VARIABLES ALÉATOIRES (LA SUITE)

Ce cours est la suite du cours de première (premier QRcode) et utilise les notions abordées dans le précédent (second QRcode) . Il est donc bon de se rafraîchir la mémoire...

cliquables également

I Coefficients binomiaux

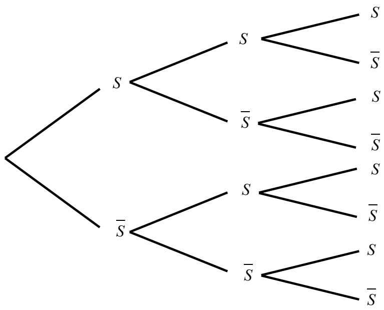
Définition n°1.

Soit n un nombre entier et p une probabilité (c.à.d $0 \leqslant p \leqslant 1$)
Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ sur l'arbre représentant le schéma de Bernoulli.

Ce coefficient est noté $\binom{n}{k}$, ce qui se lit : « $\boldsymbol{k}$ **parmi** $\boldsymbol{n}$ »

Exemple n°1.

On a modélisé un schéma de Bernoulli , $n=3$ et p est quelconque.
Il y a 3 chemins comportant exactement une fois l'issue S : $(S\ ,\ \overline{S}\ ,\ \overline{S})$, $(\overline{S}\ ,\ S\ ,\ \overline{S})$ et $(\overline{S}\ ,\ \overline{S}\ ,\ S)$ donc $\binom{3}{1} = 3$.



De même :
$\binom{3}{0}=1$; $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{2}=1$

Propriété n°1.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$$

preuve :

Soit une collection de n éléments.
- Il n'y a qu' une seule façon de ne prendre aucun élément parmi les n , de même il n'y a qu'une façon de tous les prendre. Donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Il y a n façons façons de prendre un élément parmi les n (chaque élément choisi donne une façon) donc $\binom{n}{1} = n$.

Enfin prendre un élément parmi les n revient à en laisser $n-1$ de côté. En inversant les rôles, on obtient $\binom{n}{n-1} = n$.

Propriété n°2.

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

preuve :

Soit une collection de n éléments dans laquelle nous fixons un élément quelconque et soit un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Dans l'ensemble des parties contenant k éléments parmi les n disponibles, il y a deux possibilités : soit les parties contiennent l'élément fixé, soit elles ne le contiennent pas (bien sûr, ces deux ensembles de parties sont disjoints).

▪ Dénombrons celles qui contiennent l'élément fixé :
L'élément fixé étant choisi d'office, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre $k-1$ puisque l'élément fixé est déjà choisi. On a donc $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

▪ Dénombrons, à présent, celles qui ne contiennent pas l'élément fixé :
L'élément fixé étant exclu, il nous reste $n-1$ éléments disponibles et parmi ceux-ci, il nous faut en prendre k . On a donc $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

▪ Au final pour obtenir les $\binom{n}{k}$ parties possibles, il faut réunir les $\binom{n-1}{k-1}$ parties contenant l'élément fixé et les $\binom{n-1}{k}$ ne le contenant pas.

Ainsi $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

II Le triangle de Pascal

Source : Wikipédia

La propriété n°2, nous permet de construire ce qu'on appelle le triangle de Pascal.
C'est un tableau triangulaire tel que la ligne n donne les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

La théorie

$n=0$	$\binom{0}{0}$					
$n=1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
$n=2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
$n=3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
$n=4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$n=5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$
	⋮	⋮	⋮			

$$\begin{array}{c}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ \binom{n}{k}\end{array}$$

La pratique

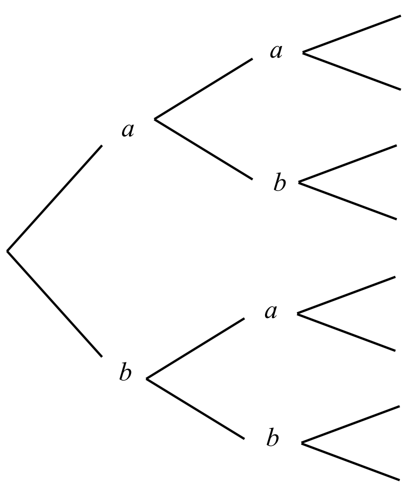
1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
⋮	⋮	⋮			

Remarque n°1. ***Comment développer $(a+b)^n$? (pour la culture...)***

Un intérêt du triangle de Pascal est de faciliter le développement des binômes de Newton ($(a+b)^n$ pour n entier naturel).

Exemple n°2. ***Un exemple avec $(a+b)^3$.***

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = 1\,a^3b^0+3\,a^2b^1+3\,a^1b^2+1\,a^0b^3 = \mathbf{a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3}$$



a^3b^0 + a^2b^1 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^1b^2 + a^0b^3

1			
1	1		
1	1	1	
1	3	3	1

Toutes ces notions nous permettent d’aborder le dernier paragraphe de ce chapitre.

III Loi binomiale

Définition n°2.

Soit X la variable aléatoire correspondant au **nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli** de paramètres n et p . La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** .
On la note $\boldsymbol{\mathscr{B}(n\ ,\ p)}$

Propriété n°3.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$.
Pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,
la probabilité que X égale k est :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$$

Remarque n°2.

p étant la probabilité de succès à une épreuve de Bernoulli, la probabilité de l’échec vaut bien sûr $1-p$.
Pour que $X=k$, il faut k succès (p^k) et $n-k$ échecs ($(1-p)^{n-k}$) .

preuve :

Dans l’arbre associé à cette expérience aléatoire, si un chemin comporte k succès alors il comporte aussi $n-k$ échecs.
Or : la probabilité de l’issue associée à un tel chemin vaut $p^k\times(1-p)^{n-k}$
et par définition, il existe $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.

On a donc bien : $P(X=k) = \binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

Propriété n°4.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ,\ p)$
alors son espérance est : $\boxed{E(X) = n\times p}$

Exemple n°3. Se servir d'une loi binomiale

La situation

Dans les Landes, au 15/11/2019, la part de la population bénéficiaire de la couverture maladie universelle complémentaire (CMUC) était de 5,3 %.
En parcourant, le département, on a choisi 20 personnes au hasard (*On a donc un échantillon de taille 20*).

La question n°1

On s'intéresse à la probabilité, à 10^{-3} près, que 4 d'entre elles soient bénéficiaires de la CMUC.

La réponse

▪ *On commence par identifier l'épreuve de Bernoulli qui va être répétée.*
Pour une personne choisie, on considère comme succès le fait d'être bénéficiaire de la CMUC. On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}053$
▪ *On justifie ensuite l'indépendance afin d'avoir notre schéma de Bernoulli.*
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le fait d'être bénéficiaire de la CMUC pour une des personnes choisies est indépendant de celui des autres.
▪ *Puis on peut décrire notre loi binomiale,*
Ainsi, en notant X , le nombre de personnes étant bénéficiaires de la CMUC, on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}053$
▪ *Et enfin on peut faire les calculs.*
Il s'agît donc de calculer $P(X=4)$

$$P(X=4) = \binom{20}{4}\times 0{,}053^4\times(1-0{,}053)^{20-4} = 210\times 0{,}053^4\times 0{,}947^{16}$$

$$\boxed{P(X=4) \approx 0{,}016}$$

La question n°2

Si on prélevait un grand nombre d'échantillons de taille 20. Combien y aurait-il de bénéficiaires de la CMUC en moyenne dans chaque échantillon ?

La réponse

Il s'agît de calculer l'espérance de X
Comme X suit $\mathscr{B}(20\ ;\ 0{,}053)$ alors
$E(X) = 20\times 0{,}0{,}53 = 1{,}06$

$\boxed{\text{Chaque groupe comporterait en moyenne } 1 \text{ personne bénéficiaire de la CMUC}}$