

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel (\mathbb{R}), positif ($+$), non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$)

- 1) Justifier que $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression : $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = k \times u(x)$

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) Simplifier l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f: x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) En utilisant les préliminaires, montrer que :
$$\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg: x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1) $f_1: x \mapsto 5$; $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4: x \mapsto 2\pi$; $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2) $g_1: x \mapsto x+2$; $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3) $g_3: x \mapsto 4x+5$; $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$;
- 4) $h_1: x \mapsto 3x^2-4$; $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5) $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6) $h_6: x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$; $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$; $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7) $h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel (\mathbb{R}), positif ($+$), non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$)

- 1) Justifier que $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ne s'annule pas.
- 2) Simplifier l'expression : $\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.
- 4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = k \times u(x)$

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) Simplifier l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f: x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $ab - cd = d(a - c) + a(b - d)$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

- 1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?
- 2) En utilisant les préliminaires, montrer que :
$$\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
- 3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg: x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

- 1) $f_1: x \mapsto 5$; $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4: x \mapsto 2\pi$; $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$
- 2) $g_1: x \mapsto x+2$; $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$
- 3) $g_3: x \mapsto 4x+5$; $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$;
- 4) $h_1: x \mapsto 3x^2-4$; $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$
- 5) $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$
- 6) $h_6: x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$; $h_7: x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$; $h_8: x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$
- 7) $h_9: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10}: x \mapsto (7-2x)^2$