LES SUITES NUMÉRIQUES

I Quelques définitions

Définition n°1. Suite numérique réelle (deux versions)

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle) u est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$).
Autrement dit :

$$u:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto u(n)\end{cases}$$

Remarque n°1. Notations

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer $u(n)$ par u_n .
Ainsi :

$$u:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto u_n\end{cases}$$

On pourra noter : $\boxed{u \text{ ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)_{n\geqslant 0}}$ pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois (u_n) mais on évitera le plus possible)

On dira que $\boxed{u_n \text{ est le terme de rang } n}$.

Remarque n°2.

À partir de maintenant, on dira « suite » plutôt que « suite numérique réelle ».

LES SUITES NUMÉRIQUES E01

EXERCICE N°1 Vocabulaire

On donne ici les premiers termes d'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$:

5 , 8 , 11, 14 , 17 , 20 , …

1) Donner la valeur du premier terme de v .
2) Donner la valeur du terme de rang 4.
3) Donner la valeur du cinquième terme de v puis donner son rang.

EXERCICE N°2 Attention on ne commence pas toujours à zéro

1) On donne ici les premiers termes d'une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$:

5 , 8 , 11, 14 , 17 , 20 , …

1.a) Donner la valeur du premier terme de w .
1.b) Donner la valeur du terme de rang 4.
1.c) Donner la valeur du cinquième terme de w puis donner son rang.

2) On donne ici les premiers termes d'une suite $(t_n)_{n\geqslant 4}$:

5 , 8 , 11, 14 , 17 , 20 , …

2.a) Donner la valeur du premier terme de t .
2.b) Donner la valeur du terme de rang 4.
2.c) Donner la valeur du cinquième terme de t puis donner son rang.

EXERCICE N°3 Notation fonctionnelle vs Notation classique

On donne ici les premiers termes d'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$:

5 , 8 , 11, 14 , 17 , 20 , …

1) Donner $v(1)$ et $v(4)$.
2) Donner v_1 et v_4 .
3) Déterminer $v(2)+1$ et $v(2+1)$.
4) Déterminer v_2+1 et v_{2+1} .

Définition n°2. Suite définie de façon explicite

L'application u peut être **définie de façon explicite :**

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = f(n)}$$

(avec f au moins définie pour tous les entiers naturels)

Exemple n°1. Une suite définie de façon explicite

La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n-3$

Ses premiers termes sont :

$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, …

Ici $f : x \mapsto 2x-3$

LES SUITES NUMÉRIQUES E01

EXERCICE N°4 Suite explicite : premier contact

On donne la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n+7$

1) Identifier la fonction f du cours.

2) Déterminer u_0 , u_1 , u_2 et u_{1000} .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.

EXERCICE N°5 Suite explicite : deuxième contact

On donne la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n^2-3n-1$

1) Identifier la fonction f du cours.

2) Déterminer v_0 , v_1 , v_2 et v_{1000} .

3) Pour tout , calculer la différence $v_{n+1} - v_n$.

EXERCICE N°6 Suite explicite : troisième contact

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{2n-5}$.

1) Identifier la fonction f du cours.

2) À partir de quel rang la suite u est-elle définie ?

3) Déterminer, en fonction de n , u_{n-1} et u_{n+1} .

EXERCICE N°7 Suite explicite : un peu d'intuition…

On donne à chaque fois les premiers termes d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

1) -1 , 1 , 3 , 5 , …

2) 1 , 2 , 5 , 10 , 17 , …

EXERCICE N°8 Suite explicite : du concret !

(Exercice extrait du sesamath 1[er] spé : 39 p 64)

Alphonse paye 45€ un abonnement résidentiel annuel pour garer sa voiture dehors. Il doit ensuite payer 1,5 € supplémentaire par jour de stationnement.

On note u_n le prix payé par Alphonse pour son abonnement et n jours de stationnement.

1) Donner une expression de u_n en fonction de n .

2) Combien payera-t-il au total, s'il gare sa voiture dehors 300 jours par an ?

LES SUITES NUMÉRIQUES

Définition n°3.

L'application u peut être **définie par une relation de récurrence :**

$$u : \begin{cases} u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel}) \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ , } \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple n°2. ***Une suite définie par une relation de récurrence***

La suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ses premiers termes sont :

$v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = -5$, $v_3 = -13$, …

Ici $f : x \mapsto 2x - 3$ (**Ne pas confondre la fonction *f* avec l'application *u* !**)

LES SUITES NUMÉRIQUES E02

EXERCICE N°1 Suite et relation de récurrence : 1^er^ contact

On donne la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = 4u_n + 7 \end{cases}$.

1) Identifier la fonction f du cours.

2) Déterminer, *si possible*, u_1 , u_2 , u_8 et u_{1000} .

EXERCICE N°2 Suite et relation de récurrence : 2^ème^ contact

On donne la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 2}{v_n - 3} \end{cases}$.

(On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 3$ et donc que la suite est correctement définie)

1) Identifier la fonction f du cours.

2) Déterminer v_1 , v_2 et v_{15} .

Remarque n°3.

Une suite peut être définie par un énoncé qui peut prendre plusieurs formes :

- un algorithme (suite d'instructions informatiques ou non)
- un motif géométrique : (triangle de Sierpiński)
- une simple phrase : « la suite w est la suite des nombres impairs positifs ».
- ou encore un ensemble (infini) de points du type $M(n \text{ , } u_n)$.
- …

EXERCICE N°3 Suite définie par un algorithme (Python)

On donne la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $w_0 = 3$

Pour un terme w_n ,

w_{n+1} s'obtient de la façon suivante :
- Multiplier w_n par 2.
- Enlever 5 au résultat.

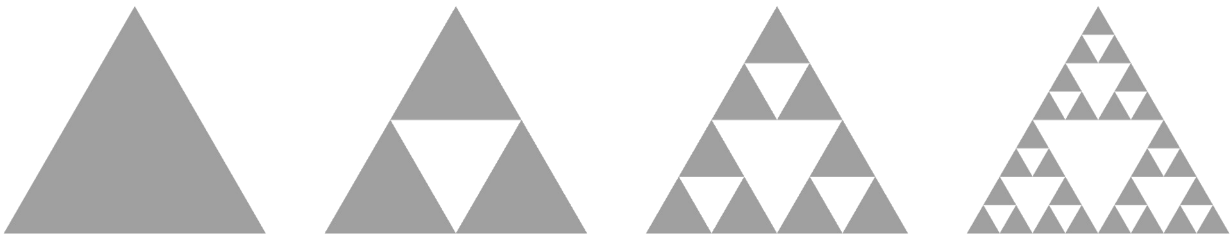
1) Écrire une fonction «premiers_termes_de_w» en Python qui prend comme argument un entier n et qui renvoie une liste contenant les valeurs des $n+1$ premiers termes de la suite.

2) Écrire une fonction « w » en Python qui prend comme argument un entier n et qui renvoie la valeur de w_{n+1} . (*On pourra utiliser la question 1*)

Les suites numériques E02

EXERCICE N°4 Triangle de Sierpiński

On considère un triangle équilatéral de côté 1 colorié en gris ($n=0$).
À chaque étape, on trace dans chaque triangle gris, un triangle blanc qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle gris.



$n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$

1) Il y a un triangle gris à l'étape 0, puis trois à l'étape 1…
1.a) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 2 ?
1.b) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 3 ?
1.c) Combien y-a-t-il de triangles gris, à l'étape 4 ?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de triangles gris à l'étape n .
2.a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2.b) Exprimer u_n en fonction de n .

3) Déterminer le nombre de triangles gris à la 10e étape.

4) Déterminer u_{10} .

II Suites arithmétiques

Définition n°4. Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.
Autrement dit :
▪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

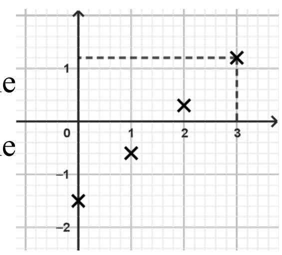
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n+r}$$

▪ Le nombre r est appelé : **raison** de la suite.

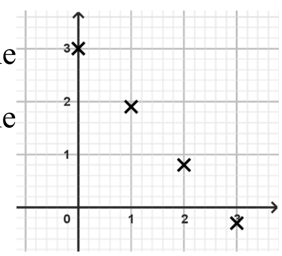
Remarque n°4. Lien avec la définition n°3

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x+r$

Exemple n°3.



▪ La suite $u:\begin{cases} u_0 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = u_n+0{,}9 \ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $0{,}9$ et de premier terme $u_0 = -1{,}5$.
Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = -1{,}5$, $u_1 = -0{,}6$, $u_2 = 0{,}3$, $u_3 = 1{,}2$



▪ La suite $v:\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n-1{,}1 \ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $-1{,}1$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}9$, $v_2 = 0{,}8$, $v_3 = -0{,}3$

Remarque n°5.

Le 1[er] terme est u_0 , le deuxième u_1 …
On restera vigilant face à ce « décalage » …

LES SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°1 Suite arithmétique ou pas

1) Soit w la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4n+5$.

1.a) Calculer les trois premiers termes de la suite w .
1.b) Représenter graphiquement les 3 premiers termes de w
1.c) D'après la représentation graphique, la suite w semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
1.d) Démontrer que la suite w est arithmétique et préciser sa raison r .

2) Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v(n)=n^2+3$.

2.a) Calculer les trois premiers termes de la suite v .
2.b) Représenter graphiquement les 3 premiers termes de v .
2.c) D'après la représentation graphique, la suite v semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
2.d) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.

Propriété n°1. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\times r}$$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire les termes suivants à l'aide la définition par récurrence :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r$

$\vdots$

$u_n = u_{n-1}+r$

Puis, en additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient

$u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+r+u_1+r+\ldots+u_{n-1}+r$

qui équivaut à :

$u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+n\times r$

puis en soustrayant $(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})$ à chaque membre

$u_n = u_0 + n\times r$

Remarque n°6. Lien avec la définition n°2

Cette fois-ci la suite est définie de façon explicite et on a : $f : x \mapsto u_0+r\times x$

LES SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°2 Suite arithmétique et formule explicite : départ à 0

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
3) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

Propriété n°2. ***Une généralisation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $p \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)\times r}$$

preuve : ***Laissée en exercice***

LES SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°3 *Suite arithmétique et formule explicite : départ à 1*

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = -80$ et de raison $r = 10$.

1) Pour tout entier naturel $n\neq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
3) Pour tout entier $n\neq 0$, exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_7 , u_{10} et u_{14} .
5) Quel est le rang du terme égal à 80 ? Justifier.

Propriété n°3. ***Sommes des premiers entiers***

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} .$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+(n-1)+n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ On remarque que $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$

(car : $0+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+0$)

▪ et donc : $\mathbf{2}\times\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)\times n$

(car : $\begin{array}{rl} & 0+\ 1\ +\ 2\ +\ldots+(n-2)+(n+1)+n \\ & +n+(n-1)+(n-2)+\ldots+\ 2\ +\ 1\ +0 \\ = & \underbrace{n+\ n\ +\ n\ +\ldots+\ n\ +\ n\ +n}_{n+1 \text{ termes}} \end{array}$)

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *cqfd*

Propriété n°4. ***Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0+k\,r)$ (d'après la propriété n°1)

(car : $\begin{array}{ccccccccc} & u_0 & + & u_1 & + \dots + & u_{n-1} & + & u_n \\ = & u_0+0\times r & + & u_0+1\times r & + \dots + & u_0+(n-1)\times r & + & u_0+n\times r \end{array}$)

▪ Or :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_0+k\,r) = \sum_{k=0}^{n}u_0+\sum_{k=0}^{n}k\,r = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}u_0}_{(n+1)u_0} + r\times\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

▪ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k = (n+1)u_0 + \frac{r\times n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0+r\,n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(2u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
$$= (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

cqfd

Remarque n°7. Une façon de retenir la formule

$$\boxed{Somme = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

LES SUITES NUMÉRIQUES E03

EXERCICE N°4 Suite arithmétique : Somme de termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2) Exprimer le terme u_n en fonction de n . En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50} .
3) Calculer la somme S des 21 premiers termes de la suite et la somme S' des 51 premiers termes.

EXERCICE N°5 Suite arithmétique : Somme de termes

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 7-3n$.

1) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
2) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.
3) Quelle est la valeur du 51[e] terme ?
4) Calculer la somme des 51 premiers termes.

III Suites géométriques

Définition n°5. Suite géométrique

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.
Autrement dit :
▪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\times q}$$

▪ Le nombre q est appelé : **raison** de la suite.

Remarque n°8. ***Lien avec la définition n°3***

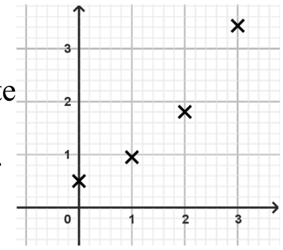
La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x \times q$

Exemple n°4.

▪ La suite $u : \begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}9 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 1,9 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.

Ses quatre premiers termes sont :

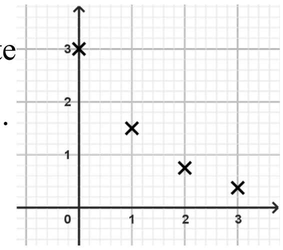
$u_0 = 0{,}5 \ , \ u_1 = 0{,}95 \ , \ u_2 = 1{,}805 \ , \ u_3 = 3{,}4295$



▪ La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0{,}5 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 3$.

Ses quatre premiers termes sont :

$v_0 = 3 \ , \ v_1 = 1{,}5 \ , \ v_2 = 0{,}75 \ , \ v_3 = 0{,}375$



LES SUITES NUMÉRIQUES E04

EXERCICE N°1 Suite géométrique ou pas

1) Soit t la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ t_n = 3^n$.

1.a) Calculer les trois premiers termes de la suite t .
1.b) Représenter graphiquement les 3 premiers termes de t
1.c) D'après la représentation graphique, la suite t semble-t-elle géométrique ? Justifier.
1.d) Démontrer que la suite t est géométrique et préciser sa raison q .

2) Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ z_n = (n+3)^2$.

2.a) Calculer les trois premiers termes de la suite v .
2.b) Représenter graphiquement les 3 premiers termes de v .
2.c) D'après la représentation graphique, la suite v semble-t-elle géométrique ? Justifier.
2.d) Démontrer que la suite v n'est pas géométrique.

Propriété n°5. ***Expression de u_n en fonction de n***

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n = u_0 \times q^n}$$

preuve :

▪ Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls et l'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ ($0=0$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

▪ Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$ alors on admet que **tous les termes de la suite sont non nuls** et on peut écrire :

$$u_1 = u_0 \times q$$
$$u_2 = u_1 \times q$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} \times q$$

Puis, en multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \ldots \times u_{n-1} \times q$$

qui équivaut à :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1} \times q^n$$

puis en divisant chaque membre par $(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1})$ (qui est non nul...)

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXERCICE N°2 Suite géométrique et formule explicite : départ à 0

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$.

1) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
3) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

EXERCICE N°3 Suite géométrique et formule explicite : départ à 1

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -8000$ et de raison $q = 0{,}1$.

1) Pour tout entier naturel $n \neq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2) Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
3) Pour tout entier $n \neq 0$, exprimer u_n en fonction de n .
4) Donner alors les valeurs de u_7 , u_{10} et u_{14} .
5) Quel est le rang du terme égal à 80 ? Justifier.

Propriété n°6. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et u_0 son premier terme. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, en particulier si $u_0 = 1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

preuve :

Nous allons commencer par le cas particulier et nous en déduirons le cas général.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on remarque que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0 \times q^k}_{\text{d'après la propriété n°5}} = \underbrace{u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k}_{\text{par factorisation par } u_0}$$

▪ Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ et calculons $S_n - q S_n$.

$$S_n - q S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - q \times \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1})$$

(car :

$S_n = q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n$

$q \times S_n = q \times (q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n) = q^{0+1} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1+1} + q^{n+1}$)

▪ donc, par télescopage (à retenir !):

$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n-1}$

(car

$$S_n - q \times S_n = q^0 \underbrace{- q^{0+1} + q^1}_{0} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1} \underbrace{- q^{n-1+1} + q^n}_{0} - q^{n+1}$$

les termes se télescopent au fur et à mesure et il ne reste que le 1^{er} et le dernier)

▪ Or :

$S_n - q \times S_n = (1-q) S_n$ (par factorisation)

▪ Donc
$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$

Comme $q \neq 1, 1-q \neq 0$ et on peut diviser chaque membre par $1-q$ pour obtenir :

▪ $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(Nous avons obtenu le cas particulier)

▪ D'après la remarque du premier point (▪)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(Nous avons obtenu le cas général) *cqfd*

Remarque n°9. Une façon de retenir la formule

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ avec $\boldsymbol{q \neq 1}$ vaut :

$$\boxed{Somme = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

Méthode n°1. Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique

▪ Soit (v_n) la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0 + v_1 + \ldots + v_9\right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = -5 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = -147\ 620$$

▪ Soit (w_n) la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des 5 premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{5} w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5\right)$$

$$B = w_1 \times \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \times \frac{1-1{,}5^5}{1-1{,}5} = 26{,}375$$

Remarque n°10.

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes vaut simplement : $n \times \textit{premier terme}$

LES SUITES NUMÉRIQUES E04

EXERCICE N°4 Suite géométrique : Somme de termes

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 1{,}5\times 2^n$.

1) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
2) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer la raison de la suite.
3) Quelle est la valeur du 11e terme ?
4) Calculer la somme des 11 premiers termes.

EXERCICE N°5 Suite géométrique : Somme de termes

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{9}$ et de raison $q=3$.

Déterminer $S_8=\sum_{k=0}^{8} u_k$

Remarque n°11.

Tant que n est fixé, on sait donc faire pas mal de choses sur les suites. Mais n peut devenir aussi grand que l'on veut : on dit que n peut « tendre vers l'infini ». On aimerait alors savoir comment se comportent les termes de la suite vers cet « infini ». C'est ce qui motive ce dernier paragraphe. Conformément au programme nous resterons dans l'intuition et nous utiliserons parfois des « pseudo-définitions » (cela sera signalé).

IV Comportement de suite

IV.1 Monotonie

Définition n°6. Suite croissante, suite décroissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} < u_n$

Remarque n°12.

$u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n \geqslant 0$

En pratique, c'est surtout la partie de droite de l'équivalence qui sera utilisée.

Exemple n°5.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2+3n+2$ est strictement croissante. En effet :

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Étudions la différence $v_{n+1}-v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \underbrace{(n+1)^2+3(n+1)+2}_{v_{n+1}}-\underbrace{(n^2+3n+2)}_{u_n} \\ &= n^2+2n+1+3n+3+2-n^2-3n-2 \\ &= 2n+4 \end{aligned}$$

▪ Or n est un entier naturel donc $n \geqslant 0$ d'où $2n \geqslant 0$ et enfin $2n+4 \geqslant 4 > 0$

▪ Ainsi, $v_{n+1}-v_n > 0$ qui équivaut à $v_{n+1} > v_n$.
▪ En conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Définition n°7. Suite monotone ou strictement monotone

▪ Une suite monotone est une suite qui est soit constante, soit croissante, soit décroissante.
▪ Une suite strictement monotone est une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Les suites numériques E05

EXERCICE N°1 Comportement d'une suite définie explicitement

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2+n$

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3^n}{7^{n+1}}$

3) La suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = -5^n$

4) La suite t définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = (-5)^n$

EXERCICE N°2 Comportement d'une suite définie par récurrence

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = u_n-\sqrt{n+1} \end{cases}$

2) La suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_{n+1} = \dfrac{7}{v_n} \end{cases}$

Propriété n°7. Comportement d'une suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique de raison r .
▪ Si $r = 0$ alors u est constante.
▪ Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
▪ Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

preuve :

▪ Le premier point est évident.
▪ Pour les deux autres points, remarquons que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = r$
▫ Si $r > 0$ alors par définition, la suite est strictement croissante.
▫ Si $r < 0$ alors par définition, la suite est strictement décroissante.

LES SUITES NUMÉRIQUES E05

EXERCICE N°3 Comportement d'une suite arithmétique

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n - 4{,}5 \end{cases}$

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = 5n+4$

Propriété n°8. Comportement d'une suite géométrique

Scanner
ou
Cliquer
Pour visualiser

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

▪ Si $q > 1$
- ▫ et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement croissante.
- ▫ et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement décroissante.

▪ Si $0 < q < 1$
- ▫ et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement décroissante.
- ▫ et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement croissante.

▪ Si $q < 0$ alors la suite u est n'est pas monotone.

▪ Si $q = 1$ alors la suite u est constante.

▪ Si $q = 0$
- ▫ et si $u_0 = 1$ alors la suite est constante.
- ▫ et si $u_0 \neq 1$ alors la suite est constante à partir du deuxième rang.

preuve :

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = q u_n - u_n = q \times q^n u_0 - q^n u_0 = q^n(q-1)u_0$
Ainsi, étudier la monotonie de la suite revient à étudier le signe de l'expression $q^n(q-1)u_0$.

▪ Si $q > 1$ alors $q^n(q-1) > 0$
- ▫ et si $u_0 > 0$ alors $q^n(q-1)u_0 > 0$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n > 0$
ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est bien strictement croissante.

▪ Le raisonnement est similaire pour les autres cas, regardons seulement le cas $q < 0$:
Dans ce cas $q-1 < 0$ mais q^n est positif si *n* est pair et négatif sinon. Par conséquent $q^n(q-1)u_0$ et donc $u_{n+1} - u_n$ changent de signe selon la parité de *n*.

▪ Essayez de traiter les autres cas vous-même.

LES SUITES NUMÉRIQUES E05

EXERCICE N°4 Comportement d'une suite géométrique

Étudier les variations des suites suivantes :

1) La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = 0{,}5\,u_n \end{cases}$

2) La suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 \times 5^n$

IV.2 Convergence, divergence, limite de suite

Définition n°8. Convergence, divergence, limite (pseudo-définition)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel.
On dira que :

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si les termes de la suite tendent vers l ,

On dira alors que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut l et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite tendent vers $+\infty$,

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si les termes de la suite tendent vers $-\infty$,

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.

Remarque n°13.

L'arnaque vient du fait qu'on n'a pas défini ce que « tendre » veut dire…
Donnons tout de même une précision :
▪ Dire qu'une suite tend vers l signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi proches que l'on veut de l .
▪ Dire qu'une suite tend vers $+\infty$ signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi grands que l'on veut.

Exemple n°6.

▪ La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{5}$ converge vers zéro. ($l=0$)
▪ La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1} = w_n+5$ diverge vers $+\infty$.
▪ La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $t_{n+1} = t_n-5$ diverge vers $-\infty$.
▪ La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = a_n+(-1)^n$ diverge.

LES SUITES NUMÉRIQUES E05

EXERCICE N°5 Limite d'une suite : 1ère approche

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites suivantes pour lesquelles on a donné quelques termes.

1) $u_0 = 1$, $u_{52} = -30$, $u_{7589} = -5000$, $u_{20000} = -168699245$

2) $v_3 = -5$, $v_{52} = -30$, $v_{789} = 22$, $v_{5240} = -30$, $v_{35240} = 2$

EXERCICE N°6 Limite d'une suite : 2ème approche

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites suivantes.

1) La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$

2) La suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}$

LES SUITES NUMÉRIQUES E06

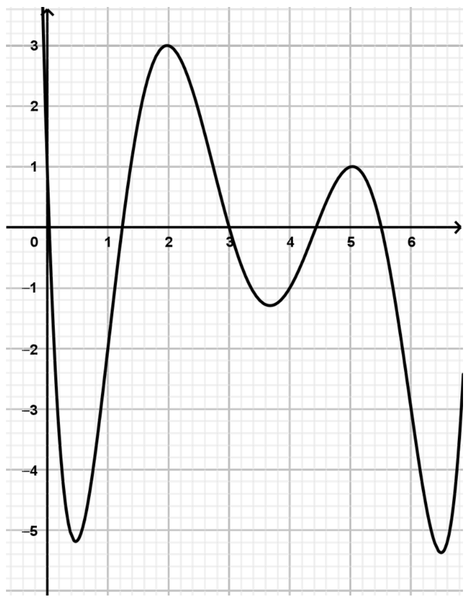
EXERCICE N°1 Lecture graphique

On a représenté ci-contre une fonction f .

On définit une suite u par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

On admet que $u_0 = 1$.

Donner les valeurs des six termes suivants.



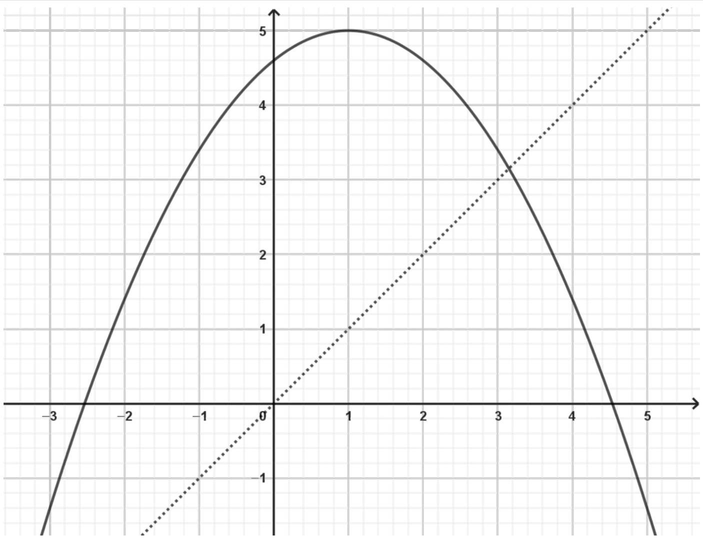
EXERCICE N°2 Utiliser un graphique (méthode à connaître)

On a représenté une fonction g ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans le graphique ci-contre.

On définit la suite v par :

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite v .

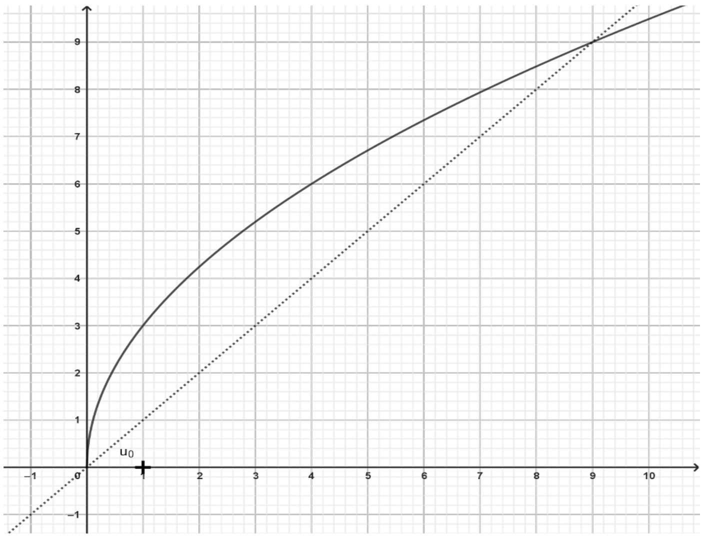


LES SUITES NUMÉRIQUES E06 (BONUS)

EXERCICE N°1 Utiliser un graphique (méthode à connaître)

$(g : x \mapsto 3\sqrt{x})$

On a représenté une fonction g ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans le graphique ci-contre.



On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

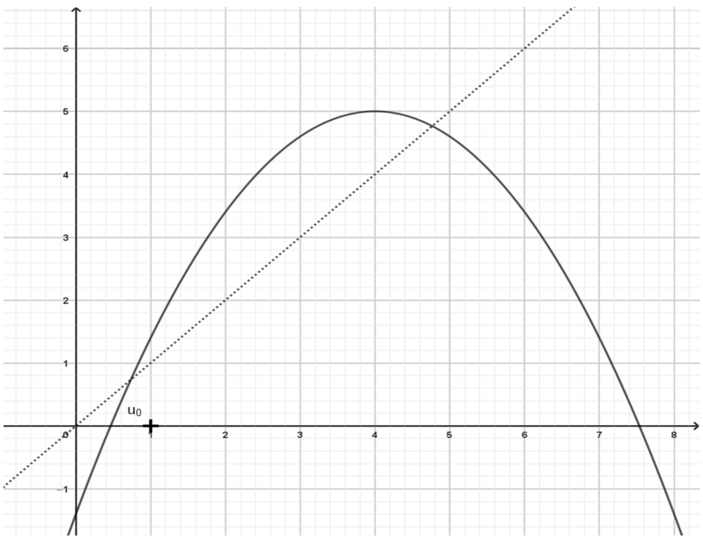
1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite u.

2) Conjecturer, si elle existe, la limite de la suite g.

EXERCICE N°2 Utiliser un graphique (méthode à connaître)

$(g : x \mapsto -0{,}4(x-4)^2 + 5)$

On a représenté une fonction g ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans le graphique ci-contre.



On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

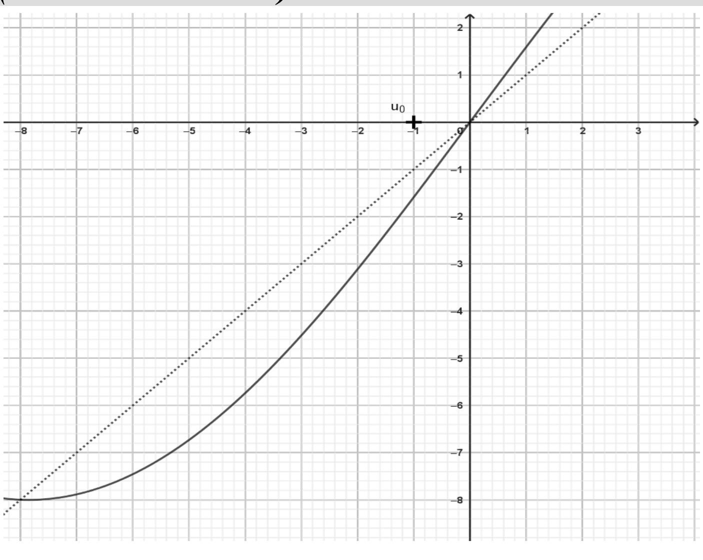
1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite u.

2) Conjecturer, si elle existe, la limite de la suite g.

EXERCICE N°3 Utiliser un graphique (méthode à connaître)

$\left(g : x \mapsto 8\sin\left(\frac{x}{5}\right)\right)$

On a représenté une fonction g ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans le graphique ci-contre.



On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1) Déterminer les cinq premiers termes de la suite u.

2) Conjecturer, si elle existe, la limite de la suite g.

LES SUITES NUMÉRIQUES E06

EXERCICE N°2 Un peu de python

basthon

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -u_n+4$.

On considère l'algorithme ci-contre :

1) Que permet d'afficher cet algorithme ?

2) Quelle valeur affiche cet algorithme ?

3) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche la valeur de u_{40}

4) Coder cet algorithme en Python.

```
u ← 5
Pour i allant de 1 à 25
   u ← −u+4
Fin pour
Afficher u.
```

EXERCICE N°3 Encore un peu de python

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = 2u_n+1 \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} .

3) Coder cet algorithme en Python et l'utiliser pour calculer u_{20}

LES SUITES NUMÉRIQUES E07

EXERCICE N°1 Du concret : Écologie

En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.

Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € par mégot laissé par terre.

Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an grâce à cette amende.

Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre de mégots jetés parterre pendant l'année $2019+n$. Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2019. On a $u_0=20\,000$.

1) Justifier par le calcul que $u_1=17000$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

2)

2.a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

2.b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .

2.c) Calculer le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2028. Arrondir le résultat à l'unité.

3) Le maire souhaite savoir combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028.

3.a) Exprimer la somme que le maire doit effectuer pour trouver ce nombre en fonction des termes de la suite (u_n) .

3.b) Trouver alors le nombre de mégots ramassés.

EXERCICE N°2 Du concret : 1er appart !

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

1er contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.

2ème contrat: un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier (c'est-à-dire du 36e mois).
3) Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs.)

EXERCICE N°3 Du concret : Héritage

Mathilde a reçu 80 000 € en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 8%. Mais chaque année, elle doit retirer 4000 € pour payer les impôts dus à ce placement. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement.

1) Expliquer pourquoi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation suivante: $C_{n+1}=1{,}08\times C_n-4000$.
2) Calculer à la calculatrice les premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3) On considère la suite auxiliaire (U_n) définie par : $U_n = C_n - 50\,000$.
3.a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
3.b) Exprimer U_n puis C_n en fonction de n .
3.c) De quelle somme Mathilde disposera-t-elle au bout de 5 ans ?
3.d) Mathilde veut acheter une maison à 180000 €. Combien d'années devra-t-elle attendre avant de disposer de cette somme ?

LES SUITES NUMÉRIQUES E08

EXERCICE N°1 Suite auxiliaire (sans calculatrice)

On donne la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12} \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 , on donnera les valeurs exactes.
2) On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2-4$
2.a) Montrer que la suite v est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.
2.b) Exprimer v_n en fonction de n .
2.c) On a admet que pour tout entier n , $v_n > -4$. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
2.d) Conjecturer alors la limite de la suite u .

EXERCICE N°2 Suite auxiliaire et tableur

▪ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n+2n^2-n$.

▪ Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n+2n^2+3n$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre : Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

EXERCICE N°3 Somme des premiers carrés

Extrait remanié du sésamath 1er spé 143 p 74

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est à dire $u_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

3) Calculer les trois premiers termes de la suite u.

4) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.

5) On pose v la suite définie par : Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5.a) Montrer que $v_1 = u_1$

5.b) Montrer que la suite v suit la même relation de récurrence que la suite u et conclure.

EXERCICE N°4 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne a et b deux nombres réels tels que : $a > 0$ et $b > \sqrt{a}$.

On donne également la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$.

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Notre but est de comprendre que le terme u_n tend vers $\sqrt{a}$.

1) Un premier cas : $a = 2$ et $b = 5$.

1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec $\sqrt{a}$.

2) Un premier cas : $a = 5$ et $b = 10$.

2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec $\sqrt{a}$.

V Résumé du cours

C'est quoi une **suite numérique** ?

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle) u est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$).
Autrement dit :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$$

Comment on note cela ?

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer $u(n)$ par u_n .
Ainsi :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

On pourra noter : $\boxed{u \text{ ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)_{n\geqslant 0}}$ pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois (u_n) mais on évitera le plus possible)

On dira que $\boxed{u_n \text{ est le terme de rang } n}$.

Ça veut dire quoi « **définie de façon explicite** » ?

L'application u peut être **définie de façon explicite :**

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = f(n)}$$

(avec f au moins définie pour tous les entiers naturels)

Un exemple

La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n-3$
Ses premiers termes sont :
$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, …
Ici $f : x \mapsto 2x-3$

Ça veut dire quoi « **définie par récurrence** » ?

L'application u peut être **définie par une relation de récurrence :**

$$\boxed{u : \begin{cases} u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel}) \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Un exemple

La suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n-3 \text{ , pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$
Ses premiers termes sont :
$v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = -5$, $v_3 = -13$, …
Ici $f : x \mapsto 2x-3$ **(Ne pas confondre la fonction *f* avec l'application *u* !)**

C'est quoi une **suite arithmétique** ?

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.
Autrement dit :

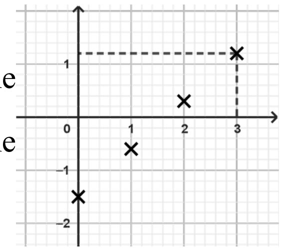
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n+r}$$

- Le nombre r est appelé : **raison** de la suite.

Un exemple où la raison est positive

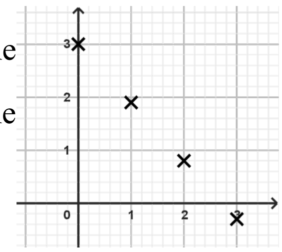
- La suite $u : \begin{cases} u_0 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = u_n+0{,}9\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $0{,}9$ et de premier terme $u_0 = -1{,}5$.



Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = -1{,}5$, $u_1 = -0{,}6$, $u_2 = 0{,}3$, $u_3 = 1{,}2$

Un exemple où la raison est négative

- La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n-1{,}1\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $-1{,}1$ et de premier terme $v_0 = 3$.



Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}9$, $v_2 = 0{,}8$, $v_3 = -0{,}3$

Exprimer u_n en fonction de n.
On parle du « terme général » de la suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\times r}$$

On n'est pas obligé de commencer à zéro.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $p\in\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)\times r}$$

somme des premiers termes d'une suite arithmétique. (1[ere] formule)

Soit $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} .$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+(n-1)+n$)

somme des premiers termes d'une suite arithmétique. (2[e] formule)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n$)

somme des premiers termes d'une suite arithmétique. *mnémotechnique*

$$\boxed{\textit{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

La méthode (1[er] exemple)

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$. On veut calculer la somme A des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

Comme on « commence à zéro » le 10[e] terme est v_9 , on le calcule :

$v_9 = v_0+9\times r = -5+9\times 3 = 22$.

$$A = 10\times\frac{v_0 + v_9}{2} = 10\times\frac{-5+22}{2} = 85$$

La méthode (2[eme] exemple)

- Soit (w_n) la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$. On veut calculer la somme B des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1+w_2+\ldots+w_{10}\right)$$

Comme on « commence à un» le 10[e] terme est w_{10} , on le calcule :

$w_{10} = w_1+(10-1)\times r = 2+9\times 1{,}5 = 15{,}5$.

$$B = 10\times\frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10\times\frac{2+15{,}5}{2} = 87{,}5$$

C'est quoi une **suite géométrique** ?

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.
Autrement dit :

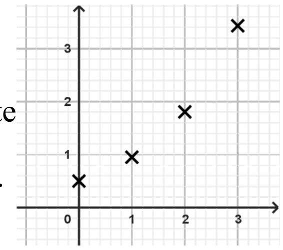
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

- Le nombre q est appelé : **raison** de la suite.

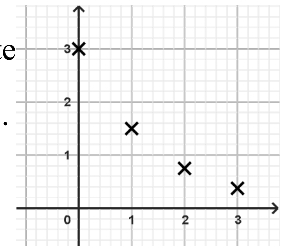
Un exemple où le 1[er] terme est positif et la raison est strictement supérieure à 1

- La suite $u : \begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}9 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 1,9 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = 0{,}5$, $u_1 = 0{,}95$, $u_2 = 1{,}805$, $u_3 = 3{,}4295$



Un exemple où le 1[er] terme est positif et la raison est strictement comprise entre 0 et 1

- La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0{,}5 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison $0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}5$, $v_2 = 0{,}75$, $v_3 = 0{,}375$



Exprimer u_n en fonction de n.
On parle du « terme général » de la suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n = u_0 \times q^n}$$

somme des premiers termes d'une suite géométrique.
⚠ $q \neq 1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q \neq 1}$ et u_0 son premier terme. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \text{ , en particulier si } u_0 = 1 \text{ , } \boxed{\sum_{k=0}^{n} q^n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

somme des premiers termes d'une suite géométrique.
mnémotechnique

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ avec $\boldsymbol{q \neq 1}$ vaut :

$$\boxed{Somme = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

et si $q = 1$?

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes vaut simplement : $n \times \textit{premier terme}$

C'est quoi une **suite croissante** ?

C'est quoi une **suite strictement croissante** ?

C'est quoi une **suite décroissante** ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

C'est quoi une **suite strictement décroissante** ?

▪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} < u_n$

Un exemple

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = n^2+3n+2$ est strictement croissante. En effet :

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$.

▪ Étudions la différence $v_{n+1}-v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \underbrace{(n+1)^2+3(n+1)+2}_{v_{n+1}}-\underbrace{(n^2+3n+2)}_{u_n} \\ &= n^2+2n+1+3n+3+2-n^2-3n-2 \\ &= 2n+4 \end{aligned}$$

▪ Or n est un entier naturel donc $n \geqslant 0$ d'où $2n \geqslant 0$ et enfin $2n+4 \geqslant 4 > 0$

▪ Ainsi, $v_{n+1}-v_n > 0$ qui équivaut à $v_{n+1} > v_n$.

▪ En conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

C'est quoi une **suite monotone** ?

▪ Une suite monotone est une suite qui est soit constante, soit croissante, soit décroissante.

C'est quoi une **suite strictement monotone** ?

▪ Une suite strictement monotone est une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Comportement d'une suite arithmétique.

Soit u une suite arithmétique de raison r .

▪ Si $r = 0$ alors u est constante.

▪ Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.

▪ Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Comportement d'une suite géométrique.

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

▪ Si $q > 1$
  ▫ et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement croissante.
  ▫ et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement décroissante.

▪ Si $0 < q < 1$
  ▫ et si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement décroissante.
  ▫ et si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement croissante.

▪ Si $q < 0$ alors la suite u est n'est pas monotone.

▪ Si $q = 1$ alors la suite u est constante.

▪ Si $q = 0$
  ▫ et si $u_0 = 1$ alors la suite est constante.
  ▫ et si $u_0 \neq 1$ alors la suite est constante à partir du deuxième rang.

Scanner
ou
Cliquer
Pour visualiser

Limite, convergence ou divergence d'une suite

pseudo-définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel.
On dira que :
▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si les termes de la suite tendent vers l ,
On dira alors que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut l et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite tendent vers $+\infty$,
▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si les termes de la suite tendent vers $-\infty$,
▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.