FONCTIONS PART3

I Fonction polynôme de degré 3

Définition n°1.

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $a\neq 0$.
On parle aussi de fonction du troisième degré.

Exemple n°1.

La fonction g définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :
$g(x)=4{,}5\,x^3+\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^2-3\,x+5\sqrt{3}$ est une fonction du troisième degré.

FONCTIONS PART3 E01

EXERCICE N°1

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des polynômes de degré 3 ? Justifier.

1) $f(x)=-x^3-\frac{1}{21}x^2-2x+19$

2) $g(x)=\frac{12}{11}x^2+\frac{3}{5}x-9$

3) $h(x)=x^4+2x^3+x^2-5x+4$

4) $p(x)=(x+2)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

5) $q(t)=5t^3-2t+6$

FONCTIONS PART3

Remarque n°1.

La fonction du troisième degré la plus simple est la **fonction cube** :

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{cases}$ (ici $a=1$, $b=c=d=0$)

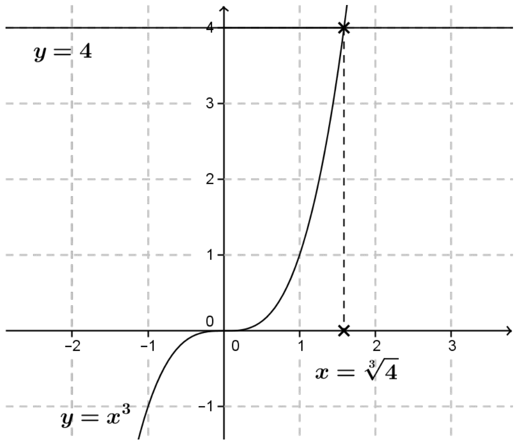
Propriété n°1. ***résoudre $x^3 = c$, avec $c > 0$ (admise)***

Soit c un réel positif. L'équation $x^3=c$ admet une unique solution qui est : $c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{c}$

Exemple n°2.

$$x^3 = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$$

Ainsi l'unique solution est $\sqrt[3]{4}$



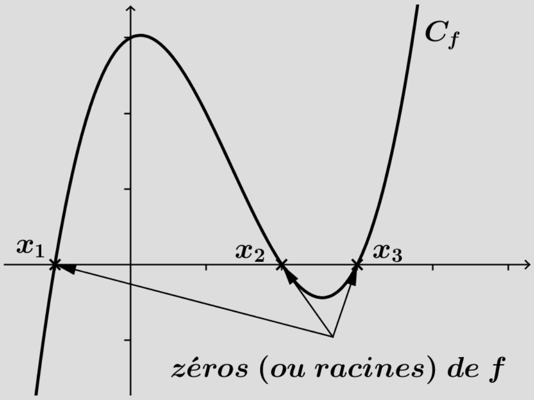
Remarque n°2.

Une équation du troisième degré peut avoir une ou trois solutions réelles.

FONCTIONS PART3

Propriété n°2. ***Fonction du troisième degré admettant trois zéros (admise)***

Soit f une fonction de degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme développée :
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$(a\neq 0)$
Si l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 alors on peut écrire
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
(c'est bien le même a).



On parle alors de la forme factorisée de f.
Réciproquement, si une fonction de degré 3 est écrite sous forme factorisée :
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ alors x_1, x_2 et x_3 sont les zéros de la fonction.

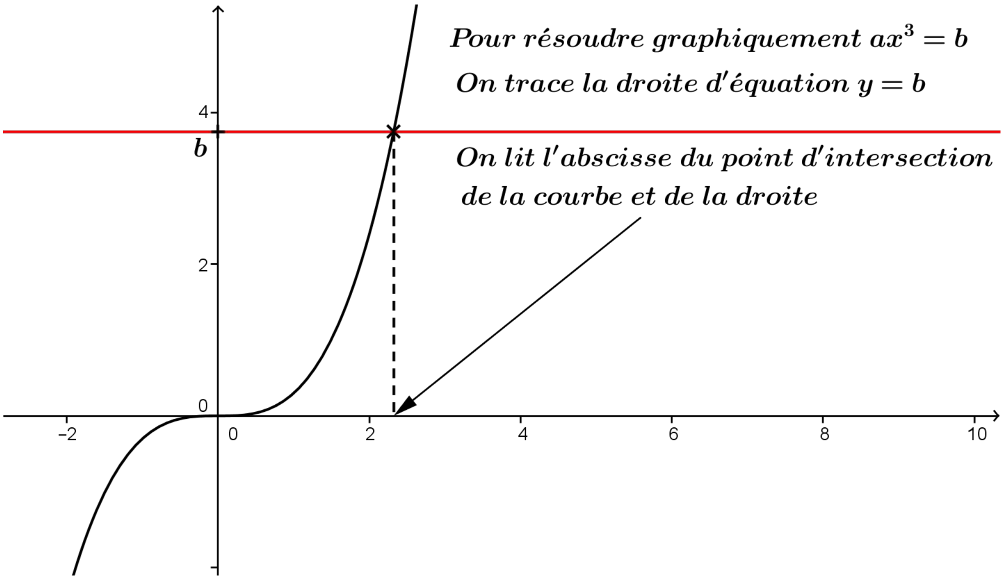
Remarque n°3.

Souvent le mot « racine » sera employé à la place de « zéro ».

FONCTIONS PART3

II Quelques savoir-faire

Méthode n°1. Résoudre graphiquement une équation du type $ax^3 = b$



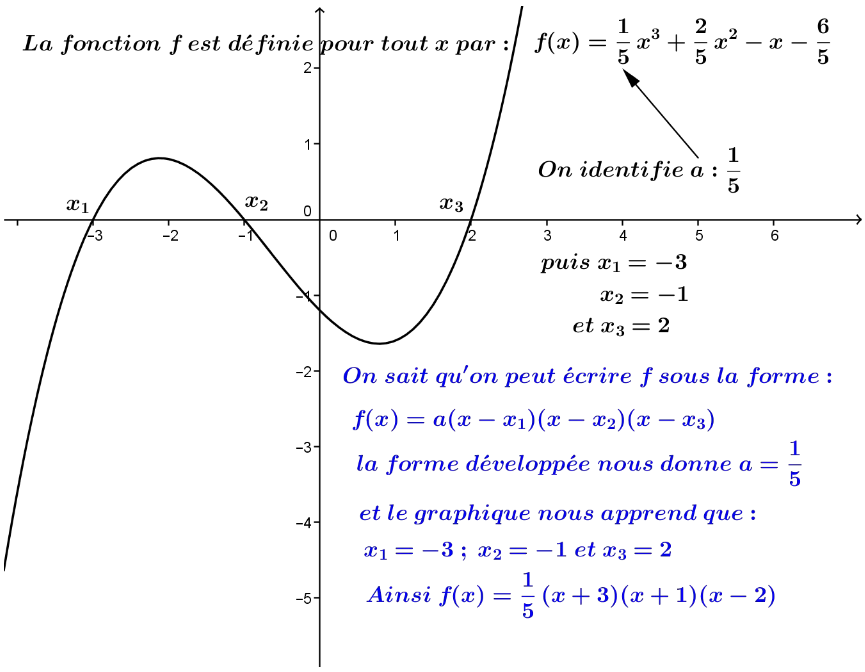
Méthode n°2. Résoudre algébriquement une équation du type $ax^3 = b$

Si $a \neq 0$ alors : $ax^3 = b \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

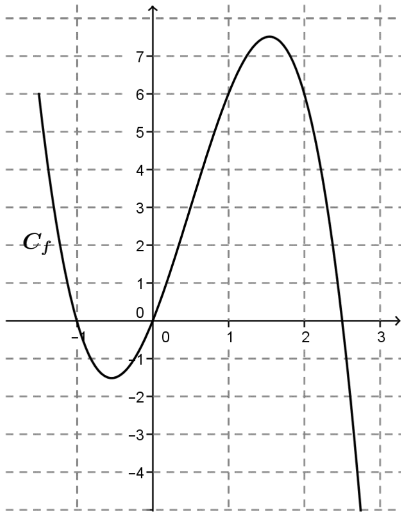
L' équation admet donc une solution : $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

FONCTIONS PART3

Méthode n°3. ***Déterminer la forme factorisée avec l'aide du graphique.***



EXERCICE N°2



Soit f un polynôme de degré 3 défini sur $[-1,5 \ ; \ 4]$ par $f(x)=-2x(x+1)(x-2,5)$ et représenté dans le plan sur un repère par la courbe ci-contre.

1) Résoudre graphiquement $f(x)=6$.

2) Étudier graphiquement les variations de f .

3) Déterminer graphiquement les racines de f .

4) Déterminer graphiquement le signe $f(x)$.

EXERCICE N°3

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant $1, -3$ et -4 pour racines et telle que $P(2)=90$.

EXERCICE N°4

Déterminer une fonction polynôme de degré 3 admettant $3, -5$ et 7 pour racines et telle que $P(2) = -70$.

EXERCICE N°5

On considère la fonction P définie par $P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+k$ où k est un nombre réel.

1) Déterminer la valeur du réel k pour que le nombre 4 soit une racine de P .
2) Sachant que $0{,}5$ est une racine double, factoriser $P(x)$.
3) Résoudre $P(x) > 0$.

FONCTIONS PART3 E02

EXERCICE N°1

Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=0{,}8(x+3)(x-5)(x-7)$

FONCTIONS PART3 E02

EXERCICE N°2

Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=-9(x+12)(x+7)(x-11)$

Fonctions part3 E02

EXERCICE N°3

On admet que les solutions de l'équation $4x^3-28x^2+19x+105=0$ peuvent toutes s'écrire sous la forme $\frac{n}{2}$ où est un entier compris entre -100 et 100 .

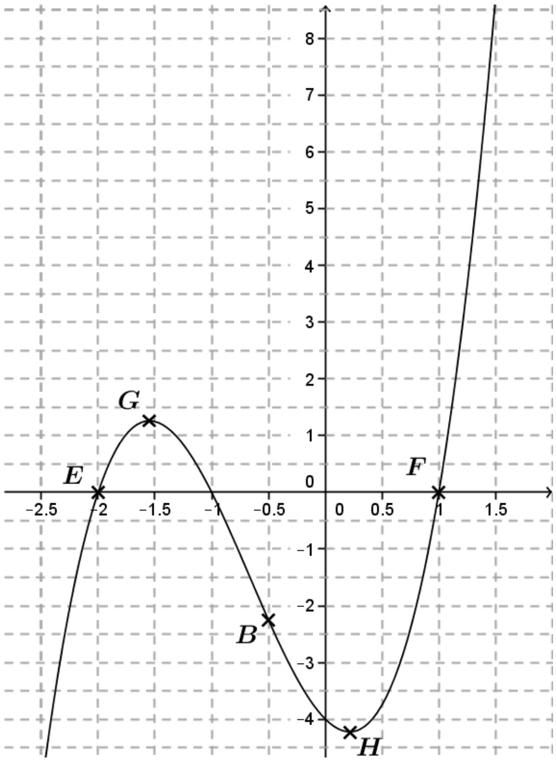
1) Trouver toutes les solutions de cette équation à l'aide d'un programme écrit en Python.

2) En déduire la forme factorisée de $4x^3-28x^2+19x+105$

FONCTIONS PART3 E03

EXERCICE N°1

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dont on précise certaines coordonnées des points :
$B(-0{,}5\ ;\ -2{,}25)$, $C(0\ ;\ -2)$, $E(-2\ ;\ 0)$,
$F(1\ ;\ 0)$, $G(-1{,}55\ ;\ 1{,}26)$ et $H(0{,}22\ ;\ -4{,}23)$.



1) Déterminer les racines de f .

2) Soit la fonction g ; définie sur $\mathbb{R}$ à partir de la fonction f par : $g(x)=f(x)+6$.

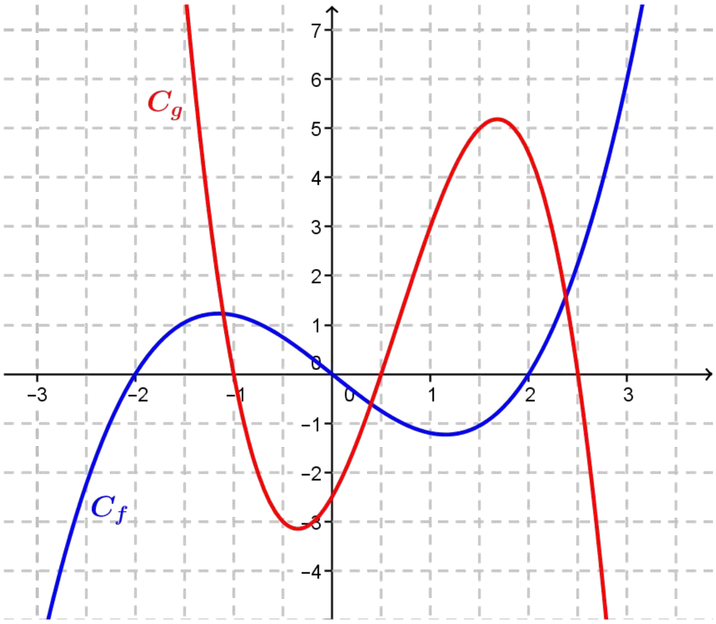
2.a) Tracer l'allure générale de la fonction g .

2.b) Déterminer le nombre de racines de g .

2.c) Déterminer les variations de la fonction g .

2.d) Trouver, si possible, les coordonnées des sommets de la fonction g

EXERCICE N°2



Soient f et g deux fonctions polynômes de degré 3 dont on note C_f et C_g les courbes représentatives.

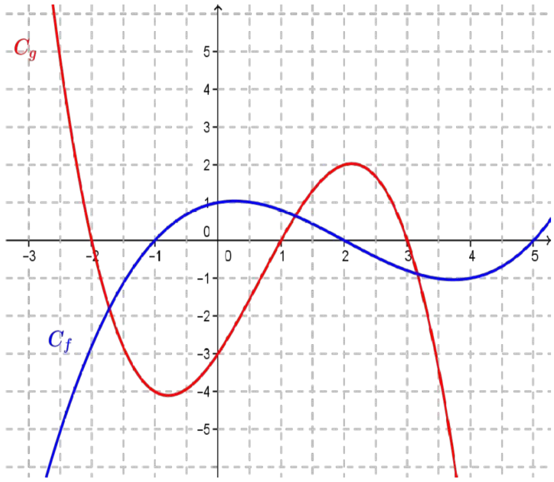
1) Déterminer graphiquement les racines des fonctions f et g .

2) En déduire les expressions factorisées de $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$

EXERCICE N°3

Soient f et g deux fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ et dont on note C_f et C_g les courbes représentatives.



1) Déterminer les formes factorisées de de $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$

FONCTIONS PART3 E04

EXERCICE N°1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-6x^2-2x+6$.

1) Vérifier que pour tout réel x par : $f(x)=2(x-1)(x+1)(x-3)$.

2) En déduire les racines de f sur $\mathbb{R}$.

3) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PART3 E04

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=-2t^3+3t^2+5t$.

1) Montrer que $f(t)=-2t(t+1)(t-2,5)$.

2) Quelles sont les racines de f ?

3) Déterminer le tableau de signes de $f(t)$ sur $\mathbb{R}$.

4) En déduire les solutions de $-2t(t+1)(t-2,5) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PART3 E04

EXERCICE N°3

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$f(x)$
$-1{,}5$	0
-1	$0{,}3$
$-0{,}5$	0
0	$-0{,}45$
$0{,}5$	$-0{,}6$
1	0

1) Déterminer la forme factorisée de f.

2) Déterminer le signe de la fonction de f sur $\mathbb{R}$.

*F*ONCTIONS PART*3 E04*

EXERCICE N°4 En vrac

1) Calculer la longueur de côté d'un carré de 529 cm^2 d'aire.

2) Calculer la longueur de l'arête d'un cube 343 cm^3 de volume.

3) Résoudre $3x^2+27=54$ et $x^3+1=12168$

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f .

2)

2.a) Factoriser $f'(x)$.

2.b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$.

1) Montrer que $f'(x)=3(x+1)(x-1{,}5)$.
2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.
3) Donner les extremums de f , ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

EXERCICE N°3

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudier le signe de la dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=2x^3+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=x^3+6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.