EXERCICE N°4 *La méthode de complétion du carré (Le corrigé)*

Le principe

1) Soit a un nombre réel. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2ax = (x+a)^2-a^2$

$(x+a)^2-a^2 = x^2+2ax+a^2-a^2 = x^2+2ax$

Application

2) À l'aide de l'égalité que vous venez de démontrer, déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

2.a) x^2+4x+7 **2.b)** x^2+7x-8 **2.c)** x^2-3x+6 **2.d)** x^2+bx+5 où $b \in \mathbb{R}$

2.a) x^2+4x+7

$$x^2+4x+7 = x^2+2\times\underbrace{2}_{a}\times x+7 = (x+2)^2-2^2+7 = (x+2)^2+3$$

Ainsi $\boxed{x^2+4x+7 = (x+2)^2+3}$

2.b) x^2+7x-8

$$x^2+7x-8 = x^2+2\times\underbrace{\frac{7}{2}}_{a}\times x-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2+7x-8 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}}$

2.c) x^2-3x+6

$$x^2-3x+6 = x^2-2\times\underbrace{\frac{3}{2}}_{a}\times x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2-3x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$

2.d) x^2+bx+5 où $b \in \mathbb{R}$

$$x^2+bx+5 = x^2+2\times\underbrace{\frac{b}{2}}_{a}\times x+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{-b^2+20}{4}$$

Ainsi $\boxed{x^2+bx+5 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{-b^2+20}{4}}$

3) Adaptez la méthode pour déterminer la forme canonique des trinômes suivants

3.a) $3x^2-5x+8$ **3.b)** $6x^2+7x-2$ **3.c)** $-4x^2+3x-7$

3.a) $3x^2-5x+8$

$$3x^2-5x+8 = 3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}\right] = 3\left[x^2-2\times\frac{\frac{5}{3}}{2}x+\frac{8}{3}\right] = 3\left[x^2-2\times\frac{5}{6}x+\frac{8}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{36}\right]$$

$$= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{12}$$

Ainsi $\boxed{3x^2-5x+8 = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{71}{12}}$

3.b) $6x^2+7x-2$

$$6x^2+7x-2 = 6\left[x^2+\frac{7}{6}x-\frac{2}{6}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{\frac{7}{6}}{2}x-\frac{1}{3}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{7}{12}x-\frac{1}{3}\right]$$

$$= 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{7}{12}\right)^2-\frac{1}{3}\right] = 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}\right]$$

$$= 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}$$

Ainsi $\boxed{6x^2+7x-2 = 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}}$

3.c) $-4x^2+3x-7$

$$-4x^2+3x-7 = -4\left[x^2+\frac{3}{-4}x-\frac{7}{-4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{\frac{3}{4}}{2}x+\frac{7}{4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{3}{8}x+\frac{7}{4}\right]$$

$$= -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{4}\right] = -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64}\right]$$

$$= -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64}$$

Ainsi $\boxed{-4x^2+3x-7 = -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64}}$