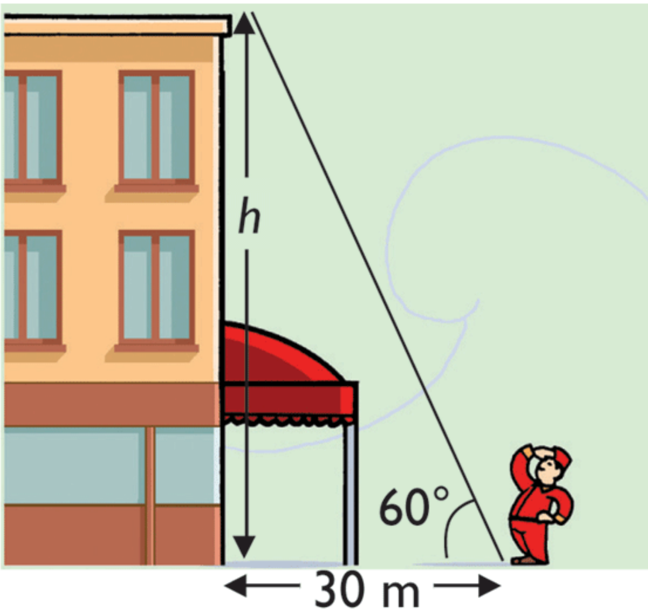
TRIGONOMETRÍA

RESOLUCIÓN de TRIÁNGULOS



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

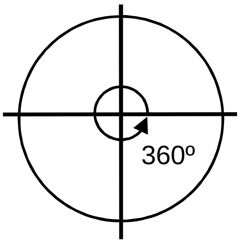
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

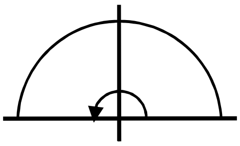
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

REPASO de TRIGONOMETRÍA[1] ELEMENTAL

I.1) Grados y radianes:

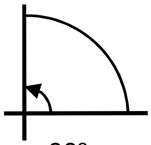
Sistema sexagesimal: Es el sistema que se hemos utilizado hasta ahora. En él, por definición, **una vuelta completa son 360º**. Por tanto:





180º

ÁNGULO LLANO



90º

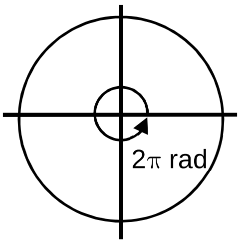
ÁNGULO RECTO

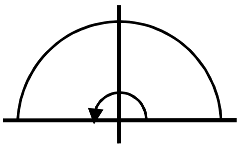
etc. etc. etc.

Este sistema ya lo utilizaban los babilonios hacia el 3 000 a.C. ¿Por qué eligieron 360º? Por practicidad, dado que es divisible por una gran cantidad de números: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 y 180.

Nótese que las unidades de este sistema, los grados sexagesimales, se indican con el símbolo º, y que **éste no debe omitirse nunca**.

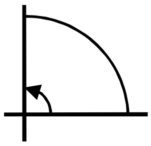
Radianes: Es el sistema que más se utiliza en Física (movimiento circular, etc.), pero también se emplea en Matemáticas, ya que, por ejemplo, como veremos en el tema 6, los radianes se emplean en las funciones trigonométricas. Por definición, **una vuelta completa son π rad**. Por tanto:





π rad

ÁNGULO LLANO

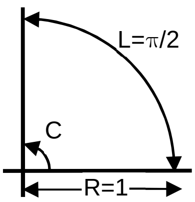


$\pi/2$ rad

ÁNGULO RECTO

etc. etc. etc.

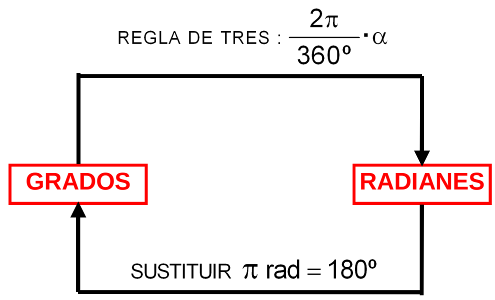
Este sistema se empezó a utilizar en Física en época relativamente reciente (siglo XVIII). ¿Por qué elegir 2π rad? De nuevo por comodidad. En efecto, supongamos una circunferencia de radio 1. Como la longitud o perímetro de la circunferencia viene dada por $L=2\pi R$, en este caso la longitud sería 2π, que es precisamente el valor del ángulo en radianes. Si fuera media circunferencia, la longitud del arco correspondiente sería π rad, que de nuevo es el valor del ángulo en radianes. Y así sucesivamente:



[1] La palabra *Trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metron*, medida) la introdujo el matemático y astrónomo germano *Bartolomäus Pitiscus* (1561-1613) en 1595. También construyó tablas trigonométricas detalladas.

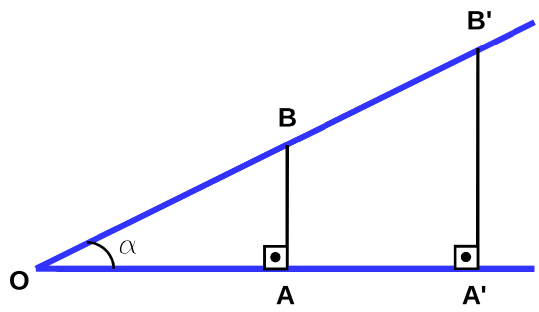
Es decir, **«En una circunferencia de radio unidad, la medida de un ángulo en radianes coincide con la longitud del arco correspondiente»**. Una vez nos acostumbremos a ellos, los radianes resultan una forma muy útil y cómoda de medir ángulos.

Resumen:



Ejercicios final tema: 1

I.2) Definición de las razones trigonométricas:



Considerar la figura adjunta, formada por dos triángulos rectángulos en posición de Tales. Se define el «**seno de un ángulo** como el cociente o razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa»:

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\ldots \qquad (1)$$

Nótese que sen α se puede expresar de infinitas formas equivalentes, debido al teorema de Tales.

Análogamente, se define el «**coseno de un ángulo** como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa»:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}=\ldots \qquad (2)$$

Finalmente, se define la «**tangente de un ángulo** como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo»:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}=\ldots=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad (3)$$

Nótese que de (1) y (2) se infiere fácilmente que la tangente es también el cociente entre seno y coseno. Esta es precisamente la primera identidad trigonométrica de una larga lista que veremos a lo largo del tema, y cuyo resumen podemos ver al final del libro. Estas tres razones así definidas, llamadas **razones trigonométricas directas**, se utilizan, como veremos en breve, para resolver triángulos.

Observaciones: 1) «Las razones trigonométricas dependen del ángulo pero no del triángulo».

Ello es debido, como ya se ha dicho, al teorema de Tales. Y esta es precisamente la gran aplicación de la Trigonometría al cálculo de distancias o longitudes inaccesibles o muy lejanas. Por ejemplo, en Astronomía permite, mediante triangulación, obtener distancias entre astros.

2) Las razones trigonométricas carecen de unidades, no así los ángulos.

Ello es obvio, ya que una razón es un cociente de medidas de la misma unidad.

3) Cada razón directa tiene su correspondiente **razón trigonométrica inversa**:

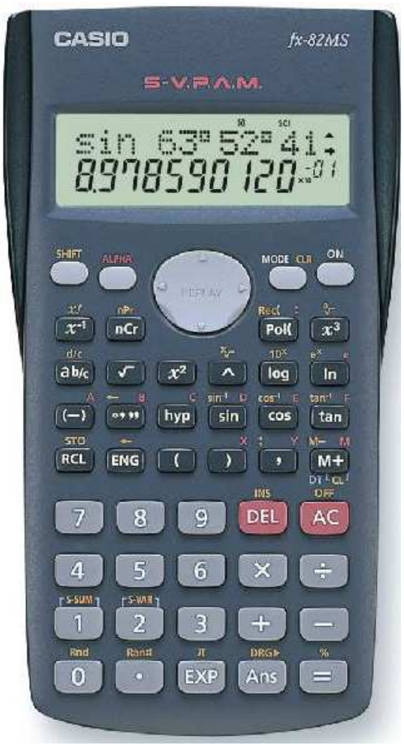
COSECANTE: $$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad (4)$$

SECANTE: $$\boxed{\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}} \qquad (5)$$

COTANGENTE: $$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad (6)$$

Estas tres razones inversas no se suelen utilizar para resolver triángulos, sino en los cálculos algebraicos con fórmulas trigonométricas, como veremos profusamente a lo largo del tema, y en el próximo curso.

I.3) Uso de la calculadora en Trigonometría. Razones recíprocas:



Vamos a explicarlo para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes[2]. Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga.

En primer lugar, tenemos que cerciorarnos de si la calculadora está trabajando en grados sexagesimales (en la parte superior de la pantalla aparecerá DEG, i.e. degrees) o en radianes (aparecerá RAD). Para ello hay que pulsar la tecla $\boxed{\text{MODE}}$ varias veces y elegir 1=DEG o 2=RAD.

Ejemplo 1: ¿sen 23º? ⇨ $\boxed{\text{sin}}$ 23 $\boxed{=}$ ⇨ 0,3907311285...

Para introducir el ángulo en grados, minutos y segundos hay que utilizar la tecla $\boxed{{}^{\text{o}}\ {}'\ {}''}$:

Ejemplo 2: ¿tg 103º 12' 25''? ⇨ $\boxed{\text{tan}}$ 103 $\boxed{{}^{\text{o}}\ {}'\ {}''}$
12 $\boxed{{}^{\text{o}}\ {}'\ {}''}$
25 $\boxed{{}^{\text{o}}\ {}'\ {}''}$ $\boxed{=}$ ⇨ –4,261198564...

Para obtener cualquiera de las tres razones inversas hay que invertir la razón correspondiente directa:

[2] Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf

Ejemplo 3: ¿sec 35º 30'? ⇨ 1 $\boxed{:}$ $\boxed{\text{cos}}$ 35 $\boxed{{}^{\circ}\,'\,''}$ 30 $\boxed{{}^{\circ}\,'\,''}$ $\boxed{=}$ ⇨ 1,228326911...

Por otra parte está el problema inverso, es decir, si por ejemplo sabemos que $\text{sen}\,\alpha=0{,}85$, de qué ángulo α procede? Es decir, ¿cuál es el ángulo α tal que $\text{sen}\,\alpha=0{,}85$? Esto nos lleva a definir las **razones trigonométricas recíprocas**. Cada una de las seis razones anteriormente definidas (las tres directas y las tres inversas) tienen su correspondiente razón recíproca. En realidad sólo vamos a manejar las razones recíprocas de seno, coseno y tangente:

Definición: Si $\text{sen}\,\alpha=\text{x}$, se dice que α es el **arcoseno** de x, es decir, el ángulo cuyo seno es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\text{sen}\,\alpha=\text{x}\;\Rightarrow\;\alpha=\text{arc}\,\text{sen}\,\text{x}$$

arc = ángulo cuyo

Definición: Si $\cos\alpha=\text{x}$, se dice que α es el **arcocoseno** de x, es decir, el ángulo cuyo coseno es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\cos\alpha=\text{x}\;\Rightarrow\;\alpha=\text{arc}\cos\text{x}$$

arc = ángulo cuyo

Definición: Si $\text{tg}\,\alpha=\text{x}$, se dice que α la **arcotangente** de x, es decir, el ángulo cuya tangente es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\text{tg}\,\alpha=\text{x}\;\Rightarrow\;\alpha=\text{arc}\,\text{tg}\,\text{x}$$

arc = ángulo cuyo

Hay que tener siempre en cuenta que un arc sen, arc cos o arc tg es un ángulo, y por tanto hay que indicar siempre sus unidades.

Ejemplo 4: $\text{sen}\,\alpha=0{,}85\;\Rightarrow\;¿\alpha?$

$\text{sen}\,\alpha=0{,}85\;\Rightarrow\;\alpha=\text{arc}\,\text{sen}\,0{,}85$ ¿Cómo se obtiene una razón recíproca con la calculadora? Hay que usar la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0,85 $\boxed{=}$ ⇨ 58,21166938...º

Vemos que la calculadora da el ángulo en grados y décimas de grado, por lo que hay que pasarlo a grados, minutos y segundos con la tecla $\boxed{{}^{\circ}\,'\,''}$:

58,21166938...º $\boxed{{}^{\circ}\,'\,''}$ ⇨ 58º 12' 42''

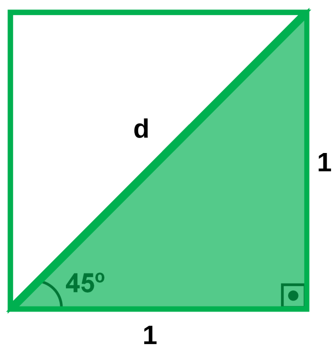
Por lo tanto, $\alpha=\text{arc}\,\text{sen}\,0{,}85\cong\boxed{58^{\circ}\,12'\,42''}$

(NOTA: Puede comprobarse que, efectivamente, $\text{sen}\,58^{\circ}\,12'\,42''=0{,}85$)

Ejercicios final tema: 2

I.4) Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º:

Razones de 45º:



Considerar un cuadrado que, para simplificar los cálculos, tendrá lado 1 (ver figura). Si trazamos una diagonal obtenemos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el que vamos a obtener las razones de 45º. Para ello, previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la diagonal d:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

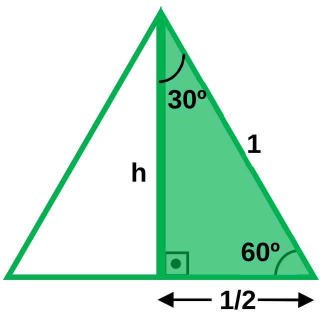
$$\boxed{\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad (7)$$

$$\boxed{\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen}\,45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1} \qquad (9)$$

NOTA: Si hubiéramos tomado otro lado del cuadrado distinto de 1 habríamos obtenido los mismos resultados, obviamente.

Razones de 60º:



Considerar un triángulo equilátero, de nuevo de lado 1 para simplificar los cálculos. Trazamos la altura h correspondiente a la base, con lo cual obtenemos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el que aparece un ángulo de 30º y otro de 60º. Para obtener sus razones previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la altura h:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

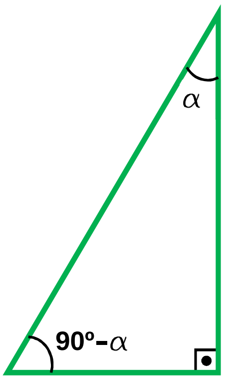
$$\boxed{\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}} \qquad (7)\text{ y }(8)$$

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad (9)\text{ y }(10)$$

$$\boxed{\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{sen}\,30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}} \qquad \boxed{\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{sen}\,60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}} \qquad (11)\text{ y }(12)$$

Todo esto se puede resumir en la siguiente tabla:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

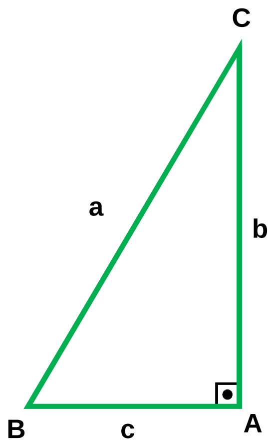


Observamos que $\operatorname{sen} 30º = \cos 60º$ y que $\cos 30º = \operatorname{sen} 60º$. Ello es debido a que ambos ángulos, 30º y 60º, son complementarios[3] (es decir, suman 90º). Este resultado vamos a utilizarlo muy a menudo a lo largo del tema:

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (i.e. suman 90º). «**Si dos ángulos son complementarios, entonces el seno de uno es el coseno del otro, y viceversa**»:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha = \cos(90º-\alpha)\\ \cos\alpha = \operatorname{sen}(90º-\alpha)\end{array}} \qquad (13)$$

I.5) Relaciones entre las razones trigonométricas (Identidades trigonométricas):



Fórmula fundamental de la Trigonometría: $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ (14)

Demostración: Considerar el triángulo rectángulo de la figura:

$$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} \underset{\text{Th. de Pitágoras}}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

De la relación fundamental de la Trigonometría se derivan otras dos fórmulas muy parecidas entre sí:

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sec^2\alpha \qquad \boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad (15)\text{ y }(16)$$

Demostración: Vamos a demostrar (15) (la otra fórmula se demuestra análogamente). Para ello, partimos de la relación fundamental, y dividimos ambos miembros por $\cos^2\alpha$:

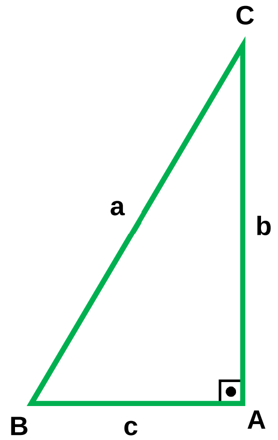
$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

[3] Nótese que ello también ocurre con 45º y su complementario, 45º (él mismo).

NOTA: En la práctica apenas utilizaremos (16).

¿Cuál es la **utilidad** de estas identidades trigonométricas, que relacionan las distintas razones? Permiten, dada una razón trigonométrica, hallar las restantes.

I.6) Resolución de triángulos rectángulos:



Considerar el triángulo rectángulo de la figura[4]. Todo triángulo tiene 6 elementos: 3 ángulos y 3 lados. Siempre nos van a dar 3 de esos elementos (en el caso de un triángulo rectángulo hay un dato implícito, $\hat{A}=90^{\circ}$), y **resolver un triángulo consiste en obtener los restantes 3 elementos**, mediante las siguientes herramientas matemáticas:

1º) $\hat{B}+\hat{C}=90^{\circ}$, es decir, dado uno de los dos ángulos agudos, el otro es su complementario.

2º) $a^2=b^2+c^2$, es decir, el teorema de Pitágoras, que nos permite, conociendo dos lados, hallar el tercero. De todas formas, por cuestiones didácticas vamos a procurar no utilizarlo en la medida de lo posible, ya que es más rápido y práctico lo siguiente:

3º) Las relaciones trigonométricas anteriormente definidas. En la práctica utilizaremos sólo las tres directas:

$$\operatorname{sen}B=\frac{b}{a}=\cos C \qquad \cos B=\frac{c}{a}=\operatorname{sen}C \qquad \operatorname{tg}B=\frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}C=\frac{c}{b}$$

Ejercicios final tema: 3 y 4

Reseña histórica: Los griegos de la época alejandrina (a partir del siglo IV a.C.) desarrollaron la Trigonometría esférica -la cual incluye ideas básicas de la Trigonometría plana- debido, sobre todo, a la idea de cuantificar la astronomía: predecir las posiciones de los cuerpos celestes, medir el tiempo, el calendario, la navegación y la geografía.

El primer gran astrónomo alejandrino fue **Aristarco** (ca. 310-230 a.C.), que utilizó la geometría para medir distancias y tamaños relativos entre cuerpos celestes. **Hiparco de Nicea** (ca. 190−120 a.C.) fue el primero en construir tablas trigonométricas, aplicándolas al estudio de la bóveda celeste. Se le considera el fundador de la Trigonometría.

Ptolomeo de Alejandría (ca. 100−170), responsable del modelo de sistema solar geocéntrico que estaría vigente durante muchos siglos, escribe hacia el año 150 el *Almagesto*, el libro más importante de Trigonometría de la antigüedad. Continuador de la obra de Hiparco y Menelao, en él se mezclan Trigonometría y Astronomía. Recoge, entre otras, las fórmulas del seno de la suma y de la resta de dos ángulos, así como la del seno del ángulo mitad. Ello le permite construir unas completas tablas trigonométricas. Este libro pone la Trigonometría en su forma definitiva, que perdurará alrededor de mil años.

Durante toda la Edad Media no se produce ningún avance sustancial en este campo. Como curiosidad, Roberto de Chester (s. XII) es el responsable de la actual palabra “seno”, al traducir incorrectamente del árabe un cierto término, que él entendió como “sinus” (bahía o ensenada, en latín).

Hasta 1450 la Trigonometría sobre todo era esférica, pero a partir de esa fecha empezó a tener importancia la Trigonometría plana, de la mano de los alemanes. Johann Müller (1436-1476), más conocido como “**Regiomontano**”, expone los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, resuelve problemas de triángulos y aborda la Trigonometría esférica. Construyó tablas de senos y tangentes bastante exhaustivas. Tradujo directamente del griego.

El alemán **Georg Joachim Rheticus** (1514-1576), alumno de Copérnico, combinó los avances anteriores para construir detalladas tablas de funciones trigonométricas. A él se debe la noción actual de seno, y la utilización de las seis funciones trigonométricas. Posteriormente, figuras como el alemán Johannes Werner (1560-1622), el francés François Vieta (1540-1603) et al. reunirán y sistematizarán los conocimientos anteriores.

[4] El criterio que se suele seguir es llamar **A** al ángulo recto, **B** y **C** a los dos ángulos agudos, y los lados con la letra minúscula del ángulo opuesto, es decir, **a** es la hipotenusa), y **b** y **c** los catetos.

I) AMPLIACIÓN de las RAZONES TRIGONOMÉTRICAS a CUALQUIER CUADRANTE

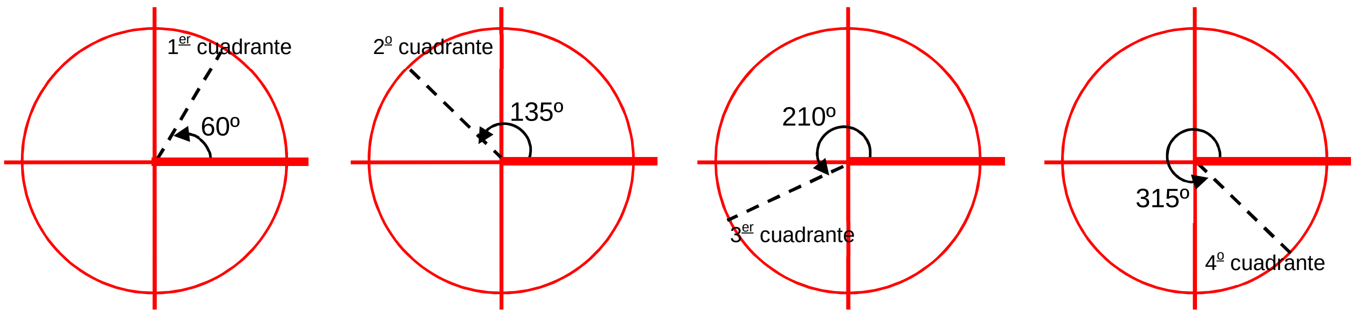
II.1) Ángulos positivos, negativos y >360º:

Puesto que hasta ahora nos ceñíamos a un triángulo, es obvio que cualquier ángulo no podía sobrepasar 180º. Sin embargo, como veremos a continuación, existen ángulos mayores, e incluso negativos. Para ello recurriremos a los ejes cartesianos, que nos dividen el plano en cuatro cuadrantes. Por definición:

1º) «**Los ángulos comienzan siempre en la parte positiva del eje x**».

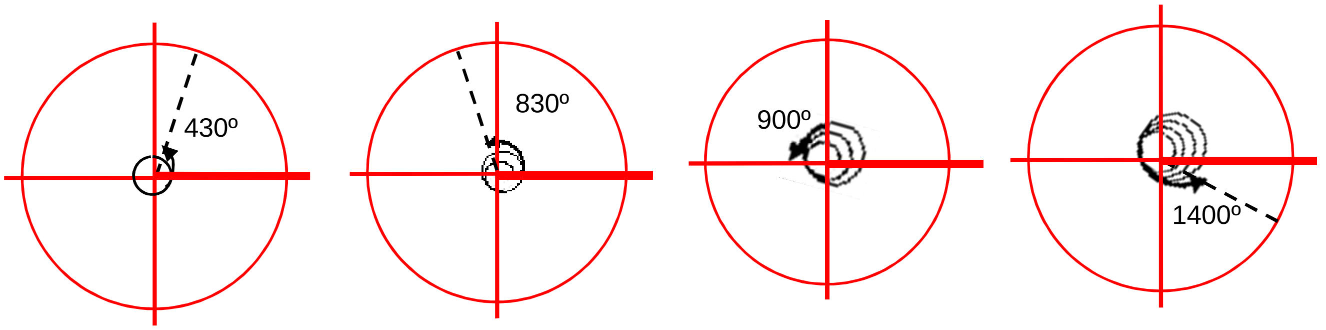
2º) Por convenio: «**un ángulo se considera positivo si va en sentido contrario a las agujas del reloj**».
«**un ángulo se considera negativo si va en el sentido de las agujas del reloj**».

Ejemplo 5: **ángulos positivos** en los cuatro cuadrantes:



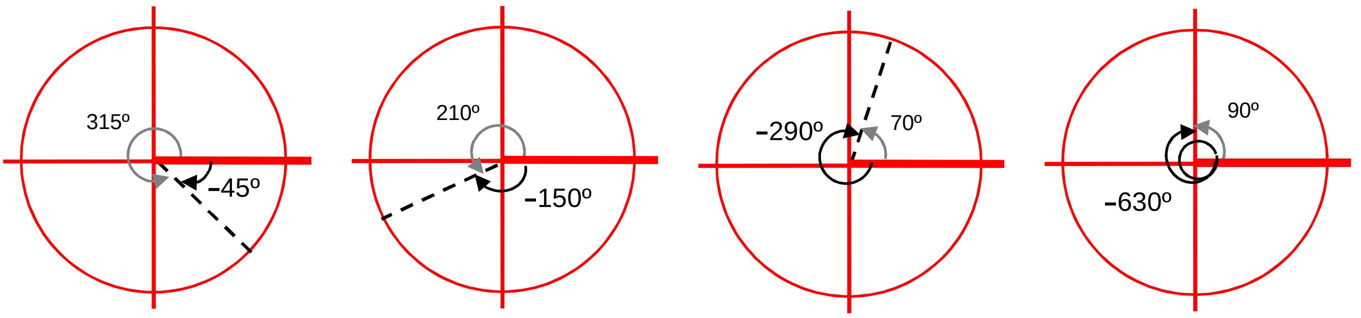
Nótese que el sentido del ángulo (i.e. el signo) lo indica la flecha.

Ejemplo 6: Como una vuelta completa son 360º, es obvio cómo podemos definir los **ángulos >360º**:



430º = 360º + 70º   830º = 2·360º + 110º   900º = 2·360º + 180º   1400º = 3·360º + 320º

Ejemplo 7: **ángulos negativos**:



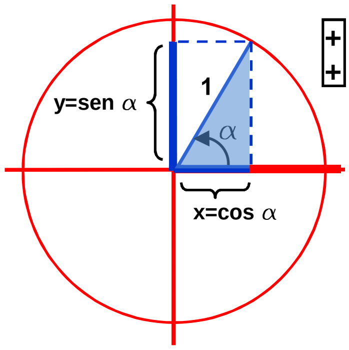
315º = −45º   210º = −150º   70º = −290º   90º = −360º −270º

Ejercicios final tema: 5

II.2) Definición de seno y coseno en la circunferencia goniométrica:

Vamos a ampliar la definición de seno y coseno a los cuatro cuadrantes. Para ello utilizaremos la llamada circunferencia goniométrica, que es una circunferencia de radio 1. Esto último es para facilitar los cálculos. Veremos que hay senos y cosenos negativos:

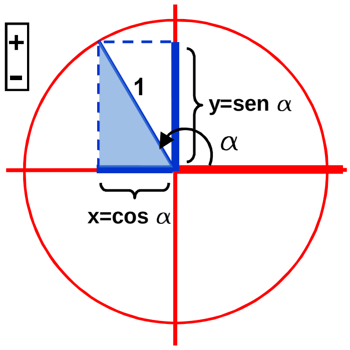
1$^{\underline{er}}$ cuadrante:



En el triángulo sombreado el cos α sería el cociente entre cateto adyacente e hipotenusa, pero como esta es 1, el **cos α resulta ser** el segmento horizontal resaltado, es decir, **la abscisa**. Por tanto, **cos α>0**.

Por lo que respecta al **sen α**, por la misma razón **resulta ser** el segmento vertical resaltado, es decir, **la ordenada**. Por tanto, **sen α>0**.

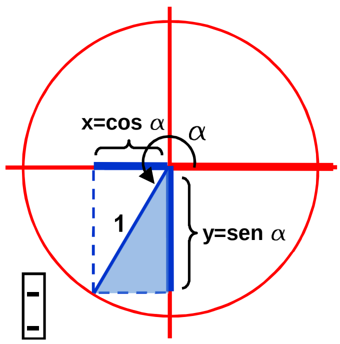
2$^{\underline{o}}$ cuadrante:



Ahora el cos α de nuevo es la abscisa, i.e. el segmento horizontal resaltado que es negativo. Por tanto, **cos α<0**.

sen α es siempre la ordenada, i.e. el segmento vertical resaltado, que es positivo. Por tanto, **sen α>0**.

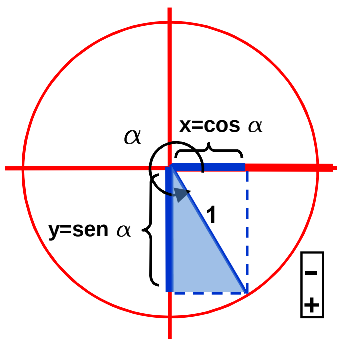
3$^{\underline{er}}$ cuadrante:



cos α es siempre la abscisa, i.e. el segmento horizontal resaltado $\Rightarrow$ **cos α<0**.

sen α es siempre la ordenada, i.e. el segmento vertical resaltado $\Rightarrow$ **sen α<0**.

4$^{\underline{o}}$ cuadrante:



cos α = abscisa $\Rightarrow$ **cos α>0**.

sen α = ordenada $\Rightarrow$ **sen α<0**.

Nótese que, obviamente, sen α y coseno α están acotados: $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

Ejercicios final tema: 6

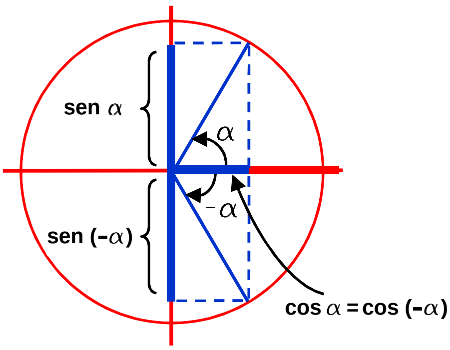
II.3) Gráficas de las funciones seno y coseno:

Es interesante realizar el **ejercicio 7 del final del tema**, que consiste en, mediante tabla de valores apropiada, dibujar las gráficas de $f(x)=\text{sen}\,x$, $f(x)=\cos x$ y $f(x)=\text{tg}\,x$. Para ello hay que tener en cuenta que, habitualmente, se considera x en radianes. Dichas gráficas pueden verse en el anexo final del libro.

Ejercicios final tema: 8 a 18

II) RELACIONES ENTRE las RAZONES de CIERTOS ÁNGULOS

III.1) Ángulos opuestos (α y $-\alpha$):



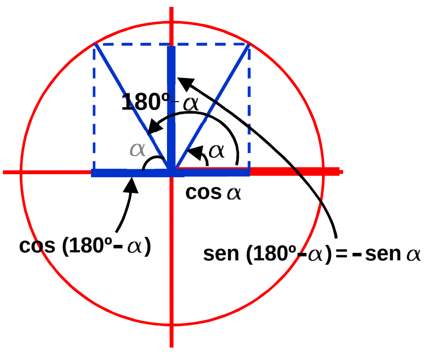
Consideremos un ángulo α en la circunferencia goniométrica, que por simplicidad tomaremos en el 1er cuadrante (ver figura). Su opuesto, $-\alpha$, recordemos que, por ser negativo, será en el sentido de las agujas del reloj (en el dibujo, el ángulo situado en el 4º cuadrante).

Vemos que $\cos\alpha$ y $\cos(-\alpha)$ comparten el mismo segmento horizontal. Por lo tanto, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Por otra parte, vemos que $\text{sen}\,\alpha$ y $\text{sen}(-\alpha)$ son opuestos, es decir, $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$. En resumen:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{sen}(-\alpha)=-\text{sen}\,\alpha \\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{matrix}}\Bigg\} \Rightarrow \boxed{\text{tg}(-\alpha)=\frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=-\text{tg}\,\alpha} \qquad (17)$$

III.2) Ángulos suplementarios (α y $180^\circ-\alpha$):

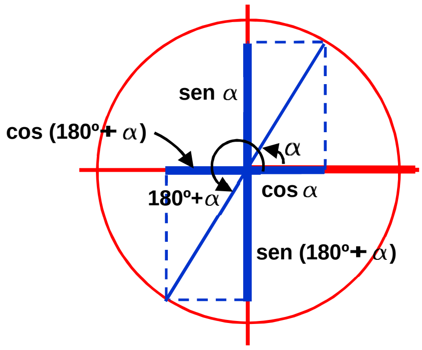


Supongamos α en el 1er cuadrante (ver figura). Su suplementario[5], $180^\circ-\alpha$, se obtendrá en el 2º cuadrante prolongando la línea horizontal discontinua. Por tanto, vemos que α y $180^\circ-\alpha$ tienen sus senos iguales y sus cosenos opuestos:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{sen}(180^\circ-\alpha)=\text{sen}\,\alpha \\ \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha\end{matrix}}\Bigg\} \Rightarrow \boxed{\text{tg}(180^\circ-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha} \qquad (18)$$

[5] Recordar que dos ángulos eran suplementarios cuando sumaban 180º. Por ejemplo, 120º y 60º.

III.3) Ángulos que difieren 180º (α y 180º+α):



Supongamos de nuevo α en el 1^er^ cuadrante, y le sumamos 180º. El ángulo 180º+α se obtendrá prolongando el segmento continuo que define a α, con lo cual estará en el 3^er^ cuadrante (ver figura). Por tanto, vemos que α y 180º+α tienen sus senos y cosenos opuestos:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}\,(180^\circ+\alpha)=-\,\text{sen}\,\alpha\\ \cos\,(180^\circ-\alpha)=-\cos\,\alpha\end{array}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\text{tg}\,(180^\circ-\alpha)=\text{tg}\,\alpha}\qquad(19)$$

III.4) Ángulos que difieren un nº entero de vueltas (α y α+k·360º):

En este caso no es necesario hacer un dibujo. Consideremos un α cualquiera, y le sumamos un número entero de vueltas, es decir, $\alpha+k\cdot 360^\circ$. Es obvio que volverá al mismo punto de la circunferencia goniométrica, es decir, ambos ángulos son esencialmente el mismo. Por lo tanto ambos ángulos tendrán el mismo seno y coseno:

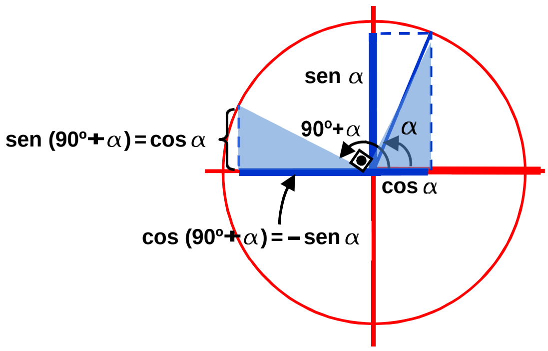
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}\,(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\text{sen}\,\alpha\\ \cos\,(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\,\alpha\end{array}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\text{tg}\,(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\text{tg}\,\alpha}\qquad(20)$$

III.5) Ángulos complementarios (α y 90º-α):

En este caso tampoco es necesario el dibujo. Ya vimos en (13) (apdo. I.4) que si dos ángulos son complementarios (i.e. suman 90º), entonces el seno de uno es el coseno del otro, y viceversa:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}\,(90^\circ-\alpha)=\cos\,\alpha\\ \cos\,(90^\circ-\alpha)=\text{sen}\,\alpha\end{array}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\text{tg}\,(90^\circ-\alpha)=\frac{\cos\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\text{c}\,\text{tg}\,\alpha}\qquad(13)$$

III.6) Ángulos que difieren 90º (α y 90º+α):

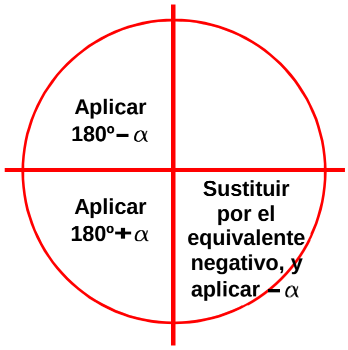


Supongamos un α en el 1^er^ cuadrante, y le sumamos 90º. Ello significa que el triángulo sombreado del 1^er^ cuadrante (ver figura) pasará a ser el triángulo sombreado semejante del 2º cuadrante. Por tanto, sen(90º+α) pasará a ser igual a cosα. Y cos(90º+α) pasará a ser igual a senα, pero negativo:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}\,(90^\circ+\alpha)=\ \cos\,\alpha\\ \cos\,(90^\circ+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha\end{array}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\text{tg}\,(90^\circ+\alpha)=-\,\text{ctg}\,\alpha}\qquad(21)$$

Aplicación: Reducción al 1^er^ cuadrante:

Supongamos que nos dan una razón (seno, tangente, etc.) de un ángulo cualquiera, el cual no tiene por qué estar en el 1^er^ cuadrante; incluso puede ser un ángulo negativo, y/o de valor elevado. Se trata de obtener una razón de un ángulo del 1$^{\underline{er}}$ cuadrante que sea equivalente a la dada. Para ello, si el ángulo es muy elevado, es decir, supera 360º, hay que restarle las vueltas necesarias, hasta que sea $<360º$. A continuación, y dependiendo de en qué cuadrante esté, hay que tener en cuenta el siguiente esquema:



(22)

Ejemplo 8: Reducir cos 1230º al 1$^{\underline{er}}$ cuadrante, y comprobar con la calculadora.

Solución: En primer lugar, tenemos que reducir vueltas a 1230º, para lo cual lo más práctico es dividir:

$$\begin{array}{r|l} 1230º & 360º \\ \hline 150º & 3 \end{array} \quad \xRightarrow{D=d\cdot C+R} \quad \mathbf{1230º} = 150º + 3\cdot 360º \sim \mathbf{150º}$$

Es decir, 1230º es equivalente a 150º. Como éste está en el 2º cuadrante, según el esquema (22) tenemos que aplicar las fórmulas de 180º – α:

$$\cos 1230º = \cos 150º = \cos(180º - 30º) = -\cos 30º = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$150º \in 2º$ cuad.
$\Rightarrow$ aplicar $180º - \alpha$

$\cos(180º - \alpha) = -\cos\alpha$

NOTA: Compruébese mediante calculadora la validez del resultado.

Ejercicios final tema (reducción al 1$^{\underline{er}}$ cuadrante): 19 a 23

III.7) Razones trigonométricas de la suma y diferencia ($\alpha \pm \beta$):

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}} \qquad (23)$$

Observaciones: 1) Las dos primeras fórmulas pueden ser demostradas, pero ello excede las pretensiones del curso. No obstante, hay infinidad de demostraciones en Internet[6]. La de tg($\alpha+\beta$) es fácil de demostrar:

---

6 Estas fórmulas fueron utilizadas, entre otros, por el suizo *Jean Bernouilli* (1667-1748) y el francés *Thomas Fantet de Lagny* (1660-1734) en tiempos modernos, si bien parece ser que *Ptolomeo de Alejandría* (ca. 100-170) ya las empleaba.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\frac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\qquad\text{(C.Q.D.)}$$

dividimos ambos
términos de la fracción
por $\cos\alpha\ \cos\beta$

2) También existen las análogas para la resta:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}\qquad(24)$$

Su demostración es bastante sencilla, partiendo de las fórmulas precedentes. Por ejemplo, para $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\qquad\text{(C.Q.D.)}$$

$\cos(-\beta)=\cos\beta$
$\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$

Las otras dos se demuestran análogamente. Pruébese.

Ejercicios final tema: 24 a 33

III.8) Razones trigonométricas del ángulo doble (2α):

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}2\alpha&=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}\qquad(25)$$

Estas fórmulas se demuestran trivialmente a partir de (23), sustituyendo $\beta=\alpha$. Se deja como ejercicio hacer la demostración de las tres identidades.

Ejercicios final tema: 34 a 41

III.9) Razones trigonométricas del ángulo mitad ($\alpha/2$):

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{aligned}}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}\qquad(26)$$

Observaciones: 1) Vamos a demostrar la primera de las identidades[7]. Para ello partimos de la fórmula fundamental de la Trigonometría, (14), y de la fórmula del coseno del ángulo doble, (25.2), que sumaremos miembro a miembro:

[7] Estas fórmulas fueron empleadas en primer lugar por el griego *Ptolomeo de Alejandría* (ca. 100-170).

$$\begin{array}{l} \cos^2 a+\text{sen}^2 a = \quad 1 \\ \cos^2 a-\text{sen}^2 a = \cos 2a \\ \hline 2\cos^2 a \qquad\qquad = 1+\cos 2a \Rightarrow \cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2} \Rightarrow \cos a=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}} \Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \end{array} \oplus \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

sumamos ambas igualdades miembro a miembro

hacemos el cambio $a=\alpha/2$

La segunda expresión se demuestra de manera similar, pero restando al principio. En cuanto a la tercera, su obtención es trivial.

2) El signo + o – se debe escoger en función de en qué cuadrante se encuentre $\alpha/2$, lo cual a su vez depende de en cuál esté α:

$$\begin{array}{l} \boxed{\alpha\in 1^{er}\text{ cuad.}} \Rightarrow 90º\le\alpha\le 0º \Rightarrow 45º\le\alpha/2\le 0º \Rightarrow \boxed{\alpha/2\in 1^{er}\text{ cuad.}} \\ \boxed{\alpha\in 2^{o}\text{ cuad.}} \Rightarrow 180º\le\alpha\le 90º \Rightarrow 90º\le\alpha/2\le 45º \Rightarrow \boxed{\alpha/2\in 1^{er}\text{ cuad.}} \\ \boxed{\alpha\in 3^{er}\text{ cuad.}} \Rightarrow 270º\le\alpha\le 180º \Rightarrow 135º\le\alpha/2\le 90º \Rightarrow \boxed{\alpha/2\in 2^{o}\text{ cuad.}} \\ \alpha\in 4^{o}\text{ cuad.} \Rightarrow 360º\le\alpha\le 270º \Rightarrow 180º\le\alpha/2\le 135º \Rightarrow \boxed{\alpha/2\in 2^{o}\text{ cuad.}} \end{array} \qquad (27)$$

Ejemplo 9: Hallar las razones de 15º, y comprobar con la calculadora.

Solución:

$$\text{sen}\,15º=\text{sen}\,\frac{30º}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos 30º}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15º=\cos\frac{30º}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos 30º}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg}\,15º=\frac{\text{sen}\,15º}{\cos 15º}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\frac{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=2-\sqrt{3}$$

Nótese que en las fórmulas de $\text{sen}\,\alpha/2$ y $\cos\alpha/2$ hemos elegido el signo + delante del símbolo radical, pues $15º\in 1^{er}$ cuadrante. Puede comprobarse con la calculadora la validez de estos resultados.

Ejercicios final tema: 42 a 52

III.10) Transformaciones de sumas (o restas) en productos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,A+\text{sen}\,B = \ \ 2\ \text{sen}\dfrac{A+B}{2}\ \cos\dfrac{A-B}{2} \\ \text{sen}\,A-\text{sen}\,B = \ \ 2\ \cos\dfrac{A+B}{2}\ \text{sen}\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A+\cos B = \ \ 2\ \cos\dfrac{A+B}{2}\ \cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A-\cos B = -2\ \text{sen}\dfrac{A+B}{2}\ \text{sen}\dfrac{A-B}{2} \end{array}} \qquad (28)$$

Observaciones: 1) Vamos a demostrar la primera de las identidades[8]. Para ello partimos de las fórmulas de $\text{sen}(\alpha+\beta)$ y $\text{sen}(\alpha-\beta)$, $[(23.1)$ y $(24.1)]$, las cuales sumaremos miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha+\beta) &= \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta \\ \text{sen}\,(\alpha-\beta) &= \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\beta \end{aligned} \quad \oplus$$

sumamos ambas igualdades miembro a miembro

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)+\text{sen}\,(\alpha-\beta)=2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta$$

Hacemos el cambio $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=A\\ \alpha-\beta=B\end{matrix}\right\}$

$$\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

Las restantes expresiones se demuestran de manera similar, pero partiendo de la pareja de fórmulas apropiada. Demuéstrense como ejercicio.

2) También existen las transformaciones de productos en sumas:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y &= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} \\ \cos x\,\cos y &= \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2} \\ \text{sen}\,x\,\cos y &= \frac{\text{sen}(x-y)+\text{sen}(x+y)}{2} \end{aligned} \qquad (29)$$

Estas fórmulas no serán utilizadas este curso, no así el siguiente. La tercera, por ejemplo, prácticamente ya fue obtenida en el primer paso de la demostración anterior. Las otras dos se demuestran análogamente **(ejercicio 56)**.

Ejercicios final tema: 53

Identidades y ecuaciones trigonométricas:

«Una **identidad trigonométrica** es una igualdad en la que la variable o incógnita está en una razón trigonométrica, y que se verifica siempre, sea cual sea el valor de dicha variable». Ya hemos visto un gran número de identidades trigonométricas, la mayoría de las cuales hemos demostrado.

Ejemplo: $\text{sen}^2x+\cos^2x=1$ es una identidad trigonométrica, pues se verifica $\forall x\in\mathbb{R}$.

Pero existen infinidad de identidades trigonométricas, que siempre demostraremos partiendo de las fórmulas precedentes, y haciendo además, habitualmente, determinadas manipulaciones algebraicas.

Ejercicios final tema: 54 a 56

«Una **ecuación trigonométrica** es una igualdad en la que la variable o incógnita está en una razón trigonométrica, y que se verifica para algunos valores de dicha incógnita».

[8] Estas fórmulas fueron empleadas por primera vez -cada uno separadamente- por el sacerdote y geógrafo alemán *Johannes Werner* (1560-1622) y el insigne matemático francés *François Viète* (1540-1603).

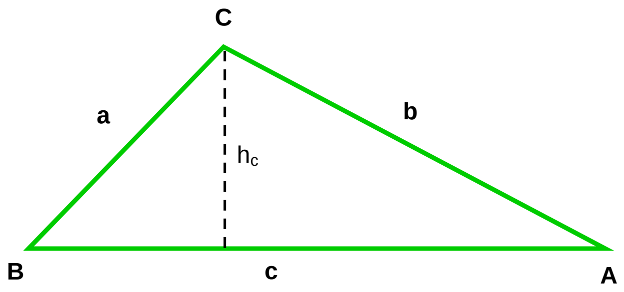
Ejemplo: $\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 0$ es una ecuación trigonométrica, pues su solución, o mejor dicho sus ∞ soluciones son $x = k \cdot 180º$; $x = 90º + k \cdot 360º$, donde $k \in \mathbb{Z}$ (ejercicio 58 g). Comprobar algunas soluciones.

Las ecuaciones trigonométricas se resuelven haciendo sustituciones mediante la aplicación de las fórmulas trigonométricas más habituales, seguidas de manipulaciones algebraicas, cambios de variable, etc. Algunas pueden requerir un arduo proceso.

Ejercicios final tema: 57 a 59

III) RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

IV.1) Teorema del seno:



Considerar el triángulo oblicuángulo (es decir, no rectángulo) de la figura. Se cumple que:

«**Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos**»

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}} \qquad (30)$$

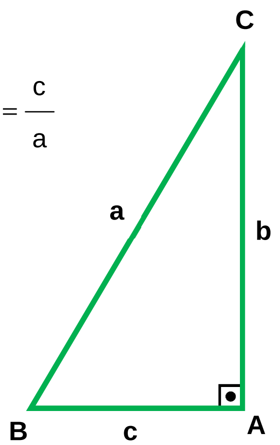
Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo $\mathbf{h_c}$, es decir, la correspondiente al lado **c**:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\, A = \dfrac{h_c}{b};\ h_c = b\,\text{sen}\, A \\ \text{sen}\, B = \dfrac{h_c}{a};\ h_c = a\,\text{sen}\, B \end{array}\right\} \Rightarrow b\,\text{sen}\, A = a\,\text{sen}\, B;\ \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

La tercera expresión del teorema se obtiene análogamente.

Observaciones: 1) El teorema del seno se aplica habitualmente a triángulos oblicuángulos, pero nótese que también se cumple en un triángulo rectángulo (ver figura):

$$A = 90º \Rightarrow \text{sen}\, A = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b}{a};\ \text{sen } C = \frac{c}{a}$$



es decir, obtenemos las razones trigonométricas vistas en el apdo. I.6.

2) Recordar que a la hora de resolver un triángulo nos dan tres de sus elementos, es decir, tres letras, y hay que hallar los otros tres elementos. Pues bien, la expresión (30) sólo tiene utilidad lógicamente cuando alguna de las tres letras está repetida, pues en ese caso se puede aplicar una proporción con una sola incógnita.

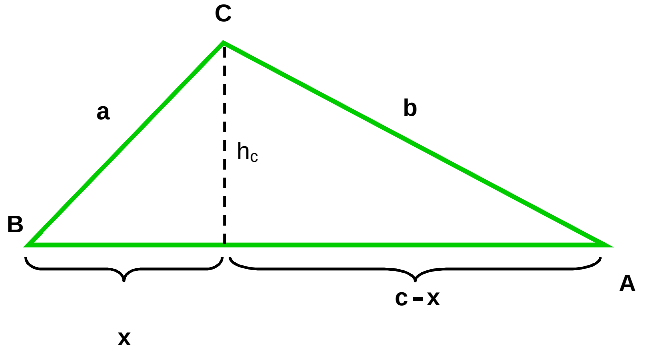
3) ¡Cuidado! Si utilizamos el teorema del seno para hallar un ángulo, recordar que hay dos arcosenos (que son suplementarios) y que uno de ellos puede que deba ser desechado. Por lo tanto se recomienda, **a la hora de hallar un ángulo, aplicar** siempre que sea posible **el teorema del coseno**.

Ejemplo 10: Dibujar el triángulo de datos $a=6\,m$, $B=45º$, $C=105º$, y resolverlo. **(Ejercicio 60a)**

(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m)

Solución:

IV.2) Teorema del coseno:



En todo triángulo se cumple que:

«**El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido**»

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}} \qquad (31)$$

Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo $\mathbf{h_c}$, es decir, la correspondiente al lado **c**, y aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos en que nos queda dividido el triángulo original:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = h_c^2 + x^2 \\ b^2 = h_c^2 + (c-x)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cx + x^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a^2 - x^2 = h_c^2 \\ b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = h_c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - \cancel{x^2} = b^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2} \Rightarrow$$

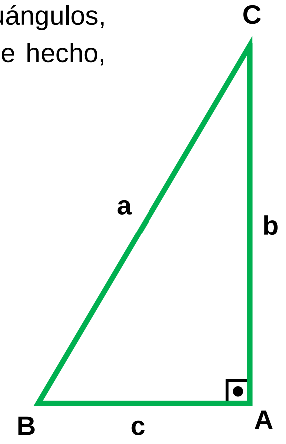
$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2cx = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

$$\cos B = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\cos B$$

ALFONSO GONZÁLEZ
I.E.S. FERNANDO DE MENA. DPTO. DE MATEMÁTICAS

Las otras dos expresiones se demuestran análogamente, sin más que considerar las otras dos alturas.

Observaciones: 1) El teorema del coseno se aplica habitualmente a triángulos oblicuángulos, pero nótese que también se cumple en un triángulo rectángulo. De hecho, es una generalización del teorema de Pitágoras (ver figura):



$$A = 90º \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

sustituimos en (31.1)

Y si sustituimos esta expresión en (31.2):

$$\cancel{b^2} = \cancel{b^2} + c^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cancel{2}\cancel{a}c\cos B = \cancel{2}c^{\cancel{2}}$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

Lo mismo ocurre con (31.3), es decir, obtenemos de nuevo las razones trigonométricas vistas en el apdo. I.6.

2) El teorema del coseno se utiliza sólo cuando los datos que nos dan son letras distintas (a diferencia del teorema del seno).

3) Ya hemos comentado que, **a la hora de hallar un ángulo, se recomienda aplicar el teorema del coseno**. De hecho, (30) se puede ver también de la siguiente forma:

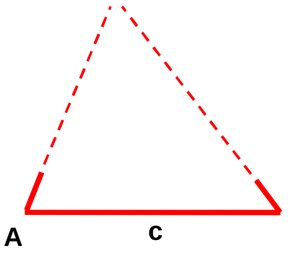
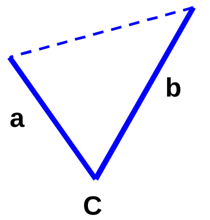
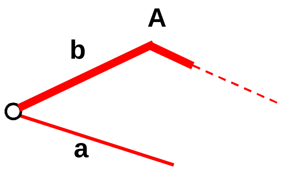
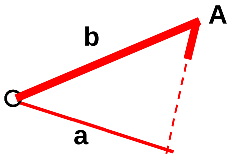
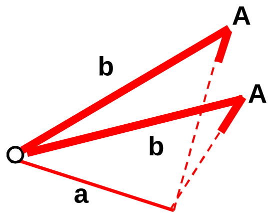
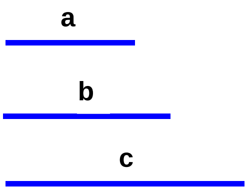
$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}} \qquad (32)$$

Ejemplo 11: Dibujar el triángulo de datos $a=10\,dam$, $b=7\,dam$, $C=30º$, y resolverlo. **(Ejercicio 60b)**

(Soluc: c ≅5,27 dam, B ≅41º 38', A ≅108º 22')

Solución:

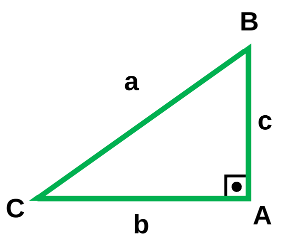
4) ¿Cuándo aplicar uno u otro teorema? La siguiente tabla-resumen nos puede ayudar:

DATOS:		**¿EXISTENCIA de SOLUCIÓN?**	**RESOLUCIÓN:**
UN LADO y 2 ÁNGULOS		Si $A+B<180^\circ$	1º) $C=180^\circ-(A+B)$ 2º) Los otros lados por **th. del seno**
DOS LADOS y el ÁNGULO COMPRENDIDO		Siempre	Aplicar **th. del coseno** dos veces
DOS LADOS y el ÁNGULO OPUESTO a UNO de ELLOS (CASO DUDOSO)		Sale $\operatorname{sen} B>1 \Rightarrow \nexists$ soluc.	Aplicar **th. del seno** dos veces
		Sale $\operatorname{sen} B=1 \Rightarrow$ 1 soluc. (es un triángulo rectángulo en B)	
		Sale $\operatorname{sen} B<1 \Rightarrow$ puede haber 1 soluc., o 2 soluc (B_1 y B_2 suplementarios) (ver figura)	
TRES LADOS		Siempre que la suma de dos lados cualesquiera sea > que el 3$^{\underline{er}}$ lado	Aplicar **th. del coseno** dos veces

Ejercicios final tema: 60 hasta el final

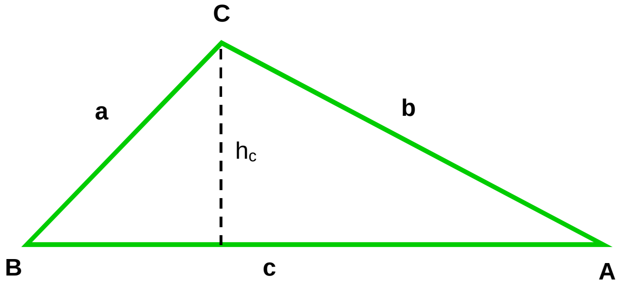
IV) ÁREA del TRIÁNGULO

V.1) Triángulos rectángulos: Se recomienda la conocida fórmula:



$$\boxed{A=\frac{1}{2}bc} \qquad (33)$$

V.2) Triángulos oblicuángulos: «**El área del triángulo es igual al semiproducto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo comprendido**»



$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,bc\,\text{sen}\,A \\ A &= \frac{1}{2}\,ac\,\text{sen}\,B \\ A &= \frac{1}{2}\,ab\,\text{sen}\,C \end{aligned}} \qquad (34)$$

Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo $\mathbf{h_c}$, es decir, la correspondiente al lado **c**, y aplicamos (33):

$$A = \frac{1}{2}\,c\,h_c = \frac{1}{2}\,b\,c\,\text{sen}\,A \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

$$\text{sen}\,A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\,\text{sen}\,A$$

Las otras dos expresiones se demuestran análogamente, sin más que considerar las otras dos alturas.

Observaciones: 1) (34) es una generalización de (33). En efecto, si el triángulo es rectángulo, entonces A=90º, con lo que $\text{sen}\,A = 1$, y (34.1) se convierte en (33).

2) También existe la conocida fórmula de Herón[9] (ver demostración en Internet), que permite hallar cómodamente el área del triángulo, exclusivamente en función de sus lados:

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{, donde } \mathbf{s} \text{ es el semiperímetro, i.e. } \mathbf{s} = \frac{a+b+c}{2}} \qquad (35)$$

[9] Debida a *Herón de Alejandría*, matemático griego anterior al siglo I de nuestra era.

75 EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		225º		320º		35º
Radianes		4π/9 rad		π/15 rad		1 rad	

2. **Uso de la calculadora:**

a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximadas, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 35º   cos 70º   tg 53º   sen 26º 37'   cos 78º 34' 8''   tg 34º 12' 43''
sec 12º   cosec 23º   ctg 54º   sen 235º   cos 105º

b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:

sen α=0,25   cos α=0,74   tg α=3   sec α=1,18   ctg α=1,5

c) Dado cos α=0,2, hallar, mediante calculadora, tg α, con cuatro decimales. *(Soluc: ≅4,8990)*

d) Dado sen α=0,56, hallar, mediante calculadora, cos α *(Soluc: ≅0,8285)*

e) Dada tg α=2, hallar, mediante calculadora, sen α *(Soluc: ≅0,8944)*

f) Dada cosec α=3, hallar, mediante calculadora, cos α *(Soluc: ≅0,9428)*

g) Dada sec α=1,5, hallar, mediante calculadora, tg α *(Soluc: ≅1,1180)*

h) Dada ctg α=3, hallar, mediante calculadora, cosec α *(Soluc: ≅3,1623)*

3. Resolver los siguientes **triángulos**, **rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º *(Soluc: C=43º; b≅234,03 m; c≅218,24 m; S_{ABC}≅25537,64 m^2)*

b) a=42,5 m, b=35,8 m *(Soluc: B≅57º23'22''; C≅32º36'38''; c≅22,90 m; S_{ABC}≅409,99 m^2)*

c) b=32,8 cm, B=22º *(Soluc: C=68º; a≅87,56 cm; c≅81,18 cm; S_{ABC}≅1331,40 cm^2)*

d) b=8 mm, c=6 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; a=10 mm; S_{ABC}=24 mm^2)*

e) a=8 km, b=6 km *(Soluc: B≅48º35'; C≅41º 25'; c≅5,30 km; S_{ABC}≅15,87 km^2)*

f) a=13 m, c=5 m *(Soluc: B≅67º22'48''; C≅22º37'12''; b=12 m; S_{ABC}≅30 m^2)*

g) c=42,7 dam, C=31º *(Soluc: B=59º; a≅82,91 dam; b≅71,06 dam; S_{ABC}≅1517,23 dam^2)*

h) c=124 dm, B=67º 21' *(Soluc: C≅22º39'; a≅321,99 dm; b≅297,16 dm; S_{ABC}≅18423,9 dm^2)*

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura≅15,73 m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360º o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100º **b)** 19π/3 rad **c)** 2970º **d)** –300º **e)** –1040º **f)** 10π rad **g)** 43π/4 rad
h) 3500º **i)** 32π/3 rad **j)** –2620º **k)** 63π/5 rad **l)** 43π/6 rad **m)** 4980º

(Soluc: a) 20º; b) π/3 rad; c) 90º; d) 60º, e) 40º; f) 0 rad; g) 3π/4 rad; h) 260º; i) 2π/3 rad; j)260º; k) 3π/5 rad; l) 7π/6 rad; m) 300º)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30º y 150º **b)** 45º y 225º **c)** 90º, 180º y 270º **d)** 60º y 300º **e)** 0º, 60º y 120º

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones sen x, cos x y tg x (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final de este libro)

8. Sabiendo que cos α=–3/5 y 180º<α<270º, calcular las restantes razones trigonométricas mediante identidades trigonométricas (no usar decimales). Comprobar el resultado hallando α con la calculadora.
(Soluc: sen α=-4/5, tg α=4/3; α≅233º 7' 48'')

9. Sabiendo que tg α=–3/4 y α ∈ 4º cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas, y comprobar.
(Soluc: sen α=-3/5, cos α=4/5; α≅323º 7' 48'')

10. Ídem con sec α=2 y 0<α<π/2 *(Soluc: sen α=$\sqrt{3}$/2, cos α=1/2, tg α=$\sqrt{3}$; α=60º)*

11. Ídem con tg α=–3 y π/2<α<π *(Soluc: sen α=3$\sqrt{10}$/10, cos α=-$\sqrt{10}$/10)*

12. Ídem con cos α=0,2 y 3π/2<α<2π *(Soluc: sen α=-2$\sqrt{6}$/5, tg α=-2$\sqrt{6}$)*

13. Ídem con sen α=–0,3 y π<α<3π/2 *(Soluc: cos α≅-0,95, tg α≅0,31; α≅197º 27' 27'')*

14. Ídem con tg α=4/3 y π<α<3π/2 *(Soluc: sen α=-4/5, cos α=-3/5)*

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) cos α=4/5	270º<α<360º	**e)** sen α=1/4	α ∈ 1er cuad.	**i)** tg α=3/4	0º<α<90º
b) tg α=3/4	180º<α<270º	**f)** cos α=–1/3	α ∈ 2º cuad.	**j)** sec α=-$\sqrt{2}$	α ∈ 3er cuad.
c) sen α=3/5	90º<α<180º	**g)** cosec α=–2	180º<α<270º	**k)** cosec α=$\sqrt{5}$	α ∈ 2º cuad.
d) ctg α=–2	90º<α<180º	**h)** sec α=1	0º<α<90º		

(Soluc: b) sen α=-3/5, cos α=-4/5; d) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=-2$\sqrt{5}$/5, g) sen α=-1/2, cos α=-$\sqrt{3}$/2; k) sen α=-$\sqrt{2}$/2, tg α=1; l) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=-2$\sqrt{5}$/5)

16. Determinar los valores de sen α y tg α sabiendo que tg $\alpha > 0$ y cos $\alpha=-5/12$

17. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que sen $\alpha=1/2$ y cos $\alpha=-\sqrt{3}/2$

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} x = 1$ **d)** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\cos x = \frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Reducción al 1^er^ cuadrante:

19. Hallar, **sin calculadora**: **a)** sen 570º **b)** cos 14520º **c)** sen (–120º) **d)** cos (–240º)
e) tg 2565º **f)** cos 15π/2 rad **g)** sen 55π/6 rad **h)** tg 79π rad

(Soluc: a) -1/2; b) -1/2; c) $-\sqrt{3}/2$; d) -1/2; e) 1; f) 0; g) -1/2; h) 0)

20. Ídem: **a)** cos 225º **b)** cos(–60º) **c)** tg 120º **d)** sen (–1470º) **e)** tg 900º
f) sen 19π/6 rad **g)** cos 11π rad **h)** cos(–1950º) **i)** tg 29π/4 rad **j)** sen 11π/4 rad
k) tg 22π/3 rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b)1/2; c) $-\sqrt{3}$; d) -1/2; e) 0; f) -1/2; g) -1; h) $-\sqrt{3}/2$; i) 1; j) -1; k) $\sqrt{3}$)

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1^er^ cuadrante:
a) sen 1485º **b)** cos 1560º **c)** sen 1000º *(Soluc: sen 45º; –cos 60º; –sen 80º)*

22. Ídem: **a)** sen 1300º **b)** cos (–690º) **c)** tg 170º **d)** sen (–1755º) **e)** sen (–120º) **f)** ctg (–150º)
g) sen 2700º **h)** sec (–25º) **i)** cos (–30º) **j)** cosec 4420º

(Soluc: a) –sen40º; b)cos30º; c) –tg10º; d) sen45º; e) –sen60º; f) ctg30º; g) 0; h) sec25º; i) cos30º; j) cosec80º)

23. Expresar seno, coseno y tangente de 1755º en función de un ángulo del 1^er^ cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. a) Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de 75º.

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 105º **ii)** 165º **iii)** 15º **iv)** 195º **v)** 135º

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si sen x=12/13 y sen y=4/5, siendo x e y $\in$ 1^er^ cuadrante, calcular:

a) sen (x+y) **b)** sen (x–y) **c)** cos (x+y) **d)** cos (x–y)

(Soluc: a) 56/65; b) 16/65; c) –33/65; d) 63/65)

26. Si tg a=3/4, hallar tg (a+30º) y tg (45º–a) *(Soluc: $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$)*

27. Hallar el seno y el coseno de 9º y 6º en función de cos 36º

28. Hallar, sin calculadora, $\frac{8\,\text{sen}105^\circ}{\text{sen}45^\circ}$ *(Soluc: 4+4$\sqrt{3}$)*

Razones trigonométricas de -α, 180-α, 180+α, etc:

29. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ **b)** $\cos\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)$ **c)** $\text{tg}(\alpha+5\pi)$ **d)** $\text{sen}\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$ **e)** $\text{tg}(360^\circ-\alpha)$

(Soluc: a) sen α; b) sen α; c) tg α; d) -cos α; e) -tg α)

30. Simplificar las siguientes expresiones: **a)** tg(α+180º)+tg(α-180º)+tg(α-270º)+tg(360º-α)

b) sen(α+5π)+sen(α-π)+sen(α+2π)+sen(α+π)

(Soluc: a) tg α - ctg α; b) -2 sen α)

31. Calcular sen (5π-x) sabiendo que cos x=0,5 y x∈4º cuad. *(Soluc: -$\sqrt{3}$/2)*

32. Siendo tg x=2/3 calcular: **a)** $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **b)** $\text{tg}(\pi-x)$ **c)** $\text{tg}(\pi+x)$ *(Soluc: 3/2; -2/3; 2/3)*

33. Sabiendo que tg a=3/2 calcular: **a)** $\cos(\pi+a)$ **b)** $\cos(2\pi-a)$ **c)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ **d)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

(Soluc: a) $-2\sqrt{13}/13$; b) $2\sqrt{13}/13$; c) $2\sqrt{13}/13$; d) $2\sqrt{13}/13$)

Razones trigonométricas del ángulo doble:

34. Calcular el seno y el coseno de 20º en función de sen 10º, y comprobar el resultado con la calculadora.

35. Hallar sen 2x, cos 2x y tg 2x, siendo x ∈ 1^er^ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) sen x=1/2 **b)** cos x=3/5 **c)** sen x=5/13

(Soluc: a) $\sqrt{3}/2$; 1/2; $\sqrt{3}$ b) 24/25; -7/25; -24/7 c) 120/169; 119/169; 120/119)

36. Dado a ∈ 3^er^ cuadrante tal que $\text{tg}\,a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc: sen 2a=$\sqrt{3}$/2; cos 2a=1/2)

36b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.
(Soluc: a=210º)

37. Expresar sen 3a y cos 3a en función de sen a y cos a respectivamente

(Soluc: sen 3a=3sen a-4sen^{3}a; cos 3a=4cos^{3}a-3cos a)

38. Si cos α=1/5 y α ∈ 1^er^ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo 90º-2α

(Soluc: -23/25; 4$\sqrt{6}$/25)

39. Si ctg α=4/3, hallar cos 2α *(Soluc: 7/25)*

40. Dada $\operatorname{tg} a=\sqrt{3}$ y a$\in$3$^{\underline{er}}$ cuadrante, hallar las razones de 2a. *(Soluc: sen 2a=$\sqrt{3}$/2; cos 2a=-1/2)*

40b. Hallar el ángulo **a** del ejercicio anterior y comprobar, sin calculadora, el resultado anterior. *(Soluc: a=240º)*

41. Sabiendo que $\operatorname{tg} 2a=\sqrt{3}$, hallar sen a y cos a, sabiendo que a<90º. ¿De qué ángulo **a** se trata?

(Soluc: sen a=1/2; cosa=$\sqrt{3}$/2; a=30º)

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

42. Calcular tg π/8 *(Soluc: $\sqrt{2}$ -1)*

43. Dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que sec α=2, hallar cos α/2 $\left(\textit{Soluc}: \cos\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

43b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior. *(Soluc: α=300º)*

44. Sea un ángulo **a** situado en el 2º cuadrante tal que tg a=–3/4. Hallar las razones trigonométricas del ángulo **a/2**. $\left(\textit{Soluc}: \operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}; \cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

44b. Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. *(Soluc: a≅143º 7' 48'')*

45. Dado **a** $\in$ 3er cuadrante tal que sen a=–1/2, hallar las razones de **a/2**. ¿De qué ángulo a se trata?

$$\left(\textit{Soluc}: \operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; \cos\frac{a}{2}=\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; a=210^\circ\right)$$

46. Volver a hacer el ejercicio 41, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable a=α/2).

47. Dado a $\in$ 4º cuadrante con $\operatorname{tg} a=-\sqrt{3}$, hallar las razones de a/2 $\left(\textit{Soluc}: \operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}; \cos\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

47b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores. *(Soluc: a=300º)*

48. Dado $\alpha \in$ 3$^{\underline{er}}$ cuadrante tal que cos α=–1/2, hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a) sen 2α *(Soluc: √3/2)*

b) cos α/2 *(Soluc: –1/2)*

c) sen (α–30º) *(Soluc: –1/2)*

d) tg (α+60º) *(Soluc: –√3)*

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata. *(Soluc: 240º)*

49. Ídem, dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$

a) cos (α+30º) *(Soluc: √3/2)*

b) tg (α−45º) *(Soluc: 2+√3)*

c) sen (α+1650º) *(Soluc: 1/2)*

d) sen α/2 *(Soluc: 1/2)*

e) cos 2α *(Soluc: −1/2)*

f) Razonar (sin calculadora) de qué α se trata. *(Soluc: 300º)*

50. Ídem con $\alpha \in 3^{\underline{er}}$ cuadrante tal que $\sec\alpha = -3$

a) sen (α −60º) *(Soluc: (√3−2√2)/6)*

b) tg (α+45º) *(Soluc: -(9+4√2)/7)*

c) cos (α −2640º) *(Soluc: (1−2√6)/6)*

d) cos α/2 *(Soluc: −√3/3)*

e) sen 2α *(Soluc: 4√2/9)*

f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué α se trata. *(Soluc: ≅250º 31' 44'')*

51. Dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{3}/2$ hallar, **mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no vale usar decimales):

a) $\cos\alpha/2$ *(Soluc: −√3/2)*

b) $\operatorname{sen}(1200º - 2\alpha)$ *(Soluc: −√3/2)*

52. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y que $\pi \le \alpha \le 3\pi/2$, hallar **mediante identidades fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no usar decimales):

a) $\operatorname{sen}\alpha/2$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$

b) $\cos(2\alpha + 930º)$ $(\text{Soluc}: 0)$

Transformación de sumas en productos:

53. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) sen 75º − sen 15º **b)** cos 75º + cos 15º **c)** cos 75º − cos 15º $\left(\text{Soluc}: \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{6}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Identidades trigonométricas:

54. Simplificar:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}4\alpha + \operatorname{sen}2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$ *(Soluc: tg 3α)*

b) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ *(Soluc: 2 ctgα)*

c) $\dfrac{2\cos(45º+\alpha)\cos(45º-\alpha)}{\cos 2\alpha}$ *(Soluc: 1)*

d) $2\operatorname{tg}x\cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}x$ *(Soluc: tg x)*

e) $2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha$ *(Soluc: tg α)*

f) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}$ *(Soluc: ctg a)*

g) $\dfrac{1+\text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}{\text{ctg}\alpha-\text{tg}\beta}$ *[Soluc: tg(α+β)]*

h) $\dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$ *(Soluc: cos x)*

55. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\alpha+\cos 2\alpha}=2\,\text{tg}^2\alpha$

b) sen 2α cos α **–** sen α cos 2α = sen α

c) cos α cos (α–β) + sen α sen (α–β)=cos β

d) $\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

e) $\sec^2 A-\text{tg}^2 A=1$

f) $\text{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\text{sen}A}{1+\cos A}=\dfrac{1-\cos A}{\text{sen}A}=\text{cosec}A-\text{ctg}A$

g) $\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}\,2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,2\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$

h) $\text{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\text{sen}^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

i) $\text{sen}^2 A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2A$

j) $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\text{tg}\,2x}=\cos x-\text{sen}\,x\cdot\text{tg}\,x$

k) $\dfrac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}=\text{sen}\,x$

l) $\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}=\sec x+\text{tg}\,x$

m) $\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}=\text{tg}^2 x$

56. Demostrar las siguientes fórmulas, llamadas **transformaciones de productos en sumas**:

$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\text{sen}\,x\cos y=\frac{\text{sen}(x-y)+\text{sen}(x+y)}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas:

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=60º+k·360º; x=120º+k·360º)*

b) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *(Sol: x=135º+k·360º; x=225º+k·360º)*

c) $\text{ctg}\,x=-\sqrt{3}$ *(Sol: x=150º+k·180º)*

d) $\text{sen}\,x=\dfrac{1}{3}$ *(x≅19º28'16''+k·360º; x≅160º31'44''+k·360º)*

e) $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ *(x≅143º7'48''+k·360º; x≅216º52'12''+k·360º)*

f) $\text{sen}\,x=0$ *(Sol: x=k·180º)*

g) $\cos x=-1$ *(Sol: x=(2k+1)·180º)*

h) $\text{cosec}\,x=-2$ *(Sol: x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)*

i) $\sec x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *(Sol: x=150º+k·360º; x=210º+k·360º)*

j) $\text{tg}\,x=\sqrt{3}$ *(Sol: x=60º+k·180º)*

k) $\text{cosec}\,x=\dfrac{1}{2}$ *(Sol: ∄ soluc)*

l) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Sol: Se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$)*

m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=10º+k·120º; x=110º+k·120º)*

n) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *[Sol: x=2kπ; x=(4k+1)·π/2]*

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ *(Sol: x=45º+k·360º)*

b) $\operatorname{sen} x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$

(Sol: 30º, 150º, ≅ 311º24'35'' y ≅ 228º35'25'')

c) $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

d) sen 2x=cos x

(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º; x=90º+k·180º)

e) $\sqrt{3}\ \operatorname{sen} x + \cos x = 1$ *(Sol: x=k·360º; x=120º+k·360º)*

f) $2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

g) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=90º+k·360º)*

h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

(Sol: x=90º+k·180º; x=30º+k·360º; x=330º+k·360º)

i) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

j) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$ *(Sol: x=45º+k·90º)*

k) $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

(Sol: x=90º+k·360º; x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)

l) $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

(Sol: x=k·180º; x=30º+k·360º; x=210º+k·360º)

m) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\operatorname{sen} x = 0$ *(Sol: x=π/4+k·π)*

n) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

(Sol: x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

o) $\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=45º+k·180º)*

p) $\cos 2x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$ *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º)*

q) $4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=45º+k·90º)*

r) $4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

(Sol: x=36º52'11,6''+k·180º; x=135º+k·180º)

s) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

t) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ *(Sol: x=k·360º)*

u) $2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

(Sol: x=90º+k·180º; x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

v) $\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 2$

w) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1$

x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

y) $2\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$

z) $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x = 1$

α) $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$

β) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$

γ) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 2$ *(Sol: x=150º+k·360º)*

59. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

b) $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) $\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$

Resolución de triángulos oblicuángulos:

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) a=6 m, B=45º, C=105º *(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m, S_{ABC} ≅24,60 m^2)*

b) a=10 dam, b=7 dam, C=30º *(Soluc: c≅5,27 dam, B≅41º 38', A≅108º 22')*

c) b=35,42 dm, A=49º 38', B=70º 21' *(Soluc: C=60º 1', a≅28,66 dm, c≅32,58 dm, S_{ABC} ≅439,94 dm^2)*

d) a=13 m, b=14 m, c=15 m *(Soluc: A≅53º 7' 48'', B≅59º 29' 23'', C≅67º 22' 48'', S_{ABC} ≅84m^2)*

* **e)** a=42, b=32, B=40º 32' *(Soluc: A_1≅58º 32', C_1≅80º 56', c_1≅48,62; S_{ABC} ≅663,55*
A_2≅121º 27', C_2≅18º, c_2≅15,22; S_{ABC} ≅207,72)

f) a=15, b=22, c=17 *(Soluc: A≅42º 54', B≅86º 38', C≅50º 28')*

g) a=10 mm, b=7 mm, C=60º *(Soluc: c≅8,89 mm, A≅76º 59' 46'', B≅43º 0' 14'', S_{ABC} ≅30,31mm^2)*

h) a=10, b=9, c=7 *(Soluc: A≅76º 13', B≅60º 57, C≅42º 50')*

* **i)** a=60 cm, b=40 cm, A=42º *(Soluc: B≅26º 30', c≅83,43 cm, C≅111º 30', S_{ABC} ≅116,5 cm^2)*

* **j)** a=40 cm, b=60 cm, A=72º *(Soluc: ∄ soluc)*

* **k)** a=50, b=60, A=42º *(Soluc: B_1≅53º 25', C_1≅84º 35', c_1≅74,39*
B_2≅126º 35', C_2≅11º 25', c_2≅14,39)

l) A=30º, B=45º, b=$\sqrt{2}$ m *(Soluc: C=105º, a=1 m, c≅1,93 m, S_{ABC} ≅0,68 m^2)*

m) b=3 hm, c=2 hm, A=60º *(Soluc: a=$\sqrt{7}$ hm, B≅79º, C≅40º 54', S_{ABC} =3$\sqrt{3}$ /2 hm^2)*

n) A=30º, b=$\sqrt{3}$, c=1

* **o)** a=4, b=5, B=30º

p) a=1792, b=4231, c=3164

* **q)** a=12 hm, b=57 hm, A=150º *(Soluc: ∄ soluc)*

r) a=72, b=57, C=75º 47'

s) c=3,78, A=105º, B=38º 47'

* **t)** a=40, b=60, A=12º

* **u)** a=60, b=40, A=82º

v) a=8 m, B=30º, C=105º *(Soluc: b≅5,66 m, c≅10,93 m, S_{ABC} ≅21,86 m^2)*

w) A=60º, B=75º, c=$\sqrt{2}$ m

x) a=4 km, B=45º, C=60º

y) a=4 mm, b=3 mm, c=6 mm

z) a=1 cm, c=2 cm, B=60º

α) a=5 dam, b=3 dam, c=4 dam

* **β)** b=10 dm, c=9 dm, C=45º

γ) A=30º, b=10 m, C=75º *(Soluc: B=75º, a≅5,18 m, c=10 m, S_{ABC}=25 m^2)*

61. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y sen B=3/5
(Soluc: a=10 cm, b=6 cm, c=8 cm)

62. Calcular el área de un triángulo de datos a=8 m, B=30º, C=45º

63. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo A=30º. Hallar sus diagonales.

64. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos A=30º y B=45º
(Soluc: a≅5,13 cm, b≅7,26 cm, c≅9,92 cm)

65. TEORÍA: Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

*** 66.** Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60º. Hallar los otros dos ángulos. *(Soluc: 30º y 60º)*

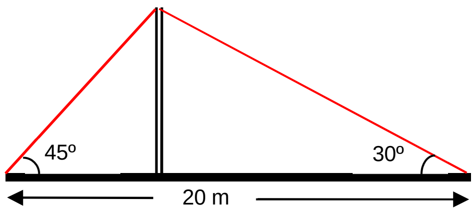
Problemas de planteamiento:

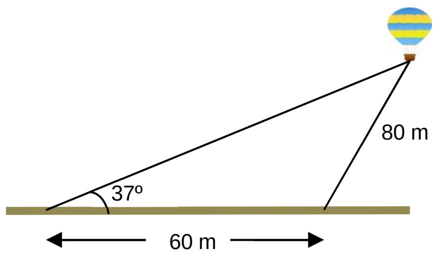
67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña. *(Soluc: ≅136,60 m)*

68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río? *(Soluc: ≅53,21 m)*

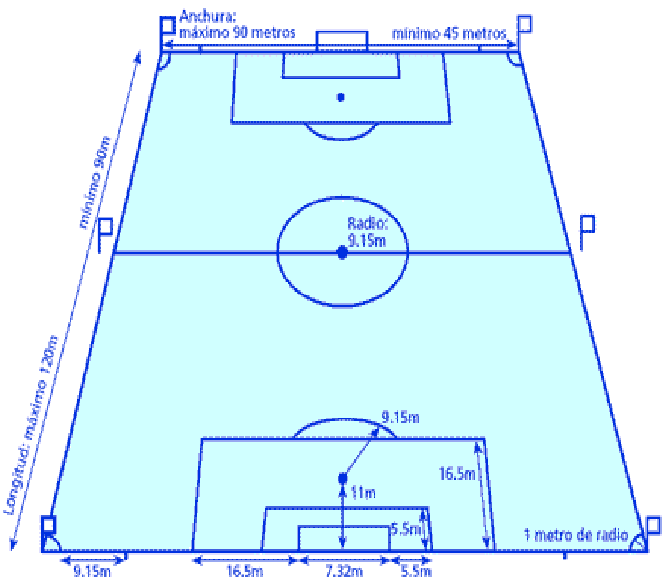
69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *(Soluc: ≅13 km 77 m)*

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil? *(Sol: cable=25 m; mástil≅7,32 m)*





71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. *(Sol: ≅71,80 m y 119,31 m, respectivamente)*



72. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería? *(Sol: ≅ 14º 29' 54")*

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?

73. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo $B\hat{A}C = 40º$ ¿Qué distancia hay entre el cine y el quiosco? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). *(Sol: ≅77,44 m)*

74. Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman un ángulo de 82º. El primero navega a 18 millas por hora, y el segundo a 25 millas por hora. Si mantienen inalterados los rumbos, ¿cuánto distarán entre sí al cabo de 3 horas? *(Soluc: ≅86,10 millas)*

75. TEORÍA: En la explicación del tema hay dos fórmulas cuya demostración no ha sido hecha. Se trata del seno de la suma de ángulos:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

y de la fórmula de Herón, para hallar el área de un triángulo:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$, donde **s** es el semiperímetro, i.e. $\mathbf{s}=\dfrac{a+b+c}{2}$

Buscar una demostración en Internet, y pasarla al cuaderno, procurando entenderla.