

# CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE

## Remarque n°1.

Il peut être utile de se rafraîchir la mémoire avant de commencer : on pourra lire [ce cours](#). Nous travaillerons toujours dans le plan.

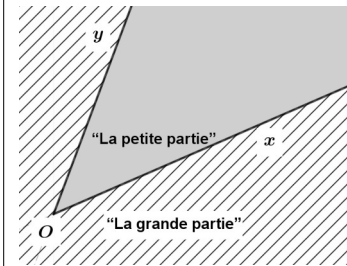
## I Définir le produit scalaire de deux vecteurs

### Remarque n°2. Angle géométrique

On ne définira pas ce qu'est un **angle géométrique**, on aura juste en tête une image : deux demi-droites de même origine séparent un plan en deux parties, l'angle géométrique qu'elle définissent est « la plus petite des deux parties ».

$\widehat{xOy}$  et  $\widehat{yOx}$  sont deux noms pour un même angle géométrique (*mais pas pour un angle orienté*).

Quand on parlera de la **mesure d'un angle géométrique**, il faudra comprendre : le **réel compris entre 0 et  $\pi$  inclus** qui, exprimé en radian, peut correspondre à une mesure de l'angle donné.



Si  $\theta \in [0, \pi]$  est une mesure l'angle  $\widehat{xOy}$  alors  $-\theta, \theta + 2\pi, \dots$  peuvent l'être aussi. On choisira  $\theta$ .

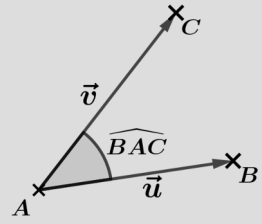
$\theta$  se lit thêta

# ***CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE***

## ***Définition n°1. Angle entre deux vecteurs***

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle angle formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$ .



## ***Remarque n°3.***

On fera comme tout le monde et on notera abusivement  $\widehat{BAC}$  la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$ .

## ***CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE***

### ***Remarque n°4.***

$\lambda$  se lit lambda

$\alpha$  se lit alpha

Donnons nous un réel non nul  $\lambda$ , et notons  $\alpha$  la mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

- Si  $\lambda > 0$ , il paraît acceptable d'admettre que  $(\lambda \vec{u}, \vec{v})$  et  $(\vec{u}, \lambda \vec{v})$  définissent le même angle géométrique que  $(\vec{u}, \vec{v})$  et donc que leur mesure vaut également  $\alpha$ .
- Si  $\lambda < 0$ , il paraît moins facile d'admettre que  $(\lambda \vec{u}, \vec{v})$  et  $(\vec{u}, \lambda \vec{v})$  ont une mesure égale à  $\pi - \alpha$  (Pour s'en convaincre, on regardera le cercle trigonométrique...)

# ***CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE***

## ***Définition n°2. Norme d'un vecteur***

Soit un vecteur  $\vec{u}$  et deux points  $A$  et  $B$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

On appelle norme du vecteur  $\vec{u}$  et on note  $\|\vec{u}\|$  le réel positif défini par :

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \underbrace{AB}_{\text{la longueur } AB}$$

# CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE

## Définition n°3. Une définition du produit scalaire avec le cosinus

Définition avec le cosinus

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel défini par :

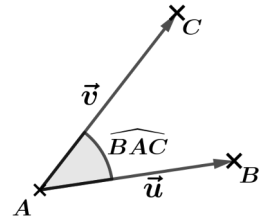
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

## Remarque n°5. Et si l'un au moins des vecteurs est le vecteur nul ?

On ne peut pas définir un angle entre un vecteur et le vecteur nul, mais comme  $\|\vec{0}\| = 0$ , on convient qu'alors le produit scalaire vaut zéro.

## Exemple n°1.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ &= \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$



# ***CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE***

## ***Propriété n°1. Carré scalaire***

Soit  $\vec{u}$  un vecteur.

$$(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

***preuve :***

Évidente en se souvenant que  $\cos(0) = 1 \dots$

# ***PRODUIT SCALAIRE E01***

## ***EXERCICE N°1      S'approprier la définition***

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans chaque cas.

1)  $\|\vec{u}\| = 2$  ;  $\|\vec{v}\| = 5$  et  $\widehat{(\vec{u} ; \vec{v})} = \frac{\pi}{6} rad$

2)  $\|\vec{u}\| = 4$  ;  $\|\vec{v}\| = 5\sqrt{2}$  et  $\widehat{(\vec{u} ; \vec{v})} = 45^\circ$

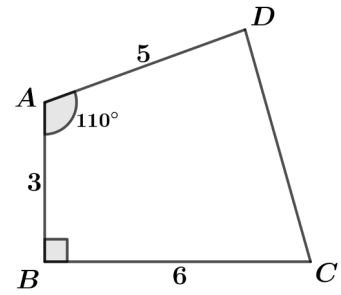
## ***PRODUIT SCALAIRE E01***

### ***EXERCICE N°2 Avec une figure et une calculatrice***

À l'aide du quadrilatère ci-contre. Calculer les produits scalaires suivants (On arrondira à  $10^{-2}$ ) :

1)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

2)  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$



## ***PRODUIT SCALAIRE E01***

### ***EXERCICE N°3      Utiliser la définition***

- 1) On donne  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que :  $\|\vec{u}\| = 7$  ,  $\|\vec{v}\| = 6$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 21\sqrt{3}$  . Déterminer  $\widehat{(\vec{u} ; \vec{v})}$  . (On donnera la mesure en radians ET en degrés)
- 2) On donne  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que :  $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$  ,  $\widehat{(\vec{u} ; \vec{v})} = \frac{\pi}{4} rad$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$  .  
Déterminer  $\|\vec{v}\|$  .

## ***PRODUIT SCALAIRE E01***

### ***EXERCICE N°4 Réinvestir d'anciennes connaissances***

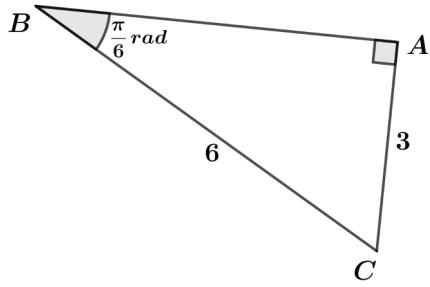
On donne  $A$  ,  $B$  et  $C$  trois points distincts du plan.

- 1) On sait que  $\|\vec{AB}\| = 5,5$  ,  $\|\vec{BC}\| = 4$  et  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$  . Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
- 2) On sait que  $\|\vec{AB}\| = 1$  ,  $\|\vec{AC}\| = 1$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}$  . Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
- 3) On sait que  $\|\vec{AB}\| = 3$  ,  $\|\vec{AC}\| = 3$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{9}{2}$  . Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?

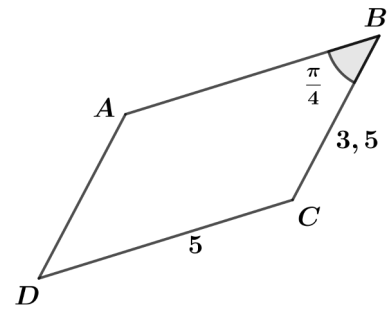
# PRODUIT SCALAIRE E01

## EXERCICE N°5 Facile !

- 1) Déterminer  $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ .



- 2) Déterminer  $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ .



$ABCD$  est un parallélogramme.

# CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE

## Propriété n°2. Le produit scalaire est symétrique

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

*preuve :*

- $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  et  $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$  sont un seul et même angle géométrique donc leur cosinus respectifs sont égaux.
- De plus, comme  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$  sont des nombres réels :  
 $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\|$ .
- Donc :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$

## Propriété n°3. Compatibilité avec la multiplication par un réel (vecteur de gauche).

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\lambda$  un nombre réel, alors

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

*preuve :*

- Si l'un au moins des deux vecteurs est nul alors l'égalité est évidente.
- Supposons, à présent  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et notons  $\alpha$  « la » mesure de  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .
- Si  $\lambda = 0$  alors  $\lambda \vec{u} = \vec{0}$  et donc  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$ . De plus, comme  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est un nombre réel,  $0 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . On a bien  $(0 \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0 \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Si  $\lambda > 0$  alors  $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\| = \lambda \times \|\vec{u}\|$ . De plus,  $(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}})$  a pour mesure  $\alpha$  (voir la remarque n°4). Donc :  
 $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = \lambda \left( \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \right) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Si  $\lambda < 0$  alors  $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\| = -\lambda \times \|\vec{u}\|$ . De plus,  $(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}})$  a pour mesure  $\pi - \alpha$  (voir la remarque n°4). Donc :  
 $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\lambda \vec{u}, \vec{v}}) = -\lambda \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left( -\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \right) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Dans tous les cas, on a bien  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$  *cqfd*

## Propriété n°4. à droite ça marche aussi

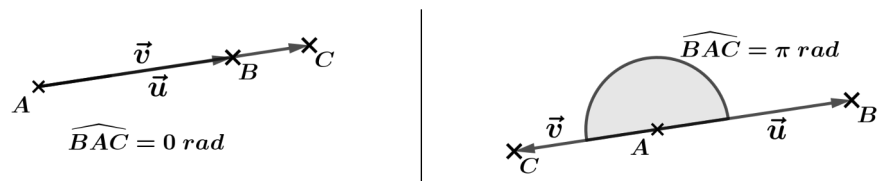
Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\lambda$  un nombre réel, alors

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

*preuve :*

Par symétrie du produit scalaire (propriété n°2) et la propriété n°3, le résultat demeure vrai. *cqfd*

## Remarque n°6.



Si  $\widehat{BAC} = 0 \text{ rad}$  ou  $\widehat{BAC} = \pi \text{ rad}$  alors les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés (éventuellement  $B$  et  $C$  peuvent même être confondus si  $AB = AC$ ).

Dans ce cas, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la même direction : ils sont colinéaires. Comme  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi) = -1$ , on obtient :

## Propriété n°5. Produit scalaire et colinéarité

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** et de **même sens** si et seulement si

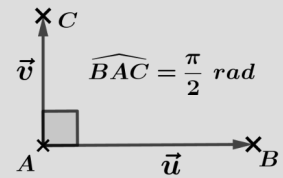
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** et de **sens contraires** si et seulement si  

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

#### Définition n°4. Vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .  
 Si les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont **perpendiculaires** alors on dit que les **vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux** et on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .



#### Remarque n°7.

Dans ce cas, et seulement dans ce cas  $\cos(\widehat{BAC}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Par conséquent :

#### Propriété n°6. Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

#### Remarque n°8. Et si l'un au moins des vecteurs est le vecteur nul ?

On ne peut pas définir un angle entre un vecteur et le vecteur nul, mais comme  $\|\vec{0}\| = 0$ , on convient qu'alors le produit scalaire vaut zéro.

#### Remarque n°9.

D'après les remarques n°4 et n°7,

Le vecteur nul est à la fois colinéaire et orthogonal à tout vecteur.

## II D'autres façons de définir le produit scalaire

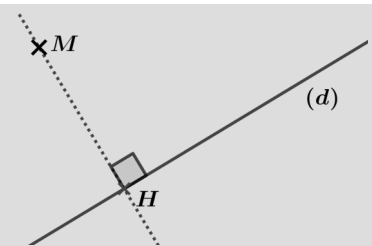
#### Remarque n°10.

Il peut parfois être utile, de voir les mêmes choses sous des angles différents. Ici par exemple, il est possible de définir autrement le produit scalaire.

Par contre, deux définitions différentes d'un même objet doivent être équivalentes. De plus, en mathématiques, quand on a choisi une définition, les autres deviennent des propriétés qu'il faut alors démontrer à partir de la définition choisie. Nous admettons ces démonstrations à notre niveau.

#### Définition n°5. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $(d)$  est le point d'intersection  $H$  de la droite  $(d)$  et de la perpendiculaire à  $(d)$  passant par  $M$ .



#### Propriété n°7. Définition du produit scalaire avec la projection orthogonale (admise)

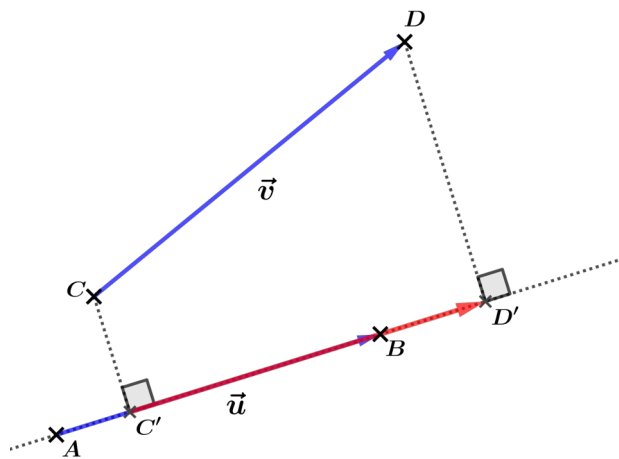
Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls ainsi que les points  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ . On note  $C'$  et  $D'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $C$  et  $D$  sur la droite  $(AB)$ . On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB \times C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB \times C'D' & \text{sinon} \end{cases}$$

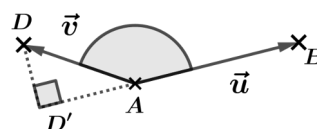
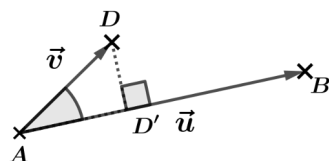
(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ )

Le cas général

Définition avec le projeté orthogonal



Deux cas particuliers, pour comprendre :  $C$  et  $A$  confondus.



**Remarque n°11.** *Une idée de la preuve*

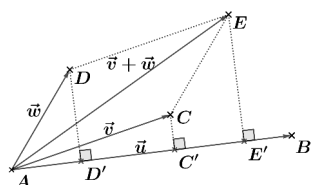
Le cas général, peut toujours être ramené à l'un des deux cas particuliers en choisissant correctement le représentant du vecteur  $\vec{v}$ . On voit ainsi le lien avec la définition utilisant le cosinus... On remarquera aussi que dans le triangle  $ADD'$  rectangle en  $D'$ , on a  $\cos(\widehat{DAD'}) = \frac{AD'}{AD}$  et on verra encore mieux le lien avec la première définition...

**Propriété n°8.** *Compatibilité avec la somme de deux vecteurs (admise)*

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

**Remarque n°12.** *Une idée de la preuve*



(admise)

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$  donc  $AC' = DE'$  d'où  $AE' = AD' + AC'$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = AB \times AE' = AB \times (AD' + AC') = AB \times AD' + AB \times AC' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

**Propriété n°9.** *Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire*

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels.

▪ symétrie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

▪ bilinéarité

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

**Remarque n°13.** *Une idée de la preuve*

Les propriétés n°2, 3, 4 et 8 (qui ne sont pas « mises en valeur » par un fond gris) servent à établir cette propriété n°9 qui, elle, est par contre à retenir absolument !

**Propriété n°10.** *Définition du produit scalaire par les normes*

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Définition avec les normes

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**preuve :**

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

En isolant  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans la dernière égalité, on obtient le résultat.

*cqfd*

**Remarque n°14.**

C'est très bien tout ça, mais quand on parle de vecteurs, on utilise souvent des coordonnées (revoir le paragraphe III du [cours de seconde](#)) pour transformer nos questions géométriques en questions algébriques. Peut-on donc « traduire le produit scalaire en terme de coordonnées » ?

**Propriété n°11. Définition du produit scalaire avec les coordonnées (admise)**

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Si leurs coordonnées dans un repère orthonormé sont  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

**Remarque n°15. Une idée de la preuve**

Notons  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  une base de vecteurs pour notre repère orthonormé.

▪ On a alors :  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$  (ortho) et  $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$  (normé) .

▪ On sait alors que  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  ,  $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$  ,

$$\text{et : } \vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2)$$

Il reste alors à utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le premier point pour finir... Essayez !

### III Quelques applications du produit scalaire

#### III.1 Un ensemble de points défini par un produit scalaire

**Propriété n°12.**

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan,  $I$  le milieu de  $[AB]$  .  
Pour tout point  $M$  du plan, on a

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

**preuve :**

(L'idée la suivante :  $\vec{MA}$  et  $\vec{MB}$  sont « deux choses qui varient », c'est trop !  
On cherche à se ramener « à une seule chose qui varie » d'où l'idée de passer par le point  $I$  qui « fera le lien »)

$$\begin{aligned}
\vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) && \text{(relation de Chasles)} \\
&= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) && \text{(car I est le milieu de [AB])} \\
&= \vec{MI} \cdot \vec{MI} - \vec{MI} \cdot \vec{IA} + \vec{MI} \cdot \vec{IA} - \vec{IA} \cdot \vec{IA} && \text{(bilinearité)} \\
&= (\vec{MI})^2 - (\vec{IA})^2 \\
&= MI^2 - IA^2 && \text{(or } IA = \frac{1}{2} AB) \\
&= MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 && \text{cqfd}
\end{aligned}$$

### Méthode n°1. Lieu géométrique défini par un produit scalaire

#### Énoncé

Dans le plan, on donne les points  $E$  et  $F$  tels que le segment  $[EF]$  mesure 8 cm.

Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan qui vérifient  $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = 5$ .

#### Réponse

▪ Notons  $I$  le milieu de  $[EF]$ .

▪ On sait que :

$$\vec{ME} \cdot \vec{MF} = MI^2 - \frac{1}{4} EF^2$$

▪ En remplaçant :

$$5 = MI^2 - \frac{1}{4} \times 8^2$$

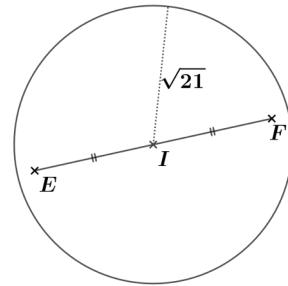
▪ En isolant  $MI^2$  :

$$MI^2 = 5 + \frac{1}{4} \times 8^2 = 21$$

▪ Comme  $MI$  est une longueur, on en déduit que  $MI = \sqrt{21}$ .

▪ L'ensemble cherché est donc :

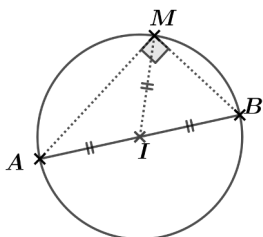
le cercle de centre, le milieu de  $[EF]$ , et de rayon  $\sqrt{21}$  cm



### Propriété n°13. Un cas particulier : lien entre triangle rectangle et cercle circonscrit

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ .

*preuve :*



Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle

▪ On pose  $I$  le milieu de  $[AB]$  ainsi  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$ .

▪ Si  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

En remplaçant :  $0 = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

et comme  $MI$  est une longueur :  $MI = \frac{AB}{2}$  donc  $M$  est sur le cercle.

▪ Réciproquement si  $M$  est sur le cercle alors  $MI = \frac{AB}{2}$  d'où

$$MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \text{ et donc } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \text{ cqfd}$$

## III.2 Un prolongement du théorème de Pythagore

**Propriété n°14. Loi des cosinus (Théorème d'Al-Kashi)**

Dans un triangle  $ABC$ , on pose :

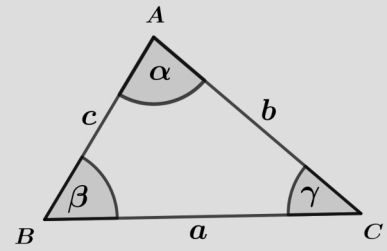
$a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$

ainsi que :

$\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  et  $\gamma = \widehat{ACB}$

On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



*preuve :*

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 \\ &= \overrightarrow{BC}^2 \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= BA^2 + AC^2 - 2BA \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= c^2 + b^2 - 2cb \cos \alpha \end{aligned}$$

*cqfd*

**Remarque n°16.**

On a bien sûr les deux autres formules :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

qui se démontrent de la même façon. (Essayez d'en faire une sans le modèle)

**Remarque n°17. Un peu d'histoire**

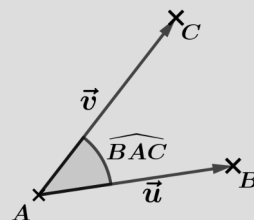
Al-Kashi (Mathématicien et Astronome Perse) est né vers 1380 et décédé en 1429. Il énonce ce théorème dans son livre Miftah al-hisab (« Clé de l'arithmétique »).

## IV Le résumé du cours

### Le vocabulaire à connaître

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

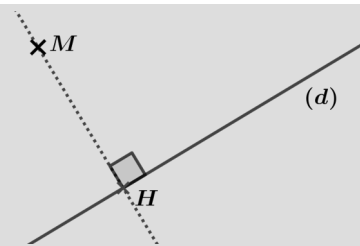
On appelle angle formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$ .



Soit un vecteur  $\vec{u}$  et deux points  $A$  et  $B$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$   
On appelle norme du vecteur  $\vec{u}$  et on note  $\|\vec{u}\|$  le réel positif défini par :

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \underbrace{AB}_{\text{la longueur } AB}$$

Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $(d)$  est le point d'intersection  $H$  de la droite  $(d)$  et de la perpendiculaire à  $(d)$  passant par  $M$ .



### Les différentes définitions du produit scalaire

Définition avec le cosinus

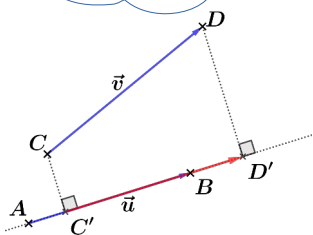
Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

On appelle **produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$**  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors on convient que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ )

Définition avec le projeté orthogonal



Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls ainsi que les points  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ . On note  $C'$  et  $D'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $C$  et  $D$  sur la droite  $(AB)$ . On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB \times C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB \times C'D' & \text{sinon} \end{cases}$$

(Si au moins l'un des deux vecteurs est nul alors on convient que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ )

Définition avec les normes

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Si leurs coordonnées dans un repère orthonormé sont  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

### Les propriétés à connaître

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels.

$\alpha$  : alpha

$\beta$  : bêta

$\gamma$  : gamma

$\lambda$  : lambda

$\mu$  : mu

$\theta$  : thêta

### ▪ symétrie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

### ▪ bilinéarité

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

### ▪ carré scalaire

$$(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

### ▪ produit scalaire et colinéarité

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** et de **même sens** si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** et de **sens contraires** si et seulement si

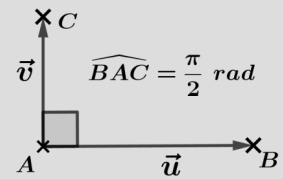
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

### ▪ vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Si les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont **perpendiculaires**

alors on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** et on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .



### ▪ produit scalaire et orthogonalité

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### ▪ particularité du vecteur nul : $\vec{0}$

- Le vecteur nul est à la fois colinéaire et orthogonal à tout vecteur.
- Si un vecteur est colinéaire à tous les vecteurs du plan alors c'est le vecteur nul
- Si un vecteur est orthogonal à tous les vecteurs du plan alors c'est le vecteur nul

## Les applications à connaître

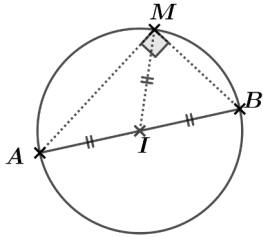
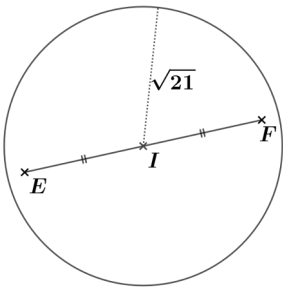
(Pour répondre à une question du type : Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \text{un nombre}$  )

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan,  $I$  le milieu de  $[AB]$  .  
Pour tout point  $M$  du plan, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

On trouve le rayon (si il existe) en isolant  $MI^2$  :

$$MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{1}{4} AB^2$$



### Le cas particulier : lien entre triangle rectangle et cercle circonscrit

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  .

$\alpha$  : alpha  
 $\beta$  : bêta  
 $\gamma$  : gamma  
 $\lambda$  : lambda  
 $\mu$  : mu  
 $\theta$  : thêta

### Loi des cosinus (ou théorème d'Al-Kashi)

Dans un triangle  $ABC$  , on pose :

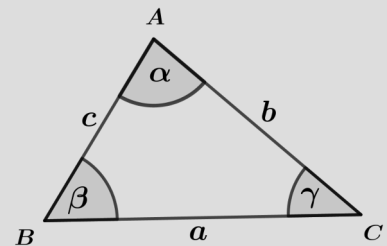
$a = BC$  ,  $b = AC$  et  $c = AB$

ainsi que :

$\alpha = \widehat{BAC}$  ,  $\beta = \widehat{ABC}$  et  $\gamma = \widehat{ACB}$

On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



ainsi que  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$  et  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

### Pour la suite :

Conformément au [document du programme](#) (p12 et 13) nous avons utilisé la notation :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour noter le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  .

Il en existe d'autre :

$(\vec{u}|\vec{v})$  ,  $\langle \vec{u}|\vec{v} \rangle$  ou encore  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  .

Selon les contextes, vous rencontrerez bien d'autres façon de noter un produit scalaire, il faudra s'adapter...