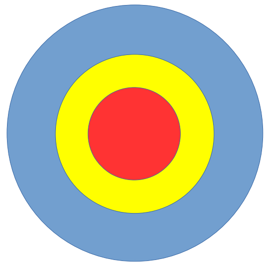
EXERCICE N°4 (Le corrigé)



Peter organise un tournoi de fléchettes pour son anniversaire, il possède la cible ci-contre où les cercles ont des rayons de 5, 10 et 20 cm. La zone rouge rapporte 100 points, la zone jaune 40 et la zone bleue 20. Si on n'atteint pas la cible, on ne gagne aucun point. Aurélia, qui n'a jamais joué, lance au hasard 2 fléchettes. On considère qu'elle atteint la cible une fois sur deux et que la probabilité qu'elle soit dans une zone colorée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1) Quelle est la probabilité qu'Aurélia gagne 40 points ?

Commençons par calculer les aires des différentes zones :

La cible en entier : $20^2\pi = 400\pi \text{ cm}^2$

La zone atteignable : $2\times 400\pi = 800\pi \text{ cm}^2$

Comme la fléchette atteint la cible une fois sur deux, on peut considérer que cette dernière représente la moitié de la surface atteignable.

Zone Bleue : $20^2\pi - 10^2\pi = 300\pi \text{ cm}^2$

Zone Jaune : $10^2\pi - 5^2\pi = 75\pi \text{ cm}^2$

Zone Rouge : $5^2\pi = 25\pi \text{ cm}^2$

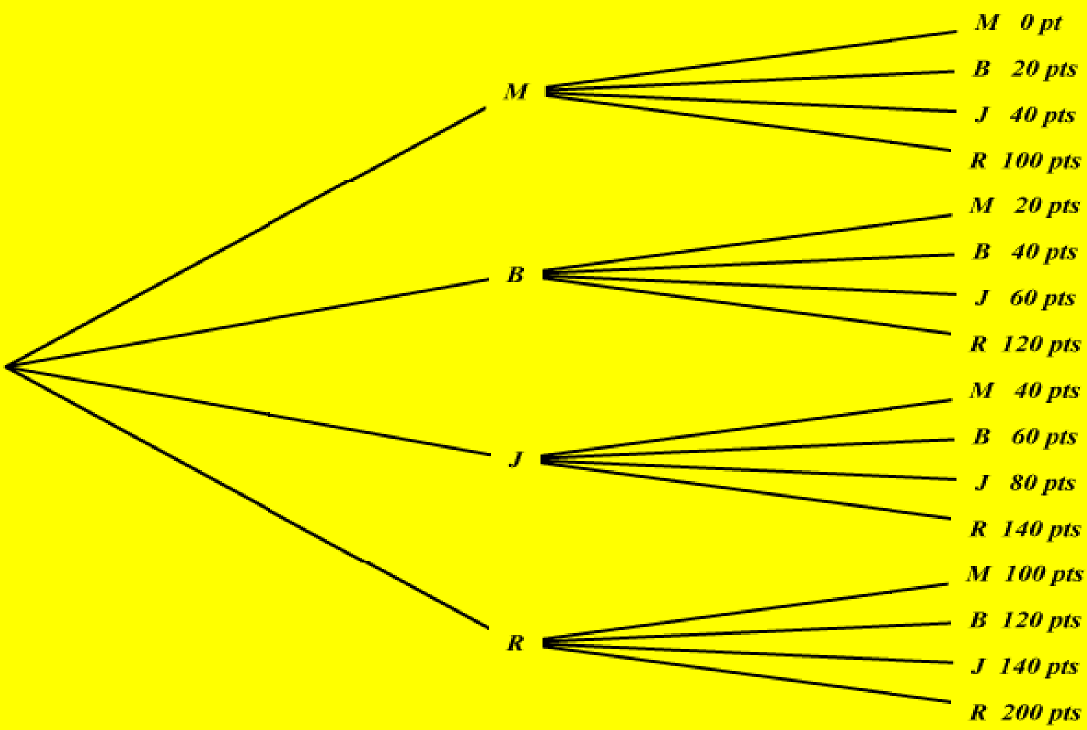
Représentons la situation à l'aide d'un arbre :

M La fléchette va dans le mur et $p(M) = \frac{1}{2}$

B La fléchette se plante en zone Bleue et $p(B) = \frac{300\pi}{800\pi} = \frac{3}{8}$

J La fléchette se plante en zone Jaune et $p(J) = \frac{75\pi}{800\pi} = \frac{3}{32}$

R La fléchette se plante en zone Rouge et $p(R) = \frac{25\pi}{800\pi} = \frac{1}{32}$



Notons S la variable aléatoire donnant le score (en pts).

Elle suit la loi de probabilité suivante :

s_i	0	20	40	60	80	100	120	140	200	Total
$p(S=s_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{1024}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{3}{512}$	$\frac{1}{1024}$	1

On lit que $\boxed{P(S=40) = \frac{15}{64}}$

- Pour 0 pt :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{1 branche : M , M}} = \frac{1}{4}$$

- Pour 20 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche M , B}} + \underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche B , M}} = 2\times\frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

- Pour 40 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche M , J}} + \underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche J , M}} + \underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche B , B}} = 2\times\frac{3}{16} = \frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{9}{64}=\frac{15}{64}$$

- Pour 60 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{300\,\pi}{400\,\pi}\times\frac{1}{2}\times\frac{75\,\pi}{400\,\pi}}_{\text{branche B , J}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{75\,\pi}{400\,\pi}\times\frac{1}{2}\times\frac{300\,\pi}{400\,\pi}}_{\text{branche J , B}} = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{16}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{128}$$

- Pour 80 pts :

$$\underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche J , J}} = \frac{9}{1024}$$

- Pour 100 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche M , R}} + \underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}}_{\text{branche R , M}} = 2\times\frac{1}{64} = \frac{1}{32}$$

- Pour 120 pts :

$$\underbrace{\frac{3}{8}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche B , R}} + \underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{3}{8}}_{\text{branche R , B}} = \frac{3}{128}$$

- Pour 140 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{3}{32}}_{\text{branche R , J}} + \underbrace{\frac{3}{32}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche J , R}} = \frac{3}{512}$$

- Pour 200 pts :

$$\underbrace{\frac{1}{32}\times\frac{1}{32}}_{\text{branche R , R}} = \frac{1}{1024}$$

2) Combien de points Aurélia peut-elle espérer avoir en moyenne ?

Il s'agit de calculer l'espérance de la loi que nous avons définie à la question 1).

$$E(S)=0\times\frac{1}{4}+20\times\frac{3}{8}+40\times\frac{15}{64}+60\times\frac{9}{128}+80\times\frac{9}{1024}+100\times\frac{1}{32}+120\times\frac{3}{128}+140\times\frac{3}{512}+200\times\frac{1}{1024}$$

$$= 28{,}75$$

Aurélia peut espérer avoir $\boxed{28{,}75 \text{ pts en moyenne}}$.