LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E02

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant les propriétés de la fonction logarithme décimal (arrondir éventuellement à 0,1 près $\log(x)$):

x	1	2	5	10	20
$\log(x)$ arrondi à 0,1 près	0	0,3	0,7	1	1,3

$\log(1) = 0$ est à savoir par cœur ainsi que $\log(10) = 1$
(astuce donnée sur un exemple : $\log(10000) = 4$: il y a 4 zéros…)
$\log(2) \approx 0{,}3$ se fait à la calculatrice.
$\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log(10) - \log(2) \approx 0{,}3$
$\log(20) = \log(10\times 2) = \log(10) + \log(2) \approx 1{,}3$

EXERCICE N°2 ***(Le corrigé)***

Exprimer le logarithme décimal de chacun des nombres suivants en fonction de $\log(3)$ et de $\log(7)$:

1) $0{,}00147$ **2)** $11\,907$ **3)** $2\,700\times 490$

1)

$0{,}00147 = 147\times 10^{-5} = 3\times 7^2\times 10^{-5}$

Pour trouver 10^{-5} on a compté le nombre de décalage de la virgule
Pour le reste : 1 + 4 + 7 = 12 et comme 12 est dans la table de 3 alors 147 aussi.
On divise 147 par 3 et on trouve 49 donc $147=3\times 49$
et bien sûr $49=7^2$.

$\log(0{,}00147) = \log(3\times 7^2\times 10^{-5}) = \log(3)+\log(7^2)-5$

$\boxed{\log(0{,}00147) = \log(3)+2\log(7)-5}$

2)

$11\,907 = 81\times 147 = 3^4\times 3\times 7^2 = 3^5\times 7^2$

$\log(11907) = \log(3^5\times 7^2) = \log(3^5)+\log(7^2)$

$\boxed{\log(11907) = 5\log(3)+2\log(7)}$

3)

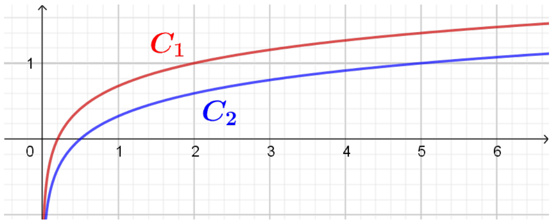
$2\,700\times 490 = 27\times 100\times 49\times 10 = 3^3\times 7^2\times 10^3$

$\log(2700\times 490) = \log(3^3\times 7^2\times 10^3) = \log(3^3)+\log(7^2)+\log(10^3)$

$\boxed{\log(2700\times 490) = 3\log(3)+2\log(7)+3}$

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

On a représenté dans le repère ci-dessous le des fonctions f et g définies sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\log(5x)$ et $g(x)=\log(2x)$.



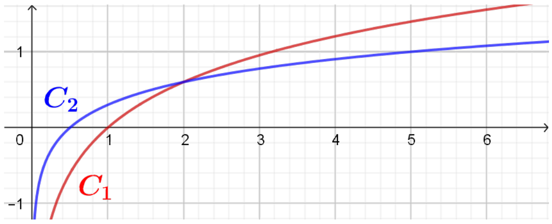
Identifier chacune des courbes en justifiant la réponse.

Soit $x\in]0\ ;+\infty[$
Comme $5 > 2$ alors $5x > 2x$
L'inégalité est conservée car x est un nombre strictement positif ($x\in]0\ ;+\infty[$).
De plus, la fonction est strictement croissante,
par conséquent, elle conserve les inégalités...
donc pour tout $x\in]0\ ;+\infty[$ $f(x) > g(x)$
On a fait le raisonnement sur un x quelconque donc ce raisonnement est valable pour « tous les x »
On en déduit que $\boxed{C_1 \text{ représente la fonction } f \text{ et que } C_2 \text{ représente la fonction } g}$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E02

EXERCICE N°4 ***(Le corrigé)***

On a représenté dans le repère ci-dessous le des fonctions f et g définies sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\log(x^2)$ et $g(x)=\log(2x)$.



1) Identifier chacune des courbes en justifiant la réponse.

Ici, on va utiliser le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ qui appartient à C_1 et pas à C_2 …

On sait que $f(1) = \log(1^2)=0$ et que $g(1) = \log(2\times 1)>0$ donc le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ appartient à la représentation graphique de f .

On en déduit que $\boxed{f \text{ est représentée par } C_1}$ et que $\boxed{g \text{ est représentée par } C_2}$

2) Lire graphiquement l'image de 5 par la fonction f de 3 par la fonction g .

Graphiquement $\boxed{f(5) \approx 1{,}4}$ et $\boxed{g(3) \approx 0{,}8}$

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.

Graphiquement $f(x)=g(x)$ quand $x = 2$

C’est bien sûr l’abscisse du point d’intersection des deux courbes.

EXERCICE N°5 ***(Le corrigé)***

En astronomie, la magnitude apparente, notée M, revient à mesurer combien une étoile apparaît brillante vue de la Terre. L'astronome Norman Pogson (1829-1891) a introduit la formule suivante : $\boxed{M=-2{,}5\log(E)+k}$

où E est l'éclat de l'étoile observée (puissance reçue par unité de surface) et k est une constante indépendante du choix de l'étoile.

L'étoile Véga a une magnitude apparente fixée à 0. On note E_0 l'éclat apparent de Véga.

1) Exprimer la constante k à l'aide de $\log(E_0)$.

Pour Véga $M=0$ et $M=-2{,}5\log(E_0)+k$

donc $M=0 \Leftrightarrow -2{,}5\log(E_0)+k=0 \Leftrightarrow k=2{,}5\log(E_0)$

Ainsi $\boxed{k = 2{,}5\log(E_0)}$

2) Montrer alors que $M = -2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$.

$$\begin{aligned} M &= -2{,}5\log(E)+k \\ &= -2{,}5\log(E)+2{,}5\log(E_0) \\ &= -2{,}5(\log(E)-\log(E_0)) \\ &= -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \end{aligned}$$

3) Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga,

3.a) quel est le signe de sa magnitude apparente ?

Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga alors $E > E_0$ et par conséquent $\dfrac{E}{E_0} > 1$ donc $\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) > 0$ et $-2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) < 0$.

Ainsi la magnitude apparente de l'étoile est $\boxed{\text{négative}}$

3.b) Que peut-on dire de sa magnitude par rapport à celle de Véga ?

$\boxed{\text{Sa magnitude est inférieure à celle de Véga}}$.

4) Déterminer la magnitude apparente des astres suivants d'éclat E :

4.a)	**4.b)**	**4.c)**
Vénus : $E=69\times10^{-4}E_0$	Mars: $E=8{,}32\ E_0$	Neptune : $E=6{,}9\times10^{-4}E_0$

4.a)

$$M = -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2{,}5\log\left(\frac{69\times10^{-4}E_0}{E_0}\right) = -2{,}5\log(69\times10^{-4}) = -2{,}5(\log(69)-4)$$

Ainsi $\boxed{M \approx -5{,}4}$

4.b)

$$M = -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2{,}5\log\left(\frac{8{,}32\,E_0}{E_0}\right) = -2{,}5\log(8{,}32) = -2{,}5(\log(832)-2)$$

Ainsi $\boxed{M \approx -2{,}3}$

4.c)

$$M = -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2{,}5\log\left(\frac{6{,}9\times10^{-4}E_0}{E_0}\right) = -2{,}5\log(6{,}9\times10^{-4}) = -2{,}5(\log(69)-5)$$

Ainsi $\boxed{M \approx 7{,}9}$

On arrondira à 0,1 près.

5) Déterminer l'éclat des astres suivants de magnitude apparente M en fonction de E_0 :

5.a)	**5.b)**	**5.c)**
Soleil: $M=-26{,}8$	Pleine lune : $M=-12{,}6$	Uranus : $M=5{,}7$

5.a)

$$M=-26{,}8 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -26{,}8 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 10{,}72 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{10{,}72}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{10{,}72} E_0}$

5.b)

$$M=-12{,}6 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -12{,}6 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 5{,}04 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{5{,}04}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{5{,}04} E_0}$

5.c)

$$M=5{,}7 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 5{,}7 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2{,}28 \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{-2{,}28}$$

pour la dernière équivalence : servez-vous de la définition n°1 avec $c=10{,}72$ et $a=\frac{E}{E_0}$

Ainsi $\boxed{E = 10^{-2{,}28} E_0}$