VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)***

Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet.
On prélève au hasard une lettre puis on la remet dans le sac. On répète cette épreuve 4 fois.
On gagne 10 € si on tire une voyelle et on perd 1 € si on tire une consonne.
Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

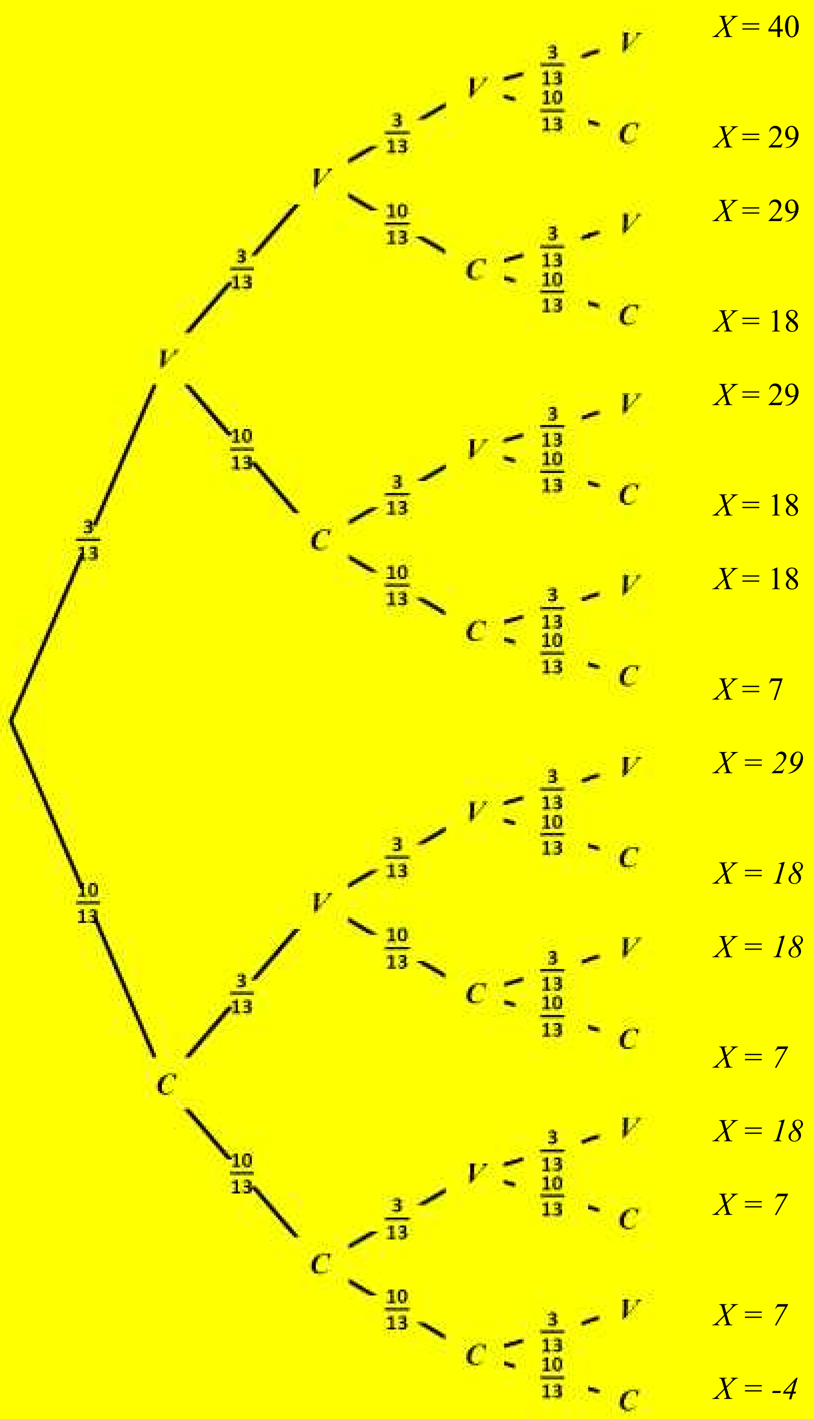
1) On note X le gain du joueur au bout des 4 tirages. Donner la loi de probabilité de X .

On note V : « On tire une voyelle » et C : « On tire une consonne »

Il y a 6 voyelles et donc 20 consonnes dans notre alphabet.

$$p(V)=\frac{6}{26}=\frac{3}{13} \quad \text{et} \quad p(C)=\frac{20}{26}=\frac{10}{13}$$

On peut alors construire l'arbre suivant :



On en déduit la loi de probabilité suivante :

x_i	-4	7	18	29	40
$p(X=x_i)$	$\left(\frac{10}{13}\right)^4$	$4\times\left(\frac{3}{13}\right)^1\times\left(\frac{10}{13}\right)^3$	$6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\times\left(\frac{10}{13}\right)^2$	$4\times\left(\frac{3}{13}\right)^3\times\left(\frac{10}{13}\right)^1$	$\left(\frac{3}{13}\right)^4$
	4 consonnes	3 consonnes et 1 voyelle	2 consonnes et 2 voyelles	1 consonne et 3 voyelles	4 voyelles

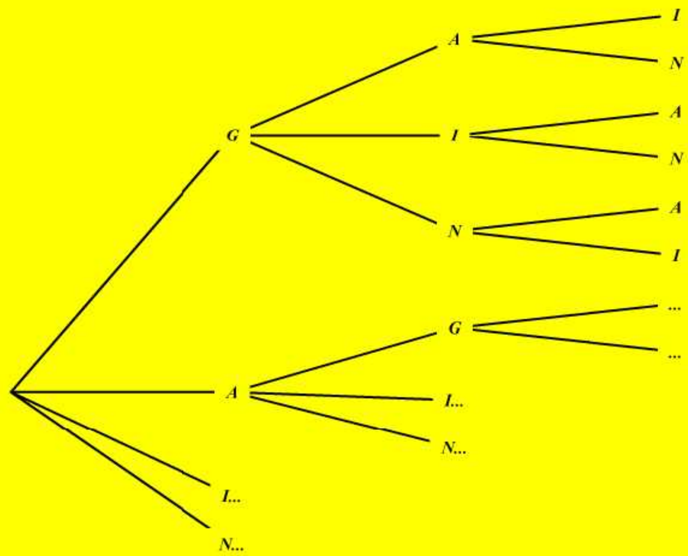
2) Si l'on peut écrire avec les lettres tirées le mot GAIN, on gagne en plus la somme de $1\,000$ € . Quelle est la somme maximale que l'on peut gagner et quelle est la probabilité de la gagner ?

La somme maximale que l'on peut gagner est $\boxed{1018\ €}$

On gagne les 1000 € du gain mais pour pouvoir écrire le mot, on a tiré 2 voyelles et 2 consonnes.

Il y a au total 26^4 tirages possibles. Il reste à dénombrer les tirages favorables, c'est à dire ceux contenant exactement un « G », un « A », un « I » et un « N » (pas nécessairement dans le bon ordre)

On peut utiliser l'arbre suivant (représenté partiellement) :



On voit qu'il y a 4 choix possibles pour la 1ère lettre, puis 3 choix possibles, puis 2 puis… 1

Les 4 premiers choix engendrent chacun 3 choix qui engendrent chacun 2 choix (qui engendrent chacun 1 choix mais ce ne pas vraiment un choix…)

On en déduit qu'il y a $4\times3\times2=24$ tirages favorables.

La probabilité de pouvoir écrire le mot « GAIN » vaut donc $\boxed{\dfrac{24}{26^4}}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Esteban hésite entre deux jeux de grattage de même prix.
Il note X la variable aléatoire associée au gain du premier ticket et Y la variable aléatoire associée au gain du deuxième ticket. Les lois de probabilité qu'il trouve sont données dans les tableaux ci-dessous.

a_i	0	1	2	50	100
$P(X=a_i)$	0,5	0,4	0,05	0,04	0,01

a_i	0	1	2	50	100
$P(Y=a_i)$	0,2	0,2	0,55	0,045	0,005

Quel est le choix de ticket à lui conseiller ? Argumenter la réponse.

On souhaite savoir ce qu'il peut espérer gagner, pour cela on va calculer l'espérance de chaque loi de probabilité.
Pour la loi suivie par X :

$$\sum_{0}^{5} a_i P(X=a_i) = 0\times0{,}5+1\times0{,}4+2\times0{,}05+50\times0{,}04+100\times0{,}01 = 3{,}5$$

Pour la loi suivie par Y :

$$\sum_{0}^{5} a_i P(Y=a_i) = 0\times0{,}2+1\times0{,}2+2\times0{,}55+50\times0{,}045+100\times0{,}005 = 4{,}05$$

L'espérance de loi suivie par Y est supérieure à celle de la loi suivie par X donc on peut lui conseiller de choisir le second ticket

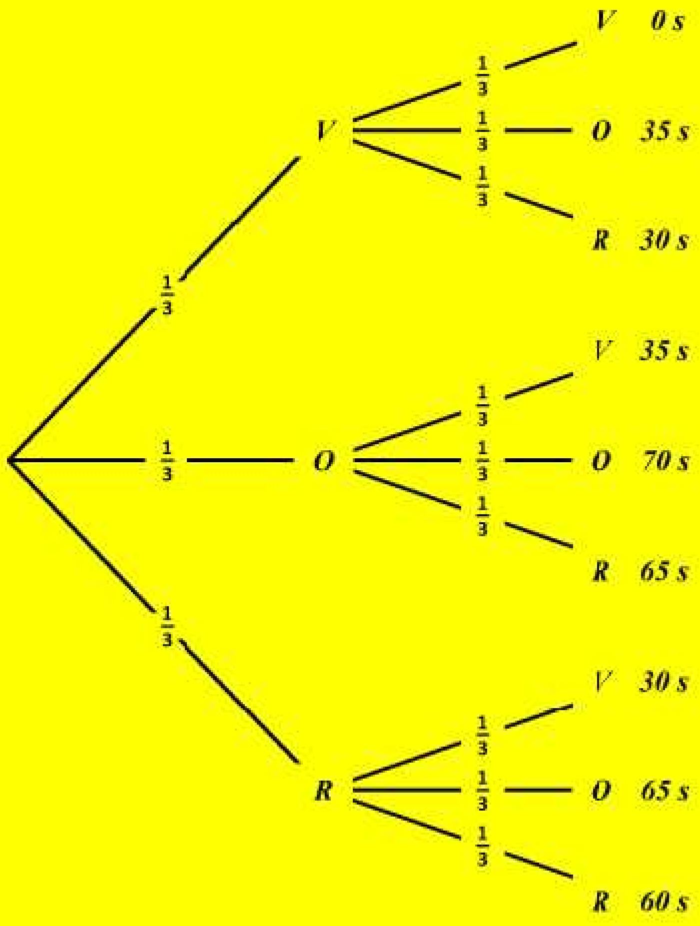
En calculant l'espérance, on calcule ici le « le gain moyen » du ticket. On peut donc affirmer ici que, **en moyenne**, le second ticket rapporte plus**.**

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Quand elle rentre de sa garde de nuit, Marlène rencontre 2 feux tricolores non synchronisés. Elle est seule sur la route et ne s'arrête que si elle rencontre un feu orange ou rouge. Les deux sont rouges pendant $30\,s$ puis verts pendant $25\,s$ et oranges pendant $5\,s$.

En moyenne, combien de temps Marlène sera-t-elle à l'arrêt ?

Pour fixer les idées, on suppose que si Marlène arrive à un feu orange ou rouge alors elle y arrive au moment où le feu change de couleur.
Représentons la situation par un arbre.
V pour le feu est vert ; O pour le feu est orange et R pour le feu est rouge :
On suppose aussi que Marlène respecte le code de la route et ne redémarrage pas après le feu orange...



Notons T la variable aléatoire prenant comme valeur les temps (en s) d'arrêts possibles.
Elle suit la loi de probabilité suivante :

t_i	0	30	35	60	65	70	Total
$p(T=t_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	

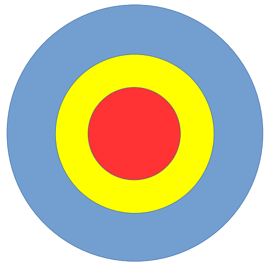
Il s'agît alors de calculer l'espérance de cette loi.

$$E(T) = 0\times\frac{1}{9}+30\times\frac{2}{9}+35\times\frac{2}{9}+60\times\frac{1}{9}+65\times\frac{2}{9}+70\times\frac{1}{9} \approx 43{,}33$$

On peut dire, qu'en moyenne, Marlène sera à l'arrêt pendant $\boxed{\text{environ } 43 \text{ s}}$

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°4 *(Le corrigé)*



Peter organise un tournoi de fléchettes pour son anniversaire, il possède la cible ci-contre où les cercles ont des rayons de 5, 10 et 20 cm. La zone rouge rapporte 100 points, la zone jaune 40 et la zone bleue 20. Si on n'atteint pas la cible, on ne gagne aucun point. Aurélia, qui n'a jamais joué, lance au hasard 2 fléchettes. On considère qu'elle atteint la cible une fois sur deux et que la probabilité qu'elle soit dans une zone colorée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1) Quelle est la probabilité qu'Aurélia gagne 40 points ?

Commençons par calculer les aires des différentes zones :

La cible en entier : $20^2\pi = 400\pi \text{ cm}^2$

La zone atteignable : $2\times400\pi = 800\pi \text{ cm}^2$

Comme la fléchette atteint la cible une fois sur deux, on peut considérer que cette dernière représente la moitié de la surface atteignable.

Zone Bleue : $20^2\pi - 10^2\pi = 300\pi \text{ cm}^2$

Zone Jaune : $10^2\pi - 5^2\pi = 75\pi \text{ cm}^2$

Zone Rouge : $5^2\pi = 25\pi \text{ cm}^2$

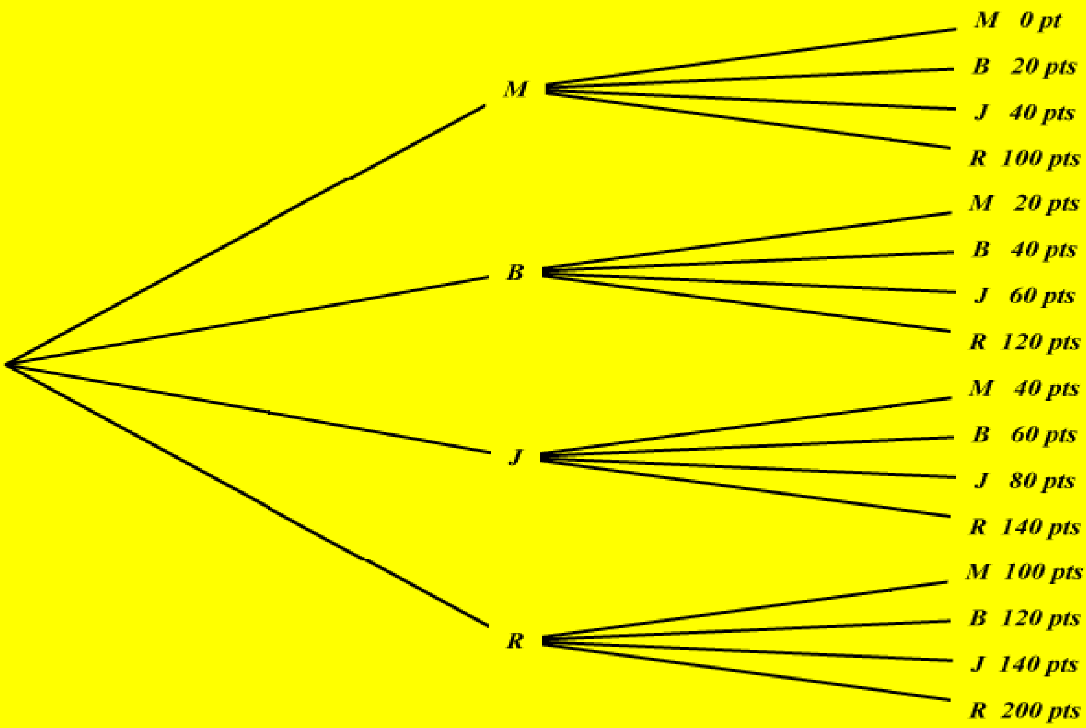
Représentons la situation à l'aide d'un arbre :

M La fléchette va dans le mur et $p(M) = \dfrac{1}{2}$

B La fléchette se plante en zone Bleue et $p(B) = \dfrac{300\pi}{800\pi} = \dfrac{3}{8}$

J La fléchette se plante en zone Jaune et $p(J) = \dfrac{75\pi}{800\pi} = \dfrac{3}{32}$

R La fléchette se plante en zone Rouge et $p(R) = \dfrac{25\pi}{800\pi} = \dfrac{1}{32}$



Notons S la variable aléatoire donnant le score (en pts).

Elle suit la loi de probabilité suivante :

s_i	0	20	40	60	80	100	120	140	200	Total
$p(S=s_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{1024}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{3}{512}$	$\frac{1}{1024}$	1

On lit que $\boxed{P(S=40) = \frac{15}{64}}$

- Pour 0 pt :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{1 branche : M , M}} = \frac{1}{4}$$

- Pour 20 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche M , B}} + \underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche B , M}} = 2\times\frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

- Pour 40 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche M , J}} + \underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche J , M}} + \underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche B , B}} = 2\times\frac{3}{16} = \frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{9}{64}=\frac{15}{64}$$

- Pour 60 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{300\,\pi}{400\,\pi} \times \frac{1}{2}\times\frac{75\,\pi}{400\,\pi}}_{\text{branche B , J}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{75\,\pi}{400\,\pi} \times \frac{1}{2}\times\frac{300\,\pi}{400\,\pi}}_{\text{branche J , B}} = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{16}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{128}$$

- Pour 80 pts :

$$\underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche J , J}} = \frac{9}{1024}$$

- Pour 100 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche M , R}} + \underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche R , M}} = 2\times\frac{1}{64} = \frac{1}{32}$$

- Pour 120 pts :

$$\underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche B , R}} + \underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche R , B}} = \frac{3}{128}$$

- Pour 140 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche R , J}} + \underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche J , R}} = \frac{3}{512}$$

- Pour 200 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche R , R}} = \frac{1}{1024}$$

2) Combien de points Aurélia peut-elle espérer avoir en moyenne ?

Il s'agit de calculer l'espérance de la loi que nous avons définie à la question 1).

$$E(S)=0\times\frac{1}{4}+20\times\frac{3}{8}+40\times\frac{15}{64}+60\times\frac{9}{128}+80\times\frac{9}{1024}+100\times\frac{1}{32}+120\times\frac{3}{128}+140\times\frac{3}{512}+200\times\frac{1}{1024}$$

$$= 28{,}75$$

Aurélia peut espérer avoir $\boxed{28{,}75 \text{ pts en moyenne}}$.

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°5 *Problème ouvert* (*Le corrigé*)

Zoé tape au hasard sur les touches A, Z ou E de l'ordinateur toutes les secondes.

On note T_1 le temps moyen pendant lequel Zoé doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAE et T_2 le temps moyen pendant lequel elle doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAZ. A-t-on $T_1 = T_2$?

Ici, la grande différence avec les exercices précédents est que nous ne connaissons pas le nombre de touches à l'avance. Cela signifie que l'on ne connaît pas la taille de l'arbre. On ne peut donc pas construire une loi et calculer son espérance comme on l'a fait précédemment.

On va plutôt utiliser un théorème que l'on cite en seconde pour justifier que les fréquences tendent à s'approcher des probabilités : La loi faible des grands nombres

L'idée est d'utiliser l'informatique afin de simuler l'expérience un grand nombre de fois afin d'obtenir des temps moyens et de les comparer si cela est possible.

Le script suivant (téléchargeable en cliquant dessus) nous donne accès à la fonction « moyenne_sur »

```
from random import randint

alphabet = ['A','E','Z']



def tirage_lettre():
    """tire une lettre au hasard"""
    numero = randint(0,2)
    return alphabet[numero]


def simulation(mot):
    """ mot est une chaine de caractere donc à mettre entre guillemets"""
    lemot=mot.upper()
    tirage=""

    while not(lemot in tirage):
        tirage += tirage_lettre()
    return len(tirage)

def moyenne_sur(nb_simulations,mot):
    """nb_simulations est un entier non nul et mot une chaine de cararacteres"""
    moyenne = 0
    for i in range(nb_simulations):
        moyenne += simulation(mot)/nb_simulations
    return moyenne
```

Cette fonction a donné les résultats suivants (faites votre propres tests pour confirmer ou infirmer notre réponse à venir).

```
>>> moyenne_sur(100000,'zaz')
29.908369999999312
>>> moyenne_sur(100000,'zae')
27.025239999999524
>>> moyenne_sur(100000,'zaz')
29.940629999999373
>>> moyenne_sur(100000,'zae')
27.077599999999944
>>> moyenne_sur(100000,'zaz')
30.031739999999975
>>> moyenne_sur(1000000,'zae')
26.982663000033252
>>> moyenne_sur(1000000,'zaz')
30.0003870000348
>>> 
```

Il semble que $T_1 < T_2$

VARIABLES ALÉATOIRES E05

EXERCICE N°1

Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet.
On prélève au hasard une lettre puis on la remet dans le sac. On répète cette épreuve 4 fois.
On gagne 10 € si on tire une voyelle et on perd 1 € si on tire une consonne.
Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

1) On note X le gain du joueur au bout des 4 tirages. Donner la loi de probabilité de X .

2) Si l'on peut écrire avec les lettres tirées le mot GAIN, on gagne en plus la somme de $1\,000$ € . Quelle est la somme maximale que l'on peut gagner et quelle est la probabilité de la gagner ?

EXERCICE N°2

Esteban hésite entre deux jeux de grattage de même prix.
Il note X la variable aléatoire associée au gain du premier ticket et Y la variable aléatoire associée au gain du deuxième ticket. Les lois de probabilité qu'il trouve sont données dans les tableaux ci-dessous.

a_i	0	1	2	50	100
$P(X=a_i)$	0,5	0,4	0,05	0,04	0,01

a_i	0	1	2	50	100
$P(Y=a_i)$	0,2	0,2	0,55	0,045	0,005

Quel est le choix de ticket à lui conseiller ? Argumenter la réponse.

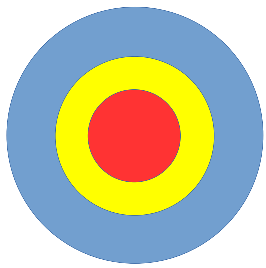
EXERCICE N°3

Quand elle rentre de sa garde de nuit, Marlène rencontre 2 feux tricolores non synchronisés. Elle est seule sur la route et ne s'arrête que si elle rencontre un feu orange ou rouge. Les deux sont rouges pendant $30\,s$ puis verts pendant $25\,s$ et oranges pendant $5\,s$.

En moyenne, combien de temps Marlène sera-t-elle à l'arrêt ?

EXERCICE N°4

Peter organise un tournoi de fléchettes pour son anniversaire, il possède la cible ci-contre où les cercles ont des rayons de 5, 10 et 20 cm.
La zone rouge rapporte 100 points, la zone jaune 40 et la zone bleue 20. Si on n'atteint pas la cible, on ne gagne aucun point.
Aurélia, qui n'a jamais joué, lance au hasard 2 fléchettes. On considère qu'elle atteint la cible une fois sur deux et que la probabilité qu'elle soit dans une zone colorée est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1) Quelle est la probabilité qu'Aurélia gagne 40 points ?

2) Combien de points Aurélia peut-elle espérer avoir en moyenne ?

EXERCICE N°5 *Problème ouvert*

Zoé tape au hasard sur les touches A, Z ou E de l'ordinateur toutes les secondes.
On note T_1 le temps moyen pendant lequel Zoé doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAE et T_2 le temps moyen pendant lequel elle doit taper sur les touches avant d'obtenir la suite de lettres ZAZ.
A-t-on $T_1=T_2$?