

# LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

## EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Le 1<sup>er</sup> janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière  $P$ , en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.

Au bout de  $n$  mois écoulés, on a donc la suite  $(P_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $P_n = 2 \times 1,03^n$ .

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction  $P$  définie pour tout réel  $x$  par :  $P(x) = 2 \times 1,03^x$ .

On considère qu'un mois dure 30 jours.

Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de  $P(0,2)$  et au bout de 15 jours  $P(0,5)$ .

1) Quelle est la nature de la suite  $(P_n)$ . Préciser ses éléments caractéristiques.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $P_n = 2 \times 1,03^n$

On reconnaît une **suite géométrique** de **raison  $q = 1,03$**  et de premier terme  **$P_0 = 2$**

2) Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?

Un an et demi représente 18 mois et 18 est un nombre entier, il suffit alors de calculer  $P_{18}$ .

Le réponse est donc **OUI**.

3) Calculer la production le 1<sup>er</sup> février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

On décide que le jour mentionné n'est pas écoulé.

▪ Le 1<sup>er</sup> février 2020 :

Il se sera écoulé 13 mois, il s'agit donc de calculer  $P_{13}$ .

$$P_{13} = 2 \times 1,03^{13} \approx 2,937$$

La production sera alors d' **environ 2937 vaccins par jour**.

▪ Le 15 mars 2021 :

Il se sera écoulé 26 mois et 14 jours soit  $26 + \frac{14}{30} = \frac{397}{15}$  mois, il s'agit donc de calculer

$$P\left(\frac{397}{15}\right) = 2 \times 1,03^{\frac{397}{15}} \approx 4,373$$

La production sera alors d' **environ 4373 vaccins par jour**.

▪ Le 5 janvier 2024 :

Il se sera écoulé 60 mois et 4 jours soit  $60 + \frac{4}{30} = \frac{902}{15}$  mois, il s'agit donc de calculer

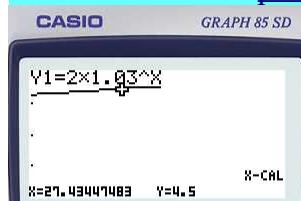
$$P\left(\frac{902}{15}\right) = 2 \times 1,03^{\frac{902}{15}} \approx 11,830$$

(le dernier zéro n'a pas à apparaître sur votre copie, il a été laissé pour vous rappeler qu'on a fait un arrondi au millième)

La production sera alors d' **environ 11830 vaccins par jour**.

4) À l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de vaccins dépassera 4500 par jour.

Voici les tutoriels : [pour la TI](#) et [pour la CASIO](#)



La calculatrice nous indique environ 27,4344 mois soit 27 mois et  $0,4344 \times 30 \approx 13$  jours.

La date est donc le **14 mars 2021**.

Le 13<sup>e</sup> jour est écoulé.

# LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

## EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours.

(1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?

Une augmentation de 5 % correspond à un Coefficient Multiplicateur CM valant 1,05.

Nous allons donc utiliser la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 992 \times 1,05^x$$

La démarche est la même que pour les suites, le «  $u_0$  » vaudrait 992. Comme l'exposant ne sera pas entier (on ne nous demande pas le solde au bout d'un nombre entier d'années), on va utiliser une fonction exponentielle. Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de  $x$ .

De plus, deux ans, trois mois et quatre jours font  $2 \times 365 + 3 \times 31 + 4 = 827$  jours soit  $\frac{827}{365}$  années.

Il s'agit donc de calculer  $f\left(\frac{827}{365}\right)$

$$f\left(\frac{827}{365}\right) = 992 \times 1,05^{\frac{827}{365}} \approx 1107,95$$

Ainsi le solde sera alors d' environ 1107,95 €.

2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement?

10 ans 3 mois et 20 jours font  $10 \times 365 + 3 \times 31 + 20 = 3763$  jours soit  $\frac{3763}{365}$  années.

Notons  $S$  le solde initial.

Il s'agit alors de résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $S \times 1,05^{\frac{3763}{365}} = 992$

$$S \times 1,05^{\frac{3763}{365}} = 992 \Leftrightarrow S = \frac{992}{1,05^{\frac{3763}{365}}} \approx 599,87$$

On en déduit qu'Alissa avait placé environ 599,87 €

600 € serait compté comme bon...

3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

Ici, on fait le choix de partir du présent : « à ce jour : 992 € »

Il n'est pas interdit de partir du passé mais il faut le signaler clairement lors de votre rédaction.

Nous devrions procéder comme à l'exercice n°1 mais nous allons plutôt utiliser une « recette » que nous justifierons plus tard.

Nous savons qu'à ce jour Alissa a un solde de 992 € et nous allons déterminer dans combien de jours son solde sera supérieur ou égal à 2000 €.

Il s'agit de résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) \geq 2000$  où  $f$  est la fonction définie à la question 1).

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 2000 \\ \Leftrightarrow 992 \times 1,05^x &\geq 2000 \\ \Leftrightarrow 1,05^x &\geq \frac{2000}{992} \\ \Leftrightarrow \log(1,05^x) &\geq \log\left(\frac{2000}{992}\right) && \text{(car la fonction log est strictement croissante)} \\ \Leftrightarrow x \log(1,05) &\geq \log\left(\frac{2000}{992}\right) \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{\log\left(\frac{2000}{992}\right)}{\log(1,05)} \approx 14,371 && \text{(car } \log(1,05) > 0) \end{aligned}$$

Comme  $14,371 \times 365 = 5245,415$ , on en déduit qu'elle devra attendre 5246 jours.

## LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

### EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0 ; 8]$  par :

$$f(x) = 25\,000 \times 1,1^x.$$

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.

$$f(2) = 25\,000 \times 1,1^2$$

$$f(2) = 30\,250$$

Après 2h, il y aura environ 30000 bactéries .

$$f(4,5) = 25\,000 \times 1,1^{4,5}$$

$$f(4,5) = 38\,339$$

Après 4h30min, il y aura environ 38000 bactéries .

2) Déterminer les variations de  $f$  sur  $[0 ; 8]$  .

$$f(x) = k \times a^x$$

Avec  $a = 1,1 > 1$  et  $k = 25\,000 > 0$  Donc  $f$  est strictement croissante

3) À l'aide de La calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

Nous devrions procéder comme à l'exercice n°1 mais nous allons plutôt utiliser une « recette » que nous justifierons plus tard.

Il s'agit de résoudre sur  $[0 ; 8]$  l'inéquation  $f(x) \geq 50\,000$  .

$$f(x) \geq 50\,000$$

$$\Leftrightarrow 25\,000 \times 1,1^x \geq 50\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,1^x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \log(1,1^x) \geq \log(2) \quad (\text{car la fonction log est strictement croissante})$$

$$\Leftrightarrow x \log(1,1) \geq \log(2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\log(2)}{\log(1,1)} \approx 7,2725 \quad (\text{car } \log(1,1) > 0)$$

$$7,2725 \text{ h} = 7 \text{ h} + 0,2725 \times 60 \text{ min} = 7 \text{ h } 16 \text{ min } + 0,35 \times 60 \text{ s} = 7 \text{ h } 16 \text{ min } 21 \text{ s}$$

Il faudra attendre au moins 7 h 16 min 21 s

## LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

### EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans.

Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

Une baisse de 11 % correspond à un  $CM_1$  valant 0,89 et une hausse de 8 % correspond à un  $CM_2$  valant 1,08.

Notons  $CM_g$  et  $CM_m$  les coefficients multiplicateurs global et moyen.

On a alors :

$$CM_g = (CM_1)^4 \times (CM_2)^6 = 0,89^4 \times 1,08^6$$

On en déduit que :

$$CM_m = (CM_g)^{\frac{1}{10}} \approx 0,9996$$

Le taux moyen vaut alors :

$$CM_m - 1 \approx -0,0004 \text{ ce qui correspond à une } \boxed{\text{baisse d'environ } 0,04 \%}$$

## LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

### EXERCICE N°5 (Le corrigé)

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

1) Quelle est sa population en 2020 ?

Une hausse de 3,5% correspond à un  $CM_1$  valant 1,035 et une baisse de 1 % correspond à un  $CM_2$  valant 0,99.

Notons  $CM_g$  et  $CM_m$  les coefficients multiplicateurs global et moyen.

On a alors :

$$CM_g = (CM_1)^{10} \times (CM_2)^{10} = 1,035^{10} \times 0,99^{10} \approx 1,2757$$

Enfin  $11\,000\,000 \times CM_g \approx 14\,032\,923$

Ainsi, en 2020 la population est d' environ 14 032 923

2) Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

$$CM_m = (CM_g)^{\frac{1}{20}} \approx 1,0122$$

Le taux moyen vaut alors :

$CM_m - 1 \approx 0,0122$  ce qui correspond à une hausse d'environ 1,22 %

## LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

### EXERCICE N°6 (Le corrigé)

On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

1) Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?

Une baisse de 30 % correspond à un coefficient multiplicateur  $CM$  valant 0,7.

Nous considérons la fonction  $f$  définie pour tout réel positif  $t$  par :

$$f(t) = 2 \times 0,7^t \quad \text{où}$$

$t$  est le temps en heures et

$f(t)$  est la quantité de médicament en mL dans l'organisme au temps  $t$ .

Il s'agit donc de calculer  $f(3)$  et  $f(24)$

$$f(3) = 2 \times 0,7^3$$

$$f(3) = 0,686$$

Ainsi la quantité de médicaments sera au bout de 3h de 0,686 mL

$$f(24) = 2 \times 0,7^{24}$$

$$f(24) \approx 0,000383$$

Ainsi la quantité de médicaments sera au bout de 24h d'environ 0,000383 mL

2) Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

La fonction  $f$  ne s'annule jamais, mais au bout de 24h, la quantité de médicament est déjà négligeable. On peut donc considérer qu'un jour sera suffisant.

## LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

### EXERCICE N°7 (Le corrigé)

Dans un pays entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction  $f$  définie pour tout réel positif  $t$  par :  $f(t)=100(0,994)^t$  où  $t$  est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1) Calculer l'indice le 1<sup>er</sup> janvier 2015 puis le 1<sup>er</sup> mai 2017.

▪ Pour le 1<sup>er</sup> Janvier 2015 : il s'agit de calculer  $f(12)$

$$f(12)=100(0,994)^{12}$$

$$f(12) \approx 93$$

Ainsi l'indice au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 est environ 93

▪ Pour le 1<sup>er</sup> Mai 2017: il s'agit de calculer  $f(29)$

$$f(29)=100(0,994)^{29}$$

$$f(29) \approx 84$$

Ainsi l'indice au 1<sup>er</sup> Mai 2013 est environ 84

2) Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.

Attention, ici on nous parle du taux **annuel** moyen. Les 5 baisses sont donc annuelles...

On sait que de 2014 à 2019 les prix ont baissé de 25 % ce qui correspond à un coefficient multiplicateur global  $CM_g=0,75$

On a alors  $CM_m=(CM_g)^{\frac{1}{5}}=0,75^{0,2} \approx 0,9441$

Le taux moyen vaut alors  $CM_m-1 \approx -0,0559$  soit une baisse d'environ 5,59 %

# LES FONCTIONS EXPONENTIELLES E05

## EXERCICE N°1

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Le 1<sup>er</sup> janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière  $P$ , en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.

Au bout de  $n$  mois écoulés, on a donc la suite  $(P_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $P_n = 2 \times 1,03^n$ .

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction  $P$  définie pour tout réel  $x$  par :  $P(x) = 2 \times 1,03^x$ .

On considère qu'un mois dure 30 jours.

Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de  $P(0,2)$  et au bout de 15 jours  $P(0,5)$ .

- 1) Quelle est la nature de la suite  $(P_n)$ . Préciser ses éléments caractéristiques.
- 2) Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?
- 3) Calculer la production le 1<sup>er</sup> février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.
- 4) À l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de vaccins dépassera 4500 par jour.

## EXERCICE N°2

Alissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 5 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.

- 1) Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours. (1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde son compte ?
- 2) Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Alissa avait-elle placé initialement ?
- 3) Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour son compte atteigne 2 000 euros ?

## EXERCICE N°3

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0 ; 8]$  par :

$$f(x) = 25\,000 \times 1,1^x.$$

- 1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.
- 2) Déterminer les variations de  $f$  sur  $[0 ; 8]$ .
- 3) À l'aide de La calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

## EXERCICE N°4

Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans.

Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

## EXERCICE N°5

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

- 1) Quelle est sa population en 2020 ?
- 2) Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

## EXERCICE N°6

On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

- 1) Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?
- 2) Donner l'expression de la fonction exponentielle de base  $a$ .
- 3) Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

## EXERCICE N°7

Dans un pays entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction  $f$  définie pour tout réel positif  $t$  par :  $f(t) = 100(0,994)^t$  où  $t$  est le temps en mois à partir de janvier 2014.

- 1) Calculer l'indice le 1<sup>er</sup> janvier 2015 puis le 1<sup>er</sup> mai 2017.
- 2) Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.