PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Remarque n°1.

Seconde Première

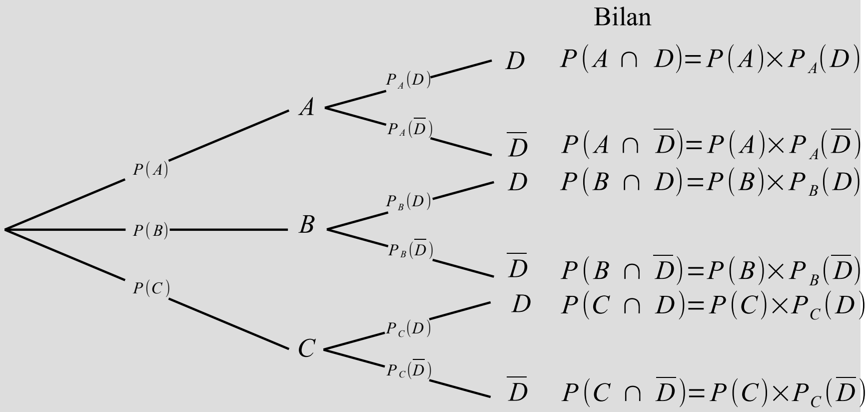
Il peut-être utile de relire ce qui a été fait en seconde puis en première sur les probabilités.
(Les Qrcodes sont également cliquables)

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

I Les arbres de probabilités

Définition n°1. ***Arbre de probabilités***

Un arbre de probabilités est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Remarque n°2.

Les événements reliés à un même nœud sont incompatibles deux à deux.

Définition n°2. ***Branche***

Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène.

Exemple n°1.

Ci-dessus, sur la branche de A à D, on place $P_A(D)$, la probabilité conditionnelle de D sachant A ;

Définition n°3. ***Nœud***

Un nœud est un croisement entre plusieurs branches.

Définition n°4. ***Chemin***

Un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.

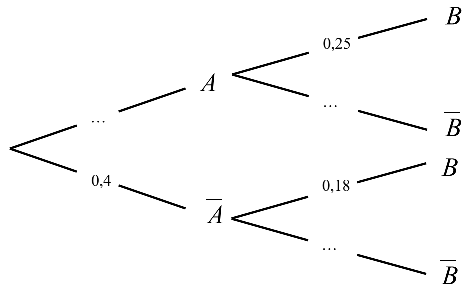
Définition n°5. ***Événement bilan***

L'événement bilan, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°1 Utiliser un arbre

On donne l'arbre de probabilités ci-contre.



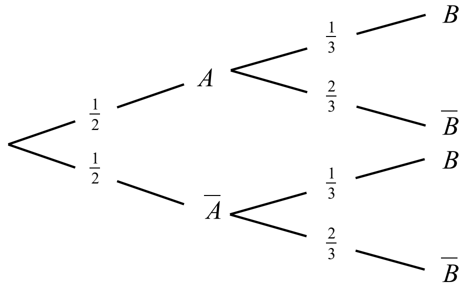
1) Reproduire et compléter cet arbre.
2) Lire $P(A)$.
3) Déterminer $P(A \cap B)$.
4) On donne $P(B) = 0{,}222$. En déduire $P_B(A)$ arrondie au millième.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°2

1) À partir de l'arbre ci-contre, calculer $P(A)\times P_A(B)$ et $P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$.

2) En déduire $P(B)$



PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°3 Construire un arbre

Un panier contient 45 % de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons,70 % proviennent de France. Parmi les kiwis, 80 % ne proviennent pas de France. On note les événements :

C : « le fruit est un citron ».

K : « le fruit est un kiwi ».

F : « le fruit provient de France ».

1) Décrire la situation par un arbre de probabilités.

2) Traduire l'événement « F sachant K» et donner sa probabilité.

3) En déduire $P(K \cap F)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°4

A et B sont deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}4$, $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7$.

1) Construire un arbre de probabilités à partir des données précédentes.

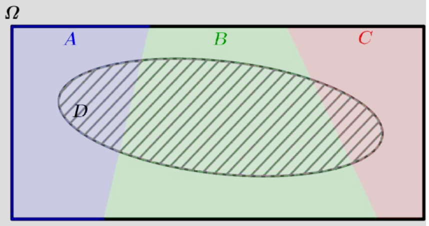
2) Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.

3) En déduire $P(B)$.

Probabilités conditionnelles (la suite)

Définition n°6. ***Partition de l'univers***

Dans ce diagramme de Venn qui correspond à l'arbre de la définition n°1.
Les événements A , B et C forment une partition de l'univers Ω :
Leur réunion égale l'univers et ils sont incompatibles deux à deux (ils sont disjoints).



On en déduit la propriété suivante.

Propriété n°1.

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

Exemple n°2.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

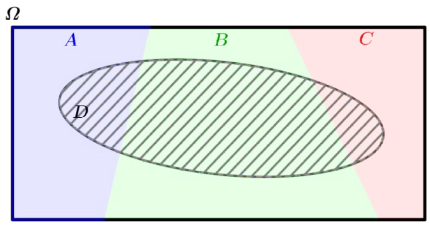
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Remarque n°3.

$D \cap A$ et $\overline{D} \cap A$ forment une partition de A et donc :

$$P_A(D) + P_A(\overline{D}) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} + \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$



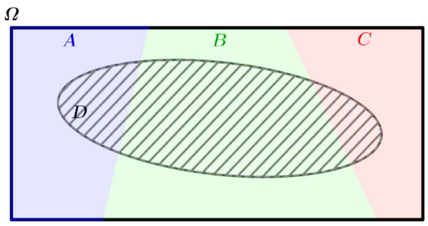
Probabilités conditionnelles (la suite)

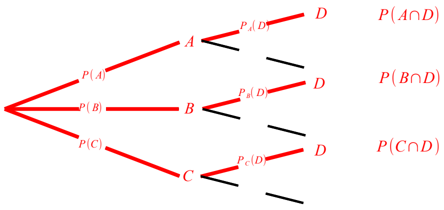
Propriété n°2. ***Formule des probabilités totales***

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement dans un arbre de probabilités.

preuve : ***(ou plutôt une explication)***

Le diagramme de Venn nous permet de comprendre que $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$. Comme ces événements sont incompatibles : $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$





PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°5 Formule des probabilités totales

83 % des élèves d'une classe ont choisi espagnol LV2, les autres ont choisi allemand LV2.

64 % des élèves ayant choisi allemand LV2 sont des garçons contre 50 % ayant choisi espagnol LV2.

On choisit un élève au hasard.

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

EXERCICE N°6

A et B sont deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}5$; $P(\overline{A}) = 0{,}5$; $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$

Calculer $P(B)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E01

EXERCICE N°7

Dans un club de football, 80% des licenciés sont des garçons, le reste des filles. Chez les hommes, 75 % sont majeurs. Chez les filles, 25 % sont majeures. On choisit un licencié au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il soit majeur ?

Probabilités conditionnelles (la suite)

II Indépendance de deux événements

Définition n°7.

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Propriété n°3. ***L'indépendance de deux événements est symétrique***

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$

preuve :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Propriété n°4. ***Une autre façon de voir l'indépendance de deux événements***

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

preuve :

Il suffit de lire la preuve de la propriété n°3…

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE)

Remarque n°4.

On a $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ et $P_A(A) = 1$
Si A et B sont disjoints alors $P_A(B) = 0$

Remarque n°5. ***Attention***

Les mots « disjoint » et « indépendant » ne signifient pas du tout la même chose :
« disjoints » = « incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$
(leur intersestion est vide)

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°1 Démontrer l'indépendance

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note

D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?

2) Que dire des événements D et N ?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°2

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0{,}3$, e $P_B(A) = 0{,}7$ t $P_A(B)=0{,}3$

.

A et B sont-ils indépendants?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°3

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}5$.

Calculer $P(A \cap B)$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E02

EXERCICE N°4

Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ et $P(A) = \frac{2}{3}$

Quelle valeur doit prendre $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

Probabilités conditionnelles (la suite) E02

EXERCICE N°5

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

1) Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

EXERCICE N°6

On lance deux pièces de monnaie successivement.
La première pièce est équilibrée.
La deuxième ne l'est pas et vérifie les conditions suivantes :
- Si la première pièce donne pile, la deuxième pièce donne pile trois fois sur quatre.
- Si la première pièce donne face, la deuxième pièce donne face cinq fois sur six.

1) Donner la probabilité d'avoir pile au 1er lancer.
2) Calculer la probabilité d'avoir pile au 2e lancer.
3) Calculer la probabilité d'avoir deux fois pile, et en déduire que les événements : « obtenir pile au 1er lancer » et « obtenir pile au 2^{e} lancer » ne sont pas indépendants.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°1

On lance deux fois et successivement un dé équilibré.

1) On note :

A l'événement « le 1er dé donne un chiffre pair » et

S l'événement « la somme des chiffres des deux dés vaut 5 ».

Les événements A et S sont-ils indépendants ?

2) On note :

B l'événement « le 1er dé donne le chiffe 6 » et

M l'événement « la multiplication des chiffres des dés vaut 12 ».

Les événements B et M sont-ils indépendants ?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°2

Pour obtenir son diplôme, un stagiaire doit passer trois épreuves successives. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve n°1 est de 0,97, celle de l'épreuve n°2 est de 0,95, et l'épreuve n°3 est de 0,9.
On suppose que les réussites aux épreuves sont indépendantes les unes des autres.

1) Quelle est la probabilité que le stagiaire réussisse les trois épreuves ?
2) Quelle est la probabilité qu'il rate les trois ?
3) Quelle est la probabilité qu'il n'en réussisse qu'une seule sur les trois ?

EXERCICE N°3

Un pratiquant de tir à l'arc réalise trois tirs.

La probabilité qu'il tire dans la cible au premier tir est $\dfrac{1}{3}$.

La probabilité des ses tirs suivants est deux fois plus petite que celle du tir précédent.
On suppose que les issues de chaque tir (atteindre ou manquer la cible) sont indépendantes les unes des autres.

1) Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible à chacun de ses tirs ?
2) Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible seulement à ses deux premiers tirs ?
3) Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible uniquement à son dernier tir ?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E03

EXERCICE N°4

On dit que les événements A , B et C sont **mutuellement indépendants** si l'on a toutes les égalités suivantes :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} \qquad \boxed{P(A \cap C) = P(A) \times P(C)}$$

$$\boxed{P(B \cap C) = P(B) \times P(C)} \qquad \boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times p(B) \times P(C)}$$

1) Si A , B et C sont mutuellement indépendants, est-il vrai que A , B et C sont deux à deux indépendants, c'est-à-dire que A et B , A et C et B et C sont indépendants ?

2) On s'intéresse maintenant à la question suivante: si A , B et C sont deux à deux indépendants, est-il vrai que A , B et C sont mutuellement indépendants ?

On examine la situation suivante : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note :

A l'événement « obtenir pile au 1er lancer»,
B l'événement « obtenir face au 2^{e} lancer » et
C l'événement « obtenir la même chose aux 2 lancers ».

2.a) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ $P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$.
2.b) Les événements A , B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2.c) Les événements A , B et C sont-ils mutuellement indépendants ?
2.d) Que peut-on en déduire quant à la question que l'on se posait ?

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°1

Dans une région, 1 % de la population est contaminée par un virus. On propose un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :
• 99,5 % des personnes porteuses du virus ont un test positif ;
• 98,5 % des personnes non porteuses du virus ont un test négatif.

On choisit une personne de cette population au hasard et on fait lui fait passer le test. On note
V l'événement « la personne choisie est porteuse du virus » et
T l'événement « la personne choisie a un test positif».

Tous les résultats suivants seront arrondis à 10^{-4} *près.*

1) À l'aide des données de l'énoncé, modéliser la situation par un arbre de probabilités.
2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0248.
3) Que peut-on dire de l'affirmation suivante : « on estime e personne ayant un test positif a environ 40 % de chances d'être porteuse du virus » ? Interpréter ce résultat.
4) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas porteuse du virus sachant que son test est négatif. Interpréter ce résultat.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°2

Un sac contient deux jetons bleus et trois jetons rouges. On tire au hasard deux jetons successivement et avec remise.
On note :

B_1 l'événement « le premier jeton tiré est bleu »,
B_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est bleu »,
R_1 l'événement « le premier jeton tiré est rouge » et
R_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est rouge».

1) Construire un arbre de probabilités modélisant la situation.
2) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient bleus.
3) Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient de même couleur.
4) Calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.

5) Reprendre toutes les questions précédentes en considérant que les tirages s'effectuent sans remise.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES (LA SUITE) E04

EXERCICE N°3

On lance simultanément un dé jaune et un dé bleu, tous les deux à six faces.
Le dé jaune possède des faces numérotées $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6$. Le dé bleu possède des faces numérotées de 1 à 6.

On note :
D l'événement « la face obtenue par le dé jaune est le nombre 2 »,
E l'événement « la face obtenue par le dé jaune est un nombre pair » et
pour tout entier k ,
$\{S=k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est égale à k », et
$\{S\geqslant k\}$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est supérieure ou égale à k ».

1) Les événements D et $\{S=7\}$ sont-ils indépendants ?
2) Les événements E et $\{S\geqslant 8\}$ sont-ils indépendants?