

# VARIABLES ALÉATOIRES E03C

## EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret

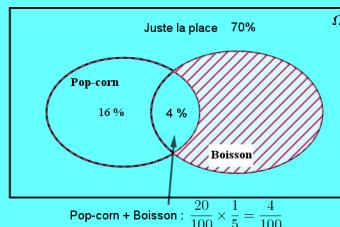
Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

- 1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?

$$\frac{100}{100} - \left( \frac{70}{100} + \frac{20}{100} \right) = \frac{10}{100}$$

Ainsi 10 % des clients achètent une place avec seulement une boisson.



- 2) Soit  $R$  la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de  $R$ .

- On détermine  $\Omega$ .

$Place\ seule(S)$  ,  $Place+Boisson(B)$  ,  $Place+Pop-corn(C)$   
 $Place+Pop-corn+Boisson(BC)$

$$\Omega = \{S ; B ; C ; BC\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur  $\Omega$ .

Issue	$S$	$B$	$C$	$BC$	Total
Probabilité	0,7	0,1	0,16	0,04	1

- On détermine les images de chaque issue par  $R$  (autrement dit : on détermine  $R(\Omega)$ )

$$R(\{S\}) = 7 \text{ , } R(\{B\}) = 7+3=10 \text{ , } R(\{C\}) = 7+4 = 11 \text{ , } \\ R(\{BC\}) = 7+3+4 = 14$$

(Il y a quatre images possibles : 7 ; 10 ; 11 et 14 )

- On regroupe les antécédents :

Ici, c'est immédiat.

Le plus gros du travail  
est fait au brouillon

- On calcule la probabilité de chaque événement :

- $P(\{R = 7\}) = P(S) = 0,7$
- $P(\{R = 10\}) = P(B) = 0,1$
- $P(\{R = 11\}) = P(C) = 0,16$
- $P(\{R = 14\}) = P(BC) = 0,04$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$r_i$	7	10	11	14	Total	
$P(\{R = r_i\})$	0,7	0,1	0,16	0,04	1	

3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?  
Il s'agit d'abord de calculer  $E(R)$  puis de multiplier par 2000 :

$$\begin{aligned} E(R) &= r_1 \times P(R = r_1) + r_2 \times P(R = r_2) + r_3 \times P(R = r_3) + r_4 \times P(R = r_4) \\ &= 7 \times 0,7 + 10 \times 0,1 + 11 \times 0,16 + 14 \times 0,04 \\ &= 4,9 + 1 + 1,76 + 0,56 \end{aligned}$$

$$E(R) = 8,22$$

Ainsi pour chaque spectateur, il peut espérer 8,22 €.

$$2000 \times E(R) = 2000 \times 8,22 = 16440$$

Pour 2000 spectateurs, il peut espérer un chiffre d'affaire de 16 440 € .

4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

Si on note  $X$  la variable aléatoire donnant le nouveau prix payé par un client du cinéma choisi au hasard alors :

$$X = R+0,5$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(R+0,5) = E(R)+0,5 = 8,22+0,5 = 8,72$$

Il peut alors espérer un prix payé par client de 8,72 € .