PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°1 ***Objectif Spé (Le corrigé)***

On donne x la mesure d'un angle aigu. Démontrer les égalités suivantes :

1) $(\cos(x)+\sin(x))^2=1+2\sin(x)\cos(x)$

2) $(\cos(x))^2-(\sin(x))^2 = 1-2(\sin(x))^2$

3) $1+(\tan(x))^2 = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

4) $1+\dfrac{1}{(\tan(x))^2} = \dfrac{1}{(\sin(x))^2}$

Remarque n°1.

Très souvent, vous simplifierez ces écritures de la façon suivante :

1) $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x\cos x$

2) $\cos^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$

3) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $1+\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Pour démontrer une égalité, on choisit un membre de départ, et, à l'aide du calcul littéral et des propriétés à notre disposition, on essaie d'aboutir à l'autre membre.

1)

$$\begin{aligned}(\underbrace{\cos(x)}_{a}+\underbrace{\sin(x)}_{b})^2 &= \underbrace{(\cos(x))^2}_{a^2}+\underbrace{2\cos(x)\sin(x)}_{2ab}+\underbrace{(\sin(x))^2}_{b^2} \quad \text{(identité remarquable)}\\ &= \underbrace{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}_{=1 \text{ (propriété 2)}}+2\cos(x)\sin(x)\\ &= 1+2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(\cos(x))^2-(\sin(x))^2 &= (\cos(x))^2+0-(\sin(x))^2 \quad \text{astuce classique : on ajoute 0}\\ &= (\cos(x))^2+\underbrace{(\sin(x))^2-(\sin(x))^2}_{=0}-(\sin(x))^2 \quad \text{mais sous une forme utile}\\ &= \underbrace{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}_{=1}-\underbrace{(\sin(x))^2-(\sin(x))^2}_{=2(\sin(x))^2}\\ &= 1-2(\sin(x))^2\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}1+(\tan(x))^2 &= \\ &= 1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2\\ &= 1+\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\\ &= \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2}\end{aligned}$$

4)

$$1+\frac{1}{(\tan(x))^2} = 1+\frac{1}{\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} = 1+\frac{1}{\dfrac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}} = 1+\frac{(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{(\sin(x))^2+(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{(\sin(x))^2}$$

On aurait pu partir du membre de droite à chaque fois...