SUITES NUMÉRIQUES PART2 E03

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an.
En 2019, elle était de 8 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019+n)$. On a donc $u(0)=8000$.

1) Calculer les termes $u(1), u(2)$ et $u(3)$.

Une augmentation de 10 % correspond à un Coefficient Multiplicateur $CM=1{,}1$

$u(1) = u(0)\times 1{,}1 = 8000\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(1) = 8800}$

$u(2) = u(1)\times 1{,}1 = 8800\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(2) = 9680}$

$u(3) = u(2)\times 1{,}1 = 9680\times 1{,}1$, ainsi $\boxed{u(3) = 10648}$

2) Donner la nature et la raison de la suite u.

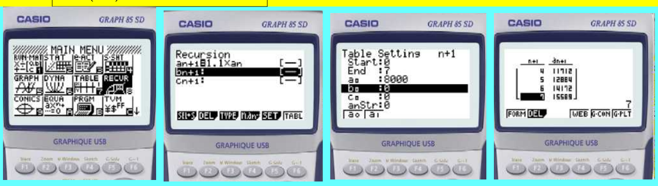
Pour passer d'un terme au suivant, on $\boxed{\text{multiplie à chaque fois par le même nombre}}$: 1,1.
On en déduit que $\boxed{u \text{ est géométrique}}$, de $\boxed{\text{raison } q=1{,}1}$ et de $\boxed{1^{er} \text{ terme } u(0)=8000}$

3) Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n+1)$ et $u(n)$.

$\boxed{u(n+1) = 1{,}1\times u(n)}$

4) Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2026.

$2026 = 2019+7$, il s'agît donc de calculer $u(7)$.
à l'aide de la calculatrice $\boxed{u(7) \approx 15589}$



En réalité, l'arrondi donnerait plutôt 15590, mais cette année, nous faisons confiance à la calculatrice…

5) Déterminer en quelle année la population aura doublé.

à l'aide de la calculatrice $u(7) \approx 15589$ et $u(8) \approx 17148$
On en déduit que la population aura doublé en $2019+8=$ $\boxed{2027}$

6) Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019+n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc: $v(n)=u(n+1)-u(n)$.

6.a) Calculer $v(1), v(2)$ et $v(3)$.

$v(1) = u(1+1)-u(1) = u(2)-(1) = 9680-8800$, ainsi $\boxed{v(1) = 880}$

$v(2) = u(2+1)-u(2) = u(3)-(2) = 10648-9680$, ainsi $\boxed{v(2) = 968}$

$v(3) = u(3+1)-u(3) = u(4)-(3) = 11712-10648$, ainsi $\boxed{v(3) = 1064}$

6.b) La suite v est-elle arithmétique ? Géométrique? Le démontrer.

On commence par calculer au brouillon les premières différences de deux termes successifs et on constate qu'elles ne sont pas égales, On essaie alors les premiers quotients de deux termes successifs et là ça marche. Attention, à ce stade nous n'avons qu'une conjecture (il semble que).
On va donc démontrer que la suite est géométrique.

Démontrons que la suite v est géométrique :
Soit n un entier naturel.

On serait tenté de considérer $\dfrac{v(n+1)}{v(n)}$. C'est rarement une bonne idée et en plus il faudrait justifier que tous les termes sont nuls (hé oui, on fait un quotient, il faut s'assurer qu'il existe…)
Voici donc une méthode classique qui pour nous marchera à chaque fois.

$v(n+1) = u(n+2)-u(n+1) = 1{,}1\times u(n+1)-1{,}1\times u(n) = 1{,}1[u(n+1)-u(n)]=1{,}1\times v(n)$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $\boxed{v(n+1) = 1{,}1\times v(n)}$ ce qui prouve que la suite $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q=1{,}1}$.

Comment ça marche ?
On exprime $v(n+1)$ en fonction de l'autre suite, puis à l'aide des propriétés de cette autre suite on fait apparaître $v(n)$ (en général grâce à une factorisation).

6.c) Calculer la somme: $v(1)+v(2)+v(3)+v(4)+v(5)+v(6)+v(7)$.

Comme v est géométrique, il suffit d'utiliser la formule suivante :

$\boxed{v(1)\times\dfrac{1-1{,}1^7}{1-1{,}1} \approx 8349}$ à l'unité.