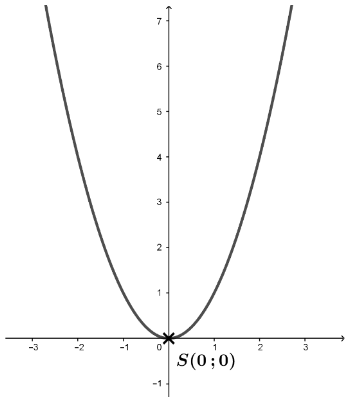
FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Nous allons généraliser ce que nous avons appris sur la fonction carré. Il est donc judicieux d'avoir relu ***ce cours*** avant de commencer...

I Jouons avec la parabole



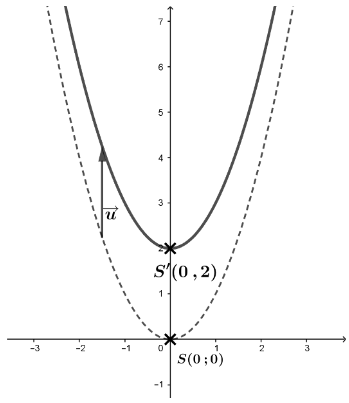
Notons f la fonction carré, c'est à dire $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$.

Nous savons que sa représentation graphique est la parabole d'équation $y = f(x)$ ou encore $y = x^2$.

Nous savons également que son sommet S a pour coordonnées $(0\ ;\ 0)$.

I.1 Premier jeu

Amusons-nous à translater cette parabole de deux unités selon l'axe des ordonnées et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0\ ;\ 2)$? c'est très bien!)



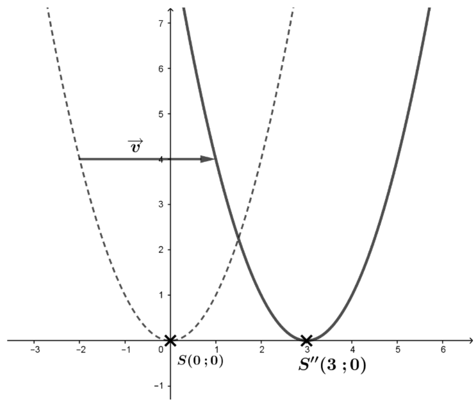
Nous n'avons pas changé les abscisses, par contre nous avons augmenté toutes les ordonnées de 2.

Notre nouvelle parabole a donc pour équation $y = f(x)+2$ ou encore $y = x^2+2$. Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler g et telle que $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\ \mapsto x^2+2\end{cases}$

Son sommet S' a alors pour coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

I.2 Deuxième jeu

Amusons-nous à translater cette parabole de trois unités selon l'axe des abscisses et « vers les positifs » (quelqu'un a parlé d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(3\ ;\ 0)$? c'est très bien!)



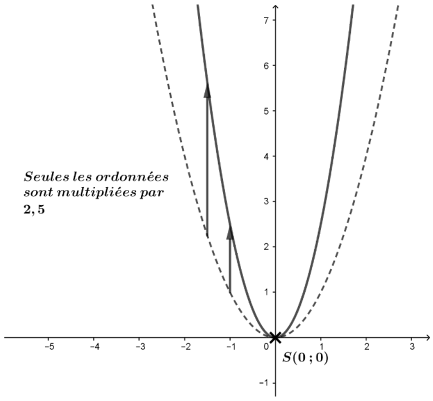
Nous avons augmenté les abscisses de 3 mais nous n'avons pas changé les ordonnées. C'est à dire que si $A(x_A\ ;\ y_A)$ est un point de la parabole de départ alors son image $B(x_B\ ;\ y_B)$ est telle que : $\begin{cases}x_B=x_A+3\\ y_B=y_A\end{cases}$.

De la première égalité, on déduit que $x_A=x_B-3$ et de la seconde, on déduit que $y_B = y_A = f(x_A) = f(x_B-3)$. Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = f(x-3)$ ou encore $y = (x-3)^2$. (Comprenez bien d'où vient le « moins »). Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler h et telle que $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\ \mapsto (x-3)^2\end{cases}$

Son sommet S'' a alors pour coordonnées $(3\ ;\ 0)$.

I.3 Troisième jeu

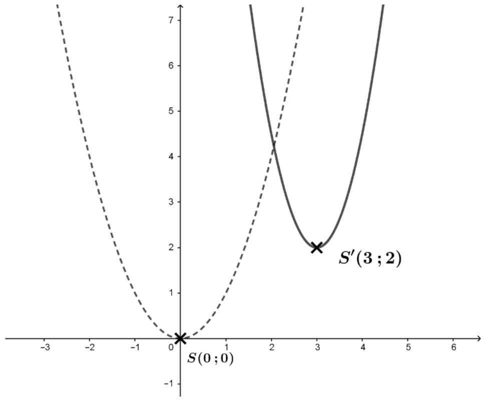
Amusons-nous à « déformer » cette parabole en multipliant les ordonnées par 2,5.
Notre nouvelle parabole a alors pour équation : $y = 2{,}5 \times f(x)$ ou encore $y = 2{,}5x^2$.
Elle représente une nouvelle fonction que l'on peut appeler k et telle que $k:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5x^2\end{cases}$.
Son sommet reste le même : $S(0 ; 0)$



I.4 Dernier Jeu

On combine les trois premiers jeux !

On obtient la parabole d'équation : $y = 2{,}5(x-3)^2+2$ qui répresente une fonction que l'on appeler l et telle que $l:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2{,}5(x-3)^2+2\end{cases}$.
Son sommet est alors le point $S'(3 ; 2)$



Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Sur cette page, vous pourrez faire varier les trois paramètres ($a=2{,}5$; $\alpha=3$ et $\beta=2$) afin d'observer en détail leur influence sur la parabole.
Rentrons à présent dans le vif du sujet…

II Expressions des fonctions polynomiales du second degré

II.1 La forme développée réduite

Définition n°1. Le trinôme

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x , on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$ avec a , b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$
L'expression ax^2+bx+c est appelée : Trinôme

Exemple n°1.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$.
On peut écrire :
$l(x) = 2{,}5(x-3)^2+2$
$l(x) = 2{,}5[x^2-6x+9]+2$
$l(x) = 2{,}5x^2-15x+24{,}5$
Ainsi $l(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=2{,}5$, $b=-15$ et $c=24{,}5$
l est donc une fonction polynomiale du second degré.

Remarque n°1.

On devine, sur cet exemple, que toute fonction du type de celle que nous avons observée au dernier jeu est une fonction polynomiale du second degré.

Exercice n°1.

Démontrez-le en partant de l'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ où $a\neq 0$; α et β sont des nombres réels.

II.2 La forme canonique

Propriété n°1. (et définition)

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x ,

$f(x) = ax^2+bx+c$

(avec a , b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous

sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha=\dfrac{-b}{2a}}$ et $\beta = \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$

Remarque n°2.

C'est bien le « même a ».
Il faut retenir la formule de α mais pas forcément celle de β car $\boxed{\beta = f(\alpha)}$

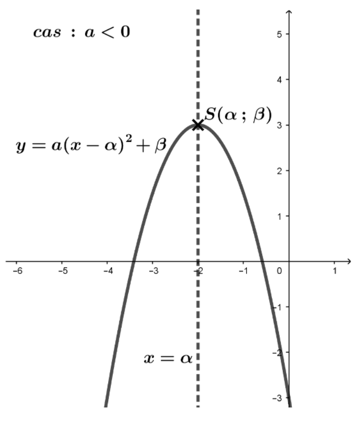
preuve : (de la propriété)

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] && \text{(explications à la remarque n°3)} \\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}\right] && \text{On a réduit au même dénominateur} \\
&= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a} && \text{On a distribué } a \\
&= a(x-\alpha)^2+\beta
\end{aligned}$$

Remarque n°3.

La troisième ligne semble peu naturelle… L'idée est la suivante :
$x^2+\dfrac{b}{a}x$ est forcément le début de la première identité remarquable $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. En effet $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Le problème est qu'il y a un terme « en trop », il faut donc l'enlever : $-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

Remarque n°4. Représentation graphique d'une fonction polynomiale du second degré.



D'après nos petits jeux, nous pouvons dire que :

$\boxed{\text{toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole}}$

$\boxed{\text{tournée vers le bas si } a<0}$, $\boxed{\text{tournée vers le haut si } a>0}$,

$\boxed{\text{de sommet } (\alpha\ ;\ \beta)}$ et admettant pour $\boxed{\text{axe de symétrie } x=\alpha}$

Remarque n°5. Tableau de variations d'une fonction polynomiale du second degré

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↘

$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗

II.3 La forme factorisée

Dans ce paragraphe, f est une fonction polynomiale du second degré définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2+bx+c$. Nous savons que l'on peut écrire $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Ajoutons une notation supplémentaire : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = a\left[(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si $\Delta < 0$ alors la factorisation n'est pas possible dans $\mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x-\alpha)^2$

Si $\Delta > 0$ alors

$$f(x) = a\left(x-\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et comme $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$:

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

ou encore

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Nous obtenons la propriété suivante :

Propriété n°2. Forme factorisée

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x ,

$f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)

et posons $\Delta = b^2-4ac$,

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

α est une *racine double*
x_1 et x_2 sont des *racines*
On peut aussi dire *zéros*

Remarque n°6. Résolution des équations du second degré

La propriété suivante nous donne une méthode de résolution des équations à une inconnue du second degré.
On fait en sorte d'avoir zéro pour le membre de droite puis on réduit le membre de gauche de façon à obtenir un trinôme, on doit alors résoudre :
$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$ax^2+bx+c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de cette équation.

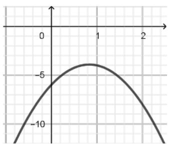
$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet une solution double : $\dfrac{-b}{2a}$	L'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque n°7.

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

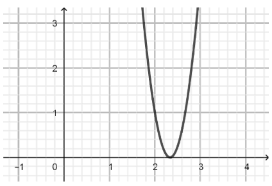
Exemple n°2.

Résolvons les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.



- $-3x^2+5x-6 = 0$

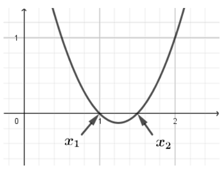
Posons $\Delta = 5^2-4\times(-3)\times(-6) = -47$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet $\boxed{\text{aucune solution réelle}}$.



- $9x^2-42x+49 = 0$

Posons $\Delta = (-42)^2-4\times9\times49 = 0$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une $\boxed{\text{unique solution : } \dfrac{7}{3}}$

($\dfrac{-(-42)}{2\times9} = \dfrac{2\times3\times7}{2\times3\times3}$)



- $2x^2-5x+3 = 0$

Posons $\Delta = (-5)^2-4\times2\times3 = 1$ le discriminant de cette équation.
Comme $\Delta > 0$, cette équation admet $\boxed{\text{deux solutions : } 1 \text{ et } 1{,}5}$

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times2} = 1{,}5$$

Remarque n°8.

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas défini a , b et c , nous n'avons donc pas utilisé ces lettres...

III Le résumé du cours

Fonction polynôme du second degré, Trinôme

On appelle fonction polynomiale du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, on peut écrire $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$

avec a, b et c des réels et $\boxed{a \neq 0}$

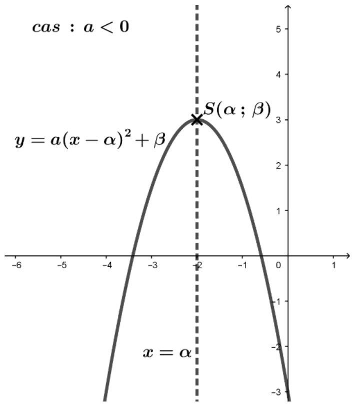
L'expression ax^2+bx+c est appelée : $\boxed{\text{Trinôme}}$

Forme canonique

Si f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$

(avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) alors on peut l'écrire sous sa $\boxed{\text{forme canonique : } f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$

avec $\boxed{\alpha=\dfrac{-b}{2a}}$ et $\beta = \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$ on a aussi $\boxed{\beta = f(\alpha)}$



Cliquer pour Visualiser $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

$\boxed{\text{toute fonction polynomiale du second degré est représentée par une parabole}}$

$\boxed{\text{tournée vers le bas si } a<0}$, $\boxed{\text{tournée vers le haut si } a>0}$,

$\boxed{\text{de sommet } (\alpha\ ;\ \beta)}$ et admettant pour $\boxed{\text{axe de symétrie } x=\alpha}$

Tableau de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

$a < 0$

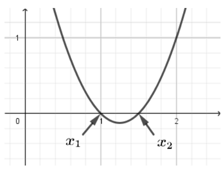
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↘

$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗

Forme factorisée

α est une *racine double*
x_1 et x_2 sont des *racines*
On peut aussi dire *zéros*



Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x, $\boldsymbol{f(x) = ax^2+bx+c}$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\boldsymbol{\Delta = b^2-4ac}$,

- Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$ alors $f(x)$ n'admet **pas de factorisation** dans $\mathbb{R}$
- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$ alors $\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2}$ avec $\boldsymbol{\alpha = \dfrac{-b}{2a}}$
- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$ alors $\boldsymbol{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$ avec $\boldsymbol{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Équation du second degré

$\boldsymbol{ax^2+bx+c = 0}$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$)

Posons $\boldsymbol{\Delta = b^2-4ac}$ le **discriminant** de cette équation.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune solution réelle.	Une solution double : $\dfrac{-b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

IV Le résumé des exercices et activités

Méthode n°1. ***Somme et produit des racines pour factoriser***

Pour un exemple (voir E02 ex4 et M02 ex4)

Soit f est une fonction polynomiale du second degré telle pour tout réel x , $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec a , b et c des réels et $a \neq 0$)
et posons $\Delta = b^2-4ac$
Si $\Delta > 0$ alors les racines x_1 et x_2 vérifient les relations :

$$\boxed{x_1+x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Cas particulier : **Si $a = 1$**
En posant $S = x_1+x_2$ et $P = x_1 x_2$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{x^2+bx+c = x^2-Sx+P}$$

Méthode n°2. ***Tableaux de signes et résolution d'inéquation***

Pour un exemple (voir E03 ex4 et M03 ex4)

Pour résoudre, de manière générale une inéquation du second degré, on s'arrange pour avoir zéro dans l'un des deux membres et on factorise l'autre à l'aide du discriminant. On dresse un tableau des signes grâce à la propriété n°4 et on s'en sert pour trouver l'ensemble des solutions.

Propriété n°3. ***Signe d'une fonction polynomiale du second degré***

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ avec a ; b et c des réels , $a \neq 0$ et possédant deux racines distinctes alors

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retient avec l'une des deux phrases suivantes :
Le trinôme est du signe de moins a entre les racines.
Ou
Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.
(Retenez en une sur les deux et oubliez l'autre!)

Méthode n°3. ***Méthode de Horner***

Pour un exemple (voir E05 et M05)

Pour factoriser des expressions du type Ax^3+Bx^2+Cx+D en $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ où A ; B ; C ; D ; α ; a ; b et c sont tous des réels.

Si on connaît Ax^3+Bx^2+Cx+D et α une racine, on peut trouver ax^2+bx+c en suivant le schéma suivant :

	A	B	C	D
α		$\alpha\, a$	$\alpha\, b$	$\alpha\, c$
	a	$b = B+\alpha\, a$	$c = C+\alpha\, b$	$D+\alpha\, c = 0$

Cliquez-moi

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)$$

Propriété n°4. ***Deux nouvelles identités remarquables***

Pour un exemple (voir E06 et M06)

Pour tous réels x et a ($a \neq 0$) et tout entier naturel n ($n \geqslant 2$) :

$$\boxed{x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})}$$

En particulier :

$$\boxed{x^n-1 = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}$$