

# LES VARIATIONS

## I Introduction (un peu longue, pas nécessaire mais pas inutile...)

On sait qualifier le comportement d'une fonction : sur un intervalle donné, elle peut être croissante, décroissante ou constante. Graphiquement, cela se traduit par « la courbe monte, descend ou stagne ». On s'aperçoit très vite que certaines courbes montent ou descendent « plus vite » que d'autres... On aimerait donc être plus précis...

On souhaite pouvoir quantifier le comportement d'une fonction, c'est à dire le caractériser par un nombre.

Pour les fonctions constantes, c'est facile, elles ne varient pas ! Donc on va décrire leur comportement par zéro.

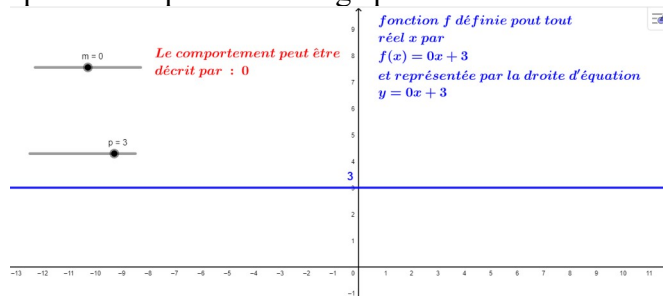
▪ Par exemple, à la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = 3$  on associera zéro pour la description de ses variations. (On pourrait remplacer 3 par n'importe quel nombre, le raisonnement resterait le même...)

▪ Passons aux fonctions linéaires : Soit la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = mx$  où  $m$  est un nombre réel.

Nous savons que cette fonction est représentée par une droite d'équation réduite  $y = mx$ . Le comportement de la droite est donné par son coefficient directeur  $m$ . On pourra donc associer à la fonction  $g$  le nombre  $m$  pour quantifier son comportement.

▪ Les fonctions affines ne sont pas non plus difficiles à décrire puisque l'ordonnée à l'origine n'agit pas sur le comportement de la courbe mais seulement sur sa position.

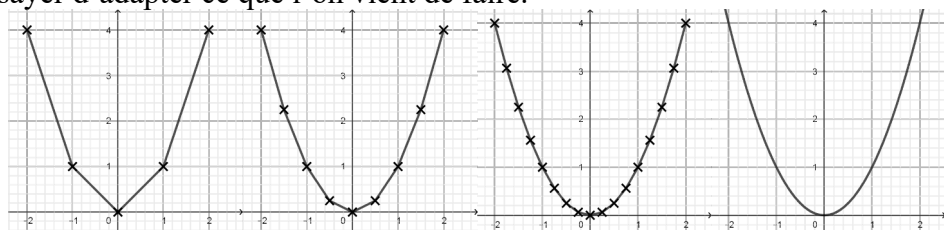
(Vous pouvez cliquer sur l'image pour faire varier  $m$  et  $p$  )



Ce qui nous a permis d'avancer jusque là, c'est que les fonctions dont nous avons parlées sont toutes représentées par des droites et qu'il est facile de quantifier le comportement d'une droite grâce à son coefficient directeur :  $m$

Les autres fonctions ne sont pas représentées par des droites et un seul nombre ne suffira plus à décrire leur comportement.

Notre stratégie consistera alors à travailler sur de (très très) petits morceaux de la courbe qui, dans les bons cas ressembleront à des morceaux de droite, et essayer d'adapter ce que l'on vient de faire.



Au plus les morceaux sont petits au mieux on approche la courbe...

On va passer du global au local...

# ***LES VARIATIONS***

## ***II Le point de vue local***

### ***II.1 Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs***

#### ***Définition n°1. Taux de variation / taux d'accroissement***

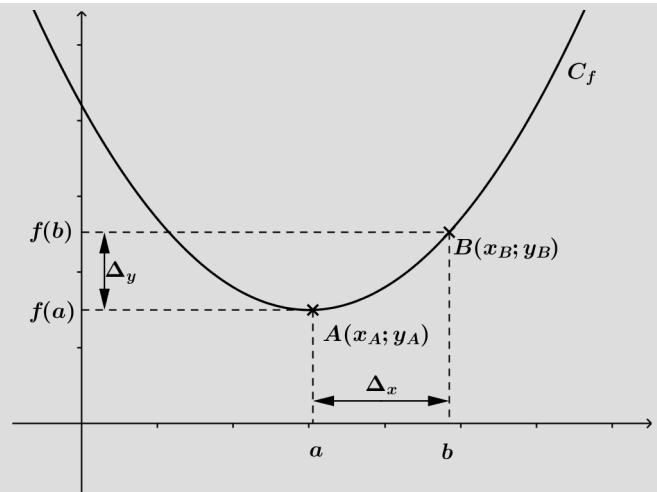
Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux nombres  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ . On appelle taux de variation entre  $a$  et  $b$  le quotient :

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Le taux d'accroissement partage la même définition mais est plus utilisé lorsque la différence entre  $a$  et  $b$  devient « très petite ».

## LES VARIATIONS

**Remarque n°1.**

Si on note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère et qu'on se donne  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points appartenant à  $C_f$  alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où  $\Delta_y = y_B - y_A$  et  $\Delta_x = x_B - x_A$  sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

# ***LES VARIATIONS E01***

## ***EXERCICE N°1      Taux de variation / taux d'accroissement***

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réels  $x$  par :  $f(x) = x^2 + 4x$

- 1) Calculer les images par  $f$  de  $2$  ;  $3$  ;  $-5$  et  $-4$  .
- 2) Calculer le taux d'accroissement entre les réels  $2$  et  $3$  .
- 3) Calculer le taux d'accroissement entre les réels  $-5$  et  $-4$  .

## ***LES VARIATIONS***

### ***Remarque n°2.***

Le taux de variation (ou d'accroissement) entre  $a$  et  $b$  est donc le coefficient directeur de la droite  $(AB)$  .

### ***Remarque n°3.***

Attention, à ne pas confondre taux de variation (ou d'accroissement) et taux d'évolution.

## ***LES VARIATIONS E01***

### ***EXERCICE N°2      Coefficient directeur***

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réels  $x$  par :  $f(x) = x^2 + 4x$

On note  $C_f$  sa courbe représentative et on donne les points suivants :

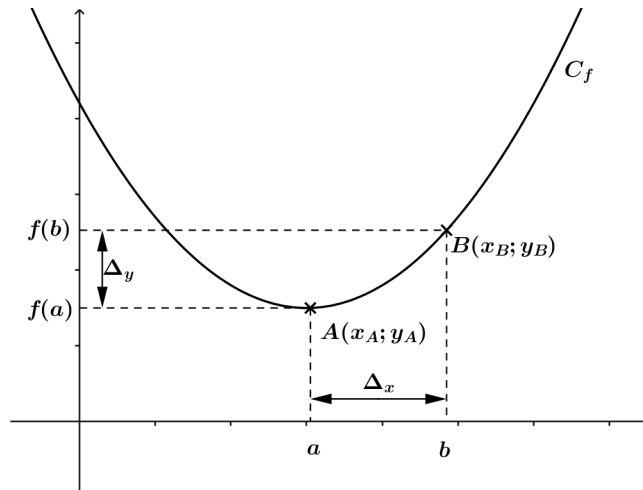
$A(2 ; 12)$  ;  $B(3 ; 21)$  ;  $C(-5 ; 5)$  et  $D(-4 ; 0)$

- 1) Vérifier que ces quatre points appartiennent à la courbe  $C_f$  .
- 2) Calculer le coefficient directeur de la droite  $(AB)$  .
- 3) Calculer le coefficient directeur de la droite  $(CD)$  .

# LES VARIATIONS

## Définition n°2.

La droite  $(AB)$  est une sécante à la courbe  $C_f$  passant par  $A$ .



[Géogebra](#) (en ligne)

([à télécharger](#))

## Remarque n°4.

Sur l'intervalle  $[a ; b]$  la courbe se comporte « un peu comme » la droite  $(AB)$  dont le comportement peut-être décrit par... le taux d'accroissement.

## Remarque n°5.

On aurait pu faire la même phrase avec  $B$  mais dans la suite on va « fixer »  $A$  et « faire varier »  $B$ .

# ***LES VARIATIONS***

## ***II.2 Nombre dérivé***

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points  $A$  et  $B$  sont proches l'un de l'autre.

### ***Définition n°3. (un peu hors programme)***

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in \overset{\circ}{I}$

On appelle nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on note si cela existe :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



## LES VARIATIONS

### Remarque n°6. Nombre dérivé d'une fonction $f$ en $a$ .

La notion de limite n'étant pas pour tout de suite, on se contentera de dire que :

$f'(a)$  est le nombre obtenu en faisant « tendre  $h$  vers 0 » dans le quotient  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  (Quand ce nombre existe...)

### Exemple n°1.

Soit  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 5 \end{cases}$ , déterminons le nombre dérivé de  $f$  en 3 .

Soit  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

On faisant « tendre  $h$  vers 0 », on obtient 6.

Donc  $f'(3)=6$  .

### Remarque n°7.

Mais d'où sort ce  $h$  ?

C'est la variation absolue des abscisses :  $h = \Delta_x = x_B - x_A$

On faisant tendre  $h$  vers zéro, on rapproche le point  $B$  du point  $A$  .

## LES VARIATIONS E01

### EXERCICE N°3 Nombre dérivé par le calcul

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réels  $x$  par :  $f(x) = x^2 + 4x$

1) Simplifier l'expression  $\frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2}$  .

(Si  $h = 3 - 2 = 1$  quelle question des exercices n°1 et n°2 retrouve-t-on ?)

2) Déterminer le nombre dérivé de  $f$  en 2.

3) Simplifier l'expression  $\frac{f(-5+h) - f(-5)}{(-5+h) - (-5)}$  .

(Si  $h = -4 - (-5) = 1$  quelle question des exercices n°1 et n°2 retrouve-t-on ?)

4) Calculer  $f'(-5)$  .

5) Déterminer le nombre dérivé de  $f$  en  $-2$  .

## ***LES VARIATIONS***

### ***III Tangente à la courbe $C_f$ au point $(a ; f(a))$***

Comme annoncé à la remarque n°5, nous allons faire « tendre  $B$  vers  $A$  » et notre sécante va devenir une tangente.

En notant  $B(a+h ; f(a+h))$ , on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre », quand  $h$  tend vers 0, vers  $f'(a)$ .

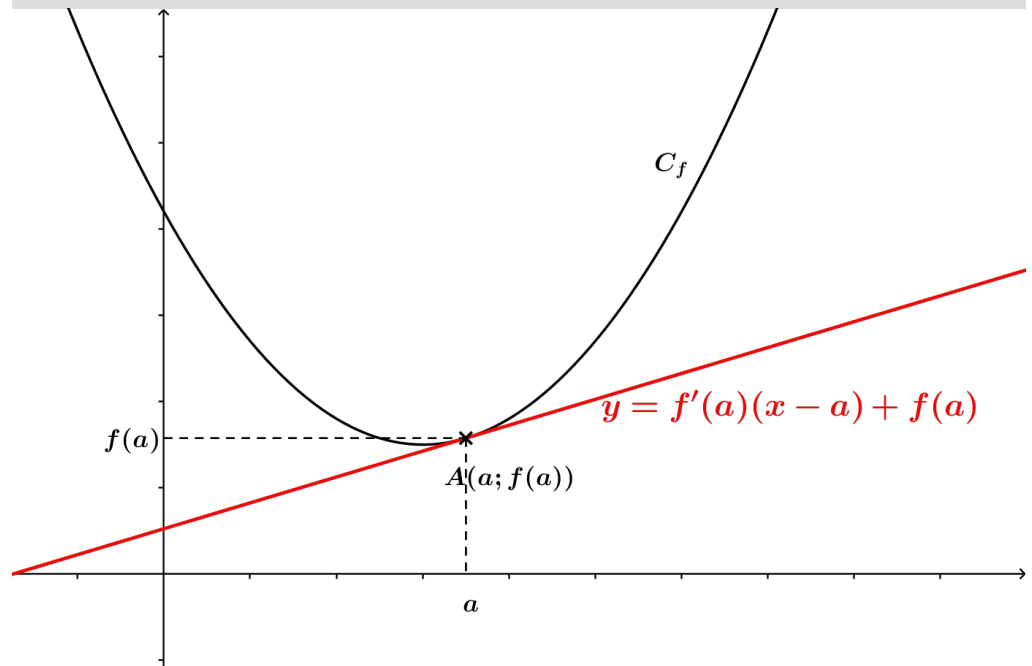
[Géogebra](#) (en ligne)

([à télécharger](#))

## LES VARIATIONS

### Définition n°4.

La tangente  $T$  à  $C_f$  au point  $A(a ; f(a))$  est la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .



## LES VARIATIONS

### Remarque n°8.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme  $y = mx + p$  avec  $m = f'(a)$  par définition.

Comme de plus,  $A(a ; f(a))$  appartient à  $C_f$ , on obtient que :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

d'où l'on déduit que :

$$p = f(a) - a \times f'(a)$$

Ainsi l'équation réduite de  $C_f$  peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + f(a) - a f'(a)$$

que l'on simplifie en :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  pour obtenir la propriété suivante.

### Propriété n°1. Équation de la tangente

Soit  $f$  une fonction au moins définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Si elle existe, la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## LES VARIATIONS E01

### EXERCICE N°4 Nombre dérivé par lecture graphique.

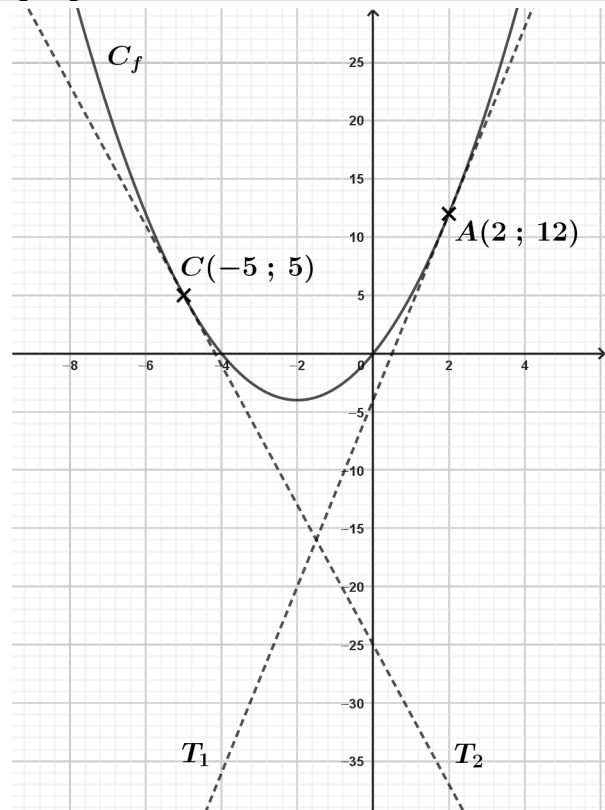
On considère la fonction  $f$  définie pour tout réels  $x$  par :  $f(x) = x^2 + 4x$

On note  $C_f$  sa courbe représentative et on donne les points suivants :

$A(2 ; 12)$  et  $C(-5 ; 5)$  .

Les droites  $T_1$  et  $T_2$  sont les tangentes à la courbe  $C_f$  respectivement en  $A$  et  $C$  .

- 1) Déterminer par lecture graphique le nombre dérivé de  $f$  en 2.
- 2) Déterminer par lecture graphique  $f'(-5)$  .
- 3) Déterminer par lecture graphique, l'équation réduite de  $T_2$  .



## ***LES VARIATIONS E01***

### ***EXERCICE N°5 Équation de la tangente***

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réels  $x$  par :  $f(x) = x^2 + 4x$  .

On note  $C_f$  sa courbe représentative et on donne les points suivants :

$A(2 ; 12)$  et  $C(-5 ; 5)$  .

1) Déterminer une équation de la tangente à la  $C_f$  au point  $A$  .

2) Déterminer une équation de la tangente à la  $C_f$  au point  $C$  .

*(hé oui  $C_f$  et  $C$  c'est pas la même chose ! On reste attentif !)*

## ***LES VARIATIONS***

### ***Remarque n°9.***

Bon, tout ça c'est bien gentil mais quelle galère ce calcul du nombre dérivé !  
Ce serait bien d'avoir une sorte de formule qui nous ferait gagner du temps...  
Cela tombe bien, c'est l'objet du prochain paragraphe. On revient au global.



# ***LES VARIATIONS***

## ***IV Le point de vue global***

### ***IV.1 Fonction dérivée d'une fonction***

***Définition n°5.***

$$f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad \text{où } I \subset \mathbb{R} \text{ est un intervalle.}$$

Si pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x)$  existe alors on dit que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intérieur de  $I$  et on appelle fonction dérivée de  $f$ , la fonction notée  $f'$  définie par

$$f' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

## ***LES VARIATIONS***

### ***Exemple n°2.***

Reprenons la fonction de l'exemple n°1,  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 5 \end{cases}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ . Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 5 - (x^2 + 5)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5 - x^2 - 5}{h} = 2x + h$$

En faisant « tendre  $h$  vers 0 », on obtient  $2x$ .

Ainsi  $f'(x) = 2x$ .

Ceci étant valable pour tout réel  $x$ , nous venons de démontrer que  $f$  est

dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée est :  $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

## ***LES VARIATIONS***

### ***IV.2 Quelques fonctions dérivées de référence***

***Remarque n°10.***

***Fonction dérivée d'une fonction constante***

Si  $f$  est une fonction constante sur  $I$ , autrement dit pour tout  $x \in I$

$f(x) = k$  avec  $k \in \mathbb{R}$  alors :

$f(x+h) - f(x) = k - k = 0$  pour tout  $h$ , on en déduit que  $f'(x) = 0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

(On le savait depuis l'introduction...)

## ***LES VARIATIONS***

***Remarque n°11.***

***Fonction dérivée de la fonction identité***

Si  $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $h \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

(On le savait aussi...)

## ***LES VARIATIONS***

***Propriété n°2.      Fonction dérivée de la fonction carré***

$$\text{Si } f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \quad \text{alors } f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$

***preuve :***

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$  .

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui « tend vers  $2x$  » quand «  $h$  tend vers 0 » .

## LES VARIATIONS

### Remarque n°12.

Cela confirme qu'on ne décrit plus le comportement à l'aide d'un seul nombre (puisque «  $2x$  » varie avec  $x$  ...).

Résumons cela dans un tableau et ajoutons-y quelques lignes.

### Propriété n°3. Fonctions dérivées des fonctions de références (admisses ici)

$k$  est un nombre réel,  $n$  est un entier naturel non nul.

$f(x)=$	$f$ est dérivable sur	$f'(x)=$
$k$	$\mathbb{R}$	$0$
$x$	$\mathbb{R}$	$1$
$x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^3$	$\mathbb{R}$	$3x^2$

### Remarque n°13.

On progresse mais que fait-on par exemple pour  $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 17$  ?

On lit le paragraphe suivant...

## LES VARIATIONS

### IV.3 Fonctions dérivées et opérations

Voici un second tableau tout aussi important à connaître que le précédent.

#### Propriété n°4. Fonctions dérivées et opérations (admises ici)

On se donne  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et on note  $u'$  et  $v'$  leur fonction dérivée.

$a$  et  $b$  sont des nombres réels

$f(x) =$	$f$ est dérivable sur	$f'(x) =$
$k \times u(x)$	$I$	$k \times u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$I$	$u'(x) + v'(x)$

#### Remarque n°14.

Il ne nous reste plus qu'à faire le lien entre les variations d'une fonction et sa fonction dérivée.

## LES VARIATIONS E02

### EXERCICE N°1 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer leur fonction dérivée.

1)  $f_1: x \mapsto 5$  ;  $f_2: x \mapsto \frac{15}{7}$  ;  $f_3: x \mapsto \sqrt{3}$  ;  $f_4: x \mapsto 2\pi$  ;  $f_5: x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

2)  $g_1: x \mapsto x+2$  ;  $g_2: x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

3)  $g_3: x \mapsto 4x+5$  ;  $g_4: x \mapsto \sqrt{7}x+8,5$  ;  $g_5: x \mapsto \frac{4}{3}x-8\sqrt{3}$  ;  $g_6: x \mapsto \frac{8}{7}-4x$

4)  $h_1: x \mapsto 3x^2-4$  ;  $h_2: x \mapsto 4x^2+5x-1$  ;  $h_3: x \mapsto -2,5x^2+6x+\sqrt{3}$

5)  $h_4: x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$  ;  $h_5: x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$

6)  $h_6: x \mapsto (3x+4)(2x-7)$  ;  $h_7: x \mapsto (7-2x)^2$





## ***LES VARIATIONS E02***

### ***EXERCICE N°2    Maîtriser le vocabulaire***

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = -6x^2 + 4x + 1$ . On note  $C_f$  sa courbe représentative.

- 1) Calculer  $f'(2)$ .
- 2) Déterminer le nombre dérivé de  $f$  en  $a = 3$ .
- 3) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 1.

## LES VARIATIONS E02

### EXERCICE N°3 Quelques tracés de tangente à une courbe

Le plan est muni du repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité: 1 cm).

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1 ; 3]$  dont on donne la courbe représentative  $C_f$  ci-contre.

1) On admet que la courbe  $C_f$  admet la tangente  $T_1$  au point  $O(0 ; 0)$  et que  $f'(0) = -2$ .

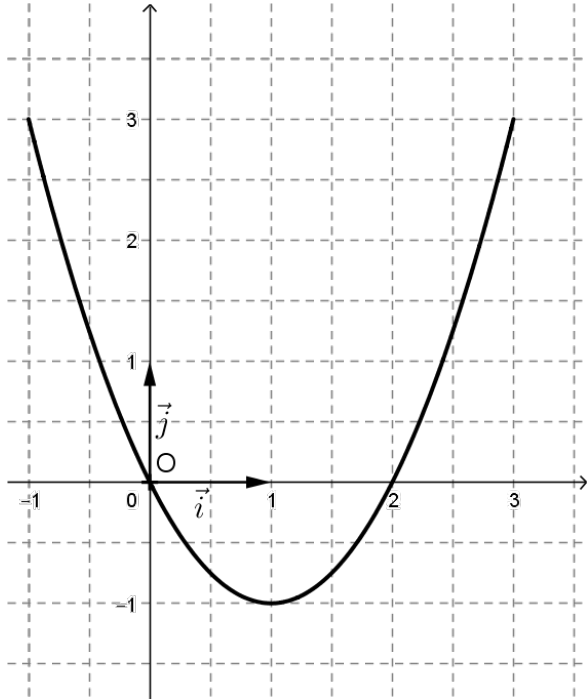
Construire la tangente  $T_1$ .

2) On admet que la courbe  $C_f$  admet la tangente  $T_2$  au point  $S(1 ; -1)$  et que  $f'(1) = 0$ .

Construire la tangente  $T_2$ .

3) On admet que la courbe  $C_f$  admet la tangente  $T_3$  au point  $A(2 ; 0)$  et que  $f'(2) = 2$ .

Construire la tangente  $T_3$ .



## ***LES VARIATIONS***

### ***IV.4 Variations d'une fonction et signe de la dérivée***

***Propriété n°5. (admise ici)***

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \geq 0$
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \leq 0$
- Si  $f$  est constante sur  $I$  alors, pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) = 0$

## ***LES VARIATIONS***

***Propriété n°6. (admise ici)***

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $I$
- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $I$
- Si pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$