LE BARÈME DU DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**

EXERCICE N°1 **(8 points)**

Le coût de production, exprimé en millions d'euros, pour fabriquer q milliers de tonnes d'un produit est donné par : $C(q) = \frac{q^2}{4}+q+4$ où $q \in [1\ ;\ 20]$.

Le coût unitaire de production d'un millier de tonnes, noté $U(q)$, de ce produit lorsque la production est de q milliers de tonnes est donné par $U(q) = \frac{C_M(q)}{q}$

1) Montrer que $U(q) = \frac{q}{4}+1+\frac{4}{q}$ où $q \in [1\ ;\ 20]$.

2 pts

$$U(q) = \frac{C_M(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4}+q+4}{q} = \frac{1}{q}\left(\frac{q^2}{4}+q+4\right) = \frac{q^2}{4q}+\frac{q}{q}+\frac{4}{q} = \frac{q}{4}+1+\frac{4}{q}$$

On peut aller plus vite mais il faut laisser une étape intermédiaire...

2) Justifier que $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$ où q appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

▪ D'une part :

$$U(q) = \frac{q}{4}+1+\frac{4}{q}$$

$$U'(q) = \frac{1}{4}q\ +\ 1\ +\ 4\times\frac{1}{q} = \frac{1}{4}\times 1\ +\ 0\ +\ 4\times\frac{-1}{q^2}$$

1 pt

$$U'(q) = \frac{1}{4}+1-\frac{4}{q^2}$$

▪ d'autre part :

1 pts

$$\frac{(q-4)(q+4)}{4q^2} = \frac{q^2-16}{4q^2} = \frac{q^2}{4q^2}-\frac{16}{4q^2} = \frac{1}{4}-\frac{4}{q^2} = U'(q)$$

▪ Ainsi $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$.

3) Étudier le signe de $U'(q)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$ et dresser le tableau de variation de U .

- $4q^2$ est positif sur $[1\ ;\ 20]$
- $q-4 > 0 \Leftrightarrow q > 4$ et
- $q+4 > 0 \Leftrightarrow q > -4$

2 pts

q	1		4		20
$q-4$		$-$	0	+	
$q+4$		+	|	+	
$4q^2$		+		+	
$U'(q)$		$-$	0	+	
$U(q)$	5,25	↘	3	↗	6,2

4) L'entreprise décide de choisir le niveau de production à produire qui minimisera son coût unitaire. Déterminer cette production.

2 pts

D'après le tableau de variation, il suffit de produire $\boxed{3000\ \text{tonnes}}$.

Attention ici à ne pas répondre 3. En revanche « 3 milliers de tonnes » est bien sûr une bonne réponse.

EXERCICE N°2 **(12 points)**

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres. Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction définie pour x appartenant à $[1\ ;\ 10]$ par :

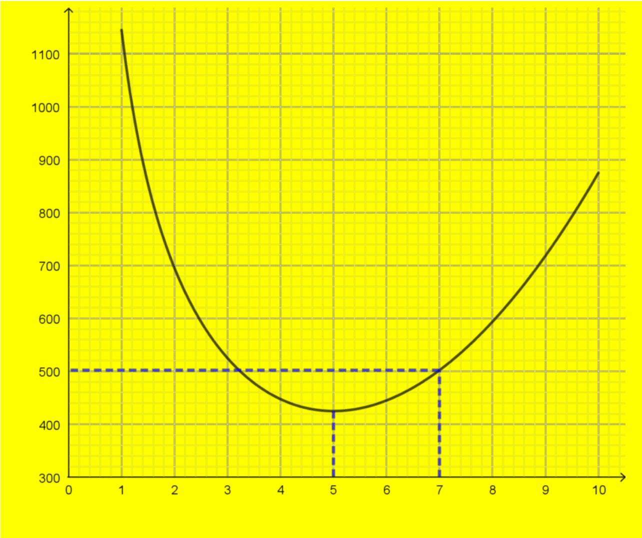
$$\boxed{C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}$$

Partie A : Lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_M définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 10]$ par :

$$\boxed{C_M(x) = \frac{C(x)}{x}}$$

La représentation graphique de la fonction C_M est donnée ci-contre.



1) Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_M(7)$.

1 pt

Par lecture graphique : $\boxed{C_M(7) \approx 500}$

2) Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.

1 pt

Par lecture graphique, l'entreprise doit fabriquer $\boxed{\text{environ } 5 \text{ km de tissu}}$ pour que le coût moyen soit minimal.

Partie B : Calculs

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 10]$.

3) Montrer que : $C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \dfrac{750}{x}$.

2 pts

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

4) Démontrer que : $C_M{}'(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

▪ D'une part,

$$C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

$$C_M{}'(x) = 15 \times 2x - 120 \times 1 + 0 + 750 \times \frac{-1}{x^2}$$

1 pt

$$C_M{}'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2}$$

▪ d'autre part,

$$\frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \frac{30[x^3 + x^2 + 5x - 5x^2 - 5x - 25]}{x^2} = \frac{30[x^3 - 4x^2 - 25]}{x^2}$$

1 pt

$$= \frac{30x^3 - 120x - 750}{x^2} = 30x - 120 - \frac{750}{x^2} = C_M{}'(x)$$

▪ Ainsi $C_M{}'(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

5) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 10]$, $x^2+x+5>0$.

2 pts

Pour $x\in[1\ ;\ 10]$, $x^2\geqslant 1$, $x\geqslant 1$ donc $x^2+x+5\geqslant 7>0$.

6) Étudier le signe de $C_M'(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M .

- x^2 est positif sur $[1\ ;\ 10]$
- $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$ et
- x^2+x+5 est positif sur $[1\ ;\ 10]$

2 pts

q	1		5		10
$x-5$		$-$	0	$+$	
x^2+x+5		$+$	$\vert$	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	1145	$\searrow$	425	$\nearrow$	875

7) En déduire la longueur de tissu à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2 pts

D'après le tableau de variation, il faut produire $\boxed{\text{5 km de tissu}}$ pour que le coût moyen soit minimal.