LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL E04

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

L'échelle de Richter, basée sur les mesures faites par les sismographes, exprime la magnitude M d'un séisme. Cette magnitude se calcule selon la formule :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

1) Que vaut la magnitude M lorsque

1.a) $A = A_0$?

$$M = \log\left(\frac{A_0}{A_0}\right) = \log(1)$$

Ainsi $\boxed{M=0}$

1.b) $A = 10 \times A_0$?

$$M = \log\left(\frac{10\times A_0}{A_0}\right) = \log(10)$$

Ainsi $\boxed{M=1}$

1.c) $A = 10\,000 \times A_0$?

$$M = \log\left(\frac{10\ 000\times A_0}{A_0}\right) = \log(10\ 000)$$

Ainsi $\boxed{M=4}$

2) Un séisme est dit « léger », provoquant des secousses d'objet à l'intérieur des maisons et quelques faibles dommages, lorsque sa magnitude est comprise entre 4 et 5.
Montrer qu'alors son amplitude est telle que : $10^4 \times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5 \times A_0$.

$$4 \leqslant M \leqslant 5 \Leftrightarrow 4 \leqslant \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \leqslant 5 \Leftrightarrow 10^4 \leqslant \frac{A}{A_0} \leqslant 10^5 \Leftrightarrow 10^4\times A_0 \leqslant A \leqslant 10^5\times A_0$$

3) La magnitude connue la plus importante est de 9,5. Elle a été enregistrée au Chili en mai 1960. Exprimer son amplitude A en fonction de A_0 .
(On donnera une valeur approchée de l'amplitude sous la forme $a\times 10^b \times A_0$, $a<10$ et b entier naturel).

$$M = 9{,}5 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 9{,}5 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{9{,}5} = 3162277660 \approx 3{,}2\times 10^9$$

On en déduit que $\boxed{\text{l'amplitude valait approximativement } 3{,}2\times 10^9\times A_0}$

4) Un pays vient de connaître un séisme de magnitude 8 suivi d'une réplique de magnitude 4.
Un journaliste écrit alors que la réplique a été deux fois moins puissante que le premier séisme.
Que pensez-vous de cette affirmation du journaliste ? Argumentez votre réponse.

▪ Calculons les deux amplitudes :

$$M = 8 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 8 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^8 \Leftrightarrow A=10^8\times A_0$$

$$M = 4 \Leftrightarrow \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^4 \Leftrightarrow A=10^4\times A_0$$

▪ Calculons le rapport des deux.

$$\frac{10^4\times A_0}{10^8\times A_0} = 10^{-4}$$

▪ On en déduit que $\boxed{\text{la réplique était 10000 fois moins puissante que le premier séisme}}$.
$\boxed{\text{L'affirmation du journaliste est donc fantaisiste...}}$

La formule de la magnitude a été simplifiée pour l'exercice (pour les curieux : ici par exemple)
En revanche les proportions restent valables : De façon approximative quand la magnitude augmente de 1 ($+1$) l'amplitude est multipliée par 10 ($\times 10$)

$+1$ → $\times 10$
$+2$ → $\times 100$
$+3$ → $\times 1000$
$\vdots$ $\vdots$