EXERCICE N°3 *Étudier les variations d'une fonction (niveau 3)*

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ avec $D = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

2) $f : x \mapsto (-2x+3)e^{2x+4}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{6e^x}{x+5}$ avec $D = \mathbb{R}\backslash\{-5\} =]-\infty\ ;\ -5[\ \cup\ ]-5\ ;\ +\infty[$

1)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto e^x-1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = e^x+1$ et $u'(x) = e^x$

$v(x) = e^x-1$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$$f'(x) = \frac{e^x\times(e^x-1)-e^x\times(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1-(e^x+1))}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

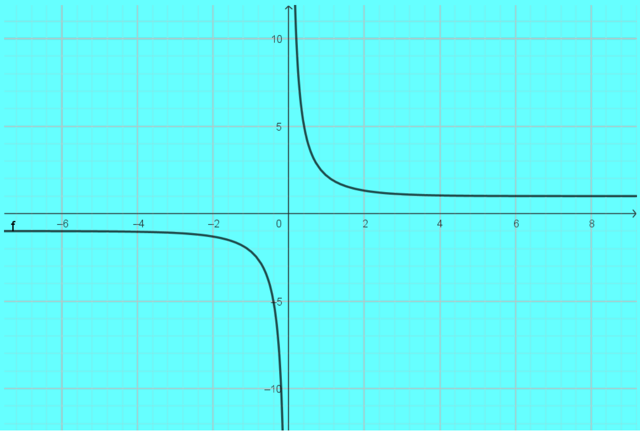
▫ -2 est un nombre négatif

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

▫ $(e^x-1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-2	$-$		$-$
e^x	$+$		$+$
$(e^x-1)^2$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ 1

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi qu'en 0^- et 0^+ sont justes « intuitives ».



2)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = u(x) \times v(x)$

avec

$u(x) = -2x+3$ et $u'(x) = -2$

$v(x) = e^{2x+4}$ et $v'(x) = 2e^{2x+4}$

d'où

$f'(x) = -2 \times e^{2x+4} + (-2x+3) \times 2e^{2x+4} = (-4x+4)e^{2x+4}$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

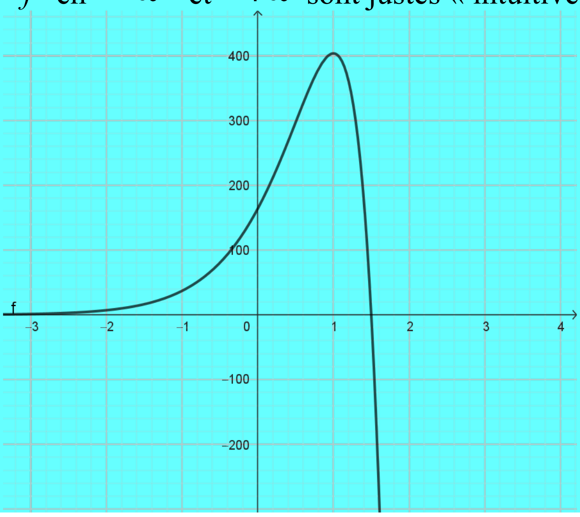
▫ $-4x+4 > 0 \Leftrightarrow -4x > -4 \Leftrightarrow x < 1$

▫ $e^{2x+4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^{2x+4}		$+$	|	$+$	
$-4x+4$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^6	↘	$-\infty$

$f(1) = (-2 \times 1+3)e^{2 \times 1+4} = e^6$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$, de plus $x \mapsto x-5$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5\}$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = 6e^x$ et $u'(x) = 6e^x$

$v(x) = x-5$ et $v'(x) = 1$

d'où

$$f'(x) = \frac{6e^x \times (x-5) - 6e^x \times 1}{(x-5)^2} = \frac{(x-5-1) \times 6e^x}{(x-5)^2} = \frac{6(x-6)e^x}{(x-5)^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ 6 est un nombre positif

▫ $x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$

▫ $e^x > 0$ pour tout $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

▫ $(x-5)^2 > 0$ pour tout $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
6		$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(x-5)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$6e^6$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(5) = \frac{6e^6}{6-5} = 6e^6$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».