LA FONCTION INVERSE E05C

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Chaque jour, une usine pharmaceutique opère dans la fabrication de médicaments essentiels. La production quotidienne varie entre 10 et 30 milliers d'unités de médicaments. On notera x le nombre de milliers d'unités de médicaments. Le coût total de production, exprimé en euros, pour x milliers d'unités de médicaments est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[5\ ;\ 30]$ par : $C(x) = 15x^3-450x^2+3000x+7680$

1) Quel est le coût de production pour 12000 unités de médicaments ?

Il s'agit de calculer $C(12)$.
Attention à bien lire l'énoncé : on parle en milliers d'unités pour x .

$C(12) = 15\times12^3-450\times12^2+3000\times12+7680 = 4800$

Ainsi le coût de production pour 12000 unités de médicaments sera de $\boxed{4800\ €}$.

2) A chaque millier d'unités de médicaments, on associe le cout moyen de production, on a donc :

$C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ définie sur l'intervalle $[5\ ;\ 30]$.

Montrer que pour tout $x \in [5\ ;\ 30]$,

$C_M(x) = 15x^2-450x+3000+\dfrac{7680}{x}$

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{15x^3-450x^2+3000x+7680}{x} = 15x^2-450x+3000+\frac{7680}{x}$$

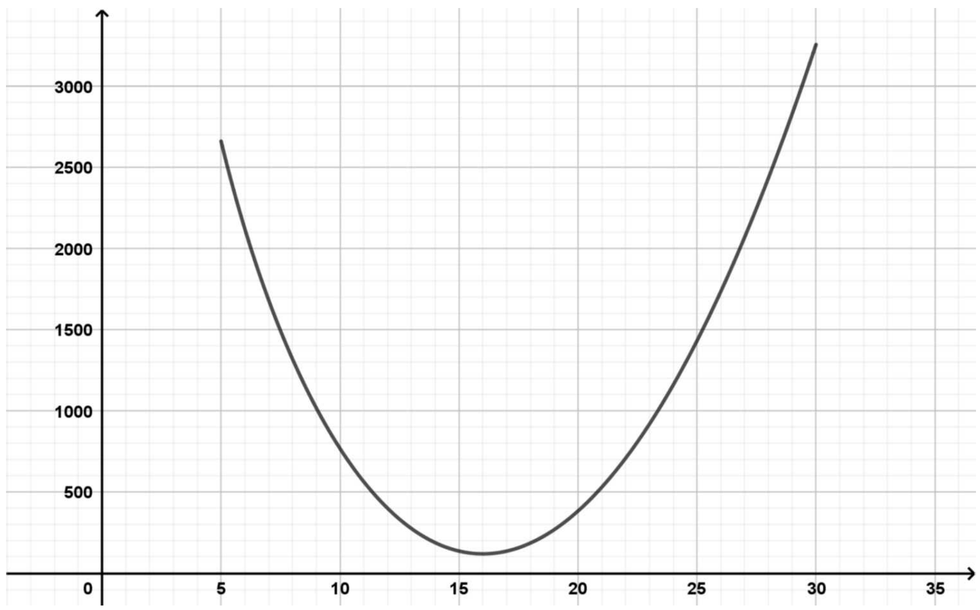
3) Calculer le coût moyen de production d'un millier d'unités de médicaments si l'usine fabrique 12000 unités de médicaments par jour.

Il s'agit de calculer $C_M(12)$.

$C_M(12) = 15\times12^2-450\times12+3000+\dfrac{7680}{12} = 400$

Ainsi le coût moyen de production pour 12000 unités de médicaments sera de $\boxed{400\ €}$.

4) On a représenté la fonction C_M ci-dessous. Déterminer l'ensemble des quantités de médicamens qu'il est possible de produire avec un coût moyen inférieur à 500 € pour 1000 unités.



5) Montrer que $C_M'(x) = \dfrac{30(x-16)(x^2+x+16)}{x^2}$

Pour x compris entre 5 et 30.

▪ On a d'une part :

$$C_M(x) = 15x^2-450x+3000+\frac{7680}{x}$$

$$C_M'(x) = 30x-450-\frac{7680}{x^2}$$

▪ Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{30(x-16)(x^2+x+16)}{x^2} &= \frac{30[x^3+x^2+16x-16x^2-16x-256]}{x^2}\\ &= \frac{30[x^3-15x^2-256]}{x^2}\\ &= \frac{30x^3-450x^2-7680}{x^2}\\ &= 30x-450-\frac{7680}{x^2}\\ &= C_M'(x)\end{aligned}$$

▪ Ainsi, on a bien $C_M'(x) = \dfrac{30(x-16)(x^2+x+16)}{x^2}$

6) Justifier que pour tout $x \in [5\,;30]$, $x^2+x+16 > 0$

Soit $x \in [5\,;30]$

La fonction carré est croissante sur $[5\,;30]$ donc $x^2 \geqslant 5^2 = 25$

De plus $x \geqslant 5$

On en déduit que $x^2+x+16 \geqslant 25+5+16 > 0$

Ainsi, pour tout $x \in [5\,;30]$, $x^2+x+16 > 0$

7) Étudier le signe de $C_M(x)$ et en déduire le tableau de variation de C_M .

▪ 30 est un nombre positif

▪ $x-16 > 0 \Leftrightarrow x > 16$

▪ $x^2+x+16 > 0$ pour tout $x \in [5\,;30]$ d'après la question précédente.

On en déduit le tableau suivant :

x	5		16		30
$x-16$		$-$	0	+	
x^2+x+16		+	|	+	
$C_M'(x)$		$-$	0	+	
$C_M(x)$	2661 $=C_M(5)$	↘	$=C_M(16)$ 120	↗	3256 $=C_M(30)$

8) En déduire la quantité de médicaments à produire chaque pour que le coût moyen soit minimal et donnez ce coût moyen.

D'après le tableau précédent, il faut produire $\boxed{\text{120 000 médicaments par jour}}$ pour avoir un $\boxed{\text{coût moyen minimal de 120 euro}}$