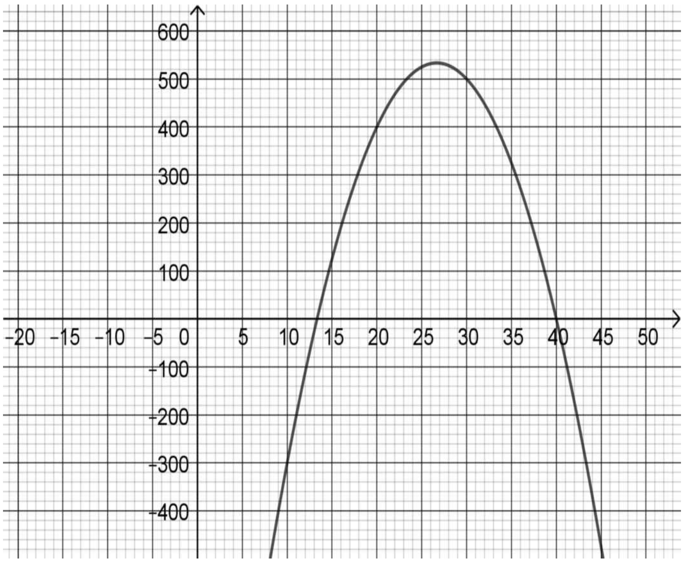
FONCTIONS PART3 E07

EXERCICE N°1 (Le corrigé) E3C T1CMATH00099

Une entreprise fabrique des lampes solaires. Elle ne peut pas produire plus de 5000 lampes par mois.
Le résultat qu'elle peut réaliser en un mois, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction b dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On rappelle que lorsque le résultat est positif, on l'appelle bénéfice. L'axe des abscisses indique le nombre de lampes produites et vendues exprimé en centaines.



En utilisant le graphique :

1) Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$\boxed{b(10)=-300}$

En produisant 1000 lampes l'entreprise perd 30000 €

2) Déterminer avec la précision que la lecture graphique permet, le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.

L'entreprise peut réaliser un **bénéfice maximal** d'environ **54000 €** en produisant environ **2500 lampes**

3) La fonction b définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ est définie par l'expression suivante : $b(x)=-3x^2+160x-1600$.

3.a) Montrer que $b(x)=(x-40)(-3x+40)$.

$$\begin{aligned}(x-40)(-3x+40) &= \\ &= -3x^2+40x+120x-1600 \\ &= -3x^2+160x-1600 \\ &= b(x)\end{aligned}$$

Ainsi $b(x)=(x-40)(-3x+40)$

3.b) Résoudre $b(x)=0$

$b(x)=0 \Leftrightarrow (x-40)(-3x+40)=0$

Or : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'au moins de ses facteurs est nul.

$x-40=0$ ou $-3x+40=0$

$x=40$ $\quad -3x=-40 \quad x=\dfrac{-40}{-3}=\dfrac{40}{3}$

Les solutions de l'équation $b(x)=0$ sont : $\boxed{\dfrac{40}{3} \text{ et } 40}$

3.c) Donner la valeur exacte du maximum de la fonction et en quel nombre il est atteint.

Commençons par déterminer la dérivée b' de la fonction b :

$b(x)=-3x^2+160x-1600$

$b'(x)=-3\times 2x+160\times 1-0$

$\boxed{b'(x)=-6x+160}$

Si la fonction b admet un maximum en x_0 alors $b'(x_0)=0$.

On va donc résoudre $b'(x)=0$

$$b'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+160= \Leftrightarrow -6x=-160 \Leftrightarrow x=\frac{-160}{-6} \Leftrightarrow x=\frac{80}{3}\approx 26{,}667$$

De plus :

$$b\left(\frac{80}{3}\right) = -3\times\left(\frac{80}{3}\right)^2+160\times\left(\frac{80}{3}\right)-1600 = -\frac{6400}{3}+\frac{12800}{3}-\frac{4800}{3} = \frac{1600}{3}\approx 533{,}33$$

On en déduit, à la vue du graphique, et de ce qui précède que le maximum est atteint en $\boxed{x_0=\frac{80}{3}}$ et qu'il vaut $\boxed{b\left(\frac{80}{3}\right) = \frac{1600}{3}}$

On a procéder ainsi pour illustrer la propriété n°1

On pouvait aussi dresser le tableau de variations et l'utiliser pour répondre à la question.