LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

I Une étude de la fonction logarithme décimal

Définition n°1. ***(qui découle d'une propriété que l'on admet)***

Soit un nombre réel $a > 0$. Le logarithme décimal de a est le nombre réel c tel que : $10^c = a$
Il est noté $\log a$.
On a donc $c = \log(a)$ si et seulement si $10^c = a$

Définition n°2. ***La fonction log***

On appelle fonction logarithme décimal la fonction :

$$\log : \begin{cases}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \log(x) \end{cases}$$

Exemple n°1.

$\log(1)=0$, $\log(10)=1$, $\log(100)=2$ …

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°1

Écrire sous forme décimale, chacun des nombres suivant :

1) $\log\left(10^{3}\right)$ **2)** $\log\left(10^{8}\right)$ **3)** $\log\left(10^{-4}\right)$

4) $\log\left(10^{\frac{7}{3}}\right)$ **5)** $\log\left(10^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ **6)** $\log\left(1\,000\,000\right)$

7) $\log\left(0{,}000\,01\right)$ **8)** $\log\left(\dfrac{1}{0{,}000\,001}\right)$ **9)** $\log\left(\dfrac{1}{100\,000}\right)$

Remarque n°1.

Parfois, quand il n'y a pas d'ambiguïté, les parenthèses sont omises. Par exemple, on peut voir écrit « log 10 = 1 » à la place de « log(10) = 1 ».
Nous éviterons toutefois, cette simplification cette année...

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Propriété n°1. ***(Admise)***

La fonction logarithme décimal est strictement croissante.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$\log(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	

Remarque n°2. ***Comparaison***

Cela signifie qu'elle conserve l'ordre :

Pour tout réels a et b strictement positifs,

si $a < b$ alors $\log a < \log b$.

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°2

Dans chacun des cas suivants, comparer les nombres donnés sans utiliser la calculatrice.

1) $\log(\pi)$ et $\log(3{,}14)$

2) $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$

3) $\log(5{,}1\times10^{-3})$ et $\log(5{,}1\times10^{-4})$

4) Pour $x>1$: $\log(x^3)$ et $\log(x^2)$

Propriété n°2. ***Tableau de signes de la fonction logarithme décimal***

Tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	‖	$-$	0	$+$	

EXERCICE N°3

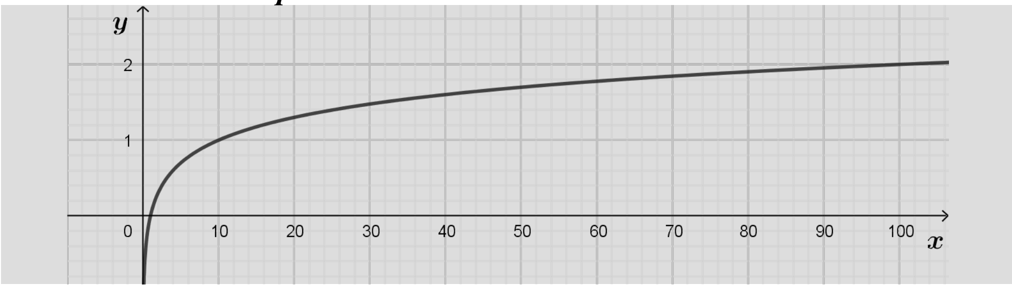
Donner le signe des nombres suivants :

1) $\log\left(10^3\right)$ **2)** $\log(9{,}73)$ **3)** $\log(0{,}91)$ **4)** $\log(1{,}001)$

5) $\log(0{,}99)$ **6)** $\log(\pi-3)$ **7)** $\log(741{,}23)$ **8)** $\log\left(\dfrac{1}{\pi-3}\right)$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Connaissance n°1 ***La courbe représentative***



Remarque n°3.

À l'inverse des fonctions exponentielles (de base strictement supérieure à 1) , la croissance de la fonction logarithme décimal est très « lente ».
Pour atteindre 3 en ordonnées il faut faudra atteindre 1000 en abscisses…

Remarque n°4. Ne pas tout mélanger

La fonction logarithme décimal, n'est pas la fonction logarithme népérien (ln) mais elles sont en relation : Pour tout $a > 0$, $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$

II Utiliser la fonction logarithme décimal

Propriété n°3. ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$$

Exemple n°2.

$$\log(300) = \log(100 \times 3) = \log(100) + \log(3) = 2 + \log(3)$$

Propriété n°4. ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\boxed{\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)}$$

$$\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

Exemple n°3.

- $\log(0{,}001) = \log\left(\frac{1}{1000}\right) = -\log(1000) = -3$
- $\log(0{,}007) = \log\left(\frac{7}{1000}\right) = \log(7) - \log(1000) = \log(7) - 3$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Propriété n°5. ***(Admise)***

Pour tous nombre réel strictement positif a et tout entier relatif n :

$$\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$$

Exemple n°4.

$\log(5{,}2^7) = 7 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $7\log(5{,}2)$)

La fonction logarithme décimal

Propriété n°6.

Pour tous nombre réel strictement positif a et tout nombre réel x :

$$\boxed{\log\left(a^x\right) = x \times \log(a)}$$

Exemple n°5.

$\log\left(5{,}2^{-7{,}3}\right) = -7{,}3 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $-7{,}3\log(5{,}2)$)

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E01

EXERCICE N°4

1) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$:

1.a) $\log\left(8\times10^3\right)$ **1.b)** $\log(1\,600)$ **1.c)** $\log(0{,}32)$

2) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(3)$:

2.a) $\log(27)$ **2.b)** $\log(0{,}09)$ **2.c)** $\log(0{,}008\,1)$

3) Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(a)$:

3.a) $\log\left(a^2\times a^3\right)$ **3.b)** $\log\left(\dfrac{a^{-7}}{a^3}\right)$ **3.c)** $\log\left(\dfrac{1}{a^4}\right)$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Propriété n°7. ***(Admise)***

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

$\boxed{x = y \Leftrightarrow \log(x) = \log(y)}$ et $\boxed{x < y \Leftrightarrow \log(x) < \log(y)}$

Remarque n°5.

Tous les autres symboles de comparaison sont bien sûr valables.

Cette dernière propriété nous permet de résoudre des équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et des inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Méthode n°1.

Résoudre l'équation $2^x = 100$

$$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x)=\log(100)$$
$$\Leftrightarrow x\log(2)=2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{\log(2)}$$

En notant S l'ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{2}{\log(2)}\right\}$

Résoudre l'inéquation $5^x < 0{,}001$

$$5^x < 0{,}001 \Leftrightarrow \log(5^x)<\log(0{,}001)$$

(car la fonction log est strictement croissante)

$$\Leftrightarrow x\log(5) < -3$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-3}{\log(5)}$$

(car $\log(5)>0$)

En notant S l'ensemble des solutions : $S = \left]-\infty\ ;\ \frac{-3}{\log(5)}\right[$

EXERCICE N°5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2000 \times 0{,}4^x = 3000$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $15 \times 2^x < 8$

Exemple n°6. ***Un exemple un peu plus complexe***

Résolvons l'inéquation suivante :

$$-5\times 0{,}2^{x}-3 \geqslant -4550003$$

$$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^{x}-3+3 \geqslant -4550003+3$$

On ne change pas le sens d'une inégalité en retranchant un même nombre à chaque membre

$$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^{x} \geqslant -4550000$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\times 0{,}2^{x}}{-5} \leqslant \frac{-4550000}{-5}$$

On change le sens d'une inégalité en divisant chaque membre par un même nombre strictement négatif.

$$\Leftrightarrow 0{,}2^{x} \leqslant 910000$$

La fonction log étant strictement croissante, elle ne change pas les inégalités.

$$\Leftrightarrow \log\left(0{,}2^{x}\right) \leqslant \log\left(910000\right)$$

$$\Leftrightarrow x\times\log\left(0{,}2\right) \leqslant \log\left(910000\right)$$

Grâce à la propriété n°6

$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{\log\left(910000\right)}{\log\left(0{,}2\right)}$$

Car $\log\left(0{,}2\right)$ est négatif

Ainsi $-5\times 0{,}2^{x}-3 \geqslant -4550003$ quand $x \geqslant \dfrac{\log\left(910000\right)}{\log\left(0{,}2\right)} \approx -8{,}53$

En notant S l'ensemble des solutions : $S = \left[\dfrac{\log\left(910000\right)}{\log\left(0{,}2\right)} \,;\, +\infty\right[$

Remarque n°6.

$$\frac{\log\left(910000\right)}{\log\left(0{,}2\right)} = \frac{\log\left(9{,}1\times 10^{5}\right)}{\log\left(2\times 10^{-1}\right)} = \frac{5+\log\left(9{,}1\right)}{-1+\log\left(2\right)}$$ mais est-ce plus parlant ?

Vous aurez surtout besoin de la valeur approchée…

EXERCICE N°6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-480 \times 0{,}5^x + 72 > -4799928$

2) $472 \times 3{,}2^x - 89 \leqslant 471911$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E02

EXERCICE N°1

Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant les propriétés de la fonction logarithme décimal (arrondir éventuellement à 0,1 près $\log(x)$):

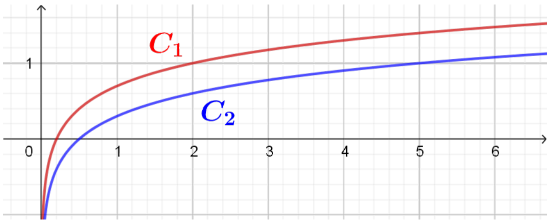
x	1	2	5	10	20
$\log(x)$ arrondi à 0,1 près					

EXERCICE N°2

Exprimer le logarithme décimal de chacun des nombres suivants en fonction de $\log(3)$ et de $\log(7)$:

1) $0{,}00147$ **2)** $11\,907$ **3)** $2\,700 \times 490$

EXERCICE N°3

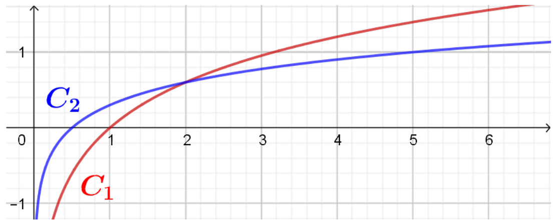


On a représenté dans le repère ci-dessous le des fonctions f et g définies sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\log(5x)$ et $g(x)=\log(2x)$.

Identifier chacune des courbes en justifiant la réponse.

EXERCICE N°4

On a représenté dans le repère ci-dessous le des fonctions f et g définies sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\log(x^2)$ et $g(x)=\log(2x)$.



1) Identifier chacune des courbes en justifiant la réponse.

2) Lire graphiquement l'image de 5 par la fonction f de 3 par la fonction g .

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.

EXERCICE N°5

En astronomie, la magnitude apparente, notée M, revient à mesurer combien une étoile apparaît brillante vue de la Terre. L'astronome Norman Pogson (1829-1891) a introduit la formule suivante : $\boxed{M=-2,5\log(E)+k}$

où E est l'éclat de l'étoile observée (puissance reçue par unité de surface) et k est une constante indépendante du choix de l'étoile.

L'étoile Véga a une magnitude apparente fixée à 0. On note E_0 l'éclat apparent de Véga.

1) Exprimer la constante k à l'aide de $\log(E_0)$.

2) Montrer alors que $M = -2,5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$.

3) Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante l'étoile Véga,

3.a) quel est le signe de sa magnitude apparente ?

3.b) Que peut-on dire de sa magnitude par rapport à celle de Véga ?

4) Déterminer la magnitude apparente des astres suivants d'éclat E :

4.a)	**4.b)**	**4.c)**
Vénus : $E=69\times10^{-4}E_0$	Mars: $E=8,32\ E_0$	Neptune : $E=6,9\times10^{-4}E_0$

On arrondira à 0,1 près.

5) Déterminer l'éclat des astres suivants de magnitude apparente M en fonction de E_0 :

5.a)	**5.b)**	**5.c)**
Soleil: $M=-26,8$	Pleine lune : $M=-12,6$	Uranus : $M=5,7$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2^x = 5$ **2)** $3^x = -10$ **3)** $5^{x+1} = 25$

4) $\log(2x+1) = 1$ **5)** $\log(3x-1) = 0$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $5^x > 1$ **2)** $2^x \leqslant 1$

3) $\log(2x) > 1$ **4)** $\log(3x-1) \leqslant 0$

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E03

EXERCICE N°3

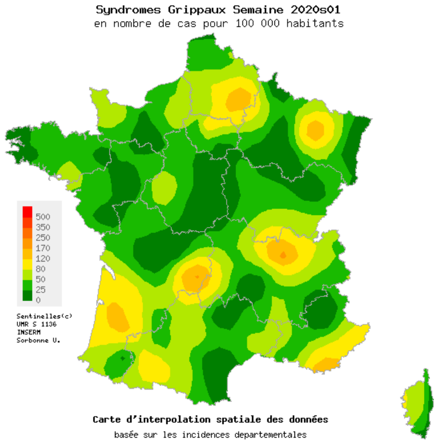
Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès de ses médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certaines maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc.) sur une période donnée.

Ainsi, a-t-on évalué, pendant plusieurs semaines à partir de début janvier 2020, le nombre de personnes présentant des symptômes grippaux.

Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :

$$f(t)=24\times 1{,}27^t$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.



source : sentiweb.fr

1) Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1ère semaine d'observation. Donner la valeur exacte de ce taux d'incidence.

2) Résoudre l'inéquation $24\times 1{,}27^t > 60{,}96$.

3) Au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine ?

EXERCICE N°4

Pour qu'un son « chatouille » notre oreille il faut que le pavillon de celle-ci réussisse à en capter « quantité » suffisante. Cette quantité, notée I, est appelée l'intensité sonore de ce son. Elle s'exprime en watt mètre carré ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^2$). Le niveau sonore N de ce son, exprimé en décibels (dB), est alors donné par la relation :

$$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I_0 est la plus petite puissance sonore perceptible par l'oreille humaine.

On donne $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^2$

1) Une conversation entre deux amis a une intensité sonore de $10^{-5}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^2$. Quel est son niveau sonore ?

2) Quelle intensité ne doit pas être dépassée pour une oreille dont le seuil de douleur se situe à $120\ \mathrm{dB}$?

3) Si on augmente le niveau sonore d'un son de 20 dB que se passe-t-il pour son intensité sonore ?

4) En général, on cherche plutôt à réduire le niveau sonore. Comment réduire l'intensité d'un son pour diminuer niveau sonore de $10\ \mathrm{dB}$?

5) Jade possède une enceinte dans sa chambre dont puissance fournit un niveau sonore de $80\ \mathrm{dB}$. Elle souhaite en acheter une seconde de puissance identique et l'installer à côté de celle qu'elle possède déjà.

Ses parents protestent : « 160 dB, mais tu risques d'avoir lésions irréversibles aux oreilles ! »

Sachant que les intensités sonores de plusieurs sons d'un même point s'additionnent, que peut-on penser de l'affirmation des parents de Jade ?

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E04

EXERCICE N°1

L'échelle de Richter, basée sur les mesures faites par les sismographes, exprime la magnitude M d'un séisme. Cette magnitude se calcule selon la formule :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

1) Que vaut la magnitude M lorsque

1.a) $A = A_0$? **1.b)** $A = 10 \times A_0$? **1.c)** $A = 10\,000 \times A_0$?

2) Un séisme est dit « léger », provoquant des secousses d'objet à l'intérieur des maisons et quelques faibles dommages, lorsque sa magnitude est comprise entre 4 et 5.
Montrer qu'alors son amplitude est telle que : $10^4 \times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5 \times A_0$.

3) La magnitude connue la plus importante est de 9,5. Elle a été enregistrée au Chili en mai 1960. Exprimer son amplitude A en fonction de A_0 .
(On donnera une valeur approchée de l'amplitude sous la forme $a \times 10^b \times A_0$, $a < 10$ et b entier naturel).

4) Un pays vient de connaître un séisme de magnitude 8 suivi d'une réplique de magnitude 4. Un journaliste écrit alors que la réplique a été deux fois moins puissante que le premier séisme. Que pensez-vous de cette affirmation du journaliste ? Argumentez votre réponse.

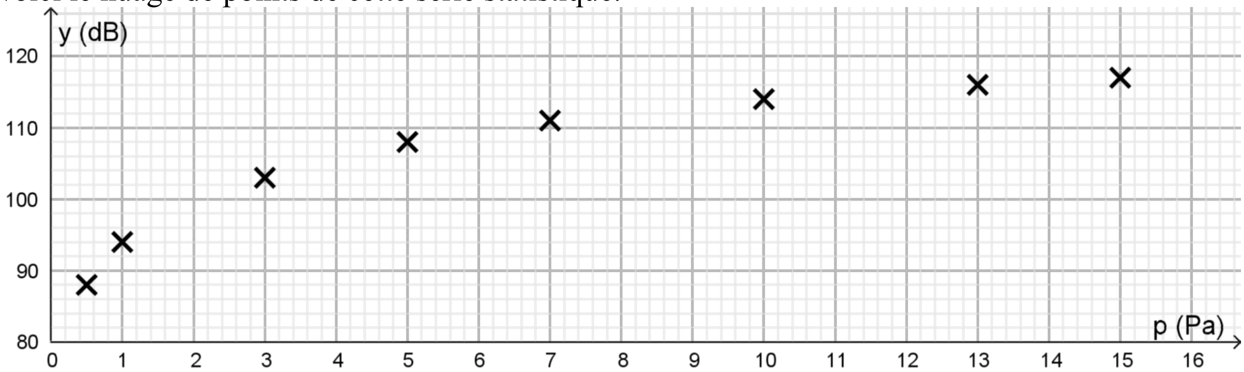
LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E04

EXERCICE N°2

Dans une grande salle de concert, pendant huit soirées différentes, on a relevé la pression acoustique ambiante (en Pascal : Pa) ainsi que le niveau d'intensité sonore (en décibel : dB) du bruit responsable de cette pression. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Pression acoustique : p_i	0,5	1	3	5	7	10	13	15
Intensité sonore : y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

Voici le nuage de points de cette série statistique.



1) Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

2) On pose $x=\log(p)$. Reproduire et compléter te tableau suivant en arrondissant les valeurs de x à 10^{-2} près.

x_i								
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

3) Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 dB sur l'axe des ordonnées en prenant 80 pour origine), représenter le nuage de points $M(x_i ; y_i)$. Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

4) Calculer les coordonnées du point moyen $G(x_G ; y_G)$ du nuage et placer ce point sur le graphique.

5) Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près). Tracer cette droite dans le repère.

6) Lors d'un concert de hard rock, l'oreille des spectateurs peut être soumise à la pression de 20 Pa. Estimer par le calcul l'intensité sonore atteinte lors d'un tel concert (résultat arrondi au décibel près).

III Compléments de cours

III.1 Un peu d'histoire

John Napier, 1614
Source : Wikipédia

En 1614, John Napier publie les premières tables de **logarithmes** :
logos = rapport, relation,
arithmeticos = nombre
Il n'a pas conscience qu'il décrit alors une nouvelle fonction.
La notation « Log » qui apparaît deux ans plus tard désigne alors le logarithme naturel (ou logarithme népérien qui n'est pas le logarithme décimal – voir la remarque n°4).
Il faudra attendre 1697 pour que Leibniz fasse le lien avec les fonctions exponentielles (et que nous puissions 3 siècles plus tard parler ensemble du logarithme décimal)

Gottfried Wilhelm Leibniz
Source : Wikipédia

IV Quelques démonstrations

Pour les curieux, nous démontrons dans ce paragraphe quelques propriétés du logarithme décimal.

Dans la définition n°1, l'existence et l'unicité du réel c tel que $10^c = a$ sont admises et le resteront à notre niveau…

En revanche, nous pouvons démontrer les propriétés 3 à 6… C'est parti.
Soient a et b des réels strictement positifs.

On peut écrire (grâce à la définition n°1) que $a=10^c$ et $b=10^d$ avec c et d des nombres réels.

On a alors :

- $\log(a \times b) = \log(10^c \times 10^d) = \log(10^{c+d}) = c+d = \log(a)+\log(b)$

ainsi $\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{10^c}{10^d}\right) = \log(10^{c-d}) = c-d = \log(a)-\log(b)$

ainsi $\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$ et si $a=1$ $\boxed{\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)}$

- Soit également un réel x

$$\log(a^x) = \log\left((10^c)^x\right) = \log(10^{x \times c}) = x \times c = x \times \log(a)$$

ainsi $\boxed{\log(a^x) = x \times \log(a)}$

en particulier pour $x = n$ un entier relatif $\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$