PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Ce que l'on sait déjà

Définition n°1. ***Expérience aléatoire, issue,univers***

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience qui, renouvelée dans les mêmes conditions, ne donne pas à chaque essai les même résultats. Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont appelées les **issues**. L'ensemble des issues est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.
On notera Ω cet univers.

Remarque n°1.

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, Ω est fini. Autrement dit, il y a un nombre fini d'issues pour l'expérience aléatoire considérée.

Définition n°2. ***Événement élémentaires, événement, événement contraire***

Les issues sont aussi appelées événements élémentaires. Un événement A est un ensemble composé d'issues. L'événement contraire de A peut être noté $\overline{A}$, A^c , $\Omega \setminus A \ldots$ (nous n'utiliserons que la première), c'est l'ensemble composé de toutes les issues qui ne sont pas dans A .
L'ensemble de tous les événements contenus dans Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition n°3. ***Probabilité***

Une probabilité est une application P de l'ensemble des parties de l'univers $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0\ ,\ 1]$ telle que la somme des probabilités des issues vaut 1. (attention les deux « P » sont différents)

Remarque n°2. ***Événement impossible, événement certain, événements incompatibles***

- L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est appelé événement impossible : $P(\varnothing) = 0$.
- L'ensemble Ω est appelé événement certain : $P(\Omega) = 1$.
- Si A et B deux événements sont tels que $A \cap B = \varnothing$ alors on dit que A et B sont incompatibles et dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

Exemple n°1. ***Le dé cubique (non pipé)***

Quand on jette un dé cubique et que l'on relève le nombre inscrit sur la face du dessus, on réalise une expérience aléatoire. Les issues sont alors $1, 2, 3, 4, 5$ et 6 et l'univers est donc $\Omega = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\}$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est composé des issues $2\ ,\ 4$ et 6 . On a donc $A = \{2\ ,\ 4\ ,\ 6\}$ et $\overline{A} = \{1\ ,\ 3\ ,\ 5\}$.

Comme le dé est non pipé : $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

(A est bien un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $P(A)$ appartient bien à $[0\ ,\ 1]$)

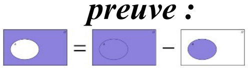
Remarque n°3.

Dans toute la suite de cours, Ω désignera l'univers et P la probabilité.

Propriété n°1. ***Probabilité de l'événement contraire***

Soit A un événement alors $\boxed{P(\overline{A}) = 1-P(A)}$

preuve :



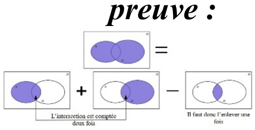
A s'écrit à l'aide certaines issues et $\overline{A}$ à l'aide de toutes les autres.
Donc $P(A)+P(\overline{A}) = 1$ d'après la définition n°3, et en soustrayant $P(A)$ à chaque membre, on obtient bien $P(\overline{A}) = 1-P(A)$. *cqfd*

Propriété n°2. ***Formule du crible (ou de Poincaré)***

Soit A et B deux événements alors

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)}$$

preuve :



$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap \overline{B})+P(A \cap B)+P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A)-P(A \cap B)+P(A \cap B)+P(B)-P(A \cap B) \\ &= P(A)+P(B)-P(A \cap B) \end{aligned}$$ *cqfd*

II Qu'est-ce-qu'une probabilité conditionnelle ?

Définition n°4. ***Probabilité de A sachant B***

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
La probabilité de A sachant B se note $P_B(A)$ et on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propriété n°3. ***Probabilité de A sachant B en cas d'équiprobabilité***

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
Dans le cadre d'une situation **d'équiprobabilité** :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}}$$

Remarque n°4. ***Cardinal d'un ensemble fini***

Soit A un ensemble fini, on appelle cardinal de A et on note $Card(A)$ le nombre d'éléments appartenant à A .

preuve :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}}{\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} \times \frac{Card(\Omega)}{Card(B)} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

Méthode n°1. ***Déterminer une probabilité conditionnelle avec un tableau croisé.***

Énoncé

Dans une classe de première de 35 élèves, on a étudié deux caractères :
La réussite et le travail à la maison.
Le résultat de cette étude est présenté dans le tableau suivant :

	R	$\overline{R}$	Total
T	**19** $Card(T \cap R)$	**6** $Card(T \cap \overline{R})$	**25** $Card(T)$
$\overline{T}$	3 $Card(\overline{T} \cap R)$	7 $Card(\overline{T} \cap \overline{R})$	10 $Card(\overline{T})$
Total	22 $Card(R)$	**13** $Card(\overline{R})$	35 $Card(\Omega)$

Situation d'équiprobabilité car

On choisit un élève au hasard dans cette classe.
On note les événements :
R : « L'élève est en situation de réussite »
T : « L'élève travaille à la maison »
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
1) Déterminer $P_T(R)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.
2) Déterminer la probabilité qu'un élève travaille sachant qu'il ne réussit pas.

Réponse

Ce qui nous permet d'utiliser la propriété n°3

1) $P_T(R) = \frac{Card(R \cap T)}{Card(T)} = \frac{19}{25}$

Cela signifie, que la probabilité qu'un élève réussisse sachant qu'il travaille vaut $\frac{19}{25}$.

2) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(T)$

$$P_{\overline{T}}(R) = \frac{Card(T \cap \overline{R})}{Card(\overline{R})} = \frac{6}{13}$$

Ainsi la probabilité qu'un élève travaille sachant qu'il ne réussit pas vaut $\frac{6}{13}$

Remarque n°5.

On pourrait se demander si ces événements dépendent l'un de l'autre ou pas…
Mais au fait qu'est-ce que cela veut dire ?

III Indépendance de deux événements

Définition n°5. Événements indépendants

Soient A et B deux événements.
On dira que A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété n°4. Autre façon de vérifier l'indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements de **probabilité non nulle**.
A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

preuve :

▪ Soient A et B deux événements de **probabilité non nulle**.
▪ A et B sont indépendants équivaut à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
▪ Comme $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, en divisant chaque membre de l'égalité par $P(A)$ on obtient :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \text{c'est à dire : } P_A(B) = P(B)$$

▪ et en divisant chaque membre de la (toute) première égalité par $P(B)$, on obtient :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{c'est à dire : } P_B(A) = P(A)$$

cqfd

Remarque n°6.

On a obtenu trois caractérisations de l'indépendance de deux événements et donc dès que l'une est vérifiée, les autres le sont ou aussi et si l'une n'est pas vérifiée, les autres ne le sont pas non plus. On choisit, par conséquent, la plus pratique selon la situation.

Méthode n°2. Tester l'indépendance de deux événements.

Avec le contexte de la méthode n°1

On se pose la question : Est-ce-que le fait de travailler influence ou non la réussite (ce qui équivaut à se demander si le fait de réussir influence ou non le fait de travailler). Autrement dit : Les événements T et R sont-ils indépendants ?
On va vérifier si $P_T(R) = P(R)$

$P_T(R) = \dfrac{19}{25}$ (d'après la question 1) et $P(R) = \dfrac{22}{35}$

Ainsi $P_T(R) \neq P(R)$ ce qui signifie que :
T et R ne sont pas indépendants (*je vous laisse en tirer vos conclusions*…)
(*On nuancera vos conclusions en exercices...*)

Remarque n°7.

Ici, on aurait pu choisir choisir n'importe qu'elle caractérisation mais comme $P_T(R)$ était déjà connu, on a gagné un peu de temps.

Remarque n°8.

Hé oui, cela peut paraître étrange, mais on préfère dire « pas indépendants » plutôt que « dépendants ». Cela permet sûrement de se rappeler que la propriété que l'on utilise permet de tester l'indépendance et pas la dépendance…

Remarque n°9. Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
« A et B indépendants » signifie que $P_A(B) = P(B)$ donc que le fait de connaître A ne donne donc aucune information sur B .
alors que :
« A et B incompatibles » signifie que $A \cap B = \varnothing$ c'est à dire que si A est réalisé alors B ne peut pas l'être. Ici le fait de connaître A donne beaucoup d'information sur B .
On comprend même ici que des événements indépendants ne peuvent pas être incompatibles et vice et versa...

IV Arbre pondéré

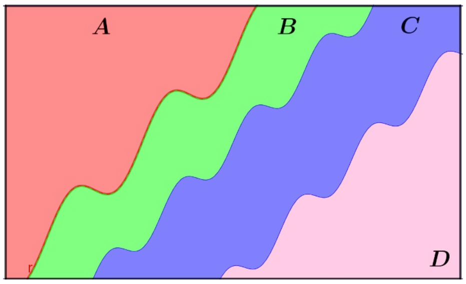
Définition n°6. ***Partition***

Un univers Ω étant donné, on appelle partition de Ω toute collection finie de parties non vides de Ω qui vérifient :

- La réunion de ces parties égale Ω
- Ces parties sont deux à deux disjointes.

Exemple n°2.

L'univers Ω est représenté par le rectangle. Dans cet univers, les parties A, B, C et D sont bien disjointes et leur réunion égale Ω : elles forment donc bien une partition de Ω .



Définition n°7. ***Partition (version « technique »)***

Soit Ω un univers, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de probabilité non nulle. Ces événements forment une partition de Ω si et seulement si :

- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$
- $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Remarque n°10.

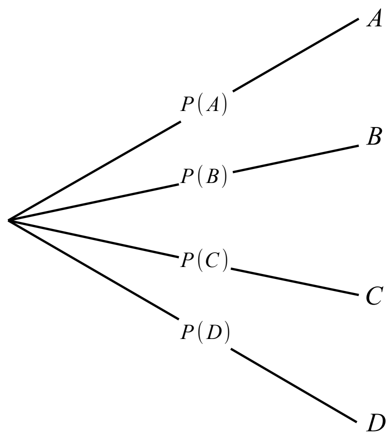
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

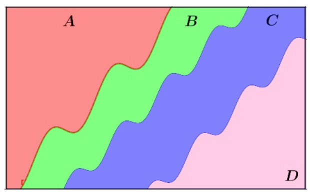
Dans l'exemple n°2, $n = 4$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ et $A_4 = D$

Connaissance n°1 ***Un arbre pondéré très simple***

Supposons à présent, une expérience aléatoire dont l'univers est celui de l'exemple n°2. N'importe quelle issue appartient soit à l'événement A , soit à B soit à C soit à D (car on a une partition de l'univers).

On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.





On peut choisir A avec la probabilité $P(A)$, B avec la probabilité $P(B)$ etc.… jusque D .

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(\Omega) = 1$$

Définition n°8. ***Vocabulaire sur les arbres (première partie)***

Le point de départ de tous les segments s'appelle un nœud , les segments s'appellent des branches.

Propriété n°5.

Dans un arbre pondéré,à chaque nœud, la somme des probabilités des branches vaut 1.

preuve :

Un nœud représente le choix entre les différents éléments d'une partition.

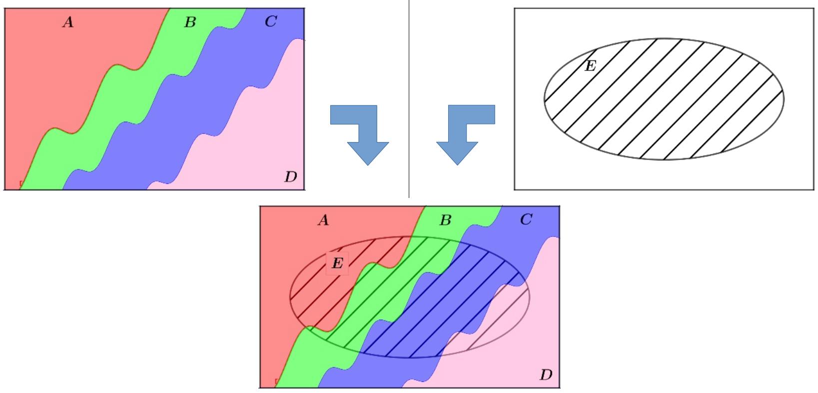
D'une part, par définition ces derniers sont incompatibles entre eux et donc la probabilité de leur union égale la somme de leurs probabilités respectives. D'autres part leur union égale Ω et comme $P(\Omega) = 1$, la propriété est démontrée.

Connaissance n°2 ***Deux arbres pondérés pour un même diagramme***

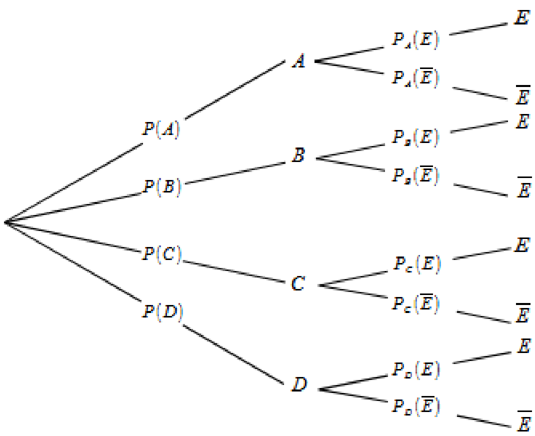
Nous considérons à présent deux partitions d'un même univers que nous « superposons » :

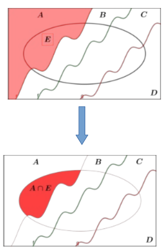
A, B, C et D forment une *partition n°1* de l'univers Ω.

E et $\overline{E}$ forment une *partition n°2* de l'univers Ω.



Si on considère en premier la partition n°1 alors on peut réaliser l'événement E sachant que A est réalisé, on peut réaliser E sachant que B est réalisé etc.… jusque D





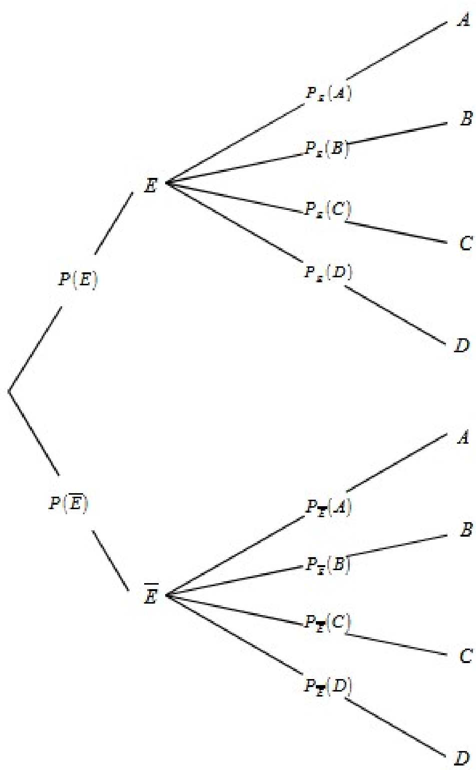
Si on suit la branche A puis la branche E alors on réalise l'événement $A \cap E$.

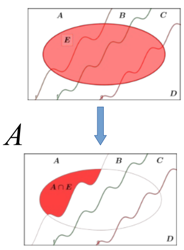
Or :

$$P(A)\times P_A(E) = P(A)\times\frac{P(A \cap E)}{P(A)} = P(A \cap E)$$

En suivant le chemin, on a multiplié les probabilités des branches.

Si on considère la partition n°2 en premier alors on peut réaliser l'événement A sachant que l'événement E est réalisé ou sachant qu'il n'est pas réalisé ($\overline{E}$), etc.… jusque D





Si on suit la branche E puis la branche A alors on réalise l'événement $A \cap E$.

Or :

$$P(E)\times P_E(A) = P(E)\times\frac{P(A \cap E)}{P(E)} = P(A \cap E)$$

En suivant le chemin, on a multiplié les probabilités des branches.

Définition n°9. ***Vocabulaire sur les arbres (seconde partie)***

Une succession de branches de la racine de l'arbre jusqu'à un « événement final » s'appelle un chemin.

Méthode n°3.

Pour déterminer la probabilité d'une chemin, il suffit de multiplier les probabilités des branches qui le composent.

Propriété n°6. Formule des probabilités totales (admise)

Soit Ω un univers, soit B un événement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω , alors

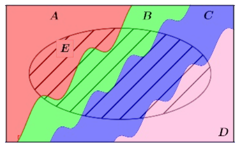
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$$

c'est à dire :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Remarque n°11. Une idée de la preuve pour n = 4

Comme A, B, C et D forment une partition de l'univers on a , grâce à la connaissance n°2 :

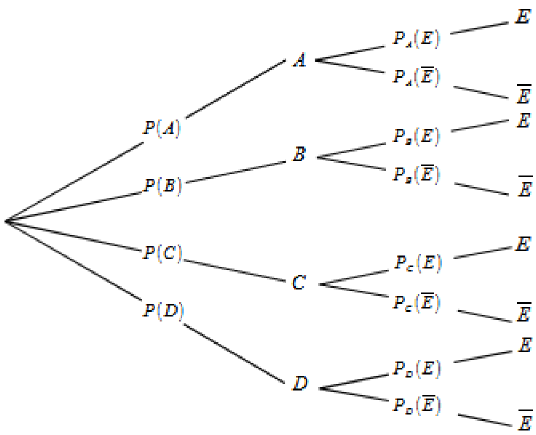


$$P(E) = \underbrace{P(E \cap A)}_{P(A) \times P_A(E)} + \underbrace{P(E \cap B)}_{P(B) \times P_B(E)} + \underbrace{P(E \cap C)}_{P(C) \times P_C(E)} + \underbrace{P(E \cap D)}_{P(D) \times P_A(D)}$$

Méthode n°4. Formule des probabilités totales et arbre pondérés

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.

Exemple n°3.



$$P(E) = P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E) + P(D) \times P_A(D)$$

V Succession de deux épreuves indépendantes

Remarque n°12.

Nous ne ferons pas de distinction entre « expérience aléatoire » et « épreuve », les deux étant surtout utilisés comme synonymes afin d'éviter les répétitions…

Définition n°10.

Quand on réalise deux expériences aléatoires l'une après l'autre et que les résultats de l'une n'influencent pas ceux de l'autre, on dit qu'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple n°4.

On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

▪ Épreuve n°1 :

On lance une pièce de monnaie truquée de façon à obtenir Pile deux fois plus souvent que Face et on note le côté obtenu.

On note :

P : « Obtenir Pile » et

F : « Obtenir Face »

Son univers est alors : $\Omega_1=\{P\ ;\ F\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°1			
Issue	P	F	Total
Probabilité	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

▪ Épreuve n°2 :

On tire une boule dans une urne contenant 5 boules Noires, 3 boules Rouges et 2 boules Blanches et on note la couleur obtenue.

On note :

N : « La boule tirée est Noire » ;

R : « La boule tirée est Rouge » et

B : « La boule tirée est Blanche »

Son univers est alors : $\Omega_2=\{N\ ;\ R\ ;\ B\}$

Loi de probabilité de l'épreuve n°2				
Issue	N	R	B	Total
Probabilité	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	1

Nos deux épreuves sont clairement indépendantes.

Nous allons à présent en construire une troisième à partir de ces deux là.

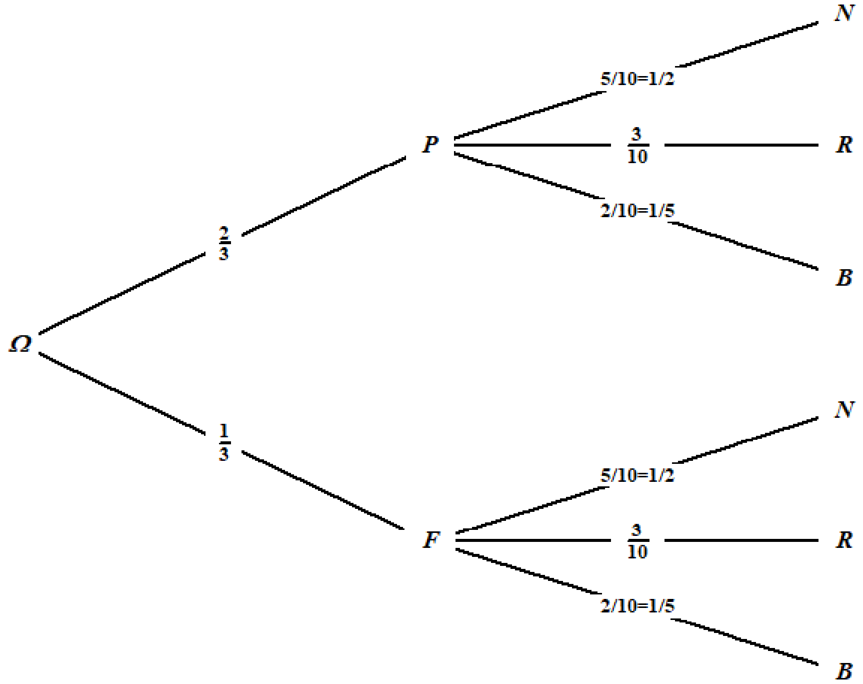
On enchaîne l'épreuve n°1 et n°2.

On obtient alors notre succession de deux épreuves indépendantes.

Son univers est alors :

$$\Omega=\{(P,N)\ ;\ (P,R)\ ;\ (P,B)\ ;\ (F,N)\ ;\ (F,R)\ ;\ (F,B)\}$$

Pour déterminer sa loi de probabilité, on va utiliser un arbre pondéré.



$$p((P,N))=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$p((P,R))=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$$

$$p((P,B))=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

$$p((F,N))=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$p((F,R))=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

$$p((F,B))=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

Loi de probabilité de l'expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes							
Issue	(P,N)	(P,R)	(P,B)	(F,N)	(F,R)	(F,B)	Total
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	1
	$\frac{10}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{30}{30}$

VI Le résumé du cours

(Le paragraphe I doit bien sûr être connu, on résume ce qui est nouveau)

Probabilité conditionnelle de A sachant B

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
La probabilité de A sachant B se note $P_B(A)$ et on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle de A sachant B pour les tableaux croisés.

Soit A et B **deux événements de probabilité non nulle**.
Dans le cadre d'une situation **d'équiprobabilité** :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}}$$

$$P_T(R) = \frac{Card(R \cap T)}{Card(T)} = \frac{19}{25}$$

$$P_{\overline{T}}(R) = \frac{Card(T \cap \overline{R})}{Card(\overline{R})} = \frac{6}{13}$$

	R	$\overline{R}$	Total
T	**19** $Card(T \cap R)$	**6** $Card(T \cap \overline{R})$	**25** $Card(T)$
$\overline{T}$	3 $Card(\overline{T} \cap R)$	7 $Card(\overline{T} \cap \overline{R})$	10 $Card(\overline{T})$
Total	22 $Card(R)$	**13** $Card(\overline{R})$	35 $Card(\Omega)$

Indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements.
On dira que A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ne pas confondre Indépendants et Incompatibles

Les notions d'indépendance et d'incompatibilité n'ont rien avoir l'une avec l'autre.

Comment tester l'indépendance de deux événements

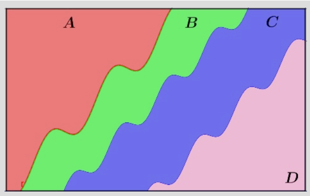
Si de plus A et B sont de **probabilité non nulle** alors
Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont **indépendants**
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

Partition de l'univers

Un univers Ω étant donné, on appelle partition de Ω toute collection finie de parties non vides de Ω qui vérifient :

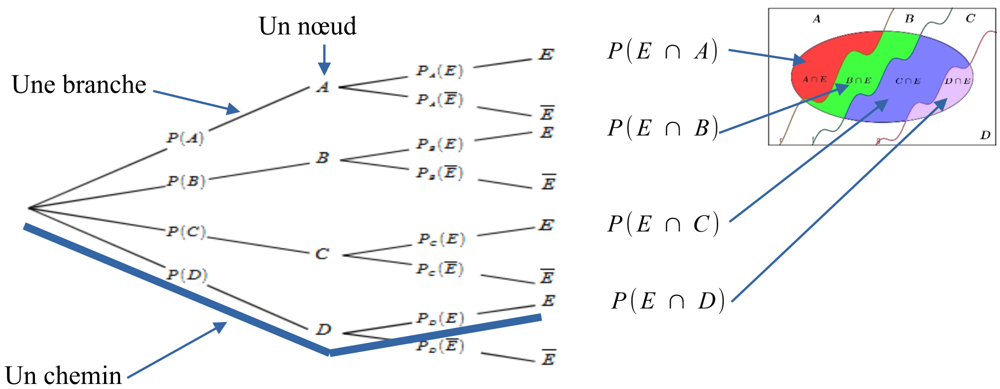
- La réunion de ces parties égale Ω
- Ces parties sont deux à deux disjointes.



A, B, C et D forment une partition de l'univers

Il faudra connaître la définition technique l'année prochaine...

Arbre pondéré (ou de probabilités)



Les règles sur les arbres pondérés

- La somme des probabilités des branches d'un nœud vaut toujours 1.

$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1$, $P_A(E)+P_A(\overline{E}) = 1$, ….

- Quand on suit un chemin, on multiplie les probabilités des branches.

$P(D)\times P_D(E) = P(A \cap E)$

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.

$P(E) = P(A)\times P_A(E) + P(B)\times P_B(E) + P(C)\times P_C(E) + P(D)\times P_A(D)$

Grâce à

Formules des probabilités totales

Soit Ω un univers, soit B un événement, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω , alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\times P_{A_k}(B)$$

c'est à dire :

$$P(B) = P(A_1)\times P_{A_1}(B) + P(A_2)\times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)\times P_{A_n}(B)$$