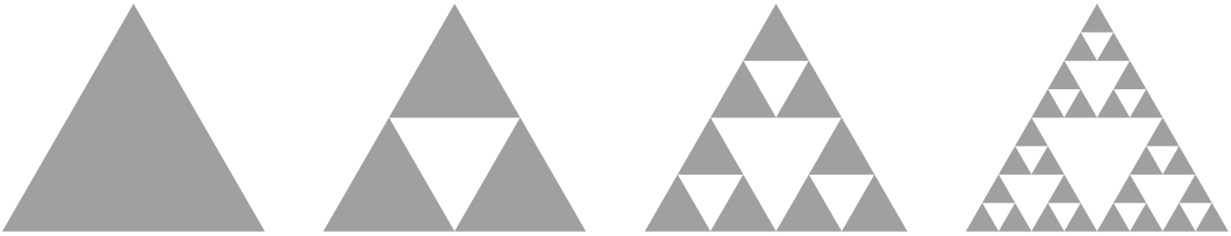
LES SUITES NUMÉRIQUES E02C

EXERCICE N°4 Triangle de Sierpinski (Le corrigé)

On considère un triangle équilatéral de côté 1 colorié en gris ($n=0$).
À chaque étape, on trace dans chaque triangle gris, un triangle blanc qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle gris.



$n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$

1) Il y a un triangle gris à l'étape 0, puis trois à l'étape 1…

1.a) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 2 ?

Il y en a $\boxed{9}$.

1.b) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 3 ?

Il y en a $\boxed{27}$.

1.c) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 4 ?

On a remarqué que chaque triangles gris va en engendrer trois autres à l'étape suivante…

Il y en a $\boxed{81}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de triangles gris à l'étape n .

2.a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{u_{n+1} = 3u_n}$

2.b) Exprimer u_n en fonction de n .

$u_0 = 1$

$u_1 = 3 \times u_0$

$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 3 \times u_0$

$\vdots$

$u_n = 3 \times u_{n-1} = \ldots = \underbrace{3 \times 3 \times \ldots \times 3}_{n\ fois} \times u_0 = 3^n \times u_0$ et comme $u_0 = 1$ …

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{u_n = 3^n}$

3) Déterminer le nombre de triangles gris à la 10^e étape.

Il s'agit de calculer u_9 .

hé oui, on commence à $n=0$ ...

$u_9 = 3^9 = 19683$

Ainsi, $\boxed{\text{à la } 10^e \text{ étape, il y a } 19683 \text{ triangles gris}}$.

4) Déterminer u_{10} .

$u_{10} = 3^{10} = 59049$

$\boxed{u_{10} = 59049}$