PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E07C

EXERCICE N°1 Indépendance deux à deux vs indépendance mutuelle

On dit que les événements A , B et C sont **mutuellement indépendants** si l'on a toutes les égalités suivantes :

$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\times P(B)}$ $\boxed{P(A \cap C) = P(A)\times P(C)}$

$\boxed{P(B \cap C) = P(B)\times P(C)}$ $\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\times p(B)\times P(C)}$

1) Si A , B et C sont mutuellement indépendants, est-il vrai que A , B et C sont deux à deux indépendants, c'est-à-dire que A et B , A et C et B et C sont indépendants ?

La réponse est oui de façon évidente avec les trois premières égalités.

2) On s'intéresse maintenant à la question suivante: si A , B et C sont deux à deux indépendants, est-il vrai que A , B et C sont mutuellement indépendants ?

On examine la situation suivante : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note :

A l'événement « obtenir pile au 1[er] lancer»,
B l'événement « obtenir face au 2[e] lancer » et
C l'événement « obtenir la même chose aux 2 lancers ».

2.a) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ $P(B\cap C)$ et $P(A\cap B\cap C)$.

$\boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$; $\boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$

$$P(C) = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{pile et pile}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{face et face}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(A \cap C) = \frac{1}{4}}$

« la même chose aux 2 lancers ET pile au premier » donne « pile et pile »

$P(B \cap C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(B \cap C) = \frac{1}{4}}$

« la même chose aux 2 lancers ET face au 2e» donne «face et face»

$\boxed{P(A \cap B \cap C) = 0}$

2.b) Les événements A , B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

D'après la question précédente :

$P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$; $P(A)\times P(C)=P(A\cap C)$ et $P(B)\times P(C)=P(B\cap C)$

$\boxed{\text{Les événements sont bien indépendants deux deux}}$.

2.c) Les événements A , B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

$P(A)\times P(B)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$

La dernière égalité n'est pas satisfaite donc :

$\boxed{\text{les événements ne sont pas mutuellement indépendants}}$

2.d) Que peut-on en déduire quant à la question que l'on se posait ?

Si des événements sont indépendants deux à deux, ils ne sont pas forcément mutuellement indépendants.