

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Nom :

Prénom :

Classe :

EXERCICE N°1

(8 points)

Le coût de production, exprimé en millions d'euros, pour fabriquer q milliers de tonnes d'un produit est donné par : $C(q) = \frac{q^2}{4} + q + 4$ où $q \in [1 ; 20]$.

Le coût unitaire de production d'un millier de tonnes, noté $U(q)$, de ce produit lorsque la production est de q milliers de tonnes est donné par $U(q) = \frac{C_M(q)}{q}$

1) Montrer que $U(q) = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$ où $q \in [1 ; 20]$.

$$U(q) = \frac{C_M(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + q + 4}{q} = \frac{1}{q} \left(\frac{q^2}{4} + q + 4 \right) = \frac{q^2}{4q} + \frac{q}{q} + \frac{4}{q} = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$$

On peut aller plus vite mais il faut laisser une étape intermédiaire...

2) Justifier que $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$ où q appartient à l'intervalle $[1 ; 20]$.

▪ D'une part :

$$U(q) = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$$

$$U'(q) = \frac{1}{4}q + 1 + 4 \times \frac{1}{q} = \frac{1}{4} \times 1 + 0 + 4 \times \frac{-1}{q^2}$$

$$U'(q) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{4}{q^2}$$

▪ d'autre part :

$$\frac{(q-4)(q+4)}{4q^2} = \frac{q^2 - 16}{4q^2} = \frac{q^2}{4q^2} - \frac{16}{4q^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{q^2} = U'(q)$$

▪ Ainsi $U'(q) = \frac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$.

3) Étudier le signe de $U'(q)$ sur l'intervalle $[1 ; 20]$ et dresser le tableau de variation de U .

- $4q^2$ est positif sur $[1 ; 20]$
- $q-4 > 0 \Leftrightarrow q > 4$ et
- $q+4 > 0 \Leftrightarrow q > -4$

q	1	4	20
$q-4$	-	0	+
$q+4$	+		+
$4q^2$	+		+
$U'(q)$	-	0	+
$U(q)$	5,25	3	6,2

4) L'entreprise décide de choisir le niveau de production à produire qui minimisera son coût unitaire. Déterminer cette production.

D'après le tableau de variation, il suffit de produire 4000 tonnes.

Attention ici à ne pas répondre 4. En revanche « 4 milliers de tonnes » est bien sûr une bonne réponse.

EXERCICE N°2**(12 points)**

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres. Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction définie pour x appartenant à $[1 ; 10]$ par :

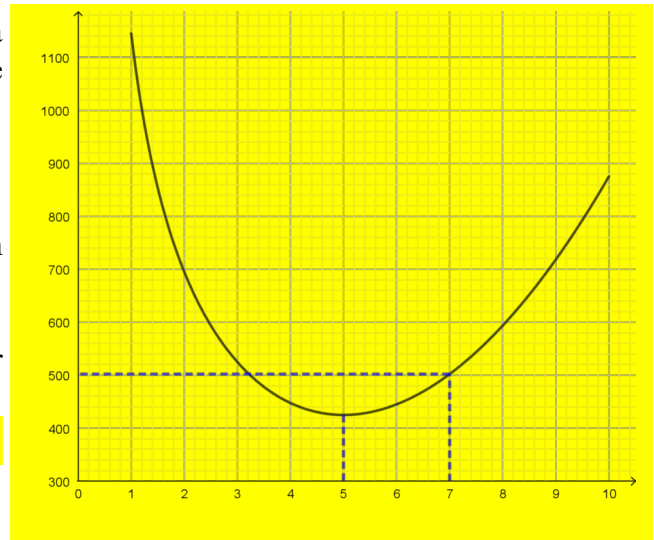
$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

Partie A : Lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_M définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

La représentation graphique de la fonction C_M est donnée ci-contre.



1) Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_M(7)$.

Par lecture graphique : $C_M(7) \approx 500$

2) Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.

Par lecture graphique, l'entreprise doit fabriquer environ 5 km de tissu pour que le coût moyen soit minimal.

Partie B : Calculs

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.

3) Montrer que : $C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$.

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

4) Démontrer que : $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

▪ D'une part,

$$C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

$$C_M'(x) = 15 \times 2x - 120 \times 1 + 0 + 750 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$C_M'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2}$$

▪ d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} &= \frac{30[x^3+x^2+5x-5x^2-5x-25]}{x^2} = \frac{30[x^3-4x^2-25]}{x^2} \\ &= \frac{30x^3-120x^2-750}{x^2} = 30x - 120 - \frac{750}{x^2} = C_M'(x) \end{aligned}$$

▪ Ainsi $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

5) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$, $x^2+x+5 > 0$.

Pour $x \in [1 ; 10]$, $x^2 \geq 1$, $x \geq 1$ donc $x^2+x+5 \geq 7 > 0$.

6) Étudier le signe de $C_M'(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M .

- x^2 est positif sur $[1 ; 10]$
- $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$ et
- x^2+x+5 est positif sur $[1 ; 10]$

q	1	5	10
$x-5$	−	0	+
x^2+x+5	+		+
x^2	+		+
$C_M'(x)$	−	0	+
$C_M(x)$	1145	425	875

7) En déduire la longueur de tissu à produire pour que le coût moyen soit minimal.

D'après le tableau de variation, il faut produire 5 km de tissu pour que le coût moyen soit minimal.