LA DÉRIVATION E03C

EXERCICE N°3 *fonction affine et fonction racine carrée*

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x}\end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= \sqrt{3x+4}\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie il faut et il suffit que $3x+4\geqslant 0$.
Pour que cette fonction soit dérivable,
il faut et il suffit que $3x+4>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $\left[\dfrac{-4}{3}\ ;+\infty\right[$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\left]\dfrac{-4}{3}\ ;+\infty\right[$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x})\\ &= 3\times\sqrt{x}+4\\ &= 3\sqrt{x}+4\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie, il faut et il suffit que $x\geqslant 0$,
et pour qu'elle soit dérivable, il faut et il suffit que $x>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $[0\ ;+\infty[$.
Et que le domaine de dérivabilité de $f\circ g$ est $]0\ ;+\infty[$.

On notera encore l'importance de l'ordre dans lequel on compose…

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f\circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main…

Soit h tel que $x+h\in\left]\dfrac{-4}{3}\ ;+\infty\right[$,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x) &= \frac{\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}}{h}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}\right)\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3(x+h)+4}\right)^2-\left(\sqrt{3x+4}\right)^2}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\ &= \frac{3(x+h)+4-(3x+4)}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\ &= \frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\\ &= \frac{3}{\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}}\end{aligned}$$

> Oh mais ça ressemble beaucoup à l'exercice n°1 de la fiche E02 !

Or : cette dernière expression tend vers $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ quand h tend vers zéro.

Pour les plus observateurs : il faudrait être sûr que $x+h$ continue d'appartenir à $\left]\dfrac{-4}{3}\ ;+\infty\right[$ quand h tend vers zéro. Rassurez-vous, c'est bien le cas.

On en déduit que $(f\circ g)'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

▪ Pour $(g \circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g \circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 3$$

Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.

$$\begin{aligned}g'(x) \times f'(g(x)) &= 3 \times f'(g(x)) \\ &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \\ &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) \times g'(f(x)) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times g'(f(x)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3 \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à 3

4) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la dernière ligne du tableau semble simplifier beaucoup les choses !