EXERCICE N°4 fonction affine et fonction valeur absolue

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+4\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+4)\\ &= |3x+4| \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $3x+4\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g(|x|)\\ &= 3\times|x|+4\\ &= 3|x|+4 \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $g\circ f$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}^*$.

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f\circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main…

$f\circ g(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 & \text{, si } 3x+4 \geqslant 0\\ -(3x+4) & \text{, si } 3x+4 < 0\end{cases}$ que l'on va « simplifier ».

$$f\circ g(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 & \text{, si } x \geqslant -\dfrac{4}{3}\\ -(3x+4) & \text{, si } x < -\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

On en déduit que :

$$(f\circ g)'(x) = \begin{cases} 3 & \text{, si } x > -\dfrac{4}{3}\\ -3 & \text{, si } x < -\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$f\circ g$ n'est pas dérivable en $\dfrac{-4}{3}$: il faudrait que 3 égale -3…

▪ Pour $(g\circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Donc :

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases} 3\times 1+0 & \text{, si } x > 0\\ 3\times(-1)+0 & \text{, si } x < 0\end{cases}$$

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases} 3 & \text{, si } x > 0\\ -3 & \text{, si } x < 0\end{cases}$$

$g\circ f$ n'est pas dérivable en 0 : il faudrait que 3 égale -3…