La fonction carré

I Définition et étude de la fonction carré

Définition n°1.

La fonction carré est la fonction définie par $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur D_f.
« f **est paire** » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f,\ f(-x)=f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction carré est paire.

preuve :

Notons g la fonction carré.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g = \mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^2 = -x \times (-x) = x^2 = g(x)$
Ainsi g est paire.

Remarque n°1.

Si une fonction est paire alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

LA FONCTION CARRÉ E01

EXERCICE N°1

1) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4$
Démontrer que f est paire.

2) Plus généralement, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax^2+b$ où a est un réel non nul et b est un réel quelconque.
Démontrer que g est paire.

EXERCICE N°2

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x+4$

La fonction f est-elle est paire ? Justifier.

EXERCICE N°3 Objectif Spé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a est un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit paire.

LA FONCTION CARRÉ

Définition n°3.

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

stricte croissance en images , stricte décroissante en images

Remarque n°2.

On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

LA FONCTION CARRÉ

Propriété n°2. ***Variations de la fonction carré***

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

preuve :

▪ Soient $a < b \leqslant 0$

$f(a)-f(b) = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

Or $a+b<0$ (car a et b sont négatifs) et $a-b<0$ (car $a<b$)

Donc $(a+b)(a-b) > 0$ d'où on déduit que $f(a)>f(b)$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

▪ De la même manière, on démontre que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. (Cette seconde partie est laissée à titre d'exercice)

LA FONCTION CARRÉ E02

EXERCICE N°1

Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $(-0,7)^2$ et $(-0,082)^2$

2) $(\pi - 1)^2$ et 16

3) $(2 - \pi)^2$ et $(\pi + 1)^2$

4) $(-1,25)^2$ et $2,25^2$

EXERCICE N°2

Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $\sqrt{0{,}02}$ et $\sqrt{0{,}005}$

2) $5\sqrt{7}$ et $4\sqrt{11}$

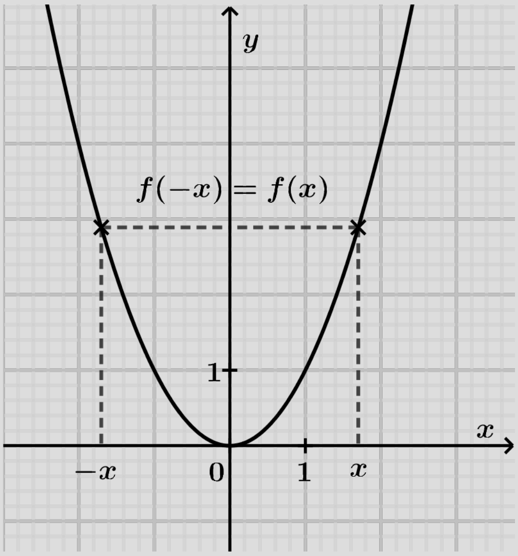
3) $17\sqrt{2}$ et 24

4) $-\sqrt{21}$ et $-\sqrt{14}$

LA FONCTION CARRÉ

Définition n°4. ***Représentation graphique***

La représentation graphique de la fonction carré est une **parabole**



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

Propriété n°3.

La représentation graphique de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Réviser pour IE01

LA FONCTION CARRÉ E03

Construction d'un point de la parabole d'équation $y=x^2$

Objectif :

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Pour x un réel donné, on veut justifier la construction du point $M(x\ ;\ x^2)$

LA FONCTION CARRÉ E03

EXERCICE N°1 Le protocole de construction

1) Placer un point A sur l'axe des abscisses. On note x son abscisse, ainsi . $A(x\ ;\ 0)$
2) Placer le point $U(1\ ;\ 0)$.
3) Construire le point $E(1\ ;\ x)$ (Pensez au compas…).
4) Tracer la droite (UE) et la droite (d) passant par A et parallèle à (UE) .
5) Tracer la droite (OE) , elle coupe la droite (d) en M .

EXERCICE N°2 La justification

Nous devons justifier que le point $M(x\ ;\ x^2)$,qui appartient évidemment à la droite (d) , appartient aussi à la droite (OE) .

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OM}$.
2) Démontrer que $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.
3) Conclure.

II Équations et inéquations du second degré.

II.1 Encadrements d'un nombre réel et arrondis

Propriété n°4. Équation du type $x^2 = a$

Soit a un nombre réel.

- Si $a > 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet une solution : *zéro* .
- Si $a < 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

preuve :

▪ Le deuxième point est évident.
▪ Le troisième découle du fait que le carré d'un nombre réel est toujous positif.
▪ Pour le premier point :

si $a > 0$ alors $\sqrt{a}$ existe.

Les équations suivantes sont alors équivalentes :

$x^2 = a$

$x^2 - a = 0$

$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

On en déduit que cette équation admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

LA FONCTION CARRÉ E04

EXERCICE N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2 = 49$ **2)** $x^2 = -100$ **3)** $(x+1)^2 = 2x+1$

4) $4x^2+81 = 0$ **5)** $36x^2-16 = 0$ **6)** $3x^2-7 = 0$

7) $(x+3)^2 = 7$ **8)** $4(2x+5)^2 = 29$

Remarque n°3.

Il est parfois utile de donner des valeurs approchées des solutions quand elles existent. c’est ce qui motive ce la suite de ce paragraphe.

Propriété n°5. ***(admise)***

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$

Définition n°5.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$

LA FONCTION CARRÉ

Exemple n°1.

$\dfrac{16812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \dfrac{16813}{10^3}$ donc l'encadrement de 16,8127 à 10^{-3} est :

$16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ et l'arrondi à 10^{-3} vaut 16,813.

EXERCICE N°2

1) Pourquoi utilise-t-on un symbole, en l'occurrence une lettre grecque, pour désigner le nombre « pi » ?

2) Que signifie l'écriture « $\pi \approx 3{,}14$ » ?

3) Pour chacun des nombres π , $\sqrt{2}$, et $\frac{1}{7}$, donner :

3.a) la troncature au dix-millième ;
3.b) un encadrement d'amplitude 10^{-3} ;
3.c) une valeur approchée par excès au millième ;
3.d) l'arrondi au centième.

EXERCICE N°3

Soient x et y deux réels.
On sait que $5{,}243$ est une valeur approchée de x à 10^{-3} près et que $5{,}24$ est une valeur approchée de y à 10^{-2} près. Peut-on affirmer que $x > y$?

LA FONCTION CARRÉ E04

EXERCICE N°4 python

On donne la fonction python ci-dessous

```python
def mystere(n):
    a = 1
    for k in range(1,n+1):
        p = 10**(-k)
        while a*2 < 2:
            a = a + p
        a = a - p
    return a,a+p
```

1) Que retourne `>>> mystere(1)` ?

2) Décrire le rôle de cette fonction.

II.2 Inéquations du type $x^2 \leqslant k$ et $x^2 \geqslant k$

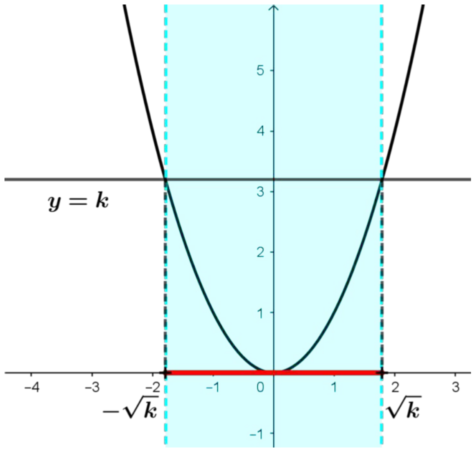
Propriété n°6.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

Si $k=0$ alors $S=\{0\}$

Si $k<0$ alors $S=\emptyset$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

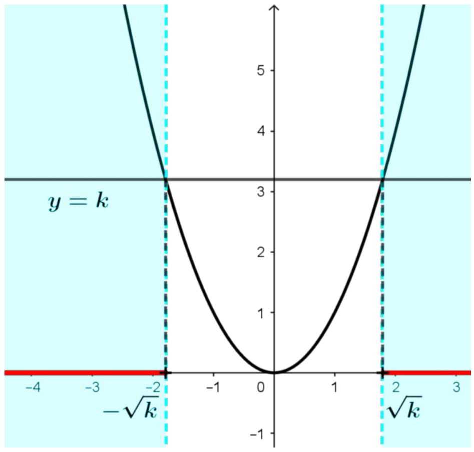
$$\begin{aligned}
& x^2 \leqslant k \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - k \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left((x+\sqrt{k} \geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \leqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k} \leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \geqslant 0)\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left((x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \geqslant \sqrt{k})\right) \\
\Leftrightarrow\ & (x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \qquad \text{(car l'autre cas est impossible)}
\end{aligned}$$

Propriété n°7.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors $S =]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k \leqslant 0$ alors $S = \mathbb{R}$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

$$\begin{aligned}
& x^2 \geqslant k \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - k \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((x+\sqrt{k} \geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \geqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k} \leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \leqslant 0)) \\
\Leftrightarrow\ & ((x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k})) \\
\Leftrightarrow\ & (x \geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k})
\end{aligned}$$

LA FONCTION CARRÉ E05

EXERCICE N°1

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $x^2 \leqslant 9$ **2)** $x^2 > 4$ **3)** $x^2 \geqslant 16$ **4)** $x^2 < -2$

LA FONCTION CARRÉ E05

EXERCICE N°2

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d’un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $2x^2-3 \leqslant 6$

2) $x^2+4 < 2$

3) $-7x^2+5 \leqslant 2x^2-11$

4) $-5x^2+10 > x^2-8$

Remarque n°4.

Dans les deux preuves précédentes, nous avons résolu des inéquations produits. La méthode utilisée peut-être résumée sous forme de tableau de signes. Ce qui motive le dernier paragraphe.

II.3 Inéquations produits.

Exemple n°2.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(4x-7)(5-2x)(3x+2) \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$5-2x$		$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$(4x-7)(5-2x)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

En notant S l’ensemble des solutions :

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°5.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs

Réviser pour IE02

LA FONCTION CARRÉ E06

EXERCICE N°1

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d’un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $(2x+3)(x-4) < 0$

2) $(-3x+6)(x-2) \geqslant 0$

LA FONCTION CARRÉ E06

EXERCICE N°2

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $x(2x+1)+x(3x-4) \geqslant 0$

2) $(2x+1)(x-3)+(2x+1)(3x+4) < 0$

3) $4x^2-(x+1)^2 \leqslant 0$

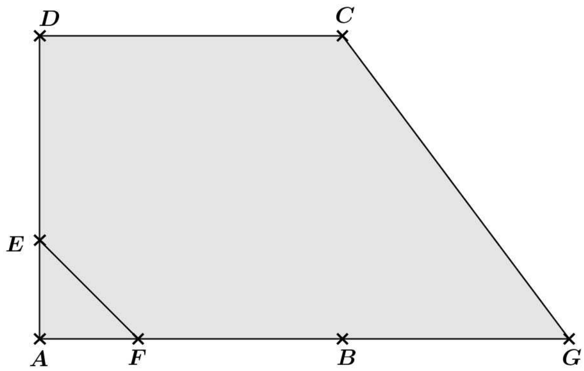
4) $(2x+3)^2-(4x-5)^2 > 0$

LA FONCTION CARRÉ E07

EXERCICE N°1

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. Soit G un point de la demi-droite $[AB)$ avec $BG = 3$ cm . Soit F un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AD]$ tels que le triangle AEF soit rectangle isocèle en A .

Où doit-on placer le point F pour que l'aire du triangle AEF soit égale au quart de l'aire du trapèze $AGCD$?



EXERCICE N°2

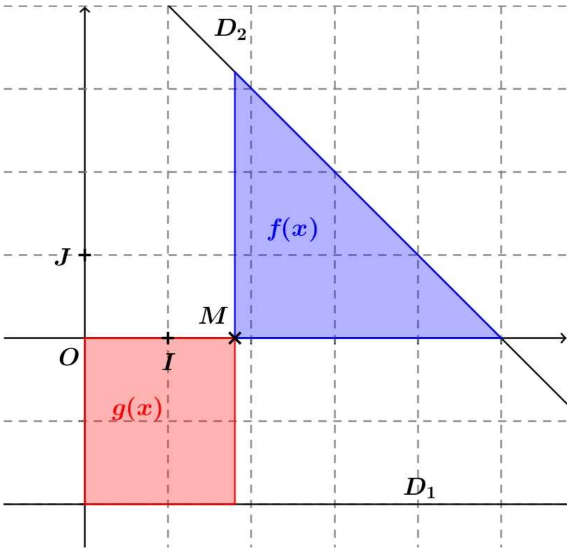
Soit n un nombre entier naturel.

1) Développer et réduire le nombre : $(n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre n^4+n^2+1 est premier.

EXERCICE N°3

Dans un repère ci-dessous, on a tracé les droites D_1 et D_2 . Le point M est mobile sur l'axe des abscisses. On note x l'abscisse de M . On a $x \in [0\ ;\ 5]$.



1) Exprimer l'aire de la surface du rectangle rouge, notée $g(x)$, en fonction de x .
2) Exprimer l'aire de la surface du triangle bleu rectangle isocèle en M , notée $f(x)$, en fonction de x .
3) Montrez que résoudre $f(x) > g(x)$ revient à résoudre $(x-7)^2-24 > 0$
4) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.
5) Donner l'ensemble des positions possibles de M pour que la surface bleue soit strictement plus grande que la rouge.

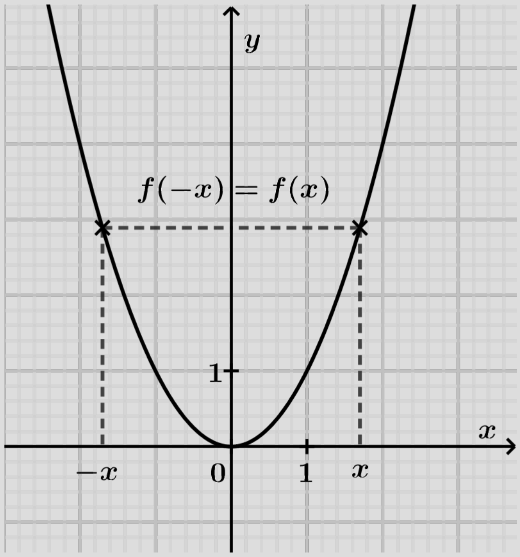
III Le résumé du cours

La fonction carré

La fonction carré est la fonction définie par $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

Elle est **paire** ce qui signifie que :
pour tout x, $g(-x)=g(x)$
Ses variations se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.
L'**axe des ordonnées** est l'**axe de symétrie de la parabole.**

f une fonction et $I\subset D_f$ un intervalle, a,b dans I

Stricte croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$
Stricte décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$
Croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b)$
Décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\geqslant f(b)$

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\dfrac{a}{10^n}\leqslant x<\dfrac{a+1}{10^n}$

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près** .

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ et $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\dfrac{a}{10^n}$ et de $\dfrac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\dfrac{a+1}{10^n}$

▪ Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

Si $k=0$ alors $S=\{0\}$

Si $k<0$ alors $S=\emptyset$

▪ Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}]\cup[\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k\leqslant 0$ alors $S=\mathbb{R}$