

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Voici un jeu :

On jette un dé (non pipé) à six faces et on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on perd 5 euros.
- Si le résultat est pair on gagne deux euros.
- Si le résultat est « 3 » ou « 5 » on gagne un euro.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de X .

- On détermine Ω .

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$$X(\{1\}) = -5, \quad X(\{2\}) = 2, \quad X(\{3\}) = 1,$$

$$X(\{4\}) = 2, \quad X(\{5\}) = 1 \quad \text{et} \quad X(\{6\}) = 2$$

(Il y a trois images possibles : -5 ; 1 et 2)

- On regroupe les antécédents :

$$\{X = -5\} = \{1\}$$

$$\{X = 1\} = \{3\} \cup \{5\}$$

$$\{X = 2\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$$

- On calcule la probabilité de chaque événement :

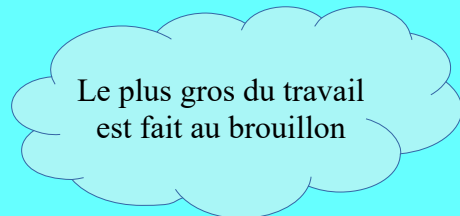
$$\square P(\{X = -5\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$\square P(\{X = 1\}) = P(\{3\} \cup \{5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\square P(\{X = 2\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	1	2	Total	
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	



VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile)

Voici un jeu :

- On jette un dé bien équilibré à quatre faces et on note le résultat obtenu.
- Puis on jette une pièce de monnaie et on note la face obtenue (pile ou face).
- Si on obtient Face et un nombre supérieur à 1 alors on gagne 10 €.
- Si on obtient Pile et un nombre pair, on gagne 5 €.
- Dans tous les autres cas, on perd 4 €.
- Pour jouer, il faut miser 2 €.

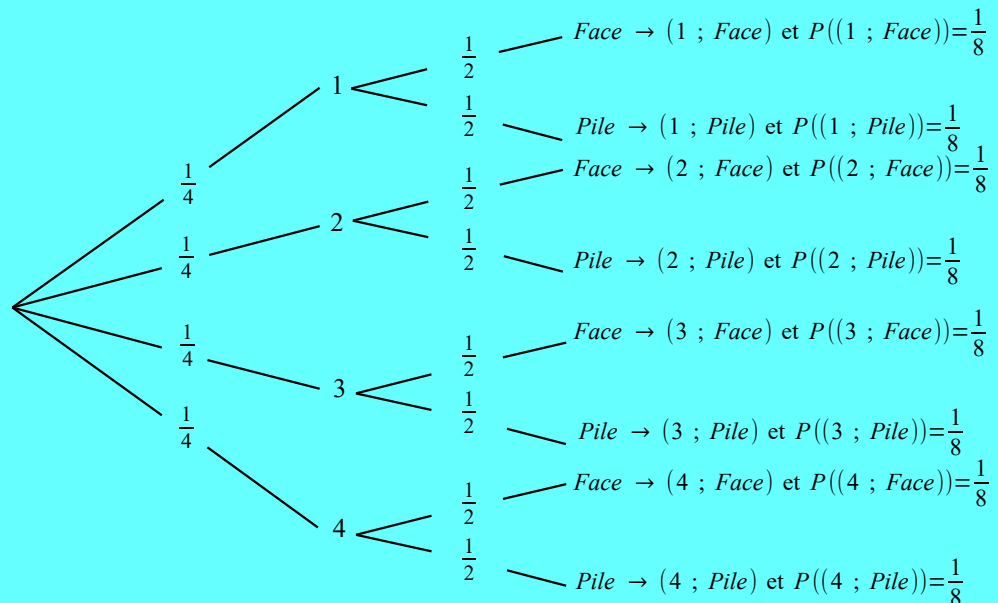
On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

Donner la loi de probabilité de X .

On détermine Ω

Une issue de Ω est donc un couple, par exemple : $(2 ; \text{Face})$, $(5 ; \text{Pile})$ etc...

Le plus simple est de faire un arbre pour ne pas oublier d'issue.



$$\Omega = \{(1 ; \text{Face}); (2 ; \text{Face}); (3 ; \text{Face}); (4 ; \text{Face}); (1 ; \text{Pile}); (2 ; \text{Pile}); (3 ; \text{Pile}); (4 ; \text{Pile})\}$$

On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	(1 ; Face)	(2 ; Face)	(3 ; Face)	(4 ; Face)	(1 ; Pile)	(2 ; Pile)	(3 ; Pile)	(4 ; Pile)	Total
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

Issue	(1 ; Face)	(2 ; Face)	(3 ; Face)	(4 ; Face)	(1 ; Pile)	(2 ; Pile)	(3 ; Pile)	(4 ; Pile)
$X(\text{Issue})$	-6 =-4-2	8 =10-2	8 =10-2	8 =10-2	-6 =-4-2	3 =5-2	-6 =-4-2	3 =5-2

On regroupe les antécédents :

$$\{X = -6\} = \{(1 ; \text{Face})\} \cup \{(1 ; \text{Pile})\} \cup \{(3 ; \text{Pile})\}$$

$$\{X = 3\} = \{(2 ; \text{Pile})\} \cup \{(4 ; \text{Pile})\}$$

$$\{X = 8\} = \{(2 ; \text{Face})\} \cup \{(3 ; \text{Face})\} \cup \{(4 ; \text{Face})\}$$

On calcule la probabilité de chaque événement :

$$P(\{X = -6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{X = 8\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-6	3	8	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

On convient de ne plus écrire les accolades

Le plus gros du travail est fait au brouillon

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

x_i	-6	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On n'écrit plus
les accolades

On fait une partie :

1) Donner la probabilité de gagner 3 euros.

$$P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

2) Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.

Il s'agit de calculer $P(X < 0)$

Ici, la seule valeur strictement négative est -6 donc :

$$P(X < 0) = P(X = -6) = \frac{5}{8}$$

Ainsi $P(X < 0) = \frac{5}{8}$

3) Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 euros.

Il s'agit de calculer $P(X \geq 3)$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 8) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Ainsi $P(X \geq 3) = \frac{3}{8}$

4) Déterminer la probabilité de gagner moins de 8 euros.

Il s'agit de calculer $P(X < 8)$

$$P(X < 8) = P(X = -6) + P(X = 3) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

Ainsi $P(X < 8) = \frac{7}{8}$

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit plus les accolades

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

1) Déterminer $P(X = 8)$.

$$\begin{aligned}P(X = 8) &= 1 - (P(X = -8) + P(X = 0) + P(X = 7) + P(X = 20)) \\&= 1 - (0,4 + 0,12 + 0,3 + 0,08) \\&= 1 - 0,9 \\&= 0,1\end{aligned}$$

$$P(X = 8) = 0,1$$

2) Déterminer $P(X \leq 0)$.

$$P(X \leq 0) = P(X = -8) + P(X = 0) = 0,4 + 0,12 = 0,52$$

Ainsi,

$$P(X \leq 0) = 0,52$$

3) Déterminer $P(X > 7)$.

$$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 20) = 0,1 + 0,08 = 0,18$$

Ainsi,

$$P(X > 7) = 0,18$$

4) Déterminer $P(X < 20)$.

On pourrait additionner toutes les probabilités sauf celle de $\{X = 20\}$ mais on peut aller plus vite en se souvenant que la somme des probabilités égale 1.

$$P(X < 20) = 1 - P(X = 20) = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$P(X < 20) = 0,92$$

VARIABLES ALÉATOIRES E01C

EXERCICE N°5 Simuler une loi de probabilité

On reprend le contexte de l'exercice n°1 et on se propose de simuler 10000 parties.

Télécharger le script disponible en flashant (ou en cliquant) le QRcode de gauche puis ouvrez le avec Basthon (QRcode de droite).

- 1) Complétez le script puis exécutez-le.
- 2) Notez le gain moyen que vous avez obtenu et comparez le avec vos camarades.



Le script



Ouvrir Basthon

1)

```
1 import random
2
3 def simulation_gain():
4     de = random.randint(1, 6) # On lance un dé à 6 faces
5
6     if de == 1:
7         return -5 # Perte de 5 euros
8     elif de % 2 == 0: # Si le résultat est pair
9         return 2 # Gain de 2 euros
10    elif de == 3 or de == 5:
11        return 1 # Gain de 1 euro
12    else:
13        return 0 # Pas de gain ni de perte
14
15 # Calcul de la moyenne sur 10 000 parties
16 nb_parties = 10000
17 somme_gains = 0
18
19 for i in range(nb_parties):
20     somme_gains = somme_gains + simulation_gain()
21
22 moyenne = somme_gains / nb_parties
23 print("Le gain moyen sur 10 000 parties est :", moyenne)
```

2)

On trouve tous un résultat assez proche de 0,5

$$-5 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} = 0,5$$