PROGRESSION TERMINALE GENERALE

		Contenus	Capacités attendues
1	***Limites de fonctions*** *(3 semaines)*	- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées. - Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle. - Limites et comparaison. - Opérations sur les limites.	- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme. - Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.
		Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$. Asymptotes obliques. Branches infinies.	
2	***Combinatoire et dénombrement*** *(2 semaines)*	- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints. - Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k - uplets (ou k - listes) d'un ensemble à n éléments. - Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n - uplets de $\{0,1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli. - Nombre des k - uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$ Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments. - Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.	- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer. - Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

		- pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ - Explicitation pour k = 0, 1, 2. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.	
		- Démonstration par dénombrement de la relation : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. - Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire). Combinaisons avec répétitions. - Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal. - Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation. - Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.	
3	***Suites*** *(2 semaines)*	- La suite (u_n) tend vers + ∞ si tout intervalle de la forme [A; +∞[contient toutes les valeurs un à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers – ∞. - La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs un à partir d'un certain rang. - Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes. - Opérations sur les limites. - Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.	- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers + ∞ ou – ∞. - Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite. - Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

		- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.	
		- Toute suite croissante non majorée tend vers + ∞. - Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli. - Divergence vers + ∞ d'une suite minorée par une suite divergeant vers + ∞. - Limite en + ∞ et en – ∞ de la fonction exponentielle. - Propriétés et utilisation des suites adjacentes. - Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. - Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron. - Recherche de seuils. - Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ln(2), etc.	
4	***Géométrie vectorielle dans l'espace*** *(2 semaines)*	- Vecteurs de l'espace. Translations. - Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace. - Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires. - Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur. - Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace. - Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires. - Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.	- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés. - Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs. - Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans. - Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base. - Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base. - Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

		- Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie. - Fonction vectorielle de Leibniz.	
5	***Succession d'épreuves indépendantes*** *(2 semaines)*	- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1,\ldots,x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un produit cartésien, par un arbre. - Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. - Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes. - Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.	- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales. - Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale. - Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès. - Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $\mathrm{P}(X = k)$, $\mathrm{P}(X \leqslant k)$, $\mathrm{P}(k \leqslant X \leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathrm{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.
		Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli. - Loi géométrique. - Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares). - Simulation de la planche de Galton. - Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α, détermination du plus petit entier k tel que $\mathrm{P}(X > k) \leqslant \alpha$. - Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.	
6	***Compléments sur la***	- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la	- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.

	dérivation et convexité *(2 semaines)*	composée de deux fonctions dérivables. - Dérivée seconde d'une fonction. - Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''. - Point d'inflexion.	- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence. - Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction. - Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''. - Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.
		Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes. - Courbe de Lorenz. - Dérivée n-ième d'une fonction. - Inégalité arithmético-géométrique.	
7	***Orthogonalité et distances dans l'espace*** *(2 semaines)*	- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie. - Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire. - Base orthonormée, repère orthonormé. - Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points. - Développement de $\| \vec{u}+\vec{v} \|^2$, formules de polarisation.	- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace. - Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan. - Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume. - Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

		- Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite. - Vecteur normal à un plan. Étant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$. - Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.	
		Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan ⍰ est le point de ⍰ le plus proche de M. - Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point. - Sphère circonscrite à un tétraèdre. - Fonction scalaire de Leibniz.	
8	***Fonction logarithme népérien*** *(1 semaine)*	- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle. - Propriétés algébriques du logarithme. - Fonction dérivée du logarithme, variations. - Limites en 0 et en + ∞, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle. - Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en + ∞.	- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation. - Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.
		- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise. - Limite en 0 de $x \mapsto x\ln(x)$. $-\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ $-\forall\ x \in \mathbb{R}$ limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.	

9	***Fonctions continues*** *(2 semaines)*	- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue. - Image d'une suite convergente par une fonction continue. - Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.	- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement. - Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
		- Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires. - Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y. - Prolongement par continuité. - Méthode de dichotomie. - Méthode de Newton, méthode de la sécante.	
10	***Représentation paramétriques et équations cartésiennes*** *(2 semaines)*	- Représentation paramétrique d'une droite. - Équation cartésienne d'un plan.	- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique. - Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan. - Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur. - Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter

			géométriquement les solutions.
		Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A. - Déterminer l'intersection de deux plans. - Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires. - Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon. - Intersection d'une sphère et d'une droite.	
11	***Primitives et équations différentielles*** *(2 semaines)*	- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. - Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour n $\in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle. - Équation différentielle $y' = a\,y$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = a\,y + b$.	- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$. - Pour une équation différentielle $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions. Pour une équation différentielle $y' = a\,y + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.
		- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. - Résolution de l'équation différentielle $y' = a\,y$ où a est un nombre réel. Autres exemples d'équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l'équation logistique. Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = a\,y + b$.	
12	***Sommes de variables aléatoires*** *(2 semaines)*	- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{E}(a\,X) = a\,\mathrm{E}(X)$. - Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$. Relation $\mathrm{V}(aX) = a^2\mathrm{V}(X)$.	- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples. - Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité. - Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires

		- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale. - Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste (X_1, …,X_n) de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n / n$.	indépendantes.
		Espérance et variance de la loi binomiale. Relation E(XY) = E(X)E(Y) pour des variables aléatoires indépendantes X,Y. Application à la variance de $X + Y$.	
13	***Fonctions trigonométriques*** *(3 semaines)*	Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, primitives, variations, courbes représentatives.	- Résoudre une équation du type cos(x) = a, une inéquation de la forme cos(x) $\leqslant a$ sur [-π,π]. - Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.
		Fonction tangente.	
14	***Calcul intégral*** *(3 semaines)*	- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment [a ,b], comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)\,dx$. - Théorème : si f est une fonction continue positive sur [a ,b], alors la fonction F_a définie sur [a ,b] par $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. - Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ où F est une primitive	- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne. - Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties. - Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction. - Calculer l'aire entre deux courbes. - Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.

		quelconque de f. Notation $[F(x)]_a^b$. - Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. - Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b. - Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles. - Valeur moyenne d'une fonction. - Intégration par parties.	- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.
		- Pour une fonction positive croissante f sur $[a,b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f. Pour toute primitive F de f, relation $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. - Intégration par parties. - Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes. - Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales. - Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes. - Méthode de Monte-Carlo. - Algorithme de Brouncker pour le calcul de ln(2).	
15	***Concentration, loi des grands***	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le	Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque

	nombres *(2 semaines)*	réel strictement positif δ $P(\mid X-\mu \mid \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$. - Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P(\mid M_n-\mu \mid \geq \delta) \leq \frac{V}{n\,\delta^2}$ - Loi des grands nombres.	choisi.
		- Estimation. - Marche aléatoire. - Exemples d'application issus d'autres disciplines pour diverses valeurs de n : sondage (par exemple n = 1 000), étude du sex ratio (par exemple n = 106), demi-vie d'atomes radioactifs (n = 1023). - Calculer la probabilité de ($\mid S_n - pn \mid > n$), où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. - Simulation d'une marche aléatoire. - Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à σ / n . Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks, ou à k σ / n , pour k = 1, 2, 3.	

Démonstration - Exemples d'algorithme - Approfondissements

Thèmes : ALGÈBRE – ANALYSE – GÉOMÉTRIE – PROBABILITÉS ET STATISTIQUES