La dérivation E02C

EXERCICE N°1 ***Preuve pour la fonction dérivée de*** $x \mapsto \sqrt{x}$ ***(à retenir)***

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{x+h} > 0$ et $\sqrt{x} > 0$

Donc $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} > 0$ *cqfd*

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$

$$\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

Quand h tend vers zéro, $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée est $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

4) À quoi servait la question 1) ?

Nous avons été amenés à diviser par l'expression $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, il fallait donc s'assurer que cela était toujours possible.

EXERCICE N°2 ***Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5***

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = k \times u(x)$

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

La fonction u est définie sur I.
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par u.

2) Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k\,u(x+h)-k\,u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$.

Pour tout $x \in I$,
quand h tend vers zéro, $k \times \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $\boxed{k \times u'(x)}$

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

$d(a-c)+a(b-d) = ad-cd+ab-ad = ab-cd$

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

Les fonctions f *et* g sont définies sur I .
Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par f ou g .

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h)-fg(x)}{h} &= \frac{\overbrace{f(x+h)}^{a}\overbrace{g(x+h)}^{b}-\overbrace{f(x)}^{c}\overbrace{g(x)}^{d}}{h}\\ &= \frac{\overbrace{g(x)}^{d}\overbrace{[f(x+h)-f(x)]}^{(a-c)}+\overbrace{f(x)}^{a}\overbrace{[g(x+h)-g(x)]}^{(b-d)}}{h}\\ &= g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $(fg): x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Pour tout $x \in I$, quand h tend vers zéro,

$g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tend vers $\boxed{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}$.

EXERCICE N°4 *Déterminer la fonction dérivée d'une fonction*

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \frac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi + 5\sqrt{3}$

Ces cinq fonctions sont constantes, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction nulle}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f_1'(x) = 0$, $f_2'(x) = 0$, $f_3'(x) = 0$, $f_4'(x) = 0$, $f_5'(x) = 0$.

2) $g_1 : x \mapsto x + 2$; $g_2 : x \mapsto x + 3\pi\sqrt{7}$

Ces deux fonctions sont la somme de la fonction identité et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la $\boxed{\text{fonction constante égale à } 1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g_1'(x) = 1$, $g_2'(x) = 1$.

3) $g_3 : x \mapsto 4x + 5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x + 8{,}5$;

Ces deux fonctions sont la somme du produit de la fonction identité par une constante k $(k = 4$ pour g_3 et $k = \sqrt{7}$ pour $g_4)$ et d'une fonction constante, elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur fonction dérivée est la fonction constante égale à k .

Ainsi : $\boxed{g_3' : x \mapsto 4}$ et $\boxed{g_4' : x \mapsto \sqrt{7}}$

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2 - 4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2 + 5x - 1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2 + 6x + \sqrt{3}$

▪ Pour h_1 :

h_1 est la forme $3 \times u + v$

où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -4$

Or :

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 0$

Donc

h_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_1'(x) = 3u'(x) + v'(x)$$
$$= 3 \times 2x + 0$$
$$\boxed{h_1'(x) = 6x}$$

▪ Pour h_2 :

h_2 est la forme $4 \times u + 5 \times v + w$

où $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_2'(x) = 4u'(x) + 5 \times v'(x) + w'(x)$$
$$= 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$
$$\boxed{h_2'(x) = 8x + 5}$$

▪ Pour h_3 :

h_3 est la forme $-2{,}5\times u + 6\times v + w$

où $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto -1$

Or :

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 1$

w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 0$

Donc

h_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= -2{,}5u'(x)+6\times v'(x)+w'(x) \\ &= -2{,}5\times 2x+6\times 1+0 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_3'(x) = -5x+6}$$

5) $h_4 : x \mapsto \frac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\frac{14}{3}x+33$

▪ Pour h_4 :

h_4 est la forme $\frac{5}{2}\times u-4\times v+3\times w-t$

où $u : x \mapsto x^3$, $v : x \mapsto x^2$, $w : x \mapsto x$ et $t : x \mapsto -7\sqrt{11}$

Or :

u, v, w et t sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$, $w'(x) = 1$ et $t'(x) = 0$

Donc

h_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_4'(x) &= \frac{5}{2}\times u'(x)-4\times v'(x)+3\times w'(x)-t'(x) \\ &= \frac{5}{2}\times 3x^2-4\times 2x+3\times 1-0 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_4'(x) = \frac{15}{2}x^2-8x+3}$$

On a bien compris comment ça marche mais franchement c'est long comme rédaction ! On pourrait pas aller un peu plus vite ?

▪ Pour h_5 :

h_5 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h_5'(x) = \pi\times 3x^2 + \sqrt{5}\times 2x - \frac{14}{3}\times 1 + 0$$

$$\boxed{h_5'(x) = 3\pi x^2+2\sqrt{5}x-\frac{14}{3}}$$

On fait bien attention
à arrêter le radical
avant le x

n est un
entier naturel

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\frac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\frac{4}{x}$; $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\frac{7}{x}$

▪ Pour h_6 :

h_6 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, donc h_6 est définie et dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ et :

« Qui peut le plus, peut le moins » :

$x : \mapsto x^n$ et $x : \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui contient $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ et

$x : \mapsto \frac{1}{x}$ n'est définie et dérivable que sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

On ne garde que la partie commune pour tout le monde :

$]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[\ \cap\ \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

$\forall x \in]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$,

$$h_6{}'(x) = 3\times nx^{n-1} + 2\times 2x + 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_6{}'(x) = 3nx^{n-1}+4x-\frac{3}{x^2}}$$

▪ Pour h_7 :

h_7 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, donc h_7 est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et :

$\forall x \in]0\ ;+\infty[$,

$$h_7{}'(x) = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8\times 15x^{14} - 4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_7{}'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 120x^{14} + \frac{4}{x^2}}$$

▪ Pour h_8 :

h_8 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, donc h_8 est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et :

$\forall x \in]0\ ;+\infty[$,

$$h_8{}'(x) = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} + 7\times 1 - 7\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h_8{}'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2} + 7}$$

On a « mis la constante à la fin »

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$

À ce stade du cours, nous savons pas comment dériver des fonctions écrites sous cette forme. Comme d'habitude, on se ramène à quelque chose que l'on connaît...

▪ Pour h_9 :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_9(x) &= (3x+4)(2x-7) \\ &= 6x^2-21x+8x-28 \\ &= 6x^2-13x-28 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_9{}'(x) = 6\times 2x-13\times 1-0$$

$$\boxed{h_9{}'(x) = 12x-13}$$

▪ Pour h_{10} :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= (7-2x)^2 \\ &= 4x^2-28x+49 \end{aligned}$$

Ainsi, h_9 est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h_{10}{}'(x) = 4\times 2x-28\times 1-0$$

$$\boxed{h_{10}{}'(x) = 4x-28}$$

LA DÉRIVATION E02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ (à retenir)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit : x est un nombre réel ($\mathbb{R}$), positif ($+$) , non nul ($*$)) et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous allons simplifier l'écriture $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ en utilisant une expression conjuguée (une technique à retenir : $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ a pour expression conjuguée $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$)

1) Justifier que $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ne s'annule pas.

2) Simplifier l'expression : $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction racine carrée.

4) À quoi servait la question 1) ?

EXERCICE N°2 Preuve de la deuxième ligne du tableau de la propriété n°5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) Simplifier l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto k \times u(x)$.

EXERCICE N°3 Preuve pour la dérivée du produit (pour la culture)

Préliminaires

Soit a, b, c et d quatre réels, démontrer que $\boxed{ab-cd = d(a-c)+a(b-d)}$.

La preuve

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $h \in \mathbb{R}$, tel que $x+h \in I$.

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) En utilisant les préliminaires, montrer que :

$$\frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $fg : x \mapsto fg(x) = f(x)g(x)$.

EXERCICE N°4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto 5$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{15}{7}$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{3}$; $f_4 : x \mapsto 2\pi$; $f_5 : x \mapsto -3\pi+5\sqrt{3}$

2) $g_1 : x \mapsto x+2$; $g_2 : x \mapsto x+3\pi\sqrt{7}$

3) $g_3 : x \mapsto 4x+5$; $g_4 : x \mapsto \sqrt{7}x+8{,}5$;

4) $h_1 : x \mapsto 3x^2-4$; $h_2 : x \mapsto 4x^2+5x-1$; $h_3 : x \mapsto -2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

5) $h_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$; $h_5 : x \mapsto -\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\dfrac{14}{3}x+33$

n est un entier naturel

6) $h_6 : x \mapsto 3x^n+2x^2+\dfrac{3}{x}$; $h_7 : x \mapsto 5\sqrt{x}+8x^{15}-\dfrac{4}{x}$; $h_8 : x \mapsto 5\sqrt{x}+7|x|-\dfrac{7}{x}$

7) $h_9 : x \mapsto (3x+4)(2x-7)$; $h_{10} : x \mapsto (7-2x)^2$