

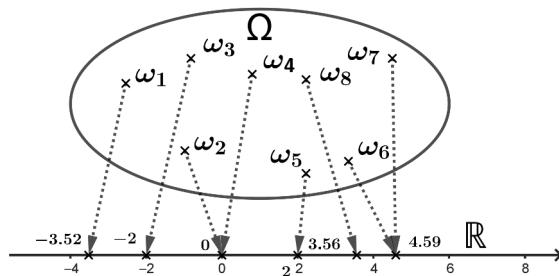
# VARIABLES ALÉATOIRES

## I Qu'est-ce-qu'une variable aléatoire ?

### Définition n°1. Variable aléatoire

Soit  $\Omega$  un univers fini. On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle si  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire si  $X$  associe à chaque issue de  $\Omega$  un nombre réel.

### Exemple n°1.



$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ici,

$$X(\omega_1) = -3,52 :$$

L'issue  $\omega_1$  a pour image  $-3,52$  par la variable aléatoire  $X$  ....

$$X(\omega_2) = 0, \text{ etc....}$$

### Remarque n°1.

Toutes les issues doivent avoir une image par  $X$  ( car  $X$  est une application) par contre, plusieurs issues peuvent avoir la même image.

# VARIABLES ALÉATOIRES

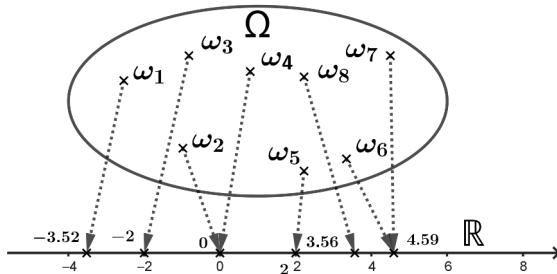
*Connaissance n°1*

*Des notations*

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

- $\{X = a\}$  l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $\{X \leq a\}$  l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

*Exemple n°2.*



$\{X = -3,52\}$  est en fait  $\{\omega_1\}$ ,  
 $\{X = 0\}$  est en fait  $\{\omega_2, \omega_4\}$   
 $\{X = 1,5\}$  est en fait  $\emptyset$   
 $\{X = -18\}$  aussi...  
 $\{X \leq 0\}$  est en fait  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$   
 $\{X < 0\}$  est en fait  $\{\omega_1, \omega_3\}$   
 (il y a une petite subtilité que vous verrez et comprendrez plus tard...)

# VARIABLES ALÉATOIRES

## Remarque n°2.

Comme nous avons affaire avec des événements de  $\Omega$ , on peut parler de leur probabilité.

Par exemple :

$$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) \dots$$

C'est pénible toutes ces accolades !

## Connaissance n°2      Convention d'écriture

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

- $P(X = a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $P(X \leq a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

## Remarque n°3.

D'après la remarque n°2, on comprend que si on connaît la probabilité de chaque issue de  $\Omega$ , on pourra définir toutes les probabilités de la connaissance n°2.

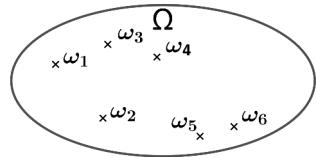
## II Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

**Définition n°2.** *Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle*

Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Définir la loi de probabilité de  $X$  c'est donner la valeur de chaque  $P(X = x_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$ .

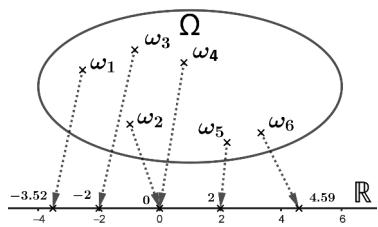
**Exemple n°3.**



Distribution (ou loi) de probabilité sur $\Omega$						
Issue $\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18

$n = 6$

Total  
1



Loi de probabilité de $X$					
$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\underbrace{0,35}_{0,15+0,2}$	0,12	0,18

$k = 5$

Total  
1

- $P(X = 4,59) = 0,18$ ,  $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52) + P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$ ,  $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4,59) = 1$

# VARIABLES ALÉATOIRES E01

## EXERCICE N°1

*Méthode : Déterminer une loi de probabilité*

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euros.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de  $X$ .

## VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine  $\Omega$  .  
 $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- On détermine la distribution des probabilités sur  $\Omega$  .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par  $X$  (autrement dit : on détermine  $X(\Omega)$  )

$$X(\{1\}) = -5, \quad X(\{2\}) = 2, \quad X(\{3\}) = 1,$$

$$X(\{4\}) = 2, \quad X(\{5\}) = 1 \text{ et } X(\{6\}) = 2$$

(Il y a trois images possibles :  $-5 ; 1$  et  $2$ )

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -5\} = \{1\}$$

$$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$$

$$\{X = 2\} = \{4\} \cup \{6\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$\square P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$\square P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\square P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$x_i$	-5	1	2	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	

Le plus gros du travail  
est fait au brouillon

# *VARIABLES ALÉATOIRES E01*

## ***EXERCICE N°2      Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)***

Voici un jeu :

- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis un jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

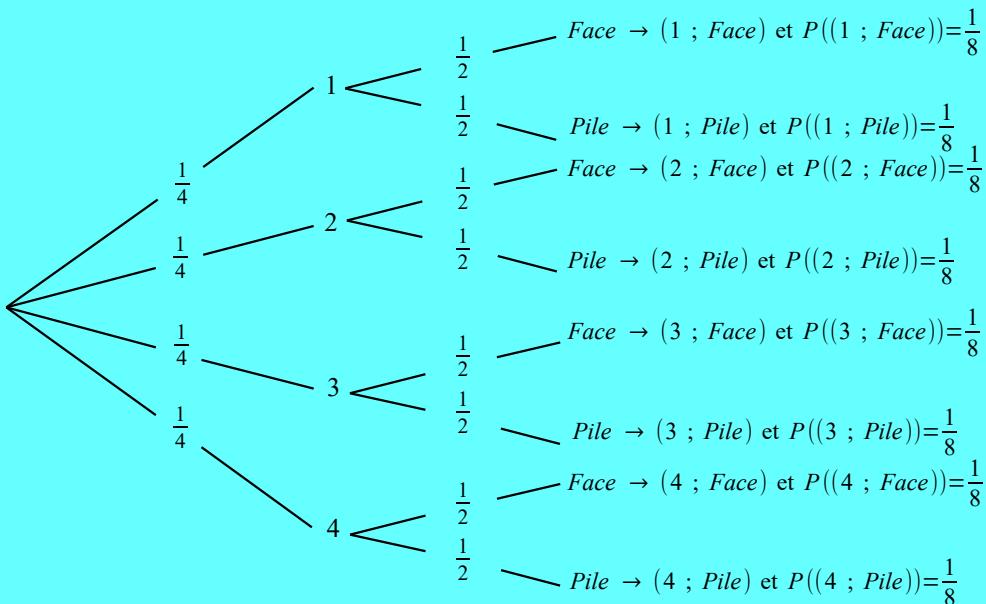
Donner la loi de probabilité de  $X$ .

# VARIABLES ALÉATOIRES E01C

- On détermine  $\Omega$

Une issue de  $\Omega$  est donc un couple, par exemple :  $(2 ; Face)$  ,  $(5 ; Pile)$  etc...

Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1; Face); (2; Face); (3; Face); (4; Face); (1; Pile); (2; Pile); (3; Pile); (4; Pile)\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur  $\Omega$ .

Issue	$(1; Face)$	$(2; Face)$	$(3; Face)$	$(4; Face)$	$(1; Pile)$	$(2; Pile)$	$(3; Pile)$	$(4; Pile)$	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	1							

- On détermine les images de chaque issue par  $X$  (autrement dit : on détermine  $X(\Omega)$ )

Issue	$(1; Face)$	$(2; Face)$	$(3; Face)$	$(4; Face)$	$(1; Pile)$	$(2; Pile)$	$(3; Pile)$	$(4; Pile)$
$X(Issue)$	$-6$ $= -4 - 2$	$8$ $= 10 - 2$	$8$ $= 10 - 2$	$8$ $= 10 - 2$	$-6$ $= -4 - 2$	$3$ $= 5 - 2$	$-6$ $= -4 - 2$	$3$ $= 5 - 2$

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -6\} = \{(1; Face)\} \cup \{(1; Pile)\} \cup \{(3; Pile)\}$$

$$\{X = 3\} = \{(2; Pile)\} \cup \{(4; Pile)\}$$

$$\{X = 8\} = \{(2; Face)\} \cup \{(3; Face)\} \cup \{(4; Face)\}$$

- On calcule les probabilités de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$x_i$	$-6$	$3$	$8$	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

Le plus gros du travail  
est fait au brouillon

# VARIABLES ALÉATOIRES E01

## EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté  $X$ , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de  $X$  est donnée ci-dessous :



$x_i$	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On fait une partie :

- 1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.
- 2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
- 3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.
- 4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

# VARIABLES ALÉATOIRES E01

## EXERCICE N°4      Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit pas les accolades

$x_i$	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

- 1) Déterminer  $P(X = 8)$  .
- 2) Déterminer  $P(X \leq 0)$  .
- 3) Déterminer  $P(X > 7)$  .
- 4) Déterminer  $P(X < 20)$  .

### **III      Espérance d'une variable aléatoire réelle**

**Remarque n°4.**

On cherche ici à répondre à la question : « En moyenne, combien peut-on espérer obtenir comme résultat pour  $X$  ? »

**Définition n°3.    Espérance d'une variable aléatoire réelle**

Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

On appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{k=i}^k x_i P(X=x_i)$$

**Remarque n°5.**

$$\sum_{k=i}^k x_i P(X=x_i) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

**Exemple n°4.**

**dans le contexte de l'exemple n°3**

$$E(X) = -3,52 \times P(X=-3,52) + (-2) \times P(X=-2) + \dots + 4,59 \times P(X=4,59)$$

$$E(X) = -3,52 \times 0,1 + (-2) \times 0,25 + 0 \times 0,35 + 2 \times 0,12 + 4,59 \times 0,18$$

$$E(X) = 0,2142$$

L'espérance de  $X$  vaut 0,2142.

## VARIABLES ALÉATOIRES E02

### EXERCICE N°1      Déterminer l'espérance

- 1) Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

$x_i$	-6	-3	0	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer  $E(X)$

- 2) On considère à présent la variable aléatoire  $Y$ , définie par  $Y = X - \frac{1}{4}$ .

- 2.a) Donner sa loi de probabilité.  
2.b) Montrer que  $E(Y) = 0$ . (*On dit alors que la variable aléatoire est centrée*)  
2.c) Selon vous, était-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

## VARIABLES ALÉATOIRES E02

### EXERCICE N°2    *Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)*

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5000 €. Le ticket de jeu est vendu 2€. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque que l'on choisit au hasard un ticket.

La loi de probabilité de  $X$  est donnée ci-dessous :

$x_i$	-2	8	98	4998
$P(X = x_i)$	0,85	0,1499	0,00009	0,00001

Ce jeu est-il équitable ?

## VARIABLES ALÉATOIRES E02

### EXERCICE N°3     Utiliser l'espérance

Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».

On lui propose le jeu suivant : Constance mise  $m$  €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le « triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.

Déterminer, en fonction de  $m$ , le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.



## VARIABLES ALÉATOIRES

**Propriété n°1.**

*espérance et transformation affine*

Comme la somme des  $P(X=x_i)$  vaut 1, on peut écrire que :

$$E(X) = \frac{E(X)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i P(X=X_i)}{\sum_{i=1}^k P(X=x_i)}$$

On reconnaît la moyenne des valeurs de  $X$  pondérées par leurs probabilités respectives.

Or :

- Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre  $b$  à toutes les valeurs d'un ensemble alors la moyenne de ces valeurs se trouve augmentée (resp. diminuée) de  $b$ .
- Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul  $a$  toutes les valeurs d'un ensemble, alors la moyenne de ces valeurs se trouve multipliée (resp. divisée) par  $a$ .

Au final on peut écrire :  $E(aX+b) = a \times E(X) + b$

# *VARIABLES ALÉATOIRES E03*

## **EXERCICE N°1      Linéarité de l'espérance**

$Y$  est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs  $-4 ; 5 ; 10$  et  $100$  , et telle que  $E(Y) = 8$  .

**1)** Soit la variable aléatoire  $Z$  telle que  $Z = 3Y + 60$ .

**1.a)** Quelles valeurs peut prendre  $Z$  ?

**1.b)** Déterminer  $E(Z)$ .

**2)** Soit la variable aléatoire  $R$  telle que  $R = -4Y + 5$ .

**2.a)** Quelles valeurs peut prendre  $R$  ?

**2.b)** Déterminer  $E(R)$ .

## ***VARIABLES ALÉATOIRES E03***

### ***EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret***

Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3 € et le paquet de pop-corn est vendu 4 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 70 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

- 1)** Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?
- 2)** Soit  $R$  la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard. Déterminer la loi de probabilité de  $R$ .
- 3)** Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?
- 4)** Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés. Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

## IV Variance d'une variable aléatoire réelle

### Remarque n°6.

On cherche à évaluer la « dispersion possible » des valeurs de  $X$  autour de  $E(X)$ . Pour cela, comme en statistique, on va calculer la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

### Définition n°4.

#### Variance d'une variable aléatoire réelle

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$  et soit  $X$  une variable aléatoire réelle prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

On appelle variance de  $X$  et on note  $V(X)$  le réel défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \text{ c'est à dire :}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)$$

### Remarque n°7.

Encore autrement dit :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X=x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X=x_2) + \dots + (x_k - E(X))^2 \times P(X=x_k)$$

### Exemple n°5.

#### Dans le contexte de l'exemple n°3

$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\frac{0,35}{0,15+0,2}$	0,12	0,18	1

On calcule d'abord l'espérance :

$$E(X) = 0,2142 \text{ (on l'a fait dans l'exemple n°4)}$$

Puis on calcule la variance :

$$V(X) = (-3,52 - 0,2142)^2 \times 0,1 + (-2 - 0,2142)^2 \times 0,25 + \dots + (4,59 - 0,2142)^2 \times 0,18$$

$$V(X) \approx 6,4654$$

### Propriété n°2.

#### variance et transformation

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.  $V(aX+b) = a^2 \times V(X)$

En effet,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^k (ax_i + b - E(aX+b))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (ax_i + b - aE(X) - b)^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k a(x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k a^2(x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i) = a^2 \times V(X) \end{aligned}$$

### Remarque n°8.

C'est bien, mais on aimeraient que  $E(X)$  et  $V(X)$  aient la même unité.

En effet si  $X$  est par exemple en euro alors  $E(X)$  sera en euro mais  $V(X)$  sera en « euro au carré »...

On va donc « se débarrasser de ce carré »...

## V Écart-type d'une variable aléatoire réelle

### Définition n°5.

#### écart-type d'une variable aléatoire réelle

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de  $X$  et on note  $\sigma(X)$  le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### **Exemple n°6. Toujours dans le contexte de l'exemple n°3**

On avait  $V(X) \approx 6,4654$

Donc  $\sigma(X) = V(X) \approx 2,5427$

### **Remarque n°9. écart-type et transformation affine**

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

## **VI Formule de Koenig-Huygens**

### **Remarque n°10.**

Calculer la variance d'une variable aléatoire « à la main » peut vite devenir pénible. Regardons la formule de la variance d'un peu plus près :

- Gardons à l'esprit que  $E(X)$  est « juste un nombre » et donc

$$E(E(X)^2) = \sum_{i=1}^k E(X)^2 \times P(X=x_i) = E(X)^2 \times \sum_{i=1}^k P(X=x_i) = E(X)^2 \times 1$$

- Dans la même idée :

$$E(-2XE(X)) = \sum_{i=1}^k -2x_i E(X) \times P(X=x_i) = -2E(X) \times \sum_{i=1}^k x_i P(X=x_i) = -2E(X) \times E(X)$$

- On peut donc écrire :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

ou encore

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E((E(X))^2)$$

et grâce aux deux premiers points :

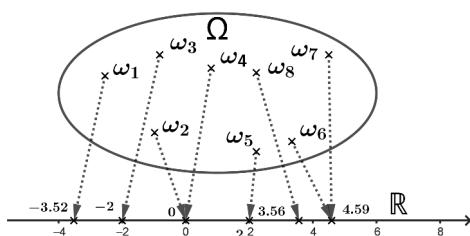
$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + \underbrace{E(X)^2 \times 1}_{+E(X)^2} = E(X^2) - (E(X))^2$$

### **Propriété n°3. Formule de Koenig-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

## **VII Le résumé du cours**



### **Variable aléatoire réelle**

Soit  $\Omega$  un univers fini. On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle si

$X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire si  $X$  associe à chaque issue de  $\Omega$  un nombre réel.

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

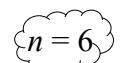
- $P(X = a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  »
- $P(X \leq a)$  la probabilité de l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  »
- on fait la même chose avec  $<$ ,  $>$  et  $\geq$

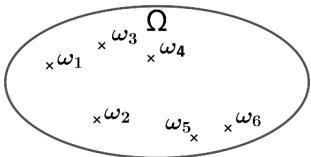
Soit  $n$  et  $k$  des entiers naturels ( $k \leq n$ ), soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

**Définir la loi de probabilité de  $X$  c'est donner la valeur de chaque  $P(X = x_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$ .**

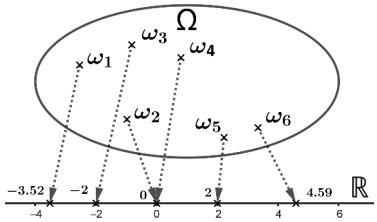
### **Convention d'écriture**

### **Loi de probabilité**





Issue	$\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	Total
	$P(\omega_i)$	0,1	0,15	0,25	0,2	0,12	0,18	1



Loi de probabilité de $X$						Total
$x_i$	-3,52	-2	0	2	4,59	
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	$\frac{0,35}{0,15+0,2}$	0,12	0,18	

- $P(X = 4,59) = 0,18$  ,  $P(X = 4,58) = 0$
- $P(X \leq 0) = P(X = -3,52)+P(X = -2)+P(X = 0) = 0,7$
- $P(X < 0) = P(X = -3,52)+P(X = -2) = 0,35$
- $P(X > 2) = P(X = 4,59) = 0,18$
- $P(X \geq 5) = 0$  ,  $P(X < 1) = 0$
- $P(X \geq -32) = P(X = -3,52)+P(X = -2)+P(X = 0)+P(X = 2)+P(X = 4,59) = 1$

### Espérance de $X$

$$E(X) = \sum_{k=1}^K x_k P(X=x_k)$$

ou encore :

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + \dots + x_k \times P(X=x_k)$$

## Variance de $X$

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

ou encore :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times P(X=x_i)$$

## Écart-type de $X$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### Les propriétés à retenir

$a$  et  $b$  sont des nombres réels.

**Transformation affine, changement de variable**  
(selon les livres)

$$E(aX+b) = a \times E(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2 \times V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

**Formule de Koenig-Huygens**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$