LES FONCTIONS PART1

I Les généralités

I.1 Définir une fonction

Définition n°1. Domaine de définition, image, antécédent

On considère D_f un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

▪ On définit une fonction sur D_f en associant à chaque nombre réel x de D_f un unique réel appelé image de x par f qui est noté $f(x)$.

▪ On dit que D_f est le domaine de définition de f :

Si $x \notin D_f$ alors $f(x)$ n'existe pas.

▪ Si, pour un nombre réel b, il existe $a \in D_f$ tel que $f(a)=b$ alors on dit que a est un antécédent de b par f.

LES FONCTIONS PART1

Exemple n°1.

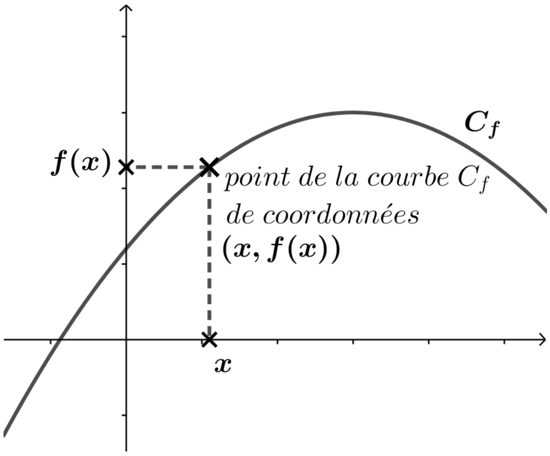
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout x réel associe le nombre $2x-5$. On écrit symboliquement en mathématiques $f : x \mapsto 2x-5$

LES FONCTIONS PART1

I.2 La représentation graphique

Définition n°2. Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f .
On appelle courbe représentative de la fonction f (notée C_f) dans un repère du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ où $x \in D$ et $y = f(x)$.



geogebra

LES FONCTIONS PART1 E01

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-12x+11$ et C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x , $f(x)=(x-11)(x-1)$.

2) Déterminer l'image de -2 par la fonction f .

3) Déterminer le point de la courbe C_f , ayant pour abscisse $x=3$.

4) Déterminer les antécédents éventuels de 0 et de 11 par la fonction f .

Les fonctions part1 E01

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-12x+11$ et C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x , $f(x)=(x-11)(x-1)$.

$$\begin{aligned} & (x-11)(x-1) \\ = \; & x^2-x-11x+11 \\ = \; & x^2-12x+11 \\ = \; & f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $f(x)$ et $(x-11)(x-1)$ ont la même forme développée réduite, elles sont donc égales.

2) Déterminer l'image de -2 par la fonction f.

$f(-2) = (-2)^2 - 12 \times (-2) + 11 = 4 + 24 + 11 = 39$

3) Déterminer le point de la courbe C_f , ayant pour abscisse $x=3$.

Comme le point appartient à la courbe son ordonnée vaut l'image de son abscisse par f c'est à dire : $f(3)$

Or : $f(3) = 3^2-12\times3+11 = 9-36+11 = -16$

On en déduit que le point cherché a pour coordonnées $(3\ ;\ -16)$

4) Déterminer les antécédents éventuels de 0 et de 11 par la fonction f .

▪ Si x est un antécédent éventuel de 0 par f alors :

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-11)(x-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x-11=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & x=11 \quad \text{ou} \quad x=1 \end{aligned}$$

Ainsi 0 possède deux antécédents par f qui sont : 1 et 11

▪ Si x est un antécédent éventuel de 11 par f alors :

$$\begin{aligned} & f(x)=11 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-12x+11=11 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-12x=0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-12)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x=0 \quad \text{ou} \quad x=12 \end{aligned}$$

Ainsi 11 possède deux antécédents par f qui sont : 0 et 12

À la maison : Exercices n°1 et 2 de la fiche M01

II Fonctions polynômes de degré 2

II.1 Définition

Définition n°3.

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du second degré.

Exemple n°2.

$f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ est une fonction polynôme du second degré et son expression est $f(x) = x^2 - 2x - 3$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$.

II.2 Courbe représentative

On considère une fonction polynôme du second degré écrite sous sa forme développée : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

Définition n°4.

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction f du second degré s'appelle une parabole.

▪ Lorsque $a>0$, on dit que la parabole est tournée vers le haut.

▪ Lorsque $a<0$, on dit que la parabole est tournée vers le bas.

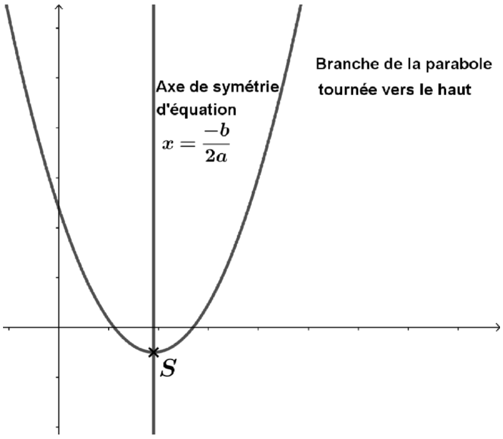
LES FONCTIONS PART1

Propriété n°1. ***(admise)***

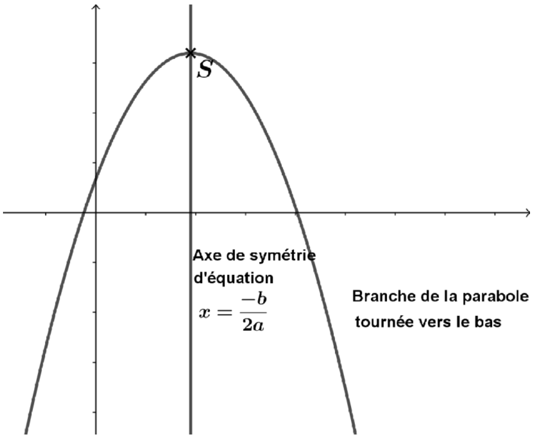
▪ Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha\ ;\ \beta)$
avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$

▪ La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x=\dfrac{-b}{2a}$.

$a>0$



$a<0$



[Géogébra]

EXERCICE N°2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-0{,}1x^2+23x-760$.

Déterminer le tableau de variations de la fonction g .

LES FONCTIONS PART1 E01

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-0,1x^2+23x-760$.
Déterminer le tableau de variations de la fonction g .

g est une fonction polynôme du second degré de forme développée ax^2+bx+c avec $a=-0,1$; $b=23$ et $c=-760$.
La représentation graphique d'une telle fonction est une parabole qui est tournée vers le bas car $a<0$.

L'abscisse du sommet est $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-23}{2\times(-0,1)} = 115$

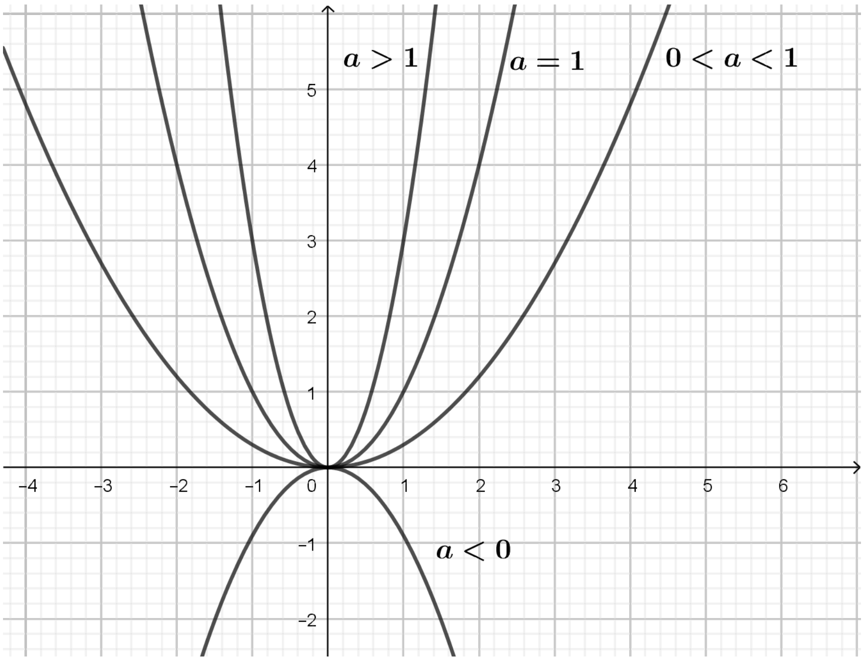
Son ordonnée est $\beta = g(\alpha) = g(115) = 562,5$.

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		115		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$562,5$	$\searrow$	

II.3 Quelques cas particuliers

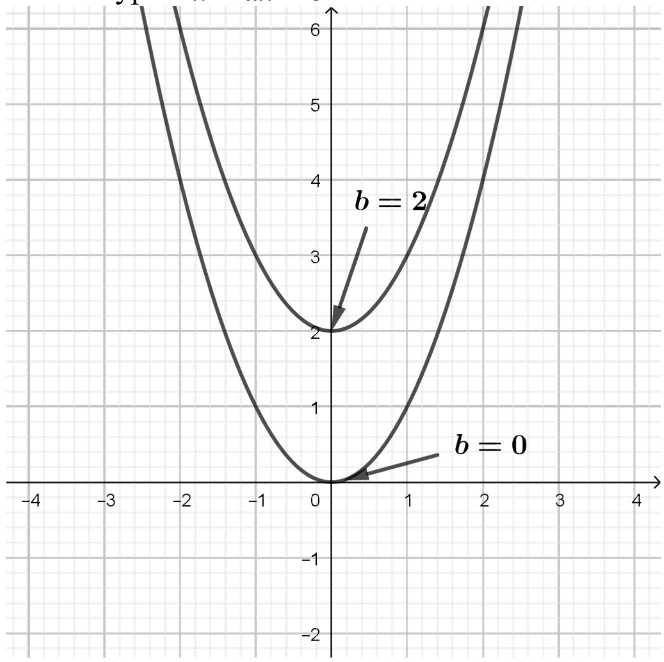
Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2$: Influence de a



geogebra

LES FONCTIONS PART1 E01

Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2 + b$: Influence de b



À la maison : Exercice n°3 de la fiche M01

II.4 Les racines quand elles existent

Propriété n°2. (admise)

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ (appelée forme développée)

▪ Si f admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues) alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ que l'on appelle forme factorisée de f .

▪ Inversement, si f s'écrit sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, alors x_1 et x_2 sont les racines de f .

▪ L'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f a alors pour équation $x=\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

▪ L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

Exemple n°3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-9x-30$.

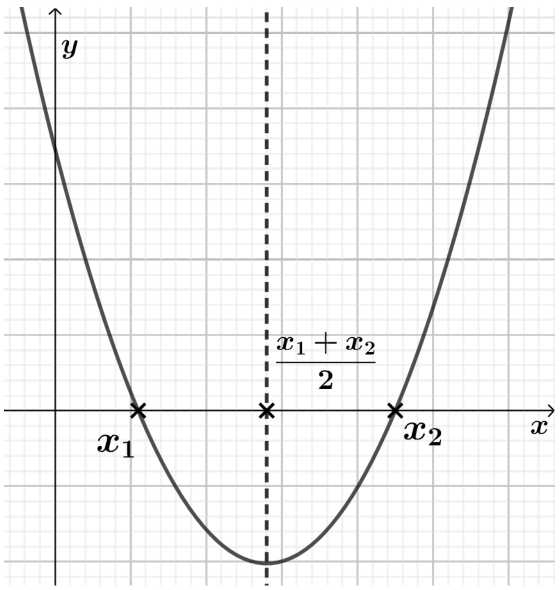
On peut montrer que $f(-2)=f(5)=0$. -2 et 5 sont les racines de f On peut lire sur la forme développée que $a=3$.

La forme factorisée est donc $f(x)=3(x-(-2))(x-5)$, soit $f(x)=3(x+2)(x-5)$.

II.5 Courbe représentative quand les racines sont distinctes

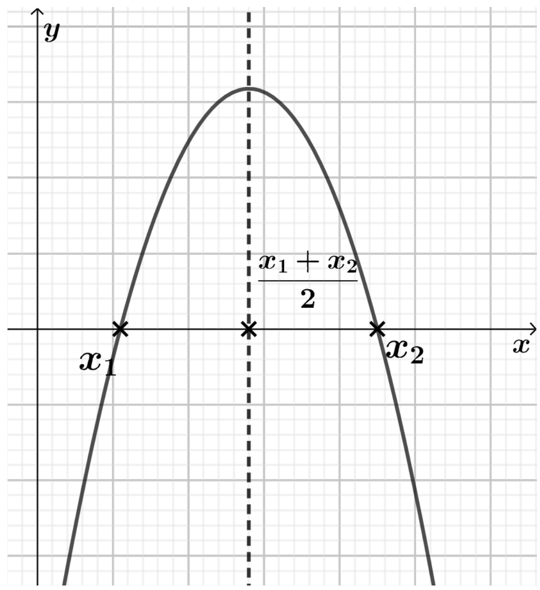
On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ et on la représente dans un repère du plan :

$a>0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

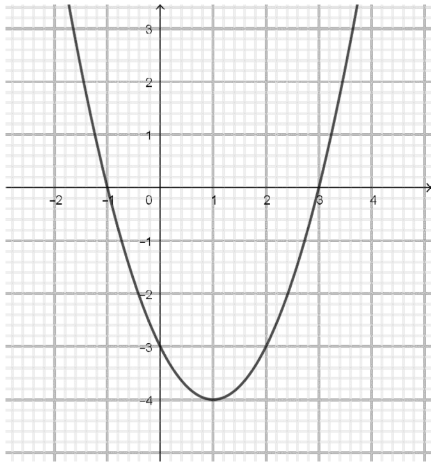
$a<0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les racines x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
Si les racines sont distinctes, alors $f(x)$ est toujours du signe de a sauf entre les racines.

EXERCICE N°3



On considère la parabole C_f ci-contre rapportée à un repère orthogonal.

Déterminer la forme factorisée de cette fonction.

geogebra

LES FONCTIONS PART1 E01

La lecture graphique indique que les abscisses -1 et 3 sont des racines (abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses), ce qui donne la forme factorisée de f :

$$f(x) = a(x-(-1))(x-3) = a(x+1)(x-3) \quad . \qquad a \in \mathbb{R}$$

La lecture graphique indique que $f(1)=-4$,

c'est-à-dire $a(1+1)(1-3)=-4$,

ce qui équivaut à $a(2)(-2)=-4$,

ce qui équivaut aussi à $-4a=-4$,

ce qui donne $a=1$,

d'où la forme factorisée de f : $f(x)=(x+1)(x-3)$.

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x-2)(x+3)$.
Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de cette fonction.

Les fonctions part1 E01

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x-2)(x+3)$.
Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de cette fonction.

Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = -2(x-2)(x+3) = -2(x-2)(x-(-3))$

On reconnaît ainsi la forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a=-2$, $x_1=2$ et $x_2=-3$

Le signe du trinôme étant toujours du signe de a sauf entre les racines x_1 et x_2 , on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

LES FONCTIONS PART1 E02

EXERCICE N°1 Ne pas oublier les bases

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+12$.

1) Déterminer l'image de -3 et de 1 par la fonction f .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 4 et de $-\frac{1}{3}$ par la fonction f .

EXERCICE N°2 *Python*

On considère la fonction suivante Python :

```
def signe( f , x ):
    '''Renvoie Positif si f(x) est positif et
      Négatif dans le cas contraire '''
                    …
```

1) Recopier et compléter la fonction pour effectue ce qui est indiqué dans sa des

2) Utiliser la fonction précédente pour afficher le signe des images de tous les entiers compris entre -10 et 10 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-4x-21$.

EXERCICE N°3 Tableur

On a préparé avec un tableur un tableau de valeurs d'une fonction f sur l'intervalle avec un pas de 1.

	A	B
1	x	f(x)
2	0	-5
3	1	-2
4	2	11
5		

Dans la cellule B2, nous avons saisi la formule suivante : =2*A2^3 - A2^2 + 2*A2 - 5

1) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x

2) En déduire la valeur affichée dans la cellule B5.

EXERCICE N°4

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$.

1) Déterminer l'image de 3 par f .

2) Déterminer le nombre d'antécédents de 0 par f .

3) Résoudre graphiquement $f(x)=-1$.

4) Donner la valeur de $f(0)$.

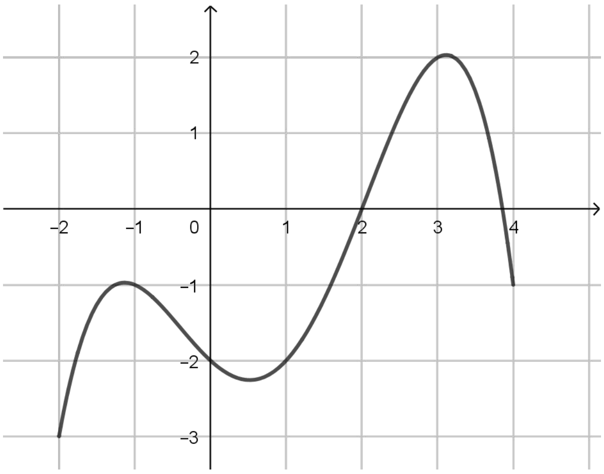
5) Quel(s) nombre(s) a (ont) pour antécédent 1 ?

6) Quels nombres ont pour image -2 ?

7) Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 3 .

8) Construire le tableau de variations de f sur $[-2\ ;\ 4]$.

9) Construire le tableau de valeurs de f sur $[-2\ ;\ 4]$ avec un pas de 1 .



geogebra

LES FONCTIONS PART1 E03

EXERCICE N°1

Les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $A(x)=(x+3)(x-2)$ et $B(x)=x^2-x-6$ sont-elles égales ?

EXERCICE N°2

Déterminer le réel a pour que les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $C(x)=(2x-a)(x+3)$ et $D(x)=-15+x+2x^2$ soient égales.

LES FONCTIONS PART1 E03

EXERCICE N°3

Pour chacune des fonctions polynômes suivantes, déterminer les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie ainsi que l'orientation de la parabole.

1) $f(x)=x^2-5x+7$

2) $g(x)=-3x^2+6x-1$

3) $i(x)=2(x-1)^2+5$

4) $h(x)=6x^2-12x+5$

Les fonctions part1 E03

EXERCICE N°4 Python

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$.
Sa courbe représentative est une parabole C_f .

1) Écrire, en langage Python, une fonction qui prend en entrée les valeurs de a, b et c , et qui renvoie les coordonnées du sommet de cette parabole.

2) Utiliser cette fonction pour déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentant la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+1x-5$

3) Quel est le signe de l'ordonnée de S ? Étant donné l'orientation de la parabole, combien de fois celle-ci va-t-elle couper l'axe des abscisses ?

EXERCICE N°5

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-6x-20$.

1) Vérifier que $2x^2-6x-20=2(x+2)(x-5)$.

2) Trouver quelques caractéristiques (racines, coordonnées de sommet, équation de l'axe de symétrie) de la fonction f puis tracer l'allure générale de sa courbe représentative dans rapportée à un repère.

Les fonctions part1 E03

EXERCICE N°6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $-9x^2-3x=0$ **2)** $(x+2)(3x-7)=0$ **3)** $9x(x-3)=0$

EXERCICE N°7

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x)=2x^2-6x+4$.

Déterminer la forme factorisée de f en connaissant une de ses racines, le nombre 1 .

EXERCICE N°8

Soit f une fonction polynôme du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-18$.

1) Déterminer $f(-3)$.

2) Factoriser f .

3) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°9 Python

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$.

On admet que les coefficients a , b et c sont tous des entiers compris entre -30 et 30 .

On sait de plus que $f(-2)=67$, que $f(5)=-38$ et que $f(11)=28$.

1) Écrire un programme, en Python, capable de tester toutes les valeurs possibles de a , b et c afin de trouver le polynôme qui vérifie ces trois conditions.

2) Que se passe-t-il avec le programme précédent si on l'utilise pour trouver le polynôme du second degré f tel que $f(1)=-1$, $f(2)=0$ et $f(5)=7$. Combien ce programme a-t-il effectué de tests ?