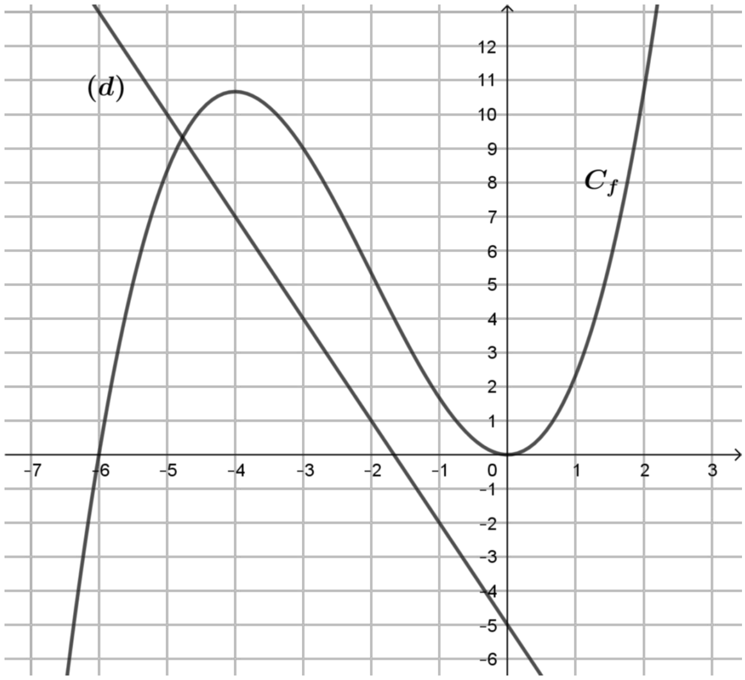
FONCTIONS PART2 E04

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)***

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2$.

1) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y=-3x-5$?

2) Si oui, déterminer les coordonnées des points en lesquels C_f admet ces tangentes.



1)

Pour qu'une droite soit parallèle à la droite (d) , il faut qu'elle ait le même coefficient directeur : -3

Et comme le coefficient directeur de la tangente en un point est le nombre dérivé en ce point, la question se traduit alors : « résoudre $f'(x)=-3$

Nous allons sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=-3$

▪ Pour tout réel x ,

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2$$

$$f'(x)=x^2+4x$$

▪ $f'(x)=-3 \Leftrightarrow x^2+4x=-3 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$

Pour une fois, ceux et celles qui connaissent le discriminant d'un trinôme (Le « delta ») : faites vous plaisir ! On ne pourrait rien vous reprocher le jour d'une épreuve si vous maîtrisez la technique.

Pour les autres, on va utiliser une méthode classique : « la solution évidente ».

En fait , on teste les nombres entiers autour de zéro et comme l'exercice est bien fait on trouve une solution « évidente »...

On remarque que : $(-1)^2+4\times(-1)+3=0$ et donc que -1 est une solution évidente.

De plus, on sait que $x^2-4x+3=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a=1$ (relisez le cours si vous avez un doute) et $x_1=-1$ (la solution évidente que l'on vient de trouver)

Ainsi $x^2+4x+3=(x+1)(x-x_2)$

Comme $(x+1)(x-x_2)=x^2-x\times x_2+x-x_2=x^2+(-x_2+1)x-x_2$

par identification, on obtient que $x_2=-3$

Donc $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

Enfin $f'(x)=-3 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$

On en déduit que cette équation admet deux solutions : -3 et -1

La réponse est donc $\boxed{\text{oui}}$ (il y en a deux).

2)

D'après la question 1) nous connaissons l'abscisse de ces points, il nous reste à calculer les ordonnées :

$$f(-3)=9 \quad \text{et} \quad f(-1)=\frac{5}{3}$$

Ainsi, les points cherchés ont pour coordonnées $\boxed{(-3\ ;\ 9) \text{ et } \left(-1\ ;\ \frac{5}{3}\right)}$

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

On considère la fonction f définie par: $f(x)=-3x^2+10x-4$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Existe-t-il des tangentes à C_f de coefficient directeur -2 ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de C_f où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

Il s'agît de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = -2$

(Relisez l'exercice précédent…)

Pour tout réel x ,

$f'(x) = -6x+10$

d'où

$f'(x) = -2 \Leftrightarrow -6x+10 = -2 \Leftrightarrow x = 2$

Cette équation admet une unique solution : 2

donc $\boxed{\text{il existe une tangente à } C_f \text{ qui admet } -2 \text{ comme coefficient directeur}}$

De plus $f(2) = -3\times2^2+10\times2-4 = 4$

On en déduit que $\boxed{\text{cette tangente passe par le point de } C_f \text{ de coordonnées } (2\ ;\ 4)}$

2) Existe-t-il des tangentes à C_f de coefficient directeur 4 ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de C_f où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

Il s'agît de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 4$

$f'(x) = 4 \Leftrightarrow -6x+10 = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Cette équation admet une unique solution : 1

donc $\boxed{\text{il existe une tangente à } C_f \text{ qui admet } 4 \text{ comme coefficient directeur}}$

De plus $f(1) = -3\times1^2+10\times1-4 = 3$

On en déduit que $\boxed{\text{cette tangente passe par le point de } C_f \text{ de coordonnées } (1\ ;\ 3)}$

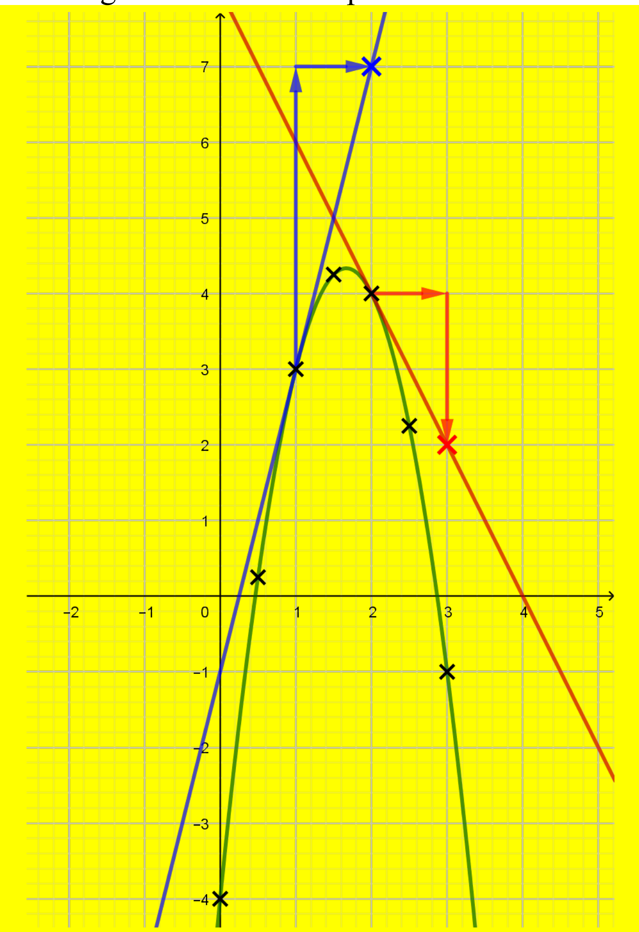
3) Tracer la courbe représentative de ainsi que les tangentes considérées précédemment.

À l'aide de la calculatrice, on calcule les coordonnées de quelques points.

Ensuite, on trace les tangentes (si si, avant la courbe, car elles vont nous guider pour le tracé de cette dernière)

Pour finir, on trace la courbe du mieux possible en évitant de faire des segments de droite.

Pour le tracé des tangentes, on peut relire l'exercice n'3 de la fiche A01.

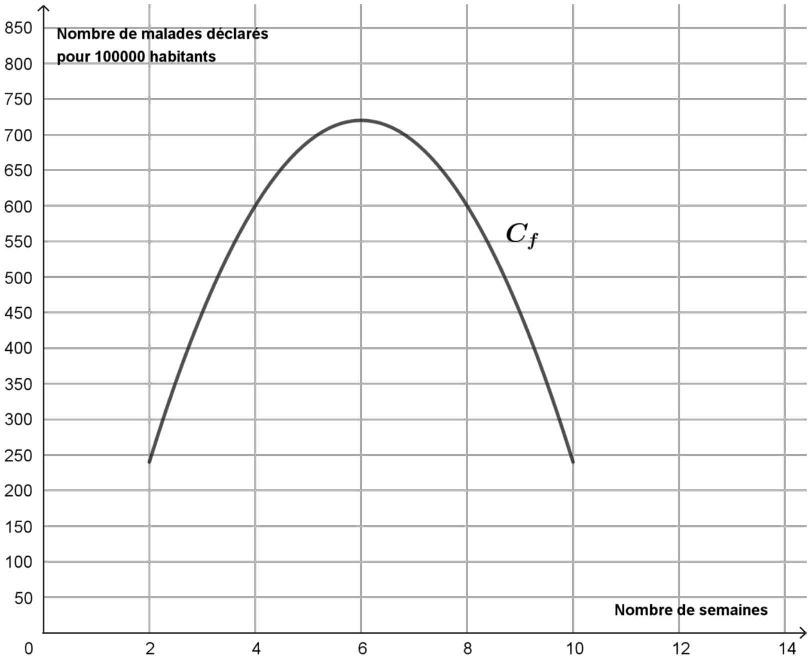


EXERCICE N°3

Lors d'une épidémie de grippe, on s'intéresse au nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout d'un certain nombre x de semaines

On admet que la fonction f définie sur $[2\ ;\ 10]$ $f(x)=-30x^2+360x-360$ modélise ce nombre de malades.

On note C_f sa courbe représentative donnée ci-contre :



1) Selon ce modèle, au bout de combien de semaine le pic de l'épidémie a-t-il été atteint ?

D'après le graphique, c'est au bout de $\boxed{\text{6 semaines}}$.

2) Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur à 600.

Graphiquement, le nombre de malades a été supérieur à 600 pendant $\boxed{\text{4 semaines}}$.

(entre la 4^e et la 8^e)

3) Calculer $f'(x)$, puis calculer le nombre dérivé de f en 3 .

$f(x)=-30x^2+360x-360$

- $\boxed{f'(x)=-60x+360}$

$f'(3) = -60\times3+360$ d'où $\boxed{f'(3) = 180}$

4) On considère que le nombre dérivé $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de x semaines. La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de 3 semaines ou de 4 semaines?

Il s'agît de comparer $f'(3)$ et $f'(4)$

Or $f'(4) = -60\times4+360 = 120$

Donc $\boxed{f'(3) > f'(4)}$

Ce qui signifie que la grippe se propage plus vite $\boxed{\text{au bout de 3 semaines}}$.