PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03C

EXERCICE N°1 ***Appréhender la définition et la propriété***

Soient Ω un univers et A et B deux événements de probabilité non nulle.
Dans chaque cas vérifier l'indépendance de A et B .

1) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$.

$P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06 = P(A \cap B)$

Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$

2) $P_A(B) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}15$.

$P_A(B) \neq P(B)$

Donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$

3) $P(A) = 0{,}2$ $P(B) = 0{,}6$ $P(A \cup B) = 0{,}68$.

▪ Commençons par déterminer $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

donc

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}68 = 0{,}12$.

▪ $P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$

4) $P(\overline{A}) = 0{,}7$ $P(\overline{B}) = 0{,}8$ $P(A \cap B) = 0{,}06$.

▪ Commençons par déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

▫ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$

donc $P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

▫ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B})$

donc $P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

▪ $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06 = P(A \cap B)$

Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03C

EXERCICE N°2 ***Démontrer l'indépendance***

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note

D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
T l'événement « obtenir un multiple de trois »,
N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1) Les événements N et T sont-ils indépendants ?

▪ On a d'une part :

$P(N)=\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(T)=\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ donc $P(N)\times P(T) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

▪ d'autre part :

$P(N \cap T) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

▪ Ainsi $P(N \cap T) \neq P(N)\times P(T)$

On en déduit que $\boxed{N \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants}}$.

Si les événements avaient été indépendants, on aurait eu l'égalité, ce qui n'est pas le cas.

2) Que dire des événements D et N ?

On a
d'une part :

$P(N)=\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(D)=\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ donc $P(N)\times P(D) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

d'autre part :

$P(N \cap T) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ainsi $P(N \cap T) = P(N)\times P(T)$

On en déduit que $\boxed{N \text{ et } D \text{ sont indépendants}}$.

On apprend ici que N et T s'influencent l'un l'autre (ils ne sont pas indépendants)
alors que N et D ne s'influencent pas l'un l'autre…
Essayez de voir cela sans faire de calcul...

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES E03C

EXERCICE N°3 ***Indépendance vs incompatibilité***

Soient Ω un univers et A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

1) Calculer les probabilités de $A \cap B$ et $A \cup B$ si A et B sont indépendants.

▪ A et B sont indépendants donc

$P(A \cap B) = P(A)\times P(B) = 0,4\times 0,3 = 0,12$

Ainsi $\boxed{P(A \cap B) = 0,12}$

▪ $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 0,4+0,3-0,12 = 0,58$

Ainsi $\boxed{P(A \cup B) = 0,58}$

2) Calculer les probabilités de $A \cap B$ et $A \cup B$ si A et B sont incompatibles.

▪ A et B sont incompatibles donc

$\boxed{P(A \cap B) = 0}$

et

▪ $P(A \cup B) = P(A)+P(B) = 0,4+0,3 = 0,7$

Ainsi $\boxed{P(A \cup B) = 0,7}$

EXERCICE N°4 Des questions à se poser...

Soient Ω un univers et A et B deux événements de probabilité non nulle.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1) L'événement A et son événement contraire $\overline{A}$ sont indépendants.

Faux

Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles donc pas indépendants

Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles donc $P(A \cap \overline{A}) = 0$.
Or $P(A) \neq 0$ et donc $P(\overline{A}) \neq 0$
Si A et $\overline{A}$ étaient indépendants, on aurait $P(A) \times P(\overline{A}) = 0$ ce qui n'est pas le cas.

2) Si A et B sont indépendants alors A et B ne sont pas incompatibles.

Vrai

$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ et A et B sont indépendants
donc
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \neq 0$
Ainsi
A et B ne sont pas incompatibles.

3) Si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P_B(A)$.

Faux

Si $P(A) \neq P(B)$
alors
$P_A(B) = P(B) \neq P(A) = P_B(A)$

Notez que cela peut arriver mais que **ce n'est pas forcément le cas**.

4) Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Vrai

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \quad \text{(car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)} \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(B) \times P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Ainsi $P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times P(\overline{A})$ qui signifie que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

EXERCICE N°5 ***Réussite et/ou travail***

Dans une classe de première de 35 élèves, on a étudié deux caractères :
La réussite et le travail à la maison. Le résultat de cette étude est présenté dans le tableau suivant :

	R	$\overline{R}$	Total
T	12	9	21
$\overline{T}$	8	6	14
Total	20	15	35

On choisit un élève au hasard dans cette classe. On note les événements :

R : « L'élève est en situation de réussite »

T : « L'élève travaille à la maison »

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1) Déterminer $P(R)$ et $P_T(R)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ces résultats.

- $P(R) = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$

La probabilité qu'un élève réussisse vaut $\dfrac{4}{7}$.

- $P_T(R) = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

La probabilité qu'un élève réussisse sachant qu'il travaille vaut $\dfrac{4}{7}$.

2) Dans ce contexte, le fait de travailler influence-t-il le fait de réussir ?

$P_T(R) = P(R)$

donc R et T sont indépendants.

Ainsi, $\boxed{\text{dans ce contexte, le fait de travailler n'influence pas la réussite}}$.

3) Dans ce contexte, le fait de ne pas travailler influence-t'il le fait de ne pas réussir ?

- $P(\overline{R}) = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$

- $P_{\overline{T}}(\overline{R}) = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$

$P_{\overline{T}}(\overline{R}) = P(\overline{R})$

donc $\overline{T}$ et $\overline{R}$ sont indépendants.

Ainsi, $\boxed{\text{dans ce contexte, le fait de ne pas travailler n'influence pas l'échec}}$.