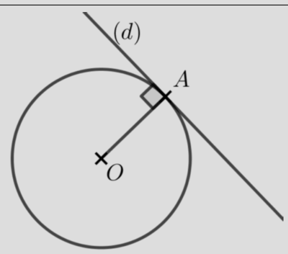
La longueur AH s'appelle la **distance du point A à la droite (d)**.

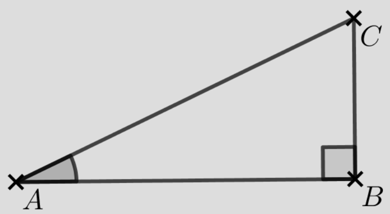
Si $M\in(d)$ distinct de H alors $AM > AH$.



(d) est **la tangente au cercle au point A** car $(OA)\perp(d)$

Il y a **un seul point commun entre la tangente et le cercle.**





Dans le triangle ABC, rectangle en B.

- $\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB}{AC}$

(« cosinus égale côté adjacent sur hypoténuse »)

- $\sin(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AC}$

(« sinus égale côté opposé sur hypoténuse »)

- $\tan(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AB}$

(« sinus égale côté apposé sur côté adjacent »)

$$\boxed{\mathbf{\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1}}$$