VARIABLES ALÉATOIRES E03C

EXERCICE N°1 Linéarité de l'espérance

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -4 ; 5 ; 10 et 100 , et telle que $E(Y) = 8$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 3Y+60$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

Z peut prendre les valeurs : $\boxed{68 \ ; \ 75 \ ; \ 90 \text{ et } 360}$

$68 = 3\times(-4)+60$, $75 = 3\times5+60$, $90 = 3\times10+60$, $360 = 3\times100+60$

1.b) Déterminer $E(Z)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(3Y+60) = 3E(Y)+60 = 3\times8+60$$

$$\boxed{E(Z) = 84}$$

Bien sûr qu'il est possible de calculer directement $E(Z)$ mais quelle perte d'énergie !

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -4Y+5$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

R peut prendre les valeurs : $\boxed{21 \ ; -15 \ ; -35 \text{ et } -395}$

2.b) Déterminer $E(R)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(R) = E(-4Y+5) = -4E(Y)+5 = -4\times8+5$$

$$\boxed{E(R) = -27}$$

VARIABLES ALÉATOIRES E03C

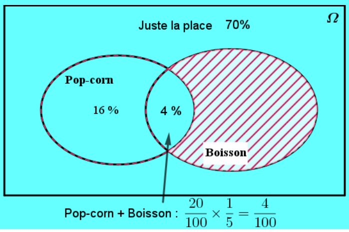
EXERCICE N°2 ***Linéarité de l'espérance : du concret***

Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.
Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

1) Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?

$$\frac{100}{100} - \left(\frac{70}{100} + \frac{20}{100}\right) = \frac{10}{100}$$

Ainsi $\boxed{\text{10 \% des clients achètent une place avec seulement une boisson}}$.



2) Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de R.

▪ On détermine Ω .
$Place\ seule(\mathrm{S})$, $Place + Boisson(\mathrm{B})$, $Place + Pop\text{-}corn(\mathrm{C})$
$Place + Pop - corn + Boisson(BC)$

$\Omega = \{S ; B ; C ; BC\}$
▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	S	B	C	BC	Total
Probabilité	0,7	0,1	0,16	0,04	1

▪ On détermine les images de chaque issue par R (autrement dit : on détermine $R(\Omega)$)
$R(\{S\}) = 7$, $R(\{B\}) = 7+3=10$, $R(\{C\}) = 7+4 = 11$,
$R(\{BC\}) = 7+3+4 = 14$
(Il y a quatre images possibles : $7 ; 10 ; 11$ et 14)

▪ On regroupe les antécédents :
Ici, c'est immédiat.

Le plus gros du travail
est fait au brouillon

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :
▫ $P(\{R = 7\}) = P(S) = 0{,}7$
▫ $P(\{R = 10\}) = P(B) = 0{,}1$
▫ $P(\{R = 11\}) = P(C) = 0{,}16$
▫ $P(\{R = 14\}) = P(BC) = 0{,}04$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

r_i	7	10	11	14	Total
$P(\{R = r_i\})$	0,7	0,1	0,16	0,04	1

3) Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?

Il s'agit d'abord de calculer $E(R)$ puis de multiplier par 2000 :

$$\begin{aligned} E(R) &= r_1 \times P(R = r_1) + r_2 \times P(R = r_2) + r_3 \times P(R = r_3) + r_4 \times P(R = r_4) \\ &= 7 \times 0{,}7 + 10 \times 0{,}1 + 11 \times 0{,}16 + 14 \times 0{,}04 \\ &= 4{,}9 + 1 + 1{,}76 + 0{,}56 \end{aligned}$$

$\boxed{E(R) = 8{,}22}$

Ainsi pour chaque spectateur, il peut espérer 8,22 €.

$2000 \times E(R) = 2000 \times 8{,}22 = 16440$

Pour 2000 spectateurs, $\boxed{\text{il peut espérer un chiffre d'affaire de } 16\,440 \text{ €}}$.

4) Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

Si on note X la variable aléatoire donnant le nouveau prix payé par un client du cinéma choisi au hasard alors :

$X = R + 0{,}5$

Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(R+0{,}5) = E(R)+0{,}5 = 8{,}22+0{,}5 = 8{,}72$$

$\boxed{\text{Il peut alors espérer un prix payé par client de } 8{,}72 \text{ €}}$.