EXERCICE N°1 ***S'approprier la définition***

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas.

1) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 5$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)$$
$$= 2\times5\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\sqrt{3}}$$

2) $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 5\sqrt{2}$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = 45°$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)$$
$$= 4\times5\sqrt{2}\times\cos(45°)$$
$$= 20\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

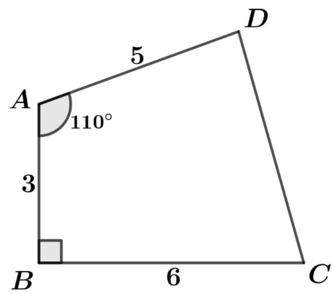
$$\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 20}$$

PRODUIT SCALAIRE E01C

EXERCICE N°2 Avec une figure et une calculatrice

À l'aide du quadrilatère ci-contre. Calculer les produits scalaires suivants (On arrondira à 10^{-2}) :



1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})}\right)\\ &= 3\times5\times\cos(110°)\\ &= 15\cos(110°)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \approx -14{,}99}$$

2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})}\right)\\ &= 3\times6\times\cos(90°)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0}$$

EXERCICE N°3 ***Utiliser la définition***

1) On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 21\sqrt{3}$. Déterminer $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}$. (*On donnera la mesure en radians ET en degrés*)

Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Ainsi,

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) = \frac{21\sqrt{3}}{7\times 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\ rad} \quad \text{ou} \quad \boxed{\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = 30\,°}$$

2) On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$, $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{4} rad$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Déterminer $\|\vec{v}\|$.

Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} \neq \frac{\pi}{2} rad$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)}$$

Ainsi,

$$\|\vec{v}\| = \frac{1}{3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \frac{1}{3}}$$

EXERCICE N°4 *Réinvestir d'anciennes connaissances*

On donne A , B et C trois points distincts du plan.

1) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5{,}5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

$0 = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})}\right)$

Or $\|\overrightarrow{BC}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{CA}\| \neq 0$ (car les points A et C sont distincts).

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul

Donc :

$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})}\right) = 0$

ainsi :

$\widehat{(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})} = \dfrac{\pi}{2}$

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en C .

2) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{AC}\| \neq 0$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$

En remplaçant :

$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1\times 1} = \dfrac{1}{2}$

On en déduit que :

$\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{3}\ rad$

Le triangle étant isocèle en A , si l'un de ses angles mesure $\dfrac{\pi}{3}\ rad$ alors les deux autres aussi.

On conclut que le triangle ABC est équilatéral.

3) On sait que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{9}{2}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{AC}\| \neq 0$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$

En remplaçant :

$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}\right) = \dfrac{\frac{9}{2}}{3\times 3} = \dfrac{1}{2}$

On en déduit que :

$\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{3}\ rad$

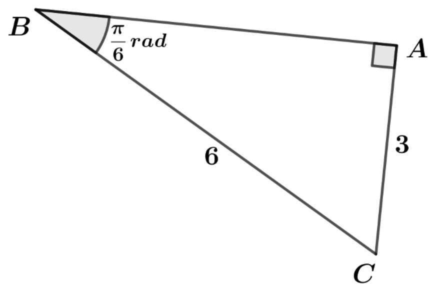
Le triangle étant isocèle en A , si l'un de ses angles mesure $\dfrac{\pi}{3}\ rad$ alors les deux autres aussi.

On conclut que le triangle ABC est équilatéral.

PRODUIT SCALAIRE E01C

EXERCICE N°5 *Facile !*

1) Déterminer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.



$$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

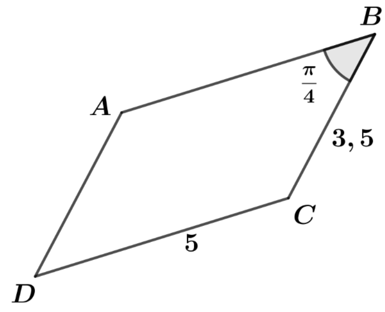
Donc :

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = AC \times BC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 9}$$

2) Déterminer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.



$ABCD$ est un parallélogramme.

$ABCD$ étant un parallélogramme :

$AB = CD = 5$; $AD = BC = 3{,}5$ et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ rad$$

Donc :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 5 \times 3{,}5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -8{,}75}$$