

LA FONCTION INVERSE E04

EXERCICE N°2

Toujours faire attention aux notations (Le corrigé)

Une entreprise fabrique chaque jour x litres d'un produit chimique, où x appartient à $[1 ; 50]$.

Le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $[1 ; 50]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200,$$

les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

1) Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction C_M définie par $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$, où $x \in [1 ; 50]$.

1.a) Exprimer le coût moyen de production en fonction de x .

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,5x^2 + 2x + 200}{x} = 0,5x + 2 + \frac{200}{x}.$$

Ainsi : $C_M(x) = 0,5x + 2 + \frac{200}{x}$

1.b) Justifier que pour tout x appartenant à $[1 ; 50]$,

$$C_M'(x) = \frac{0,5(x-20)(x+20)}{x^2}$$

D'une part :

$$C_M(x) = 0,5x + 2 + \frac{200}{x}$$

$$C_M'(x) = 0,5 - \frac{200}{x^2}$$

D'autre part :

$$\frac{0,5(x-20)(x+20)}{x^2} = \frac{0,5[x^2 - 400]}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 200}{x^2} = 0,5 - \frac{200}{x^2}$$

Ainsi, on a bien $C_M'(x) = \frac{0,5(x-20)(x+20)}{x^2}$

1.c) Étudier le signe de $C_M'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 50]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .

- 0,5 est toujours positif.
- $x - 20 > 0 \Leftrightarrow x > 20$ et
- $x + 20 > 0 \Leftrightarrow x > -20$

x	1	20	50
0,5	+		+
$x - 20$	-	0	+
$x + 20$	+		+
$C_M'(x)$	-	0	+
$C_M(x)$	202,5	22	31

1.d) En déduire la quantité de produit chimique à produire pour que le coût moyen soit minimal.

D'après le tableau de variation, il faut produire 20 litres de produit chimique pour que le coût moyen soit minimal.

2) Le coût marginal de production, noté C_m pour une quantité produite x , est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire. On a donc :

$$C_m(x) = C(x+1) - C(x) .$$

2.a) Calculer le coût marginal pour une production de 10 litres de produit, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 10 litres à 11 litres.

$$\begin{aligned} C_m(10) &= C(10+1) - C(10) = C(11) - C(10) \\ &= 0,5 \times 11^2 + 2 \times 11 + 200 - (0,5 \times 10^2 + 2 \times 10 + 200) \\ &= 282,5 - 270 = 12,5 \end{aligned}$$

Ainsi, le coût marginal cherché est: 12,5 €

2.b) En pratique, les économistes assimilent le coût marginal de production à la dérivée du coût total et considèrent donc que $C_m(x) = C'(x)$.

Calculer $C'(x)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

▪ Calculons la dérivée demandée :

$$C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200$$

$$C'(x) = 0,5 \times 2x + 2 \times 1 + 0$$

$$C'(x) = x + 2$$

$$C'(10) = 10 + 2 = 12$$

On constate que $C'(10)$ et $C_m'(10)$ sont assez proches .

2.c) Les économistes affirment que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal. Vérifier que $-0,5 + \sqrt{400,25}$ est une solution de l'équation $C_M(x) = C_m(x)$ pour confirmer l'affirmation faite par les économistes.

$$C_M(-0,5 + \sqrt{400,25}) - C_m(-0,5 + \sqrt{400,25}) = 0$$

Ce qui montre que c'est bien une solution de l'équation.

$$\text{Or : } -0,5 + \sqrt{400,25} \approx 20,51$$

On est donc en accord avec le résultat trouvé à la question 1d)

Mais d'où vient ce nombre ?

$$C_M(x) = C_m(x)$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} = C(x+1) - C(x)$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} = 0,5(x+1)^2 + 2(x+1) + 200 - (0,5x^2 + 2x + 200)$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} = 0,5(x^2 + 2x + 1) + 2x + 2 + 200 - 0,5x^2 - 2x - 200$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} = 0,5x^2 + x + 0,5 + 2 - 0,5x^2$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} = x + 2,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 2 + \frac{200}{x} - x - 2,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x - 0,5 + \frac{200}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-0,5x^2 - 0,5x + 200}{x} = 0$$

$-0,5x^2 - 0,5x + 200$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -0,5$, $b = -0,5$ et $c = 200$

On note Δ le discriminant de ce trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,25 + 400 = 400,25 > 0$$

On en déduit qu'il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 avec :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,5 - \sqrt{400,25}}{-1} \approx 20,51 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx -19,51$$

Comme on cherche à résoudre sur $[1 ; 50]$ donc il ne reste que r_1 comme solution.

Vous avez bien sûr reconnu r_1 ;)