LA FONCTION CARRÉ E01

EXERCICE N°3 Objectif Spé (Le corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a est un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit paire.

On va chercher une condition nécessaire puis on va montrer qu'elle est suffisante.
(Plus tard, vous appellerez cela : L'analyse-synthèse.

Avec les données de l'énoncé, si f est paire alors pour tout réel x , $f(-x)=f(x)$
Cela implique que :

$$ax^2-bx+c = ax^2+bx+c \Leftrightarrow ax^2-bx+c - (ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow -2bx = 0$$

(pour la 1^{ere} égalité)

$$f(-x) = a(-x)^2+b(-x)+c = ax^2-bx+c$$

(pour la 3eme égalité)

$$ax^2-bx+c - (ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow \cancel{ax^2} -bx+\cancel{c} -\cancel{ax^2} -bx-\cancel{c} = 0 \Leftrightarrow -2bx = 0$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout réel x , on en déduit que $\boxed{b=0}$

On vient de trouver notre condition nécessaire : Si f est paire alors $b=0$
Montrons à présent que cette condition est suffisante :

Supposons à présent que $b=0$ alors, pour tout réel x , $f(x) = ax^2+c$.
On a : $f(-x) = a(-x)^2+c = ax^2+c = f(x)$
Donc f est paire.

Ainsi $\boxed{\text{pour que } f \text{ soit paire il faut et il suffit que } b=0}$.