LES PUISSANCES

I Les bases

Définition n°1.

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

et

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}}$$

En particulier, $a^1 = a$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et par convention $a^0 = 1$.

LES PUISSANCES

Exemple n°1.

$2^3 = 2\times2\times2 = 8$, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$, $(-5{,}1)^1 = -5{,}1$

$(-5{,}1)^{-1} = \dfrac{1}{-5{,}1}$ et $(-5{,}1)^0 = 1$.

LES PUISSANCES

Remarque n°1. Attention

$$(-7)^4 = (-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = 2401$$

alors que :

$$-7^4 = -7\times7\times7\times7 = -2401$$

II Puissances et propriétés

Propriété n°1. Puissances et signes

Pour tout nombre entier relatif n :

▪ Si a est positif alors a^n est positif.

▪ Si a est négatif alors a^n est positif lorsque l'exposant n est pair, et négatif lorsque l'exposant n est impair.

Remarque n°2.

Cette propriété découle de la règle des signes.

Exemple n°2.

$7{,}1^4$, $7{,}1^{-6}$, $7{,}1^3$ et 7^{-5} sont tous positifs car 7,1 est positif.

$(-7{,}1)^4$ et $(-7{,}1)^{-6}$ sont positifs car 4 et -6 sont pairs

$(-7{,}1)^3$ et $(-7{,}1)^{-5}$ sont négatifs car 3 et -5 sont impairs

LES PUISSANCES

Propriété n°2. Puissances et opérations

Soient a et b des nombres réels non nuls et m et n des entiers relatifs.

$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\times n}}$

$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$.

Remarque n°3.

Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition. Elles restent valables pour a et b des réels positifs et m et n des réels, mais la preuve est plus délicate.

Exemple n°3.

$$(-2{,}1)^{10}\times(-2{,}1)^{-3} = (-2{,}1)^{10+(-3)} = (-2{,}1)^{7}$$

$$30^{2} = (3\times10)^{2} = 3^{2}\times10^{2} = 9\times100 = 900$$

LES PUISSANCES E01

EXERCICE N°1 Les bases

Écrire les expressions suivantes sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un entier relatif.

$A=3^4\times 3^7$

$B=3^4\times 3^{-7}$

$C=\dfrac{2^3}{2^7}$

$D=\dfrac{5^8}{5^{-2}}$

$E=(-7)^3\times(-7)^{-5}$

$F=7^3\times(-7)^{-5}$

$G=\dfrac{6^5}{2^5}$

$H=3^4\times 5^4$

$I=\dfrac{(3^4)^7}{2^{28}\times 5^{28}}$

III Écriture scientifique

Définition n°2.

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{a \times 10^n}$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est à dire ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un nombre entier relatif.

▪ Le nombre a est appelé : **mantisse**.

▪ 10^n est l'**ordre de grandeur** du nombre.

Exemple n°4.

- $678\,000\,000 = 6{,}78 \times 10^{8}$

  Mantisse : 6,78

  Ordre de grandeur : 10^{8}

- $0{,}000\,007\,896 = 7{,}896 \times 10^{-6}$

  Mantisse : 7,896

  Ordre de grandeur : 10^{-6}

- $-450\,000\,000 = -4{,}5 \times 10^{8}$

  Mantisse : $-4{,}5$

  Ordre de grandeur : 10^{8}

Remarque n°4. ***Attention***

$45{,}321 \times 10^8$ n’est pas une écriture scientifique

$0{,}758 \times 10^8$ n’est pas non plus une écriture scientifique.

LES PUISSANCES E01

EXERCICE N°2

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

1) 3150000 **2)** 0,291 **3)** 0,00654 **4)** $345{,}32 \times 10^3$

EXERCICE N°3

Écrire sous forme de fraction irréductible les écritures fractionnaires suivantes.

$A=\dfrac{7^3\times 2^4\times 3^5}{2^6\times 7^2\times 3^2}$ $B=\dfrac{(3\times 5)^3\times 2^{-2}}{3^6\times 11^{-3}\times 5^2}$ $C=\dfrac{10^7}{2^5\times 5^4}$ $D=\dfrac{(10^3)^{-2}\times 2^{-4}}{26^{-5}}$

EXERCICE N°4

Classer les planètes du système solaire de la plus légère à la plus lourde.

Nom de la planète	Masse en kg
Mercure	$3,302\times10^{23}$
Vénus	$4,869\times10^{24}$
Terre	$5,974\times10^{24}$
Mars	$6,419\times10^{23}$
Jupiter	$1,899\times10^{27}$
Saturne	$5,685\times10^{26}$
Uranus	$8,663\times10^{25}$
Neptune	$1,028\times10^{26}$

EXERCICE N°5

x est un nombre réel non nul et n un entier relatif. Écrire les expressions suivantes sous la forme x^p avec p un entier relatif.

$A=x^{n+3}\times(x^n)^3$

$B=\dfrac{x^2\times x^{5n}}{x^{2n}\times x}$

EXERCICE N°6

Une image numérique est constitué de pixels. La couleur de l'image dépend du nombre de bits utilisés pour chaque pixel. Un bit est codé soit par 0 soit par 1. Il y a donc deux possibilités pour chaque pixel : noir ou blanc. Mais cela donne une image en noir et blanc.

Une image dont les pixels sont codés sur deux bits (00, 01, 10 ou 10) aurait donc quatre couleurs.

1) Combien de couleurs aurait une image dont les pixels sont codés sur trois bits ?

2) Comment augmente le nombre de couleurs lorsqu'on augment de 1 le nombre de pixels ?

3) Déterminer le nombre de couleurs dans une image dont les pixels sont codés sur 10 bits.

4) Les écrans d'ordinateurs ont généralement la capacité d'afficher 16 millions de couleurs. Sur combien de bits sont codés les pixels d'une telle image ?

5) Les télévisions HD pourraient produire des images qui contiendraient plus de 4000 milliards de couleurs. Sur combien de bits sont codés les pixels d'une telle image ?