PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES

I Les fréquences

Définition n°1.

Soit deux variables A et B étudiées sur un même ensemble E d'individus. On peut croiser ces deux variables dans un tableau d'effectifs, à deux entrées.

$Card(A)$ est le nombre d'individus ayant le caractère A.

	B	non B	Total
A	$Card(A\cap B)$	$Card(A\cap\overline{B})$	$Card(A)$
non A	$Card(\overline{A}\cap B)$	$Card(\overline{A}\cap\overline{B})$	$Card(\overline{A})$
Total	$Card(B)$	$Card(\overline{B})$	$Card(E)$

Définition n°2.

▪ La fréquence de A dans l'ensemble E est $f(A)=\frac{Card(A)}{Card(E)}$

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition de la variable A.

▪ Les fréquences marginales en colonne donnent la répartition de la variable B.

▪ La fréquence conditionnelle de B dans A est $f_A(B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(A)}$

Phénomènes aléatoires

Exemple n°1.

Un groupe représentatif de 500 personnes se répartit suivant deux variables catégorielles:

▪ le sexe (A : féminin et non A : masculin)

▪ la Profession et Catégorie Socioprofessionnelle (PCS) réparties en 4 groupes comme ci-dessous.

	$PCS\,1$	$PCS\,2$	$PCS\,3$	$PCS\,4$	Total	Fréquences marginales
A	25	125	105	5	260	$\frac{260}{500}=0{,}52$
non A	15	90	130	5	240	$\frac{240}{500}=0{,}48$
Total	40	215	235	10	500	1
Fréquences marginales	$\frac{40}{500}=0{,}08$	$\frac{215}{500}=0{,}43$	$\frac{235}{500}=0{,}47$	$\frac{10}{500}=0{,}02$	1	

PCS1 : Agriculteurs, artisans, commerçants et chefs d'entreprise
PCS2 : Cadres, prof. intellectuelles sup., prof. Intermédiaires
PCS3 : Employés, ouvriers
PCS4 : Autres professions ou catégories

▪ Les fréquences marginales en colonnes donnent la répartition des *PCS* dans le groupe, indépendamment du sexe des individus. Ainsi, 47% des personnes du groupe sont employés ou ouvriers.

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition du sexe, indépendamment de la PCS des individus. Ainsi 52% des personnes du groupe sont des femmes

▪ La fréquence conditionnelle de la PCS3 dans les personnes de sexe féminin est : $f_A(PCS\,3)=\frac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(A)}=\frac{105}{260}=\frac{21}{53}\approx 0{,}404$

• La fréquence conditionnelle des femmes dans les PCS3 du groupe est:

$$f_{PCS\,3}(A)=\frac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(PCS\,3)}=\frac{105}{235}=\frac{21}{47}\approx 0{,}447$$

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1

Le tableau suivant donne les effectifs des classes de première au lycée de Lens.

Y=Sexe / X=Filières	y_1=Filles	y_2=Garçons	Total
x_1= 1^{ere} STMG	54	90	144
x_2= 1^{ere} ST2S	59	18	77
x_3= 1^{ere} STI2D	27	72	99
x_4= 1^{ere} STL	60	18	78
x_5= 1^{ere} STD2A	34	18	52
Total	234	216	450

1) Construire le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.

2) Quel est le pourcentage de filles en 1^{ere} STI2D?

3) Donner $Card(x_4 \cap y_2)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

4) Quel est le pourcentage d'élèves en 1^{ere} ST2S?

EXERCICE N°2

Des chercheurs tentent de comprendre pourquoi certaines personnes sont plus vulnérables que d'autres à une maladie. Ils ont mené une étude sur le lien entre l'état dépressif et les antécédents familiaux sur des patients. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

	Avec antécédents	Sans antécédents	TOTAL
Patients malades	456	308	
Patients non malades	76	160	
TOTAL			

1) Après avoir recopié et complété le tableau précédent, construire le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.

2) Quel est le pourcentage des patients non malades avec antécédents ?

3) Donner une interprétation du nombre « 160 » dans le contexte de l'exercice.

4) Comparer les deux résultats précédents.

EXERCICE N°3

Durant l'année 2018, la Tour Eiffel a été visitée par plus de 7 millions de personnes.
Plus de 75 % des visiteurs sont des étrangers.
Parmi les étrangers, les 3/4 accèdent au troisième étage. 2/3 des Français restent au deuxième étage.

1) Quel est le nombre de visiteurs journaliers de la Tour Eiffel ? Arrondir à l'unité.

2) Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs du nombre de personnes visitant quotidiennement la Tour Eiffel.

	nombre de personnes visitant le deuxième étage	nombre de personnes visitant le troisième étage	Total
Étrangers			
Français			
Total			

3) Quel est l'effectif le plus important au deuxième étage? Les Français ou les étrangers?

4) Établir le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.

5) Quel est le pourcentage des personnes françaises visitant le 3^{e} étage de la Tour Eiffel par rapport à l'effectif global ?

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES

II Les probabilités conditionnelles

II.1 Comprendre ce qu'est une probabilité conditionnelle

Définition n°3. Événement contraire

On note $\overline{A}$ (et on lit « A barre ») l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A .

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

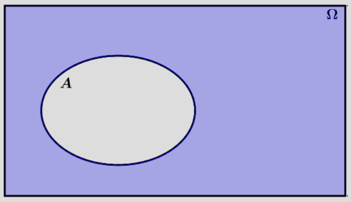


Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

Définition n°4. Intersection de deux événements

On note $A \cap B$ (et on lit « A inter B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus à la fois dans A et B

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	
$\overline{A}$		

La case coloriée correspond à $A \cap B$

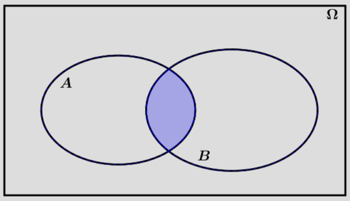


Diagramme de Venn illustrant $A \cap B$

Définition n°5. Union de deux événements

On note $A \cup B$ (et on lit « A union B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou B .

	B	$\overline{B}$
A	$A \cup B$	$A \cup B$
$\overline{A}$	$A \cup B$	

Les cases coloriées correspondent à $A \cup B$

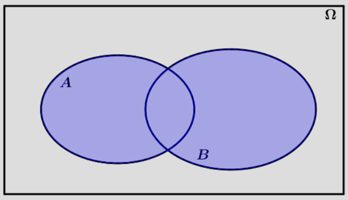


Diagramme de Venn illustrant $A \cup B$

Remarque n°1.

Attention, c'est un « ou inclusif » : l'événement peut appartenir à A , à B mais aussi à A et B en même temps

Définition n°6. Probabilité conditionnelle

On appelle **probabilité de** $\boldsymbol{B}$ **sachant** $\boldsymbol{A}$ et on note $\boldsymbol{p_A(B)}$ le nombre défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}}}$$

Propriété n°1.

$$\boxed{\boldsymbol{p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}}$$

preuve :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}}{\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} \times \frac{Card(\Omega)}{Card(A)} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = p_A(B)$$

Remarque n°2. rappel

$Card(A)$ est le nombre d'événements élémentaires contenus dans A

Méthode n°1. ***Calculer et interpréter une probabilité conditionnelle.***

Un magasin de sport à la montagne dispose de 400 matériaux de glisse. Il propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.

Son matériel est constitué de 45 % de skis de piste, 36 % de snowboards et le reste de skis de randonnée.

Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Il a été constaté que la moitié des skis de piste, deux tiers des snowboards et le quart des skis de randonnée ont été abîmés pendant la journée.

Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise leur suivi.

On considère les événements suivants :

- P : « La fiche est celle d'une paire de skis de piste » ;
- S : « La fiche est celle d'un snowboard » ;
- R : « La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée » ;
- A : « Le matériel a été abîmé et nécessite une réparation » .

On représente la situation sous la forme d'un tableau :

Matériel / Résultat du contrôle	P	S	R	Total
A	90	96	19	205
$\overline{A}$	90	48	57	195
Total	180	144	76	400

$$p_A(R) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(A)} = \frac{19}{205} \approx 0{,}0927$$

Sachant que le matériau a été endommagé, il y a environ 9,27 % de chance que ce soit des skis de randonnée.

$$p_R(A) = \frac{Card(A \cap R)}{Card(R)} = \frac{19}{76} = 0{,}25$$

Il y a une chance sur quatre qu'un ski de randonné soit endommagé

$$p_{\overline{A}}(S) = \frac{Card(\overline{A} \cap R)}{Card(\overline{A})} = \frac{48}{195} \approx 0{,}2462$$

On tire au hasard un matériau qui n'a pas été endommagé, la probabilité que ce soit un snowboard est d'environ 24,62 %.

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire comptant 160 issues possibles et vérifiant :

$Card(A \cap B) = 35$; $Card(A) = 50$ et $Card(B) = 70$

1) Représenter la situation sous forme de tableau

2) Calculer $p_A(B)$ et $p_B(A)$

EXERCICE N°2

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$P_B(A)=0{,}7$ et $Card(B)=50$

Calculer $Card(A \cap B)$

EXERCICE N°3

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$P_B(A)=0{,}1$ et $Card(B)=8510$

Calculer $Card(A \cap B)$

EXERCICE N°4

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0,5$ et $Card(A \cap B)=14$

Calculer $Card(B)$

EXERCICE N°5

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant :

$p_B(A)=0,3$ et $Card(A \cap B)=21$

Calculer $Card(B)$

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E02

EXERCICE N°6

Un commerçant vend deux types de guirlandes électriques pour Noël, des guirlandes d'intérieur et des guirlandes d'extérieur. Certaines guirlandes se révèlent défectueuses. Il possède un stock de 400 guirlandes.

On admet que :

- 6 % des guirlandes proposées à la vente sont défectueuses;
- 30 % de toutes les guirlandes sont d'extérieur;
- 5 % des guirlandes d'extérieur sont défectueuses.

1) Établir le tableau croisé d'effectifs.

2) Déterminer le cardinal de l'événement : « Les guirlandes sont d'intérieur et non défectueuses».

3) Calculer puis interpréter $p_{intérieur}(Défectueuses)$.

EXERCICE N°7

Lors d'un contrôle antidopage à l'issue d'une compétition sportive, les sportifs peuvent être déclarés positifs (qu'ils soient dopés ou non) ou négatifs (qu'ils soient dopés ou non). L'étude porte sur 50 personnes.

Soit n l'effectif des dopés parmi les sportifs contrôlés

On sait que:

• 95 % des sportifs dopés sont déclarés positifs;

• 10 % des sportifs non dopés sont déclarés positifs

1) Établir le tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation.

2) Calculer, en fonction de n, l'effectif de l'événement « Le comité a commis une erreur ».

3) On choisit au hasard un sportif ayant été contrôlé

3.a) Montrer que la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé est de : $p_{Positif}(Dopé) = \dfrac{0{,}95\,n}{5+0{,}85\,n}$

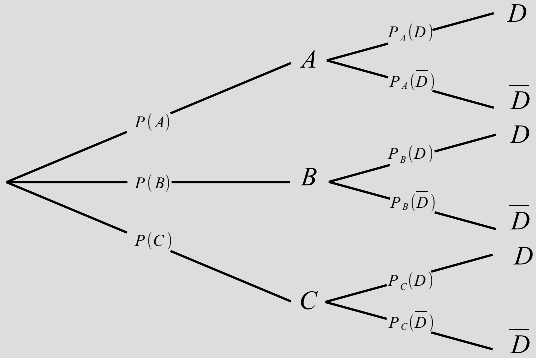
3.b) Résoudre . $p_{positif}(Dopé) > 0{,}95$

3.c) Interpréter ce résultat.

II.2 Le lien avec les arbres de probabilités

Définition n°7. ***Arbre de probabilités***

Un arbre de probabilités est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Bilan

$P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)$

$P(A\cap \overline{D})=P(A)\times P_A(\overline{D})$

$P(B\cap D)=P(B)\times P_B(D)$

$P(B\cap \overline{D})=P(B)\times P_B(\overline{D})$

$P(C\cap D)=P(C)\times P_C(D)$

$P(C\cap \overline{D})=P(C)\times P_C(\overline{D})$

Remarque n°3.

Les événements reliés à un même nœud sont incompatibles deux à deux.

Définition n°8. ***Branche***

Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène.

Exemple n°2.

Ci-dessus, sur la branche de A à D, on place $P_A(D)$, la probabilité conditionnelle de D sachant A ;

Définition n°9. ***Nœud***

Un nœud est un croisement entre plusieurs branches.

Définition n°10. ***Chemin***

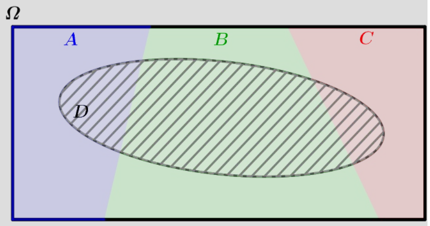
Un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.

Définition n°11. ***Événement bilan***

L'événement bilan, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

Définition n°12. ***Partition de l'univers***

Dans ce diagramme de Venn qui correspond à l'arbre de la définition n°1.
Les événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω :
Leur réunion égale l'univers et ils sont incompatibles deux à deux (ils sont disjoints).



On en déduit la propriété suivante.

Propriété n°2.

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

Exemple n°3.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Remarque n°4.

$D \cap A$ et $\overline{D} \cap A$ forment une partition de A et donc :

$$P_A(D) + P_A(\overline{D}) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} + \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)}$$

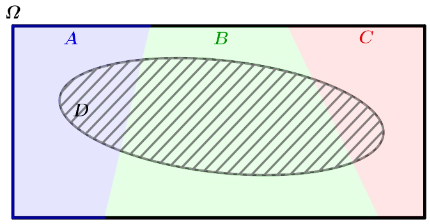
$$= \frac{P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

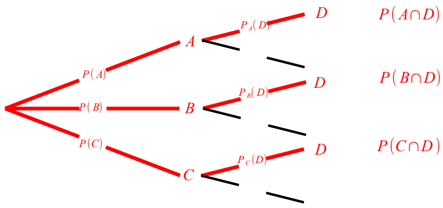
Propriété n°3. ***Formule des probabilités totales***

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement dans un arbre de probabilités.

preuve : ***(ou plutôt une explication)***

Le diagramme de Venn nous permet de comprendre que $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$. Comme ces événements sont incompatibles : $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

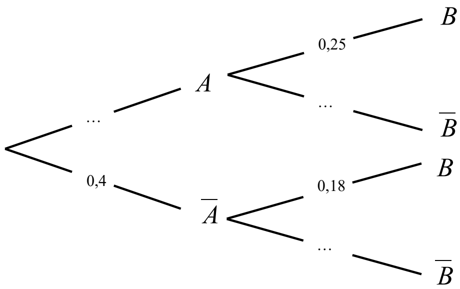




PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°1 Utiliser un arbre

On donne l'arbre de probabilités ci-contre.

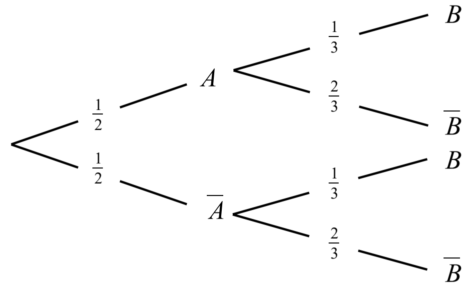


1) Reproduire et compléter cet arbre.
2) Lire $P(A)$.
3) Déterminer $P(A \cap B)$.
4) On donne $P(B) = 0{,}222$. En déduire $P_B(A)$ arrondie au millième.

EXERCICE N°2

1) À partir de l'arbre ci-contre, calculer $P(A)\times P_A(B)$ et $P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$.

2) En déduire $P(B)$



EXERCICE N°3 Construire un arbre

Un panier contient 45 % de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons,70 % proviennent de France. Parmi les kiwis, 80 % ne proviennent pas de France. On note les événements :

C : « le fruit est un citron ».
K : « le fruit est un kiwi ».
F : « le fruit provient de France ».

1) Décrire la situation par un arbre de probabilités.
2) Traduire l'événement « F sachant K» et donner sa probabilité.
3) En déduire $P(K \cap F)$.

EXERCICE N°4

A et B sont deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}4$, $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7$.

1) Construire un arbre de probabilités à partir des données précédentes.

2) Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.

3) En déduire $P(B)$.

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°5 Formule des probabilités totales

83 % des élèves d'une classe ont choisi espagnol LV2, les autres ont choisi allemand LV2.

64 % des élèves ayant choisi allemand LV2 sont des garçons contre 50 % ayant choisi espagnol LV2.

On choisit un élève au hasard.

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E03

EXERCICE N°6

A et B sont deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}5$; $P(\overline{A}) = 0{,}5$; $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$

Calculer $P(B)$.

EXERCICE N°7

Dans un club de football, 80% des licenciés sont des garçons, le reste des filles. Chez les hommes, 75 % sont majeurs. Chez les filles, 25 % sont majeures. On choisit un licencié au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il soit majeur ?

II.3 Indépendance de deux événements

Définition n°13.

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$

Propriété n°4. ***L'indépendance de deux événements est symétrique***

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$

preuve :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Propriété n°5. ***Une autre façon de voir l'indépendance de deux événements***

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

preuve :

Il suffit de lire la preuve de la propriété n°3...

Remarque n°5.

On a $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ et $P_A(A) = 1$
Si A et B sont disjoints alors $P_A(B) = 0$

Remarque n°6. ***Attention***

Les mots « disjoint » et « indépendant » ne signifient pas du tout la même chose :
« disjoints » = « incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$
(leur intersection est vide)

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°1 Démontrer l'indépendance

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note

D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?

2) Que dire des événements D et N ?

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°2

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0{,}3$, e $P_B(A) = 0{,}7$ t $P_A(B)=0{,}3$

.

A et B sont-ils indépendants?

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°3

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}5$.

Calculer $P(A \cap B)$.

PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES E04

EXERCICE N°4

Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$ et $P(A) = \dfrac{2}{3}$

Quelle valeur doit prendre $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

EXERCICE N°5

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

1) Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

EXERCICE N°6

On lance deux pièces de monnaie successivement.
La première pièce est équilibrée.
La deuxième ne l'est pas et vérifie les conditions suivantes :
- Si la première pièce donne pile, la deuxième pièce donne pile trois fois sur quatre.
- Si la première pièce donne face, la deuxième pièce donne face cinq fois sur six.

1) Donner la probabilité d'avoir pile au 1^{er} lancer.
2) Calculer la probabilité d'avoir pile au 2e lancer.
3) Calculer la probabilité d'avoir deux fois pile, et en déduire que les événements :
« obtenir pile au 1^{er} lancer » et « obtenir pile au 2^{e} lancer » ne sont pas indépendants.