

# CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ N°2

**Nom :**

**Prénom :**

**Classe :**

## EXERCICE N°1

(8 points)

Le coût de production, exprimé en millions d'euros, pour fabriquer  $q$  milliers de tonnes d'un produit est donné par :  $C(q) = \frac{q^2}{4} + q + 4$  où  $q \in [1 ; 20]$  .

Le coût unitaire de production d'un millier de tonnes, noté  $U(q)$  , de ce produit lorsque la production est de  $q$  milliers de tonnes est donné par  $U(q) = \frac{C_M(q)}{q}$

1) Montrer que  $U(q) = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$  où  $q \in [1 ; 20]$  .

$$U(q) = \frac{C_M(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + q + 4}{q} = \frac{1}{q} \left( \frac{q^2}{4} + q + 4 \right) = \frac{q^2}{4q} + \frac{q}{q} + \frac{4}{q} = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$$

On peut aller plus vite mais il faut laisser une étape intermédiaire...

2) Justifier que  $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$  où  $q$  appartient à l'intervalle  $[1 ; 20]$  .

▪ D'une part :

$$U(q) = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$$

$$U'(q) = \frac{1}{4}q + 1 + 4 \times \frac{1}{q} = \frac{1}{4} \times 1 + 0 + 4 \times \frac{-1}{q^2}$$

$$U'(q) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{4}{q^2}$$

▪ d'autre part :

$$\frac{(q-4)(q+4)}{4q^2} = \frac{q^2 - 16}{4q^2} = \frac{q^2}{4q^2} - \frac{16}{4q^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{q^2} = U'(q)$$

▪ Ainsi  $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$  .

3) Étudier le signe de  $U'(q)$  sur l'intervalle  $[1 ; 20]$  et dresser le tableau de variation de  $U$  .

- $4q^2$  est positif sur  $[1 ; 20]$
- $q-4 > 0 \Leftrightarrow q > 4$  et
- $q+4 > 0 \Leftrightarrow q > -4$

$q$	1	4	20
$q-4$	-	0	+
$q+4$	+		+
$4q^2$	+		+
$U'(q)$	-	0	+
$U(q)$	5,25	3	6,2

4) L'entreprise décide de choisir le niveau de production à produire qui minimisera son coût unitaire. Déterminer cette production.

D'après le tableau de variation, il suffit de produire 3000 tonnes .

Attention ici à ne pas répondre 3. En revanche « 3 milliers de tonnes » est bien sûr une bonne réponse.

**EXERCICE N°2****(12 points)**

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note  $x$  la production de tissu en kilomètres. Le coût total de production, exprimé en euros, de  $x$  kilomètres de tissu est donné par la fonction définie pour  $x$  appartenant à  $[1 ; 10]$  par :

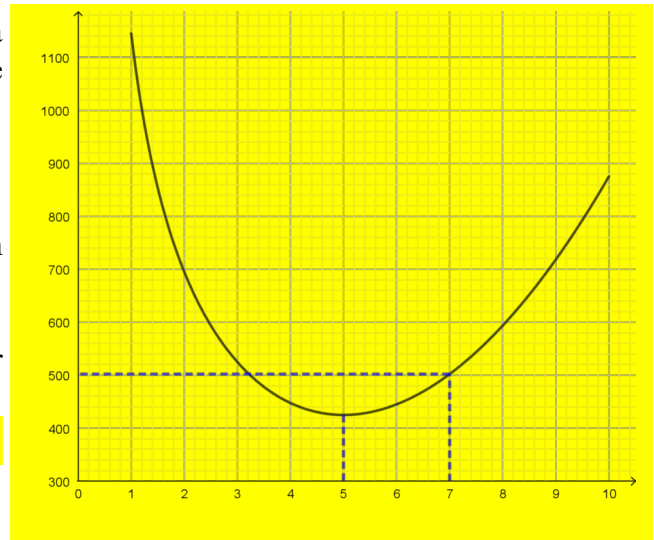
$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

**Partie A : Lectures graphiques**

On appelle coût moyen de production la fonction  $C_M$  définie sur l'intervalle  $[1 ; 10]$  par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

La représentation graphique de la fonction  $C_M$  est donnée ci-contre.



1) Donner par lecture graphique une valeur approchée de  $C_M(7)$ .

Par lecture graphique :  $C_M(7) \approx 500$

2) Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.

Par lecture graphique, l'entreprise doit fabriquer environ 5 km de tissu pour que le coût moyen soit minimal.

**Partie B : Calculs**

Pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; 10]$ .

3) Montrer que :  $C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$ .

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

4) Démontrer que :  $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$ .

▪ D'une part,

$$C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

$$C_M'(x) = 15 \times 2x - 120 \times 1 + 0 + 750 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$C_M'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2}$$

▪ d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} &= \frac{30[x^3+x^2+5x-5x^2-5x-25]}{x^2} = \frac{30[x^3-4x^2-25]}{x^2} \\ &= \frac{30x^3-120x^2-750}{x^2} = 30x - 120 - \frac{750}{x^2} = C_M'(x) \end{aligned}$$

▪ Ainsi  $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$ .

5) Justifier que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; 10]$  ,  $x^2+x+5 > 0$  .

Pour  $x \in [1 ; 10]$  ,  $x^2 \geq 1$  ,  $x \geq 1$  donc  $x^2+x+5 \geq 7 > 0$  .

6) Étudier le signe de  $C_M'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $C_M$  .

- $x^2$  est positif sur  $[1 ; 10]$
- $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$  et
- $x^2+x+5$  est positif sur  $[1 ; 10]$

$q$	1	5	10
$x-5$	−	0	+
$x^2+x+5$	+		+
$x^2$	+		+
$C_M'(x)$	−	0	+
$C_M(x)$	1145	425	875

7) En déduire la longueur de tissu à produire pour que le coût moyen soit minimal.

D'après le tableau de variation, il faut produire 5 km de tissu pour que le coût moyen soit minimal.