

DEVOIR MAISON N°5 LE BARÈME

Nom :

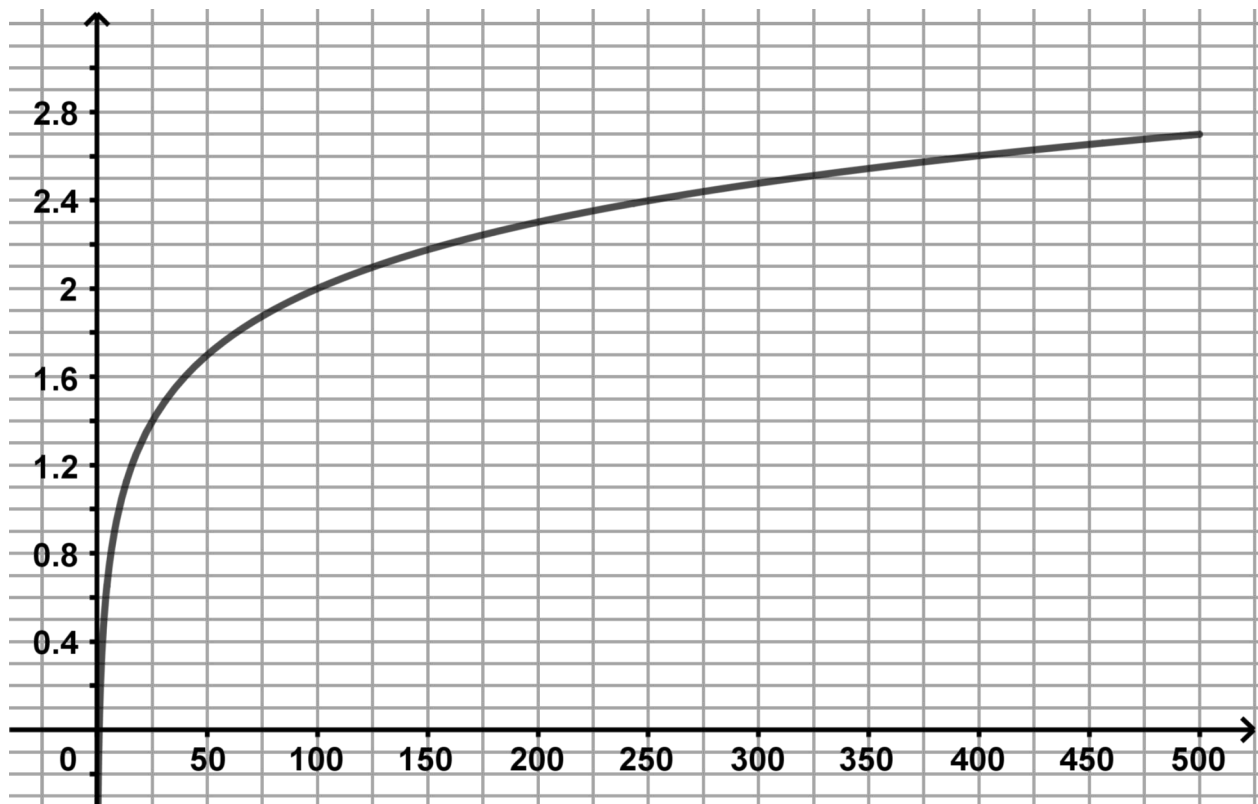
Prénom :

Classe :

EXERCICE N°1

(20 points)

Dans cet exercice, la fonction logarithme décimal est notée $x \rightarrow \log(x)$. Sa courbe représentative sur l'intervalle $] 0 ; 500]$ est donnée ci-dessous.



- 1) Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée de $\log(300)$.
On donnera le résultat arrondi dixième près.

2 pts

$$\log(300) \approx 2,5$$

Un client place un capital C , exprimé en milliers d'euros, à intérêts composés.
Le taux annuel est noté i et le capital acquis après n annuités est noté A_n .
Les variables A_n , C , n et i sont liées par la relation suivante :

$$\log(A_n) = \log(C) + n \times \log(1+i)$$

Dans tout l'exercice, on suppose que le taux annuel i est de 5%. On pourra alors considérer que 0,021 est une valeur approchée de $\log(1+i)$.

- 2) Le client désire placer 100 000 €. Ainsi $C = 100$.

- 2.a) Calculer $\log(A_{30})$

$\log(A_n) = \log(C) + n \times \log(1+i)$ donc il suffit de remplacer n par 30, C par 100 et $\log(1+i)$ par 0,021

$$\log(A_{30}) \approx \log(100) + 30 \times 0,021 = 2,63$$

Ainsi $\log(A_{30}) \approx 2,63$

4 pts

- 2.b) Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

$$\log(A_{30}) \approx 2,63 \text{ donc } A_{30} \approx 10^{2,63} \approx 426,57952$$

Au bout de 30 ans, le capital acquis sera d'environ 426 579,52 €

4 pts

3) Le client a pour objectif maintenant d'obtenir un capital de 300 000 € au bout de 30 ans. On a ainsi : $\log(300) = \log(C) + 30 \times \log(1+i)$.

En détaillant votre démarche, donner une estimation de C . En déduire le capital à placer initialement pour atteindre l'objectif du client, arrondi au millier d'euros près.

4 pts

$$\log(300) = \log(C) + 30 \times \log(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \log(C) = \log(300) - 30 \times \log(1+i)$$

On en déduit que :

$$\log(C) \approx 2,5 - 30 \times 0,021 = 2,5 - 0,63 = 1,87$$

$$\text{Donc } C \approx 10^{1,87} \approx 74,13102$$

Ainsi le client doit placer environ 74 131,02 €

ici on a utilisé l'estimation graphique de la question 1) et l'approximation proposée de $\log(1+i)$.

Voici deux autres versions possibles :

1)

$$\log(C) \approx 2,48 + 30 \times 0,021 = 2,48 - 0,63 = 1,85$$

$$\text{Donc } C \approx 10^{1,87} \approx 74,13102$$

Ainsi le client doit placer environ 70 794,58 €

2)

$$\begin{aligned} \log(C) &= \log(300) - 30 \times \log(1+i) \\ &= 2 + \log(3) - 30 \times \log\left(\frac{105}{100}\right) \\ &= 2 + \log(3) - 30 \times (\log(105) - 2) \\ &= 62 + \log(3) - 30 \times \log(105) \\ &\approx 1,84 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } C \approx 10^{1,84} \approx 69,18309$$

Ainsi le client doit placer environ 69 183,09 €

Comme vous pouvez le voir, il est intéressant de travail au maximum avec des valeurs exactes...

4) Le banquier affirme qu'il faut plus de 14 ans pour doubler le capital investi, quel que soit le capital initial.

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier votre réponse en résolvant une équation.

On veut doubler la capital C , on va donc chercher le rang n tel que $A_n = 2C$

On va donc résoudre l'équation : $\log(2C) = \log(C) + n \times \log(1+i)$

$$\log(2C) = \log(C) + n \times \log(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \log(2) + \log(C) = \log(C) + n \times \log(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \log(2) = n \times \log(1+i)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1+i)} \approx \frac{\log(2)}{0,021} \approx 14,3$$

On a bien $n > 14$ et on en déduit que le banquier a raison.

Et en étant plus précis ?

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1+i)} = \frac{\log(2)}{\log(105) - 2} \approx 14,2 \quad \text{Le banquier a toujours raison.}$$

6 pts