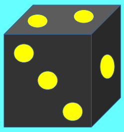
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Les définitions

On considère une expérience aléatoire dont l'univers, noté Ω, est fini et à partir duquel on définit une loi de probabilité.
Soit A et B deux événements de l'univers Ω.

Un petit rappel, sous forme d'exemple, s'impose :
On prend un dé bien équilibré à six faces. Notre **expérience aléatoire** consistera à le lancer et à relever le nombre de la face supérieure.

Ici on relève le nombre 2



Notre **univers** est alors composé de six nombres : $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$ et 6
On écrira $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$\{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{4\} ; \{5\}$ et $\{6\}$ sont des **événements élémentaires** avec lesquels on peut décrire des **événements** comme, par exemple :
Obtenir un nombre pair : $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2 ; 4 ; 6\}$

Pour chaque événement élémentaire, on donne sa probabilité, on appelle cela **la loi de probabilité**.
(En général, on la donne sous forme de tableau)

Loi de probabilité							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Grâce à cette loi de probabilité on peut calculer les probabilités des événements.
Par exemple si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2 ; 4 ; 6\}) = p(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition n°1. ***Événement contraire***

On note $\overline{A}$ (et on lit « A barre ») l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A .

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

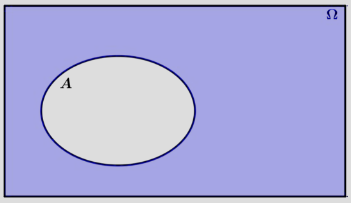


Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

On garde la même expérience aléatoire.

A : « Obtenir un nombre pair »

$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2 ; 4 ; 6\}$

A possède trois éléments, on note $Card(A)=3$

« **Cardinal** de A vaut 3 »

$\overline{A}$: « Ne pas obtenir un nombre pair »

$\overline{A} = \underbrace{\Omega \backslash \{2 ; 4 ; 6\}}_{\Omega \text{ privé de } \{2 ; 4 ; 6\}} = \{1 ; 3 ; 5\}$

$\overline{A}$ possède trois éléments, on note $Card(\overline{A})=3$

B : « Obtenir un multiple de trois »

$B = \{3\} \cup \{6\} = \{3 ; 6\}$

B possède deux éléments, on note $Card(B)=2$

$\overline{B}$: « Ne pas obtenir un multiple de trois »

$\overline{B} = \underbrace{\Omega \backslash \{3 ; 6\}}_{\Omega \text{ privé de } \{3 ; 6\}} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$

$\overline{B}$ possède quatre éléments, on note $Card(\overline{B})=4$

	B	$\overline{B}$	Total
A			3
$\overline{A}$			3
Total	2	4	6

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

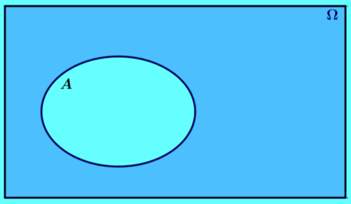


Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition n°2. Intersection de deux événements

On note $A \cap B$ (et on lit « A inter B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus à la fois dans A et B

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	
$\overline{A}$		

La case coloriée correspond à $A \cap B$

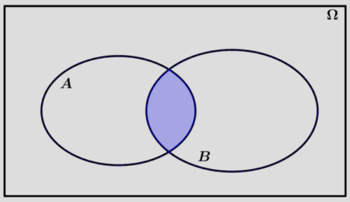


Diagramme de Venn illustrant $A \cap B$

On garde la même expérience aléatoire.

A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de trois »

$A \cap B$: « Obtenir un nombre pair ET un multiple de trois »

On peut aussi écrire : « Obtenir un multiple de 6 »

$A \cap B = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\} \cap \{3\ ;\ 6\} = \{6\}$ (On ne garde que ce qu'il y a en commun)

$Card(A \cap B) = 1$

Remarque : Attention, la couleur rouge nous indique que l'on parle de l'événement $A \cap B$ mais, dans le tableau, on écrira son cardinal : $Card(A \cap B) = 1$

Probabilités conditionnelles

Définition n°3. ***Union de deux événements***

On note $A\cup B$ (et on lit « A union B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou B .

	B	$\overline{B}$
A	$A\cup B$	$A\cup B$
$\overline{A}$	$A\cup B$	

Les cases coloriées correspondent à $A\cup B$

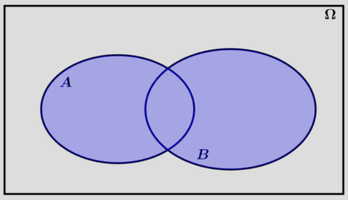


Diagramme de Venn illustrant $A\cup B$

Remarque n°1.

Attention, c'est un « ou inclusif » : l'événement peut appartenir à A , à B mais aussi à A et B en même temps

On garde la même expérience aléatoire.
A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de trois »
$A\cup B$: « Obtenir un nombre pair OU un multiple de trois »

$A\cup B = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}\cup\{3\ ;\ 6\} = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ (On prend tous les éléments mais on ne les fait apparaître qu'une fois)

Même remarque, la couleur rouge nous indique toutes les cases qui concernent $A\cup B$ mais on écrira les cardinaux correspondants.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$1=Card(A\cap B)$	$2=Card(A\cap\overline{B})$	3
$\overline{A}$	$1=Card(\overline{A}\cap B)$	$2=Card(\overline{A}\cap\overline{B})$	3
Total	2	4	6

Les cases coloriées correspondent à $A\cup B$

Remarque :
On retrouve bien sûr que $Card(A\cup B)=Card(A\cap B)+Card(\overline{A}\cap B)+Card(A\cap\overline{B})$

Définition n°4. ***Probabilité conditionnelle***

On appelle **probabilité de B sachant A** et on note $p_A(B)$ le nombre défini par :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)}}$$

Propriété n°1.

$$\boxed{p_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

preuve :

$$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}}{\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}\times\frac{Card(\Omega)}{Card(A)} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)} = p_A(B)$$

Remarque n°2. ***rappel***

$Card(A)$ est le nombre d'événements élémentaires contenus dans A