FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ E04

EXERCICE N°1 *Du concret ! (décoration)* CORRIGÉ

Extrait du sésamath 1er spé

Charlotte décide d'encadrer une gravure dans un cadre rectangulaire de largeur constante. La gravure mesure 30 cm sur 45 cm et le cadre a une largeur de x cm.

1) Si le cadre a une largeur de 2 cm, quelle sera l'aire totale de la gravure avec son cadre, en cm² ?

2) On note $f(x)$ l'aire de la gravure et du cadre en cm².

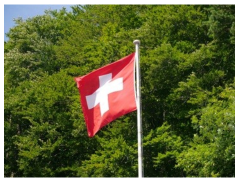
2.a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

2.b) Pour quelle valeur de x l'aire de la gravure et du cadre est-elle égale à 1 924 cm² ?

2.c) Charlotte ne veut pas que l'aire du cadre dépasse 850 cm². Que peut-elle choisir comme valeur(s) pour x ?

EXERCICE N°2 *Du concret ! (manifestation douce…)* CORRIGÉ

Extrait du sésamath 1er spé



Justine décide de créer un drapeau ressemblant au drapeau de la Suisse.

Elle veut un drapeau de 4 m sur 3 m.

Et sur son drapeau, elle veut une croix blanche dont les deux bandes ont pour largeur x mètres et pour longueur 2 m.

1) L'aire de la croix peut-elle être égale à :

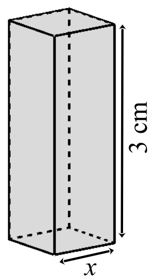
1.a) la moitié de l'aire du drapeau ? Si oui, déterminer la valeur de x pour obtenir une telle configuration.

1.b) le quart de l'aire du drapeau ? Si oui, déterminer la valeur de x pour obtenir une telle configuration.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la croix est-elle inférieur ou égale à 2 m² ?

EXERCICE N°3 *Un peu moins concret…* CORRIGÉ

Extrait du sésamath 1er spé



On considère un parallélépipède rectangle à base carrée, de côté x et de hauteur 3 cm.

1) Exprimer l'aire du parallélépipède en fonction de x (la somme des aires de toutes ses faces).

2) Quelle est la valeur de l'aire de cette surface lorsque $x=1$ cm ?

3) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à 100 cm² ?

EXERCICE N°4 *Glandouille* CORRIGÉ

Extrait du sésamath 1er spé

Julie lance une boulette de papier en direction d'une corbeille ayant une forme cylindrique.

La trajectoire de la boulette est donnée par la parabole d'équation $y=-0{,}16x^2+0{,}48x+1{,}08$.

x correspond à la distance en mètres entre Julie et la boulette, et y à la hauteur en mètres de la boulette par rapport au sol.

Le premier rebord de la corbeille se situe à 4 m de Julie, les rebords de la poubelle ont une hauteur de 40 cm, et la corbeille a un diamètre de 30 cm.

1) La boulette passera-t-elle au-dessus du premier rebord de la corbeille ?

2) S'il n'y avait pas eu la corbeille, déterminer à quelle distance de Julie la boulette serait tombée par terre.

3) La boulette tombera-t-elle dans la corbeille ?

EXERCICE N°1 Du concret ! (décoration) (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du sésamath 1er spé

Charlotte décide d'encadrer une gravure dans un cadre rectangulaire de largeur constante. La gravure mesure 30 cm sur 45 cm et le cadre a une largeur de x cm.

1) Si le cadre a une largeur de 2 cm, quelle sera l'aire totale de la gravure avec son cadre, en cm² ?

$(2+30+2)\times(2+45+2) = 1\,666$

Donc si le cadre a une largeur de 2 cm, alors l'aire totale de la gravure avec son cadre est $\boxed{1\,666 \text{ cm}^2}$

2) On note $f(x)$ l'aire de la gravure et du cadre en cm².

2.a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

$f(x) = (30+2x)(45+2x) = 4x^2+150x+1350$

2.b) Pour quelle valeur de x l'aire de la gravure et du cadre est-elle égale à 1 924 cm² ?

Il s'agit de résoudre, dans $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1924$

Commençons par la résoudre dans $\mathbb{R}$ et notons S l'ensemble des solutions:

$$x \in S \Leftrightarrow f(x) = 1924 \Leftrightarrow 4x^2+150x+1350 = 1924$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+150x-574 = 0$$

Posons $\Delta = 150^2-4\times4\times(-574) = 31684$, le discriminant de cette dernière équation. $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-150-\sqrt{31684}}{2\times4} = -41 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-150+\sqrt{31684}}{2\times4} = 3{,}5$$

Ainsi $S = \{-41 ; 3{,}5\}$ et $S \cap [0 ; +\infty[= \{3{,}5\}$

On en déduit que $\boxed{\text{la largeur du cadre est } 3{,}5 \text{ cm}}$ quand l'aire vaut 1924 cm².

2.c) Charlotte ne veut pas que l'aire du cadre dépasse 850 cm². Que peut-elle choisir comme valeur(s) pour x ?

L'aire du cadre est donnée par l'expression $f(x)-30\times45 = f(x)-1350$

Il s'agit de résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(x)-1350 \leqslant 850$

Commençons par la résoudre dans $\mathbb{R}$ et notons S l'ensemble des solutions.

$$x \in S \Leftrightarrow f(x)-1350 \leqslant 850$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+150x+1350-1350 \leqslant 850$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+150x-850 \leqslant 0$$

Ce dernier trinôme est de la forme ax^2+bx+c

Posons $\Delta = b^2-4ac = 150^2-4\times4\times(-850) = 36100$, son discriminant .

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines:

$$\text{e} \quad x_1 = \frac{-150-\sqrt{36100}}{2\times4} = -42{,}5 \quad \text{t} \quad x_2 = \frac{-150+\sqrt{36100}}{2\times4} = 5$$

Et comme $a = 4 > 0$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-42,5$		5		$+\infty$
$4x^2+150x-850$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $S = [-42{,}5 ; 5]$

et

$$S \cap [0 ; +\infty[= [-42{,}5 ; 5] \cap [0 ; +\infty[$$
$$= [0 ; 5]$$

On en déduit que pour l'aire du cadre ne dépasse pas 850 cm², il faut (et il suffit) que la largeur du cadre soit comprise entre 0 cm et 5 cm (valeurs incluses)

EXERCICE N°2 Du concret ! (manifestation douce…) (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du sésamath 1er spé

Justine décide de créer un drapeau ressemblant au drapeau de la Suisse.
Elle veut un drapeau de 4 m sur 3 m.
Et sur son drapeau, elle veut une croix blanche dont les deux bandes ont pour largeur x mètres et pour longueur 2 m.

1) L'aire de la croix peut-elle être égale à :

1.a) la moitié de l'aire du drapeau ? Si oui, déterminer la valeur de x pour obtenir une telle configuration.

▪ Pour $x \in [0\ ;\ 2]$

x est la largeur, elle est donc positive et pas plus grande que la longueur...

Notons $A(x)$ l'aire de la croix, on a $A(x) = 2x+2x-x^2 = -x^2+4x$

▪ La moitie de l'aire du drapeau vaut $\frac{1}{2}\times4\times3 = 6$ m²

Il s'agit donc de résoudre dans $[0\ ;\ 2]$ l'équation $A(x) = 6$.
Commençons par la résoudre dans $\mathbb{R}$ et notons S l'ensemble des solutions .

$$x \in S \Leftrightarrow A(x) = 6$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x = 6$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x-6 = 0$$

Posons $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-6) = -8$ le discriminant de cette dernière équation.
$\Delta < 0$ donc il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$: $S = \emptyset$.

$$S \cap [0\ ;\ 2] = \emptyset \cap [0\ ;\ 2] = \emptyset$$

On peut le dire en français : il n'y pas de solution réelle (positive ou négative) il n'y a donc pas de solution comprise entre 0 et 2.

On en déduit qu' on ne peut pas avoir cette configuration .

1.b) le quart de l'aire du drapeau ? Si oui, déterminer la valeur de x pour obtenir une telle configuration.

La moitie de l'aire du drapeau vaut $\frac{1}{4}\times4\times3 = 3$ m²

Il s'agit donc de résoudre dans $[0\ ;+\infty[$ l'équation $A(x) = 3$.
Commençons par la résoudre dans $\mathbb{R}$ et notons S l'ensemble des solutions .

$$x \in S \Leftrightarrow A(x) = 3$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x = 3$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x-3 = 0$$

Posons $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-3) = 4$ le discriminant de cette dernière équation.
$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-4-2}{2\times(-1)} = 3} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-4+2}{2\times(-1)} = 1}$$

$S = \{1\ ;\ 3\}$ et $S \cap [0\ ;\ 2] = \{1\}$

On en déduit que cette configuration est possible quand $x = 1$

2) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la croix est-elle inférieure ou égale à 2 m² ?

Il s'agit donc de résoudre dans $[0\ ;+\infty[$ l'inéquation $A(x) \leqslant 2$.
Commençons par la résoudre dans $\mathbb{R}$ et notons S l'ensemble des solutions .

$$x \in S \Leftrightarrow A(x) \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow -x^2+4x-2 \leqslant 0$$

Posons $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-2) = 8$ le discriminant de ce dernier trinôme.
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$\boxed{x_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{2\times(-1)} = 2+\sqrt{2}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-4+2\sqrt{2}}{2\times(-1)} = 2-\sqrt{2}}$

Et comme $a = -1 < 0$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left[2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\right]$ et

$$\begin{aligned} S \cap [0\ ;\ 2] &= \left[2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\right] \cap [0\ ;\ 2] \\ &= \left[2-\sqrt{2}\ ;\ 2\right] \end{aligned}$$

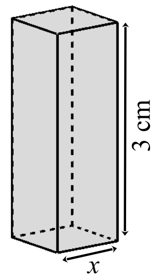
On en déduit que $\boxed{\text{cette configuration est possible quand } x \in \left[2-\sqrt{2}\ ;\ 2\right]}$

EXERCICE N°3 Un peu moins concret… (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du sésamath 1[er] spé

On considère un parallélépipède rectangle à base carrée, de côté x et de hauteur 3 cm.



1) Exprimer l'aire du parallélépipède en fonction de x (la somme des aires de toutes ses faces).

Pour $x \geqslant 0$, notons $A(x)$ cette aire.

$A(x) = \underbrace{2\times x^2}_{\text{dessous et dessus}} + \underbrace{4\times 3x}_{\text{4 faces latérales}}$

$\boxed{A(x) = 2x^2+12x}$

2) Quelle est la valeur de l'aire de cette surface lorsque $x=1$ cm ?

Il s'agit de calculer $A(1)$:

$A(1) = 2\times 1^2+12\times 1 = 14$

Quand $x = 1$, cette surface mesure $\boxed{14 \text{ cm}^2}$

3) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à 100 cm² ?

Il s'agit de résoudre $A(x) = 100$

Souvenez-vous, on a définit $A(x)$ uniquement sur $[0 ; +\infty[$. Ce n'est donc pas la peine de le « repréciser », par contre il ne faut pas l'oublier.

$A(x) = 100 \Leftrightarrow 2x^2+12x = 100$

$\Leftrightarrow 2x^2+12x-100 = 0$

Commençons par résoudre cette dernière équation sur $\mathbb{R}$:

Notons S l'ensemble des solutions et posons $\Delta = 12^2-4\times 2\times(-100) = 944$ le discriminant.

$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

($\sqrt{\Delta} = \sqrt{944} = \sqrt{16\times 59} = 4\sqrt{59}$)

$x_1 = \dfrac{-12-4\sqrt{59}}{2\times 2} = -3-\sqrt{59} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-12+4\sqrt{59}}{2\times 2} = -3+\sqrt{59} \approx 4{,}68$

$S = \{-3-\sqrt{59} ; -3+\sqrt{59}\}$ et

$S \cap [0 ; +\infty[= \{-3-\sqrt{59} ; -3+\sqrt{59}\} \cap [0 ; +\infty[$

$= \{-3+\sqrt{59}\}$

On en déduit que cette aire égale 100 cm² $\boxed{\text{quand le côté du carré mesure } -3+\sqrt{59} \text{ cm}}$

EXERCICE N°4 Glandouille (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du sésamath 1er spé

Julie lance une boulette de papier en direction d'une corbeille ayant une forme cylindrique.
La trajectoire de la boulette est donnée par la parabole d'équation $y=-0,16x^2+0,48x+1,08$.
x correspond à la distance en mètres entre Julie et la boulette, et y à la hauteur en mètres de la boulette par rapport au sol.
Le premier rebord de la corbeille se situe à 4 m de Julie, les rebords de la poubelle ont une hauteur de 40 cm, et la corbeille a un diamètre de 30 cm.

1) La boulette passera-t-elle au-dessus du premier rebord de la corbeille ?

Il s'agit de vérifier si $y > 0,4$ quand $x = 4$
Or quand $x = 4$
$y = -0,16\times 4^2+0,48\times 4+1,08 = 0,44 > 0,4$
On en déduit que $\boxed{\text{la boulette passera au-dessus du premier rebord de la corbeille}}$.

2) S'il n'y avait pas eu la corbeille, déterminer à quelle distance de Julie la boulette serait tombée par terre.

Il s'agit de résoudre, sur $[0\ ;+\infty[$, l'équation $y = 0$
Commençons par la résoudre sur $\mathbb{R}$:
$y = 0 \Leftrightarrow -0,16x^2+0,48x+1,08 = 0$
Notons S l'ensemble des solutions et posons $\Delta = 0,48^2-4\times(-0,16)\times 1,08 = 0,9216$ le discriminant de cette dernière équation.
$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$\left(\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,9216} = \sqrt{\frac{9216}{10000}} = \frac{\sqrt{9216}}{\sqrt{10000}} = \frac{96}{100} = 0,96 \right)$$

$$x_1 = \frac{-0,48-0,96}{2\times(-0,16)} = 4,5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0,48+0,96}{2\times(-0,16)} = -1,5$$

$S = \{-1,5\ ;\ 4,5\}$ et

$$\begin{aligned} S \cap [0\ ;+\infty[&= \{-1,5\ ;\ 4,5\} \cap [0\ ;+\infty[\\ &= \{4,5\} \end{aligned}$$

On en déduit que si il n'y avait eu la corbeille alors la boulette serait tombée $\boxed{\text{à } 4,5 \text{ m de Julie}}$

3) La boulette tombera-t-elle dans la corbeille ?

Nous savons déjà que la boulette passera le premier bord de la corbeille, il suffit de vérifier qu'elle ne passera pas au dessus du second bord.
Comme la corbeille a un diamètre de 30 cm et que le premier bord est à 4 m de Julie, le second est à 4,3 m.
Il s'agit de calculer y pour $x = 4,3$ et vérifier si le résultat est strictement inférieur à 0,4.
Or pour $x = 4,3$ $y = -0,16\times 4,3^2+0,48\times 4,3+1,08 = 0,1856 < 0,4$
On en déduit que $\boxed{\text{la boulette tombera dans la corbeille}}$.