

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°1 Suite auxiliaire (sans calculatrice)

On donne la suite u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 , on donnera les valeurs exactes.

▪ $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}$, ainsi $u_1 = \sqrt{3}$

▪ $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{3+12} = \frac{1}{2}\times\sqrt{15}$, ainsi $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$

▪ $u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}+12} = \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{2}$, ainsi $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

2) On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2 - 4$

2.a) Montrer que la suite v est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

▪ $v_0 = u_0^2 - 4 = 0 - 4$, ainsi $v_0 = -4$

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 4 \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2 - 1 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

« Astuce » de la mise en facteur de « force »

▪ On reconnaît une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -4$

2.b) Exprimer v_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

2.c) On a admis que pour tout entier n , $v_n > -4$. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n^2 - 4 \Leftrightarrow u_n^2 = v_n + 4 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{v_n + 4} \quad (\text{car } v_n - 4 > 0)$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{4 - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

2.d) Conjecturer alors la limite de la suite u .

Il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

La suite v tend vers 0, « il reste » $\sqrt{4} = 2$

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°2 Suite auxiliaire et tableur

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

- Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + 2n^2 + 3n$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

- C2 : $=B2+2*A2^2+3*A2$
- B3 : $=2*B2+2*A2^2-A2$

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

- Exprimons v_{n+1} en fonction v_n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\ &= \underbrace{2u_n + 2n^2 - n}_{u_{n+1}} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\ &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5 \\ &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 7$

Pour v_0 , il suffit de lire la valeur dans le tableur...

- Exprimons v_n en fonction n :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = v_0 \times q^n, \text{ ainsi } v_n = 7 \times 2^n$$

- Exprimons u_n en fonction n :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n \Leftrightarrow u_n = v_n - 2n^2 - 3n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n$$

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°3 Somme des premiers carrés

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est à dire $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

3) Calculer les trois premiers termes de la suite u .

▪ $u_1 = 1^2$, ainsi $\boxed{u_1 = 1}$.

▪ $u_2 = 1^2 + 2^2$, ainsi $\boxed{u_2 = 5}$.

▪ $u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$, ainsi $\boxed{u_3 = 14}$.

4) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + (n+1)^2}$

5) On pose v la suite définie par : Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5.a) Montrer que $v_1 = u_1$

$$v_1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1 = u_1$$

5.b) Montrer que la suite v suit la même relation de récurrence que la suite u et conclure.

▪ Exprimons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

▪ Calculons à présent $v_{n+1} + (n+1)^2$

$$\begin{aligned} v_n + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} && \text{factorisation par } (n+1) \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} \end{aligned}$$

Or :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc :

$$v_{n+1} = v_n + (n+1)^2.$$

▪ La suite v suit bien la même relation de récurrence que la suite u .

▪ Comme, de plus, elles ont le même premier terme, on en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n.$$

▪ On a donc démontré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(Le résultat reste vrai pour $n=0$)

LES SUITES NUMÉRIQUES E08C

EXERCICE N°4 Algorithme de Héron (un premier contact)

On donne a et b deux nombres réels tels que : $a > 0$ et $b > \sqrt{a}$.

On donne également la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Notre but est de comprendre que le terme u_n tend vers \sqrt{a} .

1) Un premier cas : $a = 2$ et $b = 5$.

1.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

- $u_0 = 5$

$$\bullet \quad u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{2}{5} \right) \text{ , ainsi } u_1 = 2,7$$

$$\bullet \quad u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{2}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2,7 + \frac{2}{2,7} \right) \text{ , ainsi } u_2 \approx 1,72$$

$$\bullet \quad u_3 = \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{2}{u} \right) \text{ , ainsi } u_3 \approx 1,441$$

$$\bullet \quad u_4 = \frac{1}{2} \left(u_3 + \frac{2}{u_2} \right) \text{ , ainsi } u_4 \approx 1,414$$

SUITES		Tableau
Suites	Graphique	
Régler l'intervalle		
n	<u>u_n</u>	
0	5	
1	2.7	
2	1.72037037	
3	1.441455368	
4	1.414470981	
5	1.414213586	
6	1.414213562	
7	1.414213553	

1.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec \sqrt{a} .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 1,414213562

rad	SUITES	
Suites	Graphique	Tableau
Régler l'intervalle		
N début	500	
N fin	520	
Pas	1	
<input type="button" value="Valider"/>		

SUITES	
Suites	Graphique
Régler l'intervalle	
n	<u>u_n</u>
500	1.414213562
501	1.414213562
502	1.414213562
503	1.414213562
504	1.414213562
505	1.414213562
506	1.414213562

Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{2}$

The figure shows a digital calculator screen. At the top, there are two tabs: "rad" (highlighted in orange) and "CALCULUS" (in white). Below the tabs, the input field displays the mathematical expression $\sqrt{2}$. To the right of the input field, the result is shown as 1.414213562.

2) Un premier cas : $a = 5$ et $b = 10$.

2.a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

▪ $u_0 = 10$

▪ $u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{5}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{5}{10} \right)$, ainsi $u_1 = 5,25$

▪ $u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{5}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5,25 + \frac{5}{5,25} \right)$, ainsi $u_2 \approx 3,101$

▪ $u_3 = \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{5}{u_2} \right)$, ainsi $u_3 \approx 2,357$

▪ $u_4 = \frac{1}{2} \left(u_3 + \frac{5}{u_3} \right)$, ainsi $u_4 \approx 2,239$

rad SUITES	
Suites	Graphique
Régler l'intervalle	
n	u_n
0	5
1	2.7
2	1.72037037
3	1.441455368
4	1.414470981
5	1.414213586
6	1.414213562
7	1.414213562

2.b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer si elle existe, la limite de la suite u et la comparer avec \sqrt{a} .

Avec la calculatrice, la suite semble tendre vers 2,236067977

rad SUITES	
Suites	Graphique
Régler l'intervalle	
N début	500
N fin	520
Pas	1
Valider	

rad SUITES	
Suites	Graphique
Régler l'intervalle	
n	u_n
500	2.236067977
501	2.236067977
502	2.236067977
503	2.236067977
504	2.236067977
505	2.236067977
506	2.236067977
507	2.236067977

Ce qui correspond à une valeur approchée de $\sqrt{5}$

rad CALCULS	
$\sqrt{5}$	2.236067977