

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=a_i)$	0,3	0,25	0,2	0,1	0,1	0,05

1) Donner la valeur de $P(X=2)$.

Il suffit bien sûr de lire le tableau.

$$P(X=2)=0,2$$

2) Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leq 2\}$?

$$\{X \leq 2\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}$$

On a pris « tout ce qui est inférieur ou égal à 2 ».

3) Calculer $P(X \leq 2)$.

$$P(\{X \leq 2\}) = P(\{X=0\}) + P(\{X=1\}) + P(\{X=2\}) = 0,3 + 0,25 + 0,2 = 0,75$$

Vous remarquerez qu'ici, on a « mis des accolades en plus dans les parenthèses », c'est « l'écriture correcte » ... Seulement voilà, c'est « tellement lourd » qu'on finit par ne plus « mettre les accolades ». C'est la choix de l'immense majorité, mais si vous êtes amené un jour à rencontrer cela, vous ne serez pas surpris...

4) Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

Cela veut dire « $X \geq 2$ »

$$P(\{X \geq 2\}) = P(\{X=2\}) + P(\{X=3\}) + P(\{X=4\}) + P(\{X=5\}) = 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,45$$

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	-2	2	3	5	9	12	total
$P(X=a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	1

1) Sachant que $P(X \leq 5) = \frac{11}{16}$, compléter le tableau ci-dessus.

▪ $P(X \leq 5) = \frac{11}{16}$

Donc :

$$P(X = -2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{11}{16}$$

En remplaçant :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + P(X = 3) + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + P(X = 3) + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \Rightarrow P(X = 3) = \frac{11}{16} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

▪ Comme la somme des probabilités des issues vaut 1, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} P(X = 9) &= 1 - (P(X = -2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 12)) \\ &= 1 - \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{16} \right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2) Donner la probabilité que X soit au moins égale à 5.

$$P(\{X \geq 5\}) = P(\{X = 5\}) + P(\{X = 9\}) + P(\{X = 12\}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

À l'arrière d'un ticket à gratter, on peut lire :

Tableau de lots :

sur 3 000 000 tickets : 323 000 lots de 1 €; 295 000 lots de 2 €, 60 000 lots de 4 €, 77 000 lots de 10 €, 20 lots de 100 €, 5 lots de 400 € et 2 lots de 4 000 €.

Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1) Décrire l'événement $\{X=100\}$.

$\{X=100\}$ correspond à l'événement : « Le joueur gagne 100 € »

2) Quelles sont les valeurs prises par X ?

Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 10 ; 100 ; 400 et 4000

3) Quelle est la probabilité de gagner 1 € ?

Comme, à priori, chaque ticket a la même chance d'être choisi, on peut considérer que nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

Vous venez de justifier le calcul suivant...

$$P(X=1) = \frac{323\,000}{3\,000\,000} = \frac{323}{3000} \approx 0,1077$$

On a choisi d'approcher à 4 chiffres après la virgule, comme ça, si on nous demande un pourcentage on aura encore deux chiffres après la virgule.

4) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

a_i	0	1	2	4	10	100	400	4000
$P(X=a_i)$	$\frac{2244973}{3000000}$	$\frac{323}{3000}$	$\frac{59}{600}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{77}{3000}$	$\frac{1}{150000}$	$\frac{1}{600000}$	$\frac{1}{1500000}$
	$\frac{2244973}{3000000}$	$\frac{323000}{3000000}$	$\frac{295000}{3000000}$	$\frac{60000}{3000000}$	$\frac{77000}{3000000}$	$\frac{20}{3000000}$	$\frac{5}{3000000}$	$\frac{2}{3000000}$

L'erreur classique ici, serait d'oublier « $X=0$ » : le pigeon heu pardon le joueur ne gagne rien.

Mais si vous prenez la bonne habitude de vérifier que la somme des probabilités des issues vaut bien 1, alors vous ne vous ferez pas avoir...

$$\frac{2244973}{3000000} + \frac{323000}{3000000} + \frac{295000}{3000000} + \frac{60000}{3000000} + \frac{77000}{3000000} + \frac{20}{3000000} + \frac{5}{3000000} + \frac{2}{3000000} = \frac{3000000}{3000000} = 1$$

Comment calculer $P(X=0)$?

Il faut calculer le nombre de tickets qui ne donnent rien...

Hé mais mais, on a plus de chance de gagner 10 € que 4 € !

C'était pour voir si vous suivez ... (Avec mon habitude mauvaise fois bien sûr ;))

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

On lance un dé tétraédrique rouge dont les faces numérotées de 1 à 4 et un autre dé identique bleu. On note X la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	1	2	3	4
1	$1+1=2$	$1+2=3$	$1+3=4$	$1+4=5$
2	$2+1=3$	$2+2=4$	$2+3=5$	$2+4=6$
3	$3+1=4$	$3+2=5$	$3+3=6$	$3+4=7$
4	$4+1=5$	$4+2=6$	$4+3=7$	$4+4=8$

2) Quelles sont les valeurs prises par X ?

Les valeurs prises par X sont : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8

3) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

Comme, à priori, tous les tirages ont la même chance de tomber, on choisit le modèle de l'équiprobabilité.

a_i	2	3	4	5	6	7	8	total
$X=a_i$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1
	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

VARIABLES ALÉATOIRES E01

EXERCICE N°1

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=a_i)$	0,3	0,25	0,2	0,1	0,1	0,05

- 1) Donner la valeur de $P(X=2)$.
- 2) Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leq 2\}$?
- 3) Calculer $P(X \leq 2)$.
- 4) Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

EXERCICE N°2

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous:

a_i	-2	2	3	5	9	12
$P(X=a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$

- 1) Sachant que $P(X \leq 5) = \frac{11}{16}$, compléter le tableau ci-dessus.
- 2) Donner la probabilité que X soit au moins égale à 5.

EXERCICE N°3

À l'arrière d'un ticket à gratter, on peut lire :

Tableau de lots :

sur 3 000 000 tickets : 323 000 lots de 1 €; 295 000 lots de 2 €, 60 000 lots de 4 €, 77 000 lots de 10 €, 20 lots de 100 €, 5 lots de 400 € et 2 lots de 4 000 €.

Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- 1) Décrire l'événement $\{X = 100\}$.
- 2) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 3) Quelle est la probabilité de gagner 1 €?
- 4) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE N°4

On lance un dé tétraédrique **rouge** dont les faces numérotées de 1 à 4 et un autre dé identique **bleu**. On note X la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- 2) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 3) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.