LES SUITES NUMÉRIQUES

I Quelques définitions

Définition n°1. ***Suite numérique réelle (deux versions)***

Une suite numérique (réelle) est une collection de nombres réels numérotés à partir de zéro.

Une suite numérique (réelle) u est une application de l'ensemble des nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$).
Autrement dit :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$$

Remarque n°1. ***Notations***

On utilisera la notation classique qui consiste à remplacer $u(n)$ par u_n .
Ainsi :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

On pourra noter : $\boxed{u \text{ ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)_{n\geqslant 0}}$ pour **nommer la suite**.

(On s'autorisera parfois (u_n) mais on évitera le plus possible)

On dira que $\boxed{u_n \text{ est le terme de rang } n}$.

Remarque n°2.

À partir de maintenant, on dira « suite » plutôt que « suite numérique réelle ».

Définition n°2. ***Suite définie de façon explicite***

L'application u peut être **définie de façon explicite :**

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = f(n)}$$

(avec f au moins définie pour tous les entiers naturels)

Exemple n°1. ***Une suite définie de façon explicite***

La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n-3$
Ses premiers termes sont :
$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, …
Ici $f : x \mapsto 2x-3$

Définition n°3.

L'application u peut être **définie par une relation de récurrence :**

$$\boxed{u : \begin{cases} u_0 = k & (k \text{ étant un nombre réel}) \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Exemple n°2. ***Une suite définie par une relation de récurrence***

La suite v définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ses premiers termes sont :
$v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 7$, $v_3 = 15$, …
Ici $f : x \mapsto 2x-3$ (**Ne pas confondre la fonction *f* avec l'application *u* !**)

Remarque n°3.

Une suite peut être définie par un énoncé qui peut prendre plusieurs formes :
- un algorithme (suite d'instructions informatiques ou non)
- un motif géométrique : (triangle de Sierpiński)
- une simple phrase : « la suite w est la suite des nombres impairs positifs ».
- ou encore un ensemble (infini) de points du type $M(n\ ,\ u_n)$.
- ...

II Suites arithmétiques

Définition n°4. Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique**, si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en lui ajoutant toujours le même nombre.
Autrement dit :
▪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

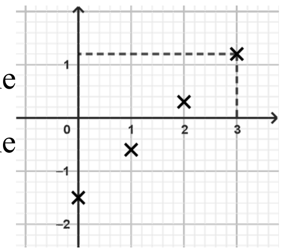
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

▪ Le nombre r est appelé : **raison** de la suite.

Remarque n°4. Lien avec la définition n°3

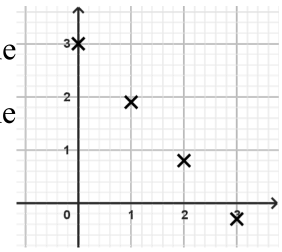
La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x+r$

Exemple n°3.



▪ La suite $u:\begin{cases} u_0 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}9\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $0{,}9$ et de premier terme $u_0 = -1{,}5$.

Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = -1{,}5$, $u_1 = -0{,}6$, $u_2 = 0{,}3$, $u_3 = 1{,}2$



▪ La suite $v:\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 1{,}1\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison $-1{,}1$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}9$, $v_2 = 0{,}8$, $v_3 = -0{,}7$

Remarque n°5.

Le 1er terme est u_0 , le deuxième u_1 …
On restera vigilant face à ce « décalage » …

Propriété n°1. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\times r}$$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire les termes suivants à l'aide la définition par récurrence :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

Puis, en additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + r + u_1 + r + \ldots + u_{n-1} + r$$

qui équivaut à :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + n\times r$$

puis en soustayant $(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})$ à chaque membre

$$u_n = u_0 + n\times r$$

Remarque n°6. Lien avec la définition n°2

Cette fois-ci la suite est définie de façon explicite et on a : $f : x \mapsto u_0 + r\times x$

Propriété n°2. Une généralisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $p \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)\times r}$$

preuve : Laissée en exercice

Propriété n°3. Sommes des premiers entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} .$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+(n-1)+n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ On remarque que $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$

(car : $0+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+0$)

▪ et donc : $\mathbf{2}\times\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)\times n$

(car : $\begin{array}{l} 0+ \ 1 \ + \ 2 \ +\ldots+(n-2)+(n+1)+n \\ +n+(n-1)+(n-2)+\ldots+ \ 2 \ + \ 1 \ +0 \\ = \underbrace{n+ \ n \ + \ n \ +\ldots+ \ n \ + \ n \ +n}_{n+1\ termes} \end{array}$)

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *cqfd*

Propriété n°4. Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$$

(Notation : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n$)

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé,

▪ $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0+k\,r)$ (d'après la propriété n°1)

(car : $\begin{array}{l} \quad u_0 \ + \ u_1 \ + \ldots + \ u_{n-1} \ + \ u_n \\ = u_0+0\times r + u_0+1\times r + \ldots + u_0+(n-1)\times r + u_0+n\times r \end{array}$)

▪ Or :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_0+k\,r) = \sum_{k=0}^{n} u_0+\sum_{k=0}^{n} k\,r = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0}_{(n+1)u_0} + r\times \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

▪ d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= (n+1)u_0 + \frac{r\times n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0+r\,n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_0+r\,n)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} \\ &= (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} \end{aligned}$$

cqfd

III Suites géométriques

Définition n°5. Suite géométrique

Une suite est dite géométrique si, en connaissant un terme de la suite, on peut obtenir le suivant en le multipliant toujours par le même nombre.
Autrement dit :
▪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

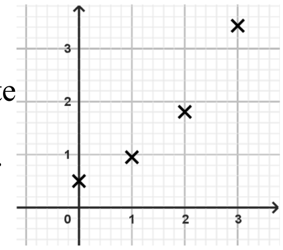
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

▪ Le nombre q est appelé : **raison** de la suite.

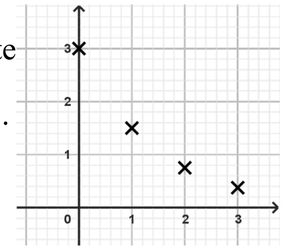
Remarque n°7. Lien avec la définition n°3

La suite u est définie par récurrence (à condition de penser à donner u_0) et on a : $f : x \mapsto x \times q$

Exemple n°4.



▪ La suite $u : \begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}9 \text{ , } \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 1,9 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
Ses quatre premiers termes sont :
$u_0 = 0{,}5$, $u_1 = 0{,}95$, $u_2 = 1{,}805$, $u_3 = 3{,}4295$



▪ La suite $v : \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times 0{,}5 \text{ , } \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite géométrique de raison $0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Ses quatre premiers termes sont :
$v_0 = 3$, $v_1 = 1{,}5$, $v_2 = 0{,}75$, $v_3 = 0{,}375$

Propriété n°5. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et u_0 son premier terme.

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n}$$

preuve :

▪ Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls et l'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ ($0=0$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
▪ Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$ alors on admet que **tous les termes de la suite sont non nuls** et on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_1 \times q \\ &\ \vdots \\ u_n &= u_{n-1} \times q \end{aligned}$$

Puis, en multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \ldots \times u_{n-1} \times q$$

qui équivaut à :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1} \times q^n$$

puis en divisant chaque membre par $(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1})$ (qui est non nul...)

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Propriété n°6. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et u_0 son premier terme.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \text{ , en particulier si } u_0 = 1 \text{ , } \boxed{\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

preuve :

Nous allons commencer par le cas particulier et nous en déduirons le cas général.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on remarque que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0 \times q^k}_{\text{d'après la propriété n°5}} = \underbrace{u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k}_{\text{par factorisation par } u_0}$$

▪ Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ et calculons $S_n - q S_n$.

$$S_n - q S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - q \times \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1})$$

(car :

$$S_n = q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$

$$q \times S_n = q \times (q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} + q^n) = q^{0+1} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1+1} + q^{n+1}$$)

▪ donc, par télescopage (à retenir !):

$$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n-1}$$

(car

$$S_n - q \times S_n = q^0 \underbrace{- q^{0+1} + q^1}_{0} + q^{1+1} + \ldots + q^{n-1} \underbrace{- q^{n-1+1} + q^n}_{0} - q^{n+1}$$

les termes se télescopent au fur et à mesure et il ne reste que le 1er et le dernier)

▪ Or :

$$S_n - q \times S_n = (1-q) S_n \quad \text{(par factorisation)}$$

▪ Donc

$$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$$

Comme $q \neq 1$, $1-q \neq 0$ et on peut diviser chaque membre par $1-q$ pour obtenir :

▪ $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(Nous avons obtenu le cas particulier)

▪ D'après la remarque du premier point (▪)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(Nous avons obtenu le cas général) *cqfd*

Remarque n°8.

Tant que *n* est fixé, on sait donc faire pas mal de choses sur les suites. Mais *n* peut devenir aussi grand que l'on veut : on dit que *n* peut « tendre vers l'infini ». On aimerait alors savoir comment se comportent les termes de la suite vers cet « infini ». C'est ce qui motive ce dernier paragraphe. Conformément au programme nous resterons dans l'intuition et nous utiliserons parfois des « pseudo-définitions » (cela sera signalé).

IV Comportement de suite

Définition n°6. Suite Croissante, suite décroissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

▪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

▪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} > u_n$.

▪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

▪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} < u_n$

Remarque n°9.

$u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n \geqslant 0$

En pratique, c'est surtout la partie de droite de l'équivalence qui sera utilisée.

Exemple n°5.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = n^2+3n+2$ est strictement croissante. En effet :

▪ Soit $n \in \mathbb{N}$.

▪ Étudions la différence $v_{n+1}-v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \underbrace{(n+1)^2+3(n+1)+2}_{v_{n+1}}-\underbrace{(n^2+3n+2)}_{u_n} \\ &= n^2+2n+1+3n+3n+2-n^2-3n-2 \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

▪ Or n est un entier naturel donc $n \geqslant 0$ d'où $2n \geqslant 0$ et enfin $2n+1 \geqslant 1 > 0$

▪ Ainsi, $v_{n+1}-v_n > 0$ qui équivaut à $v_{n+1} > v_n$.

▪ En conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Définition n°7. Convergence, divergence, limite (pseudo-définition)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et l un nombre réel.

On dira que :

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si les termes de la suite tendent vers l ,

On dira alors que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut l et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite tendent vers $+\infty$,

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si les termes de la suite tendent vers $-\infty$,

▪ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si les termes de la suite ne tendent vers rien.

Remarque n°10.

L'arnaque vient du fait qu'on a pas défini ce que « tendre » veut dire…

Donnons tout même une précision :

▪ Dire qu'une suite tend vers l signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi proches que l'on veut de l .

▪ Dire qu'une suite tend vers $+\infty$ signifie qu'à partir d'un certain rang **tous** les termes de suite seront aussi grands que l'on veut.

Exemple n°6.

- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{5}$ converge vers zéro. ($l=0$)
- La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+1} = w_n+5$ diverge vers $+\infty$.
- La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ t_{n+1} = t_n-5$ diverge vers $-\infty$.
- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = a_n+(-1)^n$ diverge.