PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E05C

EXERCICE N°1 Justifier l'indépendance : immédiat

Une urne contient des boules de deux couleurs : 6 boules rouges et 4 boules bleues. On tire successivement deux boules de cette urne avec remise et on note les couleurs obtenues.

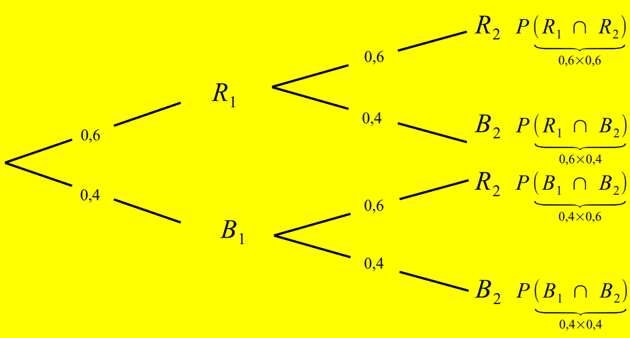
1) Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?

Le tirage se fait avec remise, on peut donc penser que les deux épreuves sont indépendantes.

2) Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre puis un tableau à double entrée.

Notons :

R_1 l'événement : « la première boule tirée est rouge »
R_2 l'événement : « la seconde boule tirée est rouge »
B_1 l'événement : « la première boule tirée est bleue »
B_2 l'événement : « la seconde boule tirée est bleue »



1er tirage / 2e tirage	R_1	B_1	Total
R_2	$\underbrace{0{,}36}_{0{,}6\times 0{,}6}$	$\underbrace{0{,}24}_{0{,}4\times 0{,}6}$	0,6
B_2	$\underbrace{0{,}24}_{0{,}6\times 0{,}4}$	$\underbrace{0{,}16}_{0{,}4\times 0{,}4}$	0,4
Total	0,6	0,4	1

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E05C

EXERCICE N°2 Justifier l'indépendance : moins immédiat

On considère une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,7 et une pièce « normale ». On lance la pièce truquée puis la pièce normale et on note les résultats obtenus.

1) Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?

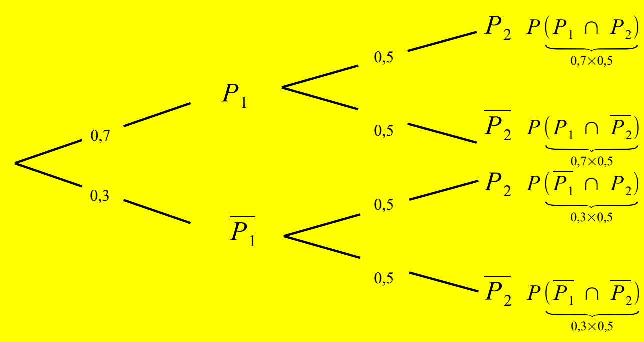
Les deux pièces sont différentes et n'ont, à priori, aucun lien entre elles, on peut donc penser que leurs lancers respectifs sont indépendants.

2) Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre puis un tableau à double entrée.

Notons :

P_1 l'événement : « le premier lancer donne Pile »

P_2 l'événement : « le second lancer donne Pile »



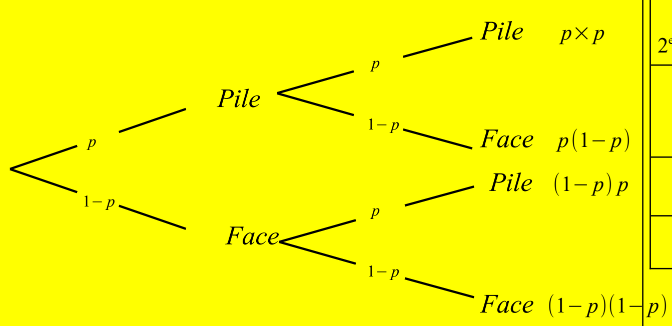
1er tirage / 2e tirage	P_1	$\overline{P_1}$	Total
P_2	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}7\times 0{,}5}$	$\underbrace{0{,}15}_{0{,}3\times 0{,}5}$	0,5
$\overline{P_2}$	$\underbrace{0{,}35}_{0{,}7\times 0{,}5}$	$\underbrace{0{,}15}_{0{,}3\times 0{,}5}$	0,5
Total	0,7	0,3	1

EXERCICE N°3 Avec une inconnue et une calculatrice

Quand on lance deux fois de manière indépendante une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face est 0,4.

Déterminer la probabilité d'obtenir Pile quand on lance cette pièce.

Notons p la probabilité d'obtenir *Pile*.
Et donc la probabilité d'obtenir *Face* vaut $1-p$.
(On considère que la pièce ne tombe pas sur la tranche)



1^er^ tirage / 2^e^ tirage	*Pile*	*Face*	Total
Pile	$\underbrace{p^2}_{p\times p}$	$p(1-p)$	p
Face	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
Total	p	$1-p$	1

On en déduit que la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face est $p(1-p)+p(1-p)$.
Il s'agit donc de résoudre l'équation $p(1-p)+p(1-p) = 0{,}4$
Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{aligned} p \in S &\Leftrightarrow p(1-p)+p(1-p) = 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow 2p(1-p) = 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow p(1-p) = 0{,}2 \\ &\Leftrightarrow p-p^2 = 0{,}2 \\ &\Leftrightarrow -p^2+p-0{,}2 = 0 \end{aligned}$$

Posons $\Delta = 1^2-4\times(-1)\times(-0{,}2) = 0{,}2$ le discriminant de cette dernière équation.
$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$p_1 = \frac{-1-\sqrt{0{,}2}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{0{,}2}}{2} \approx 0{,}72$$

et

$$p_2 = \frac{-1+\sqrt{0{,}2}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{0{,}2}}{2} \approx 0{,}28$$

Il y a donc deux probabilités possibles : $\boxed{\text{environ } 0{,}28 \text{ et environ } 0{,}72}$.

EXERCICE N°4 Justifier et utiliser l'indépendance

Ubéric joue à son jeu de plateau préféré avec ses amis et il a presque gagné !
Pour qu'il gagne en deux coups, il faut (et il suffit) que les deux prochains lancers de dés donnent des nombres dans l'ensemble $\{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
On considère donc l'expérience aléatoire constituée de ces deux lancers de dés équilibrés à six faces et pour laquelle on regarde le nombre de lancers favorables.

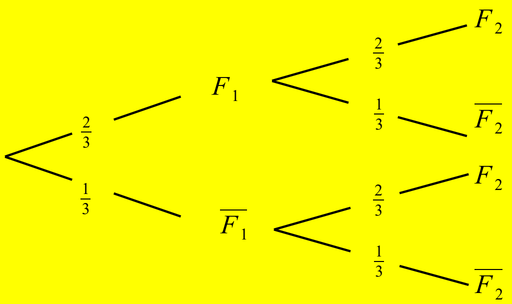
1) Pourquoi peut-on considérer que c'est une succession de deux épreuves indépendantes ?
A priori, il n'a pas d'influence du 1$^{\text{er}}$ lancer sur le second. On peut donc considérer qu'il s'agit bien d'une succession de deux épreuves indépendantes.

2) La représenter par un arbre ou un tableau et donner la probabilité que Ubéric gagne en deux coups.

Notons :
F_1 l'événement : « le premier lancer est favorable »
F_2 l'événement : « le second lancer est favorable »

On a $P(F_1) = P(F_2) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Au choix



1$^{\text{er}}$ lancer / 2$^{\text{e}}$ lancer	F_1	$\overline{F_1}$	Total
F_2	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
$\overline{F_2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
Total	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	1

$P(F_1 \cap P_2) = \dfrac{4}{9}$

La probabilité que Ubéric gagne en deux coups vaut $\boxed{\dfrac{4}{9}}$

EXERCICE N°5 Tombola

Dans une tombola organisée dans une école, les professeurs ont acheté 52 tickets et les parents d'élèves 748.
Comme il y a deux lots à gagner, il a été décidé d'effectuer un tirage avec remise pour leur attribution (on tire un ticket au hasard pour le premier lot puis on le remet avec les autres et on tire de nouveau un ticket au hasard).

1) Expliquer pourquoi on peut considérer que ces deux tirages au sort sont une succession de deux épreuves indépendantes.

Il s'agit d'un tirage avec remise donc on peut considérer que les deux épreuves sont indépendantes.

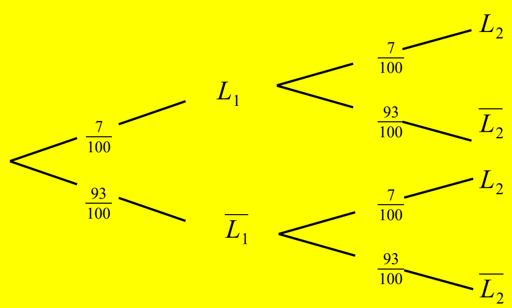
2) Représenter la situation par un arbre ou un tableau.

Notons :

L_1 l'événement : « le premier lot est gagné par un professeur »

L_2 l'événement : « le second lot est gagné par un professeur »

On a $P(L_1) = P(L_2) = \dfrac{56}{744+56} = \dfrac{56}{800} = \dfrac{7}{100}$



1er lancer / 2e lancer	F_1	$\overline{F_1}$	Total
F_2	0,0049	0,0651	0,07
$\overline{F_2}$	0,0651	0,8649	0,93
Total	0,07	0,93	1

Aide au calcul
$93 \times 93 = 8649$

3) Quelle est la probabilité que les deux lots soient gagnés par des parents ? Que les deux lots soient gagnés par des professeurs ? Qu'un des deux lots soit gagné par un parent et l'autre par un professeur ?

- $P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 0{,}8649$

la probabilité que les deux lots soient $\boxed{\text{gagnés par des parents vaut } 0{,}8649}$

- $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}0049$

la probabilité que les deux lots soient $\boxed{\text{gagnés par des professeurs vaut } 0{,}8649}$

- $P(\overline{F_1} \cap F_2) + P(F_1 \cap \overline{F_2}) = 0{,}0651+0{,}0651 = 0{,}1302$

la probabilité qu'un des deux lots soit gagné
$\boxed{\text{par un parent et l'autre par un professeur vaut } 0{,}1302}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E05

EXERCICE N°1 Justifier l'indépendance : immédiat

Une urne contient des boules de deux couleurs : 6 boules rouges et 4 boules bleues. On tire successivement deux boules de cette urne avec remise et on note les couleurs obtenues.

1) Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?

2) Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre puis un tableau à double entrée.

EXERCICE N°2 Justifier l'indépendance : moins immédiat

On considère une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,7 et une pièce « normale ». On lance la pièce truquée puis la pièce normale et on note les résultats obtenus.

1) Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?

2) Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre puis un tableau à double entrée.

EXERCICE N°3 Avec une inconnue

Quand on lance deux fois de manière indépendante une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face est 0,4.

Déterminer la probabilité d'obtenir Pile quand on lance cette pièce.

EXERCICE N°4 Justifier et utiliser l'indépendance

Ubéric joue à son jeu de plateau préféré avec ses amis et il a presque gagné !
Pour qu'il gagne en deux coups, il faut (et il suffit) que les deux prochains lancers de dés donnent des nombres dans l'ensemble $\{1 \ ; \ 3 \ ; \ 5 \ ; \ 6\}$.
On considère donc l'expérience aléatoire constituée de ces deux lancers de dés équilibrés à six faces et pour laquelle on regarde le nombre de lancers favorables.

1) Pourquoi peut-on considérer que c'est une succession de deux épreuves indépendantes ?

2) La représenter par un arbre ou un tableau et donner la probabilité que Ubéric gagne en deux coups.

EXERCICE N°5 Tombola

Dans une tombola organisée dans une école, les professeurs ont acheté 52 tickets et les parents d'élèves 748.
Comme il y a deux lots à gagner, il a été décidé d'effectuer un tirage avec remise pour leur attribution (on tire un ticket au hasard pour le premier lot puis on le remet avec les autres et on tire de nouveau un ticket au hasard).

1) Expliquer pourquoi on peut considérer que ces deux tirages au sort sont une succession de deux épreuves indépendantes.

2) Représenter la situation par un arbre ou un tableau.

3) Quelle est la probabilité que les deux lots soient gagnés par des parents ? Que les deux lots soient gagnés par des professeurs ? Qu'un des deux lots soit gagné par un parent et l'autre par un professeur ?