FONCTIONS AFFINES ET INÉQUATIONS

I Les inégalités

Remarque n°1.

Les propriétés énoncées restent valables avec les symboles $<$; $\geqslant$ et $\leqslant$

Propriété n°1.

Soient a et b deux nombres réels.
$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$

preuve :

Immédiat car, par définition, $a > b \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété n°2.

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow a\,d>b\,d}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow a\,d<b\,d}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

preuve :

▪ $a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow a+c-c-b>0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Leftrightarrow a+c>b+c$

▪ Si $d>0$
$a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow d(a-b)>0 \Leftrightarrow ad-bd>0 \Leftrightarrow ad>bd$
règle des signes

▪ Les autres équivalences se démontrent de la même manière que ces deux là
Elles sont laissées à titre d'exercice.

Propriété n°3.

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$

preuve :

Si $a<b$ et $c<d$ alors $a-b<0$ et $c-d<0$
donc $(a-b)+(c-d)<0$ (somme de deux nombres négatifs)
Or $(a-b)+(c-d)<0 \Leftrightarrow a+c-b-d<0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+d)<0 \Leftrightarrow a+c<b+d$

Exemple n°1.

Si $x\geqslant 3$ et $y\geqslant 12$ alors $x+y\geqslant 3+12$

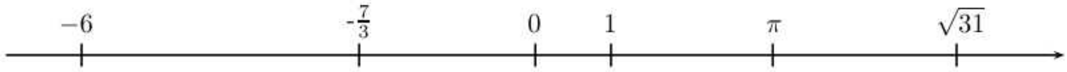
Remarque n°2. ***Attention***

Cette propriété ne fonctionne pas avec la soustraction, voici un contre-exemple :
$1<2$ et $3<10$ alors que $1-3>2-10$

II Les intervalles

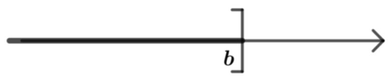
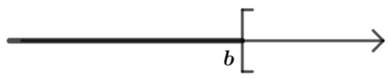
Définition n°1. Une façon de voir l'ensemble des réels

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.



Définition n°2. Intervalles

Soit a et b deux nombre réels, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ définies par :

Intervalle	Ensemble des réels x tels que :	Représentation graphique
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$	
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$ on peut aussi écrire $x \geqslant a$	
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$ on peut aussi écrire $x > a$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$	

Remarque n°3.

➔ Les intervalles $[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ et $]a\ ;\ b]$ sont des intervalles bornés et a et b sont appelés les bornes .

➔ L'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$

➔ $[a\ ;\ b]$ est un intervalle fermé et $]a\ ;\ b[$ est un intervalle ouvert.

➔ $\mathbb{R}=]-\infty\ ;\ +\infty[$

III Les inéquations

Définition n°3.

Une inéquation d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x qu'on appelle alors solutions. Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver toutes les solutions réelles.

Exemple n°2. ***Décrire les solutions d'une inéquation***

Énoncé :

Résoudre l'inéquation $-3x+7\geqslant 11$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis le représenter graphiquement.

Réponse :

$$-3x+7\geqslant 11 \quad \Leftrightarrow \quad -3x\geqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad x\leqslant -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x\in \left]-\infty\ ;-\frac{4}{3}\right]$$

Remarque n°4.

On garde en tête la propriété n°2 :

Lorsqu'on résout une inéquation,

• additionner ou soustraire un même nombre réel à chaque membre ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre positif ne change pas l'ordre,
• multiplier ou diviser les membres par un même nombre négatif change l'ordre.

IV Sens de variation et signe d'une fonction affine

Dans tout le paragraphe, $f:\begin{cases}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$ avec m et p des réels, est une fonction affine.

Propriété n°4. ***Rappel***

Pour toute fonction affine, l'accroissement de la fonction est proportionnel à celui de la variable :
si $a\neq b$ alors

$$\boxed{\boldsymbol{m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}$$

preuve :

Comme f est affine, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=mx+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.
Pour $a\neq b$, on peut écrire :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma+p-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Remarque n°5. ***Sens de variation d'une fonction affine***

La propriété précédente nous indique que si $m>0$ alors les images sont rangées dans le même ordre que les abscisses (on dit que la fonction est croissante) et que si $m<0$ alors les images sont rangées dans l'ordre contraire à celui des abscisses (on dit que la fonction est décroissante).

$m<0$: f est strictement décroissante

$m>0$: f est strictement croissante

Tableaux de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Définition n°4. ***Racine d'une fonction affine***

On suppose $m\neq 0$.

On appelle racine de f le réel x_0 tel que $f(x_0)=0$

Propriété n°5.

$$x_0=\frac{-p}{m}$$

Remarque n°6.

Le point de coordonnées $(x_0\ ;\ 0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Propriété n°6. ***Signe d'une fonction affine***

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$

Tableaux de signes

$m<0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$m>0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

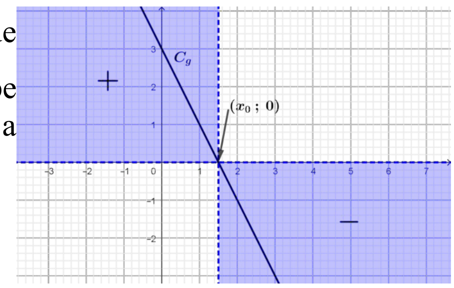
Exemple n°3.

Pour $g:\begin{cases}\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto -2x+3\end{cases}$, $m=-2$ et $p=3$

▪ Comme $m<0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Posons $x_0=\frac{-p}{m}=\frac{-3}{-2}=1{,}5$, on sait alors que la droite représentant la fonction g coupe l'axe des abscisses au point $(1{,}5\ ;\ 0)$ et on a le tableau de signe suivant :



x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

V Le résumé du cours

Les propriétés énoncées restent valables avec les symboles $<$; $\geqslant$ et $\leqslant$

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

$$a > b \Leftrightarrow a-b > 0$$

$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c}$ $\boxed{a>b \Leftrightarrow a-c>b-c}$

Si $d>0$	$d<0$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad>bd}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow ad<bd}$
$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}}$	$\boxed{a>b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}}$

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

$\boxed{\text{Si } a<b \text{ et } c<d \text{ alors } a+c<b+d}$

Attention : Si on peut additionner des inégalités on ne peut pas les soustraire.

- ➔ Les intervalles $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$, $]\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}[$, $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}[$ et $]\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$ sont des intervalles bornés et a et b sont appelés les bornes .
- ➔ L'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$
- ➔ $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$ est un intervalle fermé et $]\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}[$ est un intervalle ouvert.
- ➔ $\mathbb{R}=]-\infty ; +\infty[$

Résoudre une inéquation

Énoncé :

$$-3x+7\geqslant 11 \Leftrightarrow -3x\geqslant 4 \Leftrightarrow x\leqslant -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty ; -\frac{4}{3}\right]$$

Résoudre l'inéquation $-3x+7\geqslant 11$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis le représenter graphiquement.

Réponse :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto mx+p\end{cases}$$ une fonction affine

$m<0$	$m>0$
f est strictement décroissante	f est strictement croissante

Tableaux de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Tableaux de signes

$m<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$m>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	