PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°1 ***Objectif Spé (Le corrigé)***

On donne x la mesure d'un angle aigu. Démontrer les égalités suivantes :

1) $(\cos(x)+\sin(x))^2=1+2\sin(x)\cos(x)$

2) $(\cos(x))^2-(\sin(x))^2 = 1-2(\sin(x))^2$

3) $1+(\tan(x))^2 = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

4) $1+\dfrac{1}{(\tan(x))^2} = \dfrac{1}{(\sin(x))^2}$

Remarque n°1.

Très souvent, vous simplifierez ces écritures de la façon suivante :

1) $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x\cos x$

2) $\cos^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$

3) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $1+\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Pour démontrer une égalité, on choisit un membre de départ, et, à l'aide du calcul littéral et des propriétés à notre disposition, on essaie d'aboutir à l'autre membre.

1)

$$\begin{aligned}(\underbrace{\cos(x)}_{a}+\underbrace{\sin(x)}_{b})^2 &= \underbrace{(\cos(x))^2}_{a^2}+\underbrace{2\cos(x)\sin(x)}_{2ab}+\underbrace{(\sin(x))^2}_{b^2} \quad \text{(identité remarquable)}\\ &= \underbrace{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}_{=1\ \text{(propriété 2)}}+2\cos(x)\sin(x)\\ &= 1+2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(\cos(x))^2-(\sin(x))^2 &= (\cos(x))^2+0-(\sin(x))^2 \quad \text{astuce classique : on ajoute 0}\\ &= (\cos(x))^2+\underbrace{(\sin(x))^2-(\sin(x))^2}_{=0}-(\sin(x))^2 \quad \text{mais sous une forme utile}\\ &= \underbrace{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}_{=1}-\underbrace{(\sin(x))^2-(\sin(x))^2}_{=2(\sin(x))^2}\\ &= 1-2(\sin(x))^2\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}1+(\tan(x))^2 &= \\ &= 1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2\\ &= 1+\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\\ &= \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2}\end{aligned}$$

4)

$$1+\frac{1}{(\tan(x))^2} = 1+\frac{1}{\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} = 1+\frac{1}{\dfrac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}} = 1+\frac{(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{(\sin(x))^2+(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{(\sin(x))^2}$$

On aurait pu partir du membre de droite à chaque fois...

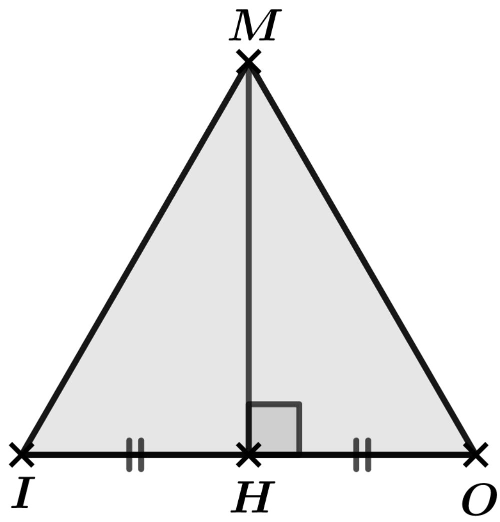
PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°2 Valeurs remarquables part 1 (Le corrigé)

On considère un triangle OMH rectangle en H tel que $\widehat{MOH}=60°$ et $OH=\dfrac{1}{2}$.
Soit I le symétrique de O par rapport à H .

1) Montrer que le triangle OMI est équilatéral.

Dans le triangle OMI .
▪ (MH) est la médiane issue de M .
▪ OMI est équilatéral, donc c'est aussi la médiatrice de $[IO]$.
Ainsi (MH) est un axe de symétrie de ce triangle et le triangle MHO est rectangle en H .



→ Nous aurons aussi besoin de MH . Nous déterminons cette longueur ici afin de faciliter la lecture des questions 2 et 3. (mais vous pouviez le faire directement dans les questions précitées)

Dans le triangle MOH ,rectangle en H.
Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire :
$$MO^2=HM^2+HO^2$$
On en déduit que :
$$HM^2=MO^2-HO^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$
Et comme HM est une longueur : $HM=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire la valeur exacte de $\cos(60°)$ puis de $\sin(60°)$.

$$\cos(60°)=\cos(\widehat{MOH})=\frac{HO}{OM}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(60°)=\sin(\widehat{MOH})=\frac{HM}{MO}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) En déduire la valeur exacte de $\cos(30°)$ puis de $\sin(30°)$.

$$\cos(30°)=\cos(\widehat{HMO})=\frac{HM}{MO}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

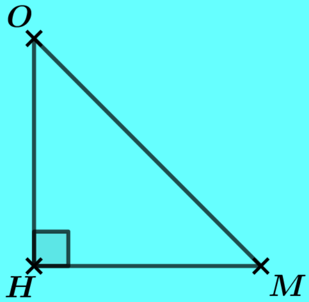
$$\sin(30°)=\sin(\widehat{HMO})=\frac{HO}{OM}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

Pour la question 3), on pouvait aussi remarquer que le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de son angle complémentaire...

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E06

EXERCICE N°3 ***Valeurs remarquables part 2 (Le corrigé)***

On considère un triangle OMH rectangle en H tel que $\widehat{MOH} = 45°$ et $OM = 1$.



$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = 1 + 1 = 2$$
$$donc$$
$$OM = \sqrt{2}$$

1) Montrer que le triangle OMH est également isocèle puis en déduire la valeur exacte de la longueur OH .

On considère le triangle OMH .
Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180°.
Donc $\widehat{OMH} = 180 - 90 - 45 = 45°$
Le triangle OMH ayant deux angles de même mesure est bien isocèle.

2) En déduire la valeur exacte de $\cos(45°)$ puis de $\sin(45°)$.

$$\cos(45°) = \cos(\widehat{HMO}) = \frac{HM}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(45°) = \sin(\widehat{HMO}) = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE N°4 ***Tableau des valeurs remarquables de la trigonométrie. (Le corrigé)***

En vous aidant des deux exercices précédents compléter le tableau et l'apprendre par cœur !

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	« infini »