LA DÉRIVATION E04C

EXERCICE N°1 Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente

Pour chaque fonction f, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse a.

1) $f(x) = 4x^3-5x+3$, $I = \mathbb{R}$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$f'(x) = 4\times 3x^2-5\times 1+0$

$\boxed{f'(x) = 12x^2-5}$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = 1$

d'où

$f(1) = 4\times 1^3-5\times 1+3 = 2$

et

$f'(1) = 12\times 1^2-5 = 7$

Ainsi :

$y = 7(x-1)+2$

qui se réduit à :

$\boxed{y = 7x-5}$

2) $f(x) = -7t^2-\frac{3}{t}+5$, $I =]0\ ;+\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$f'(t) = -7\times 2t - 3\times\frac{-1}{t^2} + 0$

$\boxed{f'(t) = -14t+\frac{3}{t^2}}$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = 3$

d'où

$f(3) = -7\times 3^2-\frac{3}{3}+5 = -59$

et

$f'(3) = -14\times 3+\frac{3}{3^2} = -42+\frac{1}{3} = \frac{-126+1}{3} = -\frac{125}{3}$

Ainsi :

$y = -\frac{125}{3}(x-3)-59$

qui se réduit à :

$\boxed{y = \frac{-125}{3}x+184}$

3) $f(x) = (2x-3)^3(x^2+1)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :
$f(x) = u(x) \times v(x)$
avec :
$u(x) = (2x-3)^3$ d'où $u'(x) = 3 \times 2 \times (2x-3)^2 = 6(2x-3)^2$
et
$v(x) = x^2+1$ d'où $v'(x) = 2x$
Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 6(2x-3)^2(x^2+1) + 2x(2x-3)^3 \\ &= (2x-3)^2\left[6(x^2+1)+2x(2x-3)\right] \\ &= (2x-3)^2(6x^2+6 + 4x^2-6x) \\ &= (2x-3)^2(10x^2 + 6x^2+6) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2(2x-3)^2(5x^2-3x+3)}$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.
Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.
Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$$\boxed{f'(x) = 40x^4-144x^3+186x^2-126x+54}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$
Ici $a = -1$
d'où
$f(-1) = (2(-1)-3)^3((-1)^2+1) = (-5)^3 \times 2 = -250$
et
$f'(-1) = 2(2(-1)-3)^2(5(-1)^2-3(-1)+3) = 2 \times (-5)^2 \times 11 = 550$
Ainsi :
$y = 550(x+1)-250$
qui se réduit à :

$$\boxed{y = 550x+300}$$

4) $f(x) = \dfrac{4x^5-10x^2+3}{2x}$, $I =]-\infty\ ;\ 0[$, $a = -1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = 4x^5-10x^2+3$ d'où $u'(x) = 4\times5x^4-10\times2x+0 = 20x^4-20x$

et

$v(x) = 2x$ d'où $v'(x) = 2$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(20x^4-20x) - 2(4x^5-10x^2+3)}{(2x)^2} \\ &= \frac{2[x(20x^4-20x)-(4x^5-10x^2+3)]}{(2x)^2} \\ &= \frac{2(20x^5-20x^2-4x^5+10x^2-3)}{2x\times2x} \\ &= \frac{16x^5-10x^2-3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{16x^5-10x^2-3}{2x^2}}$$

▪ Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$$f(-1) = \frac{4(-1)^5-10(-1)^2+3}{2(-1)} = \frac{-4-10+3}{-2} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

et

$$f'(-1) = \frac{16(-1)^5-10(-1)^2-3}{2(-1)^2} = \frac{-16-10-3}{2} = -\frac{29}{2}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{29}{2}(x+1)+\frac{11}{2}$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -\frac{29}{2}x-9}$$

EXERCICE N°2 ***Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé***

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné puis calculer le nombre dérivé de f en a .

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$, $I = [0\ ;+\infty[$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = \sqrt{2x+1}$ d'où $u'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

et

$v(x) = 3x+2$ d'où $v'(x) = 3$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}(3x+2)-3\sqrt{2x+1}}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{\frac{(3x+2)-3(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{3x+2-6x-3}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x-1}{(3x+2)^2\sqrt{2x+1}}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{-3\times1-1}{(3\times1+2)^2\sqrt{2\times1+1}} = -\frac{4}{5^2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f'(1) = -\frac{4}{25\sqrt{3}}}$$

« On n'aime pas trop les racines au dénominateur »…

$$\frac{-4\times\sqrt{3}}{25\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{25\times3}$$

On pourrait également écrire :

$$\boxed{f'(1) = -\frac{4\sqrt{3}}{75}}$$

2) $f(t) = (2t+1)^3(5-3t)^4$ $I = \mathbb{R}$, , $a = -2$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$f(t) = u(t) \times v(t)$

avec :

$u(t) = (2t+1)^3$ d'où $u'(t) = 3\times 2\times(2t+1)^2 = 6(2t+1)^2$

et

$v(t) = (5-3t)^4$ d'où $v'(t) = 4\times(-3)(5-3t)^3 = -12(5-3t)^3$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^4 + (-12)(5-3t)^3(2t+1)^3 \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t+(-2)(2t+1)] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3[5-3t-4t-2] \\ &= 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = 6(2t+1)^2(5-3t)^3(-7t+3)}$$

Il est toujours plus pratique d'avoir une dérivée factorisée, nous verrons bientôt pourquoi.
Par conséquent, si on voit une factorisation « facile » , on n'hésite pas.
Néanmoins, comme il n'y a pas de demande particulière dans l'énoncé, vous ne perdrez pas de point en écrivant la forme développée réduite :

$\boxed{f'(x) = 4536t^6-20088t^5+24030t^4+4164t^3-16320t^2-300t+2250}$ mais bon...

▪ Pour finir :

$f'(-2) = 6(2(-2)+1)^2(5-3(-2))^3(-7(-2)+3) = 6\times(-3)^2\times 11^3\times(-11) = -54\times 11^4$

$\boxed{f'(-2) = -790\,614}$

Aide au calcul
$125\times 105 = 13125$
$54\times 11^4 = 790\,614$

3) $f(x) = \dfrac{3+x^2}{(5x-10)^4}$, $I =]2\ ;+\infty[$, $a = 3$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$u(x) = 3+x^2$ d'où $u'(x) = 2x$

et

$v(x) = (5x-10)^4$ d'où $v'(x) = 4\times 5\times(5x-10)^3 = 20(5x-10)^3$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)\ -\ u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(5x-10)^4-20(5x-10)^3(3+x^2)}{\left((5x-10)^4\right)^2} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[x(5x-10)-10(3+x^2)]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3[5x^2-10x-30-10x^2]}{(5x-10)^8} \\ &= \frac{2(5x-10)^3(-5x^2-10x-30)}{(5x-10)^8} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2(5x-10)^3(5x^2+10x+30)}{(5x-10)^8}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(3) = \frac{-2(5\times 3-10)^3(5\times 3^2+10\times 3+30)}{(5\times 3-10)^8} = -2\times 5^3\times 105 = -2\times 125\times 105 = -2\times 13125$$

$$\boxed{f'(3) = -26250}$$

Aide au calcul
$125\times 105 = 13125$
$54\times 11^4 = 790\,614$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2}$, $I =]0\ ;\ 3]$, $a = 1$.

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec :

$$u(x) = \sqrt{6-2x} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = -2\times\frac{1}{2\sqrt{6-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$$

et

$$v(x) = x^2 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{\frac{-1}{\sqrt{6-2x}}x^2-2x\sqrt{6-2x}}{(x^2)^2} \\
&= \frac{\frac{-x^2-2x(6-2x)}{\sqrt{6-2x}}}{x^4} \\
&= \frac{-x^2-12x+4x^2}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3x^2-12x}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3x(x-4)}{x^4\sqrt{6-2x}} \\
&= \frac{3(x-4)}{x^3\sqrt{6-2x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x-12}{x^3\sqrt{6-2x}}}$$

▪ Pour finir :

$$f'(1) = \frac{3\times1-12}{1^3\sqrt{6-2\times1}} = \frac{-9}{\sqrt{4}} = \frac{-9}{2}$$

$$\boxed{f'(1) = \frac{-9}{2}}$$

EXERCICE N°3 Tangentes parallèles à une droite donnée

Extrait du déclic 1er spé 74 p 122

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^3-x^2-x+1$$

Déterminer les tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = -8x+2$.
On précisera l'abscisse des points de tangence et leurs équations réduites respectives.

On parle de tangentes donc on doit penser « dérivée » et se souvenir que le nombre dérivé et le coefficient directeur de la tangente…
On doit aussi savoir que « droites parallèles = même coefficient directeur »

La droite d'équation $y = -8x+2$ a pour coefficient directeur -8 .

▪ Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = -8$

f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -3\times3x^2-2x-1+0$ ou encore : $\boxed{f'(x) = -9x^2-2x-1}$

Ainsi

$$f'(x) = -8$$
$$\Leftrightarrow -9x^2-2x-1 = -8$$
$$\Leftrightarrow -9x^2-2x+7 = 0$$

Posons $\Delta = (-2)^2-4\times(-9)\times7 = 4+4\times63 = 4+252 = 256$, le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{256}}{2\times(-9)} = \frac{2-16}{-18} = \frac{-14}{-18} = \frac{7}{9}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{256}}{2\times(-9)} = \frac{2+16}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

▪ On en déduit qu'il y a deux tangentes à C_f possibles :

▪ La première se situe au $\boxed{\text{point d'abscisse } -1}$ et admet comme équation

$$y = f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$$

Or :

$$f(-1) = -3(-1)^3-(-1)^2-(-1)+1 = 3-1+1+1 = 4$$

et

$$f'(-1) = -8$$

On obtient :

$$y = -8(x+1)+4$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -8x-4}$$

▪ La seconde situe au $\boxed{\text{point d'abscisse } \frac{7}{9}}$ et admet comme équation :

$$y = f'\left(\frac{7}{9}\right)\left(x-\frac{7}{9}\right)+f\left(\frac{7}{9}\right)$$

Or :

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -3\left(\frac{7}{9}\right)^3-\left(\frac{7}{9}\right)^2-\frac{7}{9}+1 = -\frac{343}{243}-\frac{49}{81}-\frac{7}{9}+1 = \frac{-343-147-189+243}{243} = -\frac{436}{243}$$

et

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = -8$$

On en déduit $\boxed{y = -8x+\frac{1076}{243}}$

Aide au calcul

$$-\frac{343}{243}-\frac{49}{81}-\frac{7}{9}+1 = -\frac{436}{243}$$
$$-\frac{56}{9}-\frac{436}{243} = \frac{1076}{243}$$

EXERCICE N°4 Tangentes passant par un point donné

Extrait du déclic 1er spé 99 p 127

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

et on note C_f sa courbe représentative.

On souhaite déterminer les tangentes à C_f passant par le point $M(0\ ;\ 2)$.

1) Démontrer que la tangente t_a au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe C_f a pour équation réduite :

$$y = -\frac{4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}\ .$$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

La tangente au point d'abscisse a admet comme équation

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

qui s'écrit :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}(x-a)+\frac{2}{a^2+1}$$

ou :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x-\frac{-4a}{(a^2+1)^2}a+\frac{2}{a^2+1}$$

ou encore

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{4a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{2}{a^2+1}$$

puis

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{4a^2+2(a^2+1)}{(a^2+1)^2}$$

et enfin

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}$$

cqfd

2) Montrer que $M(0\ ;\ 2) \in T_a \Leftrightarrow a^2-a^4 = 0$.

Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe.

$$\begin{aligned}
M(0\ ;\ 2) \in T_a &\Leftrightarrow 2 = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}\times 0+\frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}\\
&\Leftrightarrow 2 = \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}-2 = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{6a^2+2-2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2} = 0\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(a^2+1)^2\neq 0} 6a^2+2-2(a^4+2a^2+1) = 0\\
&\Leftrightarrow -2a^4+2a^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 2(a^2-a^4) = 0\\
&\Leftrightarrow a^2-a^4 = 0
\end{aligned}$$

cqfd

3) Conclure.

$a^2-a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2(1-a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2(1-a)(1+a) = 0$

On en déduit trois valeurs possibles pour a : -1 ; 0 et 1 ,

et donc trois tangentes possibles :

- $y = \dfrac{-4(-1)}{((-1)^2+1)^2}x+\dfrac{6(-1)^2+2}{((-1)^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = x+2}$
- $y = \dfrac{-4\times 0}{(0^2+1)^2}x+\dfrac{6\times 0^2+2}{(0^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = 2}$
- $y = \dfrac{-4\times 1}{(1^2+1)^2}x+\dfrac{6\times 1^2+2}{(1^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = -x+2}$