LES PUISSANCES

I Les bases

Définition n°1.

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

et

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}}$$

En particulier, $a^1=a$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$ et par convention $a^0=1$.

Exemple n°1.

$2^3 = 2\times2\times2 = 8$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-5{,}1)^1=-5{,}1$

$(-5{,}1)^{-1}=\frac{1}{-5{,}1}$ et $(-5{,}1)^0=1$.

Remarque n°1. ***Attention***

$(-7)^4 = (-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = 2401$

alors que :

$-7^4 = -7\times7\times7\times7 = -2401$

II Puissances et propriétés

Propriété n°1. ***Puissances et signes***

Pour tout nombre entier relatif n :

▪ Si a est positif alors a^n est positif.

▪ Si a est négatif alors a^n est positif lorsque l'exposant n est pair, et négatif lorsque l'exposant n est impair.

Remarque n°2.

Cette propriété découle de la règle des signes.

Exemple n°2.

$7{,}1^4$, $7{,}1^{-6}$, $7{,}1^3$ et 7^{-5} sont tous positifs car 7,1 est positif.

$(-7{,}1)^4$ et $(-7{,}1)^{-6}$ sont positifs car 4 et -6 sont pairs

$(-7{,}1)^3$ et $(-7{,}1)^{-5}$ sont négatifs car 3 et -5 sont impairs

Propriété n°2. ***Puissances et opérations***

Soient a et b des nombres réels non nuls et m et n des entiers relatifs.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\times n}$

$(a\times b)^n = a^n \times b^n$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Remarque n°3.

Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition. Elles restent valables pour a et b des réels positifs et m et n des réels, mais la preuve est plus délicate.

Exemple n°3.

$(-2{,}1)^{10}\times(-2{,}1)^{-3} = (-2{,}1)^{10+(-3)} = (-2{,}1)^7$

$30^2 = (3\times 10)^2 = 3^2\times 10^2 = 9\times 100 = 900$

III Écriture scientifique

Définition n°2.

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{a\times 10^n}$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est à dire ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un nombre entier relatif.

▪ Le nombre a est appelé : **mantisse**.

▪ 10^n est l'**ordre de grandeur** du nombre.

Exemple n°4.

▪ $678\,000\,000 = 6{,}78\times 10^8$

Mantisse : 6,78

Ordre de grandeur : 10^8

▪ $0{,}000\,007\,896 = 7{,}896\times 10^{-6}$

Mantisse : 7,896

Ordre de grandeur : 10^{-6}

▪ $-450\,000\,000 = -4{,}5\times 10^8$

Mantisse : $-4{,}5$

Ordre de grandeur : 10^8

Remarque n°4. ***Attention***

$45{,}321\times 10^8$ n'est pas une écriture scientifique

$0{,}758\times 10^8$ n'est pas non plus une écriture scientifique.