

LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel (\mathbb{R}), positif ($+$), non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sqrt{x+h} > 0 \text{ et } \sqrt{x} > 0$$

Donc $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} > 0$

cqfd

2) Simplifier l'expression :
$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

Quand h tend vers zéro, $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée est $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

4) À quoi servait la question 1) ?

Nous avons été amenés à diviser par l'expression $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, il fallait donc s'assurer que cela était toujours possible.

LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = k \times u(x)$

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

La fonction u est définie sur I .

Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par u .

2) Simplifier l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k u(x+h)-k u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f: x \mapsto k \times u(x)$.

Pour tout $x \in I$,

quand h tend vers zéro, $k \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $\boxed{k \times u'(x)}$

LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$.

$$d(a - c) + a(b - d) = ad - cd + ab - ad = ab - cd$$

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x + h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x + h \in I$?

Les fonctions f et g sont définies sur I .

Si $x + h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par f ou g .

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - fg(x)}{h} &= \frac{\overbrace{f(x+h)}^a \overbrace{g(x+h)}^b - \overbrace{f(x)}^c \overbrace{g(x)}^d}{h} \\ &= \frac{\overbrace{g(x)}^d \left[\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{(a-c)} \right] + \overbrace{f(x)}^a \left[\overbrace{g(x+h) - g(x)}^{(b-d)} \right]}{h} \\ &= g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $(fg): x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Pour tout $x \in I$, quand h tend vers zéro,

$$g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ tend vers } \boxed{g(x)f'(x) + f(x)g'(x)}.$$

LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1: x \mapsto 5$; $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4: x \mapsto 2\pi$; $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction nulle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = 0, f_2'(x) = 0, f_3'(x) = 0, f_4'(x) = 0, f_5'(x) = 0.$$

2) $g_1: x \mapsto x+2$; $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à 1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_1'(x) = 1, g_2'(x) = 1.$$

3) $g_3: x \mapsto 4x+5$; $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante k ($k=4$ pour g_3 et $k=\sqrt{7}$ pour g_4) et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur \mathbb{R} et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à k .

Ainsi : $g_3': x \mapsto 4$ et $g_4': x \mapsto \sqrt{7}$

4) $h_1: x \mapsto 3x^2-4$; $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$

▪ Pour h_1 :

h_1 est la forme $3 \times u + v$

où $u: x \mapsto x^2$ et $v: x \mapsto -4$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

h_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_1'(x) = 3u'(x) + v'(x)$$

$$= 3 \times 2x + 0$$

$$h_1'(x) = 6x$$

▪ Pour h_2 :

h_2 est la forme $4 \times u + 5 \times v + w$

où $u: x \mapsto x^2$, $v: x \mapsto x$ et $w: x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_2 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_2'(x) = 4u'(x) + 5v'(x) + w'(x)$$

$$= 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$

$$h_2'(x) = 8x + 5$$

▪ Pour h_3 :

h_3 est la forme $-2,5 \times u + 6 \times v + w$

où $u: x \mapsto x^2$, $v: x \mapsto x$ et $w: x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_3 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_3'(x) = -2,5u'(x) + 6v'(x) + w'(x)$$

$$= -2,5 \times 2x + 6 \times 1 + 0$$

$$h_3'(x) = -5x + 6$$

$$5) \quad h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3 - 4x^2 + 3x - 7\sqrt{11} \quad ; \quad h_5: x \mapsto -\pi x^3 + \sqrt{5}x^2 - \frac{14}{3}x + 33$$

▪ Pour h_4 :

h_4 est la forme $\frac{5}{2} \times u - 4 \times v + 3 \times w - t$

où $u: x \mapsto x^3$, $v: x \mapsto x^2$, $w: x \mapsto x$ et $t: x \mapsto -7\sqrt{11}$

Or :

u, v, w et t sont définies et dérivables sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$, $w'(x) = 1$ et $t'(x) = 0$

Donc

h_4 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_4'(x) = \frac{5}{2} \times u'(x) - 4 \times v'(x) + 3 \times w'(x) - t'(x)$$

$$= \frac{5}{2} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 - 0$$

$$h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2 - 8x + 3$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

▪ Pour h_5 :

h_5 est une somme de fonctions de référence définie et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_5 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_5'(x) = \pi \times 3x^2 + \sqrt{5} \times 2x - \frac{14}{3} \times 1 + 0$$

$$h_5'(x) = 3\pi x^2 + 2\sqrt{5}x - \frac{14}{3}$$

On fait bien attention
à arrêter le radical
avant le x

$$6) \quad h_6: x \mapsto 3x^n + 2x^2 + \frac{3}{x} \quad ; \quad h_7: x \mapsto 5\sqrt{x} + 8x^{15} - \frac{4}{x} \quad ; \quad h_8: x \mapsto 5\sqrt{x} + 7|x| - \frac{7}{x}$$

▪ Pour h_6 :

h_6 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$, donc h_6 est définie et dérivable sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :

$x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} qui contient $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et

$x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est définie et dérivable que sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

On ne garde que la partie commune pour tout le monde :

$$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[\cap \mathbb{R} =] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$$

$$\forall x \in] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[,$$

n est un
entier naturel

$$h_6'(x) = 3 \times nx^{n-1} + 2 \times 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_6'(x) = 3nx^{n-1} + 4x - \frac{3}{x^2}$$

▪ Pour h_7 :

h_7 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc h_7 est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[,$$

$$h_7'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times 15x^{14} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_7'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}$$

▪ Pour h_8 :

h_8 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc h_8 est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[,$$

$$h_8'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 7 \times 1 - 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$h_8'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7$$

On a « mis la constante à la fin »

$$7) \quad h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7) \quad ; \quad h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour h_9 :

$$\forall x \in \mathbb{R} ,$$

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2 - 21x + 8x - 28 \\ &= 6x^2 - 13x - 28 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_9 est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$h_9'(x) = 6 \times 2x - 13 \times 1 - 0$$

$$h_9'(x) = 12x - 13$$

▪ Pour h_{10} :

$$\forall x \in \mathbb{R} ,$$

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 28x + 49 \end{aligned}$$

Ainsi, h_{10} est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur \mathbb{R} , donc h_{10} est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$h_{10}'(x) = 4 \times 2x - 28 \times 1 - 0$$

$$h_{10}'(x) = 4x - 28$$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel (\mathbb{R}), positif ($+$), non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$)

- 1) Justifier que $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression : $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) Simplifier l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f: x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) En utilisant les préliminaires, montrer que :
$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg: x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1) $f_1: x \mapsto 5$; $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4: x \mapsto 2\pi$; $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2) $g_1: x \mapsto x+2$; $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3) $g_3: x \mapsto 4x+5$; $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$;
- 4) $h_1: x \mapsto 3x^2-4$; $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5) $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6) $h_6: x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$; $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$; $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7) $h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$