FONCTIONS AFFINES ET ÉQUATIONS

I Définitions

Définition n°1. Fonction affine

Soit m et p deux nombres réels et f une fonction.
Si pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire $\boldsymbol{f(x)=mx+p}$
alors f est une **fonction affine**

Remarque n°1. Fonction constante, fonction linéaire

Si $m=0$, on parle de fonction constante
Si $p=0$, la fonction affine est aussi linéaire.

Exemple n°1.

$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3{,}2x-5\end{cases}$ est une fonction affine : $m=3{,}2$ et $p=-5$

$g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -4{,}3\end{cases}$ est une fonction constante.

$h:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2{,}5x\end{cases}$ est une fonction affine et linéaire.

Définition n°2. Représentation graphique, équation de courbe

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)\end{cases}$, une fonction quelconque.

On appelle représentation graphique de f et on note C_f l'ensemble des points du plan ayant pour coordonnées $(x\ ;\ y=f(x))$
On dit alors que C_f est la courbe d'équation $y=f(x)$

Propriété n°1. (admise pour le moment)

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto mx+p\end{cases}$,avec m et p des réels, une fonction affine, Alors sa représentation graphique C_f est une droite d'équation $y=mx+p$

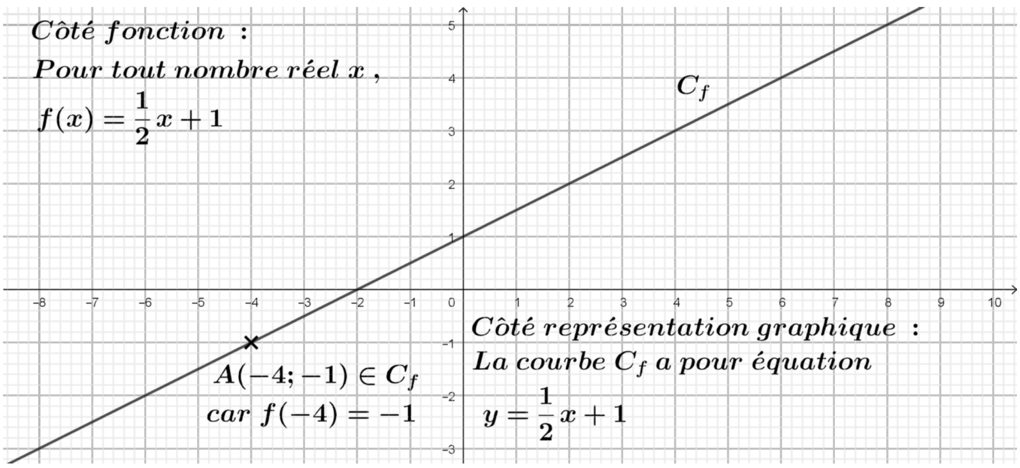
Définition n°3.

$\boldsymbol{m}$ est le **coefficient directeur** de la droite et $\boldsymbol{p}$ est son **ordonnée à l'origine.**

Propriété n°2.

Si $A(x_A\ ;\ y_A=f(x_A))$ et $B(x_B\ ;\ y_B=f(x_B))$ sont deux points distincts de C_f alors :

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$



II Résoudre une équation à une inconnue

II.1 Les outils

Propriété n°3.

Soient a, b, c trois nombres réels et d un réel non nul.

$\boxed{a=b \Leftrightarrow a+c=b+c}$ et $\boxed{a=b \Leftrightarrow a-c=b-c}$

$\boxed{a=b \Leftrightarrow a\times d=b\times d}$ et $\boxed{a=b \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{b}{d}}$

Propriété n°4.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

II.2 Les méthodes

Définition n°4.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Méthode n°1. ***Équation du type ax + b = 0*** $(a\neq 0)$

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+2)(2x-3)+3=(2x-1)(x-5)$

Réponse

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x\in\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$x \in S$

$(x+2)(2x-3)+3=(2x-1)(x-5)$

$2x^2-3x+4x-6+3 = 2x^2-10x-x+5$

$2x^2+x-3 = 2x^2-11x+5$

$2x^2+x-3 - (2x^2-11x+5)=0$

$2x^2+x-3-2x^2+11x-5=0$

$12x-8=0$

$12x=8$

$x=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

On en déduit que $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

C'est à dire que :

Cette équation possède une unique solution : $\frac{2}{3}$

Méthode n°2. ***Équation produit***

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(3x+2)(5-2x)(2x-7)=0$

Réponse

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Pour $x\in\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $x \in S$
- $(3x+2)(5-2x)(2x-7)=0$

(Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs au moins est nul.)

- $(3x+2 = 0 \text{ ou } 5-2x = 0 \text{ ou } 2x-7 = 0)$
- $\left(x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{-5}{-2} = 2{,}5 \text{ ou } x = \frac{7}{2} = 3{,}5\right)$

On en déduit que $S=\left\{-\frac{2}{3} ; 2{,}5 ; 3{,}5\right\}$. C'est à dire que :

Cette équation possède trois solutions : $-\frac{2}{3}$; $2{,}5$ et $3{,}5$