RACINES CARRÉES

I Qu'est ce qu'une racine carrée ?

Définition n°1. Racine carrée

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée de *a***
et on note $\sqrt{a}$ le nombre **positif** dont **le carré vaut *a***.
Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

Exemple n°1.

- $\sqrt{64}=8$ en effet $8^2=64$ ($(-8)^2=64$ aussi mais $-8<0$)
- $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ à 0,001 près : une racine carrée n'est pas forcément un entier.
- $\sqrt{-64}$ n'existe pas et ne s'écrit pas…
- $-\sqrt{64}$ existe et vaut -8 .
- $\sqrt{0}=0$ et $\sqrt{1}=1$

Remarque n°1.

D'après la définition, pour a un nombre **positif**. $\boxed{(\sqrt{a})^2=a}$

II Opérations élémentaires et racines carrées

Propriété n°1. La racine du produit égale le produit des racines

Soient a et b deux nombres positifs. $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

preuve :

- Si $a=0$ et/ou $b=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
- Supposons à présent que $a>0$ **et** $b>0$

Alors $\sqrt{a\times b}>0$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$

- La remarque n°1 nous permet d'affirmer que :

$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$ et que $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b$.

- On peut alors écrire :

$0=a\times b-a\times b=(\sqrt{a\times b})^2-(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=[\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}][\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}]$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{a\times b}+\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ne peut pas être nul

donc $\sqrt{a\times b}-\sqrt{a}\times\sqrt{b}=0$ qui équivaut à $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ *cqfd.*

Remarque n°2.

En particulier, pour $\boxed{a\geqslant 0,\quad \sqrt{a^2}=a}$

Propriété n°2. La racine du quotient égale le quotient des racines

Soient a un nombre positif et b un nombre strictement positif. $\boxed{\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

preuve :

Si $a=0$ alors l'égalité est vraie de façon évidente (0 = 0)
Supposons à présent que $a>0$.

- Avec la remarque n°1 : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}=\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$
- On peut alors écrire : $0=\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

- $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq 0$ donc $\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=0$ qui équivaut à $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *cqfd.*

Remarque n°3. ***Attention ! Pas de somme ou de différence***
De manière générale, la racine de la somme ou de la différence n'égale pas la somme ou la différence des racines.

Exemple n°2.

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{et} \quad \sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$$

Propriété n°3. ***Racine carrée et distance à zéro***

Soit a un nombre réel : $\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \text{ , } \sqrt{a^2}=a \\ \text{Si } a<0 \text{ , } \sqrt{a^2}=-a \end{cases}$

preuve :

Si $a \geqslant 0$ alors, d'après la remarque n°2, $\sqrt{a^2}=a$
Si $a<0$ alors $-a>0$ et comme $(-a)^2=a^2$ on peut appliquer le point précédent pour conclure.

Remarque n°4. ***Valeur absolue de a : $|a|$***

La propriété n°3 nous dit que :
Pour $a \in \mathbb{R}$ $\sqrt{a^2}$ vaut la **distance à zéro de *a***.
(On dira maintenant : « **valeur absolue de *a*** »)
On notera alors $\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|\ a\ |}$
et on lira « La racine carrée du carré d'un nombre égale sa valeur absolue ».

III Simplification de racine carrée

Il s'agît de savoir faire ce que fait votre calculatrice : Faire en sorte que le nombre sous le radical soit un entier le plus petit possible.

Méthode n°1. ***Simplifier une racine carrée***
Énoncé :
Écrire $\sqrt{675}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.
Réponse :

Au brouillon :

$\sqrt{675} \approx 25{,}98$ Comme 25 est le plus grand entier inférieur à 25,98 , on commence de cette façon :

Est-ce que 25^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{625} \notin \mathbb{N}$

Est-ce que 24^2 est un diviseur de 675 ? Non $\dfrac{675}{576} \notin \mathbb{N}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Est-ce que 15^2 est un diviseur de 675 ? Oui $\dfrac{675}{225}=3 \in \mathbb{N}$

Sur la copie :

$$\sqrt{675}=\sqrt{15^2\times 3}=\sqrt{15^2}\times\sqrt{3}=\mathbf{15\sqrt{3}}$$

Remarque n°5.

Si une expression comporte plusieurs racines carrées, on les simplifie une à une avec la méthode précédente.

IV Le résumé du cours

➔ Pour un nombre réel strictement positif a, il existe deux nombres opposés dont le carré vaut a : Seul celui qui est positif est noté $\sqrt{a}$.

➔ Pour a et b des nombres réels positifs ou nuls :

Produit et quotient : OK

$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$; $\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$ $\boxed{a \geqslant 0, \quad \sqrt{a^2} = a}$ $\boxed{\text{Si } b > 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Somme et différence : ATTENTION PAS DE FORMULE

➔ Pour a un nombre réel quelconque (cette fois il peut être négatif)

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } a \geqslant 0 \ , \sqrt{a^2} = a \\ \text{Si } a < 0 \ , \sqrt{a^2} = -a \end{cases}}$$

On résume cela en écrivant : $\boxed{\sqrt{a^2} = |\, a \,|}$ se lit « valeur absolue de a »