

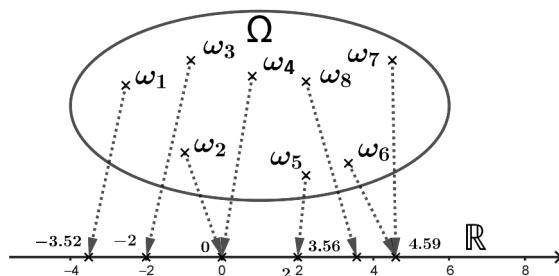
# VARIABLES ALÉATOIRES

## I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

### Définition n°1. Variable aléatoire

Soit  $\Omega$  un univers fini. On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle si  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire si  $X$  associe à chaque issue de  $\Omega$  un nombre réel.

### Exemple n°1.



$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ici,

$$X(\omega_1) = -3,52 :$$

L'issue  $\omega_1$  a pour image  $-3,52$  par la variable aléatoire  $X$  ....

$$X(\omega_2) = 0, \text{ etc....}$$

### Remarque n°1.

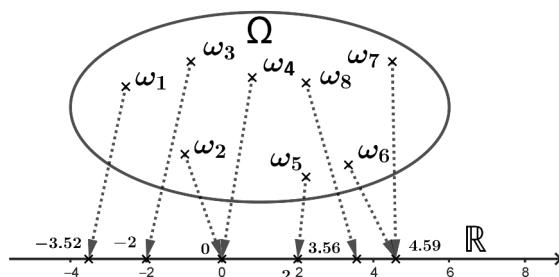
Toutes les issues doivent avoir une image par  $X$  ( car  $X$  est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

### Connaissance n°1 Des notations

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

- $\{X = a\}$  l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $\{X \leq a\}$  l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

### Exemple n°2.



$\{X = -3,52\}$  est en fait  $\{\omega_1\}$ ,  
 $\{X = 0\}$  est en fait  $\{\omega_2, \omega_4\}$   
 $\{X = 1,5\}$  est en fait  $\emptyset$   
 $\{X = -18\}$  aussi...  
 $\{X \leq 0\}$  est en fait  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$   
 $\{X < 0\}$  est en fait  $\{\omega_1, \omega_3\}$

(il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

### Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de  $\Omega$ , on peut parler de leur probabilité.

Par exemple :

$$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) \dots$$

C'est pénible toutes ces accolades !

### Connaissance n°2 Convention d'écriture

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

- $P(X = a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $P(X \leq a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

### Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de  $\Omega$ , on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

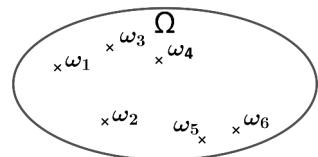
## II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

### Définition n°2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Définir la loi de probabilité de  $X$  c'est donner la valeur de chaque  $P(X = x_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$ .

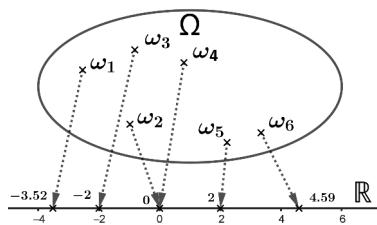
### Exemple n°3.



Issue $\omega_i$	Distribution (ou loi) de probabilité sur $\Omega$					
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total  
1



Loi de probabilité de $X$					
$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\frac{0,35}{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$   
Total  
1

- $P(X = 4,59) = 0,18$ ,  $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$ ,  $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

## VARIABLES ALÉATOIRES E01

### EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de  $X$ .

### EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)

Voici un jeu :

- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis on jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de  $X$ .

# VARIABLES ALÉATOIRES E01

## EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté  $X$ , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de  $X$  est donnée ci-dessous :

$x_i$	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On n'écrit pas les accolades

On fait une partie :

- 1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
- 2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
- 3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
- 4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

## EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

$x_i$	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

- On n'écrit pas les accolades
- 1) Déterminer  $P(X = 8)$ .
  - 2) Déterminer  $P(X \leq 0)$ .
  - 3) Déterminer  $P(X > 7)$ .
  - 4) Déterminer  $P(X < 20)$ .

## III Espérance d'une variable aléatoire réelle

### Remarque n°4.

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour  $X$  ? »

### Définition n°3. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

On appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i)$$

### Remarque n°5.

$$\sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

### Exemple n°4. dans le contexte de l'exemple n°3

$$E(X) = -3,52 \times P(X=-3,52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4,59 \times P(X=4,59)$$

$$E(X) = -3,52 \times 0,1 + (-2) \times 0,25 + 0 \times 0,35 + 2 \times 0,12 + 4,59 \times 0,18$$

$$E(X) = 0,2142$$

L'espérance de  $X$  vaut 0,2142.

**Propriété n°1.*****espérance et transformation affine***

Comme la somme des  $P(X=x_i)$  vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i)}{\sum_{i=1}^k P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de  $X$  pondérées par leurs probabilités respectives.

Or :

- Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre  $b$  à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de  $b$ .
- Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul  $a$  toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par  $a$ .

Au final on peut écrire :  $E(aX+b) = a \times E(X) + b$

## **IV Variance d'une variable aléatoire réelle**

**Remarque n°6.**

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de  $X$  autour de  $E(X)$ . Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

**Définition n°4.*****Variance d'une variable aléatoire réelle***

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$  et soit  $X$  une variable aléatoire réelle prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

On appelle variance de  $X$  et on note  $V(X)$  le réel défini par :

$V(X) = E((X-E(X))^2)$  c'est à dire :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)$$

**Remarque n°7.**

Encore autrement dit :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X=x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X=x_2) + \dots + (x_k - E(X))^2 \times P(X=x_k)$$

**Exemple n°5.*****Dans le contexte de l'exemple n°3***

$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18	1

On calcule d'abord l'espérance :

$$E(X) = 0,2142 \quad (\text{on l'a fait dans l'exemple n°4})$$

Puis on calcule la variance :

$$V(X) = (-3,52 - 0,2142)^2 \times 0,1 + (-2 - 0,2142)^2 \times 0,25 + \dots + (4,59 - 0,2142)^2 \times 0,18$$

$$V(X) \approx 6,4654$$

## Propriété n°2.

### *variance et transformation*

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.  $V(aX+b) = a^2 \times V(X)$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^k (ax_i + b - E(aX+b))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (ax_i + b - aE(X) - b)^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (a(x_i - E(X)))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k a^2(x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) = a^2 \times V(X) \end{aligned}$$

### Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimeraient que  $E(X)$  et  $V(X)$  aient la même unité.

En effet si  $X$  est par exemple en euro alors  $E(X)$  sera en euro mais  $V(X)$  sera en « euro au carré »...

On va donc « se débarrasser de ce carré »...

## ***V Écart-type d'une variable aléatoire réelle***

### **Définition n°5. écart-type d'une variable aléatoire réelle**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de  $X$  et on note  $\sigma(X)$  le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### **Exemple n°6. Toujours dans le contexte de l'exemple n°3**

On avait  $V(X) \approx 6,4654$

Donc  $\sigma(X) = V(X) \approx 2,5427$

### **Remarque n°9. écart-type et transformation affine**

$$\sigma(ax+b) = |a| \times \sigma(X)$$

## **VI Formule de Koenig-Huygens**

### **Remarque n°10.**

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

- Gardons à l'esprit que  $E(X)$  est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^k E(X)^2 \times P(X=x_i) = E(X)^2 \times \sum_{i=1}^k P(X=x_i) = E(X)^2 \times 1$$

- Dans la même idée :

$$E(-2XE(X)) = \sum_{i=1}^k -2x_i E(X) \times P(X=x_i) = -2E(X) \times \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = -2E(X) \times E(X)$$

- On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + \underbrace{E(X)^2 \times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2) - (E(X))^2$$

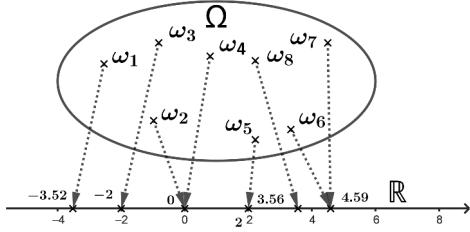
### **Propriété n°3.**

### **Formule de Koenig-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

## VII Le résumé du cours



### Variable aléatoire réelle

Soit  $\Omega$  un univers fini. On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle si

$X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ ,  
c'est à dire si  $X$  associe à chaque issue de  $\Omega$  un nombre réel.

### Convention d'écriture

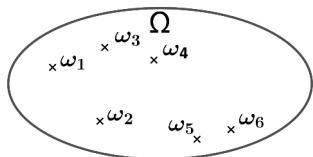
Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

- $P(X = a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $P(X \leq a)$  la probabilité de l'événement  
«  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

**Définir la loi de probabilité de  $X$  c'est donner la valeur de chaque  $P(X = x_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$ .**

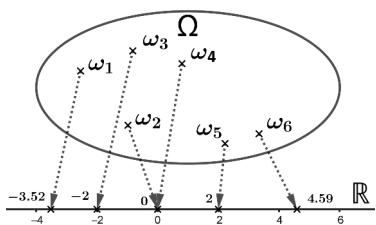
### Loi de probabilité



Distribution (ou loi) de probabilité sur $\Omega$						
Issue $\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total  
1



Loi de probabilité de $X$					
$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\frac{0,35}{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$

Total  
1

### Espérance de $X$

$$E(X) = \sum_{k=1}^k x_i P(X=x_i)$$

ou encore :

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

## Variance de $X$

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

ou encore :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)$$

## Écart-type de $X$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### Les propriétés à retenir

$a$  et  $b$  sont des nombres réels.

**Transformation affine, changement de variable**  
(selon les livres)

$$E(aX+b) = a \times E(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2 \times V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

**Formule de Koenig-Huygens**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$