

# FONCTIONS PART3 E06

## EXERCICE N°3 tableur (Le corrigé)

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de  $x$  lecteurs est modélisé par la fonction  $CT$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 500]$  par :  $CT(x) = 0,4x^3 - 7x^2 + 60x + 120$

On appelle coût marginal au rang  $x$ , noté  $Cm(x)$ , le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque  $x$  pièces ont déjà été produites.

Ainsi  $Cm(x) = CT(x+1) - CT(x)$

1) Calculer  $Cm(5)$ . Donner une interprétation.

$$Cm(5) = CT(5+1) - CT(5) = \underbrace{CT(6) - CT(5)}_{\text{à la calculatrice}} = 19,4$$

Quand 5 pièces ont été produites, le coût de fabrication de la pièce suivante est de 19,4 €

2) On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de  $x$ .

Pour limiter les calculs nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

|   | A | B     | C             | D                        | E                           |
|---|---|-------|---------------|--------------------------|-----------------------------|
| 1 | x | CT(x) | CT(x+1)-CT(x) | Approximation par CT'(x) | écart avec la valeur réelle |
| 2 | 0 | 120   | 53,4          |                          |                             |
| 3 | 1 | 173,4 | 41,8          |                          |                             |
| 4 | 2 | 215,2 | 32,6          |                          |                             |
| 5 |   |       |               |                          |                             |

2.a) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

$$=0,4*A3^3-7*A3^2+60*A3+120$$

2.b) Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

$$=B3-B2$$

2.c) Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 MP3

Attention : Il ne peut y avoir de production d'un 501<sup>e</sup> lecteur, par conséquent sur la dernière seules les colonnes A et B devront être complétées.

Le fichier est [ici](#)

3) En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi,  $Cm(x) \approx CT'(x)$  pour  $0 \leq x \leq 500$

3.a) Montrer que pour appartenant à l'intervalle  $[0 ; 500]$ ,

$$Cm(x) = 1,2x^2 - 12,8x + 53,4$$

$$\begin{aligned} Cm(x) &= CT(x+1) - CT(x) \\ &= 0,4(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 60(x+1) + 120 - (0,4x^3 - 7x^2 + 60x + 120) \\ &= 0,4x^3 - 5,8x^2 + 47,2x + 173,4 - (0,4x^3 - 7x^2 + 60x + 120) \\ &= 0,4x^3 - 5,8x^2 + 47,2x + 173,4 - 0,4x^3 + 7x^2 - 60x - 120 \\ &= 1,2x^2 - 12,8x + 53,4 \end{aligned}$$

Pour passer de la 2<sup>e</sup> à la 3<sup>e</sup> ligne (seuls le développement et la réduction de  $CT(x+1)$  sont présentés) :

$$\begin{aligned} 0,4(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 60(x+1) + 120 &= 0,4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 7(x^2 + 2x + 1) + 60(x+1) + 120 \\ &= \underbrace{0,4x^3 + 1,2x^2 + 1,2x + 0,4}_{\text{1ere 'parenthèse'}} - \underbrace{7x^2 - 14x - 7}_{\text{2eme 'parenthèse'}} + \underbrace{60x + 60}_{\text{3eme 'parenthèse'}} + 120 \\ &= 0,4x^3 - 5,8x^2 + 47,2x + 173,4 \end{aligned}$$

3.b) Calculer alors pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 500]$   $CT'(x)$  et proposer une approximation de  $Cm(x)$ .

$$\begin{aligned} CT(x) &= 0,4x^3 - 7x^2 + 60x + 120 \\ CT'(x) &= 0,4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 60 \times 1 + 0 \\ CT'(x) &= 1,2x^2 - 14x + 60 \end{aligned}$$

On peut approcher  $Cm(x)$  avec  $1,2x^2 - 14x + 60$

**3.c)** Calculer  $Cm(5)$  à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question 1. a.? Qu'en pensez-vous?

Calculons l'approximation de  $Cm(5)$

$$Cm(5) \approx 1,2 \times 5^2 - 14 \times 5 + 60 = 20$$

L'erreur commise par rapport à la valeur de la question 1a) est alors :

$$\frac{20 - 19,4}{19,4} \approx 0,03$$

**Soir environ 3 %**

Cette erreur nous semble acceptable.

**3.d)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de  $Cm(x)$  par  $CT'(x)$  ?

$$=1,2*A2^2-14*A2+60$$

**3.e)** Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

$$=(D2-C2)/C2$$

**3.f)** Observer l'intégralité de la colonne D.

Que pensez-vous de cette approximation proposée pour le coût marginal?

On constate que l'erreur d'approximation diminue en augmentant le nombre de pièces produites. Cette approximation est donc acceptable.