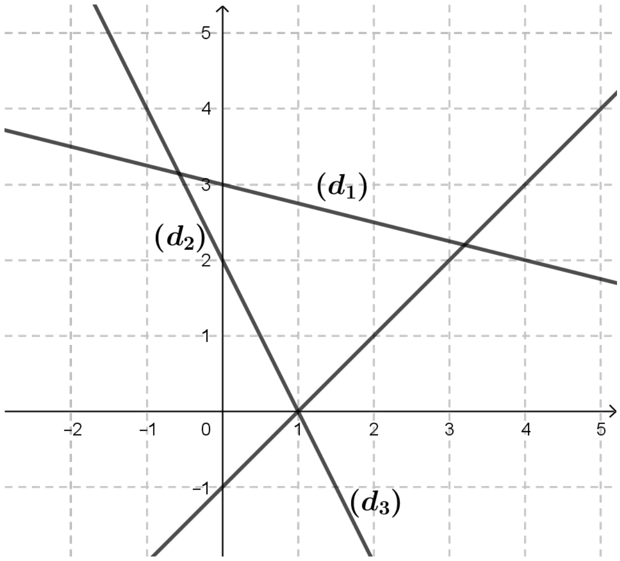
# *FONCTIONS PART2 A01*

## *EXERCICE N°1*

**1)** Dans un repère du plan, une droite passe par les points $A(2\ ;\ -1)$ et $B(5\ ;\ 5)$
Déterminer l'équation de la droite $(AB)$

**2)** Déterminer l'équation réduite des $(d_1),(d_2)$ et $(d_3)$ ci-contre.



## *EXERCICE N°2*

Pour chacune des équations de droites suivantes, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

$(d_1) : y = 2x - 3$ $\quad$ $(d_2) : y = -x + 4$ $\quad$ $(d_3) : y = 2 - 4x$ $\quad$ $(d4) : y = \dfrac{2x+8}{3}$

## *EXERCICE N°3*

Dans un repère orthonormé du plan, tracer :

**1)** La droite $(d_1)$ passant par le point $A(-1\ ;\ 2)$ et de coefficient directeur $-2$ .

**2)** La droite $(d_2)$ passant par le point $B(2\ ;\ -3)$ et de coefficient directeur $3$ .

**3)** La droite $(d_3)$ passant par le point $C(0\ ;\ -5)$ et de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$ .

## EXERCICE N°4

**1)** Dans un repère du plan, placer les points $A(-2\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 1)$ et $C(4\ ;\ 6)$ .

**2)** Tracer les droites $(AB)$, $(AC)$ et $(BC)$ .

**3)** Déterminer graphiquement les équations des droites (AB), (AC) et (BC).

# *FONCTIONS PART2*

## *I Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs*

***Définition n°1.***

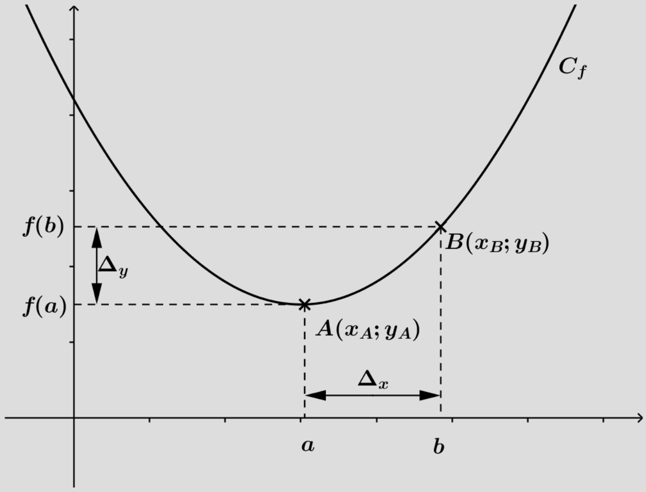
Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et deux nombres $a$ et $b$ appartenant à $I$. On appelle taux de variation entre $a$ et $b$ le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

# *FONCTIONS PART2*

***Remarque n°1.***

Si on note $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à $C_f$ alors :




$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y = y_B - y_A$ et $\Delta_x = x_B - x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

# *FONCTIONS PART2*

***Remarque n°2.***

Le taux de variation entre $a$ et $b$ est donc le coefficient directeur de la droite $(AB)$.

***Remarque n°3.***

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

***Définition n°2.***

La droite $(AB)$ est une sécante à la courbe $C_f$ passant par $A$.

***Remarque n°4.***

On aurait pu faire la même phrase avec $B$ mais dans la suite on va « fixer » $A$ et « faire varier » $B$.

# *FONCTIONS PART2*

## *II Nombre dérivé*

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points $A$ et $B$ sont proches l'un de l'autre. L'intérêt de cette remarque étant qu'il est facile d'étudier le comportement d'un droite… geogebra

***Définition n°3. (un peu hors programme...)***

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de $f$ en $a$ et on note si cela existe :

$$f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

# *Fonctions part2*

***Remarque n°5. Nombre dérivé d'une fonction f en a.***

La notion de limite n'étant pas au programme, on se contentera de dire que :
$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre $h$ vers 0 » dans le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

# *FONCTIONS PART2*

***Exemple n°1.***

Soit $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 + 5 \end{cases}$ , déterminons le nombre dérivé de $f$ en $3$ .

Soit $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h} = \frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

On faisant « tendre $h$ vers 0 » , on obtient 6.

Donc $f'(3)=6$ .

# *FONCTIONS PART2 E01*

## *EXERCICE N°1*

Soit la fonction $f$ définir sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-2x+1$ .

**1)** Calculer $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

**2)** En déduire $f'(0)$ .

**3)** Interpréter graphiquement ce nombre.

**EXERCICE N°2**

Soit la fonction $f$ définir sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+6$ .

**1)** Montrer que $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2$ .

**2)** En déduire la valeur de $f'(3)$ . Ce résultat était-il prévisible ?

**3)** Sans faire de calcul, donner les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(5)$

**4)** Soit la fonction $g$ définir sur $\mathbb{R}$ $g(x)=5x-17$ . Donner les valeurs de $g'(-1)$ et $g'(3)$ .

## *EXERCICE N°3*

**1)** Compléter le programme suivant puis expliquer ce qu'il permet de calculer.

```
def taux_de_variation(f,x1,x2):
    """retourne le taux de variation de
    la fonction f entre les valeurs x1 et x2"""
    return ...

def f(x) :
    return x**2

print(taux_de_variation(f,1,5))
```

**2)** On appelle maintenant la fonction précédente de la façon suivante :

```
>>> h=0.00001
>>> print(taux_de_variation(f,1,1+h))
```

Quel nombre ce script permet-il d'approcher ?

**3)** Modifier le programme précédent pour qu'il affiche le nombre dérivé $f'(2)$ où $f$ est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-x+7$

# *FONCTIONS PART2*

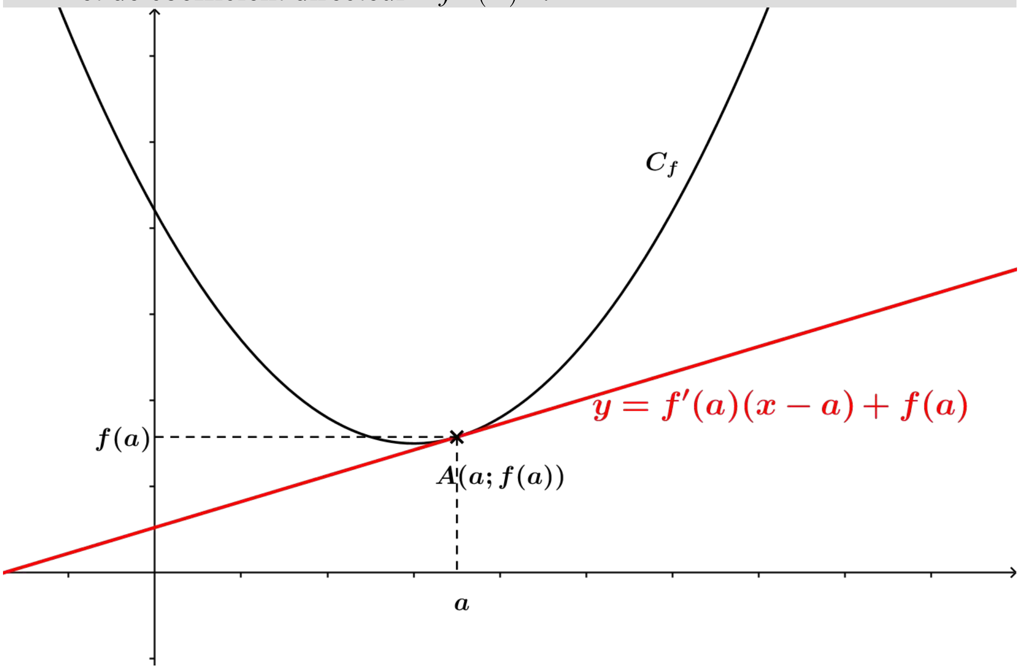
## *III Tangente à la courbe $C_f$ au point $(a\ ;\ f(a))$*

Comme annoncé à la remarque n°4, nous allons faire « tendre $B$ vers $A$ » et notre sécante va devenir une tangente.
En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$ , on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre, quand $h$ tend vers 0 , vers $f'(a)$ .

# *FONCTIONS PART2*

***Définition n°4.***

La tangente $T$ à $C_f$ au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par $A$ et de coefficient directeur $f'(a)$.



***Remarque n°6.***

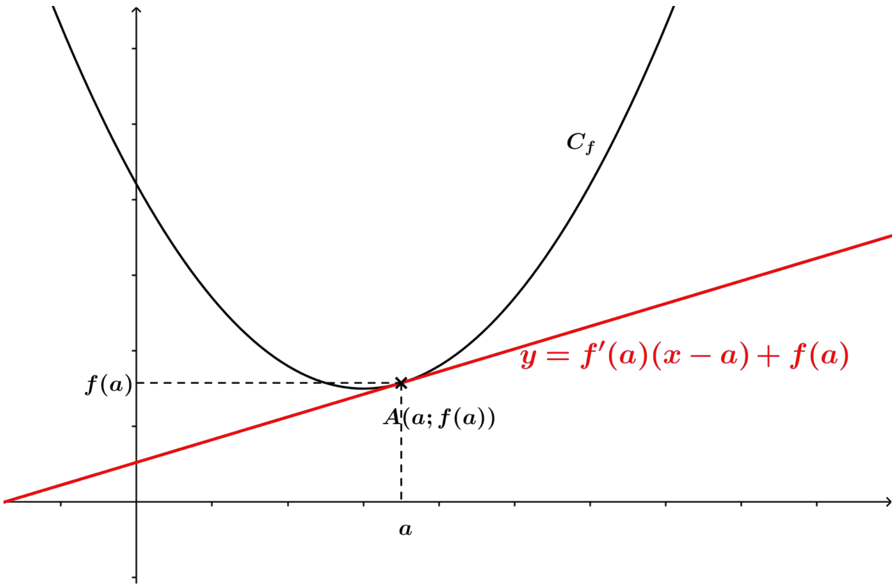
Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à $C_f$, on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de $C_f$ peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-a\,f'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

# *FONCTIONS PART2*

***Propriété n°1. Équation de la tangente***

Soit $f$ une fonction au moins définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe $C_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ admet pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



# *FONCTIONS PART2 E02*

## *EXERCICE N°1*

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1)** Lire graphiquement $g(-2)$.

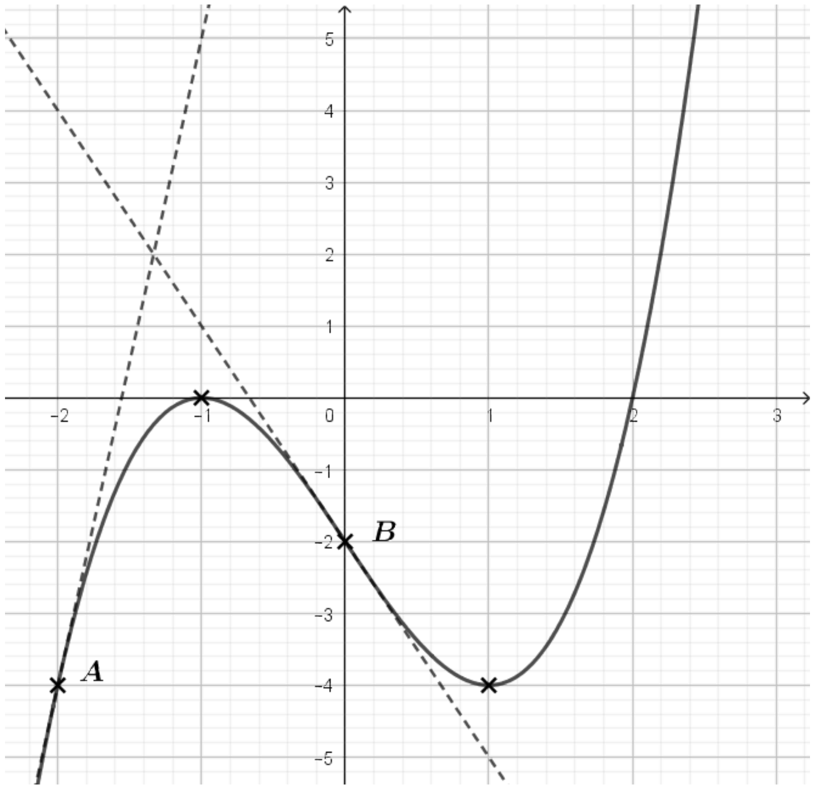
**2)** Lire graphiquement l'image de $0$ par la fonction $g$.

**3)** Lire graphiquement $g'(-2)$.

**4)** Lire graphiquement le nombre dérivé de $g$ en $x=0$.

**5)** Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse $x=-2$.

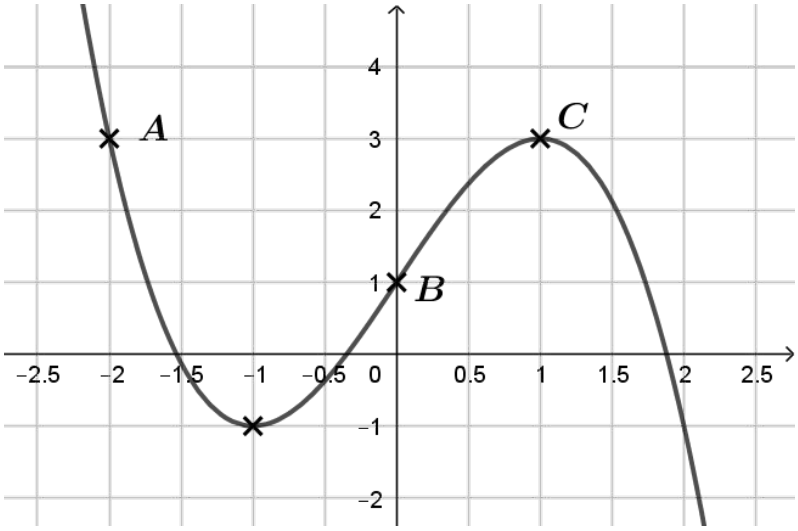
**6)** Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $g$ au point $B$.



# *FONCTIONS PART2 E02*

## *EXERCICE N°2*

On donne la courbe représentative d'une fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $C_h$ cette courbe.




**1)** Tracer approximativement la tangente à $C_h$ au point $A$.

**2)** Tracer approximativement la tangente à $C_h$ au point $C$.

**3)** Sachant que $h'(0)=3$, tracer précisément la tangente à $C_h$ au point $B$.

# *FONCTIONS PART2*

## *IV Fonction dérivée d'une fonction*

***Définition n°5.***

$f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intérieur de $I$ , $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction $f$ est dérivable sur l'intérieur de $I$ et on appelle fonction dérivée de $f$ , la fonction notée $f'$ définie par

$f' := \begin{cases} \mathring{I} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$

# *F*ONCTIONS PART2

***Exemple n°2.***

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2+5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ . Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h} = 2x+h$$

En faisant « tendre $h$ vers 0 » , on obtient $2x$ .

Ainsi $f'(x)=2x$ .

Ceci étant valable pour tout réel $x$ , nous venons de démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2x \end{cases}$

# *FONCTIONS PART2*

## *IV.1 Quelques fonctions dérivées de référence*

***Remarque n°7. Fonction dérivée d'une fonction constante***

Si $f$ est une fonction constante sur $I$, autrement dit pour tout $x \in I$ $f(x)=k$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors :

$f(x+h)-f(x) = k-k=0$ pour tout $h$, on en déduit que $f'(x)=0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

# *FONCTIONS PART2*

***Remarque n°8.*** ***Fonction dérivée de la fonction identité***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \end{cases}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

# *FONCTIONS PART2*

***Propriété n°2.*** ***Fonction dérivée de la fonction carré***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ alors $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2x \end{cases}$

***preuve :***

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « $h$ tend vers 0 » .

# *FONCTIONS PART2*

***Propriété n°3. Fonctions dérivée de la fonction cube***

Si $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{cases}$ alors $f' := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to 3x^2 \end{cases}$

***preuve :***

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

qui « tend vers $3x^2$ » quand « $h$ tend vers 0 » .

# *FONCTIONS PART2*

## *IV.2 Quelques opérations sur les fonctions dérivées*

***Propriété n°4. Linéarité de la dérivation***

Soient $f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ et $g := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to g(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ .

La fonction dérivée de la fonction $af + bg$ est :

$$(af+bg)' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to a\, f'(x) + b\, g'(x) \end{cases}$$

***preuve :***

$$\begin{aligned}
\frac{(af+bg)(x+h)-(af+bg)(x)}{h} &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-(af(x)+bg(x))}{h} \\
&= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h} \\
&= \frac{af(x+h)-af(x)+bg(x+h)-bg(x)}{h} \\
&= \frac{af(x+h)-af(x)}{h}+\frac{bg(x+h)-bg(x)}{h} \\
&= a\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= af'(x)+bg'(x)
\end{aligned}$$

Grâce aux remarques n°7 et 8 ainsi qu'aux propriétés n°2,3 et 4 nous obtenons le formulaire suivant :

# *FONCTIONS PART2*

## *V Un formulaire à connaître*

***Propriété n°5.***

Dans ce tableau $k$, $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres.

| $f(x)=$ | $f'(x)=$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $ax^3+bx^2+cx+d$ | $a\times 3x^2 + b\times 2x + c$ |

***Exemple n°3.***

On donne $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+11x+7$ et déterminons l'expression de sa fonction dérivée.

$$f'(x)=4\times 3x^2 - 5\times 2x + 11$$
$$=12x^2-10x+11$$

# *FONCTIONS PART2 E03*

## *EXERCICE N°1*

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ . Calculer leur fonction dérivée.

**1)** $f_1(x)=5$ ; $f_2(x)=\dfrac{15}{7}$ ; $f_3(x)=\sqrt{3}$ ; $f_4(x)=2\pi$ ; $f_5(x)=-3\pi+5\sqrt{3}$

**2)** $g_1(x)=x+2$ ; $g_2(x)=x+3\pi\sqrt{7}$

**3)** $g_3(x)=4x+5$ ; $g_4(x)=\sqrt{7}x+8{,}5$ ; $g_5(x)=\dfrac{4}{3}x-8\sqrt{3}$ ; $g_6(x)=\dfrac{8}{7}-4x$

**4)** $h_1(x)=3x^2-4$ ; $h_2(x)=4x^2+5x-1$ ; $h_3(x)=-2{,}5x^2+6x+\sqrt{3}$

**5)** $h_4(x)=\dfrac{5}{2}x^3-4x^2+3x-7\sqrt{11}$ ; $h_5(x)=-\pi x^3+\sqrt{5}x^2-\dfrac{14}{3}x+33$

**6)** $h_6(x)=(3x+4)(2x-7)$ ; $h_7(x)=(7-2x)^2$

# *FONCTIONS PART2 E03*

## *EXERCICE N°2*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-6x^2+4x+1$ . On note $C_f$ sa courbe représentative.

**1)** Calculer $f'(2)$ .

**2)** Déterminer le nombre dérivé de $f$ en $a:=3$

**3)** Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1.

# *FONCTIONS PART2 E03*

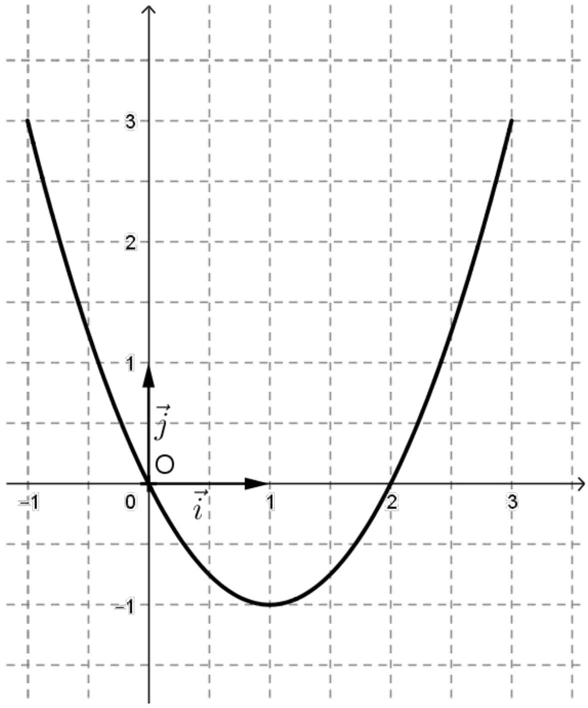
## *EXERCICE N°3*

Pour chacune des fonctions $f_i$ suivantes, déterminer une équation de la tangente $(d_i)$ à la courbe représentative $C_{f_i}$ au point d'abscisse $a$ puis la tracer d'un repère orthonormé.

**1)** Soit $f_1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = -x^2 - x + 2$ et $a := -2$

**2)** Soit $f_2$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^3 - 3x + 2$ et $a := 0{,}5$

## EXERCICE N°4




Le plan est muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ (unité: 1 cm).
Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$ dont on donne la courbe représentative $C_f$ ci-contre.

**1)** Reproduire soigneusement cette figure sur votre cahier.

**2)** On admet que la courbe $C_f$ admet la tangente $T_1$ au point $O(0\ ;\ 0)$ et que $f'(0)=-2$ .
Construire la tangente $T_1$ .

**3)** On admet que la courbe $C_f$ admet la tangente $T_2$ au point $S(1\ ;\ -1)$ et que $f'(1)=0$ .
Construire la tangente $T_2$ .

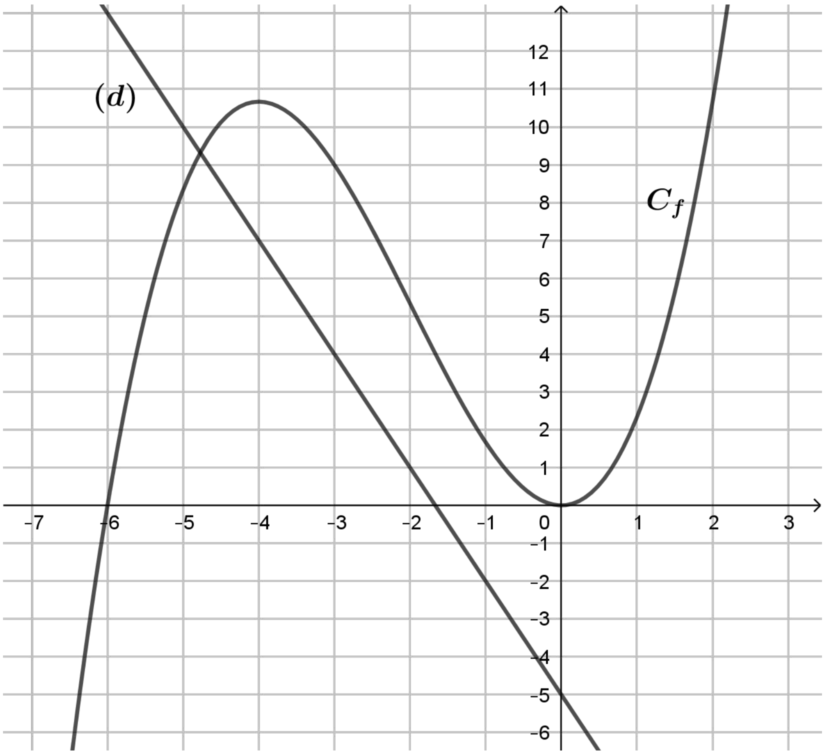
**4)** On admet que la courbe $C_f$ admet la tangente $T_3$ au point $A(2\ ;\ 0)$ et que $f'(2)=2$ .
Construire la tangente $T_3$ .

## *EXERCICE N°1*

Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2$ .

**1)** La courbe $C_f$ admet-elle des tangentes parallèles à la droite $(d)$ d'équation $y=-3x-5$ ?

**2)** Si oui, déterminer les coordonnées des points en lesquels $C_f$ admet ces tangentes.



**EXERCICE N°2**

On considère la fonction $f$ définie par: $f(x)=-3x^2+10x-4$
On note $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**1)** Existe-t-il des tangentes à $C_f$ de coefficient directeur $-2$ ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de $C_f$ où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

**2)** Existe-t-il des tangentes à $C_f$ de coefficient directeur $4$ ?

Si oui, déterminer les coordonnées du ou des points de $C_f$ où cette(ces) tangente(s) existe(nt).

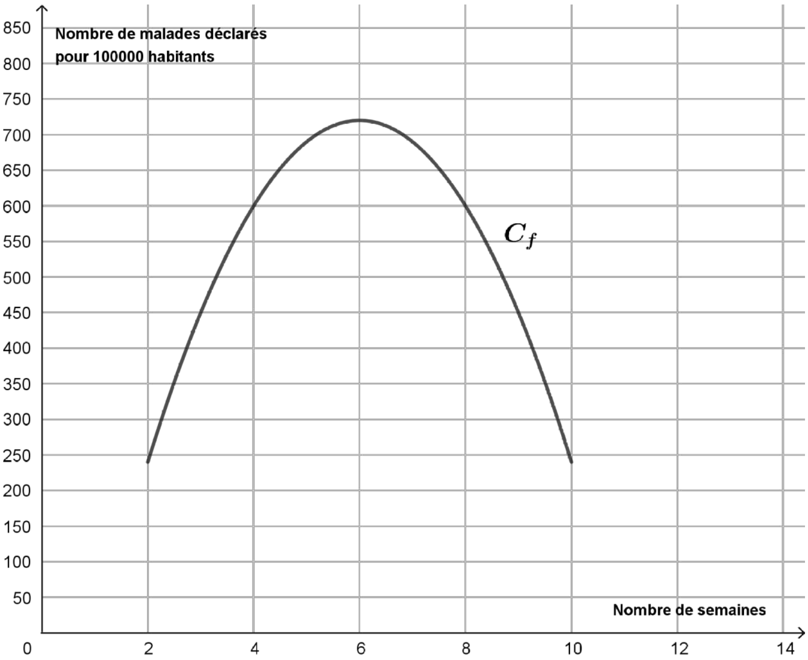
**3)** Tracer la courbe représentative de ainsi que les tangentes considérées précédemment.

## EXERCICE N°3

Lors d'une épidémie de grippe, on s'intéresse au nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout d'un certain nombre $x$ de semaines

On admet que la fonction $f$ définie sur $[2 ; 10]$ $f(x)=-30x^2+360x-360$ modélise ce nombre de malades.

On note $C_f$ sa courbe représentative donnée ci-contre :




**1)** Selon ce modèle, au bout de combien de semaine le pic de l'épidémie a-t-il été atteint?

**2)** Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur à 600.

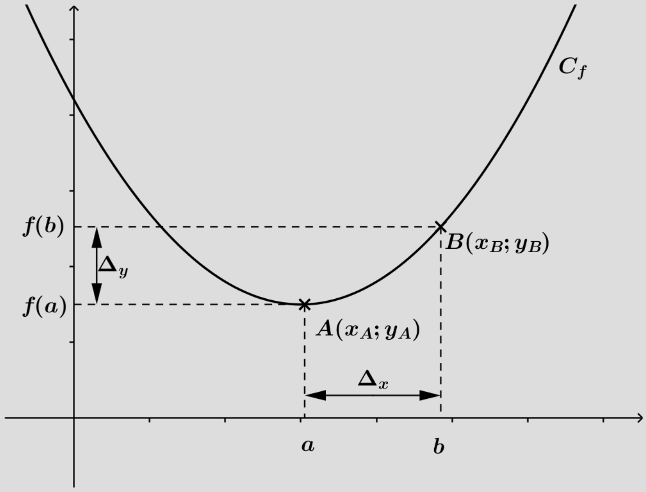
**3)** Calculer $f'(x)$ , puis calculer le nombre dérivé de $f$ en $3$ .

**4)** On considère que le nombre dérivé $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de $x$ semaines. La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de 3 semaines ou de 4 semaines?

collegue

## VI Le résumé du cours

Si on note $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à $C_f$ alors :



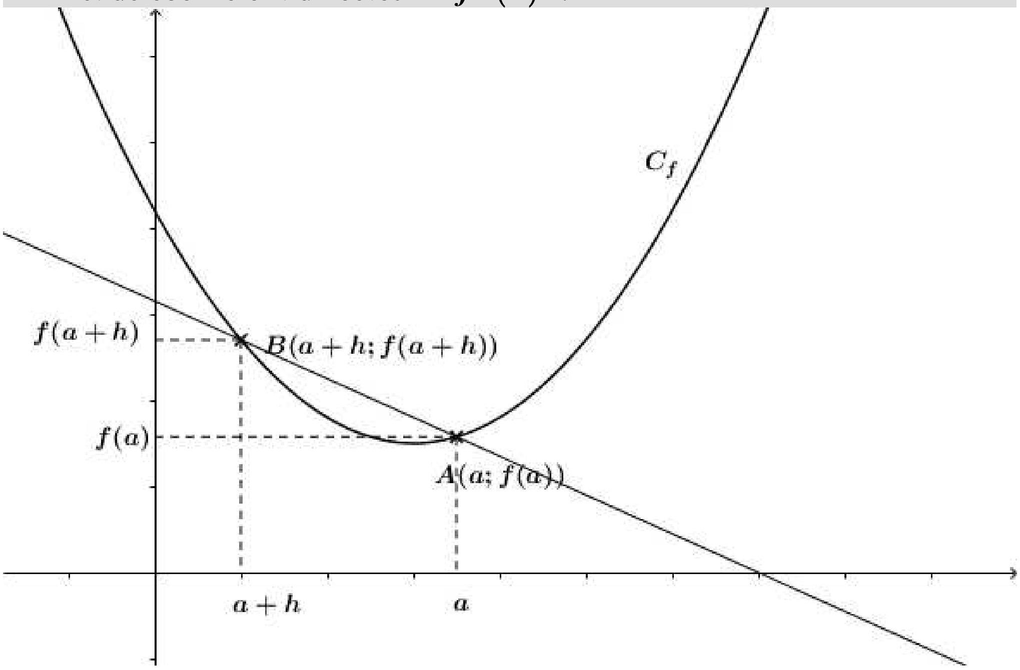

**taux de variation :** $\boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}}$

où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

La **tangente** $T$ à $C_f$ au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par $A$ et de **coefficient directeur** $\boldsymbol{f'(a)}$.

Équation de la tangente en $a$

$$\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$




Si $f$ et $g$ sont dérivables sur un intervalle $I$ alors $f+g$ aussi et $\boldsymbol{(f+g)'=f'+g'}$

Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si $k\in\mathbb{R}$ alors $k\,f$ est dérivable sur $I$ et $\boldsymbol{(k\,f)'=k\,f'}$

À connaître par cœur

| $f(x)=$ | $f'(x)=$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$ | $a\times 3x^2\ +\ b\times 2x\ +\ c$ |