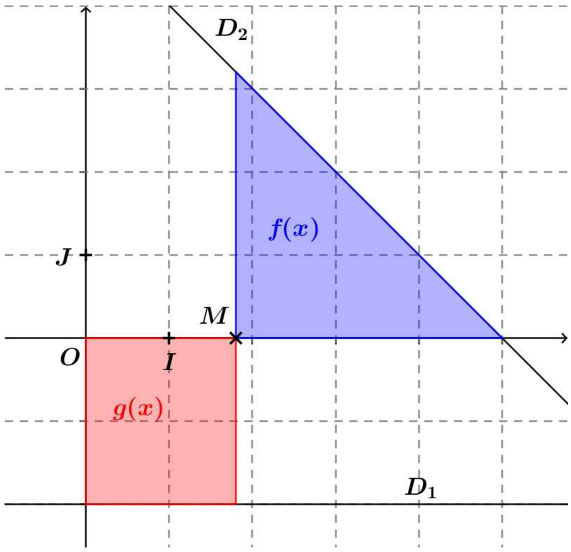
LA FONCTION CARRÉ E07

EXERCICE N°3 *(Le corrigé)*

Dans un repère ci-dessous, on a tracé les droites D_1 et D_2. Le point M est mobile sur l'axe des abscisses. On note x l'abscisse de M. On a $x \in [0\ ;\ 5]$.



1) Exprimer l'aire de la surface du rectangle rouge, notée $g(x)$, en fonction de x.
2) Exprimer l'aire de la surface du triangle bleu rectangle isocèle en M, notée $f(x)$, en fonction de x.
3) Montrez que résoudre $f(x)>g(x)$ revient à résoudre $(x-7)^2-24 > 0$
4) Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$.
5) Donner l'ensemble des positions possibles de M pour que la surface bleue soit strictement plus grande que la rouge.

1)

$\boxed{g(x) = 2x}$

2)

Si on note E le point d'intersection de D_2 avec l'axe des abscisses alors $ME = 5-x$.

On en déduit que $\boxed{f(x) = \dfrac{(5-x)^2}{2}}$.

3)

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x) > 0$ c

Or : d'une part,

$$f(x)-g(x) = \frac{(5-x)^2}{2}-2x = \frac{25-10x+x^2}{2}-\frac{4x}{2} = \frac{x^2-14x+25}{2}$$

d'où $f(x)-g(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-14x+25}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2-14x+25 > 0$

et d'autre part,

$(x-7)^2-24 = x^2-14x+49-24 = x^2-14x+25$

d'où $(x-7)^2-24 > 0 \Leftrightarrow x^2-14x+25 > 0$

On en déduit le résultat.

4)

D'après ce qui précède, $f(x) > g(x) \Leftrightarrow (x-7)^2-24 > 0$

$$(x-7)^2-24 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-7)^2}_{a^2}-\underbrace{(\sqrt{24})^2}_{b^2} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-7+\sqrt{24})}_{(a+b)}\underbrace{(x-7-\sqrt{24})}_{(a-b)} > 0$$

- $x-7+\sqrt{24} > 0 \Leftrightarrow x > 7-\sqrt{24}$
- $x-7-\sqrt{24} > 0 \Leftrightarrow x > 7+\sqrt{24}$

x	$-\infty$		$7-\sqrt{24}$		$7+\sqrt{24}$		$+\infty$
$x-7+\sqrt{24}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-7-\sqrt{24}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-7+\sqrt{24})(x-7-\sqrt{24})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$\boxed{]-\infty\ ;\ 7-\sqrt{24}[\ \cup\ ]7+\sqrt{24}\ ;\ +\infty[}$

5)

D'après la question précédente,

$\boxed{\text{l'abscisse de } M \text{ doit appartenir à }]-\infty\ ;\ 7-\sqrt{24}[\ \cup\ ]7+\sqrt{24}\ ;\ +\infty[}$