FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f .

$f'(x) = 3\times3x^2 - 4\times1 = \mathbf{9x^2-4}$

remarque : On a utilisé les formules du cours (fonctions part 2 propriété n°5 et exemple n°3)

2)

2.a) Factoriser $f'(x)$.

$f'(x) = \underbrace{9x^2-4}_{a^2-b^2} = \underbrace{(3x)^2-2^2}_{a^2-b^2} = \underbrace{\mathbf{(3x+2)(3x-2)}}_{(a+b)(a-b)}$

2.b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

Nous allons dresser un tableau de signes :

- $3x+2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

(On mettra donc les $+$ après $-\frac{2}{3}$ dans la ligne : $3x+2$)

- $3x-2 > 0 \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

(On mettra donc les $+$ après $\frac{2}{3}$ dans la ligne : $3x-2$)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	|	$+$	0	$+$	
$3x-2$		$-$		$-$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :

$f'(x)$ est strictement positif sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$f'(x)$ est strictement négatif sur $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right[$

et que $f'(x)$ vaut zéro sur $\left\{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right\}$

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Pas demandé ici mais cela permet de faire le lien

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{16}{9}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{9}+\frac{8}{3} = \frac{-8+24}{9} = \frac{16}{9}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-4\times\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{8}{3} = \frac{8-24}{9} = -\frac{16}{9}$

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$.

1) Montrer que $f'(x)=3(x+1)(x-1{,}5)$.

On sait que :

$f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$

d'où

$f'(x)=3x^2-0{,}75\times 2x-4{,}5\times 1+0\ =\ \mathbf{3x^2-1{,}5x-4{,}5}$

Et :

$3(x+1)(x-1{,}5)\ =\ 3(x^2-0{,}5x-1{,}5)\ =\ 3x^2-1{,}5x-4{,}5\ =\ f'(x)$

Remarque :
Toujours la même technique :
1) On dérive la forme développée réduite.
2) On développe la forme factorisée donnée dans l'exercice et on constate que c'est bien la même chose. (Et on n'écrit $f'(x)$ qu'à la fin.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

Pour étudier le signe, on choisit (presque) toujours la forme forme factorisée.

Nous allons dresser un tableau de signe

- $3\ >\ 0$ est vrai pour toute valeur de x
- $x+1\ \Leftrightarrow\ x\ >\ -1$
- $x-1{,}5\ >\ 0\ \Leftrightarrow\ x\ >\ 1{,}5$

x	-2		-1		$1{,}5$		2
3		+	|	+	|	+	
$x+1$		−	|	+	0	+	
$x-1{,}5$		−		−	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit que :

$f'(x)$ est strictement positif sur $]-2\ ;\ -1[\ \cup\ ]1{,}5\ ;\ 2[$

$f'(x)$ est strictement négatif sur $]-1\ ;\ 1{,}5[$

et que $f'(x)$ vaut zéro sur $\{-1\ ;\ 1{,}5\}$

3) Donner les extremums de f , ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

(= pas de justifications)
Pour identifier les extremums, on cherche les valeurs de x où la dérivée change de signe.
On regarde donc les zéros dans la dernière ligne du tableau de signes et on garde ceux entourés par des signes différents ($+0-$ ou $-0+$ mais pas $+0+$ ni $-0-$).
On pense aussi à regarder les valeurs de $f(-2)$ et $f(2)$.

$f(-2)=1\ ;\ f(-1)=5{,}75\ ;\ f(1{,}5)=-2{,}0625$ et $f(2)=-1$

f possède un **minimum qui vaut -2,0625 et qui est atteint en 1,5**
f possède un **maximum qui vaut 5,75 et qui est atteint en -1**

EXERCICE N°3

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudier le signe de la dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3$

Factorisons $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$

- $3 > 0$ est vrai pour toute valeur de x
- $x+1 \Leftrightarrow x > -1$
- $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
3		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Remarque :
On fait bien attention : l'avant-dernière ligne, c'est pour le signe f' et la dernière, c'est pour les variations de f . On ne se mélange pas les pinceaux dans les « $'$ »

2) $g(x)=2x^3+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

$g(x)=2x^3+4x$

$g'(x) = 2\times 3x^2+4\times 1 = 6x^2+4$

Ici, on réfléchit un peu : x^2 est toujours supérieur ou égal à zéro, cela reste vrai quand on le multiplie par 6 et quand on ajoute 4, cela devient même strictement positif.

De manière évidente, $g'(x) > 0$

On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) $h(x)=x^3+6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

$h(x)=x^3+6x^2$

$h'(x) = 3x^2+6\times 2x = 3x^2+12x$

Factorisons $h'(x)$

$h'(x) = 3x^2+12x = 3x(x+4)$

- $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$3x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f .

2)

2.a) Factoriser $f'(x)$.

2.b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$.

1) Montrer que $f'(x)=3(x+1)(x-1{,}5)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

3) Donner les extremums de f , ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

EXERCICE N°3

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudier le signe de la dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=2x^3+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=x^3+6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f .

2)

2.a) Factoriser $f'(x)$.

2.b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$.

1) Montrer que $f'(x)=3(x+1)(x-1{,}5)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

3) Donner les extremums de f , ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

EXERCICE N°3

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudier le signe de la dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=2x^3+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=x^3+6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS PART3 E05

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f .

2)

2.a) Factoriser $f'(x)$.

2.b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=x^3-0{,}75x^2-4{,}5x+3$.

1) Montrer que $f'(x)=3(x+1)(x-1{,}5)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

3) Donner les extremums de f , ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

EXERCICE N°3

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudier le signe de la dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=2x^3+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=x^3+6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.