

# VARIABLES ALÉATOIRES M04

## EXERCICE N°1    Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules (Calculatrice autorisée)

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par le tableau suivant.

$x_i$	-1	4	7
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

- 1) Calculer l'espérance de  $X$ .
- 2) Calculer la variance de  $X$  et en déduire l'écart-type de  $X$ .
- 3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .
- 4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire :  $Y = -3X + 2$
- 5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire :  $Z = 2Y + 1$

## EXERCICE N°2    Espérance, variance, écart-type : cas concret (Calculatrice autorisée)

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher dont 15 sont rouges et les autres sont jaunes. On mise 40 €.

On tire au hasard successivement deux boules en remettant dans l'urne la première.

On gagne 70 € par boule jaune tirée.

$X$  est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 2) À l'aide de la calculatrice, calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .
- 3) Donner une interprétation de  $E(X)$ .
- 4) Ce jeu est-il équitable ?

## EXERCICE N°3    Le choix de l'investissement

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Merci à Gemini pour l'idée même si les calculs étaient faux et que j'ai dû tout refaire...

Imaginez que vous avez 10 000 € à investir. Vous hésitez entre deux placements financiers ( $A$  et  $B$ ). Les rendements annuels (en %) sont des variables aléatoires.

Voici les probabilités de gain pour chaque placement :

**Placement A :**

Gain ( $x_i$ )	-1 %	2 %	5 %
Probabilité $P(X = x_i)$	0,2	0,6	0,2

**Placement B :**

Gain ( $y_i$ )	-11 %	2 %	15 %
Probabilité $P(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,2

- 1) Calculer l'espérance  $E(X)$  et  $E(Y)$ . Que remarquez-vous ?
- 2) Calculer la variance  $V(X)$  et  $V(Y)$ , puis les écarts-types  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$  .
- 3) Si vous devez choisir un placement pour votre retraite, lequel prenez-vous ? Si vous êtes un trader qui cherche un "gros coup", lequel choisissez-vous ?



# VARIABLES ALÉATOIRES M04C

## EXERCICE N°1 Espérance, variance, écart-type : manipuler les formules

(Calculatrice autorisée)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par le tableau suivant.

$x_i$	-1	4	7
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

1) Calculer l'espérance de  $X$ .

$$E(X) = -1 \times \frac{5}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 7 \times \frac{2}{10} = 3$$

Ainsi :  $E(X) = 2,1$

2) Calculer la variance de  $X$  et en déduire l'écart-type de  $X$ .

▪ Calculons la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-1-2,1)^2 \times \frac{5}{10} + (4-2,1)^2 \times \frac{3}{10} + (7-2,1)^2 \times \frac{2}{10} \\ &= 9,61 \times \frac{5}{10} + 3,61 \times \frac{3}{10} + 24,01 \times \frac{2}{10} \end{aligned}$$

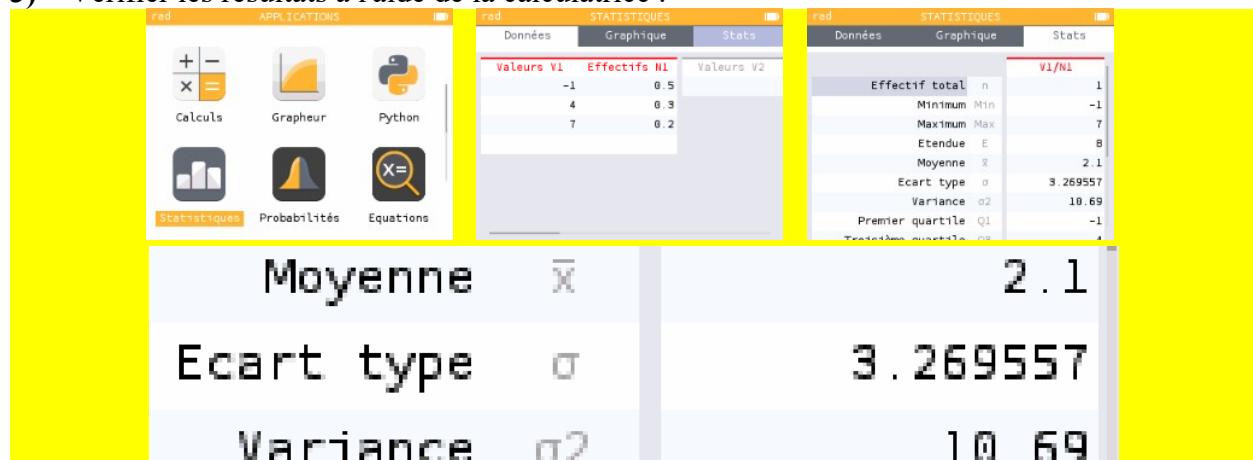
$$V(X) = 10,69$$

▪ On en déduit l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10,69} \approx 3,27 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice .



4) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire :  $Y = -3X+2$

On utilise bien sûr les formules du cours :

▪  $E(Y) = E(-3X+2) = -3E(X)+2 = -3 \times 2,1 + 2$  Ainsi :  $E(Y) = -4,3$

▪  $V(Y) = V(-3X+2) = (-3)^2 \times V(X) = 9 \times 10,69$  Ainsi :  $V(Y) = 96,21$

▪  $\sigma(Y) = \sigma(-3X+2) = |-3| \times \sigma(X) = 3 \times \sqrt{10,69}$  Ainsi :  $\sigma(Y) = 3\sqrt{10,69}$

Hé mais si on avait utilisé directement la définition de  $\sigma(Y)$  ?

$$\sqrt{96,21} = \sqrt{9 \times 10,69} = \sqrt{3} \times \sqrt{10,69} = 3\sqrt{10,69}$$

Alors on aurait bien sûr trouvé le même résultat.

5) Reprendre les questions 1) 2) et 3) avec la variable aléatoire :  $Z = 2Y+1$

▪  $E(Z) = E(2Y+1) = 2E(Y)+1 = 2 \times (-4,3) + 1$  Ainsi :  $E(Z) = -7,6$

▪  $V(Z) = V(2Y+1) = 2^2 \times V(Y) = 4 \times 96,21$  Ainsi :  $V(Z) = 384,84$

▪  $\sigma(Z) = \sigma(2Y+1) = |2| \times \sigma(Y) = 2 \times 3\sqrt{10,69}$  Ainsi :  $\sigma(Z) = 6\sqrt{10,69}$

Tiens, c'est marrant ce  $2 \times 3 \dots$  Je vous laisse y réfléchir...

Au passage :  $4 \times 96,21 = 4 \times 9 \times 10,69 \dots$



# VARIABLES ALÉATOIRES M04C

## EXERCICE N°2      *Espérance, variance, écart-type : cas concret*

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

(Calculatrice autorisée)

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher dont 15 sont rouges et les autres sont jaunes. On mise 40 €.

On tire au hasard successivement deux boules en remettant dans l'urne la première.

On gagne 70 € par boule jaune tirée.

$X$  est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

1) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

▪ On détermine  $\Omega$ .

$R_1$  : « rouge au premier tirage » et  $\overline{R}_1$  : « Jaune au premier tirage »

$R_2$  : « rouge au second tirage » et  $\overline{R}_2$  : « Jaune au second tirage »

$\Omega = \{(R_1 ; R_2) ; (R_1 ; \overline{R}_2) ; (\overline{R}_1 ; R_2) ; (\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}$  (faites un arbre;)

▪ On détermine la distribution des probabilités sur  $\Omega$ .

Issue	$(R_1 ; R_2)$	$(R_1 ; \overline{R}_2)$	$(\overline{R}_1 ; R_2)$	$(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)$	Total
Probabilité	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par  $X$  (autrement dit : on détermine  $X(\Omega)$ )

$X((R_1 ; R_2)) = -40$  ,  $X((R_1 ; \overline{R}_2)) = 30$  ,  $X((\overline{R}_1 ; R_2)) = 30$  et

$X((\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)) = 140$

(Il y a trois images possibles : -40 ; 30 et 140)

▪ On regroupe les antécédents :

$\{X = -40\} = \{(R_1 ; R_2)\}$

$\{X = 30\} = \{(R_1 ; \overline{R}_2)\} \cup \{(\overline{R}_1 ; R_2)\}$

$\{X = 140\} = \{(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}$

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :

$$\square P(\{X = -40\}) = P(\{(R_1 ; R_2)\}) = \frac{9}{16}$$

$$\square P(\{X = 30\}) = P(\{(R_1 ; \overline{R}_2)\}) + P(\{(\overline{R}_1 ; R_2)\}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\square P(\{X = 140\}) = P(\{(\overline{R}_1 ; \overline{R}_2)\}) = \frac{1}{16}$$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$x_i$	-40	30	140	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

2) À l'aide de la calculatrice, calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .

Moyenne  $\bar{x}$  -6.875

Ecart type  $\sigma$  38.68442

Variance  $\sigma^2$  1496.484

3) Donner une interprétation de  $E(X)$ .

En jouant un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre 6,875 € à chaque partie.

4) Ce jeu est-il équitable ?

L'espérance n'étant pas nulle, ce jeu n'est pas équitable.

Il est ici défavorable au joueur.

# VARIABLES ALÉATOIRES M04C

## EXERCICE N°3    Le choix de l'investissement

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

Merci à Gemini pour l'idée même si les calculs étaient faux et que j'ai dû tout refaire...

Imaginez que vous avez 10 000 € à investir. Vous hésitez entre deux placements financiers (*A* et *B*). Les rendements annuels (en %) sont des variables aléatoires.

Voici les probabilités de gain pour chaque placement :

**Placement A :**

Gain ( $x_i$ )	-1 %	2 %	5 %
Probabilité $P(X = x_i)$	0,2	0,6	0,2

**Placement B :**

Gain ( $y_i$ )	-11 %	2 %	15 %
Probabilité $P(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,2

1) Calculer l'espérance  $E(X)$  et  $E(Y)$ . Que remarquez-vous ?

▪  $E(X) = -0,01 \times 0,2 + 0,02 \times 0,6 + 0,05 \times 0,2$

$E(X) = 0,02$  (Soit un gain de 2%)

▪  $E(Y) = -0,11 \times 0,2 + 0,02 \times 0,6 + 0,15 \times 0,2$

$E(Y) = 0,02$  (Soit un gain de 2%)

▪ On remarque que sur le long terme les deux placements semblent rapporter la même chose.

2) Calculer la variance  $V(X)$  et  $V(Y)$ , puis les écarts-types  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$ .

▪  $V(X) = (-0,01 - 0,02)^2 \times 0,2 + (0,02 - 0,02)^2 \times 0,6 + (0,05 - 0,02)^2 \times 0,2$

$V(X) = 0,00036$  et  $\sigma(X) = \sqrt{0,00036} \approx 0,019$  à  $10^{-3}$  près

▪  $V(Y) = (-0,11 - 0,02)^2 \times 0,2 + (0,02 - 0,02)^2 \times 0,6 + (0,15 - 0,02)^2 \times 0,2$

$V(Y) = 0,00676$  et  $\sigma(Y) = \sqrt{0,00676} \approx 0,082$  à  $10^{-3}$  près

3) Si vous devez choisir un placement pour votre retraite, lequel prenez-vous ? Si vous êtes un trader qui cherche un "gros coup", lequel choisissez-vous ?

Pour la retraite, il est plus sage de choisir le placement A.

Le trader préférera le placement B.

Voici un prompt pour votre IA :

Bonjour, j'aimerais que tu m'expliques comment interpréter la variance et l'écart-type en finance. J'aimerais également savoir si ce sont les indicateurs les plus pertinents ou s'il y en a d'autres. Auquel cas, il faudrait me les expliquer aussi.