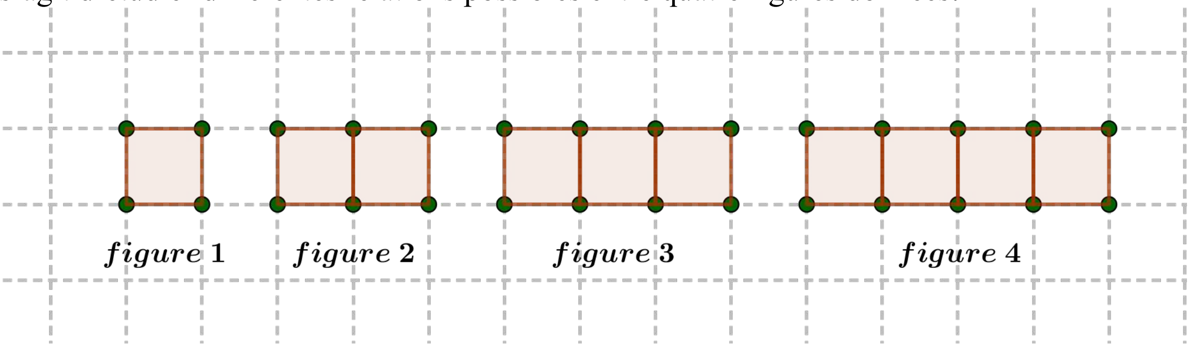
SUITES NUMÉRIQUES A01

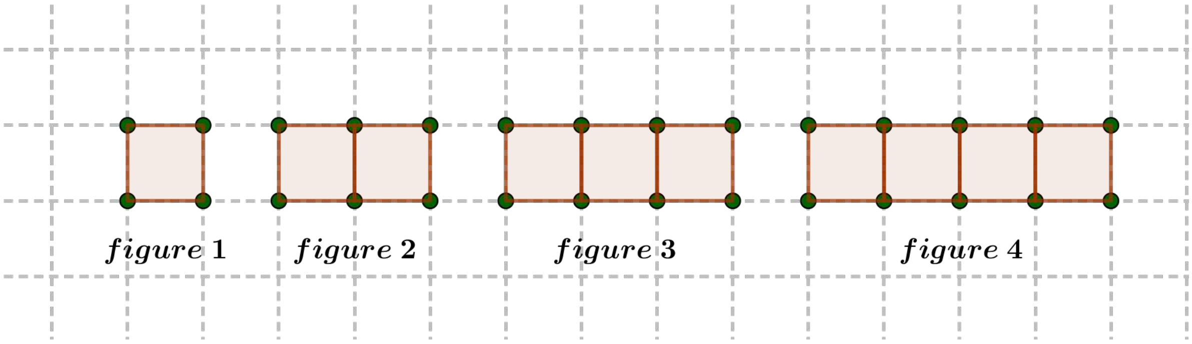
EXERCICE N°1

Il s'agit d'étudier différentes relations possibles entre quatre figures données.

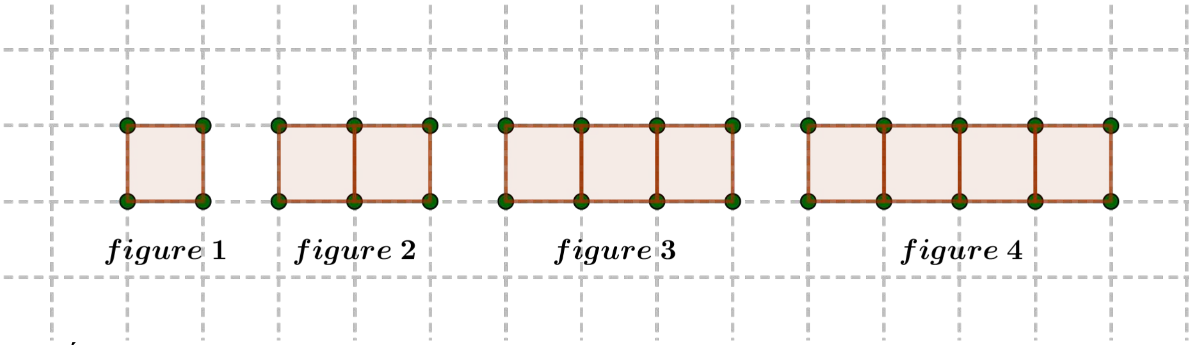


1) Étudier la relation entre le numéro de la figure et le nombre d'allumettes qui la composent. Compléter la table de valeurs qui correspond à cette relation.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Nombre d'allumettes qui la composent				



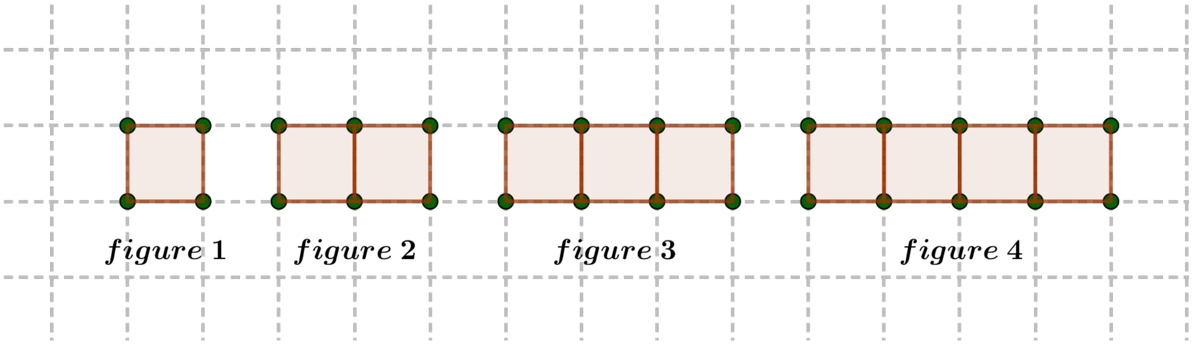
Numéro de la figure	1	2	3	4
Nombre d'allumettes qui la composent	4	7	10	13



2) Étudier la relation entre le numéro de la figure et son périmètre (chaque allumette a une longueur de 1 unité). Compléter la table de valeur correspondant à cette nouvelle relation.

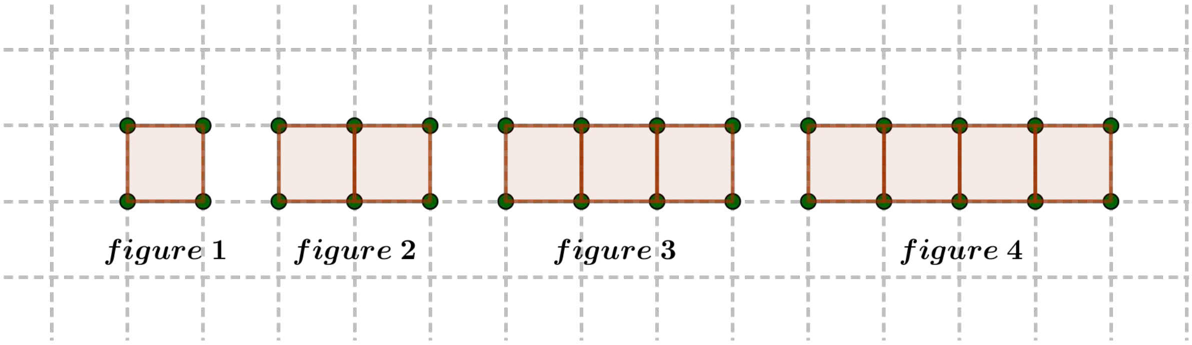
Numéro de la figure	1	2	3	4
périmètre				

SUITES NUMÉRIQUES A01



Numéro de la figure	1	2	3	4
périmètre	4	6	8	10

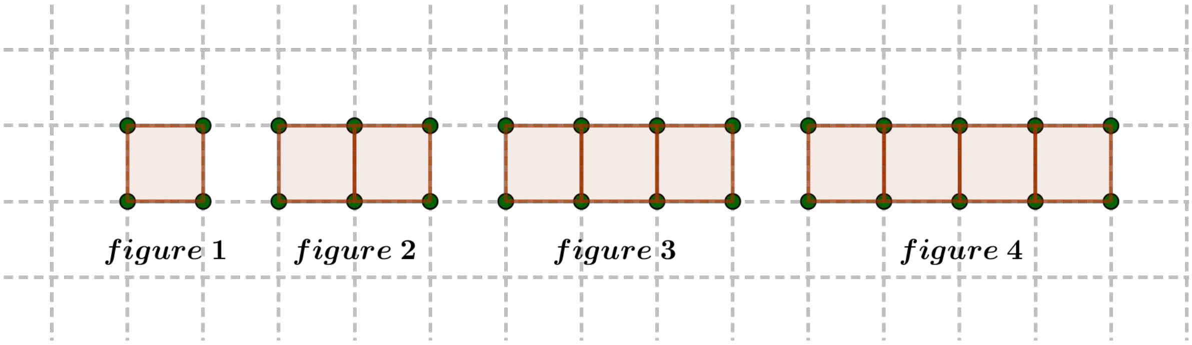
SUITES NUMÉRIQUES A01



3) Étudier la relation entre le numéro de la figure et son aire (chaque carré représente 1 unité d'aire). Compléter la table de valeurs correspondant à cette nouvelle relation.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Aire				

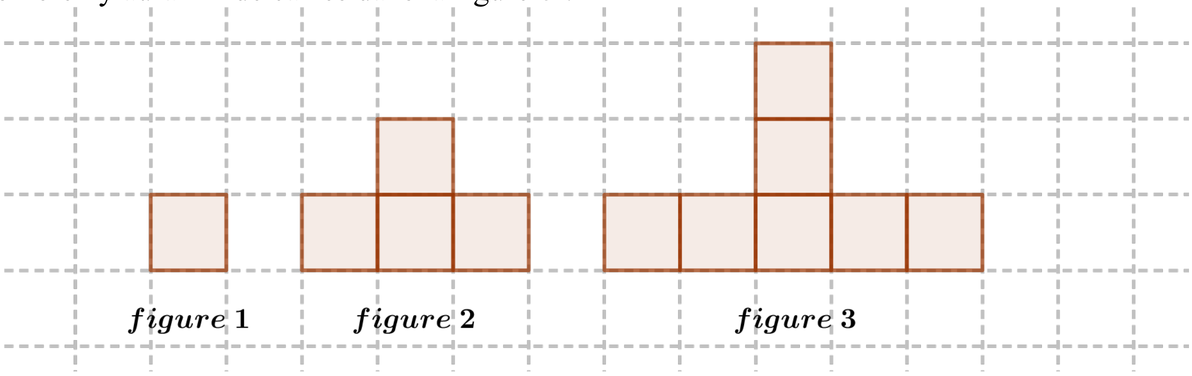
SUITES NUMÉRIQUES A01



Numéro de la figure	1	2	3	4
Aire	1	2	3	4

EXERCICE N°2

Combien y aura-t-il de carrés dans la figure 8 ?



géogebra

Numéro de la figure	Nombre de carrés qui la composent
1	
2	
3	
4	
5	
⋮	
8	
⋮	
n	u_n

SUITES NUMÉRIQUES A01

Numéro de la figure	Nombre de carrés qui la composent
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13
$\vdots$	$\vdots$
8	22
$\vdots$	$\vdots$
n	$u_n=u(n)=3n-2$

SUITES NUMÉRIQUES

I Les suites numériques

Définition n°1.

Une suite **numérique** est une application $u:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$.

▪ Pour $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté :
u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 , on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

SUITES NUMÉRIQUES

Exemple n°1.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

Pour $n\geqslant 1$, u_n est le n$^{\text{ième}}$ nombre premier .

$u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=5$, $u_4=7$, $u_5=11$ …

Définition n°2. Suite définie de façon explicite

Une suite u est **définie de façon fonctionnelle ou explicite** lorsque u_n peut être calculé directement en fonction de n sans que l'on ait besoin de calculer tous les termes précédents.

Exemple n°2.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
Pour $n\geqslant 0$, $v_n = n^2+\sqrt{n}-4$

$v_0 = 0^2+\sqrt{0}-4 = -4$ $,\ldots,$ on peut calculer directement v_{100}

$v_{100} = 100^2+\sqrt{100}-4 = 10000+10-4 = 10096$

Remarque n°1.

Attention, v_{100} n'est pas le 100$^{\text{ième}}$ terme mais le 101$^{\text{ième}}$ car le premier indice est zéro.

Définition n°3. Suite définie par récurrence

Une suite u est **définie par récurrence** lorsqu'on :
dispose du **terme initial** et d'une **formule permettant de passer d'un terme au suivant.**

Exemple n°3.

La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} w_0=2 \\ w_{n+1}=2\times w_n+n \end{cases}$

$w_1=2\times w_0+1=2\times 2+1=5$

$w_2=2\times w_1+2=2\times 5+2=12$

Remarque n°2.

Si on veut calculer w_{100} alors il faut calculer w_{99} qui lui même nécessite w_{98} etc …

SUITES NUMÉRIQUES

Méthode n°1.

Pour représenter graphiquement une suite u dans un repère, on place:

- les indices n sur l'axe des abscisses;

- les termes $u_n = u(n)$ sur l'axe des ordonnées ;

- les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ dans le repère, sans les relier (nuage de points),

géogébra

Définition n°4. Suite croissante, suite décroissante

▪ Une suite u est dite **croissante** lorsque les termes de la liste sont classés en ordre croissant : pour tout indice n :

$u(n-1) \leqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \leqslant u(n+1)}$.

▪ Une suite u est dite **décroissante** lorsque ses termes sont classés en ordre décroissant : pour tout indice n :

$u(n-1) \geqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \geqslant u(n+1)}$.

SUITES NUMÉRIQUES E01

EXERCICE N°1

Soit u la suite définie par: $u(n)=2+\frac{1}{n}$ pour $n\geqslant 1$.

1) Calculer les 4 premiers termes, arrondis à deux décimales, et les représenter graphiquement.
2) Préciser si la suite est définie explicitement ou par récurrence.
3) Conjecturer son sens de variation.

geogebra

EXERCICE N°2

Soit u la suite définie par $u(n)=n^2+3n+5$ pour $n\geqslant 0$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite u.

2) u est-elle définie explicitement ou par récurrence?

3) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite u.

4) Conjecturer graphiquement le sens de variation de la suite u.

5) Démontrer cette conjecture.

geogebra

SUITES NUMÉRIQUES

Bien réviser le cours pour l'interrogation IE01 qui aura lieu à la prochaine séance en classe entière.

SUITES NUMÉRIQUES E02

EXERCICE N°1

Une entreprise compte 23 salariés en fin d'année 2010. Durant l'année, le nombre de ses salariés double, mais en fin d'année, 22 salariés quittent l'entreprise.
On note s_n le nombre de salariés fin $2010+n$.

1) Écrire une relation de récurrence entre s_{n+1} et s_n .
2) À l'aide d'une calculatrice, calculer le nombre de salariés de proche en proche, jusqu'en fin 2020.

EXERCICE N°2

Entre 2000 et 2017, le prix annuel moyen d'un paquet de 20 cigarettes est passé de 3,20 € 7,05 €. il était de 7 € en 2016,

1) Calculer l'augmentation du prix entre 2000 et 2017, puis l'augmentation moyenne a sur un an.

2) On suppose que le prix va continuer à augmenter de a € à partir de 2017.

On note $p(n)$ le prix en $2017+n$. Écrire la relation de récurrence entre $p(n)$ et $p(n+1)$. Suivant ce modèle, calculer le prix en 2021 de proche en proche, ou avec une calculatrice.

3) En réalité, il est prévu 4 augmentations : 0,50 € en mars 2019, novembre 2019 et avril 2020 et 0,4 € en novembre 2020. Calculer le prix prévu fin 2020. Commenter.

SUITES NUMÉRIQUES E02

EXERCICE N°3 Python

Léa veut investir dans un commerce. Elle met 6 000 € sur un compte, puis ajoute 300 € tous les mois, sans rien retirer. Elle désire connaître le montant de son compte après n mois de placement.

1) Calculer le montant du compte de Léa, mois après mois, jusqu'après 3 mois de placement.

2) Appliquer le programme ci-dessous, écrit en langage naturel, pour $n=3$.

```
u ← 6000
Pour i allant de 1 à n
    u ← u+300
Fin pour
```

3) Lequel de ces deux scripts est sa traduction en langage Python? Expliquer la différence.

```
def epargne(n):
    u=6000
    for i in range(n):
        u=u+300
    return u
```

```
def epargne(n):
    u=6000
    for i in range(n-1):
        u=u+300
    return u
```

EXERCICE N°4

On considère une suite u définie par une relation fonctionnelle $u(n)=f(n)$.

1) La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$: peut-on affirmer que la suite u est croissante ?
2) La suite u est croissante : peut-on affirmer que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$?

Geogebra

II Les suites arithmétiques

Définition n°5. Suite arithmétique

Une suite u est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°4.

La suite v de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$.

$v_0=5$, $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$, $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\ldots$

Suites numériques

Propriété n°1. Relation de récurrence

Si u est une suite arithmétique de raison r, de terme initial k dont l'indice est zéro, alors : pour $n \geqslant 0$, $u : \begin{cases} u_0 = k \\ u(n+1) = u(n) + r \end{cases}$

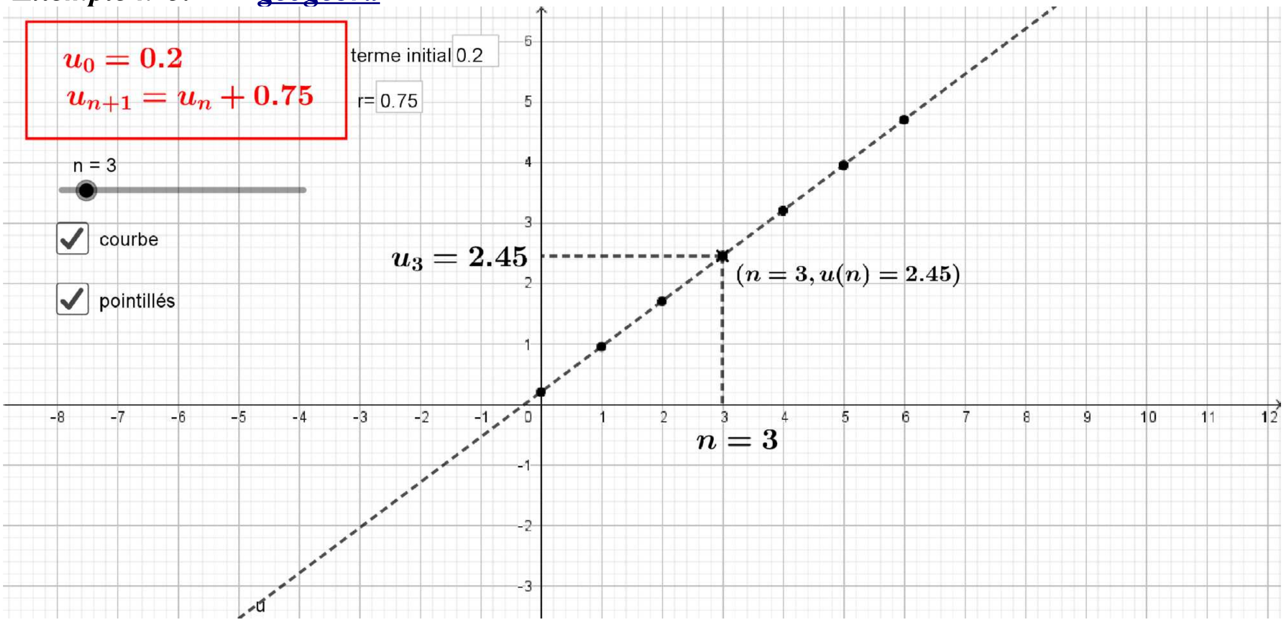
(si l'indice de départ, n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°2. Représentation graphique

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.

Exemple n°5. ***géogébra***



Propriété n°3. Sens de variation

Soit u une suite arithmétique de raison r :

- si $r>0$, la suite est croissante (et même strictement croissante);

- si $r=0$, la suite est constante;

- si $r<0$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°1

Soit v la suite définie par $v(n)=n^2+3$. pour $n \geqslant 0$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite v.
2) Représenter graphiquement les premiers termes de v.
3) D'après la représentation graphique, la suite v semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
4) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.

SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°2

Soit w la suite définie par $w(n)=4n+5$. pour $n\geqslant 0$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite w .
2) Représenter graphiquement les premiers termes de . w
3) D'après la représentation graphique, la suite w semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
4) Démontrer que la suite w est arithmétique et préciser sa raison r .
5) Préciser le sens de variation de w .

EXERCICE N°3 Python

Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle retourne True si la liste u est le début d'une suite arithmétique et False dans le cas contraire.

```
def est_arithmetique(u):
    r=u[1]−u[0]
    for i in range( 1,len(u)−1 ) :
        if u[i+1]−u[i] != ………
            return ………
    return ………
```

EXERCICE N°4

Soit u la suite arithmétique de terme initial $u(0)=-14$ et de raison $r=5$.

1) Donner le sens de variation de u .
2) Calculer l'indice du premier terme positif.
3) Calculer $u(11)$.

EXERCICE N°5

Une suite arithmétique w est telle que $w(9)=15$ et $w(13)=25$.

1) Calculer sa raison r .

2) Calculer son terme initial $w(0)$.

SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°6

y est une suite arithmétique de raison r.

1) Démontrer que $y(2)+y(3)+y(4)=3\,y(3)$ (on ne cherchera pas à calculer la raison r).
2) Sachant que $y(2)+y(3)+y(4)=36$, en déduire $y(3)$.
3) On donne $y(9)=48$. Retrouver la raison r.
4) Calculer $y(0)$.

III Les suites géométriques

Définition n°6. Suite géométrique

Une suite u est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°6.

La suite v de terme initial $v_0 = 10$ et de raison $q = 0{,}5$.

$v_0 = 10$, $v_1 = v_0 \times q = 10 \times 0{,}5 = 5$, $v_2 = v_1 \times q = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5, \ldots$

Propriété n°4. Relation de récurrence

Si u est une suite géométrique de raison q , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n \geqslant 0$, $u : \begin{cases} u_0 = k \\ u(n+1) = u(n) \times q \end{cases}$
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte $\dots$)

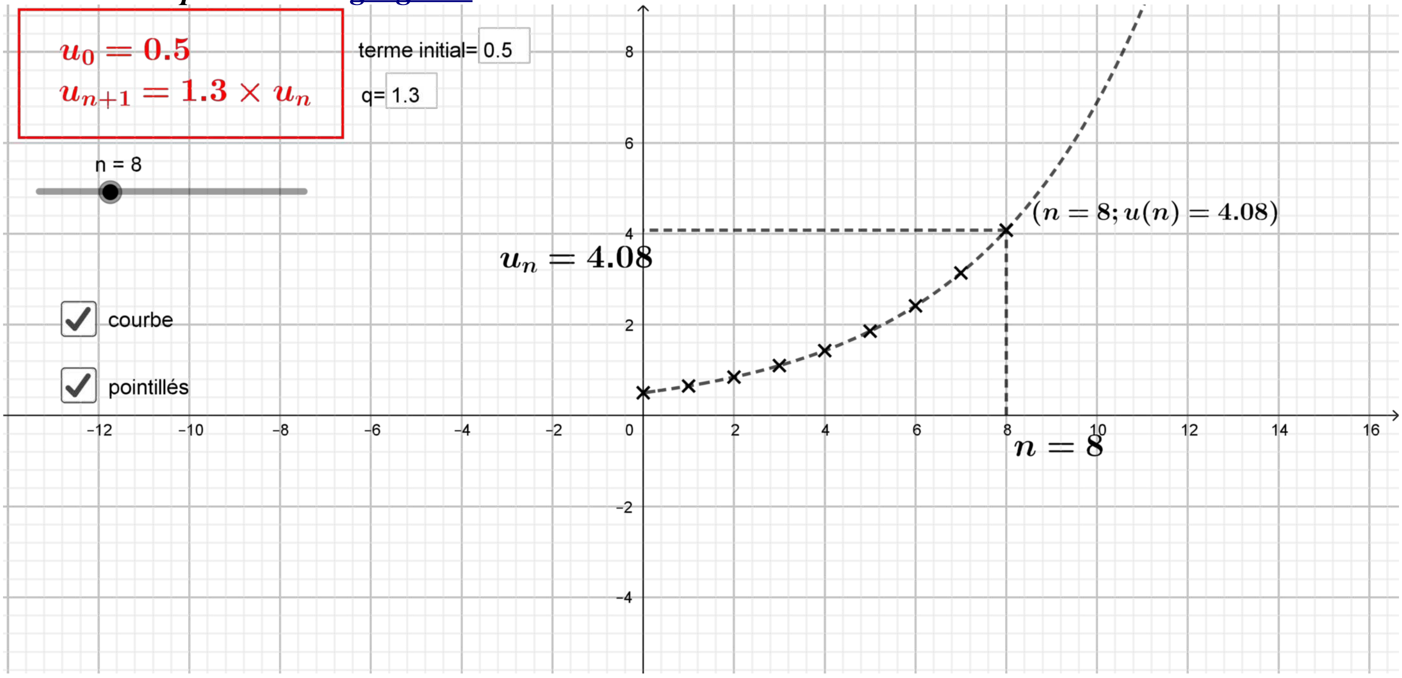
Propriété n°5. Représentation graphique

▪ Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

SUITES NUMÉRIQUES

Exemple n°7. ***géogébra***



Propriété n°6. Sens de variation

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif :

- si $q > 1$, la suite est croissante (et même strictement croissante);

- si $q = 1$, la suite est constante;

- si $0 < q < 1$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

SUITES NUMÉRIQUES E04

EXERCICE N°1

Soit z la suite définie par $z(n)=(n+3)^2$ pour $n \geqslant 0$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite z .

2) Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite z .

3) D'après la représentation graphique, la suite z semble-t-elle géométrique ? Justifier.

4) Démontrer que z n'est pas géométrique.

EXERCICE N°2

Soit t la suite définie par $t(n)=3^n$ pour $n \geqslant 0$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite . t

2) Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite . t

3) D'après la représentation graphique, la suite t semble-t-elle géométrique ? Justifier.

4) Démontrer que t est géométrique. Préciser sa raison

5) Préciser le sens de variation de t .

EXERCICE N°3

Sur un tableur, on a créé une feuille de calculs permettant de déterminer les 20 premiers termes d'une suite géométrique v .
La colonne A contiendra les indices de la suite.
La cellule B1 contiendra le premier terme $v(1)$ et la cellule D1 la raison q .
On veut automatiser le calcul des termes de cette suite.

1) Quelle formule peut-on écrire en A2 et étirer vers le bas pour compléter la colonne A?

2) Quelle formule peut-on écrire en B2 et étirer vers le bas pour compléter la colonne B?

SUITES NUMÉRIQUES E04

EXERCICE N°4

Soit u une suite géométrique de terme initial $u(1)=0{,}01$ et de raison $q=2$.

1) Donner le sens de variation de u .

2) Calculer $u(7)$.

3) Donner l'indice du premier terme supérieur à 10.

EXERCICE N°5 Python (n'est pas toujours notre ami…)

1) Écrire une fonction en Python prenant comme paramètre une liste u, qui retourne True si la liste u contient les premiers termes d'une suite géométrique et False dans le cas contraire.
2) Voici les premier termes de la suite v.
$\{10000\ ;\ 1000\ ;\ 100\ ;\ 10\ ;\ 1\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0{,}01\ ;\ 0{,}001\}$
Vérifier que ce sont bien les premiers termes d'une suite de géométrique dont on précisera la raison.
3) Que donne cette suite avec la fonction Python ?

EXERCICE N°6 Python (mais la plupart du temps si !)

Un article coûte 17 €. Son prix augmente chaque année de $2{,}5\ \%$. On note $P(n)$ le prix de cet article en euros après n années.

1) Démontrer que P est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2) Écrire un programme en langage Python permettant de connaître P(1 0), le prix de cet article au bout de dix ans.
3) Écrire un programme en Python permettant de savoir dans combien d'années ce prix aura doublé.

SUITES NUMÉRIQUES E05

EXERCICE N°1

Un capital de 4 000 € est placé à 2 % par an à intérêts composés.

> On rappelle le principe du placement à intérêts composés : à la fin de chaque année, les intérêts sont intégrés à l'ancien capital et génèrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite. Ainsi on pose : $V(0)=4\,000$.

1) Calculer le capital acquis à la fin de la 1e année puis de la 2e année.
2) Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.
3) Compléter la phrase suivante: « Augmenter quantité de 2 % revient à la multiplier par ... »
4) En déduire que la suite V est géométrique préciser sa raison et le premier terme.
5) Écrire une formule de récurrence permette calculer $V(n+1)$ en fonction de $V(n)$.
6) Calculer et interpréter $V(5)$.

EXERCICE N°2

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an.
En 2019, elle était de 8 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019+n)$. On a donc $u(0)=8000$.

1) Calculer les termes $u(1), u(2)$ et $u(3)$.
2) Donner la nature et la raison de la suite u.
3) Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n+1)$ et $u(n)$.
4) Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2026.
5) Déterminer en quelle année la population aura doublé.
6) Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019+n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc: $v(n)=u(n+1)-u(n)$.
6.a) Calculer $v(1), v(2)$ et $v(3)$.
6.b) Calculer la somme $v(1)+v(2)+v(3)$ et interpréter le résultat..

EXERCICE N°3

Cet exercice étudie la désintégration du carbone 14 (C_{14}) et son utilisation pour la datation des fossiles.

Soit $v(0), v(1), v(n)$, le nombre d'atomes de carbone 14 respectivement à l'instant $t=0$; 1 siècle après ; n siècles après.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement, d'environ 1,24 % par siècle.
Les rayons cosmiques produisent dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement.
Le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la Terre est donc constant.
Les tissus animaux et végétaux vivants contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère.
À leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse. Celui-ci se désintègre dans les conditions vues ci-dessus.

1) Quelle est la nature (arithmétique ou géométrique) de la suite v ? Préciser sa raison.

2) Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du C_{14} initial. Justifier que son âge est environ 24 000 ans.

Suites numériques E06

EXERCICE N°1 Suite arithmético-géométrique

Soit u la suite définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=0,2\,u_n+4$.

1) Calculer puis représenter les 5 premiers termes de la suite.

2) Conjecturer les variations de u .

3) Démontrer que u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4) On pose $v_n=u_n-5$ pour tout n . Calculer $v_0\,;v_1\,;v_2$.

5) Conjecturer la nature de la suite v .

6) Le démontrer.

7) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

SUITES NUMÉRIQUES E06

EXERCICE N°2 ***Suite arithmético-géométrique***

Soit v la suite définie par: $v_0=5$ et $v_{n+1}=0,5\,v_n+1$.

1) Calculer $v(1)$ et $v(2)$. Vérifier que v n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On pose $u_n=v_n-2$ pour tout n . Calculer $u_0\,;u_1\,;u_2$.

3) Conjecturer la nature et la raison de la suite u .

4) Le démontrer.

5) En déduire une expression de v_n en fonction de n

SUITES NUMÉRIQUES E06

EXERCICE N°3 Suite homographique

Soit u la suite définie par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$

1) On admet que pour tout n , $u_n \neq 6$ et donc que u_n est bien défini.
Vérifier que u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$ pour tout n .
On admet que pour tout n , $u(n)\neq 3$ et donc que v_n est bien défini.
Calculer $v_0 ; v_1 ; v_2$.

3) Conjecturer la nature et la raison de la suite v .

4) Le démontrer.

*S*UITES NUMÉRIQUES *E06*

EXERCICE N°4 Suite de la forme $u_{n+1}=u_n+an+b$

On définit une suite u par $u_0=1$ et pour tout n entier naturel par $u_{n+1}=u_n+2n-1$.

1) Calculer $u_1 ; u_2 ; u_3$. La suite u est-elle croissante? Décroissante?

2) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique?

3) On pose $v_n=u_n-4n+10$ pour tout n . Calculer $v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3$.

4) Démontrer que la suite v est géométrique et préciser sa raison.