Croissance exponentielle

I Les suites géométriques

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions et propriétés suivantes seront écrites pour le cas où le premier rang est zéro . Nous les adapterons selon les besoins des activités.

Définition n°1. ***Suite géométrique***

Une **suite géométrique** est une suite telle que :
Il existe un nombre réel q tel que :
- Pour tout entier naturel n, on peut écrire $u(n+1) = u(n)\times q$
- q est appelé la **raison de la suite**.
- l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$) , il suffit de multiplier par q le terme actuel ($u(n)$).

Exemple n°1.

Soit la suite géométrique v de terme initial $v(0) = 4{,}5$ et de raison $r = 2$. Les quatre premiers de v sont :
$v(0) = 4{,}5$, $v(1) = 9$, $v(2) = 18$ et $v(3) = 36$.

Propriété n°1. ***Exprimer u(n) en fonction de n***

Une suite $(u(n))$ est géométrique de raison q si et seulement si :
Pour tout entier naturel n, on a $u(n) = u(0)\times q^n$

Remarque n°3.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1)\times q^{n-1}$

Exemple n°2.

Dans l'exemple n°1, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v(n) = 4{,}5\times 2^n$.

II Et la croissance exponentielle dans tout ça ?

Propriété n°2. ***Pour la croissance***

Soit u une suite géométrique de terme initial strictement positif et de raison $q > 0$:
- u est strictement croissante si et seulement si $q > 1$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$ et
- u est constante si et seulement si $q = 1$.

Remarque n°4.

Et pour $q \leqslant 0$?
Si $q = 0$ alors tous les termes suivant le terme initial sont nuls.
Et si $q < 0$ alors la suite est alors alternée (si un terme est positif alors son suivant est négatif et vice et versa).

Exemple n°3.

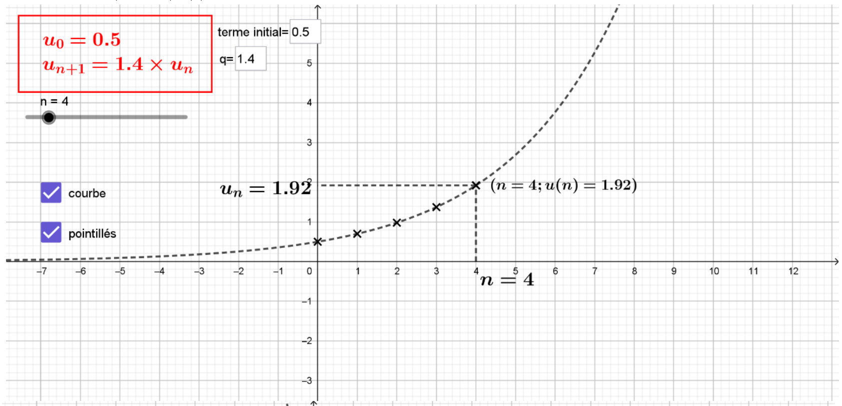
La suite géométrique w de terme initial $w_0 = 0{,}1$ de raison $r = 0{,}5$ est strictement décroissante.

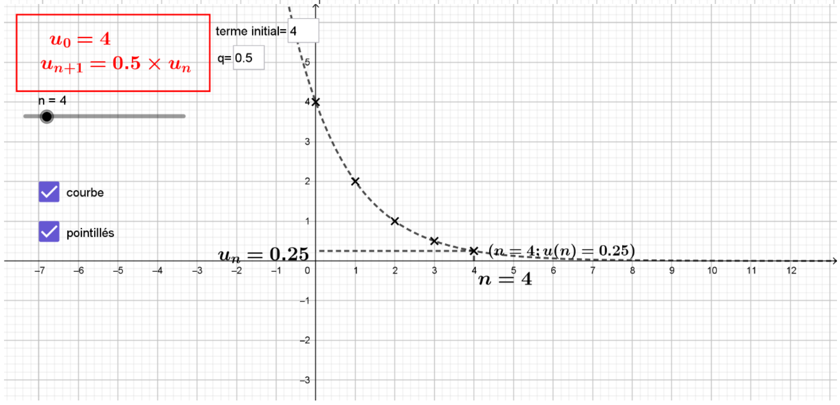
Remarque n°5.

- Si le terme initial est strictement négatif alors dans la propriété n°2 les mots « croissante » et « décroissante » sont échangés.
- Si le terme initial est nul alors tous les autres le sont aussi.

Remarque n°6. ***Représentation graphique***

Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.





Les pointillés symbolisent la courbe à laquelle appartiennent les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

Remarque n°7. ***Pour le côté exponentielle***

La courbe en pointillés est la représentation graphique d'une fonction exponentielle. Nous allons préciser cela tout de suite...

III Les fonctions exponentielles

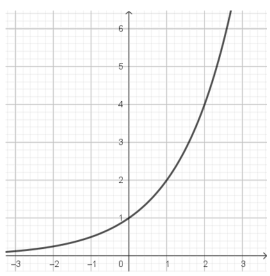
Définition n°2. ***Fonction exponentielle de base a***

Soit a un nombre réel strictement positif.

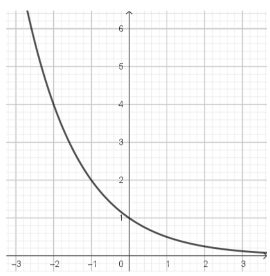
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = a^x$

Exemple n°4.

$f(x) = 2^x$ ($a = 2 > 1$)



$f(x) = 0{,}5^x$ ($a = 0{,}5 \in]0;1[$)



Visualiser plus d'exemples

Remarque n°8.

Si x est un nombre entier alors a^x correspond à la puissance $x^{\text{ième}}$ de a.

Remarque n°9.

Comme pour les suites arithmétiques, on utilisera les suites géométriques pour modéliser des phénomènes à croissance exponentielle discrète et les fonctions exponentielles pour les phénomènes continus. Les fonctions exponentielles sont en quelque sorte le prolongement des suites géométriques.

IV Les outils à connaître

Propriété n°3. Règles de calculs

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels :

$\boxed{a^0 = 1}$; $\boxed{a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}}$; $\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}}$; $\boxed{\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$;

$\boxed{\left(a^x\right)^y = a^{x\times y}}$; $\boxed{a^x \times b^x = (a\times b)^x}$ et $\boxed{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$.

Exemple n°5.

- $10{,}45^0 = 1$; ▪ $5{,}7^{-3{,}1} = \dfrac{1}{5{,}7^{3{,}1}}$;
- $1{,}2^{3{,}4} \times 1{,}2^{-5{,}6} = 1{,}2^{3{,}4+(-5{,}6)} = 1{,}2^{-2{,}2}$;
- $\dfrac{1{,}2^{3{,}4}}{1{,}2^{-5{,}6}} = 1{,}2^{3{,}4-(-5{,}6)} = 1{,}2^{9}$;
- $\left(5{,}8^{3{,}1}\right)^{-2{,}7} = 5{,}8^{3{,}1\times(-2{,}7)} = 5{,}8^{-8{,}37}$ et
- $4{,}1^{7{,}1} \times 3{,}2^{7{,}1} = (4{,}1\times 3{,}2)^{7{,}1} = 15{,}17^{7{,}1}$

Propriété n°4. Taux d'évolution et Coefficient Multiplicateur

Soit t un taux d'évolution et CM le coefficient multiplicateur correspondant, on a alors la relation suivante :

$$\boxed{CM = 1+t}$$

Exemple n°6.

- Pour une hausse de 32 %, on a $t = 0{,}32$ et $CM = 1{,}32$
- Pour une baisse de 32 %, on a $t = -0{,}32$ et $CM = 0{,}68$

Remarque n°10. Taux d'évolution global t_g : Attention

On rappelle que les taux d'évolution ne s'additionnent pas.

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % correspondent à une baisse de 4 % .
($t_1 = 0{,}2 \rightarrow CM_1 = 1{,}2$, $t_2 = -0{,}2 \rightarrow CM_2 = 0{,}8$,
$CM_g = 1{,}2\times 0{,}8 = 0{,}96 \rightarrow t_g = -0{,}04$ soit une baisse de 4%)

Propriété n°5. Racine n^{ième}

Soit c un nombre réel positif ou nul, l'équation $x^n = c$ admet une unique solution réelle : $c^{\frac{1}{n}}$.

Exemple n°7. $x^5 = 2{,}5$ ***admet pour unique solution réelle :*** $2{,}5^{\frac{1}{5}}$ **.**

Propriété n°6. ***Le taux moyen***

Si CM_g est un coefficient multiplicateur global obtenu à partir de n coefficients multiplicateurs alors le taux moyen t_m s'obtient avec la formule : $\boxed{t_m = CM_g^{\frac{1}{n}} - 1}$.

Méthode n°1. ***Calculer un taux moyen à l'aide du Coefficient Multiplicateur moyen.***

Énoncé

On applique successivement une hausse de 11 %, une baisse de 9 % et enfin une hausse de 10 %. Déterminer le taux d'évolution moyen.

« Au brouillon »

Posons $t_1 = 0{,}11$, $t_2 = -0{,}09$, $t_3 = 0{,}1$ et les coefficients multiplicateurs correspondants : $CM_1 = 1{,}11$, $CM_2 = 0{,}91$, $CM_3 = 1{,}1$.

On calcule le coefficient multiplicateur global : $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3$
$CM_g = 1{,}11111$.

On calcule le coefficient multiplication moyen CM_m en résolvant dans $\mathbb{R}$ l'équation : $CM_m^3 = CM_g$ ce qui nous donne $CM_m = CM_g^{\frac{1}{3}}$ soit $CM_m = 1{,}11111^{\frac{1}{3}}$.

et enfin on calcule le taux moyen t_m : $t_m = CM_m - 1 = 1{,}11111^{\frac{1}{3}} - 1$

Bien sûr, sur la copie on résume un peu…

Réponse

Notons t_m le taux moyen cherché.

$$t_m = (1{,}11 \times 0{,}91 \times 1{,}1)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0{,}0357$$

Soit une $\boxed{\text{hausse moyenne d'environ } 3{,}57\ \%}$.