LA DÉRIVATION E05C

EXERCICE N°1 ***Méthode : dérivée et tableau de variation***

Pour chaque fonction f, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné, puis dresser le tableau de signes de f' et en déduire son tableau de variations sur I.

1) $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ $\qquad I =]-4\ ;\ 4[$

▪ f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur I donc f l'est aussi et pour tout $x \in I$,

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$

▪ On remarque que -1 et 2 sont des racines évidentes, on peut donc écrire :

$f'(x) = 3(x+1)(x-2)$

et dresser le tableau de signes suivant :

x	-4		-1		2		4
3		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	-60	↗	$7{,}5$	↘	6	↗	20

2) $f : x \mapsto 9x - 5 + \frac{16}{x-2}$ $\qquad I =]3\ ;\ 6[$

▪ f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur I donc f l'est aussi et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 9 - \frac{16}{(x-2)^2} = \frac{9(x-2)^2 - 16}{(x-2)^2} = \frac{[3(x-2)-4][3(x-2)+4]}{(x-2)^2} = \frac{(3x-10)(3x-2)}{(x-2)^2}$$

On cherche toujours à avoir une forme factorisée.

x	3		$\frac{10}{3}$		6
$3x-10$		$-$	$\vert$	$+$	
$3x-2$		$+$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	38	↘	37	↗	53

EXERCICE N°2 Étude de fonction avec une fonction auxiliaire

On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{3}x^3 - x + 2}$ sur $I =]-2\ ;\ 2[$.

Partie n°1 : f est définie et dérivable sur I .

On pose $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

1) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur I .

g est une somme de fonctions de références, définies et dérivables sur I donc elle l'est aussi.

2) Étudier le signe de g' sur I .

Commençons par déterminer g' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

x	-2		-1		1		2
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Dresser alors le tableau de variations de g sur I .

x	-2		-1		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$

4) En déduire le signe de g sur I à l'aide de ses extrema sur I .

D'après son tableau de variation , g possède un minimum sur I qui est $\frac{4}{3}$, ce qui signifie que :

$\forall x \in I\ ,\ g(x) \geqslant \frac{4}{3} > 0$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement positive sur } I}$.

5) Justifier alors que f est bien définie et dérivable sur I .

Pour tout $x \in I$,

$f(x) = \sqrt{g(x)}$

La fonction racine carrée étant définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, pour que f soit dérivable sur I , il faut et il suffit que :

$\forall x \in I\ ,\ g(x) \in]0\ ;\ +\infty[$.

C'est bien le cas d'après la question 4).

Donc f est bien définie et dérivable sur I .

Partie n°2 : étude de f sur I .

6) Déterminer f' , la fonction dérivée de la fonction f sur I .

Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^3-x+2}}}$$

7) Étudier le signe de f' sur I .

x	-2		-1		1		2
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\sqrt{\frac{1}{3}x^3-x+2}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

8) Dresser alors le tableau de variations de f sur I .

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$