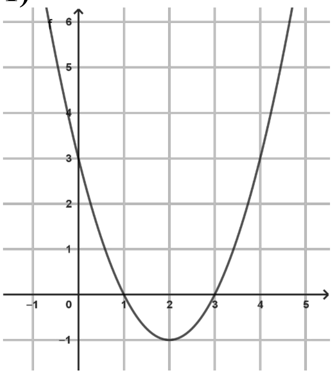
Fonctions polynomiales du second degré E02C

EXERCICE N°1 Lien entre la forme canonique et le graphique (Le corrigé)

Dans chaque cas, donnez la forme canonique de la fonction polynomiale du second degré qui est représentée.

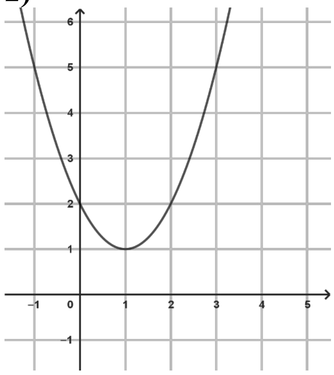
1)



Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$
Par lecture graphique $(\alpha\ ;\ \beta) = (2\ ;\ -1)$
La parabole a donc pour équation
$y = a(x-2)^2-1$
Pour trouver a, on choisit un point de la courbe et on exprime son appartenance :
Par exemple $A(1\ ;\ 0)$ donne :
$0 = a(1-2)^2-1$
d'où $a = 1$

$\boxed{(x-2)^2-1}$

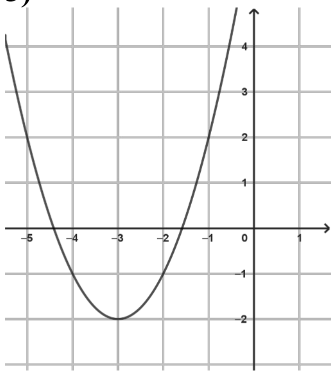
2)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (1\ ;\ 1)$
On choisit $A(0\ ;\ 2)$
On obtient :
$2 = a(0-1)^2+1$
qui donne :
$a = 1$

$\boxed{(x-1)^2+1}$

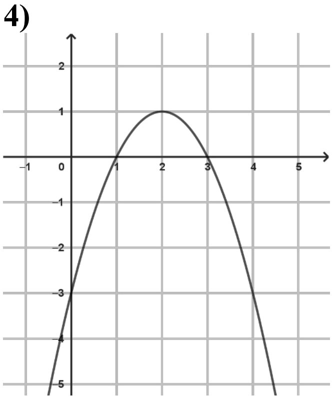
3)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-3\ ;\ -2)$
On choisit $A(-1\ ;\ 2)$
On obtient :
$2 = a(-1+3)^2-2$
qui donne :
$a = 1$

$\boxed{(x+3)^2-2}$

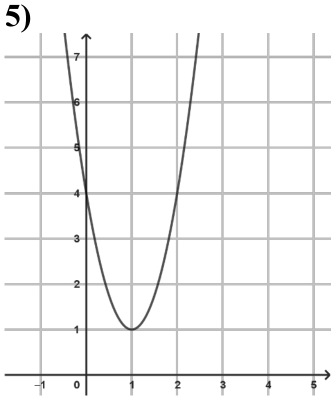
4)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (2\ ;\ 1)$
On choisit $A(1\ ;\ 0)$
On obtient :
$0 = a(1-2)^2+1$
qui donne :
$a = -1$

$\boxed{-(x-2)^2+1}$

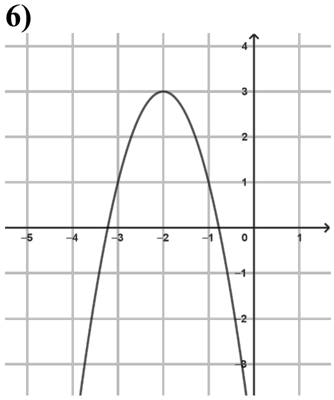
5)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (1\ ;\ 1)$
On choisit $A(0\ ;\ 4)$
On obtient :
$4 = a(0-1)^2+1$
qui donne :
$a = 3$

$\boxed{3(x-1)^2+1}$

6)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-2\ ;\ 3)$
On choisit $A(-1\ ;\ 1)$
On obtient :
$1 = a(-1+2)^2+3$
qui donne :
$a = -2$

$\boxed{-2(x+2)^2+3}$

EXERCICE N°2 *Quelques tableaux de variations* *(Le corrigé)*

Dressez le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^2+2x-7 \end{cases}$

$f_1(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=3 > 0$; $b=2$ et $c=-7$

Posons $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2\times 6} = -\dfrac{1}{3}$

et $\beta = f_1(\alpha) = -\dfrac{22}{3}$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f_1(x)$		$\searrow$	$-\frac{22}{3}$	$\nearrow$	

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -4x^2+5x-3 \end{cases}$

$f_2(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-4 < 0$; $b=5$ et $c=-3$

Posons $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{2\times(-4)} = \dfrac{5}{8}$

et $\beta = f_2(\alpha) = -\dfrac{23}{16}$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$f_2(x)$		$\nearrow$	$-\frac{23}{16}$	$\searrow$	

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2(x-3)^2+5 \end{cases}$

$f_3(x)$ est sous la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=-2 < 0$; $\alpha = 3$ et $\beta = 5$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f_3(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(x+1)(x-2) \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f_4(x) = 2(x^2-x-2) = 2x^2-2x-4$

$f_4(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=2 > 0$; $b=-2$ et $c=-4$

Posons $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$

et $\beta = f_1(\alpha) = -\dfrac{9}{2}$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$		$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

EXERCICE N°3 *Factoriser avec le discriminant* *(Le corrigé)*

Factoriser les expressions suivantes à l'aide du discriminant :

$A = 3x^2-3x-60$

Posons

$\Delta = (-3)^2-4\times 3\times(-60)$

$\Delta = 729$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{729} = 27$

Posons

$x_1 = \dfrac{-(-3)-27}{2\times 3} = -4$

et

$x_1 = \dfrac{-(-3)+27}{2\times 3} = 5$

On en déduit que :

$\boxed{A = 3(x+4)(x-5)}$

$B = -2x^2-4x+30$

Posons

$\Delta = (-4)^2-4\times(-2)\times 30$

$\Delta = 256$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$

Posons

$x_1 = \dfrac{-(-4)-16}{2\times(-2)} = 3$

et

$x_1 = \dfrac{-(-4)+16}{2\times(-2)} = -5$

On en déduit que :

$\boxed{B = -2(x+5)(x-3)}$

$C = 2x^2-4x-10{,}5$

Posons

$\Delta = (-4)^2-4\times 2\times(-10{,}5)$

$\Delta = 100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Posons

$x_1 = \dfrac{-(-4)-10}{2\times 2} = 3$

et

$x_1 = \dfrac{-(-4)+16}{2\times(-2)} = -5$

On en déduit que :

$\boxed{B = -2(x+5)(x-3)}$

EXERCICE N°4 Lien entre les racines et la forme développée réduite (Le corrigé)

La théorie :

On donne a , b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax^2+bx+c$

On note Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c et on suppose $\Delta > 0$.

On peut alors poser $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de f .

1) Simplifier les expressions suivantes :
$s = x_1+x_2$ et $p = x_1 x_2$

$$\begin{aligned} s &= x_1+x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta} + (-b)+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{s = x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}}$

$$\begin{aligned} p &= x_1 x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{s = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}}$

La pratique :

2) En remarquant que 1 est une racine évidente de $3x^2+3x-6$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que
$3x^2+3x-6 = ax^2+bx+c$ avec $a=3$; $b=3$; $c=-6$

Posons alors $x_1 = 1$, d'après la question 1)

$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ d'où $x_2 = \dfrac{-6}{3} = -2$

On en déduit que $\boxed{3x^2+3x-6 = 3(x-1)(x+2)}$

3) En remarquant que -1 est une racine évidente de $-2x^2-6x-4$ factorisez cette expression.

Avec les notations de l'exercice, on remarque que
$-2x^2-6x-4 = ax^2+bx+c$ avec $a=-2$; $b=-6$; $c=-4$

Posons alors $x_1 = -1$, d'après la question 1)

$x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}$ d'où $-1+x_2 = \dfrac{-6}{-2}$ ou encore $x_2 = 3+1 = 4$

On en déduit que $\boxed{-2x^2-6x-4 = -2(x+1)(x-4)}$