

VARIABLES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer $E(X)$

$$E(X) = -6 \times \frac{1}{12} + (-3) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{5}{24} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{8}$$

$$E(X) = -0,5 + (-1) + 0 + 1 + 0,75$$

$$E(X) = 0,25$$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X - \frac{1}{4}$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

y_i	$\underbrace{-6,25}_{=-6-0,25}$	$\underbrace{-3,25}_{=-3-0,25}$	$\underbrace{-0,25}_{=0-0,25}$	$\underbrace{3,75}_{=4-0,25}$	$\underbrace{5,75}_{=6-0,25}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (On dit alors que la variable aléatoire est centrée)

$$E(Y) = -6,25 \times \frac{1}{12} + (-3,25) \times \frac{1}{3} + -0,25 \times \frac{5}{24} + 3,75 \times \frac{1}{4} + 5,75 \times \frac{1}{8}$$

$$E(Y) = (-6-0,25) \times \frac{1}{12} + (-3-0,25) \times \frac{1}{3} + (0-0,25) \times \frac{5}{24} + (4-0,25) \times \frac{1}{4} + (6-0,25) \times \frac{1}{8}$$

Tiens tiens $-0,25$ revient souvent...

$$E(Y) = \underbrace{-6 \times \frac{1}{12} + (-3) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{5}{24} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{8}}_{E(X)} - 0,25 \times \underbrace{\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{5}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right]}_{\text{somme des probabilités des issues ...}}$$

$$E(Y) = E(X) - 0,25$$

$$E(Y) = 0,25 - 0,25$$

$$E(Y) = 0$$

2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

La réponse attendue est bien sûr oui mais la justification va demander un peu de travail et c'est ce qui motive la propriété n°1.

VARIABLES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°2 Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,00009	0,00001

Ce jeu est-il équitable ?

Un jeu est équitable si les gains et les pertes potentielles s'équilibrent. Cela se traduit par une espérance nulle.

Il s'agit de vérifier si $E(X) = 0$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \times P(X = x_i)$$

$$E(X) = -2 \times 0,85 + 8 \times 0,1499 + 98 \times 0,00009 + 4998 \times 0,00001$$

$$E(X) = -0,442$$

L'espérance n'est pas nulle donc ce jeu n'est pas équitable.

Dans ce contexte, les joueurs perdent en moyenne 0,442 € à chaque fois qu'ils prennent un ticket.

VARIABLES ALÉATOIRES E02C

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».

On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le « triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.

Déterminer, en fonction de m , le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.



Notons X la variable aléatoire donnant le gain algébrique en fonction de m d'un lancer. La loi de probabilité de X est alors donnée ci-dessous :

x_i	$-m$	0	$2m$
$P(X = x_i)$	0,35	0,45	0,2

Il s'agit alors de calculer l'espérance de X :

$$E(X) = -m \times 0,35 + 0 \times 0,45 + 2m \times 0,2$$

$$E(X) = 0,05m$$