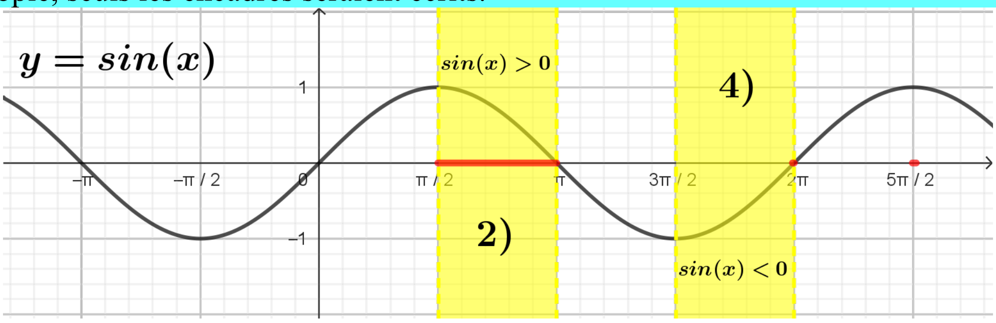
TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E03C

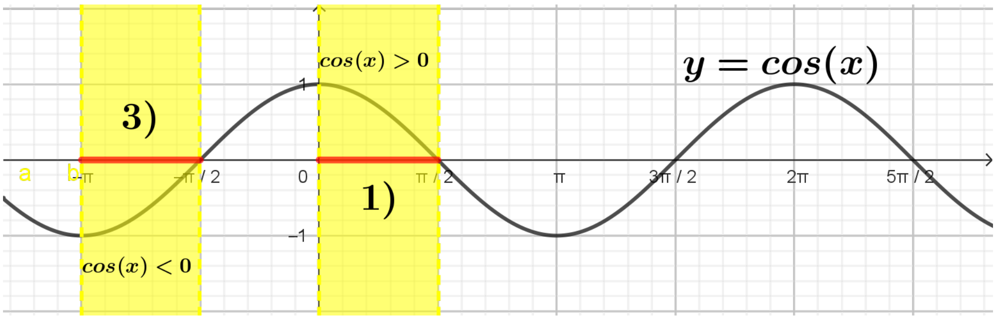
EXERCICE N°1 Appréhender les fonctions sinus et cosinus

Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$	2) $\sin\left(\dfrac{71\pi}{100}\right)$	3) $\cos\left(-\dfrac{17\pi}{23}\right)$	4) $\sin\left(\dfrac{81\pi}{44}\right)$
$0\pi < \dfrac{1}{12}\pi < \dfrac{1}{2}\pi$	$\dfrac{1}{2}\pi < \dfrac{1}{12}\pi < 1\pi$	$-1\pi < \dfrac{-17}{23}\pi < -\dfrac{1}{2}\pi$	$\dfrac{3}{2}\pi < \dfrac{81}{44}\pi < 2\pi$
$\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0}$	$\boxed{\sin\left(\dfrac{71\pi}{100}\right) > 0}$	$\boxed{\cos\left(-\dfrac{17\pi}{23}\right) < 0}$	$\boxed{\sin\left(\dfrac{81\pi}{44}\right) < 0}$

Sur une copie, seuls les encadrés seraient écrits.





Vous devez avoir une image mentale des deux courbes.
Retenez que :
« *cosinus passe par 1* » et que « *sinus s'obtient en décalant cosinus de* $\dfrac{\pi}{2}$ *vers la droite*»

EXERCICE N°2 ***Premières équations trigonométriques***

1) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et par symétrie que , $\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

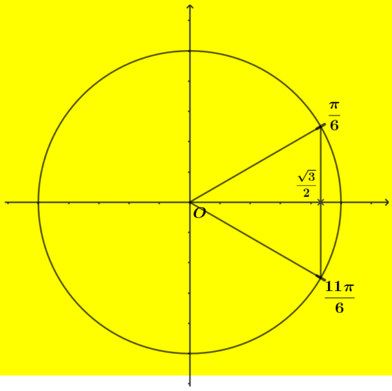
Notons alors S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$



2) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que : $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et par symétrie que , $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

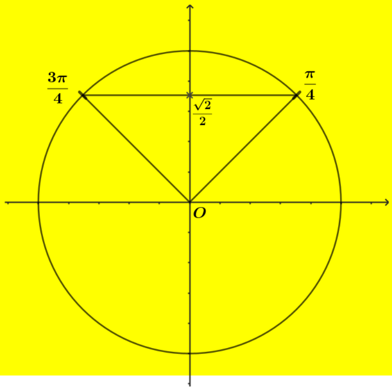
Notons alors S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$



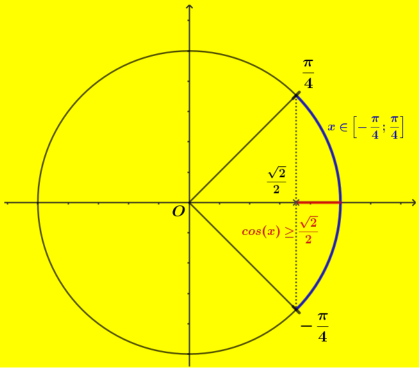
EXERCICE N°3 Première inéquations trigonométriques

1) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation : $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[\frac{-\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]}$

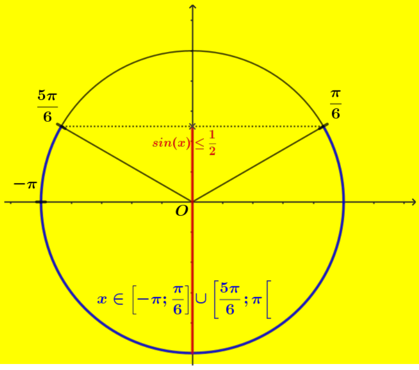


2) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation : $\sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

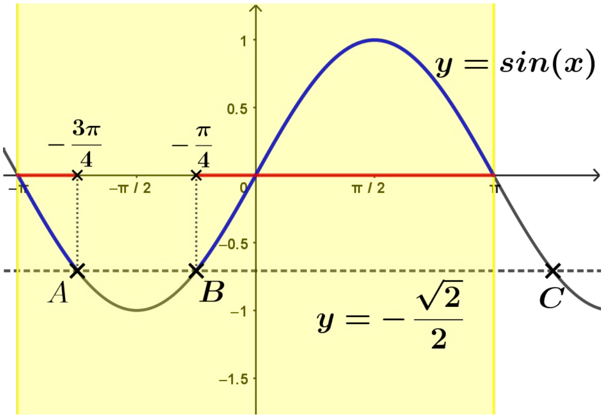
Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right[}$



EXERCICE N°4 *Se familiariser avec la courbe de la fonction sinus*



1) Donner les abscisses des points A et B .

Sur le graphique, A et B sont sur la courbe $y = \sin(x)$ au niveau de $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, sur [-π ; π[. Grâce aux valeurs remarquables :

$\boxed{x_A = -\frac{3\pi}{4}}$ et $\boxed{x_B = -\frac{\pi}{4}}$

2) Résoudre graphiquement sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les points A et B sont les seuls points d'intersection de la courbe et de la droite dont l'abscisse appartient à $[-\pi \ ; \ \pi[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{-\frac{\pi}{4} \ ; -\frac{3\pi}{4}\right\}}$

3) Résoudre graphiquement sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ l'inéquation $\sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les **points de la courbe situés au dessus de la droite** et dont l'abscisse appartient à $[-\pi \ ; \ \pi[$ sont ceux dont l'abscisse appartient à $\left[-\pi \ ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} \ ; \ \pi\right[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left[-\pi \ ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} \ ; \ \pi\right[}$

4) Déduire de l'abscisse du point A celle du point C .

Le point C a la même ordonnée que A et la fonction sinus est 2π-périodique . On en déduit que $x_C = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ c'est à dire $\boxed{x_C = \frac{5\pi}{4}}$.

EXERCICE N°5 ***Appréhender la périodicité***

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, est T-périodique.

La fonction	*La période* T	*La fonction*	*La période* T
1) $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$	$T = 1$	**2)** $f : x \mapsto \frac{2}{3}\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$	$T = \frac{2\pi}{7}$
3) $f : x \mapsto \sin(3x)$	$T = \frac{2\pi}{3}$	**4)** $f : x \mapsto \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}\right)$	$T = \frac{6\pi}{5}$

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos(2\pi x) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$$

Donc f est bien 1-périodique .

2)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x+\frac{2\pi}{7}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{2\pi}{7}$-périodique .

3)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x+2\pi) = \sin(3x) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{2\pi}{3}$-périodique .

4)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{6\pi}{5}\right) &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)-8}{3}\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x+6\pi-8}{3}\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}+2\pi\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x+\frac{6\pi}{5}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{6\pi}{5}$-périodique .

EXERCICE N°6 Utiliser la périodicité… et Python

On considère l'algorithme ci-contre écrit en langage Python.

```python
def restediveuclide(a,b):
    while a>b :
        a = a - b
    return a
```

1) Que calcule cet algorithme ?

Cette fonction renvoie le reste de la division euclidienne de a par b .

2) Calculer `restediveuclide(125,6)`

On obtient : $\boxed{5}$

3) Calculer `restediveuclide(43,6)` et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{43\pi}{3}\right)$ et de $\sin\left(\frac{43\pi}{3}\right)$.

On obtient : $\boxed{1}$

On en déduit qu'il existe un entier k tel que :

$43 = k\times 6+1$

On peut même préciser que $k = 7$.

En multipliant chaque membre par $\frac{\pi}{3}$,

$$\frac{43\pi}{3} = 7\times 6\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3} = 7\times 2\pi+\frac{\pi}{3}$$

Enfin ,

$$\cos\left(\frac{43\pi}{3}\right) = \cos\left(7\times 2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{43\pi}{3}\right) = \sin\left(7\times 2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$