

FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E01C

EXERCICE N°4 La méthode de complétion du carré (Le corrigé)

Le principe

1) Soit a un nombre réel. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$

$$(x+a)^2 - a^2 = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 = x^2 + 2ax$$

Application

2) À l'aide de l'égalité que vous venez de démontrer, déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

2.a) $x^2 + 4x + 7$ 2.b) $x^2 + 7x - 8$ 2.c) $x^2 - 3x + 6$ 2.d) $x^2 + bx + 5$
où $b \in \mathbb{R}$

2.a) $x^2 + 4x + 7$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 7 &= x^2 + 2 \times \underbrace{2}_a \times x + 7 \\ &= (x+2)^2 - 2^2 + 7 \\ &= (x+2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$

2.b) $x^2 + 7x - 8$

$$\begin{aligned} x^2 + 7x - 8 &= x^2 + 2 \times \underbrace{\frac{7}{2}}_a \times x - 8 \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 8 \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 + 7x - 8 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$

2.c) $x^2 - 3x + 6$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 6 &= x^2 - 2 \times \underbrace{\frac{3}{2}}_a \times x + 6 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - 3x + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

2.d) $x^2 + bx + 5$ où $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 + bx + 5 &= x^2 + 2 \times \underbrace{\frac{b}{2}}_a \times x + 5 \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 5 \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-b^2 + 20}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 + bx + 5 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-b^2 + 20}{4}$

3) Adaptez la méthode pour déterminer la forme canonique des trinômes suivants

3.a) $3x^2 - 5x + 8$ 3.b) $6x^2 + 7x - 2$ 3.c) $-4x^2 + 3x - 7$

3.a) $3x^2 - 5x + 8$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 8 &= 3 \left[x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3} \right] = 3 \left[x^2 - 2 \times \frac{5}{6}x + \frac{8}{3} \right] = 3 \left[x^2 - 2 \times \frac{5}{6}x + \frac{8}{3} \right] \\ &= 3 \left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{8}{3} \right] = 3 \left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{71}{36} \right] \\ &= 3 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{71}{12} \end{aligned}$$

Ainsi $3x^2 - 5x + 8 = 3 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{71}{12}$

3.b) $6x^2+7x-2$

$$\begin{aligned} 6x^2+7x-2 &= 6\left[x^2+\frac{7}{6}x-\frac{2}{6}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{\frac{7}{6}}{2}x-\frac{1}{3}\right] = 6\left[x^2+2\times\frac{7}{12}x-\frac{1}{3}\right] \\ &= 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{7}{12}\right)^2-\frac{1}{3}\right] = 6\left[\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}\right] \\ &= 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144} \end{aligned}$$

Ainsi $6x^2+7x-2 = 6\left(x+\frac{7}{12}\right)^2-\frac{97}{144}$

3.c) $-4x^2+3x-7$

$$\begin{aligned} -4x^2+3x-7 &= -4\left[x^2+\frac{3}{-4}x-\frac{7}{-4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{\frac{3}{4}}{2}x+\frac{7}{4}\right] = -4\left[x^2-2\times\frac{3}{8}x+\frac{7}{4}\right] \\ &= -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{4}\right] = -4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64}\right] \\ &= -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64} \end{aligned}$$

Ainsi $-4x^2+3x-7 = -4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{183}{64}$