FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E05C

EXERCICE N°1 Méthode de Horner : découverte

Nous allons apprendre à factoriser rapidement l'expression développée réduite de certaines fonctions polynomiales du troisième degré.

Autrement dit on va apprendre à factoriser une expression du type Ax^3+Bx^2+Cx+D en $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ où A ; B ; C ; D ; α ; a ; b et c sont tous des réels.

Le principe

Soit α ; a ; b et c des nombres réels

1) Développez et réduisez l'expression $(x-\alpha)(ax^2+bc+c)$ afin de vérifier que

$(x-\alpha)(ax^2+bc+c) = ax^3 + (b-\alpha a)x^2 + (c-\alpha b)x - \alpha c$

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(ax^2+bc+c) &= ax^3+bx^2+cx-\alpha a x^2-\alpha b x-\alpha c\\ &= ax^3+bx^2-\alpha a x^2+cx-\alpha b x-\alpha c\\ &= ax^3+(b-\alpha a)x^2 + (c-\alpha b)x - \alpha c\end{aligned}$$

C'est sur cette égalité qu'est basée la méthode.

Par identification :

$a = A$;

$B = b-\alpha a$ ou plutôt $b = B+\alpha a$;

$C = c-\alpha b$ ou plutôt $c = C+\alpha b$ et

$D = -\alpha c$ ou plutôt $D+\alpha c = 0$

Par conséquent si on connaît Ax^3+Bx^2+Cx+D et α , on peut trouver ax^2+bx+c en suivant le schéma suivant :

	A	B	C	D
α		αa	αb	αc
	a	$b = B+\alpha a$	$c = C+\alpha b$	$D+\alpha c = 0$

La méthode sur un exemple

Remarque n°1. ***ça marche si on arrive à trouver α (on parle alors de racine évidente)***

Une bonne astuce est donnée dans la vidéo : décomposer D en facteurs premiers et les tester ainsi que leur oppposé.

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E05C

On applique

2) On se donne la fonction polynomiale f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2x^3-7x^2-17x+10$$

Calculez $f(-2)$ et déduisez-en une factorisation de $f(x)$.

$f(-2) = 2\times(-2)^3-7\times(-2)^2-17\times(-2)+10$

$\boxed{f(-2) = 0}$

On en déduit que $f(x) = (x-(-2))(ax^2+bx+c)$

	2	-7	-17	10
-2		$-2\times2=-4$	$-2\times(-11)=22$	$-2\times5=-10$
	2	$-7+(-4)=-11$	$-17+22=5$	$10+(-10) = 0$

Grâce à la méthode de Horner, $f(x) = (x-(-2))(2x-11x+5)$

ou encore $\boxed{f(x) = (x+2)(2x-11x+5)}$

3) À l'aide de ce qui précède factorisez complètement $f(x)$

Il reste à factoriser, si possible, le trinôme $2x-11x+5$

Posons $\Delta = 11^2-4\times2\times5 = 81$ son discriminant.

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-11)-9}{2\times2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-11)+9}{2\times2} = 5$$

Ainsi $2x-11x+5 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)$

On en déduit que $\boxed{f(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)}$

EXERCICE N°2 Méthode de Horner : utilisation

On donne g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = x^3+x^2-10x+8$

1) Calculez $g(1)$.

$g(1) = 1^3+1^2-10\times1+8$

$\boxed{g(1) = 0}$

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$.

	1	1	-10	8
1		$1\times1=1$	$1\times2=2$	$1\times(-8)=-8$
	1	$1+1=2$	$-10+2=-8$	$8+(-8) = 0$

On sait, à présent, que $g(x) = (x-1)(x+2x-8)$

D'après la question précédente, on sait que 1 est une racine de $g(x)$

On en déduit, avec la méthode de Horner que $g(x) = (x-1)(x+2x-8)$

Factorisons le trinôme $x+2x-8$.

Posons $\Delta = 2^2-4\times1\times(-8) = 36$ son discriminant.

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-2-6}{2\times1} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2+6}{2\times1} = 2$

Ainsi $x+2x-8 = (x+4)(x-2)$

On en déduit que $g(x) = (x-1)(x+4)(x-2)$

Pour finir :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+4)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ x-1=0 \text{ ou } x+4=0 \text{ ou } x-2=0\ ) \\ &\Leftrightarrow (\ x=1 \text{ ou } x=-4 \text{ ou } x=2\ ) \end{aligned}$$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet $\boxed{\text{trois solutions : } -4\ ;\ 1 \text{ et } 2}$

EXERCICE N°3   Méthode de Horner : en python

```python
def horner(coef_poly,alpha):
    """coef_poly = [A,B,C,D] pour Ax^3+Bx^2+Cx+D"""
    coef_facteur = [coef_poly[0]]
    for place in range(1,4):
        coef_facteur.append(alpha*coef_facteur[-1]+coef_poly[place])
    return coef_facteur
```

Utilisez la fonction **horner** pour résoudre l'équation $x^3+2x^2-11x-12 = 0$ sachant que -1 est une solution.

```python
>>> horner([1,2,-11,-12],-1)
[1, 1, -12, 0]
```

Pour $x \in \mathbb{R}$

$x^3+2x^2-11x-12 = (x+1)(x^2+x-12)$

Factorisons le trinôme x^2+x-12

Posons $\Delta = 1^2-4\times1\times(-12) = 49$ son discriminant.

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-7}{2\times1} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{2\times1} = 3$$

Ainsi $x^2+x-12 = (x+4)(x-3)$

On en déduit que $x^3+2x^2-11x-12 = (x+1)(x+4)(x-2)$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-11x-12 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ x+1=0 \ \text{ou}\ x+4=0 \ \text{ou}\ x-2=0\ ) \\ &\Leftrightarrow (\ x=-1 \ \text{ou}\ x=-4 \ \text{ou}\ x=2\ ) \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation possède $\boxed{\text{trois solutions : } -4\ ;\ -1\ ;\text{ et } 2}$