LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2^x = 5$ **2)** $3^x = -10$ **3)** $5^{x+1} = 25$

4) $\log(2x+1) = 1$ **5)** $\log(3x-1) = 0$

1)

$2^x = 5 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(5) \Leftrightarrow x\log(2) = \log(5) \Leftrightarrow x = \dfrac{\log(5)}{\log(2)}$

Ainsi, cette équation admet $\boxed{\text{une unique solution : } \dfrac{\log(5)}{\log(2)}}$

2)

$3^x = -10$

Cette équation n'admet $\boxed{\text{aucune solution}}$ (car pour tout réel x , $3^x > 0$)

3)

$$\begin{aligned} 5^{x+1} = 25 &\Leftrightarrow \log(5^{x+1}) = \log(25) \\ &\Leftrightarrow (x+1)\log(5) = \log(5^2) \\ &\Leftrightarrow x+1 = \frac{2\cancel{\log(5)}}{\cancel{\log(5)}} \\ &\Leftrightarrow x = 2-1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

« Je remarque que $25=5^2$ et j'en déduis que $x=1$ » me conviendrait très bien aussi sur une copie…

Ainsi, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } 1}$

4)

Quand on resoud une équation (ou une inéquation) on le fait quand cela a du sens.
Par exemple, ici $\log(2x+1)$ n'est défini que si $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -0,5$.
Il faudrait, en toute rigueur, se placer dans $]0,5 ; +\infty[$ pour résoudre l'équation.

$$\log(2x+1) = 1 \Leftrightarrow 10^{\log(2x+1)} = 10^1 \Leftrightarrow \underbrace{2x+1 = 10}_{\substack{\textit{par définition} \\ 10^{\log(machin)}=machin \\ \textit{et bien sûr } 10^1=10}} \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4,5$$

Ainsi, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } 4,5}$

Ouf $4,5 \in]0,5 ; +\infty[$.

5)

De même ici : On pense à déterminer le *domaine de validité* de l'équation.

Il faut et il suffit que $3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$. On va donc se placer dans $\left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$ pour résoudre cette équation.

$\log(3x-1) = 0 \Leftrightarrow 10^{\log(3x-1)} = 10^0 \Leftrightarrow 3x-1 = 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Ainsi, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } \dfrac{2}{3}}$

Ouf $\dfrac{2}{3} \in \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $5^x > 1$ **2)** $2^x \leqslant 1$

3) $\log(2x) > 1$ **4)** $\log(3x-1) \leqslant 0$

1)

$$5^x > 1 \Leftrightarrow \underbrace{\log(5^x) > \log(1)}_{\substack{car\ la\ fonction\ \log \\ est\ strictement\ croissante}} \Leftrightarrow x\log(5) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{x > \frac{0}{\log(5)}}_{car\ \log(5)>0} \Leftrightarrow x > 0$$

On en déduit que cette inéquation admet comme ensemble des solutions : $]0\ ;\ +\infty[$

2)

$$2^x \leqslant 1 \Leftrightarrow \underbrace{\log(2^x) \leqslant \log(1)}_{\substack{car\ la\ fonction\ \log \\ est\ strictement\ croissante}} \Leftrightarrow x\log(2) \leqslant 0 \Leftrightarrow \underbrace{x \leqslant \frac{0}{\log(2)}}_{car\ \log(2)>0} \Leftrightarrow x \leqslant 0$$

On en déduit que cette inéquation admet comme ensemble des solutions : $]-\infty\ ;\ 0]$

3)

On se place dans $]0\ ;\ +\infty[$ pour résoudre cette inéquation.

$$\log(2x) > 1 \Leftrightarrow \underbrace{10^{\log(2x)} > 10^1}_{\substack{car\ la\ fonction\ exponentielle \\ de\ base\ 10\ est\ strictement \\ croissante}} \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$$

On en déduit que cette inéquation admet comme ensemble des solutions : $]5\ ;\ +\infty[$

4)

On va donc se placer dans $\left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ pour résoudre cette équation.

$$\log(3x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \underbrace{10^{\log(3x-1)} \leqslant 10^0}_{\substack{car\ la\ fonction\ exponentielle \\ de\ base\ 10\ est\ strictement \\ croissante}} \Leftrightarrow 3x-1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{2}{3}$$

On en déduit que cette inéquation admet comme ensemble des solutions : $\left]\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right]$

Si on avait pas fait attention au domaine de validité (voir exercice n°1) alors on aurait donné comme ensemble des solutions : $\left]-\infty\ ;\ \frac{2}{3}\right]$

Remarquez la différence entre les questions :

1) et 2) on sert de (compose par) la fonction log dans chaque membre de l'inégalité et cette inégalité est conservée car la fonction log est croissante.

3) et 4) cette fois-ci on sert de (compose par) la fonction exponentielle de base 10 ($x \to 10^x$) dans chaque membre de l'inégalité et cette inégalité est conservée car la fonction exponentielle de base 10 est croissante.

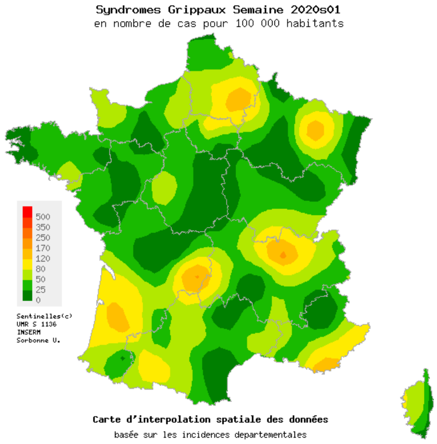
LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°3 ***(Le corrigé)***

Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès de ses médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certaines maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc.) sur une période donnée.
Ainsi, a-t-on évalué, pendant plusieurs semaines à partir de début janvier 2020, le nombre de personnes présentant des symptômes grippaux.
Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :

$$f(t)=24\times 1{,}27^t$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.



source : sentiweb.fr

1) Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1ère semaine d'observation. Donner la valeur exacte de ce taux d'incidence.

Il s'agît de calculer $f(1)$

$f(1)\ =\ 24\times 1{,}27^1\ \ 30{,}48$

$\boxed{f(1)\ =\ 30{,}48}$

2) Résoudre l'inéquation $24\times 1{,}27^t\ >\ 60{,}96$.

$$\begin{aligned}
24\times 1{,}27^t\ >\ 60{,}96 &\Leftrightarrow 1{,}27^t\ >\ \frac{60{,}96}{24}\ =\ 2{,}54\\
&\Leftrightarrow \log(1{,}27^t)\ >\ \log(2{,}54)\ \text{ car la fonction } \log \text{ est strictement croissante}\\
&\Leftrightarrow t\log(1{,}27)\ >\ \log(2{,}54)\\
&\Leftrightarrow t\ >\ \frac{\log(2{,}54)}{\log(1{,}27)}\ \approx\ 4 \qquad\qquad \text{car } \log(1{,}27)>0
\end{aligned}$$

3) Au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine ?

On remarque $30{,}48\times 2\ =\ 60{,}96$

On en déduit, d'après la question précédente qu'il faudra attendre que $\boxed{4 \text{ semaines}}$ soient écoulées .

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Pour qu'un son « chatouille » notre oreille il faut que le pavillon de celle-ci réussisse à en capter « quantité » suffisante. Cette quantité, notée I, est appelée l'intensité sonore de ce son. Elle s'exprime en watt mètre carré ($\mathrm{W\cdot m^2}$). Le niveau sonore N de ce son, exprimé en décibels (dB), est alors donné par la relation :

$$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I_0 est la plus petite puissance sonore perceptible par l'oreille humaine.

On donne $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^2}$

1) Une conversation entre deux amis a une intensité sonore de $10^{-5}\ \mathrm{W\cdot m^2}$. Quel est son niveau sonore ?

$$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(10^{7}\right) = 70$$

Une conversation entre deux amis a donc un $\boxed{\text{niveau sonore de } 70\ \text{dB}}$

2) Quelle intensité ne doit pas être dépassée pour une oreille dont le seuil de douleur se situe à $120\ \text{dB}$?

Il s'agit de résoudre $N \leqslant 120$.

$$\begin{aligned} N \leqslant 120 &\Leftrightarrow 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \leqslant 120 \\ &\Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \leqslant 12 \\ &\Leftrightarrow 10^{\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)} \leqslant 10^{12} \\ &\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} \leqslant 10^{12} \\ &\Leftrightarrow I \leqslant 10^{0} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{l'intensité ne doit pas dépasser } 1\ \mathrm{W\cdot m^2}}$

3) Si on augmente le niveau sonore d'un son de 20 dB que se passe-t-il pour son intensité sonore ?

▪ Exprimons I en fonction de N :

$$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow \frac{N}{10} = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow 10^{\frac{N}{10}} = 10^{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)} \Leftrightarrow 10^{\frac{N}{10}} = \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow I = 10^{\frac{N}{10}} I_0$$

et comme $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^2}$

$$I = 10^{\frac{N}{10}}\times 10^{-12}$$

On peut écrire $I(N) = 10^{\frac{N}{10}}\times 10^{-12}$ et $I(N+20) = 10^{\frac{N+20}{10}}\times 10^{-12}$

$$\frac{I(N+20)}{I(N)} = \frac{10^{\frac{N+20}{10}}\times 10^{-12}}{10^{\frac{N}{10}}\times 10^{-12}} = \frac{10^{\frac{N}{10}+2}}{10^{\frac{N}{10}}} = \frac{10^{\frac{N}{10}}\times 10^{2}}{10^{\frac{N}{10}}} = 10^{2}$$

On en déduit que :

$\boxed{\text{si le niveau sonore augmente de 20 dB alors l'intensité sonore est multipliée par 100}}$

4) En général, on cherche plutôt à réduire le niveau sonore. Comment réduire l'intensité d'un son pour diminuer niveau sonore de $10\ \text{dB}$?

$$\frac{I(N-10)}{I(N)} = \frac{10^{\frac{N-10}{10}}\times 10^{-12}}{10^{\frac{N}{10}}\times 10^{-12}} = \frac{10^{\frac{N}{10}-1}}{10^{\frac{N}{10}}} = \frac{10^{\frac{N}{10}}\times 10^{-1}}{10^{\frac{N}{10}}} = 10^{-1}$$

$\boxed{\text{Pour diminuer le niveau sonore de 10 dB, il faut diviser par 10 l'intensité sonore}}$.

5) Jade possède une enceinte dans sa chambre dont la puissance fournit un niveau sonore de 80 dB. Elle souhaite en acheter une seconde de puissance identique et l'installer à côté de celle qu'elle possède déjà.
Ses parents protestent : « 160 dB, mais tu risques d'avoir lésions irréversibles aux oreilles ! »
Sachant que les intensités sonores de plusieurs sons d'un même point s'additionnent, que peut-on penser de l'affirmation des parents de Jade ?

Calculons $I(80)$:

D'après la question 3) : $I(80)=10^{\frac{80}{10}}\times 10^{-12}=10^{-4}$

D'après l'énoncé, ajouter une enceinte revient doubler $I(80)$: $2\times I(80) = 2\times 10^{-4}$
On peut alors calculer le nouveau niveau sonore :

$$10\log\left(\frac{2\times I(80)}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{2\times 10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 10\log(2\times 10^{8})=10(\log(2)+8) \approx 110$$

Le niveau sonore sera d'environ 110 dB et non 160 dB. $\boxed{\text{L'affirmation est donc fausse}}$.

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2^x = 5$ **2)** $3^x = -10$ **3)** $5^{x+1} = 25$

4) $\log(2x+1) = 1$ **5)** $\log(3x-1) = 0$

EXERCICE N°2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $5^x > 1$ **2)** $2^x \leqslant 1$

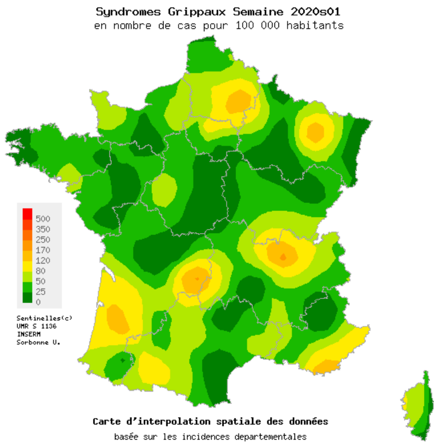
3) $\log(2x) > 1$ **4)** $\log(3x-1) \leqslant 0$

EXERCICE N°3

Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès de ses médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certaines maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc.) sur une période donnée.
Ainsi, a-t-on évalué, pendant plusieurs semaines à partir de début janvier 2020, le nombre de personnes présentant des symptômes grippaux.
Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par :

$$f(t)=24\times 1{,}27^t$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.



source : sentiweb.fr

1) Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1ère semaine d'observation. Donner la valeur exacte de ce taux d'incidence.
2) Résoudre l'inéquation $24\times 1{,}27^t > 60{,}96$.
3) Au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine ?

EXERCICE N°4

Pour qu'un son « chatouille » notre oreille il faut que le pavillon de celle-ci réussisse à en capter « quantité » suffisante. Cette quantité, notée I , est appelée l'intensité sonore de ce son. Elle s'exprime en watt mètre carré ($\mathrm{W\cdot m^2}$). Le niveau sonore N de ce son, exprimé en décibels (dB), est alors donné par la relation :

$$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I_0 est la plus petite puissance sonore perceptible par l'oreille humaine.
On donne $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^2}$

1) Une conversation entre deux amis a une intensité sobore de $10^{-5}\ \mathrm{W\cdot m^2}$. Quel est son niveau sonore ?
2) Quelle intensité ne doit pas être dépassée pour une oreille dont le seuil de douleur se situe à $120\ \mathrm{dB}$?
3) Si on augmente le niveau sonore d'un son de 20 dB que se passe-t-il pour son intensité sonore ?
4) En général, on cherche plutôt à réduire le niveau sonore. Comment réduire l'intensité d'un son pour diminuer niveau sonore de $10\ \mathrm{dB}$?
5) Jade possède une enceinte dans sa chambre dont puissance fournit un niveau sonore de $80\ \mathrm{dB}$. Elle souhaite en acheter une seconde de puissance identique et l'installer à côté de celle qu'elle possède déjà.
Ses parents protestent : « 160 dB, mais tu risques d'avoir lésions irréversibles aux oreilles ! »
Sachant que les intensités sonores de plusieurs sons d'un même point s'additionnent, que peut-on penser de l'affirmation des parents de Jade ?