TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E03C

EXERCICE N°5 ***Appréhender la périodicité***

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, est T-périodique.

La fonction	La période T	La fonction	La période T
1) $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$	$T=1$	**2)** $f : x \mapsto \frac{2}{3}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$	$T=\frac{2\pi}{7}$
3) $f : x \mapsto \sin(3x)$	$T=\frac{2\pi}{3}$	**4)** $f : x \mapsto \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}\right)$	$T=\frac{6\pi}{5}$

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x+2\pi) = \cos(2\pi x) = f(x)$

Ainsi,

$\forall x \in \mathbb{R} ,\ f(x+1) = f(x)$

Donc f est bien 1-périodique .

2)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} ,\ f\left(x+\frac{2\pi}{7}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{2\pi}{7}$-périodique .

3)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x+2\pi) = \sin(3x) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} ,\ f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{2\pi}{3}$-périodique .

4)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{6\pi}{5}\right) &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)-8}{3}\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x+6\pi-8}{3}\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}+2\pi\right) \\ &= \frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} ,\ f\left(x+\frac{6\pi}{5}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{6\pi}{5}$-périodique .