FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS
OBJECTIF SPE

EXERCICE N°1

VOIR LE CORRIGÉ

On donne a, b et c trois réels quelconques.

1) Développer et réduire la somme suivante :

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$$

2) En déduire l'inégalité :

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

Dans les deux exercices suivants, nous allons comparer différentes moyennes.

Définition n°1. Moyenne arithmétique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels, on appelle moyenne arithmétique de a et b, le nombre réel : $\dfrac{a+b}{2}$

Exemple n°1.

La moyenne arithmétique de 3 et -7 est le nombre $\dfrac{3+(-7)}{2} = -2$

Définition n°2. Moyenne géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels **POSITIFS**, on appelle moyenne géométrique de a et b, le nombre réel : $\sqrt{a\times b}$

Exemple n°2.

La moyenne géométrique de 2 et 8 est le nombre $\sqrt{2\times 8} = 4$
La moyenne géométrique de 4 et 8 est le nombre $\sqrt{4\times 8} = \sqrt{32}$

Définition n°3. Moyenne harmonique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels **STRICTEMENT POSITIFS**, on appelle moyenne harmonique de a et b, le nombre réel : $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

Exemple n°3.

La moyenne harmonique de 2 et 8 est le nombre $\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}} = 3{,}2$

EXERCICE N°2 *Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique*

VOIR LE CORRIGÉ

On considère a et b deux nombres positifs tels que $a \leqslant b$ et m et g leur moyenne respectivement arithmétique et géométrique. On a donc :

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad g = \sqrt{a\times b}$$

1) Justifier que m vérifie l'encadrement : $a \leqslant m \leqslant b$

2) En comparant les carrés de m et g, démontrer l'inégalité : $\sqrt{a\times b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

3) Une application de cette comparaison :
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que pour tous nombres réels positifs a, b et c, on a : $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$

EXERCICE N°3 *Comparaison des moyennes arithmétique et harmonique*

VOIR LE CORRIGÉ

On considère a et b deux nombres strictement positifs et m et h leur moyenne respectivement arithmétique et harmonique. On a donc : $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

1) Justifier que : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$

2) Démontrer que : $m-h = \dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

3) En déduire, la comparaison entre m et h.

FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS
OBJECTIF SPE CORRIGÉ

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 1

On donne a, b et c trois réels quelconques.

1) Développer et réduire la somme suivante :

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 = a^2-2ab+b^2 + b^2-2bc+c^2 + a^2-2ac+c^2$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 = \boxed{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac}$

2) En déduire l'inégalité :

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

L'expression

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$

étant une somme de nombres positifs est positive :

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 \geqslant 0$

ce qui, d'après la question précédente, équivaut à :

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geqslant 0$

qui équivaut également à :

$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac$

et après la division par deux de chaque membre, à :

$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$

Fonctions affines et inéquations
Objectif Spe corrigé

EXERCICE N°2 ***Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique*** RETOUR À L'EXERCICE 2

On considère a et b deux nombres positifs tels que $a \leqslant b$ et m et g leur moyenne respectivement arithmétique et géométrique. On a donc :

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad g = \sqrt{a \times b}$$

1) Justifier que m vérifie l'encadrement : $a \leqslant m \leqslant b$

- $a \leqslant b$

équivaut à :

$a+a \leqslant b+a$ (On ajoute un même terme : a à chaque membre)

puis à :

$\frac{a+a}{2} \leqslant \frac{b+a}{2}$ (On divise chaque membre par un même nombre strictement positif: 2)

on encore à :

$\boxed{a \leqslant m}$

- $a \leqslant b$

équivaut à :

$a+b \leqslant b+b$ (On ajoute un même terme : b à chaque membre)

puis à :

$\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b+b}{2}$ (On divise chaque membre par un même nombre strictement positif: 2)

on encore à :

$\boxed{m \leqslant b}$

- Ainsi $\boxed{a \leqslant m \leqslant b}$

Voici une autre rédaction possible :

D'une part :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} \leqslant \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a \leqslant m$$

et d'autre part :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b+b}{2} \Leftrightarrow m \leqslant b$$

Ainsi $\boxed{a \leqslant m \leqslant b}$

2) En comparant les carrés de m et g, démontrer l'inégalité : $\sqrt{a \times b} \leqslant \frac{a+b}{2}$

- $m^2 - g^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$

$m^2 - g^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab$ (oui, il est temps de se passer du $\times$ entre a et b)

$m^2 - g^2 = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}$

$m^2 - g^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$ (vous avez bien appris vos identités remarquables...)

$m^2 - g^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (Comme le carré d'un nombre réel, ici $\frac{a-b}{2}$, est positif)

On en déduit que :

$m^2 - g^2 \geqslant 0$. (On a donc $m^2 \geqslant g^2$)

- Or :

$m^2 - g^2 = (m+g)(m-g)$

donc : $(m+g)(m-g) \geqslant 0$

De plus :

a et b étant positifs m et g le sont aussi.

D'où $m+g \geqslant 0$

On en déduit que, d'après la règle des signes que :

$m - g \geqslant 0$

qui équivaut à :

$m \geqslant g$

c'est à dire $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \times b}$

Remarque sur le second point :
un peu plus tard dans l'année, nous établirons que la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'ensemble des réels positifs et nous aurons vu alors que la croissance d'une fonction implique certaines conservations des inégalités.
Le second point pourra alors s'écrire :

$g^2 \leqslant m^2$

or la fonction racine carrée est strictement croissance sur $\mathbb{R}^+$
donc :

$\sqrt{g^2} \leqslant \sqrt{m^2}$

▪ a et b étant positifs, m et g le sont aussi et donc :

$\sqrt{m^2} = m$ et $\sqrt{g^2} = g$

Ainsi :

$g \leqslant m$

3) Une application de cette comparaison :
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que pour tous nombres réels positifs a, b et c, on a : $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$

D'après la question précédente

$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\dfrac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$ et $\dfrac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}$

On se souvient : Nous n'avons pas de propriété nous permettant de multiplier des inégalités entre elles, donc on se retrousse les manches…

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right) \geqslant \sqrt{ab}\times\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

et

$$\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc} \Leftrightarrow \left(\frac{b+c}{2}\right)\times\sqrt{ab} \geqslant \sqrt{bc}\times\sqrt{ab}$$

Donc :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right) \geqslant \sqrt{bc}\times\sqrt{ab}$$

De la même façon :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right) \geqslant \sqrt{bc}\times\sqrt{ab}\times\sqrt{ac}$$

Cette dernière inégalité équivaut :

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} \geqslant \sqrt{bc\times ab\times ac} = \sqrt{(abc)^2}$$

qui équivaut enfin à :

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$$

Gardez à l'esprit que les conservations d'inégalites et les simplifications de racines n'ont été possibles que parce que tout est positif (car a, b et c le sont).

Fonctions affines et inéquations
Objectif Spe corrigé

EXERCICE N°3 Comparaison des moyennes arithmétique et harmonique RETOUR À L'EXERCICE 3

On considère a et b deux nombres strictement positifs et m et h leur moyenne respectivement arithmétique et harmonique. On a donc : $m = \frac{a+b}{2}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

1) Justifier que : $h = \frac{2ab}{a+b}$

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = 2\times\frac{ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

Et l'égalité est établie.

Sur une copie, on préférera travailler en colonne.

2) Démontrer que : $m-h = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

$$m-h = \frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}$$

$$m-h = \frac{(a+b)(a+b)}{2(a+b)} - \frac{2ab\times2}{(a+b)\times2}$$

$$m-h = \frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}$$

$$m-h = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2(a+b)}$$

$$m-h = \frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}$$

$$m-h = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

Et l'égalité est établie.

3) En déduire, la comparaison entre m et h.

$(a-b)^2$ est toujours positif.

a et b étant strictement positifs, $a+b$ l'est aussi.

D'après la règle des signes :

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} > 0$$

qui équivaut à :

$$m-h > 0$$

et donc à

$$\boxed{m > h}$$