Fonctions affines et inéquations

I Les inégalités

Remarque n°1.

Les propriétés énoncées restent valables avec les symboles $<$; $\geqslant$ et $\leqslant$

Propriété n°1.

Soient a et b deux nombres réels.
$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$

preuve :

Immédiat car, par définition, $a > b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété n°2.

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow a d>b d}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow a d<b d}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

preuve :

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a + c - c - b > 0 \Leftrightarrow (a+c) - (b+c) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + c$

- Si $d > 0$

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow d(a-b) > 0 \Leftrightarrow ad - bd > 0 \Leftrightarrow ad > bd$

règle des signes

- Les autres équivalences se démontrent de la même manière que ces deux là
Elles sont laissées à titre d'exercice.

Propriété n°3.

Soient a , b , c et d quatre nombres réels.

$$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$$

preuve :

Si $a<b$ et $c<d$ alors $a-b<0$ et $c-d<0$
donc $(a-b)+(c-d)<0$ (somme de deux nombres négatifs)
Or $(a-b)+(c-d)<0 \Leftrightarrow a+c-b-d<0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+d)<0 \Leftrightarrow a+c<b+d$

Exemple n°1.

Si $x \geqslant 3$ et $y \geqslant 12$ alors $x+y \geqslant 3+12$

Remarque n°2. ***Attention***

Cette propriété ne fonctionne pas avec la soustraction, voici un contre-exemple :

$1<2$ et $3<10$ alors que $1-3>2-10$

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E01

EXERCICE N°1

Soit x et y deux réels tels que $x<-5$ et $y<7$.

Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

1) $2x$ **2)** $-3y$ **3)** $x+y$

EXERCICE N°2

Soit x un nombre réel tel que $x \leqslant 2$ et y un nombre réel tel que $y \leqslant -6$

Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

1) $3x$ **2)** $-4y$ **3)** $x+y$

4) $2x+3y$ **5)** $-x-2y$

EXERCICE N°3

Un triangle ABC est tel que $AB=4$, $AC<5{,}2$ et $BC<6$

Que peut-on dire du périmètre du triangle ABC ?

EXERCICE N°4

Donner tous les nombres entiers relatifs n tels que :

1) $-1{,}2 \leqslant n < 3$

2) $-4 \leqslant n < 3{,}7$

EXERCICE N°5

Pour chaque implication, dire si elle vraie au fausse.

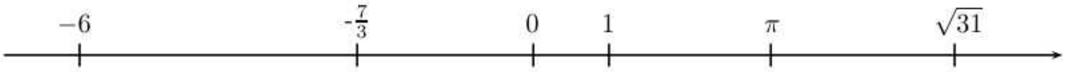
1) $x>6 \Rightarrow x>5$ **2)** $x\leqslant 3 \Rightarrow x>2$ **3)** $x\leqslant 4 \Rightarrow x<4$

4) $x>-1 \Rightarrow x\geqslant -1$ **5)** $-2\leqslant x\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant 0$ **6)** $2\leqslant x\leqslant 5 \Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 7$

II Les intervalles

Définition n°1. Une façon de voir l'ensemble des réels

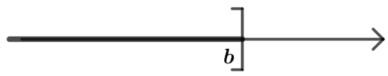
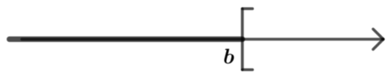
L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.



Fonctions affines et inéquations

Définition n°2. Intervalles

Soit a et b deux nombre réels, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ définies par :

Intervalle	Ensemble des réels x tels que :	Représentation graphique
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$	
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$ on peut aussi écrire $x \geqslant a$	
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$ on peut aussi écrire $x > a$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$	

Remarque n°3.

- ➔ Les intervalles $[\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}]$, $]\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}[$, $[\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}[$ et $]\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}]$ sont des intervalles bornés et a et b sont appelés les bornes .
- ➔ L'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$
- ➔ $[\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}]$ est un intervalle fermé et $]\boldsymbol{a} \ ; \ \boldsymbol{b}[$ est un intervalle ouvert.
- ➔ $\mathbb{R} =]-\infty \ ; +\infty[$

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E02

EXERCICE N°1

1) Dire si les propositions suivantes sont vraies au fausses.

1.a) $5 \in]-\infty \; ; \; 4]$

1.b) $-2,5 \in [-2 \; ; \; 5]$

1.c) $10^{-15} \in]0 \; ; \; 1[$

1.d) $10^{-15} \in [0 \; ; \; +\infty[$

1.e) $3,72 \in]3,719 \; ; \; 3,721[$

1.f) $3,4 \in]3,3 \; ; \; 3,4]$

2) Représenter les intervalles suivants sur une droite graduée.

2.a) $]-3 \; ; \; 4]$

2.b) $]-\infty \; ; \; 2[$

2.c) $\left[-\frac{1}{2} \; ; \; +\infty\right[$

EXERCICE N°2

Recopier en complétant les pointillés par le symbole $\in$ ou $\notin$.

1) $-\pi \ \ldots \ [-5 \ ; -2[$

2) $0{,}33 \ \ldots \ \left[\frac{1}{3} \ ; 8\right[$

3) $4 \ \ldots \ ]4 \ ; 5[$

4) $0 \ \ldots \ [-1 \ ; 0]$

EXERCICE N°3

Représenter sur une droite graduée les intervalles suivants :

1) $]-4\ ;\ 3]$

2) $]5\ ;\ 8{,}5[$

3) $]-\infty\ ;\ -3]$

4) $[-1\ ;\ +\infty[$

EXERCICE N°4

Parmi les intervalles suivants, lequel a la plus grande amplitude ?

1) $I_1 =]-1\ ;\ 1]$

2) $I_2 = \left]\dfrac{3}{4}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right[$

3) $I_3 = \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 10\right[$

4) $I_4 = [-1{,}54\ ;\ 0{,}54]$

EXERCICE N°5

On donne l'intervalle $I =]-1\ ;\ 7]$.

Citer tous les nombres entiers relatifs qui appartiennent à l'intervalle I .

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E02

EXERCICE N°6

Compléter par le symbole $\subset$ ou $\not\subset$ (se lit « est inclus dans » ou « n'est pas inclus dans »).

1) $]1\ ;\ 2[\ \dots\ [1\ ;\ 2]$

2) $]4\ ;\ 5{,}3]\ \dots\ [3{,}9\ ;\ 5{,}4]$

3) $[-5\ ;\ 4[\ \dots\ [-5{,}1\ ;\ 4[$

4) $[-10\ ;\ 10]\ \dots\ \mathbb{R}$

5) $[2\ ;\ 10]\ \dots\ \mathbb{N}$

6) $[3{,}4\ ;\ 5{,}7]\ \dots\ \mathbb{D}$

III Les inéquations

Définition n°3.

Une inéquation d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x qu'on appelle alors solutions. Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les solutions réelles.

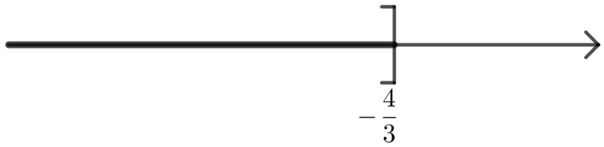
Exemple n°2. ***Décrire les solutions d'une inéquation***

Énoncé :

Résoudre l'inéquation $-3x+7\geqslant 11$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis le représenter graphiquement.

Réponse :

$$-3x+7\geqslant 11 \quad\Leftrightarrow\quad -3x\geqslant 4 \quad\Leftrightarrow\quad x\leqslant -\frac{4}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x\in \left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$



Réviser pour IE01

Remarque n°4.

On garde en tête la propriété n°2 :

Lorsqu'on résout une inéquation,

• additionner ou soustraire un même nombre réel à chaque membre ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre positif ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre négatif change l'ordre.

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E03

EXERCICE N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x+2>7$ **2)** $-x+9\geqslant -2$ **3)** $\dfrac{3x}{2}\leqslant 9$

EXERCICE N°2

Dans chaque cas, le nombre a est-il une solution de l'inéquation proposée ?

1) $x+4>5x-7$ $\quad a=-3$

2) $3x-\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{2}x+4$ $\quad a=2$

3) $x+4<10x-7$ $\quad a=8$

EXERCICE N°3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

1) $4x-3 \geqslant 2x+5$

2) $2+x < 3-x$

3) $5+x > 3+x$

4) $3-4x \leqslant 5+6x$

EXERCICE N°4

Le périmètre d'un rectangle est inférieur à $24\ cm$ et sa longueur vaut le double de sa largeur.
Déterminer sa largeur.

EXERCICE N°5

Un photographe propose deux formules pour tirer sur papier de photos numériques.
Avec la formule f, on paie 0,15 € chaque tirage.
Avec la formule g, on paie d'abord un forfait de 12 € et chaque tirage ne vaut que 0,09 €.
À partir de combien de tirages a-t-on intérêt à choisir la formule avec forfait ?

IV Sens de variation et signe d'une fonction affine

Dans tout le paragraphe, $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$ avec m et p des réels, est une fonction affine.

Propriété n°4. ***Rappel***

Pour toute fonction affine, l'accroissement de la fonction est proportionnel à celui de la variable :
si $a\neq b$ alors

$$\boxed{\boldsymbol{m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}$$

preuve :

Comme f est affine, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=mx+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.
Pour $a\neq b$, on peut écrire :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma+p-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Remarque n°5. Sens de variation d'une fonction affine

La propriété précédente nous indique que si $m>0$ alors les images sont rangées dans le même ordre que les abscisses (on dit que la fonction est croissante) et que si $m<0$ alors les images sont rangées dans l'ordre contraire à celui des abscisses (on dit que la fonction est décroissante).

$m<0$: f est strictement décroissante

$m>0$: f est strictement croissante

Tableaux de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E04

EXERCICE N°1

Déterminer le sens de variations des fonctions affines définies par les expressions suivantes.

1) $f(x)=2x+3$

2) $f(x)=-4x+5$

3) $f(x)=x+7$

4) $f(x)=8-x$

5) $f(x)=\sqrt{3}(x-2)$

6) $f(x)=\dfrac{3-2x}{7}$

EXERCICE N°2

Pour chacune des fonctions affines suivantes, déterminer le coefficient directeur de leur représentation graphique et en déduire le sens de variation de la fonction.

1) $f(x)=-2x+1$

2) $g(x)=3-x$

3) $h(x)=2+\frac{x}{3}$

4) $l(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{3}$

EXERCICE N°3

1) La fonction affine f vérifie $f(2)=5$ et $f(6)=3$.
f est-elle croissante ou décroissante? Justifier

2) La fonction affine g vérifie $g(-1)=3$ et $g(2)=6$.
g est-elle croissante ou décroissante? Justifier.

EXERCICE N°4

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) On considère une fonction affine f croissante et telle que l'ordonnée à l'origine de sa représentation graphique soit 3 .
On peut alors avoir $f(2)=1$.

2) On considère une fonction affine g décroissante et telle que l'ordonnée à l'origine de sa représentation graphique soit 1 .
On peut alors avoir $g(2)=0$.

3) On considère une fonction affine h croissante et telle que $h(5)=12$.
On peut alors avoir $h(7)=15$.

Définition n°4. Racine d'une fonction affine

On suppose $m \neq 0$.
On appelle racine de f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$

Propriété n°5.

$$x_0 = \frac{-p}{m}$$

Remarque n°6.

Le point de coordonnées $(x_0\ ;\ 0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Propriété n°6. ***Signe d'une fonction affine***

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$

Tableaux de signes

$m<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$m>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Réviser pour IE02

Exemple n°3.

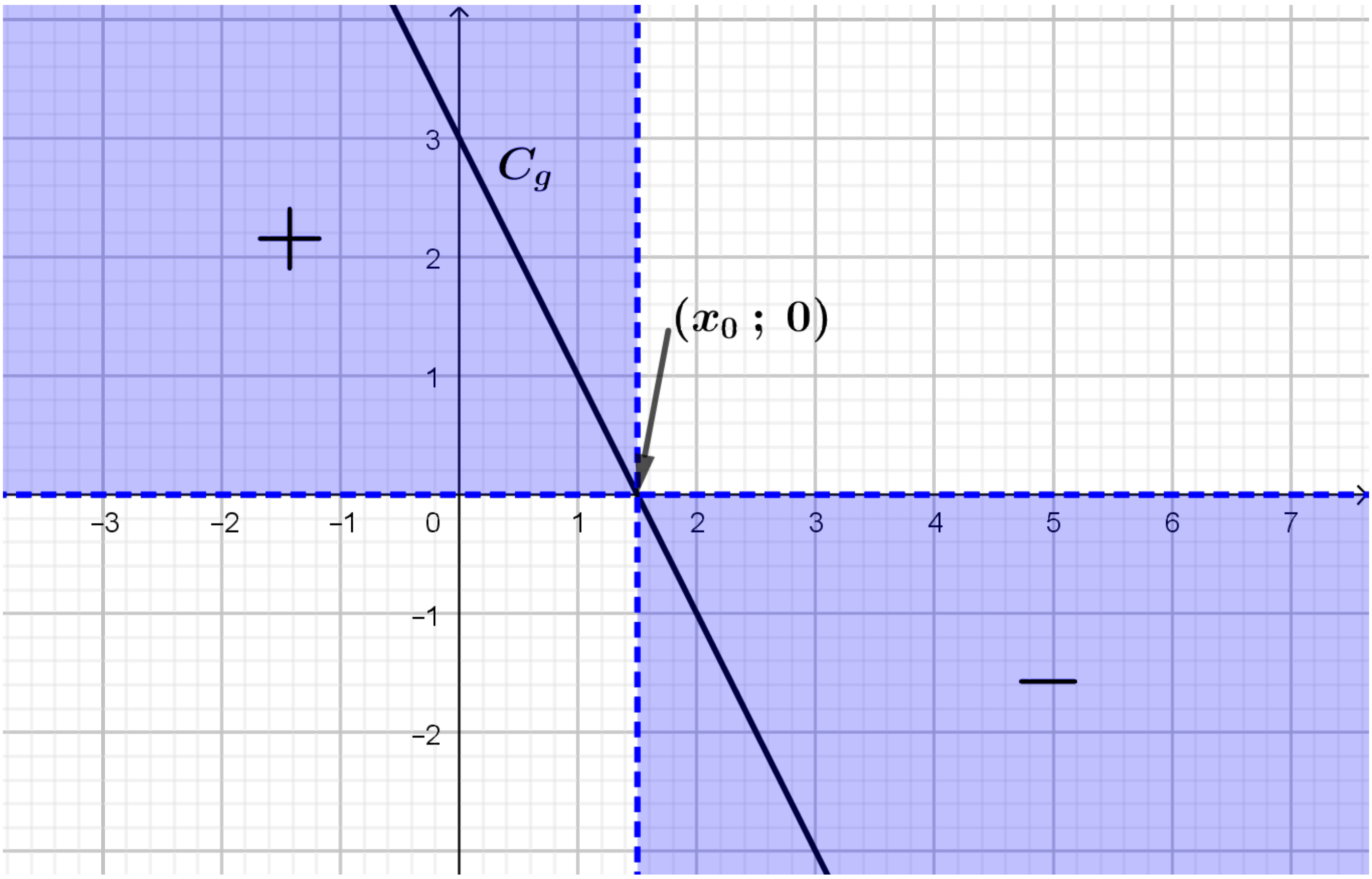
Pour $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -2x+3\end{cases}$, $m=-2$ et $p=3$

▪ Comme $m<0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

Posons $x_0=\dfrac{-p}{m}=\dfrac{-3}{-2}=1{,}5$, on sait alors que la droite représentant la fonction g coupe l'axe des abscisses au point $(1{,}5\ ;\ 0)$ et on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	



Fonctions affines et inéquations E05

EXERCICE N°1

1) Déterminer le tableau de signes des fonctions affines définies ci-dessous.

1.a) $f(x)=2x+3$

1.b) $g(x)=-4x+5$

1.c) $h(x)=x+7$

1.d) $j(x)=8-x$

2) Pour chacune des fonctions précédentes, donner un nombre réel x_1 dont l'image est positive et un nombre réel x_2 dont l'image est négative.

EXERCICE N°2

Construire le tableau de signes de chaque expression.

1) $f(x)=3x-6$

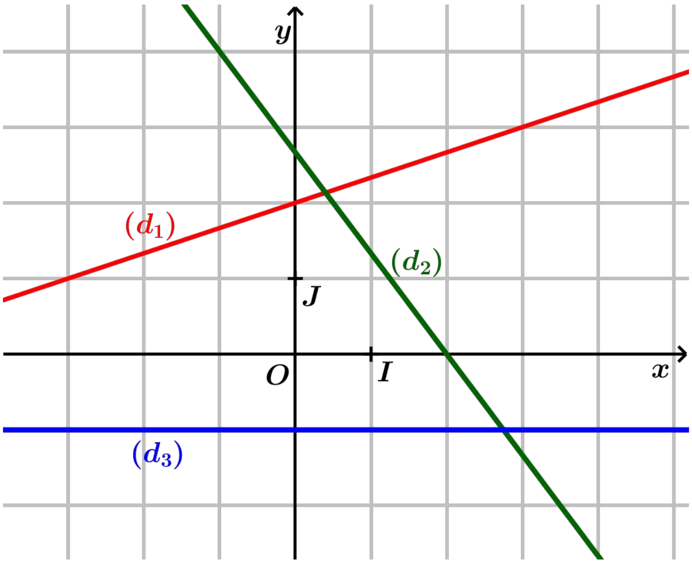
2) $g(x)=-4x+8$

3) $h(x)=-2x+\frac{1}{2}$

4) $l(x)=\frac{x+3}{-4}$

EXERCICE N°3

1) En utilisant le graphique suivant, écrire le tableau de signes de chaque fonction affine représentée ci-dessous.



2) Chaque droite est la représentation graphique d'une des fonctions définies par les expressions suivantes.

$f(x) = -1$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Associer chaque droite à la fonction qu'elle représente.

EXERCICE N°4 Des tableaux signes plus complexes

Construire le tableau de signes de chaque expression.

1) $f(x)=(x+3)(x-5)$

2) $g(x)=(-4x+8)(3x+2)$

3) $h(x)=7(-2x+5)(6x-3)$

4) $l(x)=-5(4x-7)(6x+2)$

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E06

EXERCICE N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $4x-6 \geqslant 3-(6-5x)$

2) $\dfrac{1-x}{4}+\dfrac{5x}{6}<3$

EXERCICE N°2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $x^2+1 > (x+1)^2$

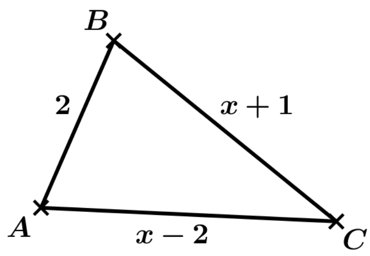
2) $3-4x \leqslant 6(x-2)-10x$

3) $3(1-2x) \geqslant -6x+2$

EXERCICE N°3

x est un nombre réel supérieur ou égal à 2 .

Existe-t-il une ou des valeurs de x pour la(les)quelle(s) le triangle ABC est rectangle en A ?



FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS E07

EXERCICE N°1

Un musée propose deux tarifs.

▪ tarif A: chaque entrée coûte 6€.
▪ tarif B: on paye un abonnement à l'année de 16 € et chaque entrée coûte alors 4€.

La variable x désigne le nombre de fois où un visiteur a fréquenté le musée.

1) Donner l'expression de la fonction f qui modélise le budget annuel pour le musée avec le tarif A, et celle de g pour le tarif B.

2) Représenter ces deux fonctions dans un repère approprié (attention au choix des unités). Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$;

3) Résoudre par le calcul $f(x) > g(x)$.

4) Que peut faire le visiteur de ces solutions quand il veut déterminer lequel des deux tarifs est le plus avantageux?

EXERCICE N°2

geogebra

Sur la figure ci-contre , $AB=9$.

Le point K est mobile sur le segment $[AB]$.
On note x la longueur AK .

1) Calculer l'aire du domaine hachuré lorsque $x=2$.
Même question lorsque $x=7$.

2) $A(x)$ désigne l'aire du domaine hachuré lorsque K est à x de A .

2.a) Donner l'expression de $A(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

2.b) Même question pour les intervalles $[3\ ;\ 5]$, $[5\ ;\ 8]$ puis $[8\ ;\ 9]$.