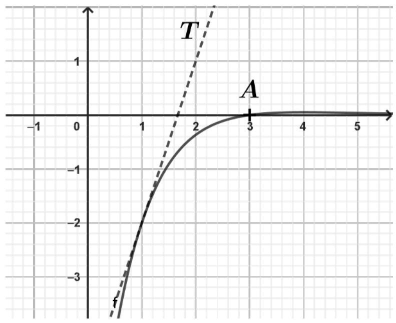
LA FONCTION EXPONENTIELLE E04C

EXERCICE N°1

On considère une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ où a et b sont deux réels.

Sa courbe représentative C_f a été tracée dans le repère ci-contre. C_f passe par le point $A(3\ ;\ 0)$ et la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 a été tracée dans le repère.



1) Déterminer la valeur de a et de b.

Pour $x \in \mathbb{R}$,
d'une part,

$$A \in C_f \Leftrightarrow f(3) = 0 \Leftrightarrow \frac{3a+b}{e^{-3}} = 0 \Leftrightarrow 3a+b = 0$$

et d'autre part,
Par lecture graphique, on obtient le point B .

$$B(1\ ;\ -2) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{a\times1+b}{e^1} = -2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{e} = -2 \Leftrightarrow a+b = -2e$$

Il s'agit donc de résoudre le système $\begin{cases} 3a+b = 0 \\ a+b = -2e \end{cases}$.

En notant S son ensemble des solutions.

$$(a\ ;\ b) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b = 0 \\ a+b = -2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a-3a = -2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ -2a = -2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3e \\ a = e \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{a = e}$ et $\boxed{b = -3e}$

2) Étudier les variations de la fonction f.

La fonction f est le quotient d'une fonction affine et de la fonction exponentielle qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ex-3e}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = ex-3e$ et $u'(x) = e$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$$f'(x) = \frac{e\times e^x-(ex-3e)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{(-ex+4e)e^x}{e^{2x}}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $-ex+4e > 0 \Leftrightarrow -ex > -4e \Leftrightarrow x < 4$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

▫ $e^{2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-ex+4e$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$			$+$	
e^{2x}		$+$			$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	0

$$f(4) = \frac{e\times 4-3e}{e^4} = \frac{e}{e^4} = e^{-3}$$

3) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

La formule de la tangente nous donne comme équation :

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

Or :

$$f(0) = \frac{e\times 0-3e}{e^0} = -3e$$

et

$$f'(0) = \frac{(-e\times 0+4e)e^0}{e^{2\times 0}} = 4e$$

On obtient :

$$\boxed{y = 4ex-3e}$$

EXERCICE N°2 Avec des suites

Donner la nature et la raison des suites ci-dessous.

1) (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^n$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e}$ et de 1er terme $\boxed{u_0 = 1}$

2) (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = e^{-6n}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e^{-6}}$ et de 1er terme $\boxed{v_0 = 1}$

3) (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2e^{3n}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e^{3}}$ et de 1er terme $\boxed{w_0 = 2}$

4) (r_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = e^2 n$

Attention à ne pas aller trop vite : $e^2 n \neq e^{2n}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{arithmétique de raison } e^{2}}$ et de 1er terme $\boxed{r_0 = 0}$

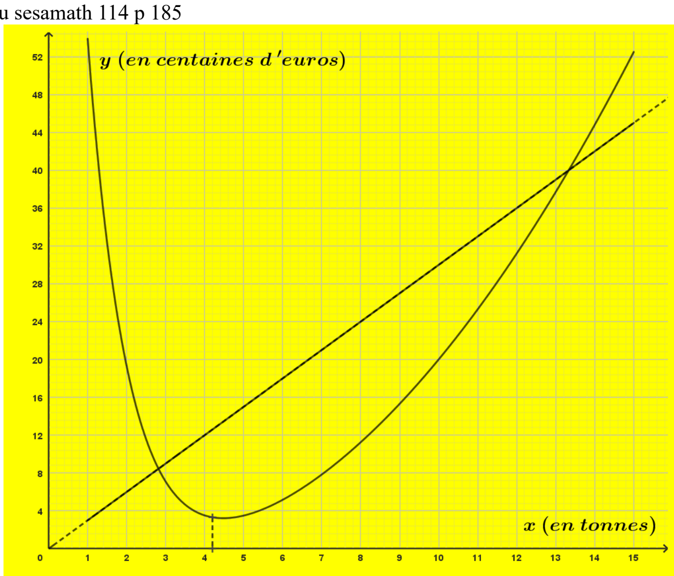
5) (t_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = 4+e^5 n$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{arithmétique de raison } e^{5}}$ et de 1er terme $\boxed{t_0 = 4}$

EXERCICE N°3 *Du concret : optimisation et lecture graphique*

Extrait du sesamath 114 p 185

L'entreprise BBE (Bio Bois Énergie) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.
Les coûts de fabrications sont modélisés par une fonction C définie sur $[1\ ;\ 15]$ par $\boldsymbol{C(x)=0,3x^2-x+e^{-x+5}}$ où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
Pour cette entreprise, le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.



1) Déterminer la recette $R(x)$ en centaines d'euros obtenues pour x tonnes de granulés vendus.

Chaque tonne se vend 3 centaines d'euros. Donc :

$\boxed{R(x)\ =\ 3x}$

2) Calculer les coûts de production pour 5 tonnes de granulés produites.

Il s'agit de calculer $C(5)$.

$C(5)\ =\ 0{,}3\times5^2-5+e^{-5+5}\ =\ 0{,}3\times25-5+e^0\ =\ 7{,}5-5+1$

$\boxed{C(5)\ =\ 3{,}5}$

Ainsi, produire 5 tonnes coûte $\boxed{350\ \text{euros}}$.

Ne pas oublier de revenir au unités de l'énoncé.

3) On donne dans le graphique ci-après les représentations graphiques des fonctions C et R.

3.a) Associer chaque courbe à sa fonction.

R est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est la droite. Par conséquent, la fonction C est représentée par l'autre courbe.

3.b) Déterminer graphiquement pour quelle quantité de granulés le coût quotidien est minimal.

Graphiquement, le minimum de la fonction C semble être atteint pour $x\ =\ 4{,}2$.

Donc il semble que la quantité à produire soit $\boxed{4{,}2\ \text{tonnes}}$

On accepte n'importe quelle valeur entre 4,1 et 4,7.

3.c) Déterminer le bénéfice réalisé pour 6 tonnes fabriquées et vendues.

Le bénéfice s'obtient en enlevant à la recette les coûts de production. Vous devez le savoir même si cela ne figure dans aucun cours de maths…

Il s'agit de calculer $R(6)-C(6)$

$R(6)-C(6)\ =\ 3\times6-(0{,}3\times6^2-6+e^{6+5})\ =\ 18-0{,}3\times36+6-e^{-1}\ =\ 18-10{,}8+6-e^{-1}$

$R(6)-C(6)\ =\ 13{,}2-e^{-1}\ \approx\ 12{,}83$

Aide au calcul
$13{,}2-e^{-1}\ \approx\ 12{,}83$

Ainsi, le bénéfice est d' $\boxed{\text{environ }1283\text{ euros}}$.

3.d) Déterminer pour quelle quantités produite et vendues l'entreprise réalise un bénéfice.

Ici, votre réflexe est normalement d'essayer d'étudier la fonction $x\mapsto3x-(0{,}3x^2-x+e^{-x+5})$

Gardez en tête qu'étudier une expression du type $ax^2+bx+c+e^{dx+f}$ est trop compliqué à notre niveau. Il faut donc se tourner vers le graphique.

Il s'agit de résoudre $R(x)\ >\ C(x)$

Graphiquement, on trouve $[2{,}8\ ;\ 13{,}3]$

Ainsi, l'entreprise réalise un bénéfice quand elle produit

$\boxed{\text{entre environ }2{,}8\text{ tonnes et environ }13{,}3\text{ tonnes}}$.

EXERCICE N°4 Changement de variable

1) Résoudre dans R l'équation $x^3+2x^2-3x = 0$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+2x-3) = 0$

1 est une racine évidente de x^2+2x-3 car $1^2+2\times1-3 = 0$

De plus, on se souvient que $x^2+2x-3 = x^2-Sx+P$

avec $S = -2$ la somme des racines et $P = -3$ leur produit.

Si on note x_2 la deuxième racine alors $1\times x_2 = -3$ d'où $x_2 = -3$

On va donc pouvoir remplacer (x^2+2x-3) par $(x-1)(x+3)$

Si on a oublié cette méthode alors on utilise le discriminant.

Dans les deux cas, on fait les calculs au brouillon, ce qui nous évite la rédaction sur une copie…

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -3)$

On en déduit que $S = \{-3 ; 0 ; 1\}$

On pense à mettre les solutions dans l'ordre croissant.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

2.a) $x^6+2x^4-3x^2 = 0$

Ici il faut remarquer (oui je sais, il faut y penser…) que cela ressemble beaucoup à la question n°1 avec juste le fait d'avoir doublé les exposants.

Or $x^{2n} = (x^2)^n$

et donc en remplaçant x^2 par X on va se retrouver avec $X^3+2X^2-3X = 0$

On a changé de variable

Posons $X = x^2$

L'équation s'écrit alors $X^3+2X^2-3X = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = -3$

ou encore à

$x^2 = 0$ ou $x^2 = 1$ ou $x^2 = -3$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{x^2=0}$ ou $\overbrace{x = 1 \text{ ou } x = -1}^{x^2=1}$ (car $x^2 = -3$ n'a pas de solution réelle)

On en déduit que l'équation $x^6+2x^4-3x^2 = 0$ admet $\boxed{\text{trois solutions : } -1 \ ; 0 \text{ et } 1}$

zéro est ici une racine double.

Potentiellement, une équation comme celle-ci pourrait avoir jusqu'à 6 solutions distinctes

2.b) $e^{3x}+2e^{2x}-3e^x = 0$

Posons $X = e^x$

L'équation s'écrit alors $X^3+2X^2-3X = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = -3$

ou encore à

$e^x = 0$ ou $e^x = 1$ ou $e^x = -3$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{e^x=1}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

On en déduit que l'équation $e^{3x}+2e^{2x}-3e^x = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution : } 0}$