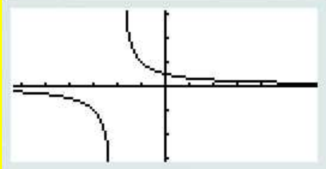
# ÉTUDE DE FONCTIONS E01

**EXERCICE N°4** *(Le corrigé)*

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ différent de $-2$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

**1)** Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ sur la calculatrice.



Pour les Casios
https://www.youtube.com/watch?v=eqPhMlF8l68

Pour les TI
https://www.youtube.com/watch?v=aDTy88WAGg8

**2)** Conjecturer le sens de variation de la fonction $f$ sur $]-\infty~;-2[$ et sur $]-2~;+\infty[$

Il semble que la fonction $f$ est $\boxed{\text{décroissante}}$ sur $]-\infty~;-2[$ et sur $]-2~;+\infty[$ .

On pourrait même préciser : « strictement décroissante ».

**3)** Soient $a$ et $b$ deux réels appartenant à l'intervalle , $]-2~;+\infty[$ tels que $a<b$ .

**3.a)** Montrer que $f(b)-f(a)=\dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}$

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{b+2}-\frac{1}{a+2}=\frac{(a+2)-(b+2)}{(b+2)(a+2)}=\frac{a+2-b-2}{(b+2)(a+2)}=\frac{a-b}{(b+2)(a+2)}$$

**3.b)** à l'aide de la règle des signes démontrer que $f(b)-f(a)\leqslant 0$ sur $]-2~;+\infty[$ **.**

- On sait que $a<b$ équivaut à $a-b<0$
- $a\in\,]-2~;+\infty[\;\Leftrightarrow\;-2<a\;\Leftrightarrow\;0<a+2$
- $b\in\,]-2~;+\infty[\;\Leftrightarrow\;-2<b\;\Leftrightarrow\;0<b+2$

Ainsi, d'après la règle des signes, $\boxed{\dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}<0}$

Le numérateur est négatif, le dénominateur lui est positif car produit de deux nombres de même signe, enfin le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

Donc $f(b)-f(a)<0$

**3.c)** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur $]-2~;+\infty[$ .

$f(b)-f(a)<0\;\Leftrightarrow\;f(a)>f(b)$

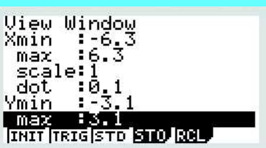
À l'aide des questions précédentes, on a démontré que sur l'intervalle $]-2~;+\infty[$ ,
si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$ .

La fonction $\boxed{f\text{ est donc strictement décroissante sur }]-2~;+\infty[}$

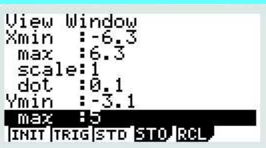
**4)**

**4.a)** Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$ .

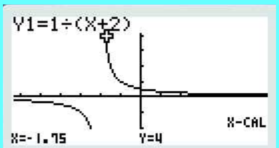
Nous allons devoir adapter la fenêtre de notre calculatrice.




→




→




Graphiquement, on trouve environ $-1{,}75$

Alors là, c'est bien sûr de l'arnaque. On ne vous a pas donné un graphique digne de ce nom, on ne s'attend donc pas à ce que vous fassiez une « belle lecture graphique ».

Pour la dernière fenêtre, je vous laisse chercher…

Voici tout de même un début de piste :

Casio :
http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fonctions_graph35.pdf

TI :
http://xymaths.free.fr/Lycee/Calculatrice-TI.php#def

**4.b)** Vérifier la conjecture en résolvant algébriquement l'équation $f(x)=4$ .

$f(x)=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}=4$

Pour $x\neq -2$ cette équation est équivalente à :

Souvenez vous, on fait attention aux valeurs interdites

$1=4(x+2) \Leftrightarrow 1=4x+8 \Leftrightarrow -7=4x \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}=x$

Et bien sûr, $-\dfrac{7}{4}=-1{,}75$

Ainsi, $f(x)=4$ possède $\boxed{\text{une unique solution : } -1{,}75}$

**5)** Montrer que $f(x)-2 = \dfrac{-2x-3}{x+2}$

$f(x)-2 = \dfrac{1}{x+2}-2 = \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2(x+2)}{x+2} = \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2x+4}{x+2} = \dfrac{1-(2x+4)}{x+2} = \dfrac{-2x-3}{x+2}$

**6)** En utilisant un tableau de signes, déterminer l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 2$ .

Pour $x\neq -2$

$f(x)\leqslant 2 \Leftrightarrow f(x)-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-3}{x+2} \leqslant 0$

- $-2x-3 > 0 \Leftrightarrow -2x > 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{-2}=-1{,}5$
- $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x-3$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Pour la double barre dans la dernière ligne : page 4 de ce cours

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $]-\infty\ ;-2[\ \cup\ [-1{,}5\ ;+\infty[$

Ouvert en $-2$ car valeur interdite, fermé en $-1{,}5$ car inégalité large