

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Nom :

Prénom :

Classe :

L'usage de la calculatrice est interdit.

Le sujet est à rendre avec la copie

PREMIÈRE PARTIE

EXERCICE N°1

Automatismes

(6 points)

Pour ce premier exercice, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1) Le double de l'inverse du carré de 7 est égal à :

1.a) $\frac{49}{2}$

1.b) $\frac{2}{49}$

1.c) $\frac{1}{98}$

1.d) 98

2) On considère la relation $F = \frac{a+b}{cd}$.

Lorsque $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$ et $d = -\frac{1}{4}$, la valeur de F est :

2.a) $\frac{5}{4}$

2.b) $\frac{7}{2}$

2.c) $-\frac{7}{2}$

2.d) $-\frac{5}{2}$

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_2 = -3$ et $u_5 = -18$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

3.a) $u_n = 2 - 5n$

3.b) $u_n = 7 - 5n$

3.c) $u_n = 5n - 13$

3.d) $u_n = -3n - 3$

4) La suite u est géométrique, de raison 3 et de premier terme $u_1 = 7$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

4.a) $u_n = 7 + 3(n-1)$

4.b) $u_n = 7 \times 3^{n-1}$

4.c) $u_n = 7 + 3^{n-1}$

4.d) $u_n = 3 \times 7^{n-1}$

5) Un récipient contenant initialement un litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures le volume d'eau diminue de 15 %. On appelle u_n le volume d'eau restant dans le récipient la $n^{\text{ième}}$ heure. On a alors :

5.a) $u_{n+1} = 0,85 u_n$

5.b) $u_n = 0,15^n$

5.c) $u_{n+1} = u_n - 0,15$

5.d) $u_n = 1 - 0,15n$

6) Que va afficher ce script en langage Python ?

6.a) 33

6.b) 17

6.c) 9

6.d) 19

```
1 u = 3
2 for loop in range(4):
3     u = 2 * u - 1
4 print(u)
```

7) La somme $S = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{20}$ vaut :

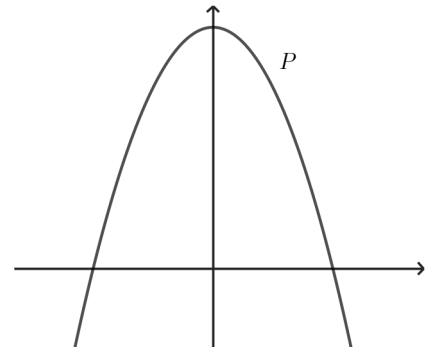
7.a) $\frac{1-7^{20}}{6}$

7.b) $\frac{7^{20}-1}{6}$

7.c) $\frac{7^{21}-1}{6}$

7.d) $\frac{1-7^{21}}{6}$

8) On a représenté ci-contre une parabole P .
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole P .
Laquelle ?



- 8.a) $x \mapsto x^2 - 20$ 8.b) $x \mapsto -x^2 - 20$
8.c) $x \mapsto -x^2 + 20$ 8.d) $x \mapsto -x^2 + 20x$

9) Le prix d'un article est multiplié par 0,975.
Cela signifie que le prix de cet article a connu :

- 9.a) une baisse de 2,5 % 9.b) une augmentation de 97,5 %
9.c) une baisse de 25 % 9.d) une augmentation de 0,975 %

10) On considère trois fonctions définies sur \mathbb{R} .

$$f_1 : x \mapsto x^2 - (1-x)^2 \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad f_3 : x \mapsto \frac{5 - \frac{2}{3}x}{0,7}$$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

- 10.a) Aucune 10.b) Toutes
10.c) Uniquement la fonction f_1 10.d) Uniquement les fonctions f_2 et f_3

11) Le prix d'un article est noté P . Ce prix augmente de 10 % puis baisse de 10 % .
A l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1 . On peut affirmer que :

- 11.a) $P_1 = P$ 11.b) $P_1 > P$ 11.c) $P_1 < P$ 11.d) Cela dépend de P

12) La quantité $2x^2 - 4x - 6$ est égale pour tout $x \in \mathbb{R}$ à :

- 12.a) $2(x-1)(x-3)$ 12.b) $(x+1)(2x-6)$
12.c) $(2x-3)(x-2)$ 12.d) $(2x+2)(x+3)$

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE N°2 Suite arithmétique, suite géométrique

(4 points)

À l'issue d'une étude conduite pendant plusieurs années, on modélise l'évolution du prix du m² d'un appartement neuf dans une ville française de la manière suivante :

À partir d'un prix de 4 200 € le m² en 2025, on applique chaque année une augmentation annuelle de 3 %.

1) Calculer, selon ce modèle, le prix du m² d'un appartement neuf dans cette ville en 2026 et en 2027.

2) On considère la suite de terme général u_n qui permet d'estimer, avec ce modèle, le prix en euro du m² d'un appartement neuf l'année 2025+n .
On a donc $u_0 = 4\,200$.

2.a) Quelle est la nature de la suite u ?

On se justifiera et on précisera les éléments caractéristiques de la suite u .

2.b) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

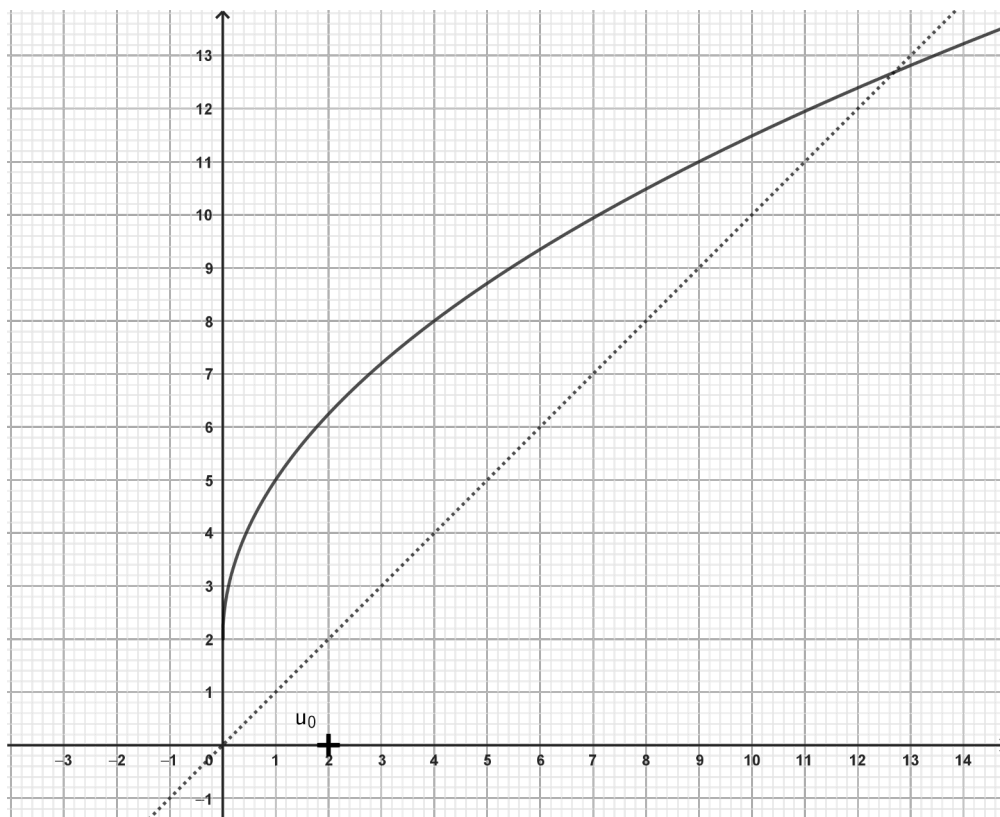
3) Selon ce modèle, pourra-t-on acheter en 2030, un appartement de 40 m² si l'on dispose d'une somme de 200 000 € ?

| Aide au calcul | |
|----------------------|----------------|
| 3×4326 | $= 12978$ |
| $432600 - 12978$ | $= 445578$ |
| $4200 \times 0,97^4$ | ≈ 3718 |
| $4200 \times 0,97^5$ | ≈ 3607 |
| $4200 \times 0,97^6$ | ≈ 3498 |
| $4200 \times 1,03^4$ | ≈ 4727 |
| $4200 \times 1,03^5$ | ≈ 4869 |
| $4200 \times 1,03^6$ | ≈ 5015 |

EXERCICE N°3 *Escalier de convergence***(2 points)**

Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

avec f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative (C) est représentée ci-dessous.



- 1) Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessous les termes u_1 , u_2 et u_3 de la suite u en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) et en laissant apparaître les traits de construction.
- 2) Conjecturer le sens de variation de u .
- 3) Conjecturer, si elle existe, la limite de u .

EXERCICE N°4 *Suite arithmético-géométrique***(4 points)**

Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 6$.

- 1) Montrer que v est une suite géométrique de raison 0,5 dont on précisera le premier terme.

(Indication : On commencera par exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , on pourra alors remplacer u_{n+1} par...)

- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) On note $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{100}$. Déterminer la valeur exacte de S .
- 4) En déduire une valeur exacte de la somme $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

Le 1er janvier 2025, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel n , on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $2025+n$.

Aide au calcul

$$\frac{145}{150} = \frac{29}{30}$$

$$\frac{1405}{1450} = \frac{281}{290}$$

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite U . Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.

2) Pour tout entier naturel n , on admet la relation de récurrence $U_{n+1} = 0,9U_n + 100$.

Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite V est géométrique.

3) Pour tout entier naturel n , donner l'expression de V_n en fonction de n .

4) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

5) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$

6) En déduire alors le sens de variation de la suite U .

7) Au 1er janvier 2025, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenu par recopie vers le bas après avoir saisi la formule $=0,9*B2+100$ dans la cellule B3.

À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

| | A | B |
|----|----|-------------|
| 1 | n | Un |
| 2 | 0 | 1500 |
| 3 | 1 | 1364,5 |
| 4 | 2 | 1328,05 |
| 5 | 3 | 1295,245 |
| 6 | 4 | 1265,7205 |
| 7 | 5 | 1239,14845 |
| 8 | 6 | 1215,233605 |
| 9 | 7 | 1193,710245 |
| 10 | 8 | 1174,33922 |
| 11 | 9 | 1156,905298 |
| 12 | 10 | 1141,214768 |
| 13 | 11 | 1127,093291 |
| 14 | 12 | 1114,383962 |
| 15 | 13 | 1102,945566 |
| 16 | 14 | 1092,651009 |
| 17 | 15 | 1083,385908 |
| 18 | 16 | 1075,047318 |
| 19 | 17 | 1067,542586 |
| 20 | 18 | 1060,788327 |
| 21 | 19 | 1054,709495 |
| 22 | 20 | 1049,238545 |
| 23 | 21 | 1044,314691 |
| 24 | 22 | 1039,883222 |
| 25 | 23 | 1035,894899 |
| 26 | 24 | 1032,305409 |
| 27 | 25 | 1029,074869 |
| 28 | 26 | 1026,167382 |
| 29 | 27 | 1023,550643 |
| 30 | 28 | 1021,195579 |
| 31 | 29 | 1019,076021 |
| 32 | 30 | 1017,168419 |
| 33 | 31 | 1015,451577 |

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + 1}{3^n - 1}$

1) Démontrer que la suite u est strictement décroissante.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n - 1 = \frac{2}{3^n - 1}$.

3) La suite u converge-t-elle vers une valeur et si oui laquelle ? (On ne demande qu'une conjecture)