LES SUITES

I Les suites arithmétiques

I.1 Ce que l'on sait déjà

Définition n°1. Suite arithmétique

Une suite u est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°1.

La suite v de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$.

$v_0=5$, $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$, $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\ldots$

Les suites

Propriété n°1. ***Relation de récurrence***

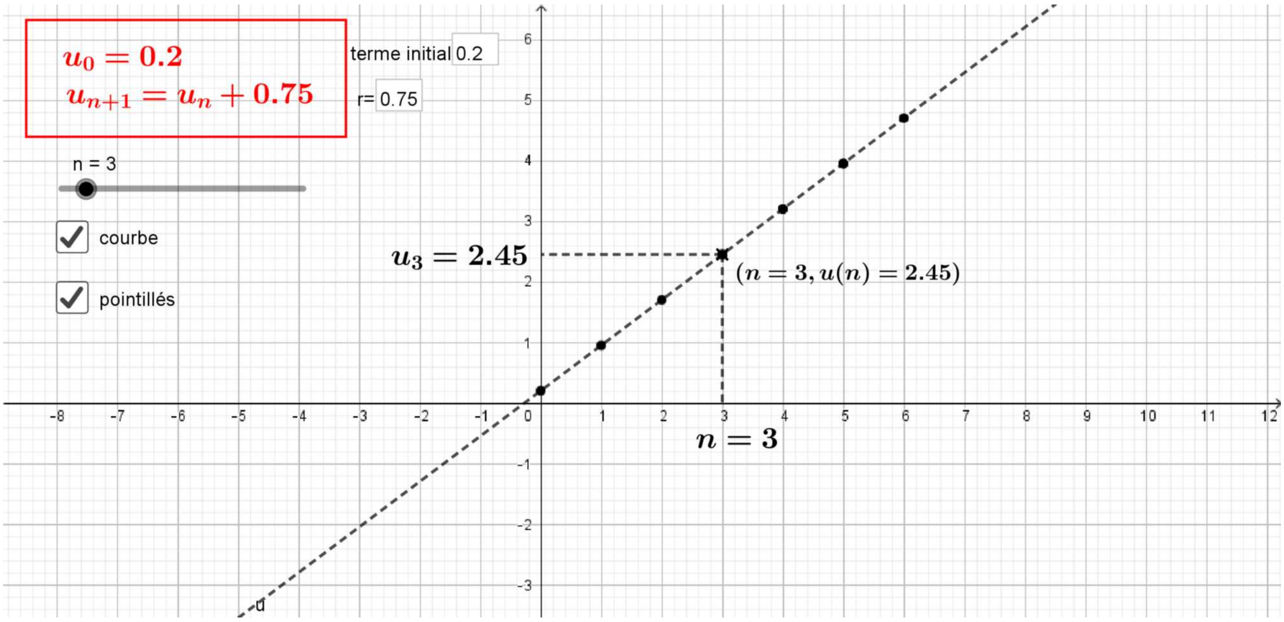
Si u est une suite arithmétique de raison r , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n \geqslant 0$, $u : \begin{cases} u_0 = k \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°2. ***Représentation graphique***

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.



Propriété n°3. Sens de variation

Soit u une suite arithmétique de raison r :
- si $r>0$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $r=0$, la suite est constante;
- si $r<0$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

I.2 Ce qui est nouveau

Définition n°2. Moyenne arithmétique

Soient a et b deux nombres.

La moyenne arithmétique des deux nombres a et b est : $\dfrac{a+b}{2}$.

Exemple n°2.

La moyenne arithmétique des deux nombres 8 et $13{,}5$ est : $\dfrac{8+13{,}5}{2} = 10{,}75$

LES SUITES E01

EXERCICE N°1

Un automobiliste roule pendant une heure à la vitesse constante de $90\,km.h^{-1}$, puis pendant encore une heure à la vitesse constante de $120\,km.h^{-1}$.
Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler pendant la durée totale du trajet pour effectuer le même nombre de kilomètres.

Les suites E01

EXERCICE N°2

Un élève a participé à deux contrôles. Sa première note est 17 et sa moyenne est 15.
Quelle est sa seconde note ?

Propriété n°4. ***Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si (u_n) est une suite suite arithmétique de raison r alors, pour tout n et p : $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p) \times r}}$

En particulier :

$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}}$ et $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1) \times r}}$

Exemple n°3.

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. Par exemple : $v_{250} = v_0+250\times r = -5+250\times 3 = 745$.
- Soit (w_n) la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$. Par exemple : $w_{101} = w_1+(101-1)\times r = 2+100\times 1{,}5 = 152$.
- Soit (t_n) la suite arithmétique de raison $r=-2$ et de premier terme $t_0=10$. Par exemple : $t_{300} = t_0+300\times r = 10+300\times(-2) = -590$.

EXERCICE N°3

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=4$ et de raison $r=2$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .

2) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .

3) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

4) Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

EXERCICE N°4

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1=-80$ et de raison $r=10$.

1) Pour tout entier naturel $n\neq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .

2) Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .

3) Pour tout entier $n\neq 0$, exprimer u_n en fonction de n .

4) Donner alors les valeurs de u_7 , u_{10} et u_{14} .

5) Quel est le rang du terme égal à 80 ? Justifier.

Propriété n°5. Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique vaut :

$$\boxed{S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

LES SUITES

Méthode n°1. ***Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique***

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

Comme on « commence à zéro » le 10^{e} terme est v_9 , on le calcule :
$v_9 = v_0+9\times r = -5+9\times 3 = 22$.

$$A = 10 \times \frac{v_0 + v_9}{2} = 10 \times \frac{-5+22}{2} = 85$$

LES SUITES

- Soit (w_n) la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1+w_2+\ldots+w_{10}\right)$$

Comme on « commence à un» le 10^{e} terme est w_{10} , on le calcule :
$w_{10} = w_1+(10-1)\times r = 2+9\times 1{,}5 = 15{,}5$.

$$B = 10 \times \frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10 \times \frac{2+15{,}5}{2} = 87{,}5$$

LES SUITES E02

EXERCICE N°1

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=2$ et de raison $r=3$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Exprimer le terme u_n en fonction de n . En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50} .

3) Calculer la somme S des 21 premiers termes de la suite et la somme S' des 51 premiers termes.

LES SUITES E02

EXERCICE N°2

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 7 - 3n$.

1) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

2) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.

3) Quelle est la valeur du 51^{e} terme ?

4) Calculer la somme des 51 premiers termes.

EXERCICE N°3 Vers les E3C

Le loyer annuel d'un appartement coûte 6500 € à l'entrée dans les lieux en 2018. Chaque année, le loyer annuel augmente de 150 €. On modélise le prix des loyers annuels par une suite arithmétique (u_n).
On note u_0 le loyer annuel (en euros) payé en 2018. On note u_n le prix du loyer annuel (en euros) pendant l'année $2018+n$.
1) Exprimer le terme u_n en fonction de n.
2) En déduire la valeur du loyer en 2025.
3) Calculer la somme des 11 premiers loyers.
4) Le couple locataire avait envisagé d'acheter une maison pour un budget de $200\,000$ € avant de se décider à louer l'appartement. En quelle année la somme des loyers dépassera-t-elle les $200\,000$ € ?

EXERCICE N°4 À connaître

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Démontrer que $u_0 + u_1 + \ldots + u_7 = 4(2u_0+7r)$

LES SUITES

II Les suites géométriques

II.1 Ce que l'on sait déjà

Définition n°3. Suite géométrique

Une suite u est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°4.

La suite v de terme initial $v_0=10$ et de raison $q=0,5$.

$v_0=10$, $v_1 = v_0\times q = 10\times 0,5=5$, $v_2 = v_1\times q = 5\times 0,5=2,5,\dots$

Propriété n°6. Relation de récurrence

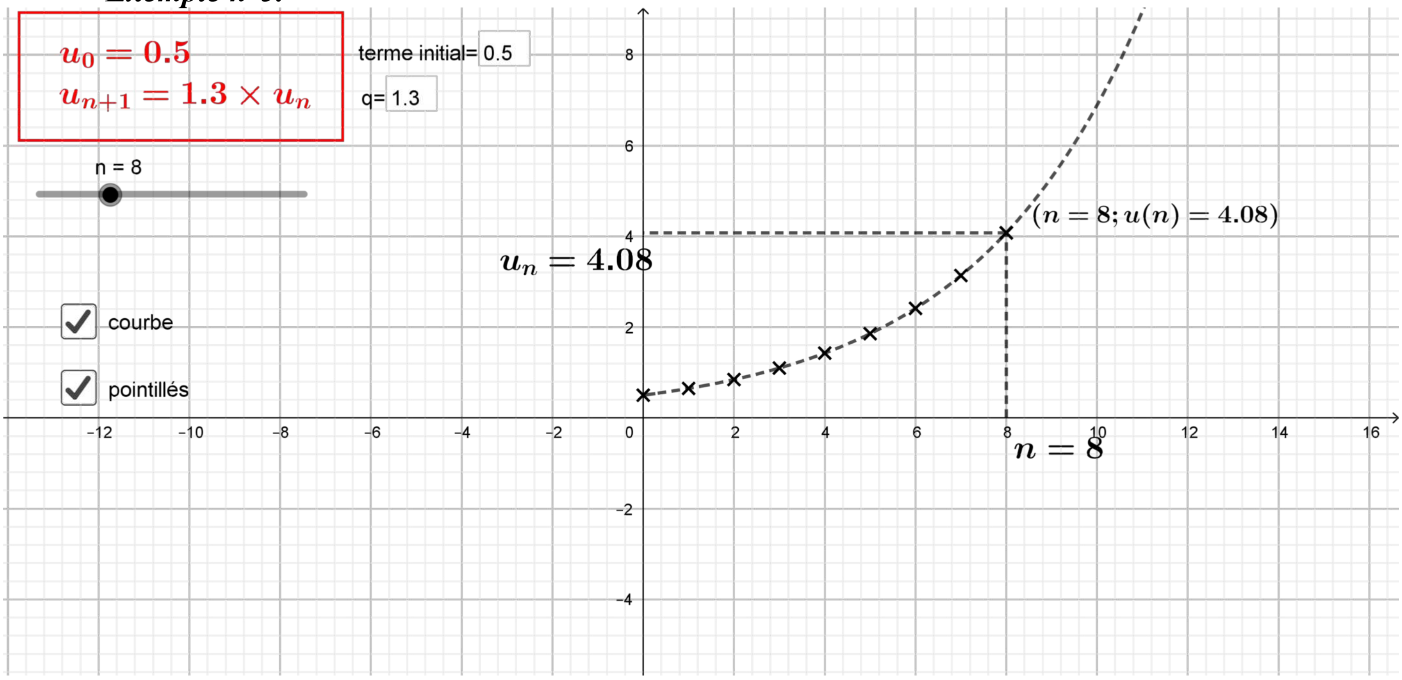
Si u est une suite géométrique de raison q , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$, $u:\begin{cases} u_0=k \\ u_{n+1}=u_n\times q \end{cases}$

(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°7. ***Représentation graphique***

▪ Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.
▪ Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

Exemple n°5.



Propriété n°8. ***Sens de variation***

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif :
- si $q>1$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $q=1$, la suite est constante;
- si $0<q<1$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

II.2 Ce qui est nouveau

Définition n°4. Moyenne géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres de même signe.
La moyenne géométrique des deux nombres a et b est : $\sqrt{a\times b}$

Remarque n°1. Attention

Si les deux nombres ne sont pas de même signe alors leur produit est négatif et on ne peut pas extraire la racine carrée.

Exemple n°6.

- La moyenne géométrique de $4,8$ et 30 vaut : $\sqrt{4,8\times 30} = \sqrt{144} = 12$
- La moyenne géométrique de $-4,8$ et -30 vaut : $\sqrt{-4,8\times(-30)} = \sqrt{144} = 12$
- On ne calcule pas la moyenne géométrique de $-4,8$ et 30 ou de $4,8$ et -30 .

Les suites E03

EXERCICE N°1

Dans un pays, au mois de janvier, les prix ont augmenté de $0{,}9\,\%$, puis en février de $1{,}2\,\%$
Déterminer l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois.

Propriété n°9. ***Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si (u_n) est une suite suite géométrique de raison q alors, pour tout n et p : $\boxed{u_n = u_p \times q^{(n-p)}}$

En particulier :

$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$ et $\boxed{u_n = u_1 \times q^{(n-1)}}$

Exemple n°7.

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit (v_n) la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. Par exemple : $v_9 = v_0 \times q^9 = -5\times 3^9 = -98\ 415$.

- Soit (w_n) la suite géométrique de raison $r=1,5$ et de premier terme $w_1=2$. Par exemple : $w_5 = w_1 \times q^{(5-1)} = 2\times 1,5^4 = 10,125$.

LES SUITES E03

EXERCICE N°2

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=3$ et de raison $q=2$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Exprimer pour tout entier n le terme u_n en fonction de n .

3) En déduire les valeurs de u_7 , u_{11} et u_{19} .

LES SUITES E03

EXERCICE N°3

Dans l'exercice n est un entier naturel.
La population actuelle augmente de $1\,\%$ par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards.
On note u_n la population mondiale l'année $2010+n$.

1) Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme u_0 et sa raison q .

2) Exprimer u_n en fonction de n .

3) En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.

4) À l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

Propriété n°10. Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ avec $\boldsymbol{q \neq 1}$ vaut :

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

Méthode n°2. ***Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique***

- Soit (v_n) la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = -5 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = -147\ 620$$

- Soit (w_n) la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des 5 premiers termes.
  $\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{5} w_k = w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right)$
  $B = w_1 \times \dfrac{1-q^5}{1-q} = 2 \times \dfrac{1-1{,}5^5}{1-1{,}5} = 26{,}375$

Remarque n°2.

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes vaut simplement : $n \times \textit{premier terme}$

LES SUITES E03

EXERCICE N°4

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{9}$ et de raison $q = 3$.

Déterminer $S_8 = \sum_{k=0}^{8} u_k$

EXERCICE N°5

Nous avons tous 2 parents, 4 grands-parents, 8 arrière grands-parents, etc. en supposant que nous appartenons la génération 1, que nos parents appartiennent à la génération 2, nos grands-parents à la génération 3, etc.

1) Combien d'ancêtres figurent à la génération 10 ?

2) Si on pouvait remonter jusqu'en l'an 1000 (soit environ à la 40^{e} génération), combien y aurait-il d'individus au total sur l'arbre généalogique (de la $1^{ère}$ génération c'est-à-dire nous, jusqu'à la 40e génération comprise) ? Que penser de ce résultat ?

LES SUITES E04

EXERCICE N°1 Algorithme

En 2017, des scientifiques ont estimé la masse totale de déchets plastiques dans les océans à 300 millions de tonnes et ont prévu une augmentation de 5,4% par an au cours des prochaines années. On modélise l'évolution de la masse totale de ces déchets plastiques, si rien n'est fait pour la réduire, par une suite géométrique (u_n) de raison 1,054 et de 1er terme $u_0=300$. L'arrondi au centième du terme u_n représente la masse totale de ces déchets, exprimée en million de tonnes, pour l'année $(2017+n)$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Exprimer u_n en fonction de n .

3) On souhaite déterminer en quelle année la masse totale de ces déchets plastiques aura pour la première fois augmenté de 50 % par rapport à sa valeur de 2017.

3.a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable N contienne la réponse au problème posé.

3.b) Que contiennent les variables U et N après exécution de cet algorithme ? Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

$N \leftarrow 2017$
$U \leftarrow 300$
Tant que $U < \dots$
$N \leftarrow \dots$
$U \leftarrow \dots$
Fin tant que

EXERCICE N°2 Python

On administre à un patient un médicament par voie intraveineuse. La concentration du produit actif est quasi immédiatement maximale après l'injection, puis elle diminue de 3 % par minute. On notera C_0 la concentration à l'instant $t=0$ minute et C_n la concentration en $mg.L^{-1}$ au bout de n minutes. On pose $C_0=1$.

1) Justifier que la suite (C_n) est géométrique. Préciser sa raison q.

2) Exprimer C_n en fonction de n.

3) Calculer C_{22} et C_{23}. En déduire à partir de quelle valeur de n la concentration du produit actif aura diminué de moitié.

4) On considère le 1er algorithme suivant en langage Python

```
k=1
for i in range(5):
    k=0.97*k
print(k)
```

4.a) Quelle est la valeur k affichée à l'issue de l'exécution de cet algorithme? On arrondira à 0,0001.

4.b) Quelle interprétation peut-on donner de cette valeur de k en termes de concentration du médicament ?

5) On considère maintenant l'algorithme ci-contre.

```
k=1
i=0
while k>0.5 :
    i=i+1
    k=0.97*k
print(i)
```

5.a) Expliquer pourquoi cet algorithme exécutera plus de 5 itérations de la boucle « Tant que ».

5.b) Le programmer. Quel résultat l'exécution de cet algorithme permet-elle de retrouver?

LES SUITES E05

EXERCICE N°1

Alice place un capital initial $C_0 = 3\,000$ € à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6 % du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).

On note C_n le capital de Alice au bout de n années, capital exprimé en euros.

1) Montrer que, pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on ?

2) Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.

3) De quel capital Alice dispose-t-elle au bout de 10 ans ?

4) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?

5) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10 000 € ?

LES SUITES E05

EXERCICE N°2

En ce début d'année, Rémy a pris de bonnes résolutions. Il a décidé d'arrêter de fumer. Il fume 140 cigarettes par semaine et va réduire progressivement sa consommation hebdomadaire de 4 cigarettes chaque semaine.

1) Montrer que cette situation peut être modélisée par une suite arithmétique.

2) On note (u_n) cette suite. En déterminer le premier terme u_0 et la raison r.

3) Combien de cigarettes fume Rémy après 5 semaines d'efforts ?

4) Au bout de combien de semaines Rémy aura-t-il complètement arrêté la cigarette ?

5) Entre le moment où Rémy a décidé de faire des efforts et le moment où il a enfin arrêté de fumer, combien de cigarettes aura-t-il fumé en tout ?

EXERCICE N°3

On s'intéresse au recyclage des emballages ménagers en plastique issus de la collecte sélective (EMPCS). Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.
Cette masse est exprimée en millier de tonnes et arrondie au millier de tonnes.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Masse d'EMPCS recyclés	229	243	250	256	266	282

Source: http ://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr

1) Justifier que le taux d'évolution global de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016, exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité, est de 23 %.
2) En déduire le taux d'évolution annuel moyen de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.
3) Les nombres 229, 243 et 250 sont-ils les premiers termes d'une suite arithmétique ? Géométrique ?

On fait l'hypothèse qu'à partir de 2016, le taux d'évolution annuel de la masse d'EMPCS recyclés est constant et égal à 4,2 %.
La masse d'EMPCS recyclés au cours de l'année $(2016+n)$, exprimée en millier de tonnes, est modélisée par le terme de rang n d'une suite (u_n) de premier terme $u_0=282$.

4) Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison q.
5) Exprimer u_n en fonction de l'entier n.
6) En déduire une estimation de la masse d'EMPCS recyclés en 2019.

LES SUITES E06

EXERCICE N°1

En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.
Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € par mégot laissé par terre.
Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an grâce à cette amende.
Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre de mégots jetés parterre pendant l'année $2019+n$. Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2019. On a $u_0=20\,000$.

1) Justifier par le calcul que $u_1=17000$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

2)

2.a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

2.b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2.c) Calculer le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2028. Arrondir le résultat à l'unité.

3) Le maire souhaite savoir combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028.

3.a) Exprimer la somme que le maire doit effectuer pour trouver ce nombre en fonction des termes de la suite (u_n).

3.b) Trouver alors le nombre de mégots ramassés.

Les suites E06

EXERCICE N°2

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

1^{er} contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.

$2^{ème}$ contrat: un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier (c'est-à-dire du 36^{e} mois).
3) Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs.)

LES SUITES E06

EXERCICE N°3

Mathilde a reçu 80 000€ en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 8%. Mais chaque année, elle doit retirer 4000 € pour payer les impôts dus à ce placement. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement.

1) Expliquer pourquoi (C_n) vérifie la relation suivante: $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.
2) Calculer à la calculatrice les premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3) On considère la suite auxiliaire (U_n) définie par : $U_n=C_n-50\,000$.
3.a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
3.b) Exprimer U_n puis C_n en fonction de n .
3.c) De quelle somme Mathilde disposera-t-elle au bout de 5 ans ?
3.d) Mathilde veut acheter une maison à 180000 €. Combien d'années devra-t-elle attendre avant de disposer de cette somme ?