ARITHMÉTIQUE E02C

L'objectif de cette activité est de démontrer que le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Pour cela, nous avons besoin de quelques préparatifs…

EXERCICE N°1 La multiplication par 3

On donne un nombre entier natuel N .
Si N est un multiple de 10 alors il existe un entier naturel p tel que $N = p \times 10$

1) Démontrer qu'alors le chiffre des unités de $3N$ est zéro.

$3N = 3 \times p \times 10 = (3 \times p) \times 10.$
Or $3 \times p$ est un nombre entier
Donc $(3 \times p) \times 10$ est dans la table de 10 et par conséquent son chiffre des unités est zéro.

Si N n'est pas un mutliple de 10, alors son chiffre des unités peut être : $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9$ (mais pas 0).

2) Démontrer qu'alors le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

▪ 1er cas : Si le chiffre des unités de N est 1 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 1$
$$3N = 3(p \times 10 + 1) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 1$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 3.

▪ 2e cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 2$
$$3N = 3(p \times 10 + 2) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 2$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 6.

▪ 3e cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 3$
$$3N = 3(p \times 10 + 3) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 3$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 9.

▪ 4e cas : Si le chiffre des unités de N est 2 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 4$
$$3N = 3(p \times 10 + 4) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 4$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 8.

▪ 5e cas : Si le chiffre des unités de N est 5 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 5$
$$3N = 3(p \times 10 + 5) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 5$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 5.

▪ 6e cas : Si le chiffre des unités de N est 6 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 6$
$$3N = 3(p \times 10 + 6) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 6$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 8.

▪ 7e cas : Si le chiffre des unités de N est 7 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 7$
$$3N = 3(p \times 10 + 7) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 7$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 1.

▪ 8e cas : Si le chiffre des unités de N est 6 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p \times 10 + 8$
$$3N = 3(p \times 10 + 8) = \underbrace{3 \times p \times 10}_{se\ termine\ par\ zéro} + 3 \times 8$$
On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 4.

▪ 9e cas : Si le chiffre des unités de N est 9 :
Alors, il existe un nombre naturel p tel que $N = p\times10+9$

$$3N = 3(p\times10+9) = \underbrace{3\times p\times10}_{\text{se termine par zéro}} + 3\times9$$

On en déduit que que le chiffre des unités de $3N$ est 7.

Dans tous ces cas possibles, le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

On retient de cet exercice que :

Si un entier naturel N n'est pas un multiple de 10 alors son triple $3N$ n'est pas non plus un multiple de 10.

EXERCICE N°2 C'est quoi exactement un nombre décimal ?

Définition n°1.

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10.
Autrement dit :
Si a est un nombre décimal alors il existe deux entiers N et $q\geq0$ tel que $a = \dfrac{N}{10^q}$.

Exemple n°1.

$$46{,}97 = \frac{4967}{10^2} \quad ; \quad -35{,}789 = -\frac{35789}{10^3}$$

Remarque n°1.

$$46{,}97 = \frac{4967}{10^2} = \frac{46970}{10^3} = \frac{469700}{10^4} = \ldots$$

Ce serait plus pratique si on choisissait tous la même écriture !
On conviendra de prendre le numérateur le plus proche possible de zéro.
Cela implique que :

Si le nombre décimal a est non nul alors le numérateur N ne sera pas un multiple de 10.

1) Supposons que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal, qu'est ce que cela implique ?

Cela implique qu'il existe un entier naturel N , **non multiple de 10** et un entier q tel que :

$$\frac{1}{3} = \frac{N}{10^q}$$

EXERCICE N°3 Démonstration par l'absurde

Démontrez que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Supposons que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Alors il existe un entier naturel N , **non multiple de 10** et un entier q tel que :

$$\frac{1}{3} = \frac{N}{10^q}$$

Ce qui équivaut à $3N = 10^q$

Or :

D'une part : N n'étant pas multiple de 10, le chiffre des unités de $3N$ n'est pas zéro.

D'autre part : le chiffre des unités de 10^q est zéro.

La dernière égalité est donc absurde.

On en déduit que $\dfrac{1}{3}$ ne pas être un nombre décimal.

Car en supposant le contraire, on aboutit à une absurdité.