LA DÉRIVATION E02C

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

$d(a-c)+a(b-d) = ad-cd+ab-ad = ab-cd$

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

Les fonctions $f \; et \; g$ sont définies sur I .
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par f ou g .

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} &= \frac{\overbrace{f(x+h)}^{a}\overbrace{g(x+h)}^{b}-\overbrace{f(x)}^{c}\overbrace{g(x)}^{d}}{h}\\
&= \frac{\overbrace{g(x)}^{d}\overbrace{[f(x+h)-f(x)]}^{(a-c)}+\overbrace{f(x)}^{a}\overbrace{[g(x+h)-g(x)]}^{(b-d)}}{h}\\
&= g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

Pour tout $x \in I$, quand h tend vers zéro,
$g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tend vers $\boxed{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}$.