# *PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03*

***EXERCICE N°1 (Le corrigé)***

On lance deux fois et successivement un dé équilibré.

**1)** On note :

$A$ l'événement « le 1er dé donne un chiffre pair » et

$S$ l'événement « la somme des chiffres des deux dés vaut 5 ».

Les événements $A$ et $S$ sont-ils indépendants ?

▪ On notera une issue sous la forme $(a\ ;\ b)$ où $a$ est le résultat du 1er lancer et $b$ celui du second.

▪ On sait que $P(A) = \dfrac{1}{2}$ .

Si vous représentez la situation par un arbre, vous aurez 6 branches pour le 1er lancer qui, chacunes, donneront 6 branches pour le second lancer.
Il aura donc au total 36 issues : $(1\ ;\ 1)$ , $(1\ ;\ 2)$ … $(6\ ;\ 6)$
Comme le dé est bien équilibré, on a une situation d'équiprobabilité et chaque issue aura donc une probabilité valant $\dfrac{1}{36}$ .
Avec cet arbre, on voit facilement que pour déterminer $P(A)$ , il suffit d'observer les 6 premières branches : $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
Par contre il faut garder à l'esprit que si on veut décrire $A$ à l'aide des issues , il faut écrire tous les couples $(a\ ;\ b)$ correspondant :

$A = \{(2\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ 2)\ ;\ \dots(2\ ;\ 6)\ ;\ (4\ ;\ 1)\ ;\ \dots(4\ ;\ 6)\ ;\ (6\ ;\ 1)\ ;\ \dots(6\ ;\ 6)\}$

Il y a au total $3\times6=18$ issues et donc $P(A) = 18\times\dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{2}$ .

▪ Déterminons $P(S)$ :

$S=\{(1\ ;\ 4)\ ;\ (2\ ;\ 3)\ ;\ (3\ ;\ 2)\ ;\ (4\ ;\ 1)\}$

donc $P(S) = 4\times\dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$

▪ On en déduit que $P(A)\times P(S) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{18}$

▪ Déterminons $P(A\cap S)$

$A\cap S = \{(2\ ;\ 3)\ ;\ (4\ ;\ 1)\}$

donc $P(A\cap S) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

▪ D'après ce qui précède : $P(A)\times P(S) = P(A\cap S)$

Donc $\boxed{\text{les événements } A \text{ et } S \text{ sont indépendants}}$ .

**2)** On note :

$B$ l'événement « le 1er dé donne le chiffe 6 » et

$M$ l'événement « la multiplication des chiffres des dés vaut 12 ».

Les événements $B$ et $M$ sont-ils indépendants ?

▪ On notera les 36 issues possibles sous la forme $(a\ ;\ b)$ où $a$ est le résultat du 1er lancer et $b$ celui du second.

▪ On sait que $P(A) = \dfrac{1}{6}$ .

▪ Déterminons $P(M)$ :

$M=\{(2\ ;\ 6)\ ;\ (3\ ;\ 4)\ ;\ (4\ ;\ 3)\ ;\ (6\ ;\ 2)\}$

donc $P(M) = 4\times\dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$

▪ Déterminons $P(B\cap M)$

$B\cap M = \{(6\ ;\ 2)\}$

donc $P(A\cap S) = \dfrac{1}{36}$

▪ D'après ce qui précède : $P(B)\times P(M) \neq P(B\cap M)$

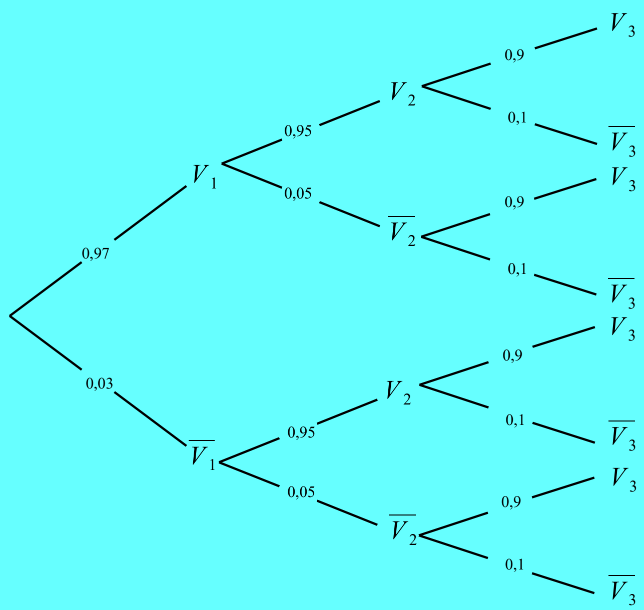
Donc $\boxed{\text{les événements } B \text{ et } M \text{ ne sont pas indépendants}}$ .

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03

## *EXERCICE N°2 (Le corrigé)*

Pour obtenir son diplôme, un stagiaire doit passer trois épreuves successives. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve n°1 est de 0,97, celle de l'épreuve n°2 est de 0,95, et l'épreuve n°3 est de 0,9.
On suppose que les réussites aux épreuves sont indépendantes les unes des autres.

Représentons la situation par un arbre.
Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, notons $V_i$ la réussite à l'épreuve n° $i$.




**1)** Quelle est la probabilité que le stagiaire réussisse les trois épreuves ?

$0{,}97 \times 0{,}95 \times 0{,}9 = 0{,}82935$

La probabilité cherchée est $\boxed{0{,}82935}$ .

**2)** Quelle est la probabilité qu'il rate les trois ?

$(1-0{,}97)\times(1-0{,}95)\times(1-0{,}9) = 0{,}00015$

La probabilité cherchée est $\boxed{0{,}00015}$ .

**3)** Quelle est la probabilité qu'il n'en réussisse qu'une seule sur les trois ?

On peut décrire cet événement $(V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}) \cup (\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3}) \cup (\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3)$
Il y a donc 3 chemins dans l'arbre, ce qui nous donne le calcul suivant :

$0{,}97 \times 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}03 \times 0{,}95 \times 0{,}1 + 0{,}03 \times 0{,}05 \times 0{,}9 = 0{,}00905$

La probabilité cherchée est $\boxed{0{,}00905}$ .

## EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Un pratiquant de tir à l'arc réalise trois tirs.

La probabilité qu'il tire dans la cible au premier tir est $\frac{1}{3}$ .

La probabilité des ses tirs suivants est deux fois plus petite que celle du tir précédent.
On suppose que les issues de chaque tir (atteindre ou manquer la cible) sont indépendantes les unes des autres.

**1)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible à chacun de ses tirs ?

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{216}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{1}{216} \approx 0{,}0005}$ .

**2)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible seulement à ses deux premiers tirs ?

La probabilité qu'il rate au 1$^{er}$ tir est : $1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

La probabilité qu'il rate au 2$^{eme}$ tir est : $1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

La probabilité qu'il rate au 3$^{eme}$ tir est : $1-\frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

On peut faire un arbre de probabilité pour se convaincre de ce qui suit :

$$\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}_{\text{il réussit les 2 premiers}}\times\frac{11}{12} + \underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}}_{\text{il réussit le premier et le troisième}}\times\frac{5}{6} + \underbrace{\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}}_{\text{il réussit le deuxième et le troisième}}\times\frac{2}{3} = \frac{18}{216}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{18}{216} \approx 0{,}0833}$ .

**3)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible uniquement à son dernier tir ?

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{12} = \frac{10}{216}$$

La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{10}{216} \approx 0{,}0046}$ .

**EXERCICE N°4** *(Le corrigé)*

On dit que les événements $A$ , $B$ et $C$ sont **mutuellement indépendants** si l'on a toutes les égalités suivantes :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}\qquad \boxed{P(A\cap C)=P(A)\times P(C)}$$

$$\boxed{P(B\cap C)=P(B)\times P(C)}\qquad \boxed{P(A\cap B\cap C)=P(A)\times p(B)\times P(C)}$$

**1)** Si $A$ , $B$ et $C$ sont mutuellement indépendants, est-il vrai que $A$ , $B$ et $C$ sont deux à deux indépendants, c'est-à-dire que $A$ et $B$ , $A$ et $C$ et $B$ et $C$ sont indépendants ?

La réponse est oui de façon évidente avec les trois premières égalités.

Encore grâce à la propriété n°4 page 2

**2)** On s'intéresse maintenant à la question suivante: si $A$ , $B$ et $C$ sont deux à deux indépendants, est-il vrai que $A$ , $B$ et $C$ sont mutuellement indépendants ?

On examine la situation suivante : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note :

$A$ l'événement « obtenir pile au 1er lancer»,
$B$ l'événement « obtenir face au 2e lancer » et
$C$ l'événement « obtenir la même chose aux 2 lancers ».

**2.a)** Calculer les probabilités $P(A)$ , $P(B)$ , $P(C)$ , $P(A\cap B)$ , $P(A\cap C)$ $P(B\cap C)$ et $P(A\cap B\cap C)$ .

$\boxed{P(A)=\frac{1}{2}}$ ; $\boxed{P(B)=\frac{1}{2}}$

$$P(C)=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{pile et pile}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{face et face}}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{P(C)=\frac{1}{2}}$$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{4}}$

$P(A\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(A\cap C)=\frac{1}{4}}$

« la même chose aux 2 lancers ET pile au premier » donne « pile et pile »

$P(B\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(B\cap C)=\frac{1}{4}}$

« la même chose aux 2 lancers ET face au 2e» donne «face et face»

$\boxed{P(A\cap B\cap C)=0}$

**2.b)** Les événements $A$ , $B$ et $C$ sont-ils deux à deux indépendants ?

D’après la question précédente :

$P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$ ; $P(A)\times P(C)=P(A\cap C)$ et $P(B)\times P(C)=P(B\cap C)$

Les événements sont bien indépendants deux deux .

**2.c)** Les événements $A$ , $B$ et $C$ sont-ils mutuellement indépendants ?

$P(A)\times P(B)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ et $P(A\cap B\cap C)=0$

La dernière égalité n’est pas satisfaite donc :

les événements ne sont pas mutuellement indépendants

**2.d)** Que peut-on en déduire quant à la question que l'on se posait ?

Si des événements sont indépendants deux à deux, ils ne sont pas forcément mutuellement indépendants.

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03

## *EXERCICE N°1*

On lance deux fois et successivement un dé équilibré.

**1)** On note :

$A$ l'événement « le 1er dé donne un chiffre pair » et

$S$ l'événement « la somme des chiffres des deux dés vaut 5 ».

Les événements $A$ et $S$ sont-ils indépendants ?

**2)** On note :

$B$ l'événement « le 1er dé donne le chiffe 6 » et

$M$ l'événement « la multiplication des chiffres des dés vaut 12 ».

Les événements $B$ et $M$ sont-ils indépendants ?

## *EXERCICE N°2*

Pour obtenir son diplôme, un stagiaire doit passer trois épreuves successives. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve n°1 est de 0,97, celle de l'épreuve n°2 est de 0,95, et l'épreuve n°3 est de 0,9. On suppose que les réussites aux épreuves sont indépendantes les unes des autres.

**1)** Quelle est la probabilité que le stagiaire réussisse les trois épreuves ?

**2)** Quelle est la probabilité qu'il rate les trois ?

**3)** Quelle est la probabilité qu'il n'en réussisse qu'une seule sur les trois ?

## *EXERCICE N°3*

Un pratiquant de tir à l'arc réalise trois tirs.

La probabilité qu'il tire dans la cible au premier tir est $\frac{1}{3}$ .

La probabilité des ses tirs suivants est deux fois plus petite que celle du tir précédent.

On suppose que les issues de chaque tir (atteindre ou manquer la cible) sont indépendantes les unes des autres.

**1)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible à chacun de ses tirs ?

**2)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible seulement à ses deux premiers tirs ?

**3)** Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible uniquement à son dernier tir ?

## *EXERCICE N°4*

On dit que les événements $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ **et** $\boldsymbol{C}$ sont **mutuellement indépendants** si l'on a toutes les égalités suivantes :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} \qquad \boxed{P(A \cap C) = P(A) \times P(C)}$$

$$\boxed{P(B \cap C) = P(B) \times P(C)} \qquad \boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times p(B) \times P(C)}$$

**1)** Si $A$ , $B$ et $C$ sont mutuellement indépendants, est-il vrai que $A$ , $B$ et $C$ sont deux à deux indépendants, c'est-à-dire que $A$ et $B$ , $A$ et $C$ et $B$ et $C$ sont indépendants ?

**2)** On s'intéresse maintenant à la question suivante: si $A$ , $B$ et $C$ sont deux à deux indépendants, est-il vrai que $A$ , $B$ et $C$ sont mutuellement indépendants ?

On examine la situation suivante : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note :

$A$ l'événement « obtenir pile au 1er lancer»,

$B$ l'événement « obtenir face au 2e lancer » et

$C$ l'événement « obtenir la même chose aux 2 lancers ».

**2.a)** Calculer les probabilités $P(A)$ , $P(B)$ , $P(C)$ , $P(A \cap B)$ , $P(A \cap C)$ $P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$ .

**2.b)** Les événements $A$ , $B$ et $C$ sont-ils deux à deux indépendants ?

**2.c)** Les événements $A$ , $B$ et $C$ sont-ils mutuellement indépendants ?

**2.d)** Que peut-on en déduire quant à la question que l'on se posait ?