

# LES SUITES NUMÉRIQUES

## I Quelques définitions

### Définition n°1. Suite numérique réelle (deux versions)

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle)  $u$  est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels ( $\mathbb{N}$ ) dans l'ensemble des nombres réels ( $\mathbb{R}$ ).  
Autrement dit :

$$u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$$

### Remarque n°1. Notations

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer  $u(n)$  par  $u_n$ .  
Ainsi :

$$u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

On pourra noter :  $u$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$  pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois  $(u_n)$  mais on évitera le plus possible)

On dira que  $u_n$  est le terme de rang  $n$ .

### Remarque n°2.

À partir de maintenant, on dira « suite » plutôt que « suite numérique réelle ».

### Définition n°2. Suite définie de façon explicite

L'application  $u$  peut être **définie de façon explicite** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

(avec  $f$  au moins définie pour tous les entiers naturels)

### Exemple n°1. Une suite définie de façon explicite

La suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n - 3$

Ses premiers termes sont :

$$u_0 = -3, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3, \dots$$

Ici  $f: x \mapsto 2x - 3$

### Définition n°3.

L'application  $u$  peut être **définie par une relation de récurrence** :

$$u: \begin{cases} u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel}) \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

### Exemple n°2. Une suite définie par une relation de récurrence

La suite  $v$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Ses premiers termes sont :

$$v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 7, v_3 = 15, \dots$$

Ici  $f: x \mapsto 2x - 3$  (**Ne pas confondre la fonction  $f$  avec l'application  $u$  !**)

### Remarque n°3.

Une suite peut être définie par un énoncé qui peut prendre plusieurs formes :

- un algorithme (suite d'instructions informatiques ou non)
- un motif géométrique : (triangle de Sierpiński)
- une simple phrase : « la suite  $w$  est la suite des nombres impairs positifs ».
- ou encore un ensemble (infini) de points du type  $M(n, u_n)$ .
- ...

## II Suites arithmétiques

### Définition n°4. Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.

Autrement dit :

- Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique s'il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

- Le nombre  $r$  est appelé : **raison** de la suite.

### Remarque n°4. Lien avec la définition n°3

La suite  $u$  est définie par récurrence (à condition de penser à donner  $u_0$ ) et on a :  $f : x \mapsto x + r$

### Exemple n°3.

- La suite  $u : \begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = u_n + 0,9, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  est une suite arithmétique de raison  $0,9$  et de premier terme  $u_0 = -1,5$ .

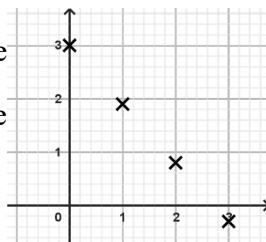
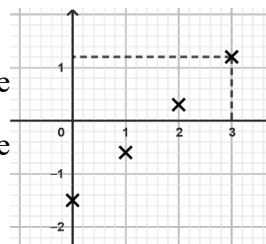
Ses quatre premiers termes sont :

$$u_0 = -1,5, u_1 = -0,6, u_2 = 0,3, u_3 = 1,2$$

- La suite  $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 1,1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  est une suite arithmétique de raison  $-1,1$  et de premier terme  $v_0 = 3$ .

Ses quatre premiers termes sont :

$$v_0 = 3, v_1 = 1,9, v_2 = 0,8, v_3 = -0,7$$



### Remarque n°5.

Le 1<sup>er</sup> terme est  $u_0$ , le deuxième  $u_1$  ...

On restera vigilant face à ce « décalage » ...

### Propriété n°1. Expression de $u_n$ en fonction de $n$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_0$  son premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$$

*preuve :*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire les termes suivants à l'aide la définition par récurrence :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$\vdots$

$$u_n = u_{n-1} + r$$

Puis, en additionnant membre à membre ces  $n$  égalités, on obtient

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + r + u_1 + r + \dots + u_{n-1} + r$$

qui équivaut à :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

puis en soustrayant  $(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})$  à chaque membre

$$u_n = u_0 + n \times r$$

### Remarque n°6. Lien avec la définition n°2

Cette fois-ci la suite est définie de façon explicite et on a :  $f : x \mapsto u_0 + r \times x$

### Propriété n°2. Une généralisation

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p) \times r$$

*preuve : Laissez en exercice*

**Propriété n°3. Sommes des premiers entiers**Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Notation :  $\sum_{k=0}^n k = 0+1+2+3+\dots+(n-1)+n$ )**preuve :**Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé,

$$\bullet \text{ On remarque que } \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n (n-k)$$

(car :  $0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)+n = n+(n-1)+(n-2)+\dots+2+1+0$ )

$$\bullet \text{ et donc : } 2 \times \sum_{k=0}^n k = (n+1) \times n$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & + & 0 \end{array} \\ \text{(car : } & = \underbrace{n + n + n + \dots + n + n + n}_{n+1 \text{ termes}} \end{aligned} \quad )$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{cqfd}$$

**Propriété n°4. Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique**Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ .Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

(Notation :  $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$ )**preuve :**Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé,

$$\bullet \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 + k r) \quad (\text{d'après la propriété n°1})$$

$$\begin{aligned} \text{(car : } & \begin{array}{ccccccc} u_0 & + & u_1 & + & \dots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ = & u_0 + 0 \times r & + & u_0 + 1 \times r & + & \dots & + & u_0 + (n-1) \times r & + & u_0 + n \times r \end{array} \end{aligned} \quad )$$

• Or :

$$\sum_{k=0}^n (u_0 + k r) = \sum_{k=0}^n u_0 + \sum_{k=0}^n k r = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_0}_{(n+1)u_0} + r \times \underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

• d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= (n+1)u_0 + \frac{r \times n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0 + r n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2u_0 + r n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + r n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \end{aligned} \quad \text{cqfd}$$

**Remarque n°7. Une façon de retenir la formule**

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

**Méthode n°1. Calcul de la somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique**

- Soit  $(v_n)$  la suite arithmétique de raison  $r=3$  et de premier terme  $v_0=-5$ . On veut calculer la somme  $A$  des dix premiers termes.

$$\left( \text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^9 v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_9 \right)$$



Comme on « commence à zéro » le 10<sup>e</sup> terme est  $v_9$ , on le calcule :

$$v_9 = v_0 + 9 \times r = -5 + 9 \times 3 = 22.$$

$$A = 10 \times \frac{v_0 + v_9}{2} = 10 \times \frac{-5 + 22}{2} = 85$$

- Soit  $(w_n)$  la suite arithmétique de raison  $r=1,5$  et de premier terme  $w_1=2$ . On veut calculer la somme  $B$  des dix premiers termes.

$$\left( \text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1 + w_2 + \dots + w_{10} \right)$$



Comme on « commence à un » le 10<sup>e</sup> terme est  $w_{10}$ , on le calcule :

$$w_{10} = w_1 + (10-1) \times r = 2 + 9 \times 1,5 = 15,5.$$

$$B = 10 \times \frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10 \times \frac{2 + 15,5}{2} = 87,5$$

**III Suites géométriques****Définition n°5. Suite géométrique**

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.

Autrement dit :

- Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique s'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

- Le nombre  $q$  est appelé : **raison** de la suite.

**Remarque n°8. Lien avec la définition n°3**

La suite  $u$  est définie par récurrence (à condition de penser à donner  $u_0$ ) et on a :  $f : x \mapsto x \times q$

**Exemple n°4.**

- La suite  $u : \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1,9, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  est une suite

géométrique de raison 1,9 et de premier terme  $u_0 = 0,5$ .

Ses quatre premiers termes sont :

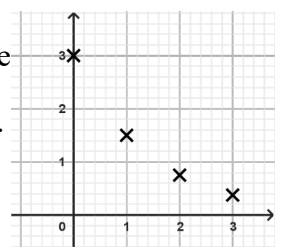
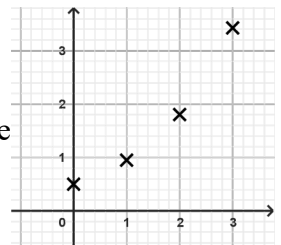
$$u_0 = 0,5, u_1 = 0,95, u_2 = 1,805, u_3 = 3,4295$$

- La suite  $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0,5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  est une suite

géométrique de raison 0,5 et de premier terme  $v_0 = 3$ .

Ses quatre premiers termes sont :

$$v_0 = 3, v_1 = 1,5, v_2 = 0,75, v_3 = 0,375$$



**Propriété n°5. Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et  $u_0$  son premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

*preuve :*

- Si  $u_0 = 0$  ou  $q = 0$  alors tous les termes de la suite sont nuls et l'égalité  $u_n = u_0 \times q^n$  ( $0=0$ ) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- Si  $u_0 \neq 0$  et  $q \neq 0$  alors on admet que **tous les termes de la suite sont non nuls** et on peut écrire :

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$u_2 = u_1 \times q$$

$\vdots$

$$u_n = u_{n-1} \times q$$

Puis, en multipliant membre à membre ces  $n$  égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \dots \times u_{n-1} \times q$$

qui équivaut à :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n$$

puis en divisant chaque membre par  $(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1})$  (qui est non nul...)

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**Propriété n°6. Somme des premiers termes d'une suite géométrique**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et  $u_0$  son premier terme. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ en particulier si } u_0 = 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

*preuve :*

Nous allons commencer par le cas particulier et nous en déduisons le cas général.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on remarque que :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_0 \times q^k}_{\text{d'après la propriété n°5}} = u_0 \times \underbrace{\sum_{k=0}^n q^k}_{\text{par factorisation par } u_0}$$

- Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$  et calculons  $S_n - q S_n$ .

$$S_n - q S_n = \sum_{k=0}^n q^k - q \times \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1})$$

( car :

$$S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$q \times S_n = q \times (q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} + q^n) = q^{0+1} + q^{1+1} + \dots + q^{n-1+1} + q^{n+1}$$

- donc, par télescopage (à retenir !):

$$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n+1}$$

(car

$$S_n - q \times S_n = \underbrace{q^0 - q^{0+1}}_0 + q^{1+1} + \dots + q^{n-1} - \underbrace{q^{n-1+1}}_0 + q^n - q^{n+1}$$

les termes se télescopent au fur et à mesure et il ne reste que le 1<sup>er</sup> et le dernier)

▪ Or :

$$S_n - q \times S_n = (1-q)S_n \quad (\text{par factorisation})$$

▪ Donc

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

Comme  $q \neq 1, 1-q \neq 0$  et on peut diviser chaque membre par  $1-q$  pour obtenir :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(Nous avons obtenu le cas particulier)

▪ D'après la remarque du premier point (▪)

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(Nous avons obtenu le cas général)

*cqfd*

**Remarque n°9. Une façon de retenir la formule**

La somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q$  avec  $q \neq 1$  vaut :

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

**Méthode n°2. Calcul de la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique**

▪ Soit  $(v_n)$  la suite géométrique de raison  $r=3$  et de premier terme  $v_0=-5$ . On veut calculer la somme  $A$  des dix premiers termes.

$$\left( \text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^9 v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_9 \right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = -5 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = -147\,620$$

▪ Soit  $(w_n)$  la suite géométrique de raison  $r=1,5$  et de premier terme  $w_1=2$ . On veut calculer la somme  $B$  des 5 premiers termes.

$$\left( \text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^5 w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \right)$$

$$B = w_1 \times \frac{1 - q^5}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 1,5^5}{1 - 1,5} = 26,375$$

**Remarque n°10.**

Si  $q=1$  alors la suite est constante et la somme des  $n$  premiers termes vaut simplement :  $n \times \text{premier terme}$

**Remarque n°11.**

Tant que  $n$  est fixé, on sait donc faire pas mal de choses sur les suites. Mais  $n$  peut devenir aussi grand que l'on veut : on dit que  $n$  peut « tendre vers l'infini ». On aimerait alors savoir comment se comportent les termes de la suite vers cet « infini ». C'est ce qui motive ce dernier paragraphe. Conformément au programme nous resterons dans l'intuition et nous utiliserons parfois des « pseudo-définitions » (cela sera signalé).

## IV Comportement de suite

### Définition n°6. Suite Croissante, suite décroissante

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ .
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ .

### Remarque n°12.

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

En pratique, c'est surtout la partie de droite de l'équivalence qui sera utilisée.

### Exemple n°5.

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = n^2 + 3n + 2$  est strictement croissante. En effet :

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
- Étudions la différence  $v_{n+1} - v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \underbrace{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2}_{v_{n+1}} - \underbrace{(n^2 + 3n + 2)}_{v_n} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 - n^2 - 3n - 2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

- Or  $n$  est un entier naturel donc  $n \geq 0$  d'où  $2n \geq 0$  et enfin  $2n + 1 \geq 1 > 0$
- Ainsi,  $v_{n+1} - v_n > 0$  qui équivaut à  $v_{n+1} > v_n$ .
- En conclusion : la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

### Définition n°7. Convergence, divergence, limite (pseudo-définition)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $l$  un nombre réel.

On dira que :

- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si les termes de la suite tendent vers  $l$ ,
- On dira alors que la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vaut  $l$  et on notera  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .
- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  si les termes de la suite tendent vers  $+\infty$ ,
  - la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  si les termes de la suite tendent vers  $-\infty$ ,
  - la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.

### Remarque n°13.

L'arnaque vient du fait qu'on a pas défini ce que « tendre » veut dire...

Donnons tout même une précision :

- Dire qu'une suite tend vers  $l$  signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi proches que l'on veut de  $l$ .
- Dire qu'une suite tend vers  $+\infty$  signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi grands que l'on veut.

**Exemple n°6.**

- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 = 10$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \ v_{n+1} = \frac{v_n}{5}$  converge vers zéro. (  $l=0$  )
- La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $w_0 = 10$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \ w_{n+1} = w_n + 5$  diverge vers  $+\infty$ .
- La suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $t_0 = 10$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \ t_{n+1} = t_n - 5$  diverge vers  $-\infty$ .
- La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = 10$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} = a_n + (-1)^n$  diverge.