# *LA DÉRIVATION* E02C

**EXERCICE N°1** ***Preuve pour la fonction dérivée de*** $x \mapsto \sqrt{x}$ ***(à retenir)***

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : $x$ est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ) , non nul ( $*$ )) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ )

**1)** Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{x+h} > 0$ et $\sqrt{x} > 0$

Donc $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} > 0$ *cqfd*

**2)** Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

$$\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction racine carrée.

Quand $h$ tend vers zéro, $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ , le nombre dérivé en $x$ de la fonction racine carrée est $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

**4)** À quoi servait la question 1) ?

Nous avons été amenés à diviser par l'expression $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ , il fallait donc s'assurer que cela était toujours possible.

**EXERCICE N°2** ***Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5***

Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

**1)** Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$ ?

La fonction $u$ est définie sur $I$.
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par $u$.

**2)** Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k\,u(x+h)-k\,u(x)}{h} = k\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction $f : x \mapsto k\times u(x)$.

Pour tout $x \in I$,

quand $h$ tend vers zéro, $k\times\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $\boxed{k\times u'(x)}$

## EXERCICE N°3 *Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)*

**Préliminaires**

Soit $a, b, c$ et $d$ quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$ .

$d(a-c)+a(b-d) = ad-cd+ab-ad = ab-cd$

**La preuve**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ .
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ , tel que $x+h \in I$ .

**1)** Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$ ?

Les fonctions $f$ *et* $g$ sont définies sur $I$ .
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par $f$ ou $g$ .

**2)** En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} &= \frac{\overbrace{f(x+h)}^{a}\overbrace{g(x+h)}^{b}-\overbrace{f(x)}^{c}\overbrace{g(x)}^{d}}{h}\\ &= \frac{\overbrace{g(x)}^{d}\overbrace{[f(x+h)-f(x)]}^{(a-c)}+\overbrace{f(x)}^{a}\overbrace{[g(x+h)-g(x)]}^{(b-d)}}{h}\\ &= g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$ .

Pour tout $x \in I$ , quand $h$ tend vers zéro,
$g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tend vers $\boxed{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}$ .

## EXERCICE N°4 *Déterminer la fonction dérivée d'une fonction*

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

**1)** $f_1 : x \mapsto 5$ ; $f_2 : x \mapsto \frac{15}{7}$ ; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$ ; $f_4 : x \mapsto 2\pi$ ; $f_5 : x \mapsto -3\pi+5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction nulle}}$ .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ,
$f_1'(x) = 0$ , $f_2'(x) = 0$ , $f_3'(x) = 0$ , $f_4'(x) = 0$ , $f_5'(x) = 0$ .

**2)** $g_1 : x \mapsto x+2$ ; $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction constante égale à } 1}$ .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ,
$g_1'(x) = 1$ , $g_2'(x) = 1$ .

**3)** $g_3 : x \mapsto 4x+5$ ; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8{,}5$ ;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante $k$ ($k=4$ pour $g_3$ et $k=\sqrt{7}$ pour $g_4$) et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à $k$ .

Ainsi : $\boxed{g_3' : x \mapsto 4}$ et $\boxed{g_4' : x \mapsto \sqrt{7}}$

**4)** $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$ ; $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$ ; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

▪ Pour $h_1$ :

$h_1$ est la forme $3\times u + v$

où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -4$

Or :

$u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

$v$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

$h_1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= 3u'(x)+v'(x) \\ &= 3\times 2x+0 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1'(x) = 6x}$$

▪ Pour $h_2$ :

$h_2$ est la forme $4\times u + 5\times v + w$

où $u : x \mapsto x^2$ , $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$

Or :

$u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

$v$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

$w$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

$h_2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= 4u'(x)+5\times v'(x)+w'(x) \\ &= 4\times 2x+5\times 1+0 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_2'(x) = 8x+5}$$

▪ Pour $h_3$ :

$h_3$ est la forme $-2{,}5\times u + 6\times v + w$

où $u : x \mapsto x^2$ , $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$

Or :

$u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

$v$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

$w$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

$h_3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= -2{,}5u'(x)+6\times v'(x)+w'(x) \\ &= -2{,}5\times 2x+6\times 1+0 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_3'(x) = -5x+6}$$

**5)** $h_4 : x \mapsto \frac{5}{2}x^3 - 4x^2 + 3x - 7\sqrt{11}$ ; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3 + \sqrt{5}x^2 - \frac{14}{3}x + 33$

▪ Pour $h_4$ :

$h_4$ est la forme $\frac{5}{2} \times u - 4 \times v + 3 \times w - t$

où $u : x \mapsto x^3$ , $v : x \mapsto x^2$ , $w : x \mapsto x$ et $t : x \mapsto -7\sqrt{11}$

Or :

$u, v, w$ et $t$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 3x^2$ , $v'(x) = 2x$ , $w'(x) = 1$ et $t'(x) = 0$

Donc

$h_4$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h_4'(x) = \frac{5}{2} \times u'(x) - 4 \times v'(x) + 3 \times w'(x) - t'(x)$$

$$= \frac{5}{2} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 - 0$$

$$\boxed{h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2 - 8x + 3}$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

▪ Pour $h_5$ :

$h_5$ est une somme de fonctions de référence définie et dérivables sur $\mathbb{R}$ , donc $h_5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_5'(x) = \pi \times 3x^2 + \sqrt{5} \times 2x - \frac{14}{3} \times 1 + 0$$

$$\boxed{h_5'(x) = 3\pi x^2 + 2\sqrt{5}\,x - \frac{14}{3}}$$

On fait bien attention à arrêter le radical avant le $x$

*$n$ est un entier naturel*

**6)** $h_6 : x \mapsto 3x^n + 2x^2 + \frac{3}{x}$ ; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x} + 8x^{15} - \frac{4}{x}$ ; $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x} + 7|x| - \frac{7}{x}$

▪ Pour $h_6$ :

$h_6$ est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ , donc $h_6$ est définie et dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :

$x : \mapsto x^n$ et $x : \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui contient $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ et $x : \mapsto \frac{1}{x}$ n'est définie et dérivable que sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ .

On ne garde que la partie commune pour tout le monde :

$]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[\ \cap\ \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

$\forall x \in ]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$,

$$h_6'(x) = 3 \times nx^{n-1} + 2 \times 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_6'(x) = 3nx^{n-1} + 4x - \frac{3}{x^2}}$$

▪ Pour $h_7$ :

$h_7$ est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ , donc $h_7$ est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et :

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$,

$$h_7'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times 15x^{14} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_7'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}}$$

▪ Pour $h_8$ :

$h_8$ est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ , donc $h_8$ est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et :

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$,

$$h_8'(x) = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} + 7\times1 - 7\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_8'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7}$$

On a « mis la constante à la fin »

**7)** $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$ ; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour $h_9$ :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2-21x+8x-28 \\ &= 6x^2-13x-28 \end{aligned}$$

Ainsi, $h_9$ est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ , donc $h_9$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_9'(x) = 6\times2x-13\times1-0$$

$$\boxed{h_9'(x) = 12x-13}$$

▪ Pour $h_{10}$ :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2-28x+49 \end{aligned}$$

Ainsi, $h_9$ est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ , donc $h_9$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_{10}'(x) = 4\times2x-28\times1-0$$

$$\boxed{h_{10}'(x) = 4x-28}$$

# *LA DÉRIVATION E02*

**EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : $x$ est un nombre réel ( $\mathbb{R}$ ), positif ( $+$ ) , non nul ( $*$ )) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ )

**1)** Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

**2)** Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}$

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction racine carrée.

**4)** À quoi servait la question 1) ?

**EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5**

Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ . Soit $k \in \mathbb{R}$ , soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$ .

**1)** Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$ ?

**2)** Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$ .

**EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)**

**Préliminaires**

Soit $a, b, c$ et $d$ quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$ .

**La preuve**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ .
Soit $h \in \mathbb{R}$ , tel que $x+h \in I$ .

**1)** Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$ ?

**2)** En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

**3)** En déduire le nombre dérivé en $x$ de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$ .

**EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction**

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

**1)** $f_1 : x \mapsto 5$ ; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$ ; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$ ; $f_4 : x \mapsto 2\pi$ ; $f_5 : x \mapsto -3\pi+5\sqrt{3}$

**2)** $g_1 : x \mapsto x+2$ ; $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

**3)** $g_3 : x \mapsto 4x+5$ ; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8{,}5$ ;

**4)** $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$ ; $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$ ; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

**5)** $h_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$ ; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\dfrac{14}{3}x+33$

*n* est un entier naturel

**6)** $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\dfrac{3}{x}$ ; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\dfrac{4}{x}$ ; $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\dfrac{7}{x}$

**7)** $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$ ; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$