

# ***LA FONCTION EXPONENTIELLE***

## **I Introduction**

Nous allons tenter de résoudre une équation fonctionnelle, c'est à dire que l'on cherche toutes les fonctions vérifiant une condition donnée. On cherche les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient la propriété suivante :

*La condition* → 
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

En français, on cherche les fonctions qui sont égales à leur dérivée et pour lesquelles l'image de 0 vaut 1.

### **Propriété n°1.**

***Si une telle fonction existe alors elle ne s'annule pas***

Si  $f$  est une fonction, définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

***preuve :***

- Soit  $f$  une telle fonction. Construisons la fonction  $h$  définie également sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) \times f(-x)$

- Montrons que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$x \mapsto -x$  et  $f$  sont dérивables sur  $\mathbb{R}$  dont leur composée  $g: x \mapsto f(-x)$  l'est aussi.

$h$  étant le produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrons que  $h'$  est nulle :

On peut écrire que  $h = f \times g$  et donc  $h' = f' \times g + f \times g'$ .

C'est à dire que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \\ h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= f'(x)f(x) - f(x)f'(x) && (\text{car } g'(x) = -f'(-x)) \\ &= f(x)f(x) - f(x)f(x) && (\text{car } f' = f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Montrons que  $h$  est constante égale à 1.

La dérivée de  $h$  est nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  donc  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$

- Montrons que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

S'il existait  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = 0$ , alors on aurait  $h(x) = 0$  ce qui est impossible.

### **Propriété n°2.**

***Si une telle fonction existe alors elle est unique***

Si  $f$  est une fonction, définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ alors } f \text{ est unique.}$$

***preuve :***

- Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions vérifiant la condition. Nous allons montrer qu'alors  $f = g$ .

- Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

( $h$  est bien définie car  $g$  ne s'annule pas d'après la propriété n°1)

- Montrons que  $h'$  est nulle :

$f$  et  $g$  étant des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  qui ne s'annulent pas, leur quotient  $h = \frac{f}{g}$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}$  et,

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ vérifient la condition})$$

$$= 0$$

- Montrons que  $h$  est constante, égale à 1.

La dérivée de  $h$  est nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  donc  $h$  est constante.

$$\text{De plus } h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 1$ .

- Montrons que  $f = g$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$$

$$\text{Or, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = g(x)$$

**Remarque n°1.** *Une telle fonction existe bien et nous allons l'étudier.*

La preuve est admise en première mais nous en verrons une idée...

## II La fonction Exponentielle et quelques-unes de ses propriétés

**Définition n°1.**

On appelle fonction Exponentielle et on note  $\exp$  l'unique fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}}$$

**Propriété n°3.**

*La fonction  $\exp$  ne n'annule pas*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0}$$

*preuve :*

Faite en introduction

**Propriété n°4.**

*L'exponentielle de la somme égale le produit des exponentielles*

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels, alors :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

*preuve :*

Soit  $b \in \mathbb{R}$ , et  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) \end{cases}$

- Montrons que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Les fonctions  $\exp$  et  $x \mapsto x+b$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc leur composée aussi.  $f$  est ainsi dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrons que  $f' = f$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = f(x)$$

- Montrons que  $f(0) = 1$

$$f(0) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$$

- Utilisons l'unicité de la fonction exponentielle pour montrer que  $f = \exp$ .

La fonction  $f$  vérifie la condition  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c'est donc la fonction  $\exp$ .

Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = \exp(x)$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$$

cqfd

**Propriété n°5.**

*l'inverse de l'exponentielle égale l'exponentielle de l'opposé*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)}$$

*preuve :*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

puis en divisant chaque membre par le nombre  $\exp(x)$  qui est non nul :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

cqfd

**Propriété n°6.**

*La fonction  $\exp$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0}$$

*preuve :*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

**Propriété n°7.**

*La fonction  $\exp$  et ses puissances  $n^{\text{ième}}$*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{(\exp(a))^n = \exp(na)}$$

*preuve :*

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(na).$$

- On a :

$$u_0 = \exp(0 \times a) = 1$$

- Et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = u_n \times \exp(a)$$

- On reconnaît une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison  $q = \exp(a)$ .

- Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (\exp(a))^n$$

En identifiant terme à terme, on obtient le résultat.

cqfd.

### III Le comportement de la fonction exponentielle.

**Propriété n°8.** *La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$*

La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
autrement dit :

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  :  $a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)$

*preuve :*

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) > 0$  (d'après la propriété n°6)

La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  donc la fonction exponentielle est strictement croissante  $\mathbb{R}$ .

**Remarque n°2.**

La fonction exponentielle conserve donc les inégalités, ce qui signifie que l'on peut remplacer «  $<$  » par «  $>$  »,  $\leq$  ou  $\geq$  ».  
Cela sera utile pour les inéquations.

**Remarque n°3.**

La propriété n°8, nous permet d'affirmer que si un nombre admet un antécédent par la fonction exp alors cet antécédent est unique.

**Propriété n°9.**

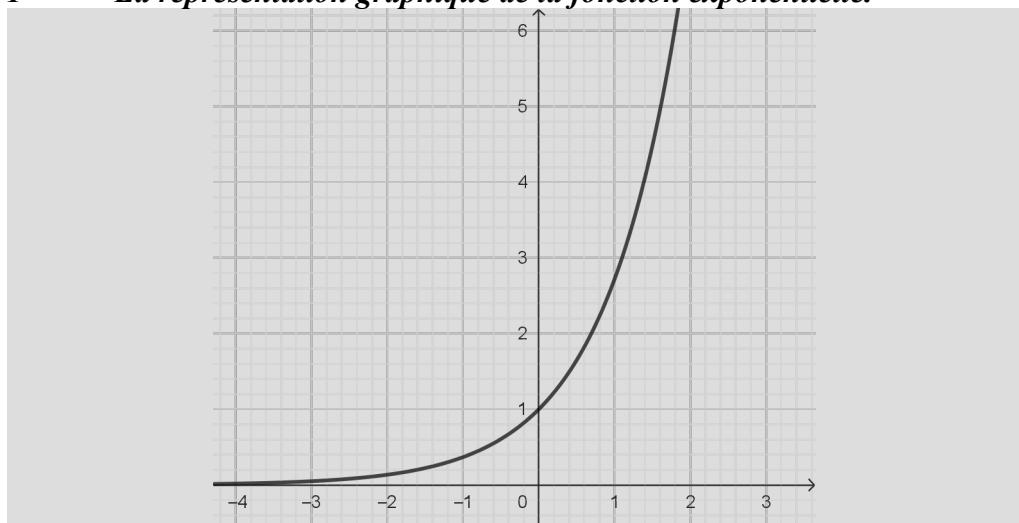
*Corollaire de la propriété n°8*

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  :

$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$

**Connaissance n°1**

*La représentation graphique de la fonction exponentielle.*



### IV Une nouvelle notation pour la fonction exponentielle

**Remarque n°4.**

Les propriétés n°4, n°5 et n°8 nous rappelle les propriétés sur les puissances.

Par exemple,

$7^{2+3} = 7^2 \times 7^3$  ressemble beaucoup à  $\exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$

Comme  $7^1 = 7$ , on est tenté de regarder  $\exp(1)$ . Ce nombre n'est malheureusement pas entier, ce n'est même pas une fraction (vous le démontrerez un jour) mais il est aussi important que le nombre  $\pi$ . Pour cela, on va lui donner un nom.

**Définition n°2.**

On note  $e$  le nombre  $\exp(1)$

On a :  $e \approx 2,71828$

Pour tout réel  $x$ , on pose  $e^x = \exp(x)$

**Remarque n°5. Résumé des propriétés avec la nouvelle notation**

Soit  $a$  et  $b$  des réels et  $n$  un entier naturel.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b , \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} , \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \text{ et } e^{na} = (e^a)^n$$

$$a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b) \quad \text{et aussi avec } >, \leqslant \text{ ou } \geqslant$$

$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

## V Le résumé du cours

La définition de  $\exp$

$\exp$  ne s'annule pas

$\exp$  est strictement positive

$\exp$  est strictement croissante

Équations et Inéquations

Représentation graphique de  $\exp$

Nouvelle notation de  $\exp$

Propriétés algébriques de  $\exp$

Équations et Inéquations

On appelle fonction Exponentielle et on note  $\exp$  l'unique fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$$

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels, alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$(\exp(a))^n = \exp(na)$$

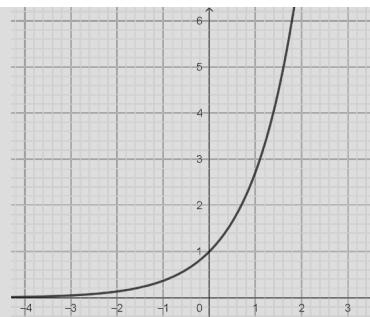
La fonction  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  :

$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$a < b \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)$$

et aussi avec  $>$ ,  $\leq$  ou  $\geq$



• On note  $e$  le nombre  $\exp(1)$

• On a :  $e \approx 2,71828$

• Pour tout réel  $x$ , on pose  $e^x = \exp(x)$

Soit  $a$  et  $b$  des réels et  $n$  un entier naturel.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \text{ et } e^{na} = (e^a)^n$$

$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b \quad \text{et aussi avec } >, \leq \text{ ou } \geq$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$