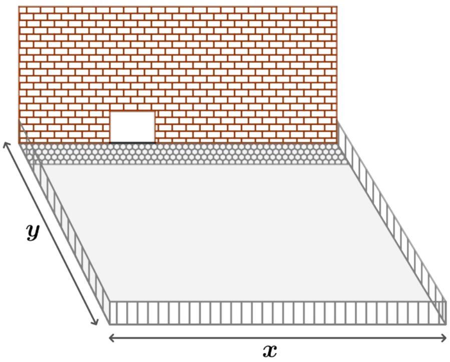
EXERCICE N°3 Du concret : Optimisation d'un prix

Extrait du Déclic 1[er] spe n°87 p 124

Le gérant d'un magasin de sport souhaite faire construire une aire rectangulaire à l'extérieur du magasin pour permettre aux clients de tester certains produits. Il vaut que cette zone occupe $200\ \text{m}^2$ et que soit installée, sur trois de ses côtés, une clôture en bois coûtant 12 € le mètre. De plus, le long du côté attenant au mur du magasin, il fera poser une rangée de dalle en béton à 15 € le mètre.

Soient y la largeur et x la longueur du rectangle délimitant la zone. Le gérant aimerait connaître les valeurs de x et y qui minimiserait le prix de l'entourage de cette aire sachant que x est compris entre 10 et 40 m.



1) Montrer que $y = \dfrac{200}{x}$

La zone est un rectangle d'aire 200, sa largeur est y et sa longueur est x. La formule de l'aire d'un rectangle, nous donne alors $y \times x = 200$.
Donc pour $x \in [10\ ;\ 40]$, on peut écrire :

$y = \dfrac{200}{x}$. *cqfd*

2) Montrer que le prix p de la construction de l'entourage peut s'exprimer en fonction de x et que $p(x) = 27x + \dfrac{4800}{x}$

Le prix de la construction dépend de la largeur y et de la longueur x mais d'après la question 1) on peut exprimer y en fonction de x. Donc le prix peut s'exprimer uniquement en fonction de x.
Soit $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$\begin{aligned} p(x) &= \overbrace{2\times 12y + 12x}^{\textit{la clôture}} + \overbrace{15x}^{\textit{la dalle}} \\ &= 24 \times \frac{200}{x} + 12x + 15x \\ &= 27x + \frac{4800}{x} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$, $p(x) = 27x + \dfrac{4800}{x}$.

3) Étudier les variations de p sur l'intervalle $[10\ ;\ 40]$.

p est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[10\ ;\ 40]$, elle l'est donc aussi et pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$p'(x) = 27 \times 1 + 4800 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$\boxed{p'(x) = 27 - \frac{4800}{x^2}}$$

4) Déterminer les dimensions de la zone pour que le prix de l'entourage soit minimal. Combien le gérant devra-t-il payer ?

pour tout $x \in [10\ ;\ 40]$,

$$p'(x) = 27 - \frac{4800}{x^2} = \frac{27x^2 - 4800}{x^2} = \frac{3(9x^2 - 1600)}{x^2} = \frac{3(3x-40)(3x+40)}{x^2}$$

On en déduit le tableau de signes de p' puis le tableau de variations de p.

x	10		$\frac{40}{3}$		40
3		$+$	|	$+$	
$3x-40$		$-$	0	$+$	
$3x+40$		$+$	|	$+$	
x^2		$+$	|	$+$	
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	750	$\searrow$	720	$\nearrow$	1200

D'après le tableau le prix sera minimal pour $x = \frac{40}{3}$, on aura alors :

$$y = \frac{200}{\frac{40}{3}} = 200 \times \frac{3}{40} = 15$$

On en déduit les dimensions :

$\boxed{\text{la largeur vaut } 15 \text{ m et la longueur vaut } \frac{40}{3} \text{ m}}$

$\boxed{\text{Le gérant devra alors payer } 720 \text{ €}}$