SUITES NUMÉRIQUES E06

EXERCICE N°2 Suite arithmético-géométrique (Le corrigé)

Soit v la suite définie par: $v_0=5$ et $v_{n+1}=0{,}5\,v_n+1$.

1) Calculer $v(1)$ et $v(2)$. Vérifier que v n'est ni arithmétique, ni géométrique.

- $v(1) = 0{,}5\,v(0)+1 = 0{,}5\times5+1 = 3{,}5$
- $v(2) = 0{,}5\,v(1)+1 = 0{,}5\times3{,}5+1 = 2{,}75$
- Montrons que v n’est pas arithmétique :

$v(1)-v(0) = 3{,}5-5 = -1{,}5$

$v(2)-v(1) = 2{,}75-3{,}5 = -0{,}75$

Les différences successives ne sont pas toutes égales donc v n’est pas arithmétique.

- Montrons que v n’est pas géométrique:

$$\frac{v(1)}{v(0)} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$$

$$\frac{v(2)}{v(1)} = \frac{2{,}75}{3{,}5} \approx 0{,}8$$

Les quotients successifs ne sont pas tous égaux donc v n’est pas géométrique.

2) On pose $u_n=v_n-2$ pour tout n . Calculer $u_0\,;u_1\,;u_2$.

- $u_0 = v_0-2 = 5-2 = 3$
- $u_1 = v_1-2 = 3{,}5-2 = 1{,}5$
- $u_2 = v_2-2 = 2{,}75-2 = 0{,}75$

3) Conjecturer la nature et la raison de la suite u .

La suite semble être géométrique de raison $q = 0{,}5$ (et de premier terme $u_0 = 3$)

4) Le démontrer.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1}-2 \\ &= 0{,}5\,v_n+1-2 \\ &= 0{,}5\,v_n-1 \\ &= 0{,}5\left(v_n-\frac{1}{0{,}5}\right) \\ &= 0{,}5\left(v_n-2\right) \\ &= 0{,}5\,u_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1} = 0{,}5\,u_n$

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ (et de premier terme $u_0 = 3$)

5) En déduire une expression de v_n en fonction de n

Pour tout entier naturel n ,

d’une part :

$u_{n+1} = u_0\times0{,}5^n = 3$

d’autre part :

$u_n=v_n-2 \Leftrightarrow v_n=u_n+2$

En remplaçant :

$\boxed{v_n = 3\times0{,}5^n+2}$