LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

I Définition et propriétés algébriques

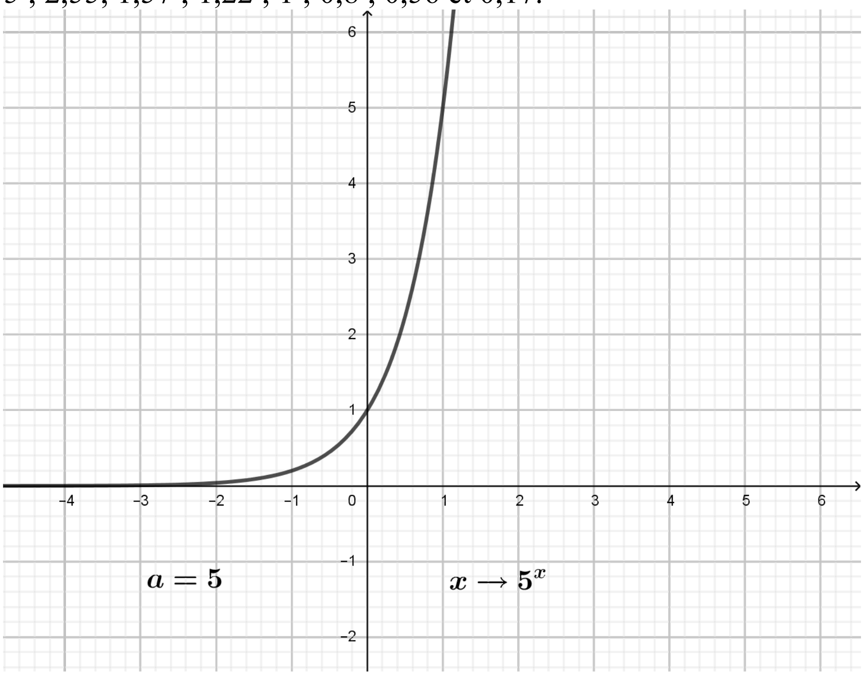
Définition n°1. ***Fonctions exponentielles de base a.***

Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \to a^x$

Exemple n°1.

Les fonctions $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 5^x \end{cases}$, $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2{,}55^x \end{cases}$, $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}57^x \end{cases}$, $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}22^x \end{cases}$, $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1^x = 1 \end{cases}$, $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}8^x \end{cases}$, $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}56^x \end{cases}$ et $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}17^x \end{cases}$ sont des fonctions exponentielles de bases respectives : 5 ; 2,55, 1,57 ; 1,22 ; 1 ; 0,8 ; 0,56 et 0,17.

Cliquez sur la figure



Remarque n°1.

Pour $a=0$, on a la fonction $f:\begin{cases}]0\ ;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to 0 \end{cases}$

Les fonctions exponentielles E01

EXERCICE N°1

Soit la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0{,}5^x$.

Calculer l'image de $\dfrac{2}{3}$ par g .

EXERCICE N°2

Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{x}$
Calculer $h(1{,}5)$ et $h(\pi)$.

EXERCICE N°3 Le lien avec les suites géométriques

Rémi place 500 € au taux annuel de $4{,}5\,\%$ pendant n années avec $0 < n < 18$.
Soit u_n le capital à l'année n .

1) Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

2) Quel est le capital de Rémi au bout de 3 ans ? De 17 ans ?

3) Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = 500 \times 1{,}045^x$

3.a) Calculer $f(1{,}5)$ et $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$

3.b) Interpréter concrètement les résultats précédents.

EXERCICE N°4

1) Représenter par un nuage de points les 5 premiers termes de la suite géométrique u de raison $r_1 = \frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

2) Représenter par un nuage de points les 5 premiers termes de la suite géométrique v de raison $r_2 = 1{,}5$ et de premier terme $v_0 = -2$.

EXERCICE N°5

1) Tracer la représentation graphique de $f:\begin{cases}]-2\ ;\ 5[\to \mathbb{R} \\ x \quad \to 1{,}5^x \end{cases}$ sur $]-2\ ;\ 5[$.

2) Tracer la représentation graphique de $f:\begin{cases}]-2\ ;\ 5[\to \mathbb{R} \\ x \quad \to -2\times 1{,}5^x \end{cases}$ sur $]-2\ ;\ 5[$.

EXERCICE N°6

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie pour tout réel x par :
$f(x) = -3 \times a^x$
Expliquer pourquoi 2 n'a pas d'antécédent par la fonction f .

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Propriété n°1. Propriétés algébriques (admises)

Soit a et b deux réels strictement positifs.
Pour tous rées x et tout réel y :

$\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}}$ $\boxed{a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}}$ $\boxed{a^x \times b^x = (a \times b)^x}$

$\boxed{(a^x)^y = a^{x \times y}}$ $\boxed{\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$ $\boxed{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$

Exemple n°2.

- $1{,}3^{2{,}3} \times 1{,}3^{0{,}7} = 1{,}3^{2{,}3+0{,}7} = 1{,}3^{3} = 2{,}197$;
- $5^{-2} = \dfrac{1}{5^{2}}$;
- $\left(4{,}37^{2{,}1}\right)^{3} = 4{,}37^{2{,}1\times 3} = 4{,}37^{6{,}3}$;
- $\dfrac{5{,}2^{3{,}1}}{5{,}2^{1{,}7}} = 5{,}2^{3{,}1-1{,}7} = 5{,}2^{1{,}4}$;
- $\dfrac{9{,}31^{4{,}3} \times 9{,}31^{-2{,}7} \times 9{,}31^{1{,}1}}{9{,}31^{-3}} = 9{,}31^{(4{,}3-2{,}7+1{,}1)-(-3)} = 9{,}31^{5{,}7}$.

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E02

EXERCICE N°1

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 0{,}89^{1{,}5} \times 0{,}89 \times 0{,}89^{-3{,}2}$ $\quad B = 3{,}5^{2{,}2} \times 2^{2{,}2} \times 0{,}5^{2{,}2}$ $\quad C = \dfrac{4{,}1^{2{,}5} \times 4{,}1^{-5{,}2}}{4{,}1^{-4{,}8} \times 4{,}1^{2{,}7}}$

$D = \pi^{2{,}8} \times \left(\pi^{-1{,}5}\right)^2$ $\quad E = \left(\left(\dfrac{9}{4}\right)^3 \times 2{,}25^{-1{,}5}\right)^{-1}$

Les fonctions exponentielles E02

EXERCICE N°2

1) Montrer que : $\dfrac{2^{2,5}\times 2^{-1,5}}{\left(2^{-3,5}\right)^{-1,5}} = 2^{-4,25}$

2) Montrer que : $5,5^{-1,2}\times\sqrt{5,5} = 5,5^{-0,7}$

3) Soit a un réel strictement positif. Montrer que : $\left(\dfrac{a^{1+0,25x}}{a^{1-0,25x}}\right)^2 = a^x$

EXERCICE N°3

On donne $f(x) = 2{,}1^x$. Simplifier le calcul : $f(1)\times f(-2{,}5)\times f(3)$

EXERCICE N°4

Soit a un réel strictement positif.

Écrire avec une seule base a l'expression : $\left(a^{0,8} \times a^{-1,3} \times a^{2,5}\right)^3$

II Sens de variation

Propriété n°2. (admise)

Soit a un réel strictement positif , et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a^x \end{cases}$

- Si $a > 1$ alors f est strictement croissante,
- si $a = 1$ alors f est constante,
- si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante.

Propriété n°3. ***(admise)***

Soit a un réel strictement positif , k un réel non nul et :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to k \times a^x \end{cases}$$

▪ Si $k > 0$ et :

- ▫ si $a > 1$ alors g est strictement croissante,
- ▫ si $a = 1$ alors g est constante,
- ▫ si $0 < a < 1$ alors g est strictement décroissante.

▪ Si $k < 0$ et :

- ▫ si $a > 1$ alors g est strictement décroissante,
- ▫ si $a = 1$ alors g est constante,
- ▫ si $0 < a < 1$ alors g est strictement croissante.

Remarque n°2.

On peut résumer cette dernière propriété de la façon suivante :
▪ Si $k > 0$ alors $x \rightarrow k \cdot a^x$ se comporte comme $x \rightarrow a^x$ et .
▪ Si $k < 0$ alors $x \rightarrow k \cdot a^x$ se comporte à l'inverse de $x \rightarrow a^x$.

Remarque n°3.

Si $k = 0$ alors la fonction $x \rightarrow k \cdot a^x$ est la fonction nulle…

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exemple n°3.

Étudions les variations des fonctions suivantes définies pour tout réel x par :

$f_1(x) = 3{,}1^x$	$f_1(x) = a^x$ avec $a=3{,}1 > 1$. Donc f_1 est strictement croissante.
$f_2(x) = 0{,}23^x$	$f_2(x) = a^x$ avec $a=0{,}23$ et $0 < a < 1$ Donc f_2 est strictement décroissante.
$f_3(x) = 4\times 3{,}1^x$	$f_3(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $a > 1$ Donc f_3 est strictement croissante.
$f_4(x) = -5\times 3{,}1^x$	$f_4(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $a > 1$ Donc f_4 est strictement décroissante.
$f_5(x) = 4\times 0{,}23^x$	$f_5(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_5 est strictement décroissante.
$f_6(x) = -5\times 0{,}23^x$	$f_6(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_6 est strictement croissante.
$f_7(x) = \dfrac{-0{,}23^x}{5}$	$f_7(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_7 est strictement croissante. ($k=-1/5$)

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E03

EXERCICE N°1

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction f définie pour tout x par :

1) $f(x) = 2{,}21^x$

2) $f(x) = 0{,}94^x$

3) $f(x) = 0{,}99^{-x}$

4) $f(x) = 1{,}001^{-x}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

5) $f(x) = 0{,}005 \times 2{,}4^x$

6) $f(x) = 4500 \times 0{,}99^x$

7) $f(x) = -3{,}2 \times 2{,}4^x$

8) $f(x) = -6{,}1 \times 0{,}4^x$

Avec ou sans le X
c'est pareil...

9) $f(x) = 2{,}3(5{,}4)^x$

10) $f(x) = 0{,}5(5{,}4)^x$

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E03

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 2\times(0{,}75)^x$.

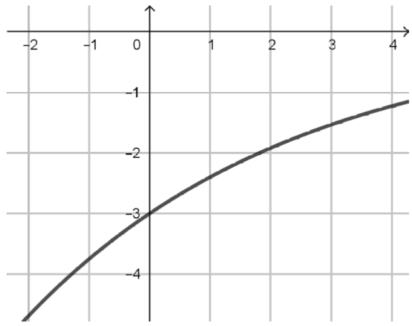
1) Calculer l'image par f de $-1{,}5$ puis $f(0)$.

2) Étudier le sens de variation de f .

$\sqrt{a}=a^{0{,}5}$

3) Montrer que la courbe représentative de f passe parle point $A(0\ ;\ 2)$ et le point $B(0{,}5\ ;\ \sqrt{3})$.

EXERCICE N°3



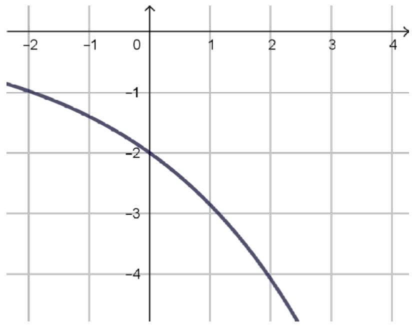
Soient k et a deux réels.

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie pour tout réel x par : $f(x)=k\,a^x$.

Quelle est l'expression de f parmi les 4 propositions suivantes. Justifier.

- $f_1(x) = 3\times 0{,}8^x$
- $f_2(x) = -3\times 0{,}8^x$
- $f_3(x) = -3\times 1{,}2^x$
- $f_4(x) = -3\times 1{,}2^{-x}$

EXERCICE N°4



Soient k et a deux réels.

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie pour tout réel x par : $f(x)=k\,a^x$.

Quelle est l'expression de f parmi les 4 propositions suivantes. Justifier.

- $f_1(x) = 2(0{,}7)^x$
- $f_2(x) = -2(0{,}7)^x$
- $f_3(x) = -2(0{,}7)^{-x}$
- $f_4(x) = 2(0{,}7)^{-x}$

III Moyenne géométrique

Définition n°2.

Soit n un entier naturel non nul et a_1 , a_2 , … , a_{n-1} , a_n des réels strictement positifs.
On appelle moyenne géométrique des a_1 , a_2 , … , a_{n-1} , a_n le nombre :
$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n)^{\frac{1}{n}}$

Exemple n°4.

La moyenne géométrique de $0{,}5$; $0{,}78$; $1{,}3$ et $1{,}78$ vaut :
$(0{,}5 \times 0{,}78 \times 1{,}3 \times 1{,}78)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}9747$ à $0{,}0001$ près .

Les fonctions exponentielles

Méthode n°1. Calculer un taux moyen d'évolution

Soit n un entier naturel non nul.
Si CM est le coefficient multiplicateur global sur n évolutions alors le taux moyen d'évolution est le réel $t=CM^{\frac{1}{n}}-1$

Exemple n°5.

On donne 5 taux d'évolutions et on veut calculer t, le taux moyen d'évolution équivalent à ces 5 évolutions.

Une hausse de 30 % ($t_1=0,3$ et $CM_1=1,3$)
Une hausse de 15 % ($t_2=0,15$ et $CM_2=1,15$)
Une baisse de 5 % ($t_3=-0,05$ et $CM_3=0,95$)
Une hausse de 10 % ($t_4=0,1$ et $CM_4=1,1$)
Une baisse de 20 % ($t_5=-0,2$ et $CM_5=0,8$)

On calcule le Coefficient Multiplicateur global CM :

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times CM_4 \times CM_5 = 1,24982$$

Ainsi :

$$t = CM^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$t = 1,24982^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,0456 \text{ à } 0,0001 \text{ près}$$

Soit une hausse d'environ $4,56\,\%$

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E04

EXERCICE N°1

1) Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 hausses de 3 %.
2) Quel est le taux d'évolution moyen équivalent à 5 augmentations de 3 %?

EXERCICE N°2

1) Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 20 augmentations de 0,5 %.
2) Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 3 baisses de 2 %.

EXERCICE N°3

1) Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à une hausse de 1 % et une baisse de 2 %.

2) Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 2 baisses de 3 % suivies d'une baisse de 2 %.

EXERCICE N°4

1) Déterminer le taux moyen équivalent à 2 augmentations de 3 % suivies de 2 diminutions de 1 %.

2) Déterminer le taux moyen équivalent à 3 baisses de 2% suivies de 3 hausses de 3 %.

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

EXERCICE N°1

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Le 1er janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P, en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.

Au bout de n mois écoulés, on a donc la suite (P_n) définie pour tout entier naturel n par : $P_n = 2 \times 1{,}03^n$.

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction P définie pour tout réel x par : $P(x) = 2 \times 1{,}03^x$.

On considère qu'un mois dure 30 jours.

Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de $P(0{,}2)$ et au bout de 15 jours $P(0{,}5)$.

1) Quelle est la nature de la suite (P_n) . Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?

3) Calculer la production le 1er février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

4) À l' aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de vaccins dépassera 4500 par jour.

EXERCICE N°2

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours.
(1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?

2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement?

3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

EXERCICE N°3

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; 8]$ par : $f(x) = 25\,000 \times 1{,}1^x$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.

2) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 8]$.

3) À l'aide de La calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

EXERCICE N°4

Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans.

Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

EXERCICE N°5

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

1) Quelle est sa population en 2020 ?

2) Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

EXERCICE N°6

On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

1) Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?

2) Donner l'expression de la fonction exponentielle de base a .

3) Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

EXERCICE N°7

Dans un pays entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction f définie pour tout réel positif t par : $f(t)=100(0{,}994)^t$
où t est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1) Calculer l'indice le 1er janvier 2015 puis le 1er mai 2017.

2) Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.