CROISSANCE LINÉAIRE

I Les suites arithmétiques

Définition n°1. Suite numérique

Une **suite** numérique (ou simplement suite) est une application $u:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$.
▪ Pour $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté :
u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 , on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions suivantes seront écrites pour le cas où $u_0 = 0$. Nous les adapterons selon les besoins des activités.

Exemple n°1.

Notation fonctionnelle	***Notation classique***
La suite $(u(n))_{n\geqslant 1}$ définie par : Pour $n\geqslant 1,$ $u(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. $u(1)=2$, $u(2)=3$, $u(3)=5$, $u(4)=7$, $u(5)=11$ …	La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : Pour $n\geqslant 1,$ u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=5$, $u_4=7$, $u_5=11$ …

Définition n°2. Suite arithmétique

Une **suite arithmétique** est une suite telle que :
Il existe un nombre réel *r* tel que :
▪ Pour tout entier naturel *n*, on peut écrire $u(n+1) = u(n)+r$
▪ r est appelé la **raison de la suite**.
▪ l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$) , il suffit d'ajouter *r* au terme actuel ($u(n)$).

Remarque n°3. Attention à l'écriture

En notation classique, cela donne « $u_{n+1} = u_n+r$ » qui ne veut pas dire la même chose que « $u_n+1 = u_n+r$ ».
u_{n+1} est bien le terme suivant alors que u_n+1 est le terme actuel augmenté de 1.
Il faudra donc apporter un soin particulier à l'écriture quand vous utiliserez la notation classique.

Exemple n°2.

Soit la suite arithmétique *v* de terme initial $v(0) = 4{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$. Les quatre premiers de *v* sont :
$v(0) = 4{,}5$, $v(1) = 6$, $v(2) = 7{,}5$ et $v(3) = 9$.

Remarque n°4. Attention aux rangs

Le quatrième terme est ici $v(3)$ et pas $v(4)$

Propriété n°1. Exprimer u(n) en fonction de n

Une suite $(u(n))$ est arithmétique de raison *r* si et seulement si :
Pour tout entier naturel *n*, on a $u(n) = u(0)+r\times n$

Remarque n°5.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1)+r\times(n-1)$

Exemple n°3.

Dans l'exemple n°2, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v(n) = 4{,}5+1{,}5n$.

II Et la croissance linéaire dans tout ça ?

Propriété n°2. Pour la croissance

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:
- u est strictement croissante si et seulement si $r > 0$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$ et
- u est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple n°4.

La suite arithmétique w de raison $r = -2$ est strictement décroissante.

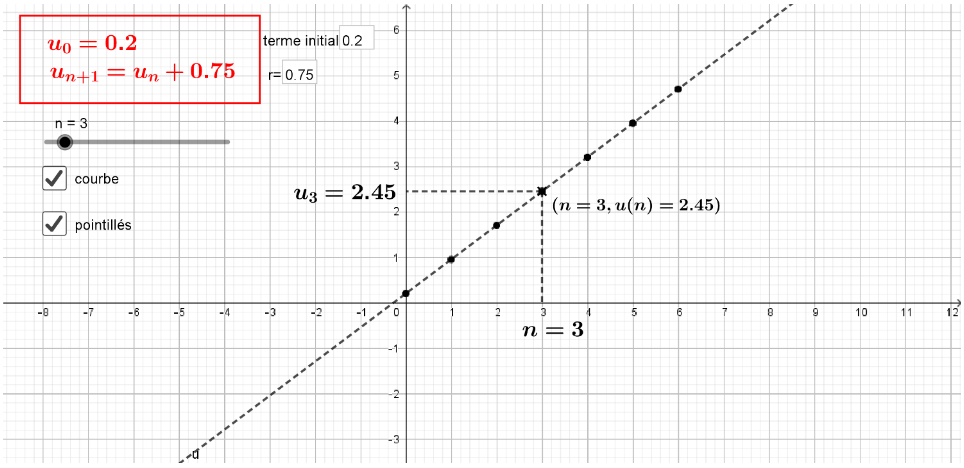
Remarque n°6.

Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.

Propriété n°3. Pour le côté linéaire

Si u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur une droite de coefficient directeur r .

Exemple n°5.



Remarque n°7.

Les pointillés symbolisent la droite sur laquelle sont alignés les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

Méthode n°1. Trouver l'équation réduite de la droite en pointillés

- Si le terme initial est $u(0)$ alors $u(n) = u(0)+r\times n$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(0)+r\,x$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(v(n))$ de terme initial $v(0)=4{,}5$ et de raison $r = 1{,}5$, on a $y = 4{,}5+1{,}5x$

- Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1)+(n-1)\times r$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(1)-r+r\,x$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(s(n))$ de terme initial $s(1)=6$ et de raison $r' = 1{,}5$, on a $y = 6-1{,}5+1{,}5x$ c'est à dire $y = 4{,}5+1{,}5x$.

Remarque n°8.

- Quand on étudie un phénomène discret à croissance linéaire, on utilise les suites arithmétiques.
- Quand on étudie un phénomène continu à croissance linéaire, on utilise les fonctions affines.