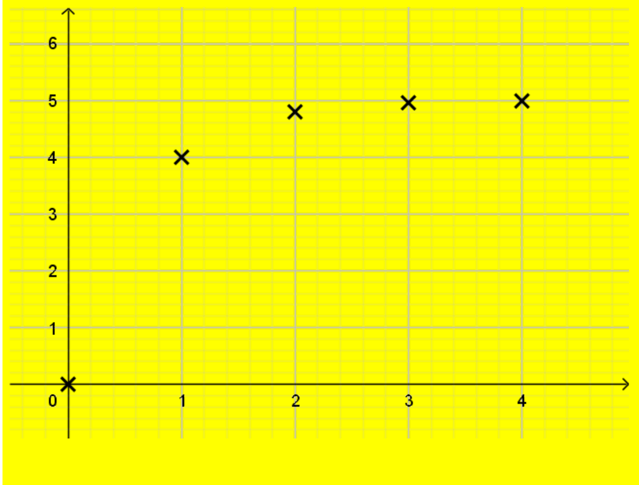
SUITES NUMÉRIQUES E06

EXERCICE N°1 Suite arithmético-géométrique (Le corrigé)

Soit u la suite définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=0{,}2\,u_n+4$.

1) Calculer puis représenter les 5 premiers termes de la suite.

- $\boxed{u_0=0}$
- $u_1 = 0{,}2\,u_0+4 = 0{,}2\times0+4$
  $\boxed{u_1=4}$
- $u_2 = 0{,}2\,u_1+4 = 0{,}2\times4+4$
  $\boxed{u_2=4{,}8}$
- $u_3 = 0{,}2\,u_2+4 = 0{,}2\times4{,}8+4$
  $\boxed{u_3=4{,}96}$
- $u_4 = 0{,}2\,u_3+4 = 0{,}2\times4{,}96+4$
  $\boxed{u_3=4{,}992}$



2) Conjecturer les variations de u .

D'après le graphique, la suite u semble être croissante.

On n'oublie pas : on ne sait pas si une conjecture va être vérifiée ou non, donc on utilise « semble » plutôt que « est ».

3) Démontrer que u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

▪ Démontrons que u n'est pas arithmétique.

$u_1-u_0 = 4-0 = 4$

$u_2-u_1 = 4{,}8-4 = 0{,}8$

Les différences successives n'étant pas égales, la suite n'est pas arithmétique.

Ici le graphique est suffisamment explicite pour affimer que les points du nuage ne sont pas alignés et que par conséquent la suite n'est pas arithmétique. On pouvait procédér ainsi également.

▪ Démontrons que u n'est pas géométrique.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{4}{0} =$ *AÏE AÏE AÏE*

Bien sûr, avant de calculer les quotients successifs, on s'assure de ne pas avoir un dénominateur nul !

Ici, on peut déjà affirmer que la suite n'est pas géométrique en écrivant :

« Si la suite était géométrique, elle aurait une raison q , or il n'existe aucun nombre tel que $u_1 = u_0\times q$ »

(si vous n'êtes pas convaincus :

« zéro (u_0) fois quelque chose (q) égale quatre (u_1) »…)

Sinon on peut, bien sûr, faire comme d'habitude :

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4{,}8}{4} = 1{,}2$

$\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{4{,}96}{4{,}8} \approx 1{,}03$

Les quotients successifs n'étant pas égaux, la suite n'est pas géométrique.

4) On pose $v_n=u_n-5$ pour tout n . Calculer $v_0\,;v_1\,;v_2$.

$v_0 = u_0-5 = 0-5$
$\boxed{v_0 = -5}$

$v_1 = u_1-5 = 1-5$
$\boxed{v_1 = -1}$

$v_2 = u_2-5 = 4{,}8-5$
$\boxed{v_2 = -0{,}2}$

5) Conjecturer la nature de la suite v.

Bon, réfléchissons !

On ne connaît, comme suites particulières, que les suites arithmétiques et les suites géométriques… Il paraît évident v n'est pas arithmétique (si vous n'êtes pas convaincus, calculez les différences successives).

On va donc parier sur géométrique et pour se rassurer, on vérifie que $\frac{-1}{-5} = \frac{-0{,}2}{-1}$.

La suite v semble géométrique.

6) Le démontrer.

Ici, on va présenter une méthode classique à retenir.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-5 \\ &= 0{,}2\,u_n+4-5 \\ &= 0{,}2\,u_n-1 \\ &= 0{,}2\left(u_n-\frac{1}{0{,}2}\right) \qquad \text{(cette ligne est expliquée après)} \\ &= 0{,}2\left(u_n-5\right) \\ &= 0{,}2\,v_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier n, $v_{n+1}=0{,}2\,v_n$.

On reconnaît une suite géométrique de raison $q=0{,}2$ (et de premier terme $v_0 = -5$

Pour la ligne citée : On met en facteur le coefficent qui multiplie u_n et comme par magie on obtient le « -5 » qui nous manquait.

Bien sûr, rien de magique, mais il faudrait parler de limite de suite et faire un peu de calcul littéral pour justifier que cela marche bien.

7) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n :

D'une part :

$$v_n = u_n-5 \Leftrightarrow u_n = v_n+5$$

D'autre part :

$$v_n = v_0 \times q^n = -5\times 0{,}2^n$$

Comme notre suite v est géométrique, on peut effectuer notre petit raisonnement habituel pour trouver cette formule…

En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{u_n = -5\times 0{,}2^n+5}$$

Nous connaissons à présent un nouveau type de suite : les suites arithmético-géométriques.

Elles s'étudient toutes de la même façon et font souvent l'objet d'exercices dans les examens ou concours...