

## FONCTIONS PART2

### I Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

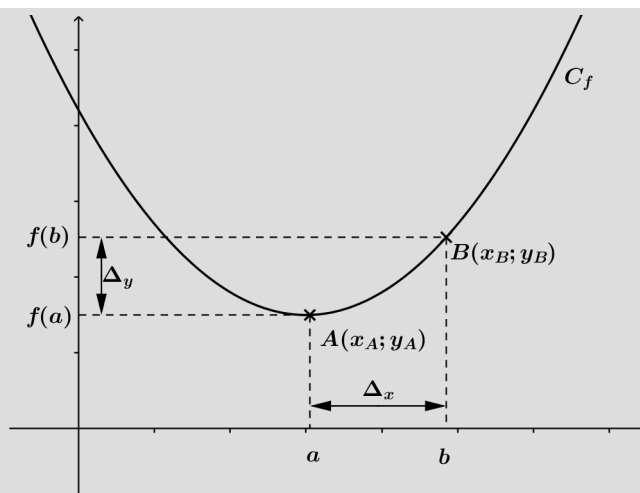
#### Définition n°1.

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux nombres  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ . On appelle taux de variation entre  $a$  et  $b$  le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

#### Remarque n°1.

Si on note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère et qu'on se donne  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points appartenant à  $C_f$  alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où  $\Delta_y = y_B - y_A$  et  $\Delta_x = x_B - x_A$  sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

#### Remarque n°2.

Le taux de variation entre  $a$  et  $b$  est donc le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ .

#### Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

#### Définition n°2.

La droite  $(AB)$  est une sécante à la courbe  $C_f$  passant par  $A$ .

#### Remarque n°4.

On aurait pu faire la même phrase avec  $B$  mais dans la suite on va « fixer »  $A$  et « faire varier »  $B$ .

## II Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points  $A$  et  $B$  sont proches l'un de l'autre. L'intérêt de cette remarque étant qu'il est facile d'étudier le comportement d'une droite... [geogebra](#)

### Définition n°3. (un peu hors programme...)

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$   
On appelle nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on note si cela existe :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### Remarque n°5. Nombre dérivé d'une fonction $f$ en $a$ .

La notion de limite n'étant pas au programme, on se contentera de dire que :

$f'(a)$  est le nombre obtenu en faisant « tendre  $h$  vers 0 » dans le quotient  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (Quand ce nombre existe...)

### Exemple n°1.

Soit  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 5 \end{cases}$ , déterminons le nombre dérivé de  $f$  en 3.

Soit  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 + 5 - (3^2 + 5)}{h} = \frac{h^2 + 6h + 9 + 5 - 9 - 5}{h} = h + 6$$

On faisant « tendre  $h$  vers 0 », on obtient 6.

Donc  $f'(3) = 6$ .

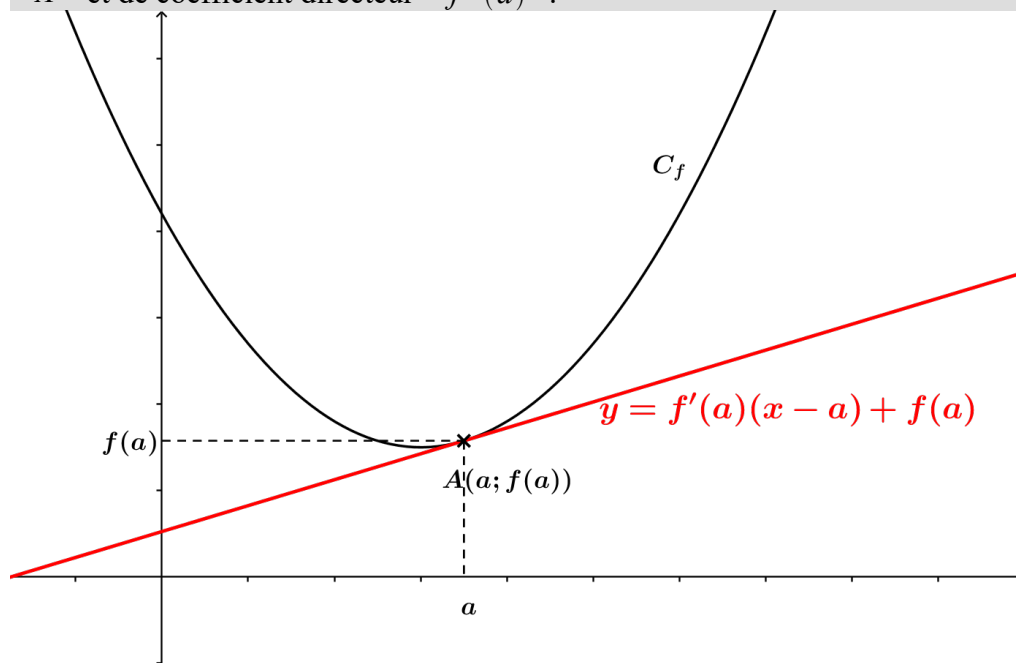
### III Tangente à la courbe $C_f$ au point $(a ; f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°4, nous allons faire « tendre  $B$  vers  $A$  » et notre sécante va devenir une tangente.

En notant  $B(a+h ; f(a+h))$ , on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre, quand  $h$  tend vers 0, vers  $f'(a)$  ».

#### Définition n°4.

La tangente  $T$  à  $C_f$  au point  $A(a ; f(a))$  est la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .



#### Remarque n°6.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme  $y = mx + p$  avec  $m = f'(a)$  par définition.

Comme de plus,  $A(a ; f(a))$  appartient à  $C_f$ , on obtient que :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

d'où l'on déduit que :

$$p = f(a) - a \times f'(a)$$

Ainsi l'équation réduite de  $C_f$  peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + f(a) - a f'(a)$$

que l'on simplifie en :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  pour obtenir la propriété suivante.

#### Propriété n°1. Équation de la tangente

Soit  $f$  une fonction au moins définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Si elle existe, la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## IV Fonction dérivée d'une fonction

### Définition n°5.

$$f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad \text{où } I \subset \mathbb{R} \text{ est un intervalle.}$$

Si pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intérieur de  $I$ ,  $f'(x)$  existe alors on dit que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intérieur de  $I$  et on appelle fonction dérivée de  $f$ , la fonction notée  $f'$  définie par

$$f' := \begin{cases} \overset{\circ}{I} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

### Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1,  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 5 \end{cases}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ . Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 5 - (x^2 + 5)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5 - x^2 - 5}{h} = 2x + h$$

En faisant « tendre  $h$  vers 0 », on obtient  $2x$ .

Ainsi  $f'(x) = 2x$ .

Ceci étant valable pour tout réel  $x$ , nous venons de démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée est :  $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

## IV.1 Quelques fonctions dérivées de référence

### Remarque n°7. Fonction dérivée d'une fonction constante

Si  $f$  est une fonction constante sur  $I$ , autrement dit pour tout  $x \in I$   $f(x) = k$  avec  $k \in \mathbb{R}$  alors :

$$f(x+h) - f(x) = k - k = 0 \quad \text{pour tout } h, \text{ on en déduit que } f'(x) = 0$$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

### Remarque n°8. Fonction dérivée de la fonction identité

Si  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $h \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h - x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

### Propriété n°2. Fonction dérivée de la fonction carré

$$\text{Si } f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \quad \text{alors } f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$

*preuve :*

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui « tend vers  $2x$  » quand «  $h$  tend vers 0 ».

### Propriété n°3. Fonctions dérivée de la fonction cube

$$\text{Si } f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases} \quad \text{alors } f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^2 \end{cases}$$

**preuve :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

qui « tend vers  $3x^2$  » quand «  $h$  tend vers 0 ».

## IV.2 Quelques opérations sur les fonctions dérivées

### Propriété n°4. Linéarité de la dérivation

Soient  $f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$  et  $g := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$  où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, ainsi que  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

La fonction dérivée de la fonction  $af + bg$  est :

$$(af + bg)' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto af'(x) + bg'(x) \end{cases}$$

**preuve :**

$$\begin{aligned} \frac{(af + bg)(x+h) - (af + bg)(x)}{h} &= \frac{af(x+h) + bg(x+h) - (af(x) + bg(x))}{h} \\ &= \frac{af(x+h) + bg(x+h) - af(x) - bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h) - af(x) + bg(x+h) - bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h) - af(x)}{h} + \frac{bg(x+h) - bg(x)}{h} \\ &= a \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= af'(x) + bg'(x) \end{aligned}$$

Grâce aux remarques n°7 et 8 ainsi qu'aux propriétés n°2,3 et 4 nous obtenons le formulaire suivant :

## V Un formulaire à connaître

### Propriété n°5.

Dans ce tableau  $k, a, b, c$  et  $d$  sont des nombres.

$f(x) =$	$f'(x) =$
$k$	0
$x$	1
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$a \times 3x^2 + b \times 2x + c$

### Exemple n°3.

On donne  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 11x + 7$  et déterminons l'expression de sa fonction dérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 11 \\ &= 12x^2 - 10x + 11 \end{aligned}$$

## VI Variations d'une fonction

### Propriété n°6.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \geq 0$
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \leq 0$
- Si  $f$  est constante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) = 0$

#### preuve :

▪ Supposons que  $f$  est croissante sur  $I$

Soit  $a \in I$  et  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $a+h$  appartienne à  $I$ .

→ Si  $h > 0$  alors :

$a+h > a$  et comme  $f$  est croissante sur  $I$   $f(a+h) \geq f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a > 0$  et  $f(a+h) - f(a) \geq 0$

Donc  $\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$

→ De la même façon, si  $h < 0$  alors :

$a+h < a$  et comme  $f$  est croissante sur  $I$   $f(a+h) \leq f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a < 0$  et  $f(a+h) - f(a) \leq 0$

Donc  $\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$

Dans les deux cas  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$ , ce qui implique  $f'(a) \geq 0$

▪ Les deux autres points se sont démontrent de la même manière et sont laissés à titre d'exercice.

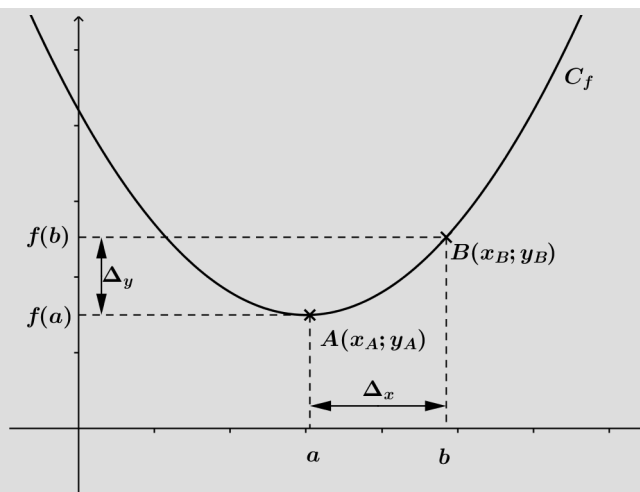
### Propriété n°7. (admise)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $I$
- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $I$
- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$

# VII Le résumé du cours

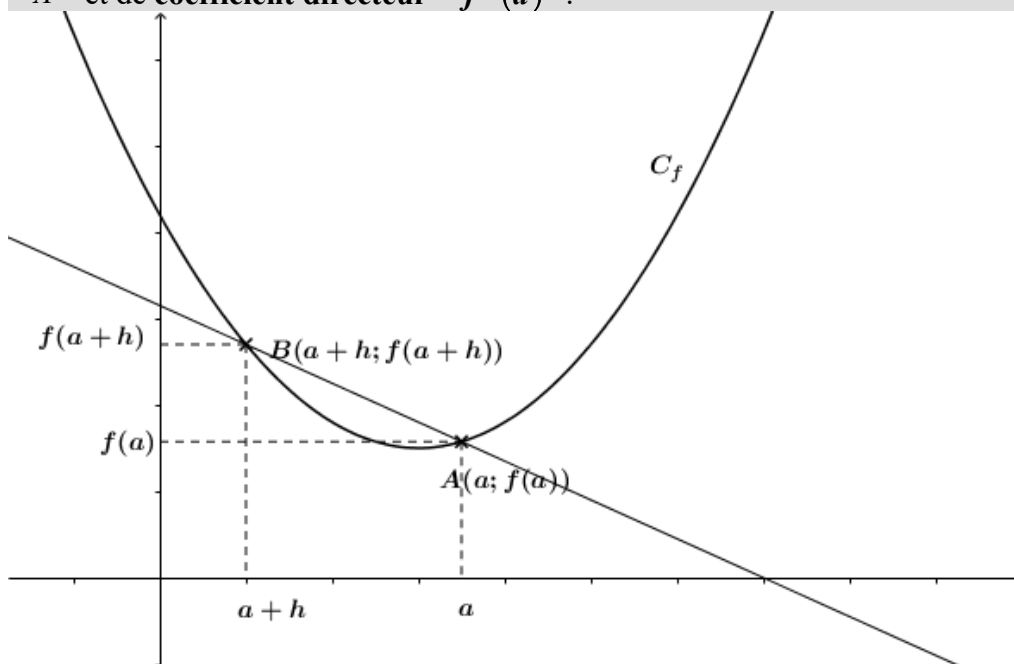
Si on note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère et qu'on se donne  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points appartenant à  $C_f$  alors :



$$\text{taux de variation : } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où  $\Delta_y = y_B - y_A$  et  $\Delta_x = x_B - x_A$  sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

La **tangente**  $T$  à  $C_f$  au point  $A(a; f(a))$  est la droite passant par  $A$  et de **coefficient directeur**  $f'(a)$ .



Équation de la tangente en  $a$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle  $I$  alors

$$f+g \text{ aussi et } (f+g)' = f' + g'$$

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $k \in \mathbb{R}$  alors

$$kf \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (kf)' = kf'$$

$f(x) =$	$f'(x) =$
$k$	$0$
$x$	$1$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$a \times 3x^2 + b \times 2x + c$

À connaître par cœur

