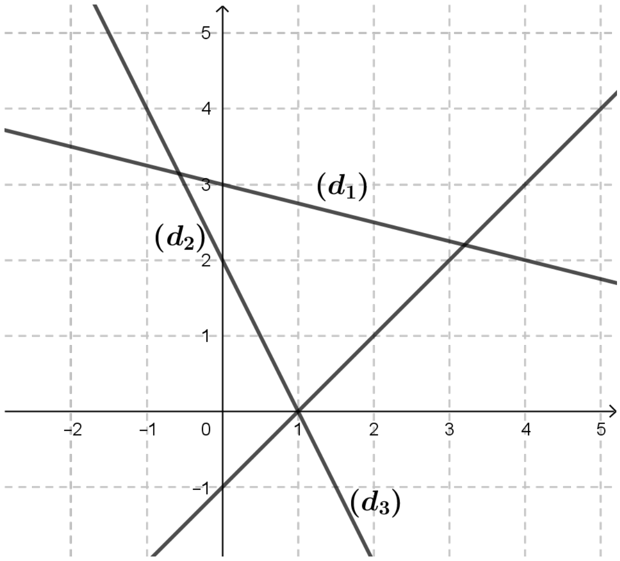
FONCTIONS PART2 A01

EXERCICE N°1

1) Dans un repère du plan, une droite passe par les points $A(2\ ;\ -1)$ et $B(5\ ;\ 5)$
Déterminer l'équation de la droite (AB)

2) Déterminer l'équation réduite des $(d_1),(d_2)$ et (d_3) ci-contre.



EXERCICE N°2

Pour chacune des équations de droites suivantes, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

$(d_1) : y = 2x - 3$ $\qquad$ $(d_2) : y = -x + 4$ $\qquad$ $(d_3) : y = 2 - 4x$ $\qquad$ $(d4) : y = \dfrac{2x+8}{3}$

EXERCICE N°3

Dans un repère orthonormé du plan, tracer :

1) La droite (d_1) passant par le point $A(-1\ ;\ 2)$ et de coefficient directeur -2 .

2) La droite (d_2) passant par le point $B(2\ ;\ -3)$ et de coefficient directeur 3 .

3) La droite (d_3) passant par le point $C(0\ ;\ -5)$ et de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$.

EXERCICE N°4

1) Dans un repère du plan, placer les points $A(-2\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 1)$ et $C(4\ ;\ 6)$.

2) Tracer les droites (AB), (AC) et (BC) .

3) Déterminer graphiquement les équations des droites (AB), (AC) et (BC).

FONCTIONS PART2

I Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

Définition n°1.

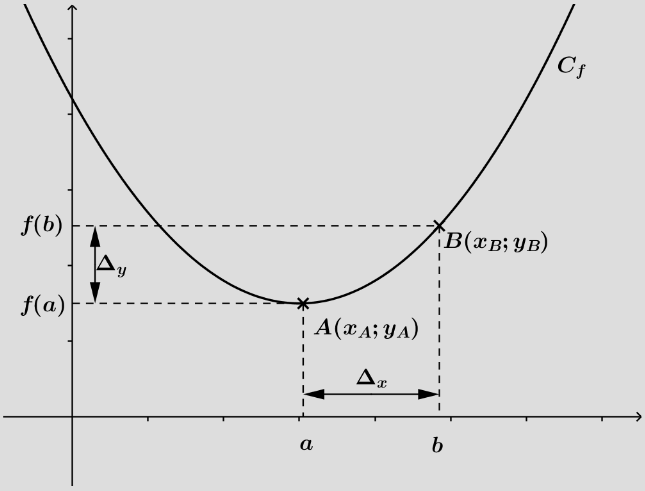
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b appartenant à I. On appelle taux de variation entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

FONCTIONS PART2

Remarque n°1.

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

FONCTIONS PART2

Remarque n°2.

Le taux de variation entre a et b est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

Définition n°2.

La droite (AB) est une sécante à la courbe C_f passant par A.

Remarque n°4.

On aurait pu faire la même phrase avec B mais dans la suite on va « fixer » A et « faire varier » B.

FONCTIONS PART2

II Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points A et B sont proches l'un de l'autre. L'intérêt de cette remarque étant qu'il est facile d'étudier le comportement d'un droite… geogebra

Définition n°3. (un peu hors programme...)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de f en a et on note si cela existe :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

FONCTIONS PART2

Remarque n°5. Nombre dérivé d'une fonction f en a.

La notion de limite n'étant pas au programme, on se contentera de dire que :
$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

FONCTIONS PART2

Exemple n°1.

Soit $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2+5 \end{cases}$, déterminons le nombre dérivé de f en 3.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

On faisant « tendre h vers 0 » , on obtient 6.

Donc $f'(3)=6$.

FONCTIONS PART2 E01

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définir sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-2x+1$.

1) Calculer $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

2) En déduire $f'(0)$.

3) Interpréter graphiquement ce nombre.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définir sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+6$.

1) Montrer que $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2$.

2) En déduire la valeur de $f'(3)$. Ce résultat était-il prévisible ?

3) Sans faire de calcul, donner les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(5)$

4) Soit la fonction g définir sur $\mathbb{R}$ $g(x)=5x-17$. Donner les valeurs de $g'(-1)$ et $g'(3)$.

FONCTIONS PART2 E01

EXERCICE N°3

1) Compléter le programme suivant puis expliquer ce qu'il permet de calculer.

```
def taux_de_variation(f,x1,x2):
    """retourne le taux de variation de
    la fonction f entre les valeurs x1 et x2"""
    return ...

def f(x) :
    return x**2

print(taux_de_variation(f,1,5))
```

2) On appelle maintenant la fonction précédente de la façon suivante :

```
>>> h=0.00001
>>> print(taux_de_variation(f,1,1+h))
```

Quel nombre ce script permet-il d'approcher ?

3) Modifier le programme précédent pour qu'il affiche le nombre dérivé $f'(2)$ où f est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-x+7$

FONCTIONS PART2

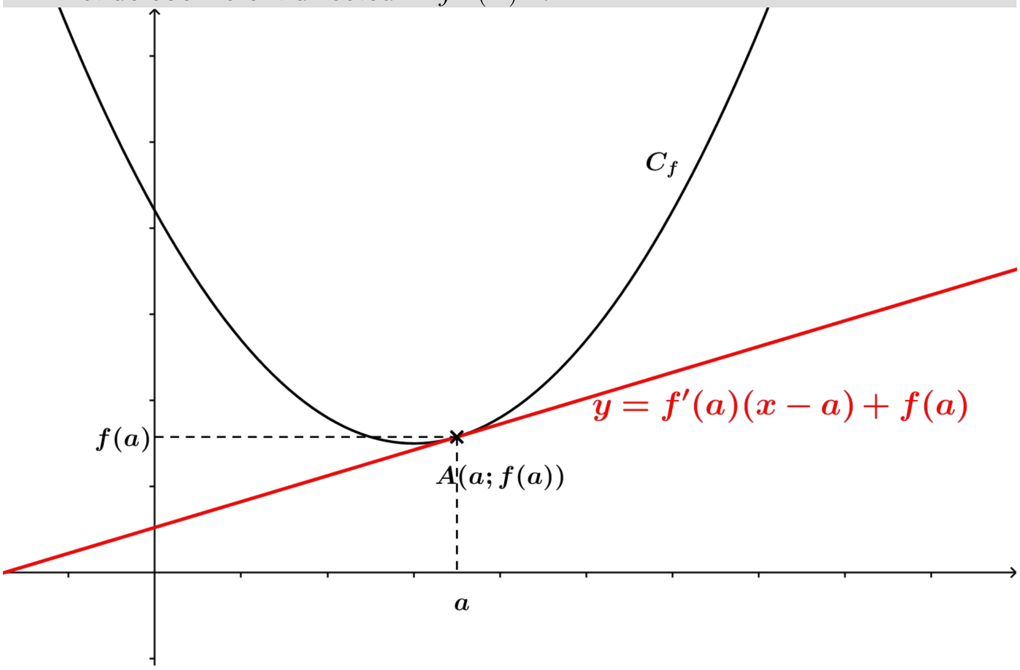
III Tangente à la courbe C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°4, nous allons faire « tendre B vers A » et notre sécante va devenir une tangente.
En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$, on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre, quand h tend vers 0 , vers $f'(a)$.

FONCTIONS PART2

Définition n°4.

La tangente T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque n°6.

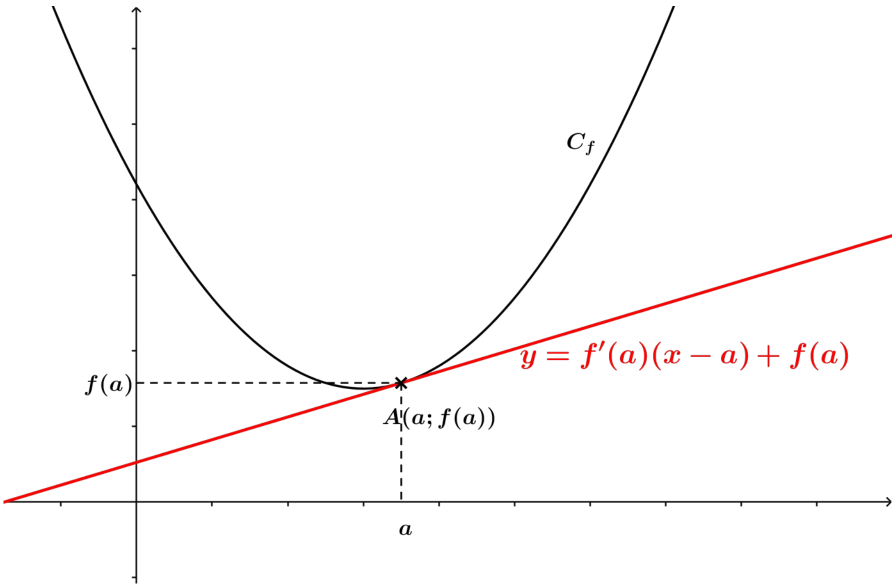
Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à C_f , on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de C_f peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-a\,f'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

FONCTIONS PART2

Propriété n°1. Équation de la tangente

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



FONCTIONS PART2 E02

EXERCICE N°1

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

1) Lire graphiquement $g(-2)$.

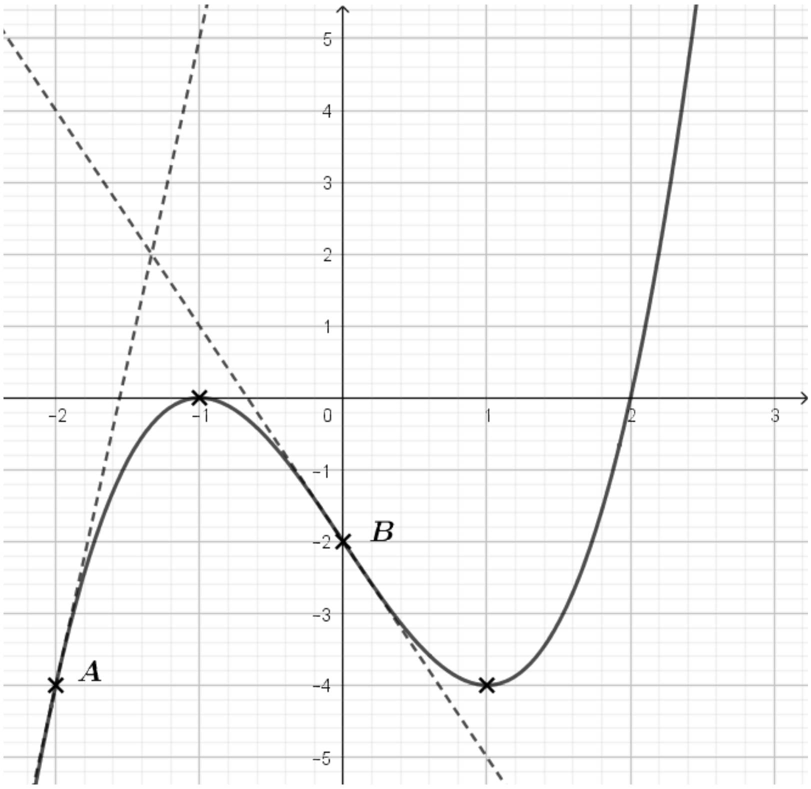
2) Lire graphiquement l'image de 0 par la fonction g.

3) Lire graphiquement $g'(-2)$.

4) Lire graphiquement le nombre dérivé de g en $x=0$.

5) Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x=-2$.

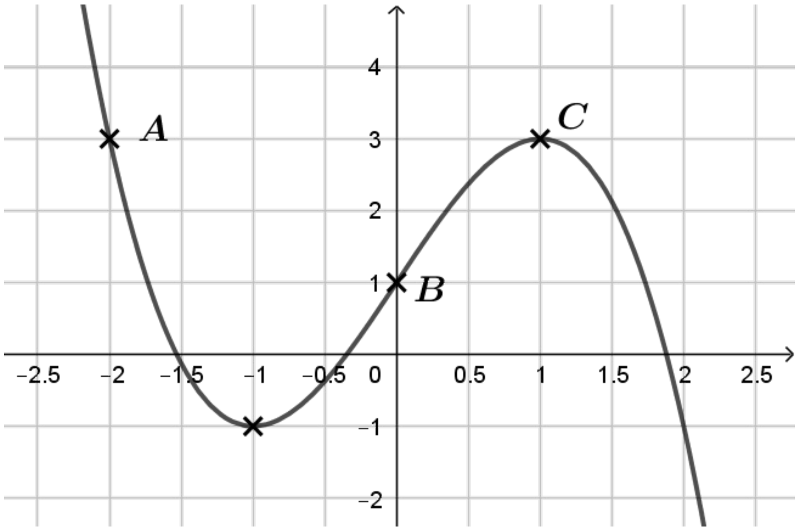
6) Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point B.



FONCTIONS PART2 E02

EXERCICE N°2

On donne la courbe représentative d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$. On note C_h cette courbe.



1) Tracer approximativement la tangente à C_h au point A.

2) Tracer approximativement la tangente à C_h au point C.

3) Sachant que $h'(0)=3$, tracer précisément la tangente à C_h au point B.

FONCTIONS PART2

IV Fonction dérivée d'une fonction

Définition n°5.

$f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel x appartenant à l'intérieur de I , $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intérieur de I et on appelle fonction dérivée de f , la fonction notée f' définie par

$f' := \begin{cases} \mathring{I} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$

FONCTIONS PART2

Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f:=\begin{cases}\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\\ x\rightarrow x^2+5\end{cases}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$. Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h}=2x+h$$

En faisant « tendre h vers 0 » , on obtient $2x$.

Ainsi $f'(x)=2x$.

Ceci étant valable pour tout réel x , nous venons de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f':=\begin{cases}\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\\ x\rightarrow 2x\end{cases}$

FONCTIONS PART2

IV.1 Quelques fonctions dérivées de référence

Remarque n°7. Fonction dérivée d'une fonction constante

Si f est une fonction constante sur I, autrement dit pour tout $x \in I$ $f(x)=k$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors :

$f(x+h)-f(x)=k-k=0$ pour tout h, on en déduit que $f'(x)=0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Remarque n°8. ***Fonction dérivée de la fonction identité***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x \end{cases}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

FONCTIONS PART2

Propriété n°2. Fonction dérivée de la fonction carré

Si $f \coloneqq \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ alors $f' \coloneqq \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2x \end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « h tend vers 0 » .

FONCTIONS PART2

Propriété n°3. ***Fonctions dérivée de la fonction cube***

Si $f \coloneqq \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^3 \end{cases}$ alors $f' \coloneqq \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 3x^2 \end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

qui « tend vers $3x^2$ » quand « h tend vers 0 » .

IV.2 Quelques opérations sur les fonctions dérivées

Propriété n°4. Linéarité de la dérivation

Soient $f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ et $g := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to g(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

La fonction dérivée de la fonction $af + bg$ est :

$$(af+bg)' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to a\, f'(x) + b\, g'(x) \end{cases}$$

preuve :

$$\begin{aligned} \frac{(af+bg)(x+h)-(af+bg)(x)}{h} &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-(af(x)+bg(x))}{h} \\ &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h)-af(x)+bg(x+h)-bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h)-af(x)}{h} + \frac{bg(x+h)-bg(x)}{h} \\ &= a\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + b\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \end{aligned}$$

qui tend vers $af'(x)+bg'(x)$ quand h tend vers zéro.

Grâce aux remarques n°7 et 8 ainsi qu'aux propriétés n°2,3 et 4 nous obtenons le formulaire suivant :

V Un formulaire à connaître

Propriété n°5.

Dans ce tableau k , a , b , c et d sont des nombres.

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$a\times 3x^2 + b\times 2x + c$

Exemple n°3.

On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+11x+7$ et déterminons l'expression de sa fonction dérivée.

$$f'(x)=4\times 3x^2 - 5\times 2x + 11$$
$$=12x^2-10x+11$$

Fonctions part2 E03

EXERCICE N°1

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer leur fonction dérivée.

1) $f_1(x)=5$; $f_2(x)=\frac{15}{7}$; $f_3(x)=\sqrt{3}$; $f_4(x)=2\pi$; $f_5(x)=-3\pi+5\sqrt{3}$

2) $g_1(x)=x+2$; $g_2(x)=x+3\pi\sqrt{7}$

3) $g_3(x)=4x+5$; $g_4(x)=\sqrt{7}x+8{,}5$; $g_5(x)=\frac{4}{3}x-8\sqrt{3}$; $g_6(x)=\frac{8}{7}-4x$

4) $h_1(x)=3x^2-4$; $h_2(x)=4x^2+5x-1$; $h_3(x)=-2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

5) $h_4(x)=\frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5(x)=-\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$

6) $h_6(x)=(3x+4)(2x-7)$; $h_7(x)=(7-2x)^2$

FONCTIONS PART2 E03

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-6x^2+4x+1$. On note C_f sa courbe représentative.

1) Calculer $f'(2)$.

2) Déterminer le nombre dérivé de f en $a:=3$

3) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

FONCTIONS PART2 E03

EXERCICE N°3

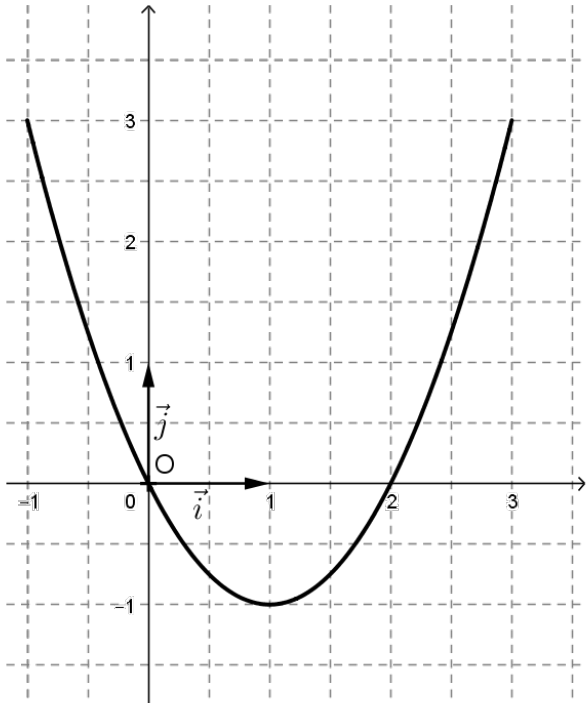
Pour chacune des fonctions f_i suivantes, déterminer une équation de la tangente (d_i) à la courbe représentative C_{f_i} au point d'abscisse a puis la tracer d'un repère orthonormé.

1) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=-x^2-x+2$ et $a:=-2$

2) Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=x^3-3x+2$ et $a:=0{,}5$

EXERCICE N°4

Le plan est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 1 cm).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$ dont on donne la courbe représentative C_f ci-contre.



1) Reproduire soigneusement cette figure sur votre cahier.

2) On admet que la courbe C_f admet la tangente T_1 au point $O(0 ; 0)$ et que $f'(0)=-2$.
Construire la tangente T_1 .

3) On admet que la courbe C_f admet la tangente T_2 au point $S(1 ; -1)$ et que $f'(1)=0$.
Construire la tangente T_2 .

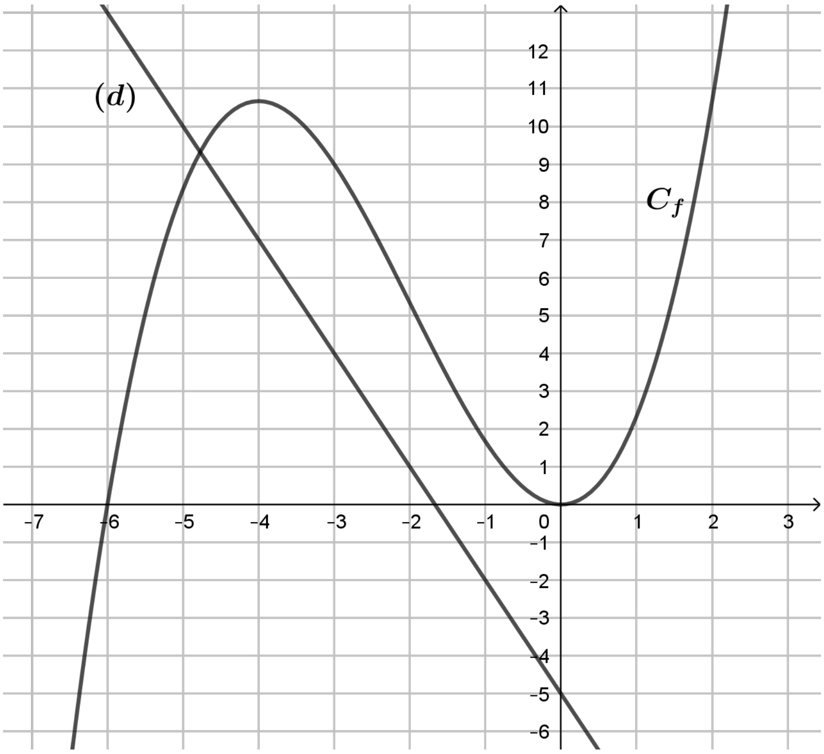
4) On admet que la courbe C_f admet la tangente T_3 au point $A(2 ; 0)$ et que $f'(2)=2$.
Construire la tangente T_3 .

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2$.

1) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y=-3x-5$?

2) Si oui, déterminer les coordonnées des points en lesquels C_f admet ces tangentes.



EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie par: $f(x)=-3x^2+10x-4$
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Existe-t-il des tangentes à C_f de coefficient directeur -2 ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de C_f où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

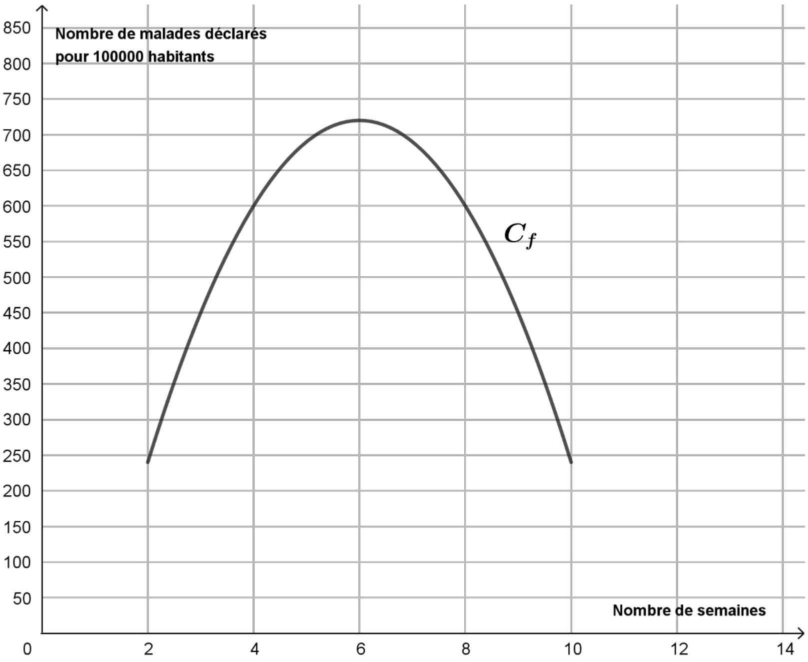
2) Existe-t-il des tangentes à C_f de coefficient directeur 4 ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de C_f où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

3) Tracer la courbe représentative de ainsi que les tangentes considérées précédemment.

EXERCICE N°3

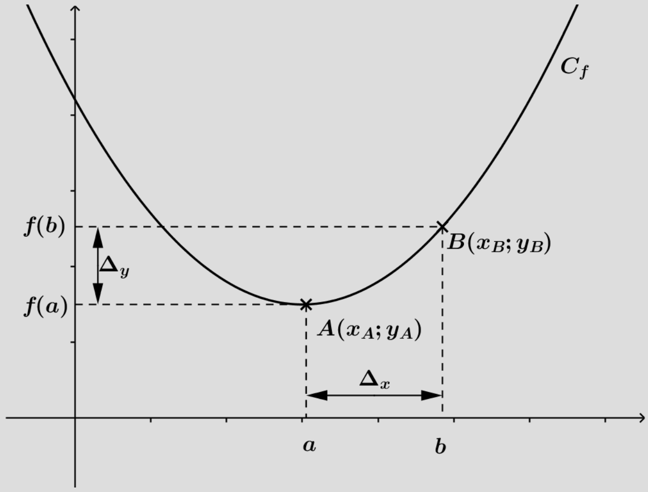
Lors d'une épidémie de grippe, on s'intéresse au nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout d'un certain nombre x de semaines
On admet que la fonction f définie sur $[2 ; 10]$ $f(x)=-30x^2+360x-360$ modélise ce nombre de malades.
On note C_f sa courbe représentative donnée ci-contre :



1) Selon ce modèle, au bout de combien de semaine le pic de l'épidémie a-t-il été atteint?
2) Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur à 600.
3) Calculer $f'(x)$, puis calculer le nombre dérivé de f en 3 .
4) On considère que le nombre dérivé $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de x semaines. La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de 3 semaines ou de 4 semaines?
collegue

VI Le résumé du cours

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



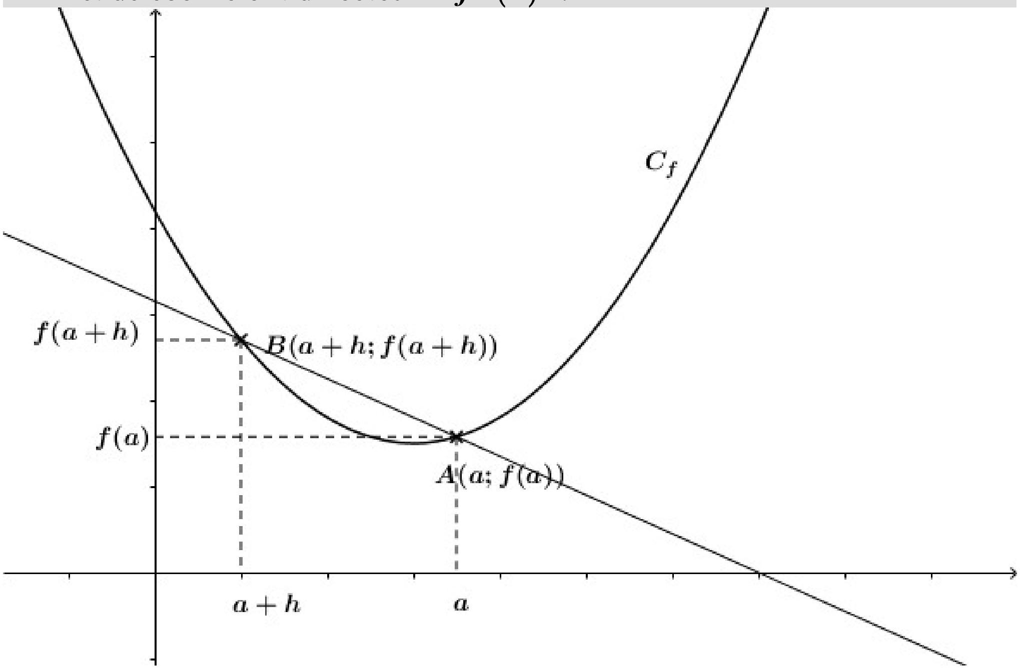
taux de variation : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$

où $\Delta_y = y_B - y_A$ et $\Delta_x = x_B - x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

La **tangente** T à C_f au point $A(a ; f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $f'(a)$.

Équation de la tangente en *a*

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$



Si f et g sont dérivables sur un intervalle I alors $f+g$ aussi et $(f+g)' = f' + g'$

Si f est dérivable sur un intervalle I et si $k \in \mathbb{R}$ alors $k f$ est dérivable sur I et $(k f)' = k f'$

À connaître par cœur

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$a x^3 + b x^2 + c x + d$	$a \times 3x^2 + b \times 2x + c$