LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -10x + 62 - \dfrac{3240}{x}$.

1) Montrer que pour tout réel non nul, $f'(x) = \dfrac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}$

D'une part ,

$$f(x) = -10x + 62 - \frac{3240}{x}$$

$$f(x) = -10 \times x + 62 - 3240 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -10 \times 1 + 0 - 3240 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = -10 + \frac{3240}{x^2}$$

D'autre part,

$$\frac{-10(x-18)(x+18)}{x^2} = \frac{-10[x^2-324]}{x^2} = \frac{-10x^2+3240}{x^2} = \frac{-10x^2}{x^2} + \frac{3240}{x^2} = -10 + \frac{3240}{x^2}$$

On en déduit que $f'(x) = \dfrac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

Nous aurons du tableau de signes de la dérivée que nous allons inclure dans le tableau de variation.

- -10 est toujours négatif ; x^2 est positif sur $\mathbb{R}^*$
- $x - 18 > 0 \Leftrightarrow x > 18$ et
- $x + 18 > 0 \Leftrightarrow x > -18$

x	$-\infty$		-18		0		18		$+\infty$
-10		$-$	|	$-$	||	$-$	|	$-$	
$x-18$		$-$	|	$-$	||	$-$	0	$+$	
$x+18$		$-$	0	$+$	||	$+$	|	$+$	
x^2		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	422	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-298	$\searrow$	$-\infty$

- $f(-18) = 422$ et $f(18) = -298$

Limite en $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d'où

$\lim\limits_{x \to -\infty} -10x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 62 = 62$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'où

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3240}{x} = 0$

On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Limite en 0^-

- $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

d'où

$\lim\limits_{x \to 0^-} -10x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} 62 = 62$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

d'où

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-3240}{x} = +\infty$

On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

Limite en 0^+

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

d'où

$\lim\limits_{x \to 0^+} -10x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} 62 = 62$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

d'où

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-3240}{x} = -\infty$

On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} -10x = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 62 = 62$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3240}{x} = 0$

On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°2 Attention à l'ensemble de définition (Le corrigé)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}1\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2 - 0{,}1x - \dfrac{0{,}025}{x}$

1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0{,}1\ ;\ 1]$:

$$f\,'(x) = \frac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2}\ .$$

D'une part ,

$$f(x)= 2 - 0{,}1x - \frac{0{,}025}{x}$$

$$f(x)= 2 - 0{,}1\times x - 0{,}025\times\frac{1}{x}$$

$$f\,'(x)= 0 - 0{,}1 - 0{,}025\times\frac{-1}{x^2}$$

$$f\,'(x)= -0{,}1 + \frac{0{,}025}{x^2}$$

D'autre part,

$$\frac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2} = \frac{-0{,}1[x^2-0{,}25]}{x^2} = \frac{-0{,}1^2+0{,}025}{x^2} = \frac{-0{,}1x^2}{x^2}+\frac{0{,}025}{x^2} = -0{,}1+\frac{0{,}025}{x^2}$$

On en déduit que $f\,'(x) = \dfrac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2}$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1\ ;\ 1]$.

Nous aurons du tableau de signes de la dérivée que nous allons inclure dans le tableau de variation.

- $-0{,}1$ est toujours négatif,
- $x-0{,}5 > 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$ et
- $x+0{,}5 > 0 \Leftrightarrow x > -0{,}5$
- x^2 est positif sur $[0{,}1\ ;\ 1]$

Et là, on fait bien attention à l'ensemble de définition… $[0{,}1\ ;\ 1]$

x	$0{,}1$		$0{,}5$		1
$-0{,}1$		$-$	|	$-$	
$x-0{,}5$		$-$	0	$+$	
$x+0{,}5$		$+$	|	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1{,}74$	$\nearrow$	$1{,}9$	$\searrow$	$1{,}875$

$f(0{,}1)=1{,}74$; $f(0{,}5)=1{,}9$ et $f(1)=1{,}875$

Cela nous évite de faire des calculs qui ne sont pas demandés...

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{8}{x}$

Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$
									0

Calculons $f'(x)$ pour $x \in [1\ ;10]$

$$f(x) = 0{,}5x + 2 + \frac{8}{x}$$

$$f(x) = 0{,}5\times x + 2 + 8\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0{,}5\times 1 + 0 + 8\times\frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0{,}5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0{,}5x^2-8}{x^2} = \frac{0{,}5[x^2+16]}{x^2} = \frac{0{,}5(x-4)(x+4)}{x^2}$$

On a factorisé la dérivée afin de pouvoir justifier le tableau de signe (qui est basé sur la règle des signes) et bien sûr en déduire le sens de variation de f .

- $0{,}5$ est toujours positif ; x^2 est positif pour $x \in [1\ ;10]$
- $x-8 > 0 \Leftrightarrow x > 8$ et
- $x+8 > 0 \Leftrightarrow x > -8$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$0{,}5$		$+$	|	$+$	||	$+$	|	$+$	
$x-8$		$-$	|	$-$	||	$-$	0	$+$	
$x+8$		$-$	0	$+$	||	$+$	|	$+$	
x^2		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

- $f(-8)=-3$ et $f(8)=7$

Limite en $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}5x=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2=2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8}{x}=0$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Limite en 0^-

- $\lim\limits_{x\to0^-} x=0$

d'où $\lim\limits_{x\to0^-} 0{,}5x=0$

- $\lim\limits_{x\to0^-} 2=2$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{8}{x}=-\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

Limite en 0^+

- $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$

d'où $\lim\limits_{x\to0^+} 0{,}5x=0$

- $\lim\limits_{x\to0^+} 2=2$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{8}{x}=+\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

Limite en $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}5x=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{x}=0$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

LA FONCTION INVERSE E03

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

Lorsqu'un véhicule roule entre 10 km.h^{-1} et 130 km.h^{-1}, sa consommation d'essence c (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en km.h^{-1}) par l'expression :

$$c(v)=0{,}06\,v+\frac{150}{v}$$

1) Vérifier que pour tout v appartenant à l'intervalle $[10\ ;\ 130]$,

$$c'(v) = \frac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$$

Calculons $c'(v)$ pour $[10\ ;\ 130]$

D'une part,

$$c(v)=0{,}06\,v+\frac{150}{v}$$

$$c(v)=0{,}06\times v+150\times\frac{1}{v}$$

$$c'(v)=0{,}06\times 1+150\times\frac{-1}{v^2}$$

$$c'(v)=0{,}06-\frac{150}{v^2}$$

D'autre part,

$$\frac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2} = \frac{0{,}06[v^2-2500]}{v^2} = \frac{0{,}06\,v^2-150}{v^2} = \frac{0{,}06\,v^2}{v^2}-\frac{150}{v^2} = 0{,}06-\frac{150}{v^2}$$

On en déduit que : $c'(v) = \dfrac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$.

2) Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10\ ;\ 130]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction c .

- $0{,}06$ est toujours positif,
- $v-50 > 0 \Leftrightarrow v > 50$;
- $v+50 > 0 \Leftrightarrow v > -50$ et
- v^2 est positif

Et là, on fait bien attention à l'ensemble de définition… $[10\ ;\ 130]$

v	10		50		130
$0{,}06$		+	|	+	
$v-50$		$-$	0	+	
$v+50$		+	|	+	
v^2		+		+	
$c'(v)$		$-$	0	+	
$c(v)$	15,6	↘	6	↗	9

$$c(10)=15{,}6\ ;\ c(50)=6 \text{ et } c(130)=\frac{582}{65}\approx 9$$

3) En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale. Déterminer la consommation minimale en litres.

D'après le tableau de variation, la consommation minimale est de $\boxed{6 \text{ Litres/100km}}$ pour une vitesse de $\boxed{50 \text{ km/h}}$