LA FONCTION CUBE E01

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

1) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3+2x$ est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Propriété n°1

$$f(-x) = 3\times(-x)^3+2\times(-x) = 3\times(-x^3)+2\times(-x) = -(3x^3+2x) = -f(x)$$

Mise en facteur de (-1)

Ainsi f est impaire.

2) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+1$ n'est pas impaire.

Pour contredire une propriété, un contre-exemple suffit. On choisit donc une valeur de x qui ne vérifie pas « $g(-x)=-g(x)$ ».

Par exemple avec $x=2$,

$g(-2)=(-2)^3+1=-7$, $g(2)=2^3+1=9$ et bien sûr $g(-2)=-7 \neq -9=-g(x)$

Ainsi g ne peut pas être impaire.

Remarques :

Si une propriété est vraie alors elle vraie pour tout x .

Donc si on veut montrer qu'elle vraie, on doit le faire pour tout x (On passe alors par le calcul littéral comme à la question 1)

Par contre, la négation de « pour tout x » est « il existe (au moins) un x »

Donc si on veut montrer que la propriété est fausse, il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle elle est mise en défaut. (On choisit alors un contre-exemple numérique, comme à la question 2).

Enfin, il est possible que certaines valeurs de x vérifient « $g(-x)=-g(x)$ » ($x=-1$ par exemple) .

Mais, comme on connaît au moins une valeur qui ne vérifie pas « $g(-x)=-g(x)$ » , la propriété ne peut être vraie.

3) Conjecturer les conditions sur les réels a, b, c et d pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ soit impaire.

En réfléchissant un peu, on se dit que b et d doivent être nuls. En effet $(-x)^2=x^2$ et pas $-x^2$ et d ne risque pas de changer signe (c'est une constante!)

Nous faisons la conjecture suivante :

Pour h soit impaire , il faut que $b=d=0$ (aucune condition par contre sur a et c)

Ce n'était pas demandé, mais nous allons prouver cette conjecture.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
h(-x)=-h(x) &\Leftrightarrow a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d = -ax^3-bx^2-cx-d \\
&\Leftrightarrow -ax^3+bx^2-cx+d = -ax^3-bx^2-cx-d \\
&\Leftrightarrow -ax^3+bx^2-cx+d-(-ax^3-bx^2-cx-d) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2bx^2+2d = 0 \\
&\Leftrightarrow bx^2+d = 0
\end{aligned}$$

Ici, il faut bien comprendre que l'on ne cherche pas une valeur de x , mais b et d pour que la dernière égalité soit vraie pour tout x .

Il est donc évident que « $b = 0$ et $d = 0$ » est obligatoire.

Pour vous en convaincre : geogebra