

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 LE CORRIGÉ

Nom :

Prénom :

Classe :

L'usage de la calculatrice est interdit.

Le sujet est à rendre avec la copie

Note	Observations
20	

J'ai le droit à un tiers-temps
(cocher si c'est le cas)

PREMIÈRE PARTIE

EXERCICE N°1 Automatismes

(6 points)

Pour ce premier exercice, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1) L'inverse du triple de 13 est :

- | | | | |
|------|----------------|------|----------------|
| 1.a) | $\frac{1}{39}$ | 1.b) | $\frac{3}{13}$ |
| 1.c) | $\frac{13}{3}$ | 1.d) | 39 |
-

2) On considère la relation $H = a + \frac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \frac{1}{8}$, $b = 3$, $c = 7$ et $d = -\frac{1}{7}$, la valeur de H est :

- | | | | |
|------|-----------------|------|-----------------|
| 2.a) | $\frac{23}{8}$ | 2.b) | $\frac{25}{8}$ |
| 2.c) | $-\frac{23}{8}$ | 2.d) | $-\frac{25}{8}$ |
-

3) Une réduction de 90 % suivie d'une hausse de 60 % équivaut à :

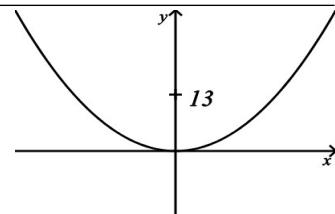
- | | | | |
|------|-------------------------------|------|--------------------------|
| 3.a) | une diminution de 24 % | 3.b) | une diminution de 30 % |
| 3.c) | une diminution de 84 % | 3.d) | une augmentation de 16 % |
-

4) La suite u est géométrique, de raison 2 et de premier terme $u_1 = 5$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

- | | | | |
|------|---------------------|------|--------------------------|
| 4.a) | $u_n = 5 + 2(n-1)$ | 4.b) | $u_n = 5 \times 2^{n-1}$ |
| 4.c) | $u_n = 5 + 2^{n-1}$ | 4.d) | $u_n = 2 \times 5^{n-1}$ |
-

5) On a représenté ci-contre la parabole d'équation $y = x^2$.

On note (I) l'inéquation, sur \mathbb{R} , $x^2 \leqslant 13$.
L'inéquation (I) est équivalente à :



- | | | | |
|------|---|------|--|
| 5.a) | $x \leqslant -\sqrt{13}$ ou $x \geqslant \sqrt{13}$ | 5.b) | $-\sqrt{13} \leqslant x \leqslant \sqrt{13}$ |
| 5.c) | $x \leqslant \sqrt{13}$ | 5.d) | $x = -\sqrt{13}$ ou $x = \sqrt{13}$ |
-

6) Soit la fonction f telle que : $f(3) = 1$ et $f'(3) = 5$.

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3 est :

- | | | | |
|------|---------------|------|---------------------------------|
| 6.a) | $y = x + 2$ | 6.b) | $y = x - 8$ |
| 6.c) | $y = 5x - 16$ | 6.d) | $y = 5x - 14$ |
-

1.a) $\frac{1}{39}$	2.c) $-\frac{23}{8}$	3.c) une diminution de 84 %
4.b) $u_n = 5 \times 2^{n-1}$	5.b) $-\sqrt{13} \leqslant x \leqslant \sqrt{13}$	6.d) $y = 5x - 14$

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE N°2 Savoir-faire

(7 points)

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable et en factorisant lorsque cela est demandé.

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 - 12x + 7$ (il faut factoriser la dérivé)

▪ La fonction f est une somme algébrique de fonctions de références toutes dérивables sur \mathbb{R} , elle l'est donc aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - 5 \times 2x - 12 \times 1 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 2x^2 - 10x - 12}$$

▪ De plus, on peut écrire :

$$f'(x) = 2(x^2 - 5x - 6)$$

Or : -1 est une racine évidente du trinôme $x^2 - 5x - 6$.

$$(-1)^2 - 5 \times (-1) - 6 = 0$$

On en déduit que :

$$f'(x) = 2(x+1)(x-x_2) \text{ avec } x_2 \in \mathbb{R}$$

Ici, on se souvient que $x^2 - 5x - 6 = x^2 - Sx + P$ avec $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$

Par exemple $P = -6 \Leftrightarrow (-1) \times x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = 6$

En développant et en identifiant, on obtient $x_2 = 6$

D'où :

$$\boxed{f'(x) = 2(x+1)(x-6)}$$

▪ Si vous avez utilisé le discriminant :

$$f'(x) = 2(x^2 - 5x - 6)$$

Posons $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49$ le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 6$.

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5-7}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5+7}{2} = 6$$

D'où $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$ puis $\boxed{f'(x) = 2(x+1)(x-6)}$

▪ et si vous n'avez pas pensé à factoriser par 2 :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 100 + 96 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{196}}{2 \times 2} = \frac{10-14}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{196}}{2 \times 2} = \frac{10+14}{4} = 6$$

(Sans la calculatrice, c'est déjà moins facile...)

2) $f(x) = \frac{7x-3}{2x+5}$

▪ Recherchons les valeurs interdites pour trouver les domaines de définition et de dérivation.

$$2x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ On va donc travailler sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

▪ La fonction f est un quotient de fonctions de références toutes dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$,

elle l'est donc aussi et pour tout $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$,

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = 7x - 3 \text{ et } u'(x) = 7$$

$$v(x) = 2x + 5 \text{ et } v'(x) = 2$$

d'où

$$f'(x) = \frac{7(2x+5) - 2(7x-3)}{(2x+5)^2} = \frac{14x+35 - 14x+6}{(2x+5)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{41}{(2x+5)^2}}$$

3) $f(x) = 4x\sqrt{2x-5}$

▪ Recherchons les valeurs interdites pour trouver les domaines de définition et de dérivabilité.

Pour que $\sqrt{2x-5}$ soit définie il faut et il suffit que $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Par contre pour la dérivabilité il faut et il suffit que $2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

(Souvenez-vous, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0)

On va donc travailler sur $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$

▪ La fonction f est composée de fonctions de références toutes dérивables sur $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$,

elle l'est donc aussi et pour tout $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[$,

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec :

$$u(x) = 4x \quad \text{et} \quad u'(x) = 4$$

$$v(x) = \sqrt{w(x)} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} \quad \text{avec} \quad w(x) = 2x-5 \quad \text{et} \quad w'(x) = 2$$

$$\text{ainsi } v(x) = \sqrt{2x-5} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

d'où

$$f'(x) = 4\sqrt{2x-5} + 4x \times \frac{1}{\sqrt{2x-5}} = \frac{4(2x-5)+4x}{\sqrt{2x-5}} = \frac{8x-20+4x}{\sqrt{2x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{12x-20}{\sqrt{2x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{4(3x-5)}{\sqrt{2x-5}} \quad \text{est encore mieux même si cela n'est pas demandé.}$$

4) $f(x) = (5x-3)^3(2x+1)$ (il faut factoriser la dérivé)

▪ La fonction f est une somme algébrique de fonctions de références toutes dérivables sur \mathbb{R} , elle l'est donc aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

avec :

$$u(x) = (5x-3)^3 \quad \text{et} \quad u'(x) = 3 \times 5(5x-3)^{3-1} = 15(5x-3)^2$$

$$v(x) = 2x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2$$

d'où

$$f'(x) = 15(5x-3)^2 \times (2x+1) + 2 \times (5x-3)^3 = (5x-3)^2 [15(2x+1) + 2(5x-3)]$$

$$f'(x) = (5x-3)^2 (40x+9)$$

Une entreprise fabrique et vend x tonnes d'un certain produit par jour, x étant compris entre 10 et 100. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en centaines d'euros est donné par $C(x) = 0,2x^2 + 8x + 500$.

Partie A

Le coût moyen unitaire C_m de fabrication d'une tonne de produit est exprimé en centaines d'euros et est égal, pour tout réel x de l'intervalle $I = [10 ; 100]$ à : $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- 1) Justifier que la fonction C_m est dérivable sur I , et que pour tout réel x de I , $C_m'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2}$.

La fonction C_m est un quotient de fonctions de références toutes dérивables sur I , de plus $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur I . Donc C_m est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$C_m'(x) = \frac{(0,4x+8)x - 1(0,2x^2+8x+500)}{x^2} = \frac{0,4x^2+8x-0,2x^2-8x-500}{x^2} = \frac{0,2x^2-500}{x^2}$$

- 2) En déduire la quantité de produit fabriqué quotidiennement pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

Nous allons étudier le signe de C_m' pour en déduire le tableau de variations de C_m sur I .

$$C_m'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2} = \frac{0,2(x^2 - 2500)}{x^2} = \frac{0,2(x-50)(x+50)}{x^2}$$

- 0,2 est un nombre positif
- $x-50 > 0 \Leftrightarrow x > 50$
- $x+50 > 0 \Leftrightarrow x > -50$

x	10	50	100
$0,2$	+		+
$x-50$	-	0	+
$x+50$	+		+
x^2	+		+
$C_m'(x)$	-	0	+
$C_m(x)$	600	28	33

$$C_m(10) = \frac{0,2 \times 10^2 + 8 \times 10 + 500}{10} = \frac{20 + 80 + 500}{10} = 60$$

$$C_m(50) = \frac{0,2 \times 50^2 + 8 \times 50 + 500}{50} = \frac{500 + 400 + 500}{50} = \frac{1400}{50} = 28$$

Aide au calcul
 $\frac{0,2 \times 50^2 + 8 \times 50 + 500}{50} = 28$

$$C_m(100) = \frac{0,2 \times 100^2 + 8 \times 100 + 500}{100} = \frac{2000 + 800 + 500}{100} = \frac{3300}{100} = 33$$

D'après le tableau de variations, la quantité cherchée est 50 tonnes et le coût est 2800 euros

Partie B

- 3) Le prix de vente **d'une tonne** de produit dépend de la quantité x produite et s'exprime, en centaines d'euros, par la relation : $p(x) = 62 - \frac{x}{4}$.

3.a) Déterminer la recette totale obtenue avec une production et une vente de 40 tonnes de produit.

Pour 40 tonnes, le prix de vente vaudra $p(40)$ centaines d'euros,

$$p(40) = 62 - \frac{40}{4} = 52$$

Soit 5200 euros la tonne

La recette totale vaudra alors $40 \times p(40)$ centaines d'euros,

$$40 \times p(40) = 40 \times 5200 = 208000$$

Soit une recette totale de 208000 euros.

3.b) Déterminer en fonction de la quantité x produite et vendue le montant de la recette totale $R(x)$.

Pour $x \in [10 ; 100]$,

$$R(x) = x \times p(x) = x \left(62 - \frac{x}{4} \right)$$

On généralise la question précédente.

$$R(x) = 62x - \frac{x^2}{4}$$

4) Le bénéfice B , en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de x tonnes de produit est égal, pour tout réel x de I , à : $B(x) = R(x) - C(x)$.

4.a) Montrer qu'alors B est la fonction définie sur I par $B(x) = -0,45x^2 + 54x - 500$.

Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 62x - \frac{x^2}{4} - (0,2x^2 + 8x + 500) \\ &= 62x - \frac{x^2}{4} - 0,2x^2 - 8x - 500 \\ &= -0,45x^2 + 54x - 500 \end{aligned}$$

cqfd

4.b) Combien de tonnes l'entreprise doit produire et vendre afin d'obtenir un bénéfice maximum ? Donner le montant de ce bénéfice.

$B(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -0,45$; $b = 54$ et $c = -500$

La représentation graphique est donc une parabole tournée vers le haut car $a > 0$ et de sommet $S(\alpha ; \beta)$

$$\text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-0,45)} = \frac{-54}{-0,9} = \frac{54}{9} = \frac{54}{9} \times 10 = 60$$

et

$$\beta = B(60) = -0,45 \times 60^2 + 54 \times 60 - 500 = 1120$$

On en déduit que l'entreprise doit vendre 60 tonnes pour un bénéfice maximal de 112000 euros.

Bien sur vous pouviez étudier les variations de la fonction B sur $[10 ; 100]$

$$(B'(x) = -0,9x + 54 > 0) \Leftrightarrow x > 60$$

x	10	50	100
$B'(x)$		+	0
$B(x)$	-5	1120	400

On en déduit que l'entreprise doit vendre 60 tonnes pour un bénéfice maximal de 112000 euros.

BROUILLON