

LA FONCTION CARRÉ

I Définition et étude de la fonction carré

Définition n°1.

La fonction carré est la fonction définie par $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur D_f .

« f est paire » signifie que : Pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$

Propriété n°1.

La fonction carré est paire.

preuve :

Notons g la fonction carré.

Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g = \mathbb{R}$)

$$g(-x) = (-x)^2 = -x \times (-x) = x^2 = g(x)$$

Ainsi g est paire.

Remarque n°1.

Si une fonction est paire alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

Définition n°3. Croissance, décroissance

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :

Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :

Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :

Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » signifie que :

Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Remarque n°2.

On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Propriété n°2. Variations de la fonction carré

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

preuve :

▪ Soient $a < b \leq 0$

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Or $a+b < 0$ (car a et b sont négatifs) et $a-b < 0$ (car $a < b$)

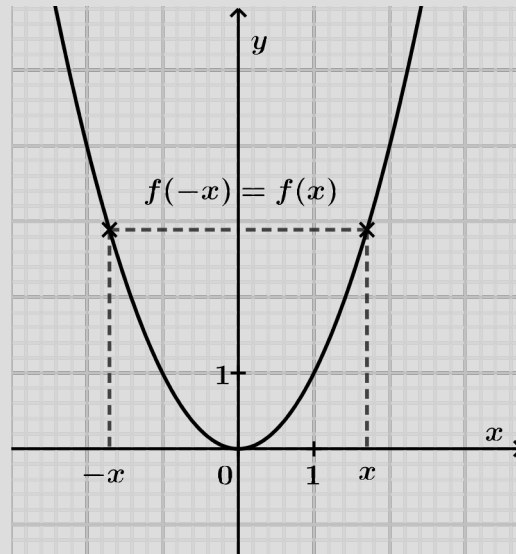
Donc $(a+b)(a-b) > 0$ d'où on déduit que $f(a) > f(b)$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

▪ De la même manière, on démontre que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. (Cette seconde partie est laissée à titre d'exercice)

Définition n°4. Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction carré est une **parabole**



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

Propriété n°3.

La représentation graphique de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

II Équations et inéquations du second degré.

II.1 Encadrements d'un nombre réel et arrondis

Propriété n°4. Équation du type $x^2 = a$

Soit a un nombre réel.

▪ Si $a > 0$ alors :

l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .

▪ Si $a = 0$ alors :

l'équation $x^2 = a$ admet une solution : **zéro**.

▪ Si $a < 0$ alors :

l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

preuve :

▪ Le deuxième point est évident.

▪ Le troisième découle du fait que le carré d'un nombre réel est toujours positif.

▪ Pour le premier point :

si $a > 0$ alors \sqrt{a} existe.

Les équations suivantes sont alors équivalentes :

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = 0$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

On en déduit que cette équation admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .

Remarque n°3.

Il est parfois utile de donner des valeurs approchées des solutions quand elles existent. c'est ce qui motive ce la suite de ce paragraphe.

Propriété n°5. (admise)

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$

Définition n°5.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$.

Exemple n°1.

$$\frac{16812}{10^3} \leq 16,8127 < \frac{16813}{10^3} \quad \text{donc l'encadrement de } 16,8127 \text{ à } 10^{-3} \text{ est :}$$

$$16,812 \leq 16,8127 < 16,813 \quad \text{et l'arrondi à } 10^{-3} \text{ vaut } 16,813.$$

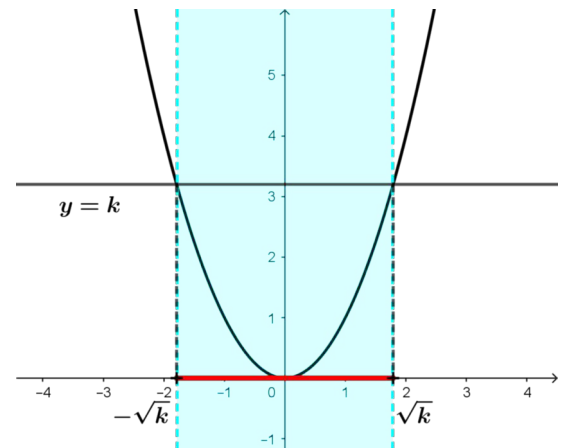
II.2 Inéquations du type $x^2 \leq k$ et $x^2 \geq k$
Propriété n°6.

Dans \mathbb{R} , l'inéquation $x^2 \leq k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors $S = [-\sqrt{k} ; \sqrt{k}]$

Si $k = 0$ alors $S = \{0\}$

Si $k < 0$ alors $S = \emptyset$


preuve :

Si $k = 0$ c'est évident et si $k < 0$ aussi. On suppose donc $k > 0$.

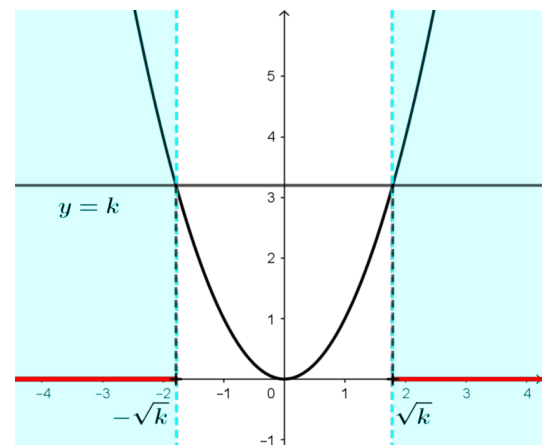
$$\begin{aligned} x^2 &\leq k \\ \Leftrightarrow x^2 - k &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow ((x + \sqrt{k}) \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{k} \leq 0) \text{ ou } (x + \sqrt{k} \leq 0 \text{ et } x - \sqrt{k} \geq 0) \\ \Leftrightarrow ((x \geq -\sqrt{k} \text{ et } x \leq \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leq -\sqrt{k} \text{ et } x \geq \sqrt{k})) \\ \Leftrightarrow (x \geq -\sqrt{k} \text{ et } x \leq \sqrt{k}) &\quad (\text{car l'autre cas est impossible}) \end{aligned}$$

Propriété n°7.

Dans \mathbb{R} , l'inéquation $x^2 \geq k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors
 $S =]-\infty ; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k} ; +\infty[$

Si $k \leq 0$ alors $S = \mathbb{R}$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

$$\begin{aligned}
 & x^2 \geq k \\
 \Leftrightarrow & x^2 - k \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & ((x + \sqrt{k} \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{k} \geq 0) \text{ ou } (x + \sqrt{k} \leq 0 \text{ et } x - \sqrt{k} \leq 0)) \\
 \Leftrightarrow & ((x \geq -\sqrt{k} \text{ et } x \geq \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leq -\sqrt{k} \text{ et } x \leq \sqrt{k})) \\
 \Leftrightarrow & (x \geq \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leq -\sqrt{k})
 \end{aligned}$$

Remarque n°4.

Dans les deux preuves précédentes, nous avons résolu des inéquations produits. La méthode utilisée peut-être résumée sous forme de tableau de signes. Ce qui motive le dernier paragraphe.

II.3 Inéquations produits.

Exemple n°2.

Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$(4x - 7)(5 - 2x)(3x + 2) \leq 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x - 7 > 0 \Leftrightarrow 4x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{4}$$

$$5 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$$

$$3x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les
« $+$ » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la
règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$		
$4x-7$	$-$	$:$	$-$	0	$+$	$:$	$+$
$5-2x$	$+$	$:$	$+$	$:$	$+$	0	$-$
$3x+2$	$-$	0	$+$	$:$	$+$	$:$	$+$
$(4x-7)(5-2x)(3x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°5.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs.

III Le résumé du cours

La fonction carré

La fonction carré est la fonction définie par

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Elle est **paire** ce qui signifie que :

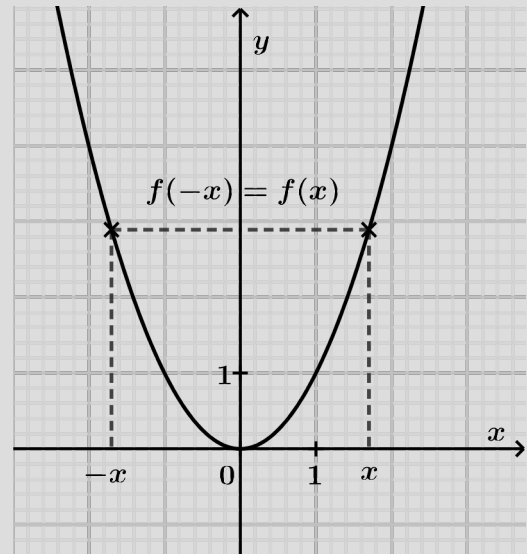
pour tout x , $g(-x) = g(x)$

Ses variations se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

L'axe des ordonnées est l'**axe de symétrie de la parabole**.



f une fonction et $I \subset D_f$ un intervalle, a, b dans I

Stricte croissance sur I	$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
Stricte décroissance sur I	$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
Croissance sur I	$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
Décroissance sur I	$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Soit a un nombre réel.

- Si $a > 0$ alors : l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .
- Si $a = 0$ alors : l'équation $x^2 = a$ admet une solution : **zéro**.
- Si $a < 0$ alors : l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$.

• Dans \mathbb{R} , l'inéquation $x^2 \leq k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$

Si $k = 0$ alors $S = \{0\}$

Si $k < 0$ alors $S = \emptyset$

• Dans \mathbb{R} , l'inéquation $x^2 \geq k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

Si $k \leq 0$ alors $S = \mathbb{R}$