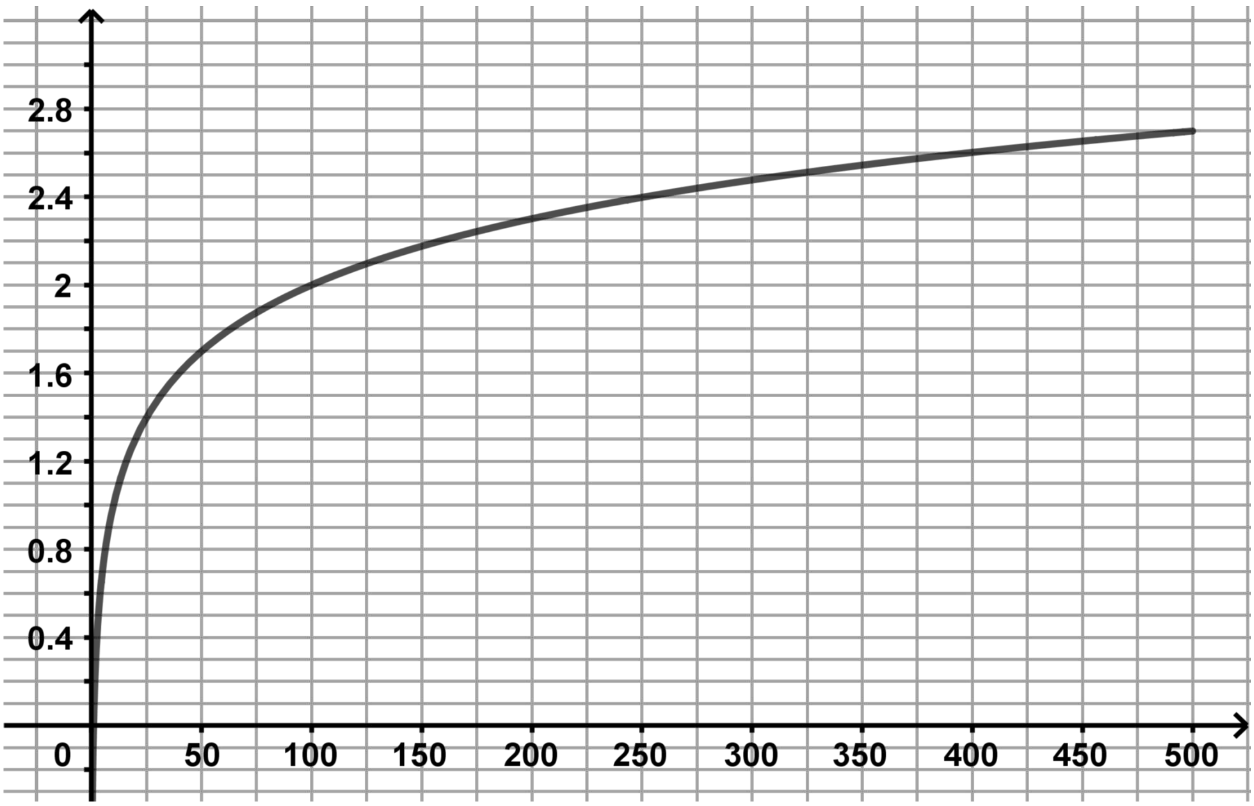
# DEVOIR SURVEILLÉ N°5 LE CORRIGÉ

| **Nom :** | **Prénom :** | **Classe :** |
|---|---|---|

***EXERCICE N°1*** ***(10 points)***

Dans cet exercice, la fonction logarithme décimal est notée $x \to \log(x)$. Sa courbe représentative sur l'intervalle ] 0 ; 500 ] est donnée ci-dessous.




**1)** Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée de $\log(300)$
On donnera le résultat arrondi dixième près.

$\log(300) \approx 2{,}5$

Un client place un capital $C$, exprimé en milliers d'euros, à intérêts composés.
Le taux annuel est noté $i$ et le capital acquis après $n$ annuités est noté $A_n$ .
Les variables $A_n$ , $C$ , $n$ et $i$ sont liées par la relation suivante :

$$\log(A_n) = \log(C) + n \times \log(1+i)$$

Dans tout l'exercice, on suppose que le taux annuel $i$ est de 5%. On pourra alors considérer que 0,021 est une valeur approchée de $\log(1+i)$.

**2)** Le client désire placer 100 000 €. Ainsi $C = 100$.

**2.a)** Calculer $\log(A_{30})$

$\log(A_n) = \log(C) + n \times \log(1+i)$ donc il suffit de remplacer $n$ par 30 , $C$ par 100 et $\log(1+i)$ par 0,021

$\log(A_{30}) \approx \log(100) + 30 \times 0{,}021 = 2{,}63$

Ainsi $\boxed{\log(A_{30}) \approx 2{,}63}$

**2.b)** Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

$\log(A_{30}) \approx 2{,}63$ donc $A_{30} \approx 10^{2{,}63} \approx 426{,}57952$

Au bout de 30 ans, le capital acquis sera d'environ 426 579,52 €

**3)** Le client a pour objectif maintenant d'obtenir un capital de 300 000 € au bout de 30 ans. On a ainsi : $\log(300)=\log(C)+30\times\log(1+i)$.
En détaillant votre démarche, donner une estimation de $C$. En déduire le capital à placer initialement pour atteindre l'objectif du client, arrondi au millier d'euros près.

$$\log(300)=\log(C)+30\times\log(1+i)$$
$$\Leftrightarrow \log(C) = \log(300)-30\times\log(1+i)$$

On en déduit que :

$$\log(C) \approx 2{,}5-30\times 0{,}021 = 2{,}5-0{,}63 = 1{,}87$$

Donc $C \approx 10^{1{,}87} \approx 74{,}13102$

Ainsi le client doit placer $\boxed{\text{environ } 74\,131{,}02 \text{ €}}$

ici on a utilisé l'estimation graphique de la question 1) et l'approximation proposée de $\log(1+i)$ .

Voici deux autres versions possibles :

1)

$$\log(C) \approx 2{,}48+30\times 0{,}021 = 2{,}48-0{,}63 = 1{,}85$$

Donc $C \approx 10^{1{,}87} \approx 74{,}13102$

Ainsi le client doit placer $\boxed{\text{environ } 70\,794{,}58 \text{ €}}$

2)

$$\begin{aligned}\log(C) &= \log(300)-30\times\log(1+i)\\ &= 2+\log(3)-30\times\log\left(\frac{105}{100}\right)\\ &= 2+\log(3)-30\times(\log(105)-2)\\ &= 62+\log(3)-30\times\log(105)\\ &\approx 1{,}84\end{aligned}$$

Donc $C \approx 10^{1{,}84} \approx 69{,}18309$

Ainsi le client doit placer $\boxed{\text{environ } 69\,183{,}09 \text{ €}}$

Comme vous pouvez le voir, il est intéressant de travail au maximum avec des valeurs exactes...

**4)** Le banquier affirme qu'il faut plus de 14 ans pour doubler le capital investi, quel que soit le capital initial.
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier votre réponse en résolvant une équation.

On veut doubler la capital $C$ , on va donc chercher le rang $n$ tel que $A_n = 2C$

On va donc résoudre l'équation : $\log(2C) = \log(C)+n\times\log(1+i)$

$$\log(2C) = \log(C)+n\times\log(1+i)$$
$$\Leftrightarrow \log(2)+\log(C) = \log(C)+n\times\log(1+i)$$
$$\Leftrightarrow \log(2) = n\times\log(1+i)$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1+i)} \approx \frac{\log(2)}{0{,}021} \approx 14{,}3$$

On a bien $n > 14$ et on en déduit que $\boxed{\text{le banquier a raison}}$ .

Et en étant plus précis ?

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1+i)} = \frac{\log(2)}{\log(105)-2} \approx 14{,}2$$ Le banquier a toujours raison.

## *EXERCICE N°2* *(10 points)*

Suite à un héritage, un particulier décide de placer 120 000 € sur un compte bancaire afin de pouvoir acheter plus tard un bien immobilier. Connaissant le prix du marché, il estime qu'il lui faut augmenter son capital initial de 35% pour pouvoir acquérir le bien souhaité.

**1)** De quel capital le particulier a-t-il besoin pour acheter ce bien immobilier ?

$120\,000 \times 1{,}35 \ = \ 162\,000$

Le particulier a besoin de $\boxed{162\,000 \text{ €}}$ .

**2)** Le particulier envisage un placement bancaire de son capital de 120 000 € au taux annuel de 2,5%.

**2.a)** Calculer le capital acquis après deux années de placement.

Une augmentation de 2,5 % correspond à un $CM$ valant 1,025. Ainsi, chaque année le capital est multiplié par 1,025.

$120\,000 \times 1{,}025^2 \ = \ 126\,075$

Au bout de deux ans le capital est d' $\boxed{\text{environ } 126\,075 \text{ €}}$ .

**2.b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1{,}025^x = 1{,}35$ .

$$
\begin{aligned}
& 1{,}025^x \ = \ 1{,}35 \\
\Leftrightarrow \ & \log(1{,}0{,}25^x) \ = \ \log(1{,}35) \\
\Leftrightarrow \ & x \times \log(1{,}025) \ = \ \log(1{,}35) \\
\Leftrightarrow \ & x \ = \ \frac{\log(1{,}35)}{\log(1{,}025)} \ \approx \ 12{,}15
\end{aligned}
$$

Ainsi, cette équation possède $\boxed{\text{une unique solution : environ } 12{,}15}$

**3)** En déduire le nombre d'années nécessaires pour que le particulier dispose du capital suffisant pour acquérir son bien immobilier.

Le particulier devra attendre $\boxed{13 \text{ ans}}$ pour avoir le capital nécessaire.

**4)** Le particulier souhaite négocier le taux annuel de son placement, exprimé en pourcentage, afin de pouvoir acquérir le bien immobilier après 10 années de placement. On admet que le taux pour atteindre le souhait du particulier vérifie l'équation $\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10} = 1{,}35$ .

Déterminer le taux d'intérêt annuel qui satisfera le souhait du particulier. On arrondira la valeur de $t$ à 0,01 % près.

$$
\begin{aligned}
& \left(1+\frac{t}{100}\right)^{10} = 1{,}35 \\
\Leftrightarrow \ & \log\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10}\right) \ = \ \log(1{,}35) \\
\Leftrightarrow \ & 10\log\left(1+\frac{t}{100}\right) \ = \ \log(1{,}35) \\
\Leftrightarrow \ & \log\left(1+\frac{t}{100}\right) \ = \ \frac{\log(1{,}35)}{10} \\
\Leftrightarrow \ & 1+\frac{t}{100} \ = \ 10^{\frac{\log(1{,}35)}{10}} \\
\Leftrightarrow \ & \frac{t}{100} \ = \ \left(10^{\frac{\log(1{,}35)}{10}} - 1\right) \times 100 \ \approx \ 3{,}05
\end{aligned}
$$

Le taux cherché est d' $\boxed{\text{environ } 3{,}05 \ \%}$ .