LA FONCTION EXPONENTIELLE

I Introduction

Nous allons tenter de résoudre une équation fonctionnelle, c'est à dire que l'on cherche toutes les fonctions vérifiant une condition donnée. On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante :

La condition

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

En français, on cherche les fonctions qui sont égales à leur dérivée et pour lesquelles l'image de 0 vaut 1.

LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété n°1. ***Si une telle fonction existe alors elle ne s'annule pas***

Si f est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } f(x) \neq 0$$

preuve :

▪ Soit f une telle fonction. Construisons la fonction h définie également sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)\times f(-x)$

▪ Montrons que h est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto -x$ et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ dont leur composée $g : x \mapsto f(-x)$ l'est aussi.

h étant le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▪ Montrons que h' est nulle :

On peut écrire que $h = f\times g$ et donc $h' = f'\times g+f\times g'$.

C'est à dire que

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ &= f'(x)f(x)-f(x)f'(x) && \text{(car } g'(x)=-f'(-x)\text{)} \\ &= f(x)f(x)-f(x)f(x) && \text{(car } f'=f\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante égale à 1 .

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

De plus $h(0) = f(0)\times f(0) = 1\times 1 = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$

▪ Montrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors on aurait $h(x) = 0$ ce qui est impossible.

Propriété n°2. ***Si une telle fonction existe alors elle est unique***

Si f est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} , f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ alors f est unique.

preuve :

▪ Soit f et g deux fonctions vérifiant la condition. Nous allons montrer qu'alors $f = g$.

▪ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(h est bien définie car g ne s'annule pas d'après la propriété n°1)

▪ Montrons que h' est nulle :

f et étant des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas, leur quotient $h = \dfrac{f}{g}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et ,

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(car } f \text{ et } g \text{ vérifient la condition)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

▪ Montrons que h est constante, égale à 1.

La dérivée de h est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h est constante.

De plus $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$.

▪ Montrons que $f = g$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$

Or , $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Donc $f(x) = g(x)$

Remarque n°1. ***Une telle fonction existe bien et nous allons l'étudier.***

La preuve est admise en première mais nous en verrons une idée…

II La fonction Exponentielle et quelques-unes de ses propriétés

Définition n°1.

On appelle fonction Exponentielle et on note $\exp$ l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$$

Propriété n°3. La fonction exp ne n'annule pas

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) \neq 0}$$

preuve :

Faite en introduction

Propriété n°4. L'exponentielle de la somme égale le produit des exponentielles

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)}$$

preuve :

Soit $b \in \mathbb{R}$, et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) \end{cases}$

▪ Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto x+b$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc leur composée aussi. f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$.

▪ Montrons que $f' = f$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = f(x)$$

▪ Montrons que $f(0) = 1$

$$f(0) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$$

▪ Utilisons l'unicité de la fonction exponentielle pour montrer que $f = \exp$.

La fonction f vérifie la condition $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c'est donc la fonction exp.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \exp(x)$

ce qui s'écrit encore :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$ *cqfd*

Propriété n°5. l'inverse de l'exponentielle égale l'exponentielle de l'opposé

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)}$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,
$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$
puis en divisant chaque membre par le nombre $\exp(x)$ qui est non nul :
$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *cqfd*

Propriété n°6. ***La fonction exp est strictement positive sur*** $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) > 0}$$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\times\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Propriété n°7. ***La fonction exp et ses puissances n**ième*

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$\boxed{\left(\exp(a)\right)^n = \exp(n\,a)}$$

preuve :

▪ Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(na)$.
▪ On a :
$u_0 = \exp(0\times a) = 1$
▪ Et pour tout entier naturel n ,
$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = u_n\times\exp(a)$
▪ On reconnaît une suite suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \exp(a)$.
▪ Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\times q^n = 1\times(\exp(a))^n$
En identifiant terme à terme, on obtient le résultat. *cqfd.*

III Le comportement de la fonction exponentielle.

Propriété n°8. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ (d'après la propriété n°6)

La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Remarque n°2.

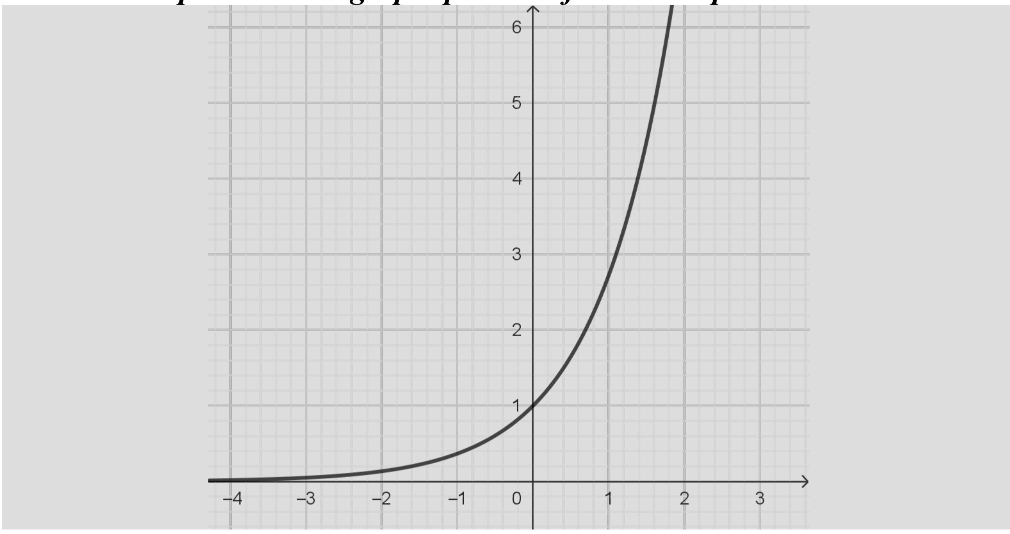
La propriété n°8, nous permet d'affirmer que si un nombre admet un antécédent par la fonction $\exp$ alors cet antécédent est unique. C'est, par exemple, utile pour montrer l'unicité d'une solution dans une équation…

Remarque n°3.

Je sais, c'est pénible ces « sur l'intervalle $\mathbb{R}$ » mais c'est essentiel !

LA FONCTION EXPONENTIELLE

Connaissance n°1 ***La représentation graphique de la fonction exponentielle.***



LA FONCTION EXPONENTIELLE

IV Une nouvelle notation pour la fonction exponentielle

Remarque n°4.

Les propriétés n°4, n°5 et n°8 nous rappelle les propriétés sur les puissances.
Par exemple,
$7^{2+3} = 7^2 \times 7^3$ ressemble beaucoup à $\exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$
Comme $7^1 = 7$, on est tenté de regarder $\exp(1)$. Ce nombre n'est malheureusement pas entier, ce n'est même pas une fraction (vous le démontrerez un jour) mais il est aussi important que le nombre π. Pour cela, on va lui donner un nom.

Définition n°2.

- On note e le nombre $\exp(1)$
- On a : $\boxed{e \approx 2{,}71828}$
- Pour tout réel x, on pose $\boxed{e^x = \exp(x)}$

Remarque n°5. Résumé des propriétés avec la nouvelle notation

Soit a et b des réels et n un entier naturel .

$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$, $\boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$, $\boxed{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$ et $\boxed{e^{na} = \left(e^a\right)^n}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE

V Le résumé du cours

La définition de exp

On appelle fonction Exponentielle et on note exp l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$$

exp ne s'annule pas

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0}$$

Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)}$$

exp est strictement positive

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0}$$

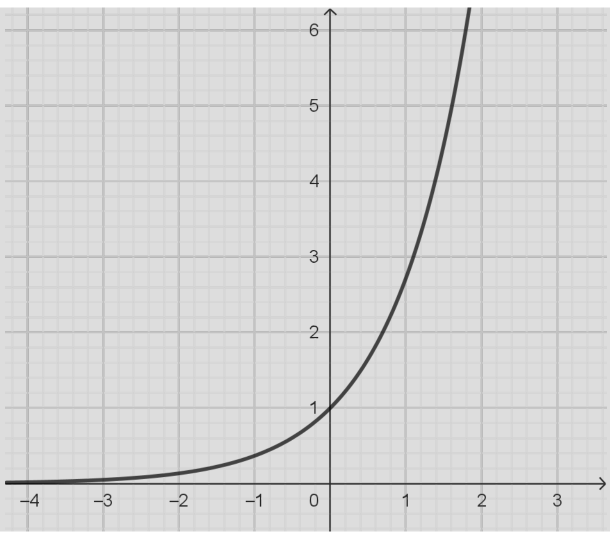
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$\boxed{(\exp(a))^n = \exp(na)}$$

exp est strictement croissante

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique de exp



Nouvelle notation de exp

- On note e le nombre $\exp(1)$
- On a : $\boxed{e \approx 2{,}71828}$
- Pour tout réel x , on pose $\boxed{e^x = \exp(x)}$

Propriétés algébriques de exp

Soit a et b des réels et n un entier naturel .

$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$, $\boxed{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$, $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ et $\boxed{e^{na} = \left(e^a\right)^n}$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°1 Savoir calculer

Simplifier les expressions suivantes.

1) $\left(e^3\right)^2 \times e^5$ **2)** $e^{-2} \times e^7 \times e$ **3)** $\dfrac{e^4}{e^7}$

4) $\dfrac{e^{-2}}{e}$ **5)** $\left(\dfrac{e^2}{e^{-3}}\right)^3$ **6)** $\left(e^2-1\right)\left(e^2+1\right)$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°2 Savoir calculer avec une inconnue

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

1) $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ **2)** $e^{2x} \times e$ **3)** $\dfrac{e^{4x}}{e^{-x}}$

4) $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2$ **5)** $\dfrac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^x}$ **6)** $e^x \times \left(e^{-2x}\right)^3$

EXERCICE N°3 Savoir développer

Développer les expressions suivantes.

1) $\left(e^{2}-e\right)^{2}$

2) $\left(e^{3}-e\right)\left(1-e^{2}\right)$

3) $e^{2}\left(e^{-2}+e\right)$

4) $e\left(e^{-1}+e^{2}\right)$

5) $\left(e^{4}-e^{-4}\right)^{2}$

6) $\left(1-e^{3}\right)\left(1+e^{3}\right)$

LA FONCTION EXPONENTIELLE E01

EXERCICE N°4 ***Savoir développer avec une inconnue***

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes.

1) $e^{2}\left(e^{-x+3}+e^{-x-1}\right)$

2) $\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(1-e^{x}\right)$

3) $\left(e^{x}+1\right)^{2}$

4) $\left(e^{-x}+e^{4x}\right)e^{x}$

5) $\left(e^{-x}+e^{x}\right)^{2}$

6) $\left(e-e^{x}\right)\left(e+e^{x}\right)$

EXERCICE N°5 Savoir factoriser

Factoriser les expressions suivantes.

1) $e^2 - 4e$ **2)** $e^4 - 1$ **3)** $e - e^3$

EXERCICE N°6 Savoir factoriser avec une inconnue

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

1) $e^{3x} - e^{x}$ **2)** $e^{2x} - e^{4x}$ **3)** $2e^{2x} - 4e^{x}$

EXERCICE N°7 ***On mélange***

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

1) $\left(e^{x}-1\right)\left(2e^{-x}+3\right)$

2) $\left(1-e^{-x}\right)^{2}$

3) $\left(x-e^{x}\right)\left(x+e^{-x}\right)$

4) $\left(3x+\dfrac{1}{e^{x}}\right)\left(4+e^{x}\right)$

5) $\left(e^{-2x}\right)^{3}\times\left(1-e^{6x}\right)$

6) $\left(2e^{x}-e^{-1}\right)^{2}$