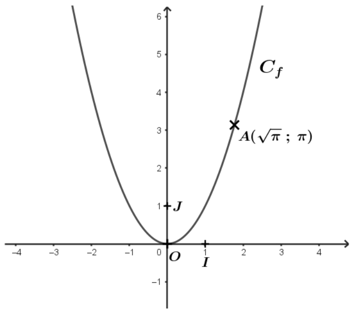
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ M01

EXERCICE N°1
CORRIGÉ



On note f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,\ I\ ,\ J)$. On donne le point $A(\sqrt{\pi}\ ;\ \pi)$.

1) Vérifiez que $A \in C_f$.

2) On pose $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)+7\end{cases}$ et C_g sa courbe représentative.
Déterminez $g(\sqrt{\pi})$ en vous aidant du point A.

3) On pose $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x-4)\end{cases}$ et C_h sa courbe représentative.
Déterminez $h(\sqrt{\pi}+4)$ en vous aidant du point A.

EXERCICE N°2 Autour de la forme développée réduite
CORRIGÉ

Parmi les fonctions suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont des fonctions polynomiales du second degré.

1) $f_1:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(x-4)^2+8\end{cases}$ **2)** $f_2:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto-(x+7)-5\end{cases}$ **3)** $h_1:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x(2x+7)\end{cases}$

4) La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -(x-7)^2+6$.

5) La fonction h_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $h_2(x) = -(2x^2+5)(1-3x)$

6) $h_3:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (3x+1)(7-8x)+(1+6x)(4x-1)\end{cases}$

EXERCICE N°3 Autour de la forme développée réduite, je passe à l'abstraction
CORRIGÉ

Deux définitions :

Soient f et g définies toutes les deux pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$

En particulier, $f^2 = f\,f$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^2(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2$

On donne deux fonctions affines f et g telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ avec a, b, c et d des nombres réels.
Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que $(f+g)^2$ soit une fonction polynomiale du second degré.

EXERCICE N°4 La méthode de complétion du carré
CORRIGÉ

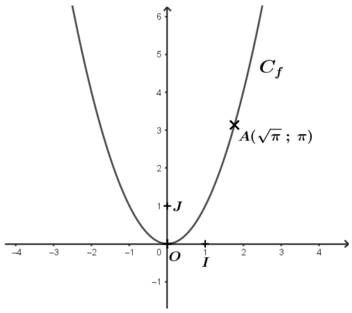
Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) x^2+9x+5 **2)** $x^2-12x-7$ **3)** $4x^2-8x+3$ **4)** $-7x^2+2x+8$

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 1

On note f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,\ I\ ,\ J)$. On donne le point $A(\sqrt{\pi}\ ;\ \pi)$.

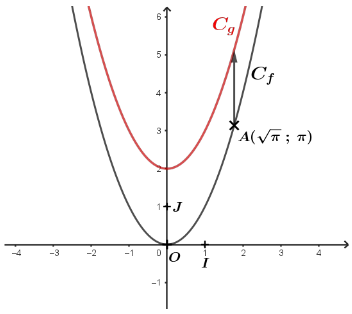


1) Vérifiez que $A \in C_f$.

Un point appartient à une courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe.
La courbe C_f a pour équation $y = f(x)$ (ici $y = x^2$), on va donc remplacer x par l'abscisse de A : $\sqrt{\pi}$ et y par l'ordonnée de A : π dans cette équation puis vérifier qu'on a bien une égalité…

On a : $f(x_A) = x_A^2 = (\sqrt{\pi})^2 = \pi = y_A$
Ainsi $y_A = f(x_A)$ ce qui signifie que $A \in C_f$.

2) On pose $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)+2\end{cases}$ et C_g sa courbe représentative.

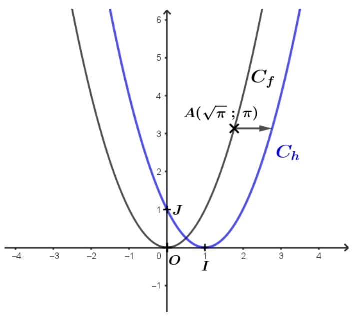


Déterminez $g(\sqrt{\pi})$ en vous aidant du point A .

$g(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{\pi})+2 = f(x_A)+2 = y_A+2 = \pi+2$.
Ainsi $\boxed{g(\sqrt{\pi}) = \pi+2}$

Remarquez qu'on n'a eu besoin d'aucun calcul ! (je sais, ils n'étaient pas très durs mais cela ne sera peut-être pas toujours le cas...)

3) On pose $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x-1)\end{cases}$ et C_h sa courbe représentative.



Déterminez $h(\sqrt{\pi}+1)$ en vous aidant du point A .

$h(\sqrt{\pi}+1) = f(\sqrt{\pi}+1-1) = f(\sqrt{\pi}) = f(x_A) = y_A = \pi$
Ainsi $\boxed{h(\sqrt{\pi}+1) = \pi}$

EXERCICE N°2 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 2

Parmi les fonctions suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont des fonctions polynomiales du second degré.

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-4)^2+8 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-4)^2+8 \\ &= x^2-8x+16+8 \\ &= x^2-8x+24 \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x+7)-5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -(x+7)-5 \\ &= -x-7-5 \\ &= -x-12 \end{aligned}$$

On reconnaît la forme développée réduite d'une fonction affine. Ce **n'est donc pas** une fonction polynomiale du second degré.

3) $h_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x(2x+7) \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 3x(2x+7) \\ &= 6x^2+21x \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

4) La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -(x-7)^2+6$.

Remarquez que la fonction n'est pas décrite de la même façon : cela ne change (presque) rien.
En revanche, évitez de parler de « la fonction $g(x)$ », en effet g est une fonction alors que $g(x)$ est un nombre : c'est l'image du nombre x par la fonction g .

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x-7)^2+6 \\ &= -(x^2-14x+49)+6 \\ &= -x^2+14x-43 \end{aligned}$$

On **reconnaît** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

(en fait c'est la forme développée réduite de l'image de x par la fonction g mais on s'autorise cet écart...)

5) La fonction h_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $h_2(x) = -(2x^2+5)(1-3x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= -(2x^2+5)(1-3x) \\ &= -(2x^2-6x^3+5-15x) \\ &= 6x^3-2x^2+15x-5 \end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

6) $h_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (3x+1)(7-8x)+(1+6x)(4x-1) \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_3(x) &= (3x+1)(7-8x)+(1+6x)(4x-1) \\ &= [-24x^2+13x+7]+[24x^2-2x-1] \\ &= -24x^2+13x+7+24x^2-2x-1 \\ &= 11x+6 \end{aligned}$$

On **ne reconnaît pas** la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré.

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 3

Deux définitions :

Soient f et g définies toutes les deux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▪ On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

▪ On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$

En particulier, $f^2 = f\,f$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^2(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2$

On donne deux fonctions affines f et g telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ avec a , b , c et d des nombres réels.

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur a , b , c et d pour que $(f+g)^2$ soit une fonction polynomiale du second degré.

Analyse :

On cherche une (ou plusieurs) condition(s) nécessaire(s).

Supposons que $(f+g)^2$ soit une fonction polynomiale du second degré.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(f+g)^2(x) &= (f(x))^2 + 2f(x)g(x) + (g(x))^2 \\
&= (ax+b)^2 + 2(ax+b)(cx+d) + (cx+d)^2 \\
&= a^2x^2+2abx+b^2 + 2(acx^2+adx+bcx+bd) + c^2x^2+2cdx+d^2 \\
&= \mathbf{a^2x^2}+2abx+b^2 + \mathbf{2acx^2}+2adx+2bcx+2bd + \mathbf{c^2x^2}+2cdx+d^2 \\
&= \mathbf{(a^2+2ac+c^2)x^2} + 2(ab+ad+bc+cd)x + b^2+2bd+d^2 \\
&= \underbrace{\mathbf{(a+c)^2}}_{A}\mathbf{x^2} + \underbrace{2(ab+ad+bc+cd)}_{B}x + \underbrace{b^2+2bd+d^2}_{C}
\end{aligned}$$

$$(= Ax^2 + Bx + C)$$

Allez allez, séchez vos larmes, vous trouverez bientôt cela facile… (si ce n'est pas déjà le cas)
Prenez votre temps, séparez bien les trois morceaux et refaites le tout(e) seul(e).
(Pour les guerrier(e)s, on peut écrire :
$(f+g)^2(x) = \mathbf{(a+c)^2x^2} + 2(a+c)(b+d)x + (b+d)^2$ essayez !)

Comme $(f+g)^2$ est une fonction polynomiale du second degré, il faut (condition nécessaire) que $A \neq 0$ (sinon on « perd » le terme en x^2) ce qui signifie $a+c \neq 0$.

Synthèse :

On vérifie que la condition nécessaire qu'on vient de trouver est suffisante.

Supposons à présent que $a+c \neq 0$ alors on reconnaît bien la forme développée réduite d'une fonction polynomiale du second degré dans la dernière expression de $(f+g)^2(x)$.

Conclusion :

Pour que $(f+g)^2$ soit une fonction polynomiale du second degré, il faut et il suffit que $a+c \neq 0$

EXERCICE N°4 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 4

Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) x^2+9x+5 **2)** $x^2-12x-7$ **3)** $4x^2-8x+3$ **4)** $-7x^2+2x+8$

1) x^2+9x+5

On doit faire apparaître $(x+a)^2-a^2$ c'est à dire x^2+2ax

$x^2+9x+5 = (x^2+2\times 4{,}5\times x)+5$

(les parenthèses ne servent qu'à signaler au lecteur que l'on isole une partie de l'expression)

$= (x+4{,}5)^2-4{,}5^2+5$

$= (x+4{,}5)^2-15{,}25$

Ainsi : $\boxed{x^2+9x+5 = (x+4{,}5)^2-15{,}25}$

2) $x^2-12x-7$

$x^2-12x-7 = x^2-2\times 6\times x-7$

$= (x-6)^2-7$

$(x-a)^2-a^2 = x^2-2ax$ est tout aussi vraie...

Ainsi : $\boxed{x^2-12x-7 = (x-6)^2-7}$

3) $4x^2-8x+3$

$$4x^2-8x+3 = 4\left[x^2-\frac{8}{4}x+\frac{3}{4}\right]$$ (on met 4 en facteur)

$$= 4\left[x^2-2x+\frac{3}{4}\right]$$

$$= 4\left[x^2-2\times 1\times x+\frac{3}{4}\right]$$

$$= 4\left[(x-1)^2+1+\frac{3}{4}\right]$$

$$= 4\left[(x-1)^2+\frac{7}{4}\right]$$

$$= 4(x-1)^2+7$$ (on redistribue le facteur 4)

Ainsi $\boxed{4x^2-8x+3 = 4(x-1)^2+7}$

4) $-7x^2+2x+8$

$$-7x^2+2x+8 = -7\left[x^2+\frac{2}{-7}x+\frac{8}{-7}\right]$$

$$= -7\left[x^2-2\times\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}\right]$$

$$= -7\left[\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{49}-\frac{8}{7}\right]$$

$$= -7\left[\left(x-\frac{1}{7}\right)^2-\frac{55}{49}\right]$$

$$= -7\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{55}{7}$$ (Attention aux changements de signe)

Ainsi $\boxed{-7x^2+2x+8 = -7\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{55}{7}}$