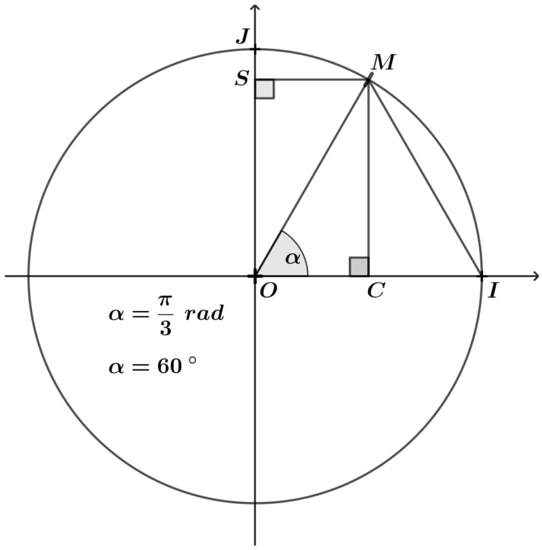
TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS E02C

EXERCICE N°1 ***Les valeurs remarquables : cos(π/3), sin(π/3), cos(π/6) et sin(π/6)***

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère le cercle trigonométrique.

1) Démontrer que le triangle OMI est équilatéral.



▪ On sait que $OM = OI = 1$
On en déduit que le triangle OMI est isocèle en O et ses angles à la base sont de même mesure.

▪ De plus, $\widehat{MOI} = \dfrac{\pi}{3} rad$.

Donc, $\widehat{OMI} = \widehat{MIO} = \dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3} rad$

▪ On en déduit que le triangle OMI est équilatéral.

2) Le point C est le projeté orthogonal de M sur (OI) .

2.a) Démontrer que (MC) est la médiatrice de $[OI]$.

▪ Le triangle OMI étant équilatéral, on a en particulier $MO = MI$.
Donc le point M appartient à la médiatrice du segment $[IO]$.
▪ On sait que la médiatrice d'un segment est perpendiculaire à la droite qui le supporte et que $(MC) \perp (OI)$.
Donc C appartient à la médiatrice du segment $[OI]$.
▪ On déduit des deux points précédents que (MC) est la médiatrice de $[OI]$.

2.b) En déduire que $OC = \dfrac{1}{2}$.

On sait que la médiatrice d'un segment le coupe perpendiculairement en son milieu.
On en déduit que C est le milieu de $[OI]$ et par conséquent que :

$$OC = \frac{1}{2} .$$

2.c) En remarquant que $\cos(\alpha) = OC$ et en utilisant les formules de seconde, démontrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ici $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} .$$

2.d) En utilisant une formule (obtenue par symétrie) du cours démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On sait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

En particulier, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ donne :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

3) Le point S est le projeté orthogonal du point M sur (OJ) .

3.a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OMC}$.

Dans le triangle OCM , rectangle en C , $\widehat{COM} = \frac{\pi}{3} rad$.

Donc : $\widehat{OMC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} rad$

3.b) Déterminer la longueur MC .

Dans le triangle OCM , rectangle en C ,

$$MC^2 + OC^2 = OM^2 \Leftrightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

MC étant une longueur, on en déduit que :

$$MC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.c) En remarquant que $\sin(\alpha) = OS = MC$ et en utilisant les formules de seconde, démontrer que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans le triangle OCM , rectangle en C , $\widehat{COM} = \frac{\pi}{3} rad$ et

$$\sin(\widehat{COM}) = \frac{MC}{OM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

3.d) En utilisant une formule (obtenue par symétrie) du cours démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

En particulier, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ donne :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$