DEVOIR SURVEILLÉ N°3 LE CORRIGÉ

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**

EXERCICE N°1 *Définition et calcul des termes d'une suite arithmétique* *(3 points)*

Soit la suite arithmétique v définie par $v_0 = 7$ et de raison $r = 3{,}5$.

1) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = v_n+3{,}5}$

2) Calculez les termes v_1 , v_2 et v_3 .

$v_1 = v_0+3{,}5$
$v_1 = 7+3{,}5$
$\boxed{v_1 = 10{,}5}$

$v_2 = v_1+3{,}5$
$v_2 = 10{,}5+3{,}5$
$\boxed{v_2 = 14}$

$v_3 = v_2+3{,}5$
$v_3 = 14+3{,}5$
$\boxed{v_3 = 17{,}5}$

3) Exprimez v_n en fonction de n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 7+3{,}5n}$

EXERCICE N°2 *Reconnaissance d'une suite arithmétique* *(3 points)*

Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle est arithmétique et le cas échéant donner ses éléments caractéristiques :

1) La suite u définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = 5+4n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1}-u_n$:

$u_{n+1}-u_n = 5+4(n+1)-[5+4n] = 5+4n+4-5-4n = 4$

$u_{n+1}-u_n = 4$ équivaut à $u_{n+1} = u_n+4$

On reconnaît une suite $\boxed{\text{arithmétique}}$ de $\boxed{\text{raison } 4}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 5}$.

2) La suite w définie pour tout entier naturel *n* par : $w_{n+1} = w_n-1{,}2$ avec $w_0 = 2$

On reconnaît une suite $\boxed{\text{arithmétique}}$ de $\boxed{\text{raison } -1{,}2}$ et de premier terme $\boxed{w_0 = 2}$.

3) La suite z définie pour tout entier naturel *n* par : $z_n = 2^n+3$.

On a : $z_1-z_0 = 4-3 = 1$

Donc si la suite est arithmétique alors la raison ne peut être que 1.

Or : $z_2-z_1 = 7-4 = 3$

On en déduit que la suite n'est $\boxed{\text{pas arithmétique}}$.

EXERCICE N°3 *Application des suites arithmétiques à un problème concret* *(6 points)*

Dans une petite ville, la population augmente de manière constante chaque année en raison de naissances et de nouvelles arrivées. On observe que la population augmente de 300 personnes par an. La population initiale en 2020 était de 10 000 habitants.

1) Modélisez l'évolution de la population à l'aide d'une suite arithmétique et exprimez la population P_n en fonction de l'année *n*, où $n = 0$ correspond à l'année 2020.

Chaque année, la population augmente de 300, nous pouvons donc modéliser la situation à l'aide d'une suite arithmétique de raison 300.

En suivant les indications de la question, on peut écrire que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P_n = 10000+300n}$

2) Représenter les quatre premiers termes de la suite dans un repère sur l'annexe au dos du sujet.

Voir l'annexe.

3) En supposant que cette croissance continue de manière constante, déterminez l'année où la population atteindra ou dépassera 15 000 habitants. Justifiez vos calculs.

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $P_n \geqslant 15000$

Les assertions sont équivalentes :

$P_n \geqslant 15000$

$10000+300n \geqslant 15000$

$300n \geqslant 5000$

$n \geqslant \dfrac{5000}{300} \approx 16{,}7$

On en déduit que la première valeur de n qui convient est 17.

Ainsi , c'est $\boxed{\text{en } 2037}$ $(= 2020+17)$ que la population dépassera les 15000 habitants.

EXERCICE N°4 Modélisation d'une croissance linéaire (4 points)

Le prix d'un abonnement à une plateforme de streaming était de 8€ en 2018. Depuis, le prix augmente de 0,5€ chaque année.

1) Modélisez l'évolution du prix de l'abonnement par une suite arithmétique.

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ arithmétique de raison $r=0{,}5$ et de premier terme $u_0 = 8$.

Cette suite est telle que u_n représente le prix de l'abonnement en euros pour l'année $2018+n$.

2) Déterminez l'année où le prix de l'abonnement atteindra 12€.

On peut écrire que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 8+0{,}5n}$

Il s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{N}$ $u_n = 12$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

$u_n = 12$

$8+0{,}5n = 12$

$0{,}5n = 4$

$n = 8$

Et comme, $2018+8=2026$, on en déduit que l'abonnement atteindra 12 € $\boxed{\text{en } 2026}$.

EXERCICE N°5 Croissance linéaire et suites arithmétiques (4 points)

Une plante pousse de façon linéaire, ajoutant 0,7 cm de hauteur chaque semaine. Sa hauteur initiale était de 12 cm.

1) Écrivez la suite arithmétique correspondant à la hauteur de la plante.

Notons $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite. On a : $\boxed{\begin{cases} h_0 = 12 \\ h_{n+1} = h_n+0{,}7 \end{cases}}$ où h_n est la hauteur de la plante en cm après n semaines.

Autre réponse possible :

Notons $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite. On a : $\boxed{h_n = 12+0{,}7n}$ où h_n est la hauteur de la plante en cm après n semaines.

D'autres rédactions sont bien sûr possibles.

L'important est que vous parliez du premier terme, de la raison, de l'unité mesure des termes (h_n est en cm) et de la signification du rang (n est le nombre de semaines écoulées)

2) Calculez la hauteur de la plante après 8 semaines.

Il s'agit de calculer h_8 .

Comme $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = 12+0{,}7n$.

$h_8 = 12+0{,}7\times 8$

$h_8 = 17{,}6$

Après 8 semaines, la plante mesure $\boxed{17{,}8 \text{ cm}}$

3) Déterminez le nombre de semaines nécessaires pour que la plante atteigne une hauteur de au moins 1 m.

Il s'agit de résoudre l'inéquation $h_n \geqslant 100$

Hé oui, 1 m vaut 100 cm…

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$h_n \geqslant 100$

$12+0{,}7n \geqslant 100$

$0{,}7n \geqslant 88$

$n \geqslant \dfrac{88}{0{,}7} \approx 125{,}7$

On en déduit qu'il faudra attendre $\boxed{126 \text{ semaines}}$.

ANNEXE DE L'EXERCICE N°3