

# CROISSANCE EXPONENTIELLE

## I Les suites géométriques

### Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions et propriétés suivantes seront écrites pour le cas où  $u_0 = 0$ . Nous les adapterons selon les besoins des activités.

### Définition n°1. Suite géométrique

Une **suite géométrique** est une suite telle que :

Il existe un nombre réel  $q$  tel que :

- Pour tout entier naturel  $n$ , on peut écrire  $u(n+1) = u(n) \times q$
- $q$  est appelé la **raison de la suite**.
- l'indice  $n$  est appelé le **rang du terme**  $u(n)$

### Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ( $u(n+1)$ ), il suffit de multiplier par  $q$  le terme actuel ( $u(n)$ ) ».

### Exemple n°1.

Soit la suite géométrique  $v$  de terme initial  $v(0) = 4,5$  et de raison  $r = 2$ . Les quatre premiers de  $v$  sont :  
 $v(0) = 4,5$ ,  $v(1) = 9$ ,  $v(2) = 18$  et  $v(3) = 36$ .

### Propriété n°1. Exprimer $u(n)$ en fonction de $n$

Une suite  $(u(n))$  est géométrique de raison  $q$  si et seulement si :

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u(n) = u(0) \times q^n$

### Remarque n°3.

Si le terme initial est  $u(1)$  alors  $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$

### Exemple n°2.

Dans l'exemple n°1, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v(n) = 4,5 \times 2^n$ .

## II Et la croissance exponentielle dans tout ça ?

### Propriété n°2. Pour la croissance

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$  :

- $u$  est strictement croissante si et seulement si  $q > 1$ ,
- $u$  est strictement décroissante si et seulement si  $0 < q < 1$  et
- $u$  est constante si et seulement si  $q = 0$  ou  $q = 1$ .

### Remarque n°4.

Hé mais on a oublié le cas  $q < 0$  !

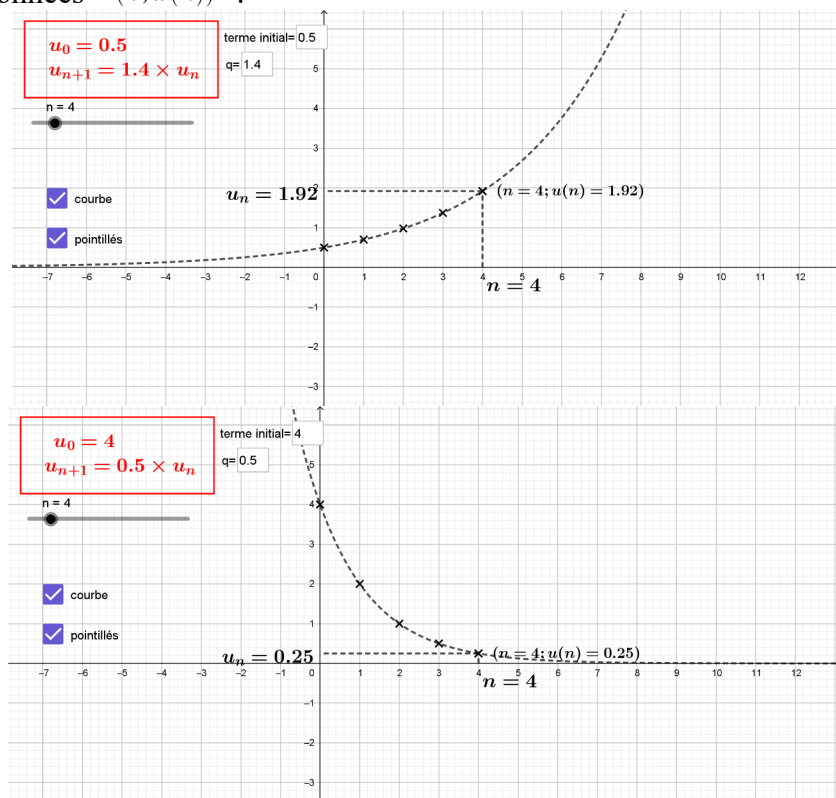
C'est juste qu'il n'est pas au programme. Pour les curieux : la suite est alors alternée (si un terme est positif alors son suivant est négatif et vice et versa).

### Exemple n°3.

La suite géométrique  $w$  de raison  $r = 0,5$  est strictement décroissante.

**Remarque n°5. Représentation graphique**

Pour représenter la suite  $(u(n))$  on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées  $(n, u(n))$ .



Les pointillés symbolisent la courbe à laquelle appartiennent les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

**Remarque n°6. Pour le côté exponentielle**

La courbe en pointillés est la représentation graphique d'une fonction exponentielle. Nous allons préciser cela tout de suite...

### III Les fonctions exponentielles

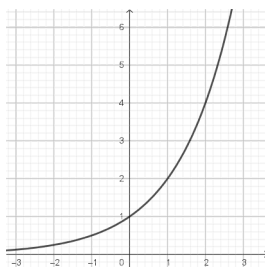
**Définition n°2. Fonction exponentielle de base a**

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif.

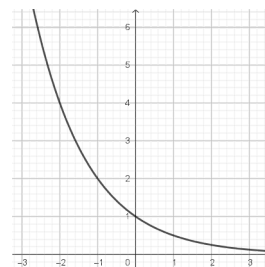
On appelle fonction exponentielle de base  $a$ , la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :  $f(x) = a^x$

**Exemple n°4.**

$$f(x) = 2^x \quad (a = 2 > 1)$$



$$f(x) = 0,5^x \quad (a = 0,5 \in ]0;1[)$$


**Remarque n°7.**

Si  $x$  est un nombre entier alors  $a^x$  correspond à la puissance  $x^{\text{ième}}$  de  $a$ .

**Remarque n°8.**

Comme pour les suites arithmétiques, on utilisera les suites géométriques pour modéliser des phénomènes à croissance exponentielle discrète et les fonctions exponentielles pour les phénomènes continus. Les fonctions exponentielles sont en quelque sorte le prolongement des suites géométriques.

## IV Les outils à connaître

### Propriété n°3. Règles de calculs

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs et  $x$  et  $y$  deux nombres réels :

$$\boxed{a^0 = 1} ; \quad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} ; \quad \boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}} ; \quad \boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} ;$$

$$\boxed{(a^x)^y = a^{x \times y}} ; \quad \boxed{a^x \times b^x = (a \times b)^x} \text{ et } \boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x} .$$

### Exemple n°5.

- $10,45^0 = 1$  ; ▪  $5,7^{-3,1} = \frac{1}{5,7^{3,1}}$  ;
- $1,2^{3,4} \times 1,2^{-5,6} = 1,2^{3,4+(-5,6)} = 1,2^{-2,2}$  ;
- $\frac{1,2^{3,4}}{1,2^{-5,6}} = 1,2^{3,4-(-5,6)} = 1,2^9$  ;
- $(5,8^{3,1})^{-2,7} = 5,8^{3,1 \times (-2,7)} = 5,8^{-8,37}$  et
- $4,1^{7,1} \times 3,2^{7,1} = (4,1 \times 3,2)^{7,1} = 15,17^{7,1}$

### Propriété n°4. Taux d'évolution et Coefficient Multiplicateur

Soit  $t$  un taux d'évolution et  $CM$  le coefficient multiplicateur correspondant, on a alors la relation suivante :

$$\boxed{CM = 1+t}$$

### Exemple n°6.

- Pour une hausse de 32 %, on a  $t = 0,32$  et  $CM = 1,32$
- Pour une baisse de 32 %, on a  $t = -0,32$  et  $CM = 0,68$

### Remarque n°9. Taux d'évolution global $t_g$ : Attention

On rappelle que les taux d'évolution ne s'additionnent pas.

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % correspondent à une baisse de 4 % .

$$(t_1=0,2 \rightarrow CM_1=1,2 \text{ , } t_2=-0,2 \rightarrow CM_2=0,8 \text{ ,}$$

$$CM_g=1,2 \times 0,8=0,96 \rightarrow t_g=-0,04 \text{ soit une baisse de 4\%)}$$

### Propriété n°5. Racine $n^{\text{ième}}$

Soit  $c$  un nombre réel positif ou nul, l'équation  $x^n = c$  admet une unique solution réelle :  $c^{\frac{1}{n}}$  .

### Exemple n°7.

$$x^5 = 2,5 \text{ admet pour unique solution réelle : } 2,5^{\frac{1}{5}} .$$

### Propriété n°6. Le taux moyen

Si  $CM_g$  est un coefficient multiplicateur global obtenu à partir de  $n$  coefficients multiplicateurs alors le taux moyen  $t_m$  s'obtient avec la

formule :  $\boxed{t_m = CM_g^{\frac{1}{n}} - 1}$  .

**Méthode n°1.      Calculer un taux moyen à l'aide du Coefficient Multiplicateur moyen.***Énoncé*

On applique successivement une hausse de 11 %, une baisse de 9 % et enfin une hausse de 10 %. Déterminer le taux d'évolution moyen.

« Au brouillon »

Posons  $t_1 = 0,11$  ,  $t_2 = -0,09$  ,  $t_3 = 0,1$  et les coefficients multiplicateurs correspondants :  $CM_1 = 1,11$  ,  $CM_2 = 0,91$  ,  $CM_3 = 1,1$  .

On calcule le coefficient multiplicateur global :  $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3$   
 $CM_g = 1,11111$  .

On calcule le coefficient multiplication moyen  $CM_m$  en résolvant dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $CM_m^3 = CM_g$  ce qui nous donne  $CM_m = CM_g^{\frac{1}{3}}$  soit  
 $CM_m = 1,11111^{\frac{1}{3}}$  .

et enfin on calcule le taux moyen  $t_m$  :  $t_m = CM_m - 1 = 1,11111^{\frac{1}{3}} - 1$

Bien sûr, sur la copie on résume un peu...

*Réponse*

Notons  $t_m$  le taux moyen cherché.

$$t_m = (1,11 \times 0,91 \times 1,1)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0,0357$$

Soit une 

hausse moyenne d'environ 3,57 %
---------------------------------

 .