EXERCICE N°5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\ ;-2)$, $B(2\ ;1)$, $C(-4\ ;3)$ et $D(-5\ ;0)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ puis celles du milieu de $[BD]$.

Notons $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $N(x_N\ ;\ y_N)$ les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

On a alors :

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1+(-4)}{2} = -1{,}5 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = 0{,}5$$

Ainsi $\boxed{M(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)}$

et

$$x_N = \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{2+(-5)}{2} = -1{,}5 \quad \text{et} \quad y_N = \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{1+0}{2} = 0{,}5$$

Ainsi $\boxed{N(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)}$.

2) Démontrer que $AC=BD$

On va calculer les deux longueurs et constater qu'elles sont égales :

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-4-1)^2+(3-(-2))^2} = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50}$$

$$BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(-5-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$$

Ainsi $AC=BD$.

3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

D'après la question 1) les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu et d'après la question 2, ils ont aussi la même longueur.

Le quadrilatère $ABCD$ a donc ses diagonales qui se coupent en milieu et qui de plus sont de même longueur.

On en déduit que $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$.