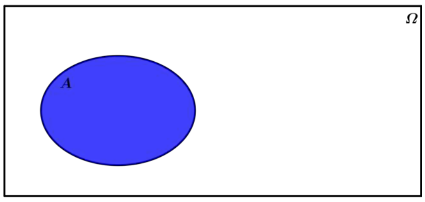
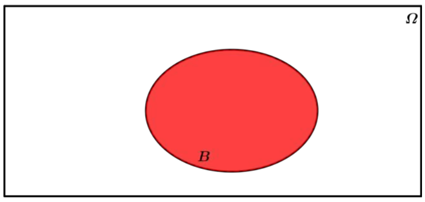
PROBABILITÉS

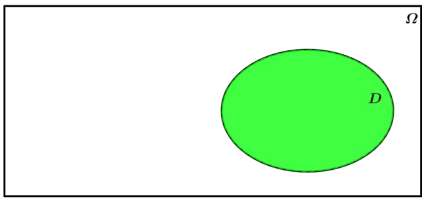
I Un peu de vocabulaire ensembliste

On se donne un ensemble que l'on décide d'appeler Ω ainsi que trois sous-ensembles de Ω que l'on décide d'appeler A , B et D . On représente cela sous la forme d'un diagramme de Venn.

Voici trois diagrammes de Venn, représentant chacun un seul des trois sous-ensembles



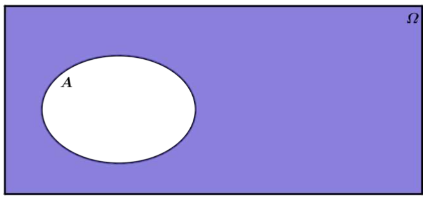




On peut représenter aussi :

Le contraire de A

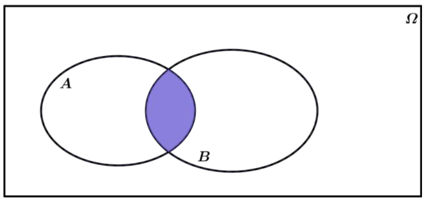
que l'on note $\overline{A}$
et que l'on lit : « A barre »



Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .
On note aussi, parfois, $\Omega \backslash A$ qui se lit « Oméga privé de A »

L'intersection de A et B

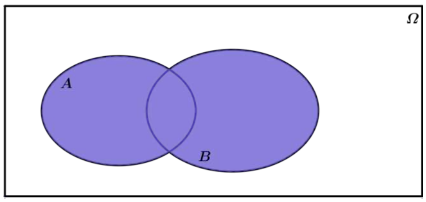
que l'on note $A \cap B$
et que l'on lit : « A inter B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B

L'union de A et B

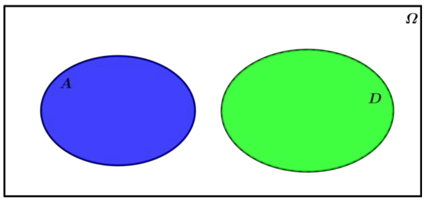
que l'on note $A \cup B$
et que l'on lit : « A union B »



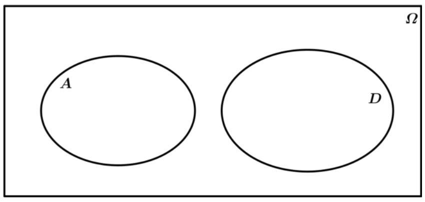
Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B
Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou » .

Il se peut aussi que les ensembles soient disjoints

A et D sont disjoints :
Ils n'ont aucun élément en commun

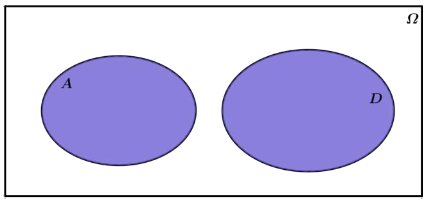


$A \cap D = \emptyset$
$\emptyset$ se lit « ensemble vide »



Ici, aucune couleur car aucun élément n'appartient à A **ET** D

$A \cup D$

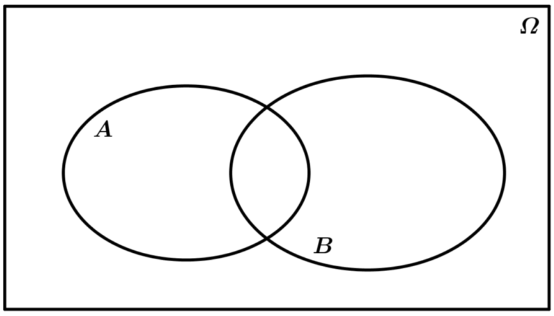


On colorie bien sûr de la même couleur les éléments correspondant à la description.

PROBABILITÉS E01

EXERCICE N°1

Construire un diagramme de Venn (sur le modèle ci-dessous) pour chacun des événements suivants.



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cup \overline{B}$

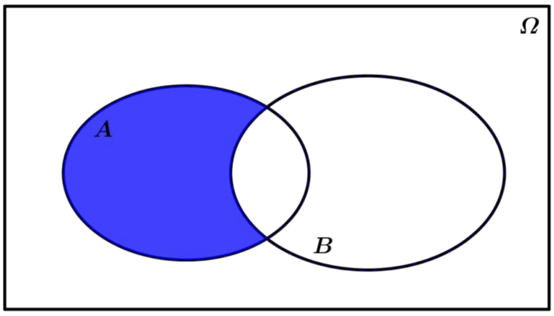
5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

PROBABILITÉS E01

Correction de l'exercice n°1

1)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cup \overline{B}$

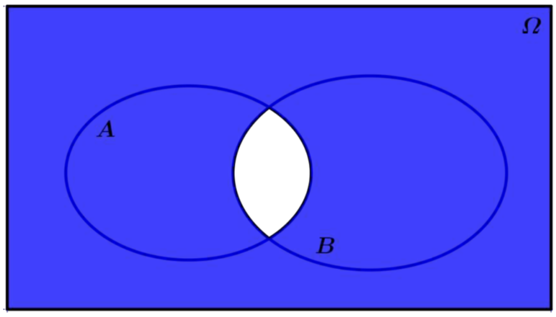
5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilités E01

Correction de l'exercice n°1

2)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cup \overline{B}$

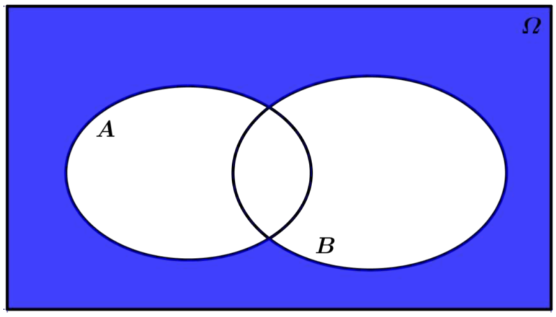
5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

PROBABILITÉS E01

Correction de l'exercice n°1

3)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cup \overline{B}$

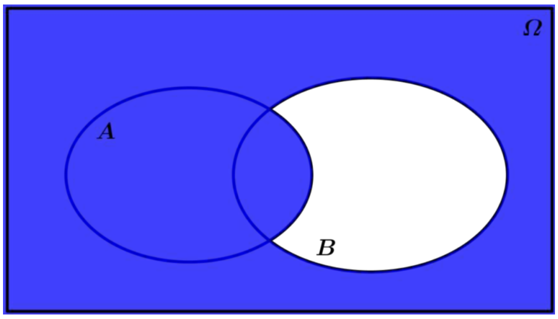
5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

PROBABILITÉS E01

Correction de l'exercice n°1

4)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

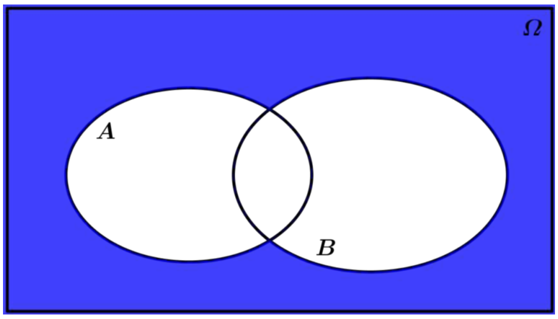
4) $A \cup \overline{B}$

5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Correction de l'exercice n°1

5)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

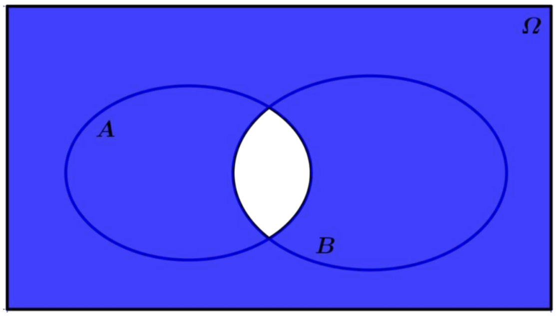
4) $A \cup \overline{B}$

5) $\overline{A \cup B}$

6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Correction de l'exercice n°1

6)



1) $A \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B}$

3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cup \overline{B}$

5) $\overline{A \cup B}$

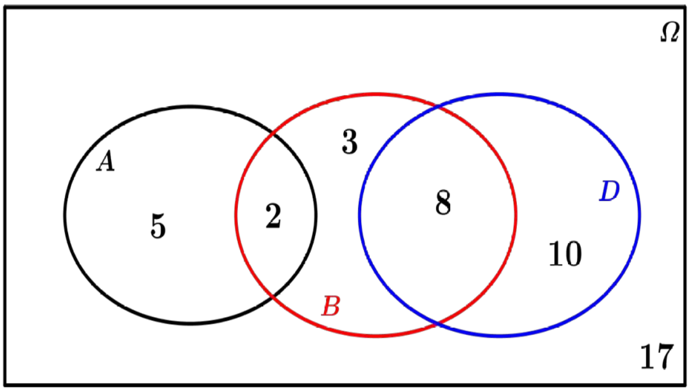
6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

EXERCICE N°2

On se donne le diagramme de Venn ci-contre :
On peut calculer, par exemple , que :

A possède $5+2=7$ éléments,
→ On note alors $Card(A)=7$

On peut lire que 17 éléments n'appartiennent à aucun des ensembles A , B ou D .
→ On note alors : $Card(\overline{A\cup B\cup D})=17$



Déterminer les nombres suivants :

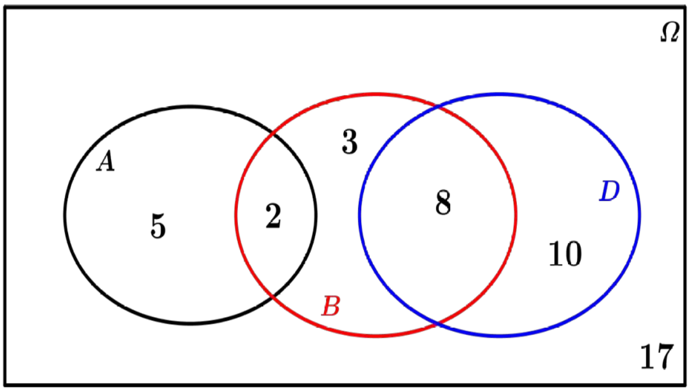
1)	$Card(B)$	**2)**	$Card(D)$	**3)**	$Card(A\cap D)$
4)	$Card(B\cap D)$	**5)**	$Card(A\cup B\cup D)$	**6)**	$Card(\Omega)$
7)	$Card(A\cup B)$	**8)**	$Card(\overline{A\cup B})$	**9)**	$Card(\overline{A}\cap\overline{B})$

Correction de l'exercice n°2

On se donne le diagramme de Venn ci-contre :
On peut calculer, par exemple , que :

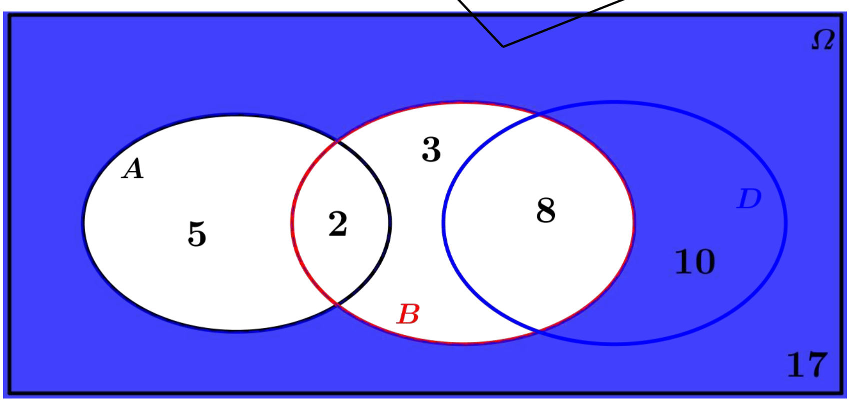
A possède $5+2=7$ éléments,
$\rightarrow$ On note alors $Card(A)=7$

On peut lire que 17 éléments n'appartiennent à aucun des ensembles A, B ou D .
$\rightarrow$ On note alors : $Card(\overline{A\cup B\cup D})=17$

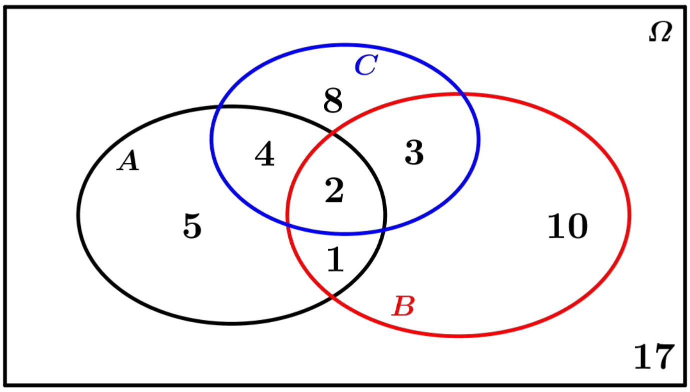


Déterminer les nombres suivants :

1) $Card(B)$	**2)** $Card(D)$	**3)** $Card(A\cap D)$
$Card(B)=2+3+8=\mathbf{13}$	$Card(D)=10+8=\mathbf{18}$	$Card(A\cap D)=\mathbf{0}$
4) $Card(B\cap D)$	**5)** $Card(A\cup B\cup D)$	**6)** $Card(\Omega)$
$Card(B\cap D)=\mathbf{8}$	$Card(A\cup B\cup D)$ $=5+2+3+8+10=\mathbf{28}$	$Card(\Omega)=17+28=\mathbf{45}$
7) $Card(A\cup B)$	**8)** $Card(\overline{A\cup B})$	**9)** $Card(\overline{A}\cap\overline{B})$
$Card(A\cup B)$ $=5+2+3+8=\mathbf{18}$	$Card(\overline{A\cup B})=45-18=\mathbf{27}$	$Card(\overline{A}\cap\overline{B})=10+17=\mathbf{27}$



EXERCICE N°3



On se donne le diagramme de Venn ci-contre :
On peut calculer, par exemple , que :

A possède $5+4+2+1=12$ éléments,
→ On note alors $Card(A)=12$

On peut lire que 17 éléments n'appartiennent à aucun des ensembles A, B ou C .
→ On note alors : $Card(\overline{A\cup B\cup C})=17$

Déterminer les nombres suivants :

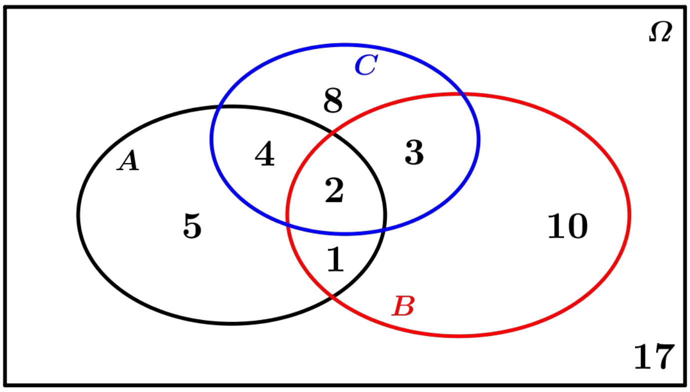
1)	$Card(B)$	**2)**	$Card(C)$	**3)**	$Card(A\cap B)$
4)	$Card(B\cap C)$	**5)**	$Card(A\cup B\cup C)$	**6)**	$Card(\Omega)$
7)	$Card(A\cup B)$	**8)**	$Card(\overline{A\cup B})$	**9)**	$Card(\overline{A}\cap\overline{B})$

Correction de l'exercice n°3

On se donne le diagramme de Venn ci-contre :
On peut calculer, par exemple , que :

A possède $5+4+2+1=12$ éléments,
$\rightarrow$ On note alors $Card(A)=12$

On peut lire que 17 éléments n'appartiennent à aucun des ensembles A, B ou C .
$\rightarrow$ On note alors : $Card(\overline{A \cup B \cup C})=17$



Déterminer les nombres suivants :

1) $Card(B)$	**2)** $Card(C)$	**3)** $Card(A \cap B)$
$Card(B)$ $=1+2+3+10=\mathbf{16}$	$Card(C)$ $=4+2+3+8=\mathbf{17}$	$Card(A \cap B)$ $=2+1=\mathbf{3}$
4) $Card(B \cap C)$	**5)** $Card(A \cup B \cup C)$	**6)** $Card(\Omega)$
$Card(B \cap C)$ $=2+3=\mathbf{5}$	$Card(A \cup B \cup C)$ $=5+4+2+1+8+3+10=\mathbf{33}$	$Card(\Omega)=33+17=\mathbf{50}$
7) $Card(A \cup B)$	**8)** $Card(\overline{A \cup B})$	**9)** $Card(\overline{A} \cap \overline{B})$
$Card(A \cup B)$ $=5+4+2+1+3+10=\mathbf{25}$	$Card(\overline{A \cup B})=50-25=\mathbf{25}$	$Card(\overline{A} \cap \overline{B})=$ $Card(\overline{A \cup B})=50-25=\mathbf{25}$

PROBABILITÉS

II Vocabulaire des probabilités

Propriété n°1. La loi des grands nombres (simplifiée)

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une éventualité tend vers une « valeur idéale », appelée probabilité.

Définition n°1. Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Définition n°2. Événements élémentaires

Ce sont les « résultats possibles » ou « issues » ou « éventualités » de l'expérience aléatoire.

Définition n°3. Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des événements élémentaires. On le note généralement Ω .

Définition n°4. Événements

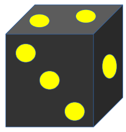
Ce sont des sous-ensembles de l'univers que l'on peut décrire avec des événements élémentaires .

PROBABILITÉS

Exemple n°1. ***L'exemple du dé***

On prend un dé bien équilibré à six faces. Notre **expérience aléatoire** consistera à le lancer et à relever le nombre de la face supérieure.

Ici on relève le nombre 2



Notre **univers** est alors composé de six nombres : $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5$ et 6

On écrira $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$

$\{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{4\}\ ;\ \{5\}$ et $\{6\}$ sont des **événements élémentaires** avec lesquels on peut décrire des **événements** comme, par exemple :

Obtenir un nombre pair : $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$

Définition n°5. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire.

Propriété n°2.

La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Propriété n°3.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple n°2. Avec l'exemple du dé

Loi de probabilité							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

PROBABILITÉS E02

EXERCICE N°1

On considère un dé pipé. En utilisant le tableau suivant, calculer $p(6)$.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	

PROBABILITÉS E02

Correction de l'exercice n°1

On considère un dé pipé. En utilisant le tableau suivant, calculer $p(6)$.

Face	1	2	3	4	5	6	total
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	**0,2**	1

$1-(0,1+0,2+0,1+0,15+0,25)=0,2$

PROBABILITÉS E02

EXERCICE N°2

Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1) Décrire l'univers Ω de cette expérience.

2) Donner la loi de probabilité de cette expérience

3) Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?
Recopier et compléter : $A=\{\ldots\}$ et . $B=\{\ldots\}$

4) On considère les événements suivants :

$A\cup B$	$A\cap B$	$\overline{A}$	$\overline{A\cap B}$
$\overline{A\cup B}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A}\cap B$

4.a) Décrire de même les événements
4.b) puis les décrire avec une phrase
4.c) et enfin déterminer leur probabilité

PROBABILITÉS E02

Correction de l'exercice n°2

Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1) Décrire l'univers Ω de cette expérience.

$\Omega=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 11\ ;\ 12\}$

2) Donner la loi de probabilité de cette expérience

issue	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
proba	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

3) Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?
Recopier et compléter : $A=\{\dots\}$ et . $B=\{\dots\}$

$A=\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\}$ et $B=\{3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12\}$

4) On considère les événements suivants :

$A\cup B$ $\quad$ $A\cap B$ $\quad$ $\overline{A}$ $\quad$ $\overline{A\cap B}$

$\overline{A}\cap\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A}\cup\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A\cup B}$ $\quad$ $\overline{A}\cap B$

4.a) Décrire de même les événements

$A\cup B=\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 12\}$
$A\cap B=\{6\ ;\ 12\}$
$\overline{A}=\{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 11\}$
$\overline{A\cap B}=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 11\}$
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\}$
$\overline{A\cup B}=\{1\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\}$
$\overline{A}\cap B=\{3\ ;\ 9\}$

4.b) puis les décrire avec une phrase

$A\cup B$: « Le numéro du jeton tiré est pair OU multiple de trois »
$A\cap B$:« Le numéro du jeton tiré multiple de six»
$\overline{A}$: « Le numéro du jeton tiré est impair »
$\overline{A\cap B}$: « Le numéro du jeton tiré n'est pas multiple de six »
$\overline{A}\cap\overline{B}$: « Le numéro du jeton tiré n'est NI pair NI multiple de trois »
$\overline{A}\cup\overline{B}$: « Le numéro du jeton tiré n'est pas pair OU n'est pas multiple de trois »
$\overline{A\cup B}$: « Le numéro du jeton tiré n'est NI pair NI multiple de trois »
$\overline{A}\cap B$: « Le numéro du jeton tiré est un multiple de trois qui n'est pas pair »

4.c) et enfin déterminer leur probabilité

$$p(A\cup B)=\underbrace{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}_{8\text{ fois}}=\frac{8}{12}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$p(A\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

$$p(\overline{A})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$p(\overline{A\cap B})=\underbrace{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}_{10\text{ fois}}=\frac{10}{12}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+=\frac{4}{12}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$p(\overline{A}\cup\overline{B})=\mathbf{\frac{5}{6}}\ ;\ p(\overline{A\cup B})=\mathbf{\frac{1}{3}}\ \text{ et }\ p(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

EXERCICE N°3

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

On appelle :
- C : « la carte tirée est un cœur »
- F : « la carte tirée est une figure »

1) Décrire par une phrase l'événement $C \cap F$
Combien compte-t-il d'issues ? Quelle sa probabilité ?

2) Décrire par une phrase l'événement $C \cup F$
Combien compte-t-il d'issues ? Quelle sa probabilité ?

3) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C} \cap F$
Combien compte-t-il d'issues ? Quelle sa probabilité ?

4) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C \cup F}$
Combien compte-t-il d'issues ? Quelle sa probabilité ?

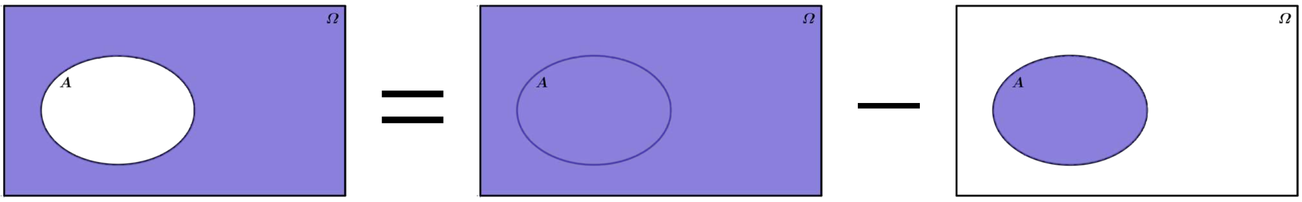
III Calculs de probabilité

III.1 Les formules à connaître

Dans cette partie, on se donne un univers Ω et deux événements A et B.

Propriété n°4.

$$p(\overline{A})=1-p(A)$$



Exemple n°3. ***Avec l'exemple du dé***

B : « Obtenir un multiple de trois »

$B = \{3\} \cup \{6\} = \{3 \; ; \; 6\}$

$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\overline{B}$: « Ne pas obtenir un multiple de trois »

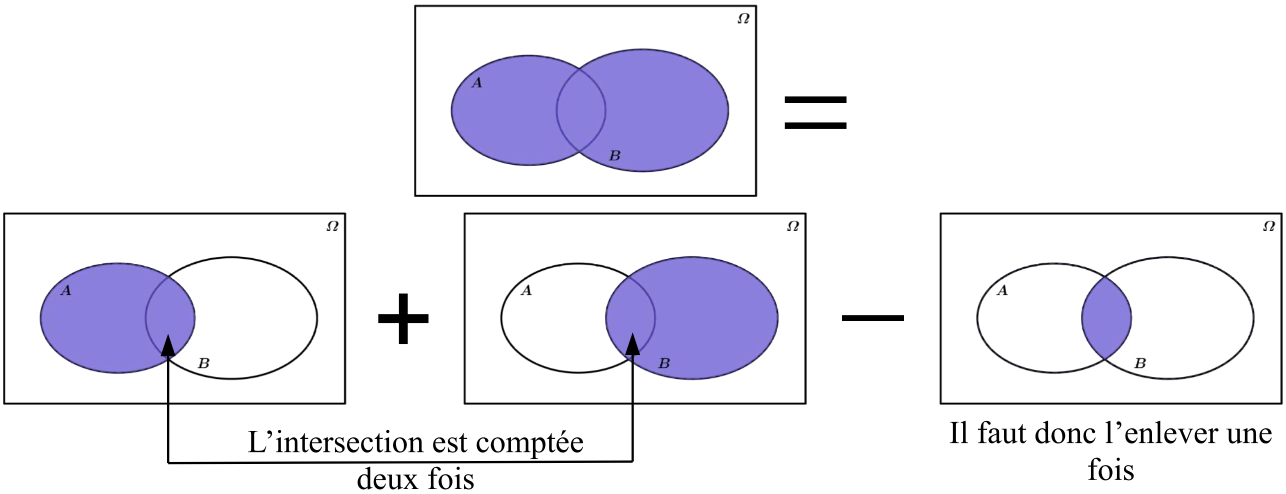
$\overline{B} = \underbrace{\Omega \setminus \{3 \; ; \; 6\}}_{\Omega \text{ privé de } \{3 \; ; \; 6\}} = \{1 \; ; \; 2 \; ; \; 4 \; ; \; 5\}$

$p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(On peut aussi calculer directement $p(\overline{B})$ mais ce n'est pas le but ici)

Propriété n°5.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Exemple n°4. ***Avec l'exemple du dé***

$A \cap B = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\} \cap \{3\ ;\ 6\} = \{6\}$ (seul 6 appartient à A **et** B)

$p(A \cap B) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$ (En générale, la probabilité de l'intersection est facile à calculer).

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Effectivement : $A \cup B = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\} \cup \{3\ ;\ 6\} = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\}$
(On prend tous les éléments mais on ne les fait apparaître qu'une fois)

PROBABILITÉS E03

EXERCICE N°1

On considère deux événements A et B tels que :

$p(A)=0{,}6$; $p(B)=0{,}5$ et $p(A\cap B)=0{,}3$

Calculer $p(A\cup B)$

PROBABILITÉS E03

EXERCICE N°2

On considère deux événements A et B tels que :

$p(A)=0,7$; $p(B)=0,5$ et $p(A\cup B)=0,9$

Calculer $p(A\cap B)$

PROBABILITÉS E03

EXERCICE N°3

On considère deux événements A et B tels que :

$p(A)=0{,}5$; $p(B)=0{,}8$ et $p(A\cap B)=0{,}4$

Calculer $p\left(\overline{A\cup B}\right)$

PROBABILITÉS E03

EXERCICE N°4

On considère deux événements A et B tels que :

$p(A)=0{,}6$; $p(B)=0{,}5$ et $p(A\cap B)=0{,}3$

Calculer $p(A\cap \overline{B})$

III.2 Équiprobabilité ou pas

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec un exemple d'équiprobabilité.
Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître donc tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Loi de probabilité avec le dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On peut aussi truquer (ou piper ou déséquilibrer) le dé. Dans ce cas, certaines faces « vont apparaître plus souvent » : certains événements élémentaires auront une probabilité plus grande que d'autres.
Par exemple :

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d’obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Nous retenons donc qu’avant de se lancer dans les calculs, on pensera à vérifier dans quel cas de figure on se trouve.

Par contre, une fois assuré d’être en situation d’équiprobabilité, on pourra utiliser la formule suivante :

En cas d’équiprobabilité : $\textit{probabilité de } A = \dfrac{\textit{nombre d'éléments de } A}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$

PROBABILITÉS

Il existe une notation pour parler d'un nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition n°6.

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Propriété n°6.

En situation d'équiprobabilité : $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Exemple n°5. ***avec le dé (équilibré ou pas)***

$Card(A)=3$; $Card(\overline{A})=3$; $Card(B)=2$; $Card(\overline{B})=4$
$Card(A\cap B)=1$; $Card(A\cup B)=4$ et $Card(\Omega)=6$

▪ Dans le cas du dé équilibré, on retrouve bien $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

▪ Par contre, cela ne fonctionne pas dans le cas du dé truqué.

Remarque n°1.

Dans le cadre d'une situation d'équiprobabilité, il suffira donc d'être capable de dénombrer (déterminer le nombre d'éléments de) les ensembles dont on cherche la probabilité.
Une fois que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité, on peut utiliser différentes techniques pour dénombrer.

PROBABILITÉS E04

EXERCICE N°1

Axel observe la couleur de 200 voitures passant devant chez lui. Il dénombre 41 voitures noires, 73 voitures blanches et 28 rouges.

On considère l'expérience : « Choisir une voiture au hasard passant devant chez Axel et observer sa couleur »

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous qui donne un modèle de probabilité adapté.

Issue	Noire	Blanche	Rouge	Autre
Probabilité				

EXERCICE N°2

Deux dés tétraédriques ont des faces numérotées de 1 à 4. On les lance et on regarde la somme obtenue.

1) Quels sont les résultats possibles ?
2) Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
3) Déterminer la probabilité de chaque résultat.

PROBABILITÉS E04

EXERCICE N°3

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1) Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?

2) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

IV Utiliser un tableau pour calculer une probabilité.

Exemple n°6. Le tableau à double entrée.

Voici un tableau à double entrée représentant la répartition de la LV1 dans une classe de seconde .

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	7	13	20
Anglais	9	4	13
Total	16	17	33

On choisit un élève au hasard (on suppose donc que chaque élève a la même chance d'être choisi).
On note :
F : « l'élève choisi est une fille »
E : « l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »

Et on se propose de calculer la probabilité de quelques événements.

On décide de nommer Ω l'univers de expérience aléatoire.

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	$Card(E\cap F)$	$Card(E\cap\overline{F})$	$Card(E)$
Anglais	$Card(\overline{E}\cap F)$	$Card(\overline{E}\cap\overline{F})$	$Card(\overline{E})$
Total	$Card(F)$	$Card(\overline{F})$	$Card(\Omega)$

1) $p(F)=\dfrac{Card(F)}{Card(\Omega)}=\dfrac{16}{33}$

2) $F\cap E$: « L'élève choisi est une fille ET l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »
(On préférera écrire : « l'élève choisi est une fille pratiquant l'espagnol en LV1 »)

$$p(F\cap E) = \frac{Card(F\cap E)}{Card(\Omega)} = \frac{7}{33}$$

Remarque n°2.

À ne pas confondre avec l'événement : « Parmi les filles, on a choisi une élève pratiquant l'espagnol » dont la probabilité sera notée (l'année prochaine)

$$p_F(E)=\frac{Card(E\cap F)}{Card(F)}=\frac{7}{16}$$

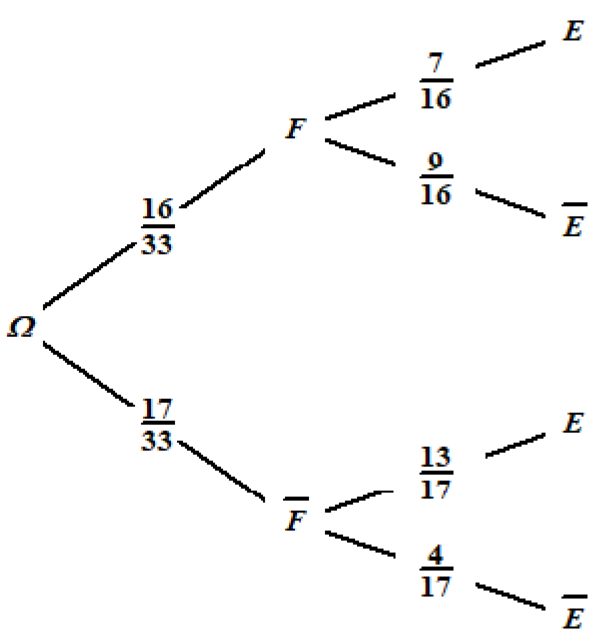
3) $p(F\cup E) = p(F)+p(E)-p(F\cap E) = \dfrac{16}{33}+\dfrac{20}{33}-\dfrac{7}{33} = \dfrac{29}{33}$

V Utiliser un arbre pour calculer une probabilité

On peut représenter l'exemple précédent avec un arbre pondéré.

Exemple n°7. ***Avec la même situation que dans l'exemple 6***

Si on décide de considérer l'événement F en premier :



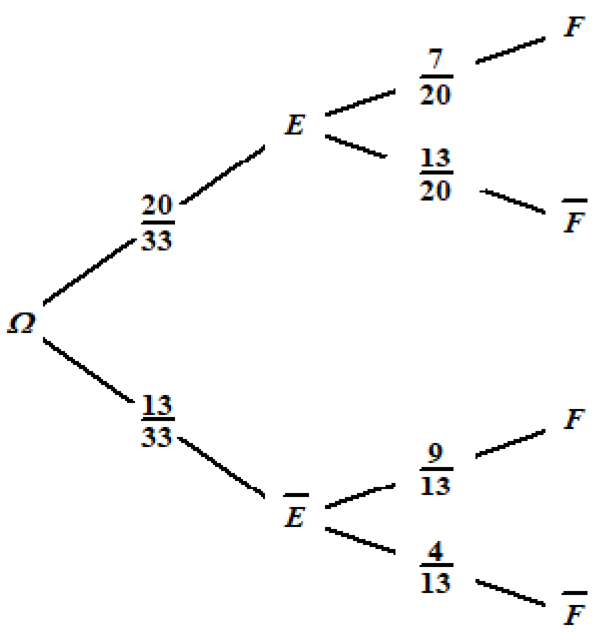
$$p(F\cap E)=\frac{16}{33}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{33}$$

$$p(F\cap \overline{E})=\frac{16}{33}\times\frac{9}{16}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{17}{33}\times\frac{13}{17}=\frac{13}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap \overline{E})=\frac{17}{33}\times\frac{4}{17}=\frac{4}{33}$$

Si on décide de considérer l'événement E en premier :



$$p(F\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{13}{20}=\frac{13}{33}$$

$$p(F\cap \overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{9}{13}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap \overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{4}{13}=\frac{4}{33}$$

Les règles de calculs :
R1 :Tant qu'on suit une branche, on multiplie.
R2 : Deux branches différentes s'additionnent.
R3 : La somme des branches d'un nœud vaut toujours 1

PROBABILITÉS E05

EXERCICE N°1

Dans une production de 100 000 pièces d'usine, on tire au hasard une pièce et on contrôle sa qualité. À l'issue du contrôle, la pièce est soit acceptée, soit refusée. Mais il arrive que le contrôle fasse quelques erreurs de diagnostic.

On définit les évènements suivants:

V : « La pièce est valable » ;

A : « La pièce est acceptée » .

5 % des pièces sont non valables (défectueuses).

2 % des pièces valables sont refusées,

20 % des pièces non valables sont refusées.

1) Compléter le tableau suivant.

	Acceptée	Refusée	Total
Valable			
Non valable			
Total			100000

2) Quelle est la probabilité que cette pièce soit acceptée?

3)

▪ Le risque de l'acheteur est la probabilité d'avoir une pièce non valable alors qu'elle a été acceptée.

▪ Le risque du vendeur est la probabilité d'avoir une pièce valable alors qu'elle a été refusée. Déterminer le risque de l'acheteur et celui du vendeur.

EXERCICE N°2

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :

▪ entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
▪ entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
▪ entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :

▪ d'une entrée ; ▪ d'un plat ; ▪ d'un dessert.

1) En utilisant un arbre, représenter tous les menus.

2) Combien de menus différents sont possibles ?

3) On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :

3.a) qu'il comporte une escalope ?

3.b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?

3.c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

EXERCICE N°3

Une personne a dans sa poche une pièce de 1 €, une pièce de 0,50€ et deux pièces de 0,20 €. Elle prend dans sa poche une pièce au hasard, puis une deuxième sans avoir remis la première.

1) Modéliser cette expérience par un arbre.

2) En déduire la probabilité de chacun des évènements suivants.

A : « Les deux pièces sont identiques ».

B : « Les deux pièces sont différentes ».

C : « La somme totale est égale à 0,70€ ».

D : « La somme totale est supérieure à 1 € ».

EXERCICE N°4

Une classe de lycée compte 28 élèves, 12 d'entre eux pratiquent la natation, 7 le volley-ball et 13 ne pratiquent ni la natation ni le volley-ball.

On désigne au hasard un élève de la classe. Calculer la probabilité qu'il pratique:

1) l'un au moins des deux sports;

2) les deux sports.

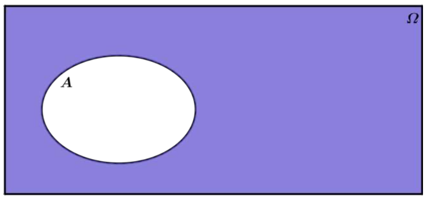
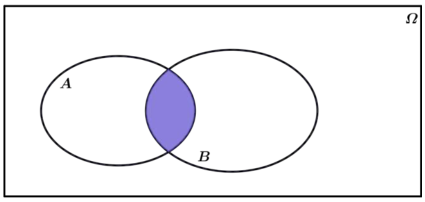
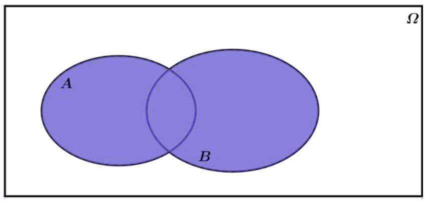
PROBABILITÉS E05

EXERCICE N°5

Un sac contient deux jetons rouges et un blanc. Un chapeau contient un jeton rouge et deux blancs, identiques à ceux du sac.
Un jeton est tiré au hasard dans chaque contenant.
Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur.

VI Le résumé du cours

Le résumé n'est utile qu'après avoir lu (et relu et encore relu) le cours...

Le contraire de A	**L'intersection de A et B**	**L'union de A et B**
que l'on note $\overline{A}$ et que l'on lit : « A barre »	que l'on note $A \cap B$ et que l'on lit : « A inter B »	que l'on note $A \cup B$ et que l'on lit : « A union B »
		
Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A . On note aussi, parfois, $\Omega \setminus A$ qui se lit « Oméga privé de A »	Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B	Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou » .

Formules toujours valables

$$p(\overline{A})=1-p(A)$$

$$p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)$$

Situation d'équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A .

En situation d'équiprobabilité : $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Ω représente l'univers.

Situation de NON équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d'obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Et bien sûr, il faut relire le paragraphe sur les **TABLEAUX** et celui sur les **ARBRES** qui ne se résument pas mais sont essentiels.