PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE E01

EXERCICE N°4 ***(Le corrigé)***

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(3\ ;1)$ et $M(2\ ;4)$.

1) La symétrie de centre A transforme B en C .

1.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Par définition, « La symétrie de centre A transforme B en C » signifie que :
A est le milieu de $[BC]$
On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}}$

1.b) En déduire les coordonnées du point C .

On sait que :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -2-1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C - (-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$
On obtient :

$$\begin{cases} x_C - 1 = -2 \\ y_C + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -5 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{C(-1\ ;-5)}$

2) Soit N le point tel que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$.

2.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?

On peut dire que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AN} \text{ sont colinéraires}}$

2.b) Calculer les coordonnées du point N .

On sait que :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - x_A \\ y_N - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 1 \\ y_N - (-2) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 1 \\ y_N + 2 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$
On obtient :

$$\begin{cases} -2(x_N - 1) = 1 \\ -2(y_N + 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N + 2 = 1 \\ -2y_N - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N = -1 \\ -2y_N = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0{,}5 \\ y_N = -5 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{N(0{,}5\ ;-5)}$