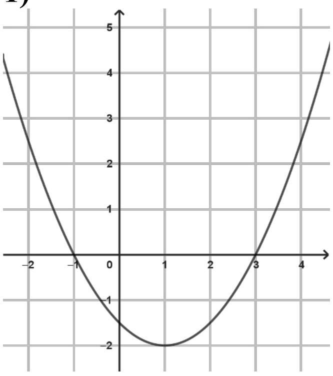
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ M02

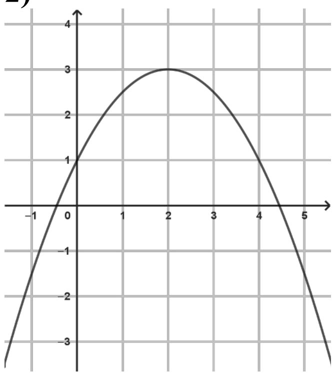
EXERCICE N°1 Lien entre la forme canonique et le graphique *CORRIGÉ*

Dans chaque cas, donnez la forme canonique de la fonction polynomiale du second degré qui est représentée.

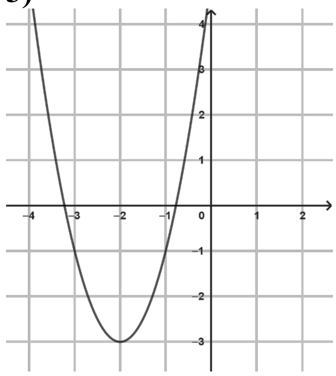
1)



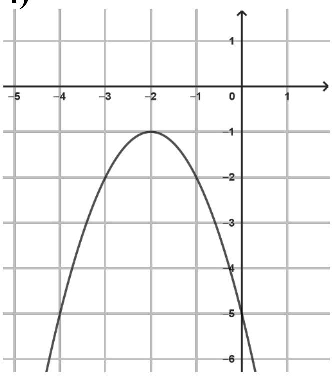
2)



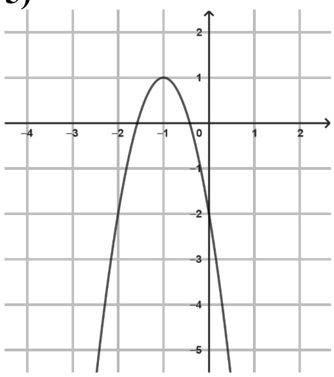
3)



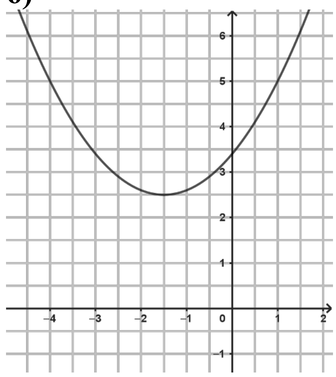
4)



5)



6)



EXERCICE N°2 Quelques tableaux de variations *CORRIGÉ*

Dressez le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3}{10}\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2} \end{cases}$

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 7(x-4)^2 + 2 \end{cases}$

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 7(x+4)^2 + 2 \end{cases}$

EXERCICE N°3 Factoriser à l'aide du discriminant *CORRIGÉ*

Factoriser les expressions suivantes à l'aide du discriminant :

$A = 5x^2 - 65x + 210$

$B = -0{,}5x^2 + 0{,}1x + \dfrac{1}{25}$

$C = 3x^2 + \sqrt{18}x - 12$

EXERCICE N°4 Autres méthodes de factorisation *CORRIGÉ*

Factorisez les expressions suivantes :

Facteurs communs

$A = 3x^2 - 3x$

$B = (2x+1)(x-7) - (3+2x)(2x+1)$

$C = 4x(3x-1) + (3x-1)(2x+7)$

$D = 3x + (2x-1)(3x+7) + 7$

Identités remarquables

$E = 49x^2 - 3969x + 81$

$F = (2x+1)^2 - (3+2x)^2$

Racines évidentes

$G = x^2 + 7x - 8$

$H = x^2 + 6x + 5$

$I = 3x^2 + 3x - 6$

$J = 2x^2 + 12x + 10$

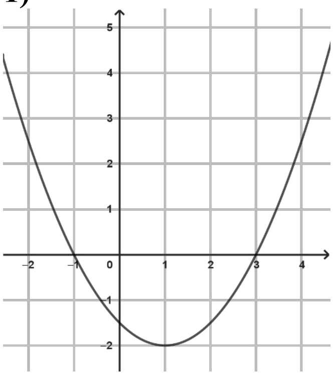
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ M02C

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Dans chaque cas, donnez la forme canonique de la fonction polynomiale du second degré qui est représentée.

1)



Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$

Par lecture graphique $(\alpha\ ;\ \beta) = (1\ ;\ -2)$

La parabole a donc pour équation

$y = a(x-1)^2-2$

Pour trouver a, on choisit un point de la courbe et on exprime son appartenance à cette dernière :

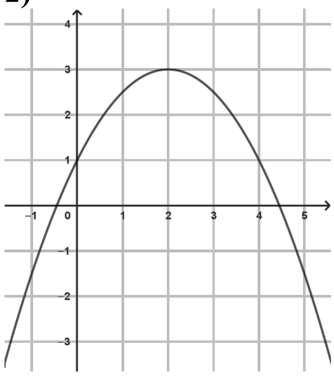
Par exemple $A(3\ ;\ 0)$ donne :

$0 = a(3-1)^2-2$

d'où $a = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\dfrac{1}{2}(x-1)^2-2}$

2)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (2\ ;\ 3)$

On choisit $A(0\ ;\ 1)$

On obtient :

$1 = a(0-2)^2+3$

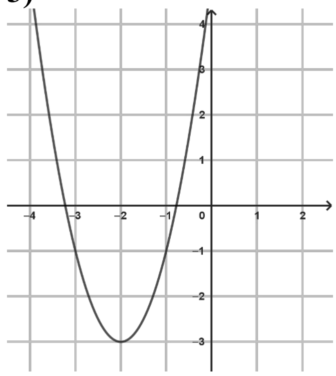
qui donne :

$a = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+3}$

Insistons bien, on choisit le point A. Vous n'êtes pas obligés de prendre le même.

3)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-2\ ;\ -3)$

On choisit $A(-1\ ;\ -1)$

On obtient :

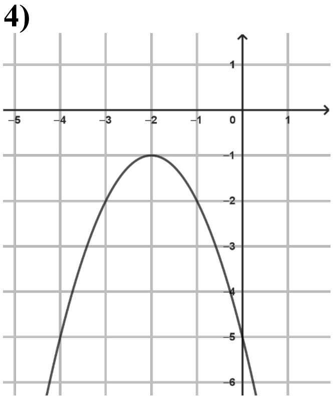
$-1 = a(-1+2)^2-3$

qui donne :

$a = 2$

$\boxed{2(x+2)^2-3}$

4)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-2\ ;\ -1)$

On choisit $A(0\ ;\ -5)$

On obtient :

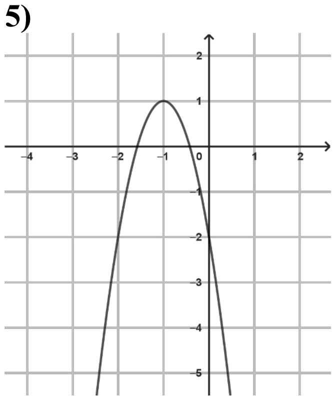
$-5 = a(0+2)^2-1$

qui donne :

$a = -1$

$\boxed{-(x+2)^2-1}$

5)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-1\ ;\ 1)$

On choisit $A(0\ ;\ -2)$

On obtient :

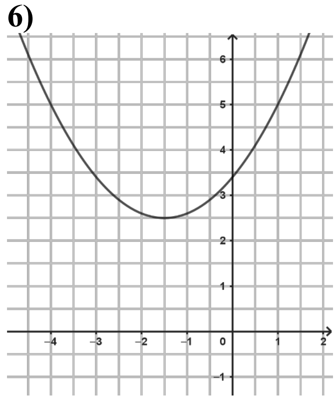
$-2 = a(0+1)^2+1$

qui donne :

$a = -3$

$\boxed{-3(x+1)^2+1}$

6)



$(\alpha\ ;\ \beta) = (-1{,}5\ ;\ 2{,}5)$

On choisit $A(1\ ;\ 5)$

On obtient :

$5 = a(1+1{,}5)^2+2{,}5$

qui donne :

$a = 0{,}4$

$\boxed{0{,}4(x+1{,}5)^2+2{,}5}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Dressez le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

$f(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec : $a=-3 < 0$; $b=-6$ et $c=-2$

Le signe de a nous les variations : ici $a < 0$ donc croissant puis décroissant, il n'y a plus qu'à trouver le sommet $(\alpha\ ;\ \beta)$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2\times(-3)} = -1$

$\beta = f(\alpha) = f(-1) = 1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_1(x)$		↗	1	↘	

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3}{10}\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Ici c'est immédiat , $a = \dfrac{3}{10} > 0$ on a les variations : décroissant puis croissant.

$\alpha = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$ (Attention au signe!)

et $\beta = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

x	$-\infty$		$-1,5$		$+\infty$
$f_1(x)$		↘	2.5	↗	

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 7(x-4)^2 + 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f_1(x)$		↘	2	↗	

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 7(x+4)^2 + 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f_1(x)$		↘	2	↗	

EXERCICE N°3 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE

Factoriser les expressions suivantes à l'aide du discriminant :

$A = 5x^2-65x+210$ $\quad$ $B = -0{,}5x^2+0{,}1x+\dfrac{1}{25}$ $\quad$ $C = 3x^2+\sqrt{18}x-12$

- $A = 5x^2-65x+210$

Posons $\Delta = (-65)^2-4\times5\times210 = 25$ le discriminant du trinôme A.

On a $\Delta > 0$, donc on peut écrire $A = 5(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$x_1 = \dfrac{-(-65)-\sqrt{25}}{2\times5} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-(-65)+\sqrt{25}}{2\times5} = 7$

Pour finir :

$\boxed{A = 5(x-6)(x-7)}$

- $B = -0{,}5x^2+0{,}1x+\dfrac{1}{25}$

Posons $\Delta = 0{,}1^2-4\times(-0{,}5)\times\dfrac{1}{25} = \dfrac{9}{100}$ le discriminant du trinôme B.

On a $\Delta > 0$, donc on peut écrire $B = -0{,}5(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$x_1 = \dfrac{-0{,}1-\sqrt{\dfrac{9}{100}}}{2\times(-0{,}5)} = 0{,}4$ et $x_2 = \dfrac{-0{,}1+\sqrt{\dfrac{9}{100}}}{2\times(-0{,}5)} = -0{,}2$

Pour finir :

$\boxed{B = -0{,}5(x-0{,}4)(x+0{,}2)}$

- $C = 3x^2+\sqrt{18}x-12$

Posons $\Delta = \sqrt{18}^2-4\times3\times(-12) = 162$ le discriminant du trinôme C.

On a $\Delta > 0$, donc on peut écrire $C = 3(x-x_1)(x-x_2)$ avec

Maintenant vous êtes grands et devez savoir simplifier des racines carrées :

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{162} = \sqrt{81\times2} = 9\sqrt{2}$

$x_1 = \dfrac{-3\sqrt{2}-9\sqrt{2}}{2\times3} = -2\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{2\times3} = \sqrt{2}$

Pour finir :

$\boxed{C = 3(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}$

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Factorisez les expressions suivantes :

Facteurs communs

$A = 3x^2-3x$

$A = 3x\times x-3x\times 1$

$\boxed{A = 3x(x-1)}$

$B = (2x+1)(x-7)-(3+2x)(2x+1)$

$B = (2x+1)[(x-7)-(3+2x)]$

$B = (2x+1)[x-7-3-2x]$

$\boxed{B = (2x+1)(-x-10)}$

Attention, si on veut une forme factorisée comme dans le cours alors ce n'est pas fini :

$B = -(2x+1)(x+10)$

$B = -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+10)$

Les racines sont alors $-\dfrac{1}{2}$ et -10

$C = 4x(3x-1)+(3x-1)(2x+7)$

$C = (3x-1)[4x+(2x+7)]$

$\boxed{C = (3x-1)(6x+7)}$

$C = 3\times 6\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{7}{6}\right)$

$C = 18\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{7}{6}\right)$

$D = 3x+(2x-1)(3x+7)+7$

$D = (3x+7)+(2x-1)(3x+7)$

$D = (3x+7)[1+(3x+7)]$

$\boxed{D = (3x+7)(3x+8)}$

$D = 3\times 3\left(x+\dfrac{7}{3}\right)\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$

$D = 9\left(x+\dfrac{7}{3}\right)\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$

Identités remarquables

$E = 49x^2-3969x+81$

$E = \underbrace{49x^2}_{a^2}-\underbrace{3969x}_{2ab}+\underbrace{81}_{b^2}$

$E = (7x)^2-3969x+9^2$

On n'oublie pas de vérifier que $2ab=3969$

$E = (7x-9)^2$

$F = (2x+1)^2-(3+2x)^2$

$F = \underbrace{(2x+1)^2}_{a^2}-\underbrace{(3+2x)^2}_{b^2}$

$F = [(2x+1)-(3+2x)][(2x+1)+(3+2x)]$

$F = [2x+1-3-2x][2x+1+3+2x]$

$F = -2(4x+4)$

$F = -8(x+1)$

Racines évidentes

$G = x^2+7x-8$

$H = x^2+6x+5$

G est de la forme ax^2+bx+c

avec $a=1$; $b=7$ et $c=-8$

son discriminant $\Delta=7^2-4\times 1\times(-8)=81$ est strictement positif : cela nous assure de l'existence de deux racines distinctes.

On teste si 0 , 1 ou -1 (parfois 2 ou -2) sont des racines

Ici, $1^2+7\times 1-8 = 0$, $x_1 = 1$ est une racine évidente et donc , on peut écrire

$G = (x-1)(x-x_2)$

Ensuite on utilise, au choix, une des deux propriétés suivantes :

$x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

$1\times x_2 = -8$ d'où $x_2 = -8$

$G = x^2+7x-8$

On reconnaît l'expression d'un trinôme, son discriminant $\Delta=7^2-4\times 1\times(-8)=81$ est strictement positif et comme $1^2+7\times 1-8 = 0$, on peut écrire $G = (x-1)(x-x_2)$ où x_2 est la seconde racine.

De plus $1\times(-8) = -8$

Donc $\boxed{G = (x-1)(x+8)}$

$H = x^2+6x+5$

On reconnaît un trinôme de discriminant $\Delta=6^2-4\times1\times5=16$ strictement positif.

-1 est racine évidente et $-1\times(-5) = 5$

Donc $\boxed{H = (x+1)(x+5)}$

$I = 3x^2+3x-6 = 3(x^2+x-2)$

On reconnaît un trinôme de discriminant $\Delta=3^2-4\times3\times(-6)=81$ strictement positif.

1 est racine évidente et $1\times(-2) = -2$

Donc $\boxed{I = (x-1)(x+2)}$

$J = 2x^2+12x+10 = 2(x^2+6x+5)$

On reconnaît un trinôme de discriminant $\Delta=12^2-4\times2\times10=64$ strictement positif.

-1 est racine évidente et $-1\times(-5) = 5$

$\boxed{J = 2(x+1)(x+5)}$

On a aussi le droit d'être « astucieux » :

On remarque que $J = 2H$ ($J = 2x^2+12x+10 = 2(x^2+6x+5) = 2H$)

Comme $H = (x+1)(x+5)$, on en déduit que $\boxed{J = 2(x+1)(x+5)}$