

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours.

(1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?

Une augmentation de 5 % correspond à un Coefficient Multiplicateur CM valant 1,05.

Nous allons donc utiliser la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 992 \times 1,05^x$$

La démarche est la même que pour les suites, le « u_0 » vaudrait 992. Comme l'exposant ne sera pas entier (on ne nous demande pas le solde au bout d'un nombre entier d'années), on va utiliser une fonction exponentielle. Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de x .

De plus, deux ans, trois mois et quatre jours font $2 \times 365 + 3 \times 31 + 4 = 827$ jours soit $\frac{827}{365}$ années.

Il s'agit donc de calculer $f\left(\frac{827}{365}\right)$

$$f\left(\frac{827}{365}\right) = 992 \times 1,05^{\frac{827}{365}} \approx 1107,95$$

Ainsi le solde sera alors d' environ 1107,95 €.

2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement?

10 ans 3 mois et 20 jours font $10 \times 365 + 3 \times 31 + 20 = 3763$ jours soit $\frac{3763}{365}$ années.

Notons S le solde initial.

Il s'agit alors de résoudre dans \mathbb{R} l'équation $S \times 1,05^{\frac{3763}{365}} = 992$

$$S \times 1,05^{\frac{3763}{365}} = 992 \Leftrightarrow S = \frac{992}{1,05^{\frac{3763}{365}}} \approx 599,87$$

On en déduit qu'Alissa avait placé environ 599,87 €

600 € serait compté comme bon...

3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

Ici, on fait le choix de partir du présent : « à ce jour : 992 € »

Il n'est pas interdit de partir du passé mais il faut le signaler clairement lors de votre rédaction.

Nous devrions procéder comme à l'exercice n°1 mais nous allons plutôt utiliser une « recette » que nous justifierons plus tard.

Nous savons qu'à ce jour Alissa a un solde de 992 € et nous allons déterminer dans combien de jours son solde sera supérieur ou égal à 2000 €.

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) \geq 2000$ où f est la fonction définie à la question 1).

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 2000 \\ \Leftrightarrow 992 \times 1,05^x &\geq 2000 \\ \Leftrightarrow 1,05^x &\geq \frac{2000}{992} \\ \Leftrightarrow \log(1,05^x) &\geq \log\left(\frac{2000}{992}\right) && \text{(car la fonction log est strictement croissante)} \\ \Leftrightarrow x \log(1,05) &\geq \log\left(\frac{2000}{992}\right) \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{\log\left(\frac{2000}{992}\right)}{\log(1,05)} \approx 14,371 && \text{(car } \log(1,05) > 0) \end{aligned}$$

Comme $14,371 \times 365 = 5245,415$, on en déduit qu'elle devra attendre 5246 jours.