FONCTIONS PART3 E01

EXERCICE N°5 ***(Le corrigé)***

On considère la fonction P définie par où $P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+k$ k est un nombre réel.

1) Déterminer la valeur du réel k pour que le nombre 4 soit une racine de P .

Si 4 est une racine de P alors :

$P(4)=0 \Leftrightarrow -4^3+5\times 4^2-4{,}25\times 4+k=0 \Leftrightarrow -1+k=0 \Leftrightarrow k=1$

Ainsi, pour que 4 soit une racine de P , il faut (et il suffit) que $\boxed{k=1}$

2) Sachant que $0{,}5$ est une racine double, factoriser $P(x)$.

On sait que P est de degré 3 et que ses racines sont $0{,}5$; $0{,}5$ et 4

Donc, pour tout réel x ,

$P(x)=a(x-0{,}5)^2(x-4)$ avec a un nombre réel.

Il nous reste à trouver a :

$P(x)=a(x-0{,}5)(x-0{,}5)(x-4)$ et $(x-0{,}5)(x-0{,}5)=(x-0{,}5)^2$

En développant,

$P(x)=a[(x^2-x+0{,}25)(x-4)]=a(x^3-4x^2-x^2+4x+0{,}25x-1)=a(x^3-5x^2+4{,}25x-1)$

Or d'après la question 1)

$P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+1$

En effet, on sait que $P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+k$ et grâce à la question 1 que $k=1$, donc

$P(x)=-x^3+5x^2-4{,}25x+1$

Ici, on se souvient de la définition n°1 du cours :

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

avec $a=-1$; $b=5$; $c=-4{,}25$ et $d=k=1$

La propriété n°2 du cours nous dit alors que $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$x_1=x_2=0{,}5$ et $x_3=4$ et comme le « a » est le même dans les deux formes $a=-1$

On en déduit que $a=-1$

Ainsi $\boxed{P(x)=-(x-0{,}5)^2(x-4)}$

3) Résoudre $P(x)>0$.

Soit x un nombre réel.

$P(x)>0 \Leftrightarrow -(x-0{,}5)^2(x-4)>0$

- -1 est toujour négatif,
- $(x-0{,}5)^2$ est positif ou nul (nul en 0,5)
- $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

x	$-\infty$		$0{,}5$		4		$+\infty$
-1		$-$	|	$-$	|	$-$	
$(x-0{,}5)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x)>0$ est :

$\boxed{]-\infty\ ;\ 0{,}5[\ \cup\ ]0{,}5\ ;\ 4[}$