EXERCICE N°4 Tangentes passant par un point donné

Extrait du déclic 1er spé 99 p 127

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

et on note C_f sa courbe représentative.

On souhaite déterminer les tangentes à C_f passant par le point $M(0\ ;\ 2)$.

1) Démontrer que la tangente t_a au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe C_f a pour équation réduite :

$$y = -\frac{4a}{(a^2+1)^2}x + \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2} .$$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

La tangente au point d'abscisse a admet comme équation

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

qui s'écrit :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}(x-a)+\frac{2}{a^2+1}$$

ou :

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x-\frac{-4a}{(a^2+1)^2}a+\frac{2}{a^2+1}$$

ou encore

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{4a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{2}{a^2+1}$$

puis

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{4a^2+2(a^2+1)}{(a^2+1)^2}$$

et enfin

$$y = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}x+\frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}$$

cqfd

2) Montrer que $M(0\ ;\ 2) \in T_a \Leftrightarrow a^2-a^4 = 0$.

Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe.

$$\begin{aligned}
M(0\ ;\ 2) \in T_a &\Leftrightarrow 2 = \frac{-4a}{(a^2+1)^2}\times 0+\frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}\\
&\Leftrightarrow 2 = \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{6a^2+2}{(a^2+1)^2}-2 = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{6a^2+2-2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2} = 0\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(a^2+1)^2\neq 0} 6a^2+2-2(a^4+2a^2+1) = 0\\
&\Leftrightarrow -2a^4+2a^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 2(a^2-a^4) = 0\\
&\Leftrightarrow a^2-a^4 = 0
\end{aligned}$$

cqfd

3) Conclure.

$a^2 - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2(1-a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2(1-a)(1+a) = 0$

On en déduit trois valeurs possibles pour a : -1 ; 0 et 1 ,
et donc trois tangentes possibles :

- $y = \dfrac{-4(-1)}{((-1)^2+1)^2}x + \dfrac{6(-1)^2+2}{((-1)^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = x+2}$
- $y = \dfrac{-4\times 0}{(0^2+1)^2}x + \dfrac{6\times 0^2+2}{(0^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = 2}$
- $y = \dfrac{-4\times 1}{(1^2+1)^2}x + \dfrac{6\times 1^2+2}{(1^2+1)^2}$ soit $\boxed{y = -x+2}$