

SUITES NUMÉRIQUES E01C

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

Soit u la suite définie par $u(n) = n^2 + 3n + 5$ pour $n \geq 0$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite u .

$$u(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 5$$

$$u(0) = 5$$

$$u(3) = 3^2 + 3 \times 3 + 5$$

$$u(4) = 23$$

$$u(1) = 1^2 + 3 \times 1 + 5$$

$$u(1) = 9$$

$$u(4) = 4^2 + 3 \times 4 + 5$$

$$u(4) = 33$$

$$u(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 5$$

$$u(2) = 15$$

Comme on commence à $u(0)$ le cinquième est $u(4)$.

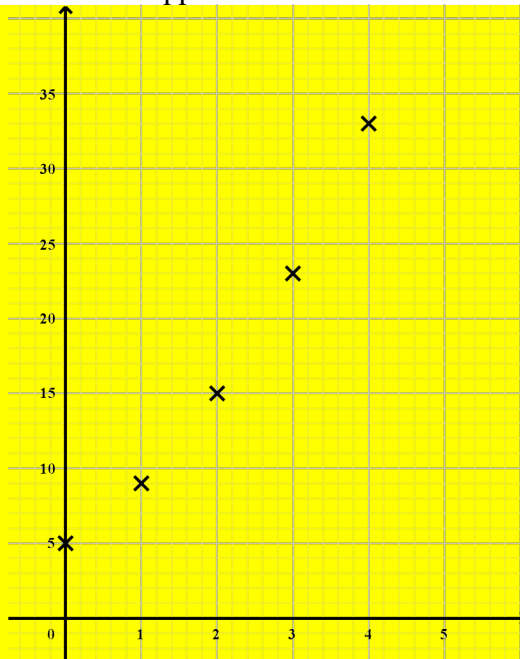
2) u est-elle définie explicitement ou par récurrence?

Cette suite est définie explicitement.

Car on peut calculer le terme d'indice n directement.

Par exemple, pour calculer $u(4)$, on a pas besoin de $u(3)$.

3) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite u .



4) Conjecturer graphiquement le sens de variation de la suite u .

Graphiquement, la suite semble croissante.

5) Démontrer cette conjecture.

Il s'agit de démontrer que quelque soit le terme que l'on choisit, le suivant est plus grand.

Soit $n \in \mathbb{N}$, les expressions suivantes sont égales :

On prend un indice, n'importe lequel et donc on choisit un terme de la suite : le terme $u(n)$

$$u(n+1) - u(n)$$

On compare le terme choisi avec le suivant en faisant la différence. Par exemple, si le résultat est positif, alors cela signifie que $u(n+1) > u(n)$.

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 - [n^2 + 3n + 5]$$

$$n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 5 - n^2 - 3n - 5$$

$$n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 5 - n^2 - 3n - 5$$

$$2n + 4$$

On a développé et réduit l'expression afin de pouvoir la comparer à 0.

Or : n est un naturel donc positif

Ainsi $2n + 4 > 0$

On vient de montrer que $u(n+1) - u(n) > 0$ et donc que $u(n+1) > u(n)$

Par conséquent :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n+1) > u(n)$$

ce qui signifie que la u est strictement croissante.