



LES SUITES NUMÉRIQUES

I Quelques définitions

Définition n°1. Suite numérique réelle (deux versions)

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle) u est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels (\mathbb{N}) dans l'ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).
Autrement dit :

$$u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$$

Remarque n°1. Notations

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer $u(n)$ par u_n .
Ainsi :

$$u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

On pourra noter : u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$ pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois (u_n) mais on évitera le plus possible)

On dira que u_n est le terme de rang n .

Remarque n°2.

À partir de maintenant, on dira « suite » plutôt que « suite numérique réelle ».

Définition n°2. Suite définie de façon explicite

L'application u peut être **définie de façon explicite** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

(avec f au moins définie pour tous les entiers naturels)

Exemple n°1. Une suite définie de façon explicite

La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n - 3$

Ses premiers termes sont :

$$u_0 = -3, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3, \dots$$

Ici $f: x \mapsto 2x - 3$

Définition n°3.

L'application u peut être **définie par une relation de récurrence** :

$$u: \begin{cases} u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel}) \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple n°2. Une suite définie par une relation de récurrence

La suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ses premiers termes sont :

$$v_0 = 1, v_1 = -1, v_2 = -5, v_3 = -13, \dots$$

Ici $f: x \mapsto 2x - 3$ (**Ne pas confondre la fonction f avec l'application u !**)

Remarque n°3.

Une suite peut être définie par un énoncé qui peut prendre plusieurs formes :

- un algorithme (suite d'instructions informatiques ou non)
- un motif géométrique : (triangle de Sierpiński)
- une simple phrase : « la suite w est la suite des nombres impairs positifs ».
- ou encore un ensemble (infini) de points du type $M(n, u_n)$.
- ...

II Suites arithmétiques

Définition n°4. Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.

Autrement dit :

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

- Le nombre r est appelé : **raison** de la suite.

Remarque n°4. Lien avec la définition n°3

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x + r$

Exemple n°3.

- La suite $u : \begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = u_n + 0,9, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = -1,5$.

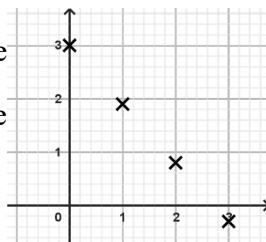
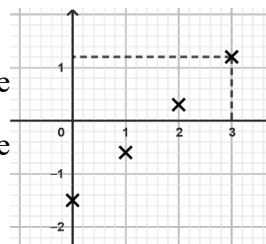
Ses quatre premiers termes sont :

$$u_0 = -1,5, u_1 = -0,6, u_2 = 0,3, u_3 = 1,2$$

- La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 1,1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $-1,1$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Ses quatre premiers termes sont :

$$v_0 = 3, v_1 = 1,9, v_2 = 0,8, v_3 = -0,3$$



Remarque n°5.

Le 1^{er} terme est u_0 , le deuxième u_1 ...

On restera vigilant face à ce « décalage » ...

Propriété n°1. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et u_0 son premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire les termes suivants à l'aide la définition par récurrence :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

\vdots

$$u_n = u_{n-1} + r$$

Puis, en additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + r + u_1 + r + \dots + u_{n-1} + r$$

qui équivaut à :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

puis en soustrayant $(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})$ à chaque membre

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque n°6. Lien avec la définition n°2

Cette fois-ci la suite est définie de façon explicite et on a : $f : x \mapsto u_0 + r \times x$

Propriété n°2. Une généralisation

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $p \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p) \times r$$

preuve : Laissez en exercice

Propriété n°3. Sommes des premiers entiersSoit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Notation : $\sum_{k=0}^n k = 0+1+2+3+\dots+(n-1)+n$)**preuve :**Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\bullet \text{ On remarque que } \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n (n-k)$$

(car : $0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)+n = n+(n-1)+(n-2)+\dots+2+1+0$)

$$\bullet \text{ et donc : } 2 \times \sum_{k=0}^n k = (n+1) \times n$$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ \text{(car : } & \quad + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + 0 \\ & = \underbrace{n + n + n + \dots + n + n + n}_{n+1 \text{ termes}} \end{aligned} \quad)$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{cqfd}$$

Propriété n°4. Sommes des premiers termes d'une suite arithmétiqueSoit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

(Notation : $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$)**preuve :**Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\bullet \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 + k r) \quad (\text{d'après la propriété n°1})$$

$$\begin{aligned} \text{(car : } & \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ & = u_0 + 0 \times r + u_0 + 1 \times r + \dots + u_0 + (n-1) \times r + u_0 + n \times r \end{aligned} \quad)$$

 \bullet Or :

$$\sum_{k=0}^n (u_0 + k r) = \sum_{k=0}^n u_0 + \sum_{k=0}^n k r = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_0}_{(n+1)u_0} + r \times \underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

 \bullet d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= (n+1)u_0 + \frac{r \times n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0 + r n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2u_0 + r n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + r n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \end{aligned} \quad \text{cqfd}$$

Remarque n°7. Une façon de retenir la formule

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Méthode n°1. Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^9 v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_9 \right)$$



Comme on « commence à zéro » le 10^e terme est v_9 , on le calcule :

$$v_9 = v_0 + 9 \times r = -5 + 9 \times 3 = 22.$$

$$A = 10 \times \frac{v_0 + v_9}{2} = 10 \times \frac{-5 + 22}{2} = 85$$

- Soit (w_n) la suite arithmétique de raison $r=1,5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1 + w_2 + \dots + w_{10} \right)$$



Comme on « commence à un » le 10^e terme est w_{10} , on le calcule :

$$w_{10} = w_1 + (10-1) \times r = 2 + 9 \times 1,5 = 15,5.$$

$$B = 10 \times \frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10 \times \frac{2 + 15,5}{2} = 87,5$$

III Suites géométriques**Définition n°5. Suite géométrique**

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.

Autrement dit :

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

- Le nombre q est appelé : **raison** de la suite.

Remarque n°8. Lien avec la définition n°3

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x \times q$

Exemple n°4.

- La suite $u : \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1,9, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite

géométrique de raison 1,9 et de premier terme $u_0 = 0,5$.

Ses quatre premiers termes sont :

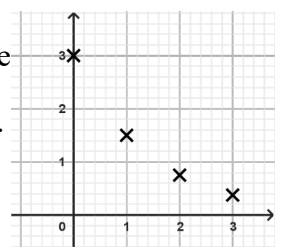
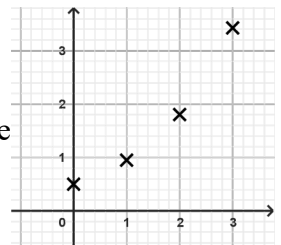
$$u_0 = 0,5, \quad u_1 = 0,95, \quad u_2 = 1,805, \quad u_3 = 3,4295$$

- La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0,5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite

géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 3$.

Ses quatre premiers termes sont :

$$v_0 = 3, \quad v_1 = 1,5, \quad v_2 = 0,75, \quad v_3 = 0,375$$



Propriété n°5. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et u_0 son premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

preuve :

- Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls et l'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ ($0=0$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$ alors on admet que **tous les termes de la suite sont non nuls** et on peut écrire :

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$u_2 = u_1 \times q$$

\vdots

$$u_n = u_{n-1} \times q$$

Puis, en multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \dots \times u_{n-1} \times q$$

qui équivaut à :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n$$

puis en divisant chaque membre par $(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1})$ (qui est non nul...)

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Propriété n°6. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et u_0 son premier terme. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ en particulier si } u_0 = 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

preuve :

Nous allons commencer par le cas particulier et nous en déduisons le cas général.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on remarque que :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_0 \times q^k}_{\text{d'après la propriété n°5}} = u_0 \times \underbrace{\sum_{k=0}^n q^k}_{\text{par factorisation par } u_0}$$

- Posons $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ et calculons $S_n - q S_n$.

$$S_n - q S_n = \sum_{k=0}^n q^k - q \times \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1})$$

(car :

$$S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$q \times S_n = q \times (q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} + q^n) = q^{0+1} + q^{1+1} + \dots + q^{n-1+1} + q^{n+1}$$

- donc, par télescopage (à retenir !):

$$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n+1}$$

(car

$$S_n - q \times S_n = \underbrace{q^0 - q^{0+1}}_0 + q^{1+1} + \dots + q^{n-1} - \underbrace{q^{n-1+1}}_0 + q^n - q^{n+1}$$

les termes se télescopent au fur et à mesure et il ne reste que le 1^{er} et le dernier)

▪ Or :

$$S_n - q \times S_n = (1-q)S_n \quad (\text{par factorisation})$$

▪ Donc

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

Comme $q \neq 1$, $1-q \neq 0$ et on peut diviser chaque membre par $1-q$ pour obtenir :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(Nous avons obtenu le cas particulier)

▪ D'après la remarque du premier point (▪)

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(Nous avons obtenu le cas général)

cqfd

Remarque n°9. Une façon de retenir la formule

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$ vaut :

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Méthode n°2. Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique

▪ Soit (v_n) la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^9 v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_9 \right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = -5 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = -147\,620$$

▪ Soit (w_n) la suite géométrique de raison $r=1,5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des 5 premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^5 w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \right)$$

$$B = w_1 \times \frac{1 - q^5}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 1,5^5}{1 - 1,5} = 26,375$$

Remarque n°10.

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes vaut simplement : $n \times \text{premier terme}$

Remarque n°11.

Tant que n est fixé, on sait donc faire pas mal de choses sur les suites. Mais n peut devenir aussi grand que l'on veut : on dit que n peut « tendre vers l'infini ». On aimerait alors savoir comment se comportent les termes de la suite vers cet « infini ». C'est ce qui motive ce dernier paragraphe. Conformément au programme nous resterons dans l'intuition et nous utiliserons parfois des « pseudo-définitions » (cela sera signalé).

IV Comportement de suite

IV.1 Monotonie

Définition n°6. Suite croissante, suite décroissante

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Remarque n°12.

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

En pratique, c'est surtout la partie de droite de l'équivalence qui sera utilisée.

Exemple n°5.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 + 3n + 2$ est strictement croissante. En effet :

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \underbrace{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2}_{v_{n+1}} - \underbrace{(n^2 + 3n + 2)}_{v_n} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 - n^2 - 3n - 2 \\ &= 2n + 4 \end{aligned}$$

- Or n est un entier naturel donc $n \geq 0$ d'où $2n \geq 0$ et enfin $2n + 4 \geq 4 > 0$
- Ainsi, $v_{n+1} - v_n > 0$ qui équivaut à $v_{n+1} > v_n$.
- En conclusion : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Définition n°7. Suite monotone ou strictement monotone

- Une suite monotone est une suite qui est soit constante, soit croissante, soit décroissante.
- Une suite monotone est une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Propriété n°7. Comportement d'une suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique de raison r .

- Si $r = 0$ alors u est constante.
- Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

preuve :

- Le premier point est évident.
- Pour les deux autres points, remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$
 - Si $r > 0$ alors par définition, la suite est strictement croissante.
 - Si $r < 0$ alors par définition, la suite est strictement décroissante.

Propriété n°8.**Comportement d'une suite géométrique**

Scanner
ou
Cliquer
Pour visualiser

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $q > 1$
 - et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement croissante.
 - et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$
 - et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement décroissante.
 - et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement croissante.
- Si $q < 0$ alors la suite u n'est pas monotone.
- Si $q = 1$ alors la suite u est constante.
- Si $q = 0$
 - et si $u_0 = 1$ alors la suite est constante.
 - et si $u_0 \neq 1$ alors la suite est constante à partir du deuxième rang.

preuve :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = q \times q^n u_0 - q^n u_0 = q^n (q - 1) u_0$
Ainsi, étudier la monotonie de la suite revient à étudier le signe de l'expression $q^n (q - 1) u_0$.
- Si $q > 1$ alors $q^n (q - 1) > 0$
 - et si $u_0 > 0$ alors $q^n (q - 1) u_0 > 0$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n > 0$
ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est bien strictement croissante.
- Le raisonnement est similaire pour les autres cas, regardons seulement le cas $q < 0$:
Dans ce cas $q - 1 < 0$ mais q^n est positif si n est pair et négatif sinon. Par conséquent $q^n (q - 1) u_0$ et donc $u_{n+1} - u_n$ changent de signe selon la parité de n .
- Essayez de traiter les autres cas vous-même.

IV.2 Convergence, divergence, limite de suite

Définition n°8. Convergence, divergence, limite (pseudo-définition)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel.

On dira que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si les termes de la suite tendent vers l ,
On dira alors que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut l et on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite tendent vers $+\infty$,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si les termes de la suite tendent vers $-\infty$,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.

Remarque n°13.

L'arnaque vient du fait qu'on n'a pas défini ce que « tendre » veut dire...

Donnons tout de même une précision :

- Dire qu'une suite tend vers l signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi proches que l'on veut de l .
- Dire qu'une suite tend vers $+\infty$ signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi grands que l'on veut.

Exemple n°6.

- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ v_{n+1} = \frac{v_n}{5}$ converge vers zéro. ($l=0$)
- La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ w_{n+1} = w_n + 5$ diverge vers $+\infty$.
- La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ t_{n+1} = t_n - 5$ diverge vers $-\infty$.
- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ diverge.