

# LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

## EXERCICE N°2 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que :  $a > 0$  et  $b > \sqrt{a}$ .

On donne également la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ .

On considère la suite  $u$  définie par  $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

Notre but est de comprendre que le terme  $u_n$  tend vers  $\sqrt{a}$ .

1) Un premier cas :  $a = 2$  et  $b = 5$ .

1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 5$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left( 5 + \frac{2}{5} \right)$ , ainsi  $u_1 = 2,7$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left( u_1 + \frac{2}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2,7 + \frac{2}{2,7} \right)$ , ainsi  $u_2 \approx 1,72$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left( u_2 + \frac{2}{u_2} \right)$ , ainsi  $u_3 \approx 1,441$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left( u_3 + \frac{2}{u_3} \right)$ , ainsi  $u_4 \approx 1,414$

n	$u_n$
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite  $u$  et la comparer avec  $\sqrt{a}$ .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 1,414213562

N début	500
N fin	520
Pas	1
Valider	

n	$u_n$
500	1.414213562
501	1.414213562
502	1.414213562
503	1.414213562
504	1.414213562
505	1.414213562
506	1.414213562

Ce qui correspond à une valeur approchée de  $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$	1.414213562
------------	-------------

2) Un premier cas :  $a = 5$  et  $b = 10$  .

2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 10$
- $u_1 = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{5}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left( 10 + \frac{5}{10} \right)$  , ainsi  $u_1 = 5,25$
- $u_2 = \frac{1}{2} \left( u_1 + \frac{5}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 5,25 + \frac{5}{5,25} \right)$  , ainsi  $u_2 \approx 3,101$
- $u_3 = \frac{1}{2} \left( u_2 + \frac{5}{u_2} \right)$  , ainsi  $u_3 \approx 2,357$
- $u_4 = \frac{1}{2} \left( u_3 + \frac{5}{u_3} \right)$  , ainsi  $u_4 \approx 2,239$

n	$u_n$
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562

2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite  $u$  et la comparer avec  $\sqrt{a}$  .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 2,236067977

Régler l'intervalle

N début	500
N fin	520
Pas	1

Valider

n	$u_n$
500	2.236067977
501	2.236067977
502	2.236067977
503	2.236067977
504	2.236067977
505	2.236067977
506	2.236067977

Ce qui correspond à une valeur approchée de  $\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$	2.236067977
------------	-------------