CONARE–Proyecto RAMA

Números Reales y Fundamentos de Álgebra

Master Pedro Díaz Navarro

Temas de pre-cálculo ***Enero 2007***

Números Reales y Fundamentos de Álgebra

Master. Pedro Díaz Navarro

31 de julio de 2007

Índice

1. Los Números Reales **1**

1.1. Introducción a los Números Reales 1

1.1.1. Axiomas de Campo 5

1.1.2. Axiomas de orden y desigualdades 11

1.1.3. Valor Absoluto 14

1.1.4. Intervalos 17

1.1.5. Ejercicios Resueltos 20

1.1.6. Ejercicios 22

1.2. Expresiones Algebraicas 23

1.2.1. Potencias y Radicales 23

1.2.2. Ejercicios Resueltos 25

1.2.3. Ejercicios 26

1.2.4. Radicales 27

1.2.5. Ejercicios Resueltos 29

1.2.6. Ejercicios 32

1.2.7. Clasificación de expresiones algebraicas 32

1.2.8. Factorización 34

1.2.9. Factorización por Factor Común 35

1.2.10. Ejercicios 38

1.2.11. Factorización usando fórmulas notables y productos especiales 39

1.2.12. Ejercicios . . . 43
1.2.13. Otros tipos de factorización . . . 44
1.2.14. Ejercicios . . . 48
1.3. Polinomios . . . 49
1.3.1. Ejercicios . . . 56
1.3.2. División Sintética . . . 57
1.3.3. Ejercicios . . . 60
1.3.4. Factorización de polinomios . . . 61
1.3.5. Ejercicios . . . 69
1.4. Racionalización . . . 70
1.4.1. Ejercicios . . . 73

2. Ecuaciones e Inecuaciones **75**
2.1. Ecuaciones . . . 75
2.1.1. Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita . . . 78
2.1.2. Ejercicios . . . 84
2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales . . . 85
2.2.1. Ejercicios . . . 94
2.3. Ecuación Cuadrática . . . 95
2.3.1. Ejercicios . . . 98
2.4. Inecuaciones . . . 99
2.4.1. Inecuaciones Lineales . . . 100
2.4.2. Ejercicios . . . 104
2.4.3. Inecuaciones Cuadráticas . . . 105
2.4.4. Ejercicios . . . 109
2.4.5. Inecuaciones con Expresiones racionales . . . 110
2.4.6. Ejercicios . . . 114
2.4.7. Inecuaciones con Valor Absoluto . . . 115
2.4.8. Ejercicios . . . 118
2.5. Otros tipos de ecuaciones . . . 119
2.5.1. Ecuaciones con Valor Absoluto . . . 119
2.5.2. Ejercicios . . . 126
2.5.3. Ecuaciones con Expresiones Radicales . . . 127
2.5.4. Ejercicios . . . 132

CAPÍTULO 1

Los Números Reales

1.1. Introducción a los Números Reales

En secundaria se estudiaron varios conjuntos numéricos a saber: el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

El primer conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ se identificó intuitivamente como el conjunto con el cual se hacen conteos de objetos. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$ se introduce como el conjunto que contenía a los naturales y a los *números negativos* de estos. Este conjunto aparece ante la necesidad de explicar situaciones en las cuales intervienen alturas, temperaturas y otros fenómenos en los cuales es necesario hablar de cantidades **por encima** o **por debajo** del valor cero. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ se introduce como el conjunto de números de la forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Intuitivamente, se introduce ante la necesidad de hablar de porciones de la unidad tales como "*la mitad*", "*la cuarta parte*", etc. las cuales no pueden ser representadas en general mediante números enteros.

Todo número racional tiene la propiedad de que si se realiza la división de a por b, se obtiene su la expresión decimal . La expresión decimal de todo número racional es periodica, es decir, si se realiza la división de la fracción $\frac{a}{b}$, a partir de cierto momento se repetirán los dígitos. La secuencia de dígitos repetidos se denomina *periodo* del número racional

Ejemplo 1. Si efectuamos la división de la fracción $\frac{2}{3}$, se obtiene que

$$\frac{2}{3} = 0{,}666666...$$

los tres puntos indican que el número 6 continua repitiéndose indefinidamente. En este caso, se escribe de manera resumida

$$\frac{2}{3} = 0{,}666666... = 0.\ \bar{6}$$

y decimos que el periodo de $\frac{2}{3}$ es 6. □

Ejemplo 2. La fraccción $\frac{15}{23}$ tiene periodo 6521739130434782608695 por tanto su expresión decimal se escribe en forma resumida como

$$\frac{15}{23} = 0.\overline{6521739130434782608695}.$$

Esto indica que los 22 digitos del periodo se repiten indefinidamente. □

Ejemplo 3. Todo número racional de la forma $\frac{a}{9}$ con a un natural menor que 9 tiene periodo a esto es :

$$\frac{a}{9} = 0.aaaaaaaa... = 0.\ \bar{a}$$

por ejemplo $\frac{7}{9} = 0{,}77777777... = 0.\ \bar{7}$, $\frac{5}{9} = 0{,}55555555... = 0.\ \bar{5}$, etc. □

Ejemplo 4. **Expresiones decimales puras y no puras**

Se dice que un número racional q tiene una expresión decimal "*pura* si su periodo comienza inmediatamente después del punto decimal. Por ejemplo, la fracciones $\frac{23}{7}$ es una fracción cuya expresión decimal es pura pues

$$\frac{23}{7} = 3{,}285712857128571... = 3.\overline{285671}$$

en tanto que la fracción $\frac{7}{1500}$ es una fracción con expresión decimal "*no pura* " dado que

$$\frac{7}{1500} = 0{,}00466666... = 0{,}004\ \bar{6}\ .$$

□

Se dice entonces que el número racional $\frac{a}{b}$ posee una *expresión decimal infinita periódica* que tiene la forma:

$$\frac{a}{b} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_n . d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \cdots d_{n+p} d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \cdots d_{n+p} \cdots$$

En este caso, se escribe en forma resumida

$$\frac{a}{b} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_n . \overline{d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \cdots d_{n+p}}$$

y se dice que el período de $\frac{a}{b}$ es $d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \cdots d_{n+p}$.

Ejemplo 5. La fracción $\frac{1}{3}$ se escribe en forma decimal $0{,}33333 \cdots$ por lo que se escribe $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$.

Ejemplo 6. Si se realiza la división de la fracción $\frac{1279}{7}$ se escribe en forma decimal $182{,}714285714285714285 \cdots = 182.\overline{714285}$ por lo que su período es $\overline{714285}$.

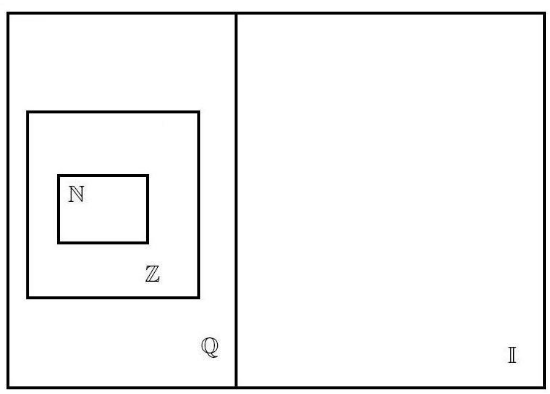
Con ejemplos como los números número $\pi \approx 3{,}14159265358979323846\cdots$, $e \approx 2{,}71728182845904523536028\cdots$ y $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309504880168872 42\cdots$, se ilustra que existen números que no poseen una expresión decimal periódica. A este conjunto de números se le llama "*Conjunto de Números Irracionales*" y se denomina con el símbolo $\mathbb{I}$.

Finalmente, se dice que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es el conjunto de las expresiones decimales infinitas. Como estas son periódicas o no periódicas, un resultado inmediato es que $\mathbb{R}$ es la unión de $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{I}$. Esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Sin embargo, esta forma de concebirlo resulta un tanto imprecisa por cuanto el concepto de número real está intrínsecamente ligado a las operaciones que se definan sobre $\mathbb{R}$. Esta situación se discutirá más ampliamente en la siguiente sección.

Por otra parte, según lo estudiado, el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ está contenido en el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, este a su vez está contenido en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y este a su vez está contenido en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Se puede notar que, aun cuando hemos descrito la forma en que se escriben los números reales no se ha dicho nada acerca de cómo operan los números reales entre sí.

Se iniciará este estudio caracterizando al conjunto de números reales $\mathbb{R}$ pues es en este en donde se realizan la mayoría de actividades a nivel de los cursos de cálculo.

Para esto, se puede decir que un conjunto numérico está determinado por objetos llamados números y por las propiedades que caracterizan las operaciones entre sus números las cuales, conforman la **estructura algebraica** del conjunto numérico.

En este caso particular, para definir el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, se establecerán las propiedades que caracterizan a sus elementos, las cuales son conocidas como *Axiomas*[1] *de campo*. A partir de estas propiedades se irán desarrollando los temas estudiados en secundaria.

1.1.1. Axiomas de Campo

Sobre el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones: una suma $+$ y un producto $\cdot$, para las cuales sus elementos satisfacen las siguientes propiedades:

La suma de los números reales $(\mathbb{R}, +)$.

La suma en los números reales es una operación que toma dos números reales xe y llamados sumandos y les asocia un tercer número $z = x + y \in \mathbb{R}$ llamado *la suma de x e y*. Las propiedades de esta operación son las siguientes:

AS1. **Cerradura:**

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \exists\ z \in \mathbb{R} : z = x + y$$

"La suma de dos números reales es siempre un número real"

AS2. **Asociatividad:**

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$$

" Al sumar tres números reales, la suma de un tercer número al resultado de operar dos cualesquiera de ellos , dará como resultado el mismo número real sin importar como se escojan los dos primeros "

AS3. **Existencia de elemento Neutro:**

$$\exists\ 0 \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ :\ 0 + x = x + 0 = x$$

"Existe un elemento 0 *que al sumarse con cualquier número real* x *en cualquier orden lo deja invariante"*

[1] Un axioma o postulado es una afirmación que se supone cierta y que no necesita ser probada.

AS4. **Existencia de elemento Inverso:**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R}\ :\ (-x) + x = x + (-x) = 0$$

"Para todo número real x existe otro número real $(-x)$ que al ser sumados en cualquier orden da como resultado 0"

AS5. **Commutatividad:**

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ :\ y + x = x + y$$

"El orden en que se sumen dos números reales no altera su resultado"

El producto de los números reales $(\mathbb{R}, \cdot)$.

El producto en los números reales es una operación que toma dos números reales x e y llamados **factores** y les asocia un tercer número $z = x \cdot y \in \mathbb{R}$ llamado **el producto de** x **e** y.

Las propiedades de esta operación son las siguientes:

AM1. **Cerradura:** El producto de dos números reales es siempre un número real:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \exists\, w \in \mathbb{R} : w = x \cdot y$$

"El producto de dos números reales es siempre un número real"

AM2. **Asociatividad:**

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

" Al multiplicar tres números reales, el producto de un tercer número con resultado de multiplicar dos cualesquiera de ellos , dará como resultado el mismo número real sin importar como se escojan los dos primeros "

AM3. **Existencia de elemento Neutro:**

$$\exists\, 1 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

"Existe un elemento 1 que al multiplicarse con cualquier número real x en cualquier orden lo deja invariante"

AM4. **Existencia de elemento Inverso:**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists\, x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\ :\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$$

"Para todo número real x distinto de cero existe otro número real $(x)^{-1}$ que al ser multiplicados en cualquier orden da como resultado 1"

AM5. **Commutatividad:**

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;:\; y \cdot x = x \cdot y$$

"El orden de los factores no altera el producto"

Además de las propiedades mencionadas para la suma y el producto, se tiene otra propiedad que las relaciona y que indica que el producto es distributivo con respecto a la suma, esto es:

[LD.] Ley de Distributividad

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

"La operación producto distribuye una suma de números reales"

Las otras operaciones **resta** y **división** son una consecuencia de estos axiomas como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7. La resta de números reales x e y se define a partir de la suma y la existencia del inverso aditivo de la siguiente manera

$$x - y = x + (-y)$$

Ejemplo 8. La división de números reales x e y se define a partir del producto y la existencia del inverso multiplicativo de la siguiente manera[2]:

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1};\; y \neq 0$$

Se dice que un conjunto numérico que satisface estos axiomas recibe el nombre de **campo**. De aquí que es común referirse al *Campo de los Números reales* $\mathbb{R}$.

Hay que notar que algunas de estas propiedades no se cumplen en los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ siendo el conjunto de los números racionales el primer conjunto en el cual se cumplen todas estas propiedades. Esto es $\mathbb{Q}$ también es un campo.

[2]Como consecuencia inmediata de los axiomas del producto, se tiene que la división entre cero no existe ya que se establece que no existe el inverso multiplicativo de 0.

Ejemplo 9. La resta no es cerrada en $\mathbb{N}$ pues, en general, la resta de dos números naturales no es un número natural. Por ejemplo $3-4=-1 \notin \mathbb{N}$. Esto se debe a que en el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ no existe el inverso aditivo. Sin embargo la resta si es cerrada en el conjunto de números enteros.

Ejemplo 10. La multiplicación en $\mathbb{Z}$ no cumple con el axioma de la existencia de elemento inverso pues en general si $x \in \mathbb{Z}$ entonces el inverso multiplicativo no pertenece a $\mathbb{Z}$.

De los axiomas de campo se deducen todas las propiedades de la aritmética y el álgebra con las que nos familiarizamos en secundaria. Algunos de estos resultados los listamos en la próxima sección.

Propiedades de los Números Reales

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Ley de simplificación para la suma** Si $x+y=x+z$ entonces $x=y$.
2. **Posibilidad de sustracción** Dados x y y existe un único z tal que $x+z=y$. Denotamos a z por $y-x$
3. **Ley de Simplificación para la Multiplicación** Si $xy=xz$ y $x \neq 0$, entonces $y=z$.
4. **Posibilidad de división** Dados $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$ existe un único x tal que $xz=y$. El valor z se denota por $\dfrac{y}{x}$ y se llama cociente de y y x.
5. $x-y=x+(-y)$
6. $-(-x)=x$
7. $(-1)x=-x$

8. $x(y - z) = xy - xz$

9. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

10. Si $y \neq 0, \dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$

11. Si $xy = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$.

12. $(-x) \cdot y = -(xy)$ y $(-x) \cdot (-y) = xy$

Ejemplo 11. Los elementos neutro de la suma y del producto son únicos en $\mathbb{R}$. En efecto, en el caso del producto tenemos que 1 es el elemento neutro de $\mathbb{R}$. Si suponemos que $e \in \mathbb{R}$ es un neutro de la multiplicación entonces

$$1 = 1 \cdot e = e$$

De donde se deduce que solo puede existir un neutro en $\mathbb{R}$. El caso del neutro para la suma se deja como ejercicio al lector. $\square$

Ejemplo 12. Con ayuda de los axiomas de campo se puede mostrar la propiedad (7). Notando que

$$\begin{aligned} x + (-1)x &= 1 \cdot x + (-1 \cdot x) \\ &= (1 + (-1))x \\ &= 0 \cdot x = 0. \end{aligned}$$

Luego, $(-1)x$ debe ser el opuesto de x y por lo tanto $(-1)x = -x$. Como caso particular se tiene que $-(-1) = 1$. $\square$.

Ejemplo 13. Usando el axioma de los inversos aditivos podemos ver que la propiedad (6) es cierta. Como $(-a) + a = 0$ entonces a es el opuesto de $(-a)$ y se tiene que $a = -(a)$ como se indicó. $\square$

Ejemplo 14. De la propiedad (9), se sabe que el cero es elemento absorbente para la multiplicación en $\mathbb{R}$. Para ver que este resultado es cierto se tiene que $x \cdot 1 = x$ pues el 1 es elemento absorbente. Si sumamos $x \cdot 0$ a cada lado, tenemos

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot 0.$$

Aplicando la ley de distributividad se tiene

$$x(1 + 0) = x$$

Como 0 es el neutro de la suma se tiene $x + x \cdot 0 = x$ de donde se concluye que $x \cdot 0$ es neutro de la suma. Por el ejemplo anterior, se tiene que $x \cdot 0$ debe ser 0. $\square$

Es importante conocer y recordar estas propiedades de la suma y el producto ya que, al igual que en los ejemplos anteriores, a partir de ellas se irán construyendo todas las demás propiedades de los números reales tales como, propiedades de desigualdades, las leyes de potencia, leyes de radicales, reglas de ecuaciones, propiedades de logaritmos, etc. De hecho, se puede decir que un cálculo cualquiera hecho con números reales es correcto si su procedimiento y resultado no contradice ninguno de los axiomas de campo o alguna propiedad que se haya deducido a partir de estos. Dicho de otra forma, si se contradice algún axioma de campo o alguna regla deducida a partir de ellos en un cálculo con números reales, el resultado será posiblemente erróneo y el procedimiento será de hecho incorrecto.

El dominio adecuado de las propiedades de los números reales da una "*medida*" para saber cuando los cálculos hechos con números reales son correctos o no. Además, hace ver la necesidad de conocer los aspectos teóricos relativos a los conceptos que se definan sobre los números reales pues, solo si se tiene conocimientos de las propiedades de los conceptos estudiados, se podrá determinar si los cálculos realizados son correctos o no.

En las siguientes páginas, se hará un repaso de las leyes de desigualdades o propiedades del orden en $\mathbb{R}$, potencias y radicales, expresiones algebraicas, Fórmulas Notables, Polinomios y sus propiedades y demás conceptos estudiados en secundaria complementando el estudio con una serie de ejercicios resueltos y una lista final de ejercicios para que el estudiante refuerce lo aprendido.

1.1.2. Axiomas de orden y desigualdades

El ordenamiento tradicional de los números reales en la recta numérica se logra a partir de definir "*un orden*" que nos permita "comparar" números reales y determinar de entre dos números cualesquiera cual es el mayor de los dos.

Para esto se necesita definir la noción de ser "*mayor que* y "*menor que*". Primero se acepta que en los números reales existen un conjunto de números a los que denominamos "**positivos**" que cumplen los siguientes axiomas:

- Si x y y son positivos, entonces $x + y$ y xy son positivos.
- Para todo número real $x \neq 0$ se cumple que x es positivo o $-x$ es positivo pero no ambos.
- El número 0 no es positivo.[3]

De esta forma se dice que un número $x \in \mathbb{R}$ es positivo si y solo si es *mayor que* 0 y se denota por "$x > 0$". Si $x \in \mathbb{R}$ no es positivo se dice que es negativo y se escribe "$x < 0$".

Para definir los símbolos $>, <, \leq, \geq$ se usan los axiomas de orden deducidos a partir de los axiomas de la suma de la siguiente manera:

Axiomas de Orden

RO1. $x < y$ significa que $y - x$ es positivo y se lee "*x es menor que y*"

RO2. $y > x$ significa que $x < y$ y se lee "*y es mayor que x*"

RO3. $x \leq y$ significa que $x < y$ o $x = y$ y se lee *x es menor o igual que y.*

RO4. $y \geq x$ significa que $x \leq y$ y se lee *y es mayor que x*

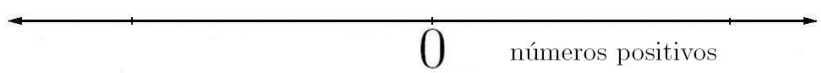
Además si $x \geq 0$ se dice que "x es *no negativo*".

Ejemplo 15. El cuadrado de todo número real es positivo. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces $x^2 = x \cdot x > 0$ por el segundo axioma de los reales positivos. Por otro lado, si x es negativo entonces $(-x)$ es positivo y se tiene que $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2$ y por tanto es positivo. $\square$

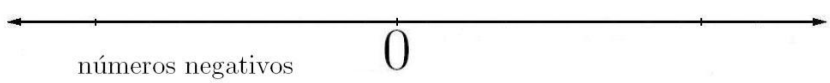
[3] Algunas veces se dice que 0 es positivo y negativo al mismo tiempo.

Ejemplo 16. $1 > 0$ pues $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$. Por el ejemplo anterior se tiene que la desigualdad es válida. $\square$

Convencionalmente, se colocan los números positivos a la derecha del cero y en virtud del axioma [RO1] los podemos colocar en "*orden ascendente*, esto es, si $x < y$ entonces y se coloca a la derecha de x.



Análogamente, se colocan los números negativos a la izquierda del cero y en orden descendente en virtud del axioma [RO1].



Ejemplo 17. Dado que se tiene que $1 > 0$, entonces $2 > 1$ pues $2 - 1 = 1 > 0$. Análogamente, $3 - 2 = 1 > 0$ lo que dice que $3 > 2$, etc. Siguiendo este proceso se logran ordenar los números naturales en el orden usual. De manera similar se ordenan los números enteros negativos pues: $0 - (-1) = 1 > 0$ de donde $0 > -1$, $-1 - (-2) = 1 > 0$, de donde $-1 > -2$, etc. $\square$

Cuando se quiere describir dos desigualdades simultáneas de la forma $x < y$ y $y < z$ para $x, y, z \in \mathbb{R}$, se escribe en forma abreviada $x < y < z$. De manera análoga se interpretan para los símbolos $>, \leq, \geq$.

Ejemplo 18. La expresión $2 \leq x \leq 7$ es equivalente a tener las desigualdades $2 \leq x$ y $x \leq 7$. $\square$

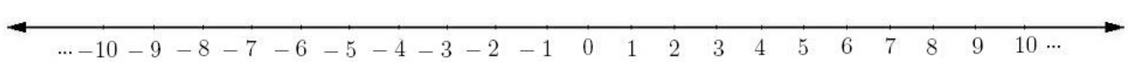
Propiedades de las Desigualdades

Las reglas que se usan normalmente con desigualdades se deducen a partir de los axiomas de orden. Las más importantes se listan a continuación

Dados $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tres números reales las propiedades siguientes son válidas:

1. $1 > 0$
2. **Ley de Tricotomía.** Para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una y solo una de las tres relaciones $x < y, y < x$ o $x = y$.
3. **Propiedad de Transitividad.** Si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.
4. Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$
5. Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $xz < yz$
6. Si $x < y$ entonces $-x > -y$. En particular, si $x < 0$ entonces $-x > 0$.
7. Si $xy > 0$ entonces x y y son ambos positivos o ambos negativos.
8. Si $x < y$ y $z < w$ entonces $x + z < y + w$

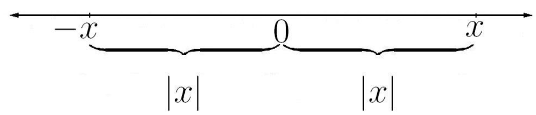
Una vez establecida la relación de orden en los números reales $\mathbb{R}$ se pueden ordenar los números en la recta numérica en orden creciente de forma tal que se puedan separar los números positivos de los números negativos mediante el cero.



Este ordenamiento se logra utilizando las propiedades 1 y 5 reiteradamente dado que si $0 < 1$ entonces $1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 2$. A su vez $2 = 0 + 2 < 1 + 2$ de donde $2 < 3$ etc. De manera análoga se ordenan los números enteros negativos. Además, todos los números reales quedan ordenados bajo esta relación y por lo tanto podemos ubicarlos en una posición única en la recta numérica. Así, para cada número real existe un único punto e la recta numérica que lo representa y recíprocamente, a todo punto de la recta le corresponde un único número real.

1.1.3. Valor Absoluto

Geométricamente, el valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se define como la "*distancia*" del valor x al 0.



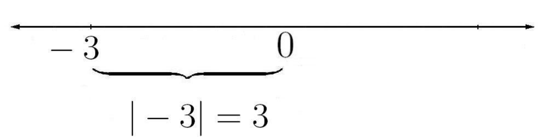
Dado que una distancia es siempre positiva se tiene que el valor absoluto **debe ser siempre positivo**.

De hecho, a partir de las relaciones de orden estudiadas en el apartado anterior y la existencia del inverso aditivo, se puede definir el valor absoluto como "*el valor que sea positivo de x ó $-x$*" y expresar esto de la siguiente manera:

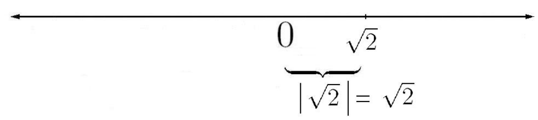
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 19. El valor absoluto de todo número negativo coincide con es su opuesto aditivo pues la distancia de un número real al cero es siempre positiva o cero.

- $|-3| = 3$ representa la distancia del número -3 al cero en la recta numérica.

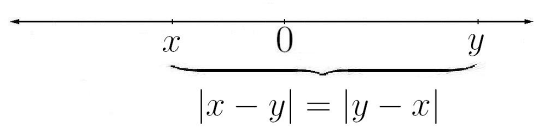


- El valor absoluto de un número positivo coincide con el número mismo.

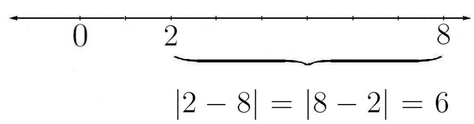


□

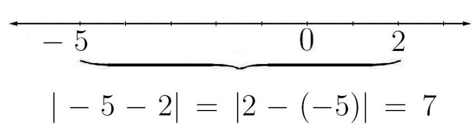
Ejemplo 20. La **distancia entre dos puntos** x y y en la recta real está dada por $\mathrm{d}(x, y) = |x - y| = |y - x|$ debido a que la distancia de x a y es la misma que la distancia de y a x.



Por ejemplo, la distancia de 2 a 8 se escribe $\mathrm{d}(2, 8) = |2 - 8| = |8 - 2| = 6$ lo que indica que hay 6 unidades de distancia entre 2 y 8.



Análogamente, la distancia de -5 a 2 en la recta real esta dada por $\mathrm{d}(-5, 2) = |-5 - 2| = |2 - (-5)| = 7$, lo que indica que entre -5 y 2 hay 7 unidades de distancia.

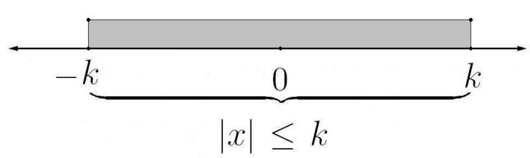


□

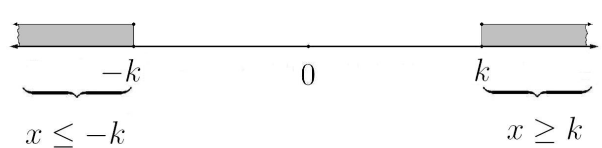
Ejemplo 21. Si x es un número real entonces la expresión $|x-3|$ debe ser o bien $x-3$ o bien su opuesto $-(x-3)=3-x$ y es una cantidad positiva. Sin embargo, no es posible determinar cual de las dos expresiones corresponde al valor absoluto si no se conoce el valor de la x. Si por ejemplo, $x<3$, entonces la expresión $x-3$ es negativa. Esto indica que su valor absoluto debe ser $|x-3|=-(x-3)=3-x$. Por otro lado, si $x>3$, entonces la expresión $x-3$ es positiva y se tiene que $|x-3|-(x-3)=x-3$. Finalmente, si $x=3$ entonces $|x-3|=|3-3|=|0|=0.\square$

Las propiedades más importantes del valor absoluto se dan a continuación:

1. $|x|=0$ si y solo si $x=0$
2. $|-x|=|x|$
3. $|x-y|=|y-x|$
4. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$
6. Si $k\in\mathbb{R}, k\geq 0$ entonces $|x|\leq k$ si y solo si $-k\leq x\leq k$. Gráficamente se tiene:



7. Si $k\in\mathbb{R}, k\geq 0$ entonces $|x|\geq k$ si y solo si $x\leq -k$ o $x\geq k$. Gráficamente se tiene:



8. **Desigualdad Triangular** Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ números reales se cumple
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
9. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
10. $|x - y| \leq |x| + |y|$

1.1.4. Intervalos

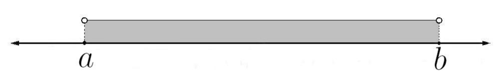
Una vez definidas las desigualdades y la relación de orden en $\mathbb{R}$ se puede definir los intervalos como conjuntos que satisfacen ciertas desigualdades. Se tienen tres tipos de intervalos: **Intervalos abiertos**, **Intervalos cerrados** e **Intervalos semiabiertos**.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ definimos:

- **Intervalo abierto** $]a, b[$**:** Es el conjunto de números reales que están entre a y b sin considerar ni a a ni a b llamados **puntos frontera del intervalo**.

  $$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

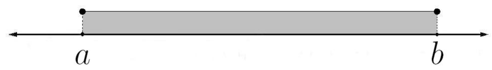
  Gráficamente se representa de la siguiente manera:

- **Intervalo Cerrado** $[a, b]$**:** Es el conjunto de números reales que están entre a y b incluyendo los puntos frontera a y b .

  $$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

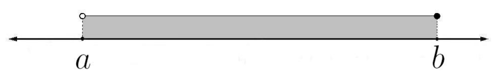
  Gráficamente se representa :



- **Intervalo Semiabierto** $]a, b]$**:** Es el conjunto de números reales que están entre a y b y que contiene el punto frontera b pero no al punto frontera a.

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Gráficamente se representa :



- **Intervalo Semiabierto** $[a, b[$**:** Es el conjunto de números reales que están entre a y b y que contiene el punto frontera a pero no al punto frontera b.

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

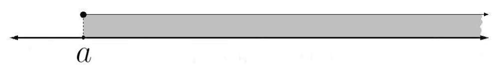
Gráficamente se representa :

Además, cuando se consideran los números reales que son mayores o menores que un número real dado se tiene que uno de los extremos del intervalo es no acotado. Estos tipos de intervalos se escriben utilizando el símbolo de infinito ∞ de la siguiente manera:

- $[a, \infty[$ es el conjunto de números reales que son mayores o iguales a a.

$$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

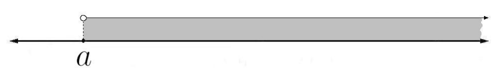
Gráficamente se representa :



- $]a,\infty[$ es el conjunto de números reales que son estrictamente mayores que a

$$[a,\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a<x\}$$

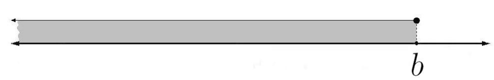
Gráficamente se representa :



- $]-\infty,b]$ es el conjunto de números reales que son menores o iguales que b

$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} : x\leq b\}$$

Gráficamente se representa :



- $]-\infty,b[$ es el conjunto de números reales que son estrictamente menores que b.

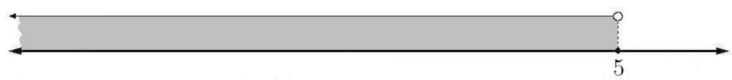
$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R} : x<b\}$$

Gráficamente se representa :

1.1.5. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1. Escriba el el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ como un intervalo y represéntelo gráficamente.

<u>Solución</u>
Los números reales que pertenecen a S son todos los valores reales menores estrictos que 5. La gráfica de S es:



Como este intervalo no es acotado inferiormente, se tiene que $S =]-\infty, 5[$. □

Ejercicio 2. Grafique el conjunto de números reales dado por la desigualdad $-4 \leq x \leq 9$ y expréselo como un intervalo.

<u>Solución</u>

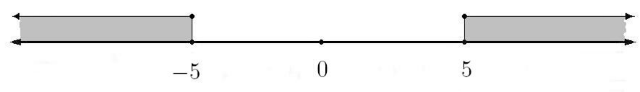
Sea A el conjunto de los valores reales que satisfacen la desigualdad. Estos deben ser simultáneamente mayores o iguales que -4 y menores o iguales que 9 ya que la expresión $-4 \leq x \leq 9$ es equivalente a tener dos desigualdades $-4 \leq x$ y $x \leq 9$. Luego la gráfica es:

Luego, de la gráfica se puede ver que el conjunto de números reales dado por la desigualdad se puede escribir como el intervalo $[-4, 9]$. □

Ejercicio 3. Grafique el conjunto de valores reales para los que se cumple la desigualdad $|x| \geq 5$.

Solución

Recordando que si $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ entonces $|x| \geq k$ si y solo si $x \leq -k$ o $x \geq k$ se tiene que $|x| \geq 5$ es equivalente a tener las desigualdades $x \leq -5$ o $x \geq 5$. Luego la gráfica



representa el conjunto en mención. $\square$

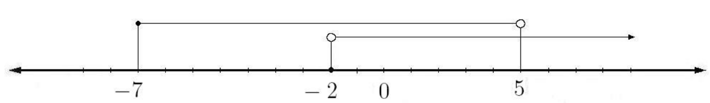
Ejercicio 4. Considere los conjuntos $S = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x < 5\}$. Calcule y grafique los conjuntos $S \cup T$ y $S \cap T$[4].

Solución

El conjunto S es el conjunto de todos los valores reales que son estrictamente mayores que -2 por lo tanto es el intervalo $]-2, \infty[$.

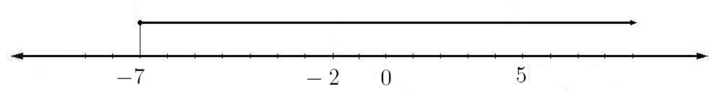
Por otro lado, el conjunto T es el conjunto de valores mayores o iguales que -7 y estrictamente menores que 5 simultáneamente por lo tanto es el intervalo $[-7, 5[$.

Superponiendo en un mismo gráfico ambos conjuntos se tiene

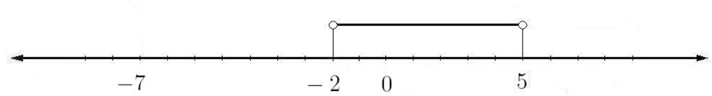


Observando el gráfico realizado notamos que $S \cup T = [-7, \infty[$ cuya gráfica es

[4]Recuerde que unión $S \cup T$ es el conjunto que contiene a los elementos de S o los elementos de T, en tanto que la intersección $S \cap T$ es el conjunto de que contienen los elementos que están simultáneamente en s y T.



Por otro lado $S \cap T$ es el intervalo $]-2, 5[$ cuya gráfica es



Obteniéndose ambos conjuntos $S \cap T$ y $S \cup T$ a partir de su gráfica. $\square$

1.1.6. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Escriba en forma de intervalo los siguientes conjuntos de números reales y represéntelos gráficamente.

   a. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 8\}$ b. $K = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\}$
   c. $T = \{x \in \mathbb{R} : -9 < x < 17\}$ d. $M = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \sqrt{2}\}$
   e. $N = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 7 \wedge |x| > 4\}$ f. $P = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x < 7\}$

Ejercicios tipo B

1. Determine y grafique la unión y la intersección de los siguientes conjuntos

   a. $A = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x < 3\}$; $B = [-5, 4]$
   b. $M = [-2\pi, \frac{\pi}{2}]$; $N = [-\infty, 4\pi]$
   c. $T = [-10, \sqrt{20}]$; $S = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \geq x\}$
   d. $P = \{x \in \mathbb{R} : -9 \geq x\}$; $R = [-3, \infty]$

1.2. Expresiones Algebraicas

Una **expresión algebraica** es una expresión en la cual se operan números reales con letras las cuales representan cantidades numéricas. Estas letras reciben el nombre de **variables** .

Ejemplo 1. Las expresiones $4xy, 5x + 4y, \dfrac{2x + y}{5xy}$ son todas expresiones algebraicas.Aquí x e y están representando números reales cuyo valor es desconocido. $\square$

Un **valor numérico** de una expresión algebraica es el número real que se obtiene una vez que se sustituyen las variables de la expresión algebraica por números reales y se realizan las operaciones indicadas. El **dominio** de una expresión algebraica está formado por el subconjunto de números reales en el que la expresión algebraica no se indefine. Por tanto, para determinar el dominio de la expresión algebraica se deben eliminar todos aquellos valores que causan indefiniciones en la expresión, tales como cuando se obtiene alguna división entre cero.

Ejemplo 2. En la expresión $\dfrac{1}{(x - 2)(x + 3)}$ el dominio es $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$ dado que si se sustituyen $x = -3$ o $x = 2$ en la expresión se obtiene una división entre cero. $\square$

Ejemplo 3. Si $x = 3$ y $y = 2$ el valor numérico de la expresión $4xy$ es $4 \cdot 3 \cdot (2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Es claro que si se cambian los valores a las variables entonces el valor numérico será, por lo general, diferente. $\square$

Los axiomas de campo permiten deducir reglas para manipular expresiones algebraicas. Algunas de estas son las leyes de potencia y las leyes de radicales que mencionamos a continuación.

1.2.1. Potencias y Radicales

Si x es un número real y n es un entero positivo, entonces la expresión x^n significa que x se multiplica por si mismo n veces

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{-veces}}$$

En la expresión x^n, x se llama la **base** y n se llama el **exponente**. La expresión completa se llama genéricamente **potencia** y se lee: "*x elevado a la potencia n*" o simplemente "*x a la n*".

Nota. Se define $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. La expresión 0^0 no está definida.

Leyes de Potencias

Las propiedades que rigen a las potencias están resumidas a continuación:
Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

1. $x^0 = 1, x \neq 0$
2. $x^1 = x$
3. $x^{-1} = \dfrac{1}{x}; x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, si $x \neq 0$
4. $x^n \cdot x^m = x^{m+n}$
5. $(x^m)^n = x^{mn}$
6. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
7. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$, si $b \neq 0$
8. $\dfrac{x^n}{y^m} = \dfrac{1}{x^{m-n}} = x^{n-m}$

Nota. Algunos resultados importantes son los siguientes:

- El cuadrado de todo número real es mayor o igual que cero

$$x^2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ es par} \\ -x^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Ejemplo 1. Al elevar al cuadrado la cantidad $x = -3$ se tiene $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 3 \cdot 3 = 9 \geq 0$. Análogamente con cualquier número positivo x se tiene $x^2 = x \cdot x \geq 0$.

Ejemplo 2. Si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ y se tiene que $x^n = x^{2k} = (x^2)^k$. Del ejemplo anterior se tiene que $x^2 \geq 0$. Luego $(x^2)^k$ también lo es ya que es producto de cantidades positivas y en consecuencia $x^n \geq 0$ si $n \in \mathbb{N}$ es par.

Estas propiedades nos sirven para simplificar expresiones algebraicas en las que están involucrados productos y cocientes de potencias de números reales.

1.2.2. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1. Realice la operación $(2r^4s^2)(-3r^3s^{-3})$ simplificando al máximo.

Solución

Primeramente se colocan los coeficientes numéricos al inicio de la expresión y se asocian las potencias de igual base usando la asociatividad y la commutatividad del producto

$$2 \cdot (-3)(r^4 \cdot r^3)(s^2 \cdot s^{-3})$$

Se aplican leyes de potencia para simplificar el producto de potencias de igual base y eliminar el exponente negativo

$$(2r^4s^2)(-3r^3s^{-3}) = -6r^7s^{-1} = \frac{-6r^7}{s}$$

Obteniendo la expresión simplificada al máximo. □

Ejercicio 2. Simplifique la expresión $\left(\dfrac{15x^{-6}y^5}{3x^{-3}y^{-4}}\right)^{-2}$.

<u>Solución</u>

Se trabaja primero la expresión dentro del paréntesis eliminando el exponente negativo de las potencias.

$$\left(\frac{15x^{-6}y^5}{3x^{-3}y^{-4}}\right)^{-2} = \left(\frac{15x^3y^5y^4}{3x^6}\right)^{-2} = \left(\frac{5y^9}{x^3}\right)^{-2}$$

Se elimina el exponente negativo externo

$$\left(\frac{15x^{-6}y^5}{3x^{-3}y^{-4}}\right)^{-2} = \frac{5^{-2}y^{-18}}{x^{-6}} = \frac{x^6}{25y^{18}}$$

Obteniendo la expresión simplificada al eliminar los exponentes negativos . $\square$

1.2.3. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Realice las operaciones indicadas simplificando al máximo el resultado reales

a. $(4x^2y^5)^4$ b. $(-3x^2y^3)(2x^4y^3)$. c. $\dfrac{18x^5y^4}{3x^3y^2}$

d. $\left(\dfrac{a^4b^3}{2c^3b^{-2}a^2}\right)^2$ e. $\left(\dfrac{3z^2}{b^5c^0}\right)^3\left(\dfrac{bc^2}{9a^4}\right)^3$ f. $\left(\dfrac{24x^5y^6}{6x^3y^4}\right)^2$

g. $\left(\dfrac{6a^4}{b^2c^5}\right)^2\left(\dfrac{cb^2}{2a^3}\right)^3$ h. $\dfrac{7b^3c^2}{8d^2}\cdot\dfrac{16b^3d^2}{10c^6}$ i. $\dfrac{3x3y^4}{7x^4z^2}\cdot\dfrac{35xy^3}{66x^4z^3}$

Ejercicios tipo B

1. Simplifique al máximo las siguientes expresiones

a. $\dfrac{x^{3r+1}y^{r+3}}{x^{r+2}y^{r-1}}$ b. $\dfrac{(x^{b+3}y^{b+2})^{-3}}{x^{-3b}y^{-6}}$

c. $\dfrac{(a^{3n+1}b^{2n-1})^3}{a^{6n+4}b^{2n-5}}$ d. $\dfrac{(x^{r+2}y^{2r+1})^s}{(x^{s+1}y^{2s-2})^r}$

1.2.4. Radicales

Sea x un número real y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo mayor que 1. La **raíz enésima de** x está simbolizada da por $\sqrt[n]{x}$ y representa el valor real y que debe ser elevado a la potencia n para obtener el número x. Simbólicamente esto es:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$$

donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$ si n es par y $x, y \in \mathbb{R}$.El valor n se llama el **índice** del radical y la expresión bajo el símbolo de radical x se llama **subradical**.La expresión completa es llamada genéricamente como **radical**.

Leyes de Radicales

Las siguientes propiedades de los radicales se obtienen a partir de las leyes de potencias estudiadas en el apartado anterior

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si $x \geq 0$
2. $(\sqrt[n]{x^n}) = x$ si $x \geq 0$
3. $(\sqrt[n]{x^n}) = x$ si $x < 0$ y n es impar
4. $(\sqrt[n]{x^n}) = |a|$ si $x < 0$ y n es par

Además, las tres leyes siguientes son válidas para enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ siempre y cuando existan, como numeros reales, las raíces indicadas:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nota. Cuando se trabaja con radicales, se deben considerar los siguientes resultados:

- Si n es par y x es negativo entonces la raíz enésima $\sqrt[n]{x}$ no está definida en los números reales. Esto se puede ver considerando que si $y \in \mathbb{R}$ representa la raíz enésima de x y $n \in \mathbb{N}$ es par entonces

  $$y^n = y^{2k}, k \in \mathbb{N}$$

  y por las leyes de potencia se tiene

  $$y^n = y^{2k} = (y^2)^k.$$

  Dado que y^2 es positivo entonces $x = (y^2)^k \geq 0$ y esto contradice el hecho de que x es negativo.

- De lo anterior se obtiene un resultado que es importante recordar:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x^n} &= x \text{ si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{x^n} &= |x| \text{ si } n \text{ es par} \end{aligned}$$

Radicales como potencias fraccionarias

Sea $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ un número racional donde n es un número entero mayor que 1. Si $x \in \mathbb{R}$ de forma tal que $\sqrt[n]{x}$ existe, entonces se puede escribir un radical como potencia fraccionaria de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Así, se tienen las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
2. $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
3. $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

Con estas propiedades se puede operar los radicales como potencias fraccionarias y por tanto las leyes de potencias establecidas anteriormente son válidas. De hecho, el lector puede comprobar que las leyes de los radicales mencionadas más arriba son las mismas leyes de potencia escritas para potencias fraccionarias.

1.2.5. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1. Simplifique la siguiente expresión $\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}}$; $a > 0, b > 0, x > 0$.

<u>Solución</u>

Se escriben los factores del subradical como potencias de exponente igual al índice:

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = \sqrt[3]{(-2)^3a^3(b^2)^3(x^4)^3}$$

Después, se usa la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ para obtener:

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = \sqrt[3]{(-2)^3a^3(b^2)^3(x^4)^3} = ((-2)^3a^3(b^2)^3(x^4)^3)^{\frac{1}{3}}$$

Posteriormente, se usa la propiedad $(ab)^n = a^nb^n$ para separar las potencias y se obtiene

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = ((-2)^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^3)^{\frac{1}{3}} \cdot ((b^2)^3)^{\frac{1}{3}} \cdot ((x^4)^3)^{\frac{1}{3}}$$

Seguidamente, se aplica la propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$, se simplifican las fracciones de los exponentes y se obtiene:

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = (-2)^{\frac{3}{3}} \cdot (a)^{\frac{3}{3}} \cdot (b^2)^{\frac{3}{3}} \cdot (x^4)^{\frac{3}{3}} = -2ab^2x^4$$

logrando eliminar completamente el radical. □

Ejercicio 2. Simplifique la siguiente expresión $\sqrt[4]{16y^6b^{20}x^{14}}; y > 0, t > 0x < 0$.
Solución
Este ejercicio es similar al anterior salvo por el hecho de que el índice del subradical es par y se tiene la información de que algunas variables son negativas. Se procede de manera análoga al caso anterior pero considerando dichas restricciones.

Se comienza por escribir el subradical como producto de potencias con exponente igual al índice del radical

$$\sqrt[4]{16y^6b^{20}x^{14}} = \sqrt[4]{4^2(y^3)^2(b^{10})^2(x^7)^2}$$

Luego, se debe considerar el hecho de que para cada número real se cumple $\sqrt{x^2} = |x|$. Así, el radical viene quedando de la forma

$$\sqrt[4]{16y^6b^{20}x^{14}} = 4|y^3| \cdot |b^{10}| \cdot |x^7|$$

como $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ por lo que $|x^7| = |x|^7 = (-x)^7 = -x^7$ y entonces la expresión queda

$$\sqrt[4]{16y^6b^{20}x^{14}} = 4|y^3| \cdot |b^{10}| \cdot |x^7| = 4y^3b^{10}(-x^7) = -4x^7y^3b^{10}$$

En este tipo de ejercicios es necesario considerar las restricciones de las variables. Si no se establecen explícitamente las restricciones se deben de considerar los casos posibles que surjan del análisis de las restricciones de las variables en la expresión.□

Ejercicio 3. Simplifique al máximo la expresión $\sqrt[5]{\dfrac{-64s^9t^{10}}{243s^{25}}}$.

Solución

Se simplifica primero el subradical y obtenenos

$$\sqrt[5]{\frac{-64s^9t^{10}}{243s^{25}}} = \sqrt[5]{\frac{-64t^{10}}{243s^{16}}}$$

Luego, se expresa el subradical como producto de potencias con índice igual al radical multiplicadas por otros términos

$$\sqrt[5]{\frac{-64s^9t^{10}}{243s^{25}}} = \sqrt[5]{\frac{-2(2)^5(t^2)^5}{3^5(s^3)^5s}}$$

Luego, se simplifica el radical extrayendo las variables que permiten las propiedades de radicales.

$$\sqrt[5]{\frac{-64s^9t^{10}}{243s^{25}}} = \frac{-2t^2}{3s^3}\sqrt[5]{\frac{2}{s}}$$

Aquí se usa el hecho de que $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$. □

Nota. En general, si $n \in \mathbb{N}$ es impar entonces $\sqrt[n]{-1} = -1$. En efecto como n es impar entonces $-1 = (-1)^n$ y se tiene:

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{(-1)^n} = (-1)^{\frac{n}{n}} = -1.$$

Además, para cualquier n impar y cualquier $x \in \mathbb{R}$ positivo se cumple que

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

1.2.6. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Simplifique al máximo las siguientes expresiones

   a. $s^{\frac{5}{2}}s^{\frac{-4}{3}}s^{\frac{-1}{6}}$ b. $\sqrt[3]{(a^4b^{-2})^6}$ c. $\sqrt[3]{27x^7y^6z^4}$

   d. $\sqrt[3]{3x^2y}\sqrt[3]{9x^5y^2}$ e. $\sqrt[8]{(5x^3y^2s^4)^2}$ f. $\sqrt{64x^{16}y^{20}}$

   g. $\sqrt[4]{81x^{12}y^{24}}$ h. $\sqrt[5]{-x^{5n}z^{-10m}}$ i. $\sqrt[6]{128a^{13}b^{18}c^{37}}$

Ejercicios tipo B

1. Simplificar las siguientes raíces

   a. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{(x^6y^3)^4}}$ b. $\dfrac{\sqrt{24t^4y}}{\sqrt{6t^2y^5}}$ c. $\sqrt[4]{\dfrac{x^{16}}{81y^8z^{12}}}$

   d. $\sqrt[5]{\dfrac{-32x^5y^{10}}{243x^{15}}}$ e. $\sqrt[3]{\dfrac{-125y^7}{432m^{24}}}$ f. $\sqrt[10]{\dfrac{1024t^{30}x^{20}}{y^{50}}}$

   g. $\dfrac{\sqrt{625x^9y^7}}{\sqrt{25x^4y^{10}}}$ h. $\dfrac{\sqrt[3]{64x^9}}{\sqrt[6]{128x^{15}}}$ i. $\sqrt[7]{\dfrac{256y^{28}}{x^{14}}}$

1.2.7. Clasificación de expresiones algebraicas

Algunas expresiones algebraicas las clasificamos de la siguiente manera:

- **Monomio:** Es la expresión algebraica obtenida de multiplicar expresiones de la forma $ax^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. El producto de los números se denomina **coeficiente numérico** en tanto que el producto de las variables se denomina **parte literal**. El coeficiente numérico se antepone siempre a la parte literal. Por ejemplo:

  1. Todo valor numérico se puede considerar como un monomio que no posee parte literal.

2. xy es un monomio cuyo coeficiente numérico es 1 y cuya parte literal es xy
3. $4x^2y^3 \cdot 2w^4$ es un monomio cuyo coeficiente numérico es $4 \cdot 2$ y cuya parte literal es $x^2y^3w^4$.
4. $4^3x^3y^5z^6$ es un monomio cuya parte numérica es 4^3 y cuya parte literal es $x^3y^5z^6$.

Monomios semejantes son aquellos que tienen parte literal idéntica.

Ejemplo 3. $5xy^3$ y $6xy^3$ son monomios semejantes en tanto que $5xy$ es un monomio que no es semejante a ninguno de estos. □

Binomios: Es la expresión algebraica formada por la suma o resta de dos monomios.

Ejemplo 4. Las expresiones $2x + y, 5x^2 + 7yz, 6t^3w + 9st^4$ representan binomios. □

Trinomios: Son expresiones que suman o restan tres monomios.

Ejemplo 5. Las expresiones $x^2 + x + 1, 3x^2y + 5xz - xyz^3$ son trinomios. □

Polinomios: es la suma y/o resta de más de tres monomios.[5]

Ejemplo 6. Las expresiones $4xy + 5xz^2 - 3xyw, x^3y^5 + xz^4 - 3x \cdot \frac{1}{3} \cdot y^3, x^4 - 5x^3 + 3x - 6$ son todas polinomios. □

Expresiones Radicales Son expresiones en las que aparecen polinomios bajo el símbolo de radical.

Ejemplo 7. Expresiones tales como $\sqrt{3x^2+1}, \sqrt{x} + 4y, \sqrt[3]{x^2+3x-6}$ son expresiones radicales. □

Expresiones algebraicas fraccionarias: Son cocientes de expresiones polinomiales y radicales.

Ejemplo 8. Las expresiones : $\dfrac{3x^2+5x}{x^2+1}, \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}$ son expresiones fraccionarias. □

[5] Los binomios y trinomios también son considerados polinomios.

1.2.8. Factorización

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como un producto de otras expresiones algebraicas más simples.

Ejemplo 1. La expresión $xy+xz$ es una expresión algebraica que no se encuentra factorizada pero si usamos la ley de distributividad de los números reales se puede escribir $xy+xz = x(y+z)$ y se obtiene una factorización de la expresión original

Ejemplo 2. Una factorización de $12x^3y^5 - 40x^2y^3$ es $2xy(6x^2y^4 - 20xy^2)$. Sin embargo es posible dar otras factorizaciones de esta expresión si se toma un factor diferente. Así, se podría factorizar como $12x^3y^5 - 40x^2y^3 = 4x^2y^3(3xy^2 - 10)$, siendo esta la factorización máxima que se puede hacer.

Nota. En el ejemplo anterior se encontró dos factorizaciones distintas de una misma expresión algebraica. Esto se debe a que cuando se factoriza una expresión algebraica no siempre se obtiene la "**factorización máxima**". Entenderemos por **la factorización máxima de una expresión algebraica** aquella expresión factorizada obtenida de la expresión original y en la cual ninguno de los factores puede ser, a su vez, factorizado en factores más simples.

Ejemplo 3. La expresión $zx - wy - zw + wx$ no está factorizada pues no es producto de expresiones algebraicas. Sin embargo, se pueden agrupar términos y usar la commutatividad y asociatividad de la suma y la ley de distributividad de los números reales para obtener una expresión factorizada de esta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
zx - wy - zy + wx &= zx - zy + wx - wy && \text{usando la commutatividad de la suma} \\
&= (zx - zy) + (wx - wy) && \text{usando la asociatividad de la suma} \\
&= z(x-y) + w(x-y) = (z+w)(x-y) && \text{usando la ley de distributividad}
\end{aligned}$$

No existe en general una técnica que funcione para factorizar expresiones algebraicas en todos los casos posibles. Sin embargo, existen métodos de factorización particulares que sirven para factorizar ciertos modelos de expresiones algebraicas los cuales se repasan en las siguientes secciones. Es necesario aprender y dominar las técnicas de factorización descritas a continuación ya que estas serán necesarias en los procesos de los cursos de cálculo superior.

1.2.9. Factorización por Factor Común

La factorización por factor común de una expresión algebraica es una consecuencia directa de la ley de distributividad de los números reales.

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} \quad a(b+c) = ab + ac$$

El término a de la ley de distributividad se denomina **factor! común** dado que es un factor que se encuentra presente en ambos sumandos entre paréntesis. Se debe notar que, en la fórmula, los términos a, b, c pueden representar a su vez expresiones algebraicas más complejas.

El factor común está compuesto de un **factor numérico** el cual es el máximo común divisor de los coeficientes numéricos y un **factor literal** que consiste en el producto de las letras que están presentes en cada uno de los términos de la expresión algebraica, cada una de ellas elevada a la potencia mínima en que aparece en los términos.

Ejemplo 1. En la expresión $25x^3y^4z^5 - 10x^2y3z^4 + 5x^2y^6z^3$ el factor numérico es el máximo común divisor de $25, 10, 5$ el cual es 5. Como x, y y z están presentes en todos los términos entonces el factor literal es $x^2y^3z^3$. De esta forma el factor común de la expresión es $5x^2y^3z^3$ □

La técnica general para factorizar usando la técnica de factor común se puede resumir de la siguiente manera:

1. Se identifica el factor común a todos los términos de la expresión.
2. Se escribe la expresión algebraica en términos de este factor común multiplicado por la expresión obtenida al dividir cada término de la expresión original por el factor común.

3. Se factoriza el factor común usando la ley de distributividad.

4. Se simplifica al máximo cada término de la expresión resultante.

Esta técnica se ilustra a continuación mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2. En la expresión del ejemplo anterior $25x^3y^4z^5 - 10x^2y3z^4 + 5x^2y^6z^3$ se identificó el factor común $5x^2y^3z^3$. Luego, dividiendo cada término por el factor común y simplificando al máximo la podemos escribir de la forma

$$25x^3y^4z^5 - 10x^2y3z^4 + 5x^2y^6z^3 = 5x^2y^3z^3\left(5x^3y^4z^5 - 2x^2y3z^4 + x^2y^6z^3\right)$$

usando la ley distributiva para factorizar el factor común. □

Ejemplo 3. Factorice $4mx + 6my + 10m^z$.

Solución

Notando que la variable m está presente en los tres términos y que cada uno de estos tiene a 2 como factor , se ve que el factor común debe ser $2m$. Luego se tiene

$$4mx + 6my + 10m^2z = 2m\left(\frac{4mx}{2m} + \frac{6my}{2m} + \frac{10m^2z}{2m}\right)$$

Simplificando cada cociente del factor de la derecha se obtiene la factorización

$$4mx + 6my + 10m^z = 2m(2x + 3y + 5mz)$$

. □

Ejemplo 4. Factorice completamente la expresión $4a^6b^2c^4 + 8a^5b^3c^4 + 12a^6b^4c^3$.
Solución

Para obtener el coeficiente numérico del factor común se calcula el máximo común divisor de los coeficientes numéricos de los términos de la expresión. En este caso el coeficiente numérico es 4. La parte literal se obtiene considerando todas las letras que aparecen simultáneamente en todos los términos, elevadas al exponente más pequeño que se tenga. En este caso se tiene que la parte literal es $a^5b^2c^3$. De esta forma se tiene que el factor común es $4a^5b^2c^3$. Factorizando se tiene

$$4a^5b^2c^3\left(\frac{4a^6b^2c^4}{4a^5b^2c^3} + \frac{8a^5b^3c^4}{4a^5b^2c^3} + \frac{12a^6b^4c^3}{4a^5b^2c^3}\right)$$

Simplificando el factor de la derecha se tiene la factorización

$$4a^5b^2c^3(ac + 2bc + 3ab^2)$$

. □

Ejemplo 5. Factorice la expresión $x(2x - 3) + 2xy - 3y$.

Solución

Inicialmente no se observa un factor común en los tres términos. Sin embargo se puede observar que los últimos dos términos tienen un factor común. Factorizando esta parte de la expresión se obtiene

$$x(2x - 3) + 2xy - 3y = x(2x - 3) + y(2x - 3)$$

Luego se tiene que el binomio $(2x - 3)$ es un factor común de los dos términos resultantes. Sacando a factor común este término se tiene

$$x(2x - 3) + 2xy - 3y = (2x - 3)(x + y)$$

Este ejercicio enseña que en ocasiones es conveniente factorizar parcialmente la expresión para después observar un factor común general □

Una generalización del método de factorización por factor común es el **método de factorización por agrupación de términos**. El siguiente ejemplo muestra como se aplica esta técnica.

Ejemplo 6. Factorice la siguiente expresión $ax + bx - ay - by$.
Solución
La expresión no tiene un factor común a todos los términos. No obstante, se puede ver que los dos primeros términos y los dos últimos tienen un factor común. Se procede a asociar estos términos y a factorizar parcialmente para obtener

$$ax + bx - ay - by = (ax + bx) + (-ay - by) = x(a + b) - y(a + b)$$

Nuevamente se observa que el binomio resultante en cada término es un factor común a los términos obtenidos. Se factoriza el binomio y obtenemos

$$ax + bx - ay - by = (x - y)(a + b)$$

Logrando factorizar la expresión. $\square$.

1.2.10. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Factorice las siguientes expresiones

a. $12m^2 + 6q + 9n^2$ b. $5x^3y^2 - 5x^2y + 10x$ c. $2x^3 - 8x^2y$

d. $4a^6b^2c^4 + 8a^5b^3c^4$ e. $3a^2 - 6ab$ f. $x - 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$

g. $\frac{1}{2}e^2r - \frac{1}{6}er^2$ h. $6yz^3 - 12y^3z$ i. $xa + xy + zx$

Ejercicios tipo B

1. Factorice las siguientes expresiones

a. $\frac{24}{5}x^2y^2 - \frac{6}{25}xy^2 + \frac{18}{5}x^2y$ b. $\frac{3}{4}t^3k^2 - \frac{1}{12}tk^3 + \frac{5}{6}t^5k^4$

c. $x^2 - xy - xz + x - y - z$ d. $6r^2 - 5rs + 18rt - 15st$

e. $x(x + 1)^2 + xy + y + (x + 1)$
f. $(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1)(x - 1) - (x^2 + 1) + (x - 1)$

1.2.11. Factorización usando fórmulas notables y productos especiales

Algunas expresiones polinomiales se pueden factorizar usando los siguientes modelos de factorización llamados **Fórmulas Notables**. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades

- **Primera Fórmula Notable** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- **Segunda Fórmula Notable** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- **Tercera Fórmula Notable** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- **Cuarta Fórmula Notable** $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
- **Quinta Fórmula Notable**$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

Ejemplo 7. Desarrolle la expresión $(x^r - y^s)^2$.

Solución

Lo primero que notamos es que la expresión consta de el cuadrado de una resta de monomios. Esto indica que se puede aplicar el modelo de la segunda fórmula notable. Realizando el desarrollo con base en esta fórmula se tiene que

$$(x^r - y^s)^2 = (x^r)^2 - 2(x^r)(y^s) + (y^s)^2$$

Luego aplicando leyes de potencia se simplifica el término de la derecha y obtenemos

$$(x^r - y^s)^2 = x^{2r} - 2x^r y^s + y^{2s}$$

el desarrollo de la expresión original. □

Ejemplo 8. Factorice la siguientes siguientes expresiones

a. $49r^2 - 25s^2$ b. $16x^4 - (y - 2r)^2$ c. $x^3 + 64b^3$

.

<u>Solución</u>

1. Se aplica la tercera fórmula notable y se tiene

$$\begin{aligned} 49r^2 - 25s^2 &= (7r)^2 - (5s)^2 \\ &= (7r - 5s)(7r + 2s) \end{aligned}$$

2. En este caso se tiene que $16x^4 = (4x^2)^2$. Luego aplicando nuevamente la tercera fórmula notable se tiene

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2r)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2r)^2 \\ &= (4x^2 - (y - 2r))(4x^2 + (y + 2r)) \\ &= (4x^2 - y + 2r)(4x^2 + y + 2r) \end{aligned}$$

3. En este caso, tomando $64b^3 = (4b)^3$, se aplica la quinta fórmula notable para obtener

$$x^3 + 64b^3 = x^3 + (4b)^3 = (x + 4b)(x - 4bx + (4b)^2 = (x + 4b)(x - 4bx + 16b^2)$$

$\square$

Ejemplo 9. Simplifique la expresión algebraica $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3} &= \frac{(x^2-6x+9)(2x-2)}{(x^2-1)(x-3)}\\ &= \frac{(x-3)^2\cdot 2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}\\ &= \frac{2(x-3)}{x+1} \qquad \text{Usando ley de cancelación}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 10. Simplifique al máximo la fracción racional $\dfrac{x^6-27y^3}{x^2-3y}$.

Solución

Notando que el numerador es un binomio que tiene términos cuyos exponentes son múltiplos de tres, se ve que se puede aplicar el modelo de la cuarta fórmula notable para factorizarlo. Así,

$$\frac{x^6-27y^3}{x^2-3y}=\frac{(x^2-3y)((x^2)^2+x^2\cdot 3y+(3y)^2)}{x^2-3y}$$

Cancelando el término (x^2-3y) y simplificando al máximo se obtiene

$$\frac{x^6-27y^3}{x^2-3y}=x^4+3x^2y+9y^2$$

se obtiene la expresión simplificada. □

Además de las fórmulas notables hay otros modelos de factorización que por lo general resultan de mucha utilidad. Dados $a,b\in\mathbb{R}$ son válidas las siguientes fórmulas

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplo 11. Desarrolle la expresión $(3xy^2 - 5z)^3$.

Solución

Usando la segunda a de las fórmulas anteriores se tiene

$$
\begin{aligned}
(3xy^2 - 5z)^3 &= (3xy^2)^3 - 3(3xy^2)^2 5z + 3(3xy^2)(5z)^2 + (5z)^3 \\
&= 27x^2y^6 - 135x^2y^4 + 225xy^2z^2 + 125z^3
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 12. Simplifique la expresión $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-3)}$.

Solución

La expresión $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ se puede escribir en forma resumida como $(x+1)^3$ en virtud de la fórmula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Luego

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-3)} &= \frac{(x+1)^3}{(x+1)(x-3)} \\
&= \frac{(x+1)(x+1)^2}{(x+1)(x-3)} \\
&= \frac{(x+1)^2}{x-3}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 13. Simplifique al máximo la expresión $\dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$.

Solución

Se puede factorizar el numerador aplicando la tercera fórmula notable y se tiene que $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Además el denominador es equivalente a $(x-3)^3$. Luego podemos simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-9}{x^3-9x^2+27x-27} &= \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^3}\\ &= \frac{(x+3)}{(x-3)^2}\end{aligned}$$

□

1.2.12. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Desarrolle las siguientes expresiones algebraicas

a. $(6x+y)^2$	b. $(4y^5+5n^6)^2$
c. $(x^m-y^n)^2$	d. $(3x^3-8y^4)^2$
e. $(3x^a-5y^m)(5y^m+3x^a)$	f. $(x^{11}-5y^{20})^2$
g. $(x^{m+1}+y^{n+2})^2$	h. $(2a-1)(1+2a)$
i. $(a^2x-by^2)(by^2+a^2x)$	j. $(8x^2y^2-9m^4)^2$
k. $(a^3-b^4)(a^3+b^4)$	l. $(a^2x-by^2)^2$

Ejercicios tipo B

1. Simplifique al máximo las siguientes fracciones

a. $\dfrac{x^2-4}{(5x+7)(x+2)}$	b. $\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n-y^n}$	c. $\dfrac{1-(x-y)^2}{1+(x-y)^2}$
d. $\dfrac{1-9x^{2m+4}}{1+3x^{m+2}}$	e. $\dfrac{y^4-1}{1+y^2}$	f. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$
g. $\dfrac{16x^2y^4-25a^6}{4xy^2+5a^3}$	h. $\dfrac{x^6-27y^3}{x^2-3y}$	i. $\dfrac{x^{2m+2}-64}{x^{m+1}-8}$

1.2.13. Otros tipos de factorización

Factorización por completación de cuadrados del trinomio $ax^2 + bx + c$

Esta técnica es una consecuencia inmediata de las fórmulas notables. Cuando se tiene que factorizar una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ y no se tiene una factorización inmediata por el método de inspección, se trata de reescribir la expresión usando el término que contiene a x^2 y el término que contiene a x como los dos primeros términos de la expansión de alguna de las dos primeras fórmulas notables. Luego, sumando y restando lo que sería el tercer término de dicha fórmula, se procede a completarla asociando los términos adecuados. Después de simplificar, normalmente se tiene una expresión factorizable mediante la tercera fórmula notable. Finalmente, Se procede a factorizar y simplificar los términos obtenidos

Ejemplo 14. Factorice el trinomio $x^2 + 4x + 1$ por completación de cuadrados.

Solución

Primero que todo se nota que los dos primeros términos del trinomio son "*casi*" el desarrollo del binomio $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, solo falta el 4. Como solo se tiene un 1 en vez del 4 "*completamos*" el término faltante sumando y restando tres unidades. Con esto se obtiene una expresión equivalente a la primera

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 1 + 3 - 3 = (x^2 + 4x + 4) - 3.$$

Asociando los términos que completan la primera fórmula notable se puede escribir en forma reducida

$$x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 4x + 4) - 3 = (x + 2)^2 - 3.$$

Esta última expresión se puede interpretar como una diferencia de cuadrados y ser factorizada utilizando la tercera fórmula notable de la siguiente manera:

$$x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3 = (x + 2)^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3}).$$

El lector puede verificar que si aplica el método del discriminante se obtendrá la misma factorización. □

Ejemplo 15. Complete el cuadrado del trinomio $x^2 + x + 1$.

Solución

Tomando los dos primeros términos del trinomio x^2+x se supone que son los dos primeros términos de la expansión de la primera fórmula notable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2)$. Esto es:

$$a^2 = x^2 \quad \text{y} \quad 2ab = x$$

de la primera igualdad se concluye que $a = x$. Sustituyendo en la segunda se tiene $2xb = x$. Suponiendo que $x \neq 0$, se despeja b y se tiene que $b = \frac{1}{2}$ por lo que $b^2 = \frac{1}{4}$. De esta manera, se puede sumar y restar el término $\frac{1}{4}$ en el trinomio y simplificar para obtener

$$x^2 + x + 1 = (x^2 + 2 \cdot x\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Esta última expresión es la completación del cuadrado del trinomio x^2+x+1 pedida.
. $\square$

La técnica de completación de cuadrados será indispensable en los procesos de cálculo superior por lo que se recomienda practicarla exhaustivamente.

Factorización del Trinomio de Segundo Grado $ax^2 + bx + c$

Un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ en ocasiones se puede factorizar en $\mathbb{R}$. Para esto se considera el **discriminante** Δ asociado a este trinomio el cual es el valor

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

existen tres casos:

- $\Delta > 0$. Hay dos factores diferentes. En este caso el trinomio se factoriza en la forma
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
donde
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$. Hay un factor repetido. En este caso, como $\Delta = 0$, tanto x_1 como x_2 de las fórmulas anteriores se reducen a
$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$
Entonces la factorización del trinomio es
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

- $\Delta < 0$. No se puede factorizar en $\mathbb{R}$ pues no existen radicales con subradical negativo en $\mathbb{R}$

Ejemplo 1. Factorice el trinomio $x^2 + 5x - 7$.

Solución

Analizando el discriminante vemos que $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 25 + 28 = 53 > 0$. Por lo tanto el trinomio se puede factorizar en términos de dos polinomios lineales. Calculando los valores de x_1y x_2 se tiene que
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{53}}{2}; x_2 = \frac{-5 + \sqrt{53}}{2}$$
De donde la factorización es
$$x^2 + 5x - 7 = \left(x - \frac{-5 - \sqrt{53}}{2}\right)\left(x - \frac{-5 + \sqrt{53}}{2}\right)$$
. □

Ejemplo 2. Factorice el siguiente trinomio $5x^2 - 3x - 9$.

Solución
Calculando el discriminante se tiene que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -9 = 9 + 180 = 189 > 0$. Luego los valores de x_1 y x_2 son:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{189}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{189}}{2}$$

de donde la factorización del trinomio es:

$$5x^2 - 3x - 9 = 5\left(x - \frac{3 - \sqrt{189}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{189}}{2}\right)$$

Se debe notar que cuando el coeficiente de x^2 es diferente de 1 este aparece al inicio de la factorización. □

Ejemplo 3. Indique si los trinomios $-x^2-5x+2$ y x^2+x+1 son factorizables en $\mathbb{R}$.

Solución

Para el trinomio $-x^2-5x+2$ se tiene que su discriminante es $\Delta = (-5)^2-4\cdot(-1)\cdot 2 = 25 + 8 = 33 > 0$, por lo tanto es factorizable en $\mathbb{R}$. Más aun, del cálculo del discriminante se puede indicar que tiene dos factores polinomiales de grado 1 sin necesidad de calcularlos.

En el segundo caso, el trinomio x^2+x+1 tiene por discriminante $\Delta = 1^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$ por lo que el trinomio no es factorizable en $\mathbb{R}$ [6]. En este caso se dice que $x^2 + x + 1$ es un **polinomio irreducible** en $\mathbb{R}$. □

Ejemplo 4. Factorice el trinomio $3x^2 + 18x + 27$.

Solución
Calculando el discriminante $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27 = 324 - 324 = 0$. Luego el trinomio tiene un factor polinomial de grado 1 repetido y por tanto su factorización es:

[6] Se verá en cursos más avanzados que este trinomio admite una factorización completa sobre el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$

$$3x^2 + 18x + 27 = 3(x - \frac{-18}{6})^2 = 3(x + 3)^2.$$

Note que el coeficiente de la potencia x^2 se debe colocar en la factorización a la izquierda del cuadrado del binomio. □

1.2.14. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Complete el cuadrado de las siguientes expresiones .

   a. $x^2 + 4x$ b. $4y^2 - 12xy$ c. $x^2 + 20x + 1$

   d. $3x^2 + 5x$ e. $x^2 - 10x + 24$ f. $x^2 - 5x - 5$

   g. $5x^2 - 7x + 8$ h. $4x^2 - 5x + 3$ i. $6x^2 + 5x - 4$

2. Factorice las siguientes expresiones hallando las raíces.

   a. $x^2 - 16x + 63$ b. $6y^2 + 7y - 10$ c. $2x^2 + x - 6$

   d. $12a^2 + 5a - 2$ e. $11t^2 - 153t - 180$ f. $6 + 31y - 30y^2$

   g. $5x^2 + 41x + 8$ h. $8x^2 + 50x + 63$ i. $5 - 9t - 2t^2$

Ejercicios tipo B

1. Simplifique al máximo las siguientes expresiones algebraicas

   a. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x - 2}{x - 3}$ b. $\dfrac{12 - y - y^2}{y^3 + 3y^2}$ c. $\dfrac{6}{x^2 - 4} - \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

   d. $\dfrac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ e. $\dfrac{3t}{t + 2} + \dfrac{5t}{t - 2} + \dfrac{40}{t^2 - 4}$ f. $\dfrac{\frac{5}{x+1} + \frac{2}{x+3}}{\frac{x}{x+1} + \frac{7}{x+3}}$

1.3. Polinomios

En esta sección repasamos algunos teoremas sobre polinomios en una variable. Se dice que un **polinomio de grado** n en la variable x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;\ \ a_n \neq 0.$$

El **grado de un polinomio** es el exponente de la potencia más alta del polinomio.

Ejemplo *1.*

1. $P(x) = ax + b$ es un polinomio de grado 1 en la variable x.
2. El trinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\ a \neq 0$ es un polinomio de una variable de grado 3
3. $P(x) = x^5 - 3x + 2$ es un polinomio de grado 5 en la variable x

Se dice que un número real $\alpha \in \mathbb{R}$ es un **cero** o **raíz** de un polinomio P(x) si y solo si $P(\alpha) = 0$.

Factorizar al máximo un polinomio consiste en factorizarlo de forma tal que sus factores sean polinomios más simples e irreducibles en $\mathbb{R}$.

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios Para sumar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sumamos los términos semejantes de estos y se simplifica al máximo.

Ejemplo *2.* Calcule la suma de los polinomios $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1$ y $Q(x) = -6x^3 + 4x^2 - 7x - 2$

Solución: Para calcular la suma, agrupamos los términos semejantes de cada polinomio se suman y se simplifica al máximo. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
(P + Q) &= P(x) + Q(x) \\
&= (3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1) + (-6x^3 + 4x^2 - 7x - 2) \\
&= (3x^4) + (5x^3 - 6x^3) + (-2x^2 + 4x^2) + (-x - 7x) + (1 - 2) \\
&= 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x - 1
\end{aligned}$$

Luego la suma de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $(P+Q)(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x - 1$

Resta de polinomios En forma análoga a la suma, la resta de polinomios se realiza restando los términos semejantes y simplificando al máximo.

Ejemplo 3. Calcule la resta de los polinomios $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1$ y $Q(x) = -6x^3 + 4x^2 - 7x - 2$.
Respuesta: Procediendo de manera análoga a la suma, se asocian los términos semejantes, se restan y posteriormnente se simplifica al máximo.

$$\begin{aligned}
(P-Q)(x) &= P(x) - Q(x) \\
&= (3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1) - (-6x^3 + 4x^2 - 7x - 2) \\
&= (3x^4) + (5x^3 - (-6x^3)) + (-2x^2 - 4x^2) + (-x - (-7x)) + (1 - (-2)) \\
&= 3x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 6x - 1
\end{aligned}$$

Luego la resta de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $(P-Q)(x) = 3x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 6x - 1$

Multiplicación de polinomios Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios. Para realizar la multiplicación de polinomios $P(x) \cdot Q(x)$, se usa la ley de distributividad [LD] de los números reales

$$a(b+c) = ab + ac$$

distribuyendo cada término del polinomio $P(x)$ con cada término del polinomio $Q(x)$. Posteriormente se suman los términos semejantes y se simplifica al máximo el resultado.

Ejemplo 4. **Multiplicación de un monomio por un polinomio**

Realice la multiplicación $4x^3 \cdot (5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 5)$.

Solución
Aplicando la ley de distributividad multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio y se obtiene:

$$4x^3 \cdot (5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 5) = 4x^3 \cdot 5x^4 + 4x^3 \cdot 4x^3 + 4x^3 \cdot (-5x^2) + 4x^3 \cdot (-x) + 4x^3 \cdot 5)$$

Simplificando se obtiene

$$4x^3 \cdot (5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 5) = 20x^7 + 16x^6 - 20x^5 - 4x^4 + 20x^3.$$

Ejemplo 5. **Multiplicación de dos polinomios**
Calcule el resultado de multiplicar los polinomios $x^3 - 5x + 3$ y $3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1$.
Solución
Multiplicando cada término de $x^3 - 5x + 3$ por cada término de $3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(x^3 - 5x + 3) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1) &= (x^3 \cdot 3x^5) + (x^3 \cdot 5x^4) \\ &+ (x^3 \cdot (-2x^2)) + (x^3 \cdot 4x) + (x^3 \cdot 1) \\ &+ (-5x \cdot 3x^5) + (-5x \cdot 5x^4) \\ &+ (-5x \cdot (-2x^2)) + (-5x \cdot 4x) + (-5x \cdot 1) \\ &+ (3 \cdot 3x^5) + (3 \cdot 5x^4) + (3 \cdot (-2x^2)) \\ &+ (3 \cdot 4x) + (3 \cdot 1)\end{aligned}$$

Se simplifican los términos del lado derecho y obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^3 - 5x + 3) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1) &= 3x^8 + 5x^7 \\ &- 2x^5 + 4x^4 + x^3 \\ &- 15x^6 - 25x^5 \\ &+ 10x^3 - 20x^2 - 5x \\ &+ 9x^5 + (15x^4) - 6x^2 \\ &+ 12x + 3\end{aligned}$$

Sumando los términos semejantes del lado derecho de la igualdad anterior y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}(x^3 - 5x + 3) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 4x + 1) &= 3x^8 + 5x^7 - 15x^6 + \\ &\quad -18x^5 + 19x^4 + 11x^3 \\ &\quad -26x^2 + 7x + 3.\end{aligned}$$

División de Polinomios Si $P(x)$ y Q(x) son dos polinomios en la variable x,la división $P(x) \div Q(x)$ se realiza de manera similar a la división de números reales. Si se divide en $\mathbb{R}$, un número p por un número q tal que $q \leq p$, se obtiene un cociente c y un residuo r de acuerdo al **Algoritmo de la División Euclideana**. Por ejemplo, si se divide $7 \div 2$ se obtiene:

$$\begin{array}{lcl} 7 & \div & 2 = 3 \\ 1 & & \end{array}$$

y se escribe $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Análogamente, si el grado del polinomio $Q(x)$ es menor o igual al del polinomio $P(x)$ se puede realizar la división $P(x) \div Q(x)$ para obtener un polinomio cociente $C(x)$ y un residuo $R(x)$ de grado menor estricto que el grado de $Q(x)$. Luego se puede escribir

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

La técnica general para dividir polinomios la mostramos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6. Realizar la división del polinomio $x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ por el polinomio $x^2 - 1$.

Solución

Para dividir el polinomio $x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ por el polinomio $x^2 - 1$, los colocamos de forma tradicional el el símbolo de división. Se inicia dividiendo el término de potencia mayor del dividendo entre el término de potencia mayor del divisor. Al igual que en la división de números enteros,se multiplica el valor obtenido por cada uno de los términos del divisor. El resultado de cada multiplicación se coloca debajo de la potencia de x correspondiente en el dividendo. Posteriormente se hace la resta y se calcula el residuo de este primer paso

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & + & 2 & x^2-1 \\ \cline{8-8}
-x^3 & & & + & x & & & x \\ \hline
0 & + & 2x^2 & - & 4x & + & 2 &
\end{array}
$$

Se repite el proceso hasta que el polinomio residuo sea de grado estrictamente menor que el grado del divisor. En este caso, se divide el término $2x^2$ del dividendo por el término x^2 del divisor.

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & + & 2 & x^2-1 \\ \cline{8-8}
-x^3 & & & + & x & & & x+2 \\ \hline
0 & + & 2x^2 & - & 4x & + & 2 & \\
 & - & 2x^2 & & & - & 2 & \\ \cline{3-7}
 & & 0 & - & 4x & - & 2 &
\end{array}
$$

Como el polinomio residuo de esta segunda división es de grado menor que el grado del polinomio divisor, se termina el proceso de división y se escribe

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = (x^2 - 1)(x + 2) + (-4x - 2)$$

o equivalentemente,

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = (x + 2) + \frac{-4x - 2}{x^2 - 1}$$

Y se dice que el polinomio $(x^2 + 2)$ es el cociente de la división y que el polinomio $-4x - 2$ es el residuo de la división. $\square$

Ejemplo 7. Realice la división de $x^5 - x - x^3 + 3$ por $x^2 + 3x + 5$.

<u>Solución</u>

Se procede como en el ejemplo anterior a colocar el polinomio dividendo y el polinomio divisor en el símbolo de división pero colocando el polinomio dividendo en orden descendente de potencia o en su forma *estandar*. Además en el polinomio dividendo se debe dejar espacio suficiente para los términos de las potencias que no están presentes, ya que, durante el proceso pueden aparecer en los polinomios residuos.En este caso para los términos de las potencias x^4 y x^2.

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
x^5 & + & 0x^4 & - & x^3 & + & 0x^2 & - & x & + & 3 & x^2+3x+5 \\ \cline{12-12}
-x^5 & - & 3x^4 & - & 5x^3 & & & & & & & x^3-3x^2+3x+6 \\ \cline{1-11}
0 & - & 3x^4 & - & 6x^3 & + & 0x^2 & - & x & + & 3 & \\
 & & 3x^4 & + & 9x^3 & + & 15x^2 & & & & & \\ \cline{3-11}
 & & 0 & + & 3x^3 & + & 15x^2 & - & x & + & 3 & \\
 & & & - & 3x^3 & - & 9x^2 & - & 15x & & & \\ \cline{5-11}
 & & & & 0 & + & 6x^2 & - & 16x & + & 3 & \\
 & & & & & - & 6x^2 & - & 18x & +- & 30 & \\ \cline{7-11}
 & & & & & & 0 & - & 34x & - & 27 &
\end{array}
$$

Finalmente se tiene que

$$x^5 - x - x^3 + 3 = (x^2 + 3x + 5)(x^3 - 3x^2 + 3x + 6) + (-34x - 27)$$

o equivalentemente,

$$\frac{x^5 - x - x^3 + 3}{x^2 + 3x + 5} = x^3 - 3x^2 + 3x + 6 + \frac{-34x - 27}{x^2 + 3x + 5}$$

y se dice que $x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ es el polinomio cociente y $-34x - 27$ es el polinomio residuo. $\square$

Ejemplo 8. Encuentre el residuo la división del polinomio $5x^4 - x^2 + 7$ por el polinomio $x - 2$.

<u>Solución</u>

Procediendo de manera análoga a al ejercicio anterior en el dividendo se dejan los espacios de los términos de las potencias de x que no aparecen. Realizando el proceso de división vamos dividiendo el término de la potencia mayor del dividendo y de los residuos parciales, en cada paso , por el término de la potencia mayor del divisor. Se colocan los productos debajo de las potencias correspondientes en los residuos parciales. Se cambia el signo de los productos pues se realiza una resta y se tiene:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
5x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & + & 0\text{x} & + & 7 & & & x-2 \\
\cline{12-12}
-5x^4 & - & 10x^3 & & & & & & & & & 5x^3 - 10x^2 - 21x - 42 \\
\cline{1-11}
0 & - & 10x^3 & - & x^2 & + & 0x & + & 7 & & & \\
 & & 10x^3 & - & 20x^2 & & & & & & & \\
\cline{3-11}
 & & 0 & - & 21x^2 & + & 0x & + & 7 & & & \\
 & & & & 21x^2 & - & 42x & & & & & \\
\cline{5-11}
 & & & & 0 & - & 42x & + & 7 & & & \\
 & & & & & & 42x & - & 84 & & & \\
\cline{7-11}
 & & & & & & & - & 77 & & &
\end{array}
$$

Luego el residuo de la división es -77 $\square$

En el ejemplo anterior se dividió un polinomio $P(x)$ por un polinomio lineal de la forma $(x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Se debe notar que en este caso, el residuo de la división es siempre una constante pues el proceso de la división se detiene cuando el residuo parcial llega a tener grado menor estricto que el divisor.

Es notable el hecho de que durante todo el proceso no se necesitaron las potencias de la variable x de los polinomios dividendo y divisor ni de los residuos parciales. El proceso se realizó trabajando únicamente con los coeficientes de las potencias únicamente.

En el caso particular de divisiones de la forma $\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)}, \alpha \in \mathbb{R}$, existen teoremas que nos ayudan a simplificar los procesos de factorización y división de. Algunos de estos resultados los estudiaremos en las siguientes secciones.

1.3.1. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Calcule el cociente $C(x)$ y el residuo $R(x)$ de las siguientes divisiones de polinomios

   a. $(x^2+x-1)\div(x-1)$ b. $(x^3-4x^2-x+1)\div(x^2+1)$

   c. $(x^4+3x^2-x-1)\div(x+2)$ d. $(2x^3+3x^2-6x+1)\div(x-1)$

   e. $(3x^4+9x^3-4x^2-9x+3)\div(x^3+3)$ f. $(x^2+x^4+-2x-5x^3-10)\div(x^2-3)$

   g. $(x-x^2+5x^3-4x^4)\div(-x^2-1)$ h. $(x^5-4x^4-3x^3+x-6)\div(x^2+x-1)$

   i. $(-6x^5-3x^4+4x^2-5x-2)\div(x+1)$ j $(x^4-6x^3-2x^2-5x+7)\div(x-3)$

Ejercicios tipo B

1. Realice las siguientes divisiones de polinomios indicando el cociente y el residuo.

   a. $(x^3-x)\div(x-1)$ b. $(x^6-3x^3+2)\div(x^2-x-1)$

   c. $(\frac{1}{2}x^3+x^2-x-3)\div(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4})$ d. $(x^5-x+3)\div(3x-2)$

   e. $(x^6-5x-3)\div(4x^2-x-5)$ f. $(x^7-x^3+4)\div(x-2)$

   g. $(x^5-x^4+x-3)\div(\frac{1}{5}x-3)$ h. $(x^4-1)\div(x^2-x+3)$

   i. $(x^6-3x^2+5)\div(x^3-x+x^2)$ j. $(x-x^4+x^5-x^3)\div(1-3x^2)$

1.3.2. División Sintética

La **división sintética** es un proceso que se puede hacer entre un polinomio $P(x)$ de grado mayor o igual a uno y un polinomio $(x-\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$.

El cociente y el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $(x-\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ pueden hallarse realizando las siguientes indicaciones:

1. El cociente es un polinomio en la variable x y cuyo grado es 1 menos que el grado del dividendo.
2. El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.
3. El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiado de signo y sumando el producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.
4. El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumando esta producto con el término constante del dividendo.

Si $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ y se hace la división por un polinomio de la forma $x-\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ y si $r(x)$ es el residuo de la división entonces un esquema gráfico del procedimiento es el siguiente:

$$
\begin{array}{ccccccc|c|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 & & -\alpha \\
 & a_n\cdot\alpha & c_{n-1}\alpha & c_{n-2}\alpha & \cdots & c_2\alpha & c_1\alpha & & \\
\hline
a_n & a_{n-1}+a_n\cdot\alpha & a_{n-2}+c_{n-1}\alpha & a_{n-3}+c_{n-2}\alpha & \cdots & a_1+c_2\alpha & a_0+c_1\alpha & & \\
\shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \shortparallel & & \\
a_n & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_1 & r(x) & & \\
\hline
\end{array}
$$

Luego el polinomio cociente $c(x)$ es

$$c(x) = a_nx^{x-1} + c_{n-1}x^{n-2} + c_{n-2}x^{n-3} + \cdots + c_2x + c_1$$

Además se debe notar que el residuo de la división es siempre $r(x) = a_0 + c_1\alpha$, el último término de la división sintética.

La ventaja de esta técnica radica en que utiliza solamente los coeficientes del polinomio y el término constante cambiado de signo lo que permite un calculo muy ágil del cociente y el residuo.

Ejemplo 9. Realice la división del polinomio $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x + 3$ por el polinomio $x + 5$

<u>Solución</u>

Cambiando el signo al término constante del polinomio $x + 5$ se obtiene la raíz -5 ,luego, colocando los coeficientes del dividendo y realizando la división se obtiene:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -7 & -1 & 3 & -5 \\ \cline{6-6} & -5 & 0 & 35 & -170 & \\ \hline 1 & 0 & -7 & 34 & -167 & \end{array}$$

Luego el polinomio cociente $c(x)$ y el residuo $r(x)$ son

$$c(x) = x^3 - 7x + 34, \quad r(x) = -167$$

□

Ejemplo 10. Calcule el cociente y el residuo de la división de $x^5 - 3x^3 - x + 8$ por el polinomio $x - 3$.

<u>Solución</u>

En este caso la raíz o cero del polinomio $x - 3$ es $x = 3$. Como en el polinomio dividendo faltan algunas potencias se debe dejar los campos respectivos en el ordenamiento de los coeficientes ya que en el polinomio cociente podrían estar presentes.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 8 & 3 \\ \cline{7-7} & 3 & 9 & 18 & 54 & 159 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & 18 & 53 & 167 & \end{array}$$

Luego el polinomio cociente $c(x)$ y el residuo $r(x)$ son

$$c(x) = x^4 + 3x^2 + 6x^3 + 18x + 53, \quad r(x) = 167$$

$\square$

Ejemplo 11. Calcule el cociente y residuo de la división $\dfrac{6x^4 - 5x^2 + 4}{2x + 6}$

<u>Solución</u>

Notando que

$$\frac{6x^4 - 5x^2 + 4}{2x + 8} = \frac{6x^4 - 5x^2 + 4}{2 \cdot (x + 4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x^4 - 5x^2 + 4}{x + 4}$$

Luego se puede hacer la división de $\dfrac{6x^4 - 5x^2 + 4}{2x + 8}$ por $x + 4$. El cociente obtenido se divide por 2 para obtener el cociente de la división original en tanto que el residuo es el mismo de la división original.

Realizando el cálculo se obtiene

$$\begin{array}{ccccc|c}
6 & 0 & -5 & 0 & 4 & -4 \\
\cline{6-6}
 & -24 & 96 & -364 & 1456 & \\
\hline
6 & -24 & 91 & -364 & 1460 &
\end{array}$$

Luego el cociente y residuo de la división original son

$$c(x) = \frac{1}{2}(6x^3 - 24x^2 + 91x - 364) = 3x^3 - 12x^2 + \frac{91}{2}x - 182; \quad r(x) = 1460$$

$\square$

El ultimo ejemplo es un caso particular de la siguiente situación: Si $P(x)$ se divide por un polinomio de la forma $ax + b = a(x + \frac{b}{a}; a \neq 0$ entonces si se divide $P(x)$ por $(x + \frac{b}{a})$ se tiene un cociente $c(x)$ y un residuo $r(x)$. Luego

$$\frac{P(x)}{x+\frac{b}{a}} = c(x) + \frac{r(x)}{x+\frac{b}{a}}$$

entonces la división original sería

$$\frac{P(x)}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{P(x)}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \cdot \left(c(x) + \frac{r(x)}{x+\frac{b}{a}} \right) = \frac{c(x)}{a} + \frac{r(x)}{ax+b}$$

De donde se ve que ell residuo no cambia en la división original.

1.3.3. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Calcule el cociente y el residuo de las siguientes divisiones usando división síntética.

   a. $x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \div (x-2)$ b. $x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \div (x-1)$

   c. $x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 6x + 2 \div (x+1)$ d. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 22 \div (x-2)$

   e. $-7x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 24x + 17 \div (x-4)$ f. $-16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \div (x-2)$

Ejercicios tipo B

1. Calcule el cociente y residuo de las siguientes divisiones.

   a. $x^3 - x \div (3x-4)$ b. $x^4 - 4x^2 - x + 5 \div (x - \frac{1}{3})$

   c. $ax^4 - 3ax^2 - 2ax + 1 \div (x+2)$ d. $x^4 - (a-1)x - 3 \div (x-a)$

   e. $x^5 - 4ax - 4x^2 \div (ax+1)$ f. $3x^4 - x^2 - 3 \div (5ax + 3a)$

1.3.4. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio en una variable real x consiste en expresarlo como producto de polinomios de grado menor.

$$P(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot \cdots \cdot Q_n(x); \quad \text{grad}(Q_i(x)) < \text{grad}(P(x)) \ \ \forall \ i = 1, 2, \cdots n.$$

Ejemplo 1. La factorización de $x^2 - 1$ se obtiene aplicando la tercera fórmula notable. Así

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Ejemplo 2. La factorización del polinomio $x^3 - 1$ se obtiene aplicando la cuarta fórmula notable. Así se tiene que

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

□

La factorización de un polinomio se dice que está realizada al máximo si todos los factores de $P(x)$ no pueden ser factorizados en factores polinomiales de grado menor.

Ejemplo 3. Dado el polinomio $x^8 - 1$ se puede factorizar de las siguientes maneras:

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$$

También se puede factorizar como

$$x^8 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

o bien

$$x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

El lector puede verificar que el último polinomio de la derecha en la última expresión, se puede factorizar de la forma

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

de donde se obtiene la factorización

$$\begin{aligned} x^8 - 1 &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

Sin embargo, solo la última factorización es la factorización máxima de $x^8 - 1$ en $\mathbb{R}$ dado que ninguno de los factores de esta expresión se pueden factorizar en factores polinomiales más simples. De hecho los factores cuadráticos tienen discriminante menor que cero lo que indica que son polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$. $\square$

Dado que un polinomio P(x) es una expresión algebraica en la variable x, la factorización de $P(x)$ se rige por los mismos principios de la factorización de expresiones algebraicas. No obstante existen algunos resultados que nos permiten realizar la factorización de forma más rápida y eficiente.

Teoremas sobre Polinomios

Algunos de los teoremas relativos sobre polinomios que son útiles para factorizar polinomios son los siguientes:

Teorema del Residuo: Si un polinomio $P(x)$ se divide por un polinomio de la forma $(x-\alpha)$, entonces el residuo de la división será $P(\alpha)$.

Ejemplo 4. Calcule el residuo de la división $3x^3 - 9x^2 - 4x + 20 \div (x-3)$.
<u>Solución</u>

Se puede hacer la división sintética para conocer el residuo. Sin embargo, el teorema del residuo da una forma más rápida de averiguarlo evitando la división. La raíz de $x-3$ es $x=3$. Luego evaluando en el polinomio $3x^3 - 9x^2 - 4x + 20$ se tiene

$$3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 20 = 81 - 81 - 12 + 20 = 8$$

Por lo tanto el residuo de la división es $r(x) = 8$ en virtud del teorema del residuo. $\square$

Ejemplo 5. Calcule el residuo de la división $3x^{2n} - 9x^{n-1} - 4x^n - 2 \div (x - a)$.
Solución

En este caso, hacer la división sintética es muy engorroso pues no se conoce el valor de n.. Sin embargo, aplicando el teorema del residuo se obtiene el resultado de forma inmediata. La raíz de $x - a$ es $x = a$. Luego evaluando en el polinomio $3x^{2n} - 9x^{n-1} - 4x^n - 2$ se tiene

$$r(x) = 3 \cdot a^{2n} - 9 \cdot a^{n-1} - 4 \cdot a^n - 2$$

Obteniéndose el residuo sin necesidad de realizar la división. □

Ejemplo 6. Calcule el residuo de la división $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1 \div (x - 1)$.

Solución

El cero del polinomio $x - 1$ es $x = 1$. Calculando entonces $P(1)$ se tiene

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = 0$$

Luego el residuo de la división es 0. Esto dice que

$$2x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = c(x)(x - 1) + 0 = c(x)(x - 1)$$

lo que indica que $x - 1$ es un factor de $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$. . □

El resultado obtenido en el último ejemplo se puede generalizar en uno de los principales teoremas sobre polinomios el cual se enuncia a continuación.

Teorema del Factor: Un polinomio $P(x)$ tiene un factor de la forma $(x - \alpha)$ si y solo si $P(\alpha) = 0$.

Ejemplo 7. Verifique si los polinomios $x - 1$ y $x + 3$ son factores del polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$.

<u>Solución</u>

Como el polinomio $x-1$ tiene por raíz a $x = 1$ y como $P(1) = 1 \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$, Por el teorema del factor se tiene que $x - 1$ es un factor de $2x^3 - x^2 + 2x - 3$.

Por otra parte, la raíz de $x + 3$ es $x = -3$. Al evaluar este valor en $P(x)$ se tiene que $P(-3) = (-3) \cdot (-3)^3 - (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = -72$ de donde aplicando el teorema del factor se concluye que $x + 3$ no es un factor de $2x^3 - x^2 + 2x - 3$ $\square$

Este teorema es una herramienta muy útil cuando se trata de factorizar un polinomio. Basta encontrar las raíces o ceros del polinomio para conocer todos los factores de la forma $(x - a)$, luego usando división sintética podemos ir factorizando el polinomio tratando de obtener su factorización máxima.

Ejemplo 8. Factorice el polinomio $2x^3 - x^2 + 2x - 3$.

<u>Solución</u>

Del ejemplo anterior se tiene que el teorema del factor garantiza que $x - 1$ es un factor de $2x^3 - x^2 + 2x - 3$. Realizando la división sintética obtenemos

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ \cline{5-5} & 2 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

Luego se tiene que $2x^3 - x^2 + 2x - 3 = (2x^2 + x + 3)(x - 1)$ y como el polinomio cuadrático tiene discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 > 0$y por lo tanto no es factorizable. Así la factorización encontrada es la factorización máxima. $\square$

Ejemplo 9. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $kx^2 + (k - 1)x + k - 2$ tenga como factor al polinomio $x + 3$.

Solución

Como el cero de $x+3$ es $x=-3$, según el teorema del factor, para que $x+3$ sea un factor de $kx^2+(k-1)x+k-2$ se debe dar que la evaluación de $x=-3$ en el polinomio de cero. De aquí se obtiene

$$k(-3)^2+(k-1)(-3)+k-2=0 \iff 9k-3(k-1)+k-2=0 \iff 7k+1=0$$

Luego si se sustituye el valor de k en el polinomio por el valor $k=-\frac{1}{7}$ se obtiene el polinomio $-\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}x-\frac{15}{7}$ el cual tiene a $x+3$ como factor.

De hecho si realizamos la división sintética se obtiene

$$\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{15}{7} & \underline{-3} \\ & \frac{3}{7} & \frac{15}{7} & \\ \hline -\frac{1}{7} & \frac{-5}{7} & 0 & \end{array}$$

Luego se tiene que $-\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}x-\frac{15}{7}=(x+3)(-\frac{1}{7}x-\frac{5}{7})$ tal y como lo garantiza el teorema. □

El teorema del factor y el teorema del residuo permiten identificar cuando un polinomio de la forma $(x-a)$ es un factor de un polinomio $P(x)$ ya que si $P(a)=0$, por el teorema del residuo el residuo de dividir $P(x)$ por $(x-a)$ es cero y por tanto $P(x)=Q(x)(x-a)+0=Q(x)(x-a)$. Luego $(x-a)$ sería un factor de $P(x)$.

La técnica anterior tiene el inconveniente de que para factorizar el polinomio se deben conocer las raíces previamente. Dado que las raíces podrían ser racionales o irracionales, la tarea de determinarlas no es en general sencilla. De hecho, no existe una técnica general que permita determinar las raíces de un polinomio cualquiera. Sin embargo, el siguiente teorema da una regla para determinar las raíces racionales de un polinomio $P(x)$.

Teorema de Raíces Racionales Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0;\ a_n \neq 0$ un polinomio con coeficientes enteros de grado $n \geq 1$. Sea $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ un cero de $P(x)$ tal que c y d no poseen un factor primo en común, entonces c divide a a_0 y d divide a a_n.

Este teorema dice que los posibles ceros racionales de un polinomio $P(x)$ se encuentran entre los cocientes que se forman con los divisores del término constante del polinomio entre divisores del coeficiente de la potencia mayor del polinomio. Para identificarlos, se calculan todos los posibles cocientes de la forma $\frac{c}{d}$ con $c|a_0$ y $d|a_n$. Luego, con la ayuda de la división sintética o bien aplicando el teorema del residuo y teorema del factor se pueden determinar cuales de estos cocientes son ceros de $P(x)$ y eventualmente factorizar el polinomio.

Ejemplo 10. Factorice al máximo el polinomio $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$.

Solución

Primero se buscan las posibles raíces racionales. Los divisores del término constante son $\pm 1, \pm 2 \pm 4$ y ± 8 mientras que los divisores del coeficiente de x^4 son ± 1 y ± 3. Luego el conjunto de posibles raíces racionales es

$$\left\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right\}$$

Por evaluación directa de estos valores en el polinomio se ve que $P(1) = 15 \neq 0, P(-1) = 3 \neq 0, P(2) = 192 \neq 0$ pero $P(-2) = 0$. Se realiza la división sintética de P(x) por (x+2) y se obtiene

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = (x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Se sigue evaluando los posible s ceros racionales para buscar más factores y se tiene que $P(4) = 1848, P(-4) = 120, P(8) = 20280, P(-8) = 6072, P(\frac{1}{3}) = -\frac{77}{9}, P(-\frac{1}{3}) = -\frac{115}{27}, P(\frac{2}{3}) = \frac{-64}{27}$ y $P(-\frac{2}{3}) = 0$. Nuevamente se ha hallado un cero del polinomio inicial que debe ser un cero del polinomio $(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$. Realizando la división sintética de $(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$ por $x + \frac{2}{3}$ se obtiene un segundo factor de $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$ y se tiene

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = (x+2)(x+\frac{2}{3})(3x^2 + 6x^2 - 6)$$

En este punto, como el tercer término de la factorización es un polinomio cuadrático y su discriminante $\Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) > 0$, se puede realizar la factorización usando la fórmula general y obtenemos que

$$x = -1 + \sqrt{3} \quad \text{y} \quad x = -1 - \sqrt{3}$$

son ceros del polinomio original y por el teorema del factor $(x - (-1 + \sqrt{3}))$ y $(x - (-1 - \sqrt{3}))$ son factores de $(3x^2 + 6x^2 - 6)$ y por tanto de $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$. Finalmente, la factorización completa es

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 3(x+2)(x+\frac{2}{3})(x - (-1 + \sqrt{3}))(x - (-1 - \sqrt{3}))$$

De donde se ve que el polinomio $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$ tiene dos raíces racionales y dos raíces irracionales. $\square$

Ejemplo 11. Demuestra que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x - 4$ no posee raíces racionales.

Solución

Los divisores del término constante son $\pm 1, \pm 2$ y ± 4 en tanto que los divisores del coeficiente de x^3 son ± 1 y ± 2. Calculando los cocientes de los divisores del término constante -4 por los divisores del término del coeficiente inicial 2, se tiene el siguiente conjunto de posibles ceros racionales.

$$\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, 4, -4\right\}$$

Evaluando estos valores en el polinomio se tiene

$$P(1) = -10, P(-1) = 2, P(\frac{1}{2}) = -\frac{31}{4}, P(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$P(2) = -4, P(-2) = -4, P(4) = 92, P(-4) = -100$$

Luego, ninguno de estos valores son ceros del polinomio de donde se concluye que no puede poseer ceros racionales. □

Ejemplo 12. Verifique que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Solución

Sea $x = \sqrt{2}$ entonces

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

.

Consideremos el polinomio $x^2 - 2$. Por el teorema de raíces racionales se tiene que los únicos posibles ceros racionales de $x^2 - 2$ son:

$$x = 2, x = -2, x = 1 \text{ y } x = -1$$

La evaluación directa nos da que ninguno de estos es un cero.

Por otro lado, del calculo anterior se tiene que $\sqrt{2}$ es un cero del polinomio pero no puede ser racional pues debería ser alguno de los anteriores. Luego se concluye que $\sqrt{2}$ tiene que ser un cero irracional de $x^2 - 2$. Luego, $\sqrt{2}$ no es un número racional. □

1.3.5. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios

   a. $x^3 - x^2 - 10x - 8$ b. $2x^3 + 2x^2 - 28x - 48$

   c. $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ d. $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

   e. $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56$ f. $3x^3 - x^2 + 11x - 20$

   g. $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27$ h. $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x$

   i. $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2$

2. Use el teorema del residuo para determinar el residuo que se obtiene al dividir el polinomio dado por el polinomio de la forma $x - c$ escrito a la par. Obtenga el cociente de la división usando división sintética.

   a. $x^3 - 3x^2 - 10x - 8, x - 2$ b. $x^3 + 2x^2 - 20x - 48, x + 3$

   c. $20x^3 - 13x^2 - 15x + 30, 2x + 4$ d. $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1, 3x - 6$

   e. $2x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 7x + 5, x - 7$ f. $30x^3 - 8x^2 + 11x - 20, 5x - 20$

   g. $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27, x + 4$ h. $-6x^4 + 15x^3 - 12x^2 - 6x; x - 4$

Ejercicios tipo B

1. Calcule el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para el cual el polinomio $x - c$ es un factor del polinomio dado.

   a. $x^3 + 2x^2 + 4x + k;\; x + 1$ b. $-x^3 + 3x^2 + kx - 5;\; x - 1$

   c. $2x^4 - 5kx^3 + (k-1)x^2 + 8;\; x - 7$ d. $x^3 - (k+2)x^2 - (5x-1)x - 2;\; x + 3$

   e. $(k+2)x^4 - (k-3)x^2 + k - 2;\; x - 6$ f. $kx^2 + kx + 1;\; x - 1$

   g. $x^3 - (3k+4)x - kx + 6; x + 1$ h. $x^3 - x;\; x - k$

1.4. Racionalización

Cuando se tienen expresiones fraccionarias en las que aparecen radicales en el numerador o denominador, frecuentemente es conveniente hacer una transformación algebraica a dicha expresión de forma tal que la nueva expresión no tenga el radical en el numerador o denominador según sea el caso. A este proceso se le conoce como **Racionalización**. La idea básica es usar el hecho de que si $a \neq 0$ entonces $\frac{a}{a} = 1$. Escogiendo adecuadamente a se logra eliminar la expresión radical ya sea del denominador o del numerador de la expresión.

Hay dos técnicas básicas para racionalizar expresiones de números reales:

Regla 1. **Racionalización de $\dfrac{k}{\sqrt{a}}$.** Para eliminar el radical del denominador de una expresión de la forma $\dfrac{k}{\sqrt{a}}$ se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt{a}$ y se simplifica usando las leyes de radicales hasta eliminar el radical del denominador.

Ejemplo 1. La expresión $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ tiene un radical en el denominador. En ocasiones se requiere eliminar este radical del denominador para lograr una expresión más simple. Para esto se procede a multiplicar tanto el numerador y denominador por $\sqrt{3}$ para obtener:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Regla 2. Racionalización de una raíz n-ésimaracionalización!de una raíz enésima Una expresión de la forma

$$\frac{k}{\sqrt[n]{b^m}}, m < n$$

que esté bien definida en $\mathbb{R}$, puede ser racionalizada al multiplicar el numerador y el denominador por el término $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ y simplificando al máximo usando las leyes de radicales para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt[n]{b^m}} &= \frac{k}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{k \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} \\ &= \frac{k \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Racionalice la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$.

<u>Solución</u>

Se multiplica el numerador por el término $\sqrt[5]{7^3}$ para completar una potencia con exponente 5 en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2 \cdot 7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

□

Ejemplo 3. Racionalice el denominador de la expresión la expresión $\dfrac{2x}{\sqrt[7]{8xy^3z^5}}$.

<u>Solución</u>

Se multiplica el denominador y el numerador por el factor $\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}$ tomando en cuenta que $8 = 2^3$.

$$\frac{2x}{\sqrt[7]{8xy^3z^5}} = \frac{2x}{\sqrt[7]{8xy^3z^5}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}}{\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}} = \frac{2x\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}}{\sqrt[7]{8xy^3z^5} \cdot \sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}}$$

Simplificando el denominador usando las leyes de radicales y potencias se tiene

$$\frac{2x}{\sqrt[7]{8xy^3z^5}} = \frac{2x\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}}{2xyz} = \frac{\sqrt[7]{2^4x^6y^4z^2}}{yz}$$

□

Regla 3. **Racionalización de una suma o resta.** Las expresiones de la forma

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c}, \frac{a}{\sqrt{b}-c}, \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

pueden ser racionalizadas al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado[7] del denominador y aplicando la tercera fórmula notable.

Ejemplo 4. Racionalice $\dfrac{a}{\sqrt{b}+c}$

Solución

Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{b}-c$ se tiene:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a}{\sqrt{b}+c} \cdot \frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c)}$$

Aplicando la tercera fórmula notable el denominador de termino de la derecha se tiene:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{(\sqrt{b})^2-c^2} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{b-c^2}$$

Obteniendo una expresión equivalente a la primera sin radicales en el denominador.

También es posible racionalizar expresiones que contengan dos términos con raíces cúbicas en alguno de ellos haciendo uso de la cuarta o quinta fórmula notable

Ejemplo 5. Racionalice la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Solución

Multiplicando el numerador y el denominador por $(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1)$ se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1)}{x-1}$$

□

[7] Recuerde que el conjugado de un binomio $a+b$ es $a-b$ y viceversa de forma tal que la tercera fórmula notable sea válida. Esto es, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

1.4.1. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Racionalice el denominador de las siguientes expresiones

   a. $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$ b. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{9a}}$ c. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$

   d. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8a^4}}$ e. $\dfrac{1}{5a\sqrt[4]{25x^3}}$ f. $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$

   g. $\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ h. $\dfrac{5}{4-\sqrt{3}}$ i. $\dfrac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$

Ejercicios tipo B

1. Racionalice y simplifique al máximo

   a. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$ b. $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

   c. $\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ d. $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

   e. $\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ f. $\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones e Inecuaciones

2.1. Ecuaciones

Cuando se comparan cantidades numéricas por medio del símbolo "=" se puede obtener igualdades que son falsas o que son verdaderas. Por ejemplo $3 = 4$ es una igualdad numérica falsa en tanto que $2 = 1 + 1$ es una igualdad numérica verdadera. Establecer la veracidad o falsedad de una igualdad numérica consiste en realizar las operaciones a ambos lados del igual y verificar si las cantidades coinciden o no.

Cuando se comparan expresiones algebraicas y numéricas por medio del símbolo "=" obtenemos una igualdad de la cual, por lo general, no se puede decidir su veracidad o falsedad dado que no se conocen los valores numéricos que representan las incógnitas. Por ejemplo, la igualdad $4x + 1 = 6$ con $x \in \mathbb{R}$ es una igualdad en la cual no podemos decidir si es verdadera o falsa debido a que se desconoce el valor de la incógnita x. Si la incógnita $x \in \mathbb{R}$ representara el valor $\frac{5}{4}$ la igualdad sería una igualdad verdadera pero para cualquier otro valor de x la igualdad numérica obtenida sería falsa.

Definición 1. *Una igualdad en la cual al menos una de las expresiones es algebraica recibe el nombre de* **ecuación**. *Las letras de las expresiones se llaman* **variables** *o* **incógnitas**.

Las ecuaciones cuyas expresiones algebraicas son polinomios se clasifican según el número de incógnitas y el grado de estas.

Ejemplo 1. 1. Una ecuación que tenga solo una incógnita y cuyo exponente máximo sea 1 recibe el nombre de **ecuación de primer grado con una incógnita**. Por ejemplo: $2x+1=3,\quad 4x+3=5x+2,\quad 2x-3=6(5x+1)$ son ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2. La ecuación $3x^2+5x=3x+1$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

3. La ecuación $x^3-5x+2=0$ es una ecuación de **tercer grado con una incógnita**

4. La ecuación $x+y=3$ es una ecuación de **primer grado con dos incógnitas**

Una **solución de una ecuación** es un valor (o valores) de la o las incógnitas que al ser sustituidos en la ecuación la transforman en una igualdad numérica verdadera.

Ejemplo 2. En la ecuación $5x+3=7$ el valor $x=\frac{4}{5}$ es una solución de la ecuación dado que, si se sustituye este valor en lugar de la incógnita x en la ecuación, se obtiene la expresión numérica

$$5\cdot\frac{4}{5}+3=7$$

que al simplificarla da como resultado $7=7$ que es una igualdad numérica verdadera.

Ejemplo 3. El valor $x=5$ **NO es** una solución de la ecuación $3x+1=-2$ pues si se sustituye en esta ecuación se obtiene

$$3\cdot 5+1=-2$$

que al simplificarla da como resultado la igualdad numérica $16=-2$ que es una igualdad numérica FALSA.

Ejemplo 4. En la ecuación $2x+y=6$ los valores $x=0, y=6$ forman una solución de la ecuación pues al sustituirlos se obtiene la igualdad numérica $6=6$. También $x=3, y=0$ es una solución de la ecuación. En cambio $x=1, y=2$ no es una solución de la ecuación ya que si se sustituyen estos valores en lugar de las respectivas incógnitas se obtiene $4 = 6$ que es una igualdad numérica FALSA.

Ejemplo 5. La ecuación $x^2 + 5x + 6$ tiene a $x = -2$ y a $x = -3$ como soluciones. Se deja al lector que verifique esta afirmación.

Ejemplo 6. La ecuación $x^2 = -4$ no tiene ningún valor real que sea su solución ya que el cuadrado de todo número real es siempre no negativo.

Ejemplo 7. La ecuación $3x + 7 = \frac{6x+14}{2}$ tiene infinitas soluciones. El lector puede comprobar que cualquier número real es una solución de dicha ecuación.

De los ejemplos anteriores se puede apreciar que una ecuación puede no tener soluciones o bien tener una dos o más soluciones. El conjunto S de todas las soluciones de la ecuación se llama **conjunto solución de la ecuación.** Se dice que dos o más ecuaciones son **ecuaciones equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Resolver una ecuación es calcular TODOS los valores de la o las incógnitas de la ecuación que son solución de la ecuación y escribir su conjunto solución S.

Para resolver una ecuación es común aplicar las siguientes cuatro reglas derivadas de las reglas de las igualdades y los axiomas de campo:

Regla 1. **En una ecuación se puede sumar el mismo número a cada lado del igual y la nueva ecuación es equivalente a la primera.**

$$a = b \textbf{ y } c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a + c = b + c$$

Regla 2. **En una ecuación se puede restar el mismo número a cada lado del igual y la nueva ecuación es equivalente a la primera[1].**

$$a = b \textbf{ y } c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a - c = b - c$$

[1] Esta regla es equivalente a aplicar la regla 1 sumando el opuesto aditivo de un número a ambos lados de la ecuación.

o equivalentemente,

$$a = b \textbf{ y } c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a + (-c) = b + (-c)$$

Regla 3. **En una ecuación se puede multiplicar por un mismo número diferente de cero a cada lado del igual y la nueva ecuación es equivalente a la primera.**

$$a = b\textbf{y } c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c$$

Regla 4. En una ecuación se puede dividir entre un mismo número diferente de cero a cada lado del igual y la nueva ecuación es equivalente a la primera [2].

$$a = b \text{ y } \ c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

o equivalentemente,

$$a = b \text{ y } \ c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \frac{1}{c}$$

2.1.1. Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** o **ecuación lineal** es una ecuación que se puede escribir de la forma:

$$ax + b = 0 \ \ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{2.1}$$

De la definición y aplicando las reglas 2 y 4 se puede ver que el conjunto solución de esta ecuación es

[2] Análogamente a la regla de la resta, esta regla es equivalente a aplicar la regla 3 y multiplicar el inverso multiplicativo de dicho número c el cual existe porque el número es diferente de cero

$$S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
ax + b &= 0 & \\
ax + b - b &= 0 - b & \text{por Regla 2.} \\
ax &= -b & \text{simplificando.} \\
ax \cdot \frac{1}{a} &= -b \cdot \frac{1}{a} & \text{por Regla 4.} \\
x &= \frac{-b}{a} & \text{simplificando}
\end{aligned}$$

Del cálculo anterior se tiene que toda ecuación lineal $ax + b = 0; a \neq 0$ tiene una única solución. Aplicando las reglas 1 a 4 se puede calcular la solución de cualquier ecuación lineal y escribir el conjunto solución.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación $5x + 4 = 3$.

Solución

Primero sumamos el opuesto aditivo de 4 a cada lado.

$$\begin{aligned}
5x + 4 &= 3 \\
5x + 4 + (-4) = 3 + (-4) & \\
5x &= -1
\end{aligned}$$

Posteriormente se multiplica a cada lado por el inverso multiplicativo de 5 para despejar la variable x.

$$\begin{aligned} 5x &= -1 \\ \frac{1}{5} \cdot 5x &= -1 \cdot \frac{1}{5} \\ x &= \frac{-1}{5} \end{aligned}$$

De donde se tiene que

$$S = \left\{ \frac{-1}{5} \right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. $\square$

Nota. Para evitar una escritura tediosa en la resolución de ecuaciones normalmente las reglas 1 y 2 se abrevian diciendo que "*lo que esta a un lado de la igualdad pasa al otro lado cambiando de signo* ". A su vez las reglas 3 y 4 se abrevian diciendo que "*Si un número distinto de cero esta multiplicando a un lado de la igualdad al resto de la expresión, puede pasar a dividir la expresión del otro lado de la igualdad y recíprocamente si esta dividiendo la expresión a un lado de la igualdad puede pasar al a multiplicar la expresión del otro lado*" . Así se evitan varios pasos de simplificación que suelen ser tediosos y alargan innecesariamente el cálculo. No obstante se debe tener claro que en el fondo se están aplicando las reglas 1 a 4 deducidas directamente de las propiedades de las igualdades y los axiomas de campo.

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $3x + 7 = 6$.

<u>Solución</u>

Pasando el 7 con signo negativo al lado derecho de la ecuación se tiene

$$3x + 7 = 6 \iff 3x = 6 - 7 \iff 3x = -1$$

Luego, el número 3 que está multiplicando la variable x pasa al otro lado a dividir a -1

$$3x = -1 \iff x = \frac{-1}{3}$$

De donde

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. □

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $7x + 4 = 9x - 7$.

<u>Solución</u>

Usando las abreviaturas descritas en el ejemplo anterior, se procede a "*pasar*" los términos que dependen de la variable x a un solo lado y los términos constantes al otro haciendo los respectivos cambios de signo

$$7x + 4 = 9x - 7 \iff 4 - 7 = 9x - 7x \iff -3 = 2x$$

Luego "*pasando a dividir* " el coeficiente de la variable x se despeja esta

$$-3 = 2x \iff \frac{-3}{2} = x$$

y se obtiene que

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. $\square$.

En el proceso de despejar la variable puede ocurrir que esta se elimina completamente de la ecuación de forma tal que lo que queda es una igualdad numérica verdadera. En este caso, cualquier valor real que se asigne a la variable, será solución de la ecuación original siempre y cuando esté en el dominio de las expresiones algebraicas originales de la ecuación. Si las expresiones originales no tienen restricciones se dice que el conjunto solución de la ecuación es todo $\mathbb{R}$ y esta ecuación recibe el nombre de **identidad.**

Ejemplo 4. Resuelva la siguiente ecuación $5x + 4 = \frac{1}{2}(10x + 8)$.

Solución

Pasando el 2 que divide al lado derecho a multiplicar al lado izquierdo se tiene que

$$5x + 4 = \frac{1}{2}(10x + 8) \iff 2(5x + 4) = 10x + 8 \iff 10x + 8 = 10x + 8$$

Esta última ecuación es evidentemente cierta para cualquier valor de la variable x. Nótese que si se pasan a restar los términos que dependen de x al lado derecho y se simplifica se obtiene la igualdad numérica $8 = 8$. En este caso se tiene que la ecuación original es una identidad y por tanto

$$S = \mathbb{R}$$

es el conjunto solución. $\square$

Por otro lado, si al despejar la variable x esta desaparece de la ecuación y lo que queda es una igualdad numérica falsa se tiene que ningún valor que se asigne a la variable va a satisfacer la ecuación por lo que se tiene que el conjunto solución es el conjunto vacío.

Ejemplo 5. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $9x+3 = 3x+2(3x+1)$.

<u>Solución</u>

Simplificando el lado derecho se tiene

$$9x + 3 = 3x + 2(3x + 1) \iff 9x + 3 = 3x + 6x + 2 \iff 9x + 3 = 9x + 2$$

Restando a cada lado de la igualdad el valor $9x$ se obtiene la igualdad numérica $3 = 2$ que es una igualdad numérica falsa. Por lo tanto ningún valor real va a satisfacer la ecuación original y se tiene que

$$S = \phi$$

es el conjunto solución de la ecuación. □

Ejemplo 6. Determine el conjunto solución de la ecuación$kx + 1 = 2kx + (k - 1)$

<u>Solución</u>

Note que si $k = 0$ la ecuación sería la igualdad $1 = -1$. por lo que en este caso el conjunto solución es $S = \emptyset$. Para cuanquier valor de k diferente de cero se tiene que el conjunto solución es

$$S = \left\{ \frac{2-k}{k} \right\}$$

. □

De los ejemplos anteriores se puede concluir que una ecuación lineal en una variable puede tener infinitas soluciones, una sola solución o bien no tener soluciones.

2.1.2. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $4x - 3 = 4x + 2$

b. $\dfrac{x}{3} + 5 = \dfrac{1}{6} - x$

c. $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{5x}{3} + \dfrac{1}{4} = x + 1$

d. $\dfrac{x-3}{4} - 2 = 0$

e. $2x - \dfrac{5x-1}{3} = 7x - \dfrac{3}{5}$

f. $10x - \dfrac{3}{4} = 2(x-3)$

g. $4 - \dfrac{10x+1}{5} = 4x - \dfrac{8x+3}{4}$

h. $\dfrac{2}{5}(5x-1) + 10x - 3 = -\dfrac{1}{2}(x-2) - \dfrac{6}{5}$

i. $2x - \left(2x - \frac{3x-1}{8}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right) - \frac{1}{4}$

j. $\dfrac{1}{4x-1} = \dfrac{2}{4x+1}$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a. $\dfrac{5x+8}{3x+2} = \dfrac{5x+4}{3x-4}$

b. $\dfrac{1}{3x-3} - \dfrac{1}{4x-4} = \dfrac{1}{12x-12}$

c. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2-8x}{3x-5} = \dfrac{7}{4}$

d. $\dfrac{(5x-1)^2}{x-2} = \dfrac{50x+1}{2}$

e. $\dfrac{7x}{x+1} = 7 - \dfrac{1}{x+3}$

f. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{2x-2} = \dfrac{3}{2x+2}$

g. $\dfrac{1+2x}{1+3x} - \dfrac{1-2x}{1-3x} = -\dfrac{3x-4}{1-9x^2}$

h. $\dfrac{10x+3}{4x+7} - \dfrac{x-8}{3x+5} = 2$

i. $\dfrac{6x^2-5x+8}{3x^2+9x-15} = \dfrac{13}{6}$

j. $\dfrac{2}{7} + x = 2 + \dfrac{2x+2x^2+46}{2x+23}$

2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un **sistema de dos ecuaciones lineales** en las incógnitas x e y o "sistema 2×2" es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales. **Una Solución del Sistema** 2×2 es un par ordenado $(x_0, y_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ que satisface ambas ecuaciones simultáneamente. Es decir, $(x_0, y_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ es una solución del sistema si al sustituir estos valores en las ecuaciones del sistema se obtiene una igualdad numérica verdadera en ambos casos. Esto es:

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 &= e \quad \text{es VERDADERA y} \\ cx_0 + dy_0 &= f \quad \text{es VERDADERA} \end{aligned}$$

Resolver un sistema 2×2 consiste en encontrar **todos** los pares ordenados de la forma $(x_0, y_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente. El **Conjunto Solución de un Sistema** 2×2 es el conjunto de todas las soluciones del sistema. En este sentido podría ocurrir los siguientes casos:

1. **El sistema no tiene solución**. En este caso el conjunto solución es

   $$S = \phi$$

   y se dice que el sistema es inconsistente.

2. **El sistema tiene solución única.** En este caso la solución será un único par ordenado (x_0, y_0) y el conjunto solución será

   $$S = \{(x_0, y_0)\}$$

3. **El sistema tiene infinitas soluciones.** En este caso, la forma general de los pares ordenados que son solución del sistema se obtienen tomando una de las ecuaciones y despejando una de las variables en función de la otra. Por ejemplo, si el sistema tiene infinitas soluciones, de la ecuación $ax + by = c$ se puede despejar y en función de x y obtener $y = \dfrac{c - ax}{b}, b \neq 0$. Luego el conjunto solución del sistema será de la forma

$$S = \{(x, \frac{c - ax}{b}), x \in \mathbb{R}\} \text{ si } b \neq 0$$

De esta forma cualquier par ordenado que se obtenga al sustituir la variable x por un valor numérico particular, será solución del sistema.

Para encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas se conocen cuatro métodos: Método de igualación, Método de sustitución, Método de Suma y Resta y Método de Determinantes.

Método 1. Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones del sistema y dado que esta variable debe satisfacer ambas ecuaciones, las expresiones logradas deben ser iguales. Igualando las expresiones se obtiene una ecuación lineal en la otra variable. Resolviendo esta ecuación se calcula el valor de una de las variables y por sustitución en cualquiera de las expresiones encontradas para la primera variable se obtiene el valor de esta.

Ejemplo 1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 5x + 4y & = & 2 \end{array} \right.$$

Solución

Despejando la variable x en ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-3y}{2} \\ x &= \frac{2-4y}{5} \end{aligned}$$

Luego las expresiones al lado derecho del sistema anterior deben ser iguales pues están igualadas a la misma variable x. Igualando estas expresiones se obtiene una ecuación lineal en la variable y.

$$\frac{1-3y}{2} = \frac{2-4y}{5}$$

Resolviendo esta ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1-3y}{2} &= \frac{2-4y}{5} && \Rightarrow \\ 5(1-3y) &= 2(2-4y) && \Rightarrow \\ 5-15y &= 4-8y && \Rightarrow \\ 5-4 &= 15y-8y && \Rightarrow \\ 1 &= 7y && \Rightarrow \\ \frac{1}{7} &= y \end{aligned}$$

Luego se sustituye el valor encontrado de y en la primera de las expresiones encontradas para x y se tiene

$$x = \frac{1-3y}{2}; y = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{1-3\cdot\frac{1}{7}}{2} = \frac{\frac{7-3}{7}}{2} = \frac{\frac{4}{7}}{2} = \frac{2}{7}$$

Luego el conjunto solución del sistema es

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right) \right\}$$

El lector podrá comprobar que si al inicio se despeja la variable y en lugar de la variable x y se realiza el mismo procedimiento se llegará a la misma solución. . □

Método 2. Método de Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de alguna de las dos ecuaciones. Posteriormente se sustituye en la otra ecuación obteniéndose una ecuación lineal en la segunda variable. Esta se despeja y por sustitución en la expresión de la primera variable se obtiene su valor.

Ejemplo 2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 5x + 4y &= 2 \end{cases}$$

Solución

Despejando la variable x en la primera ecuación se tiene

$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$

Se sustituye la expresión del lado derecho en la segunda ecuación para obtener una ecuación lineal en la variable y

$$5x + 4y = 2; x = \frac{1 - 3y}{2} \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot \left(\frac{1 - 3y}{2} \right) + 4y = 2$$

Despejando la variable y en esta última ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
5 \cdot \left(\frac{1-3y}{2}\right) + 4y &= 2 \quad \Rightarrow \\
\frac{5(1-3y+8y}{2} &= 2 \quad \Rightarrow \\
5 - 15y + 8y &= 4 \quad \Rightarrow \\
5 - 7y &= 4 \quad \Rightarrow \\
5 - 4 &= 7y \quad \Rightarrow \\
1 &= 7y \quad \Rightarrow \\
\frac{1}{7} &= y
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión de x se calcula su valor.

$$x = \frac{1-3y}{2}; y = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{7}}{2} = \frac{\frac{7-3}{7}}{2} = \frac{\frac{4}{7}}{2} = \frac{2}{7}$$

Luego el conjunto solución del sistema es

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right) \right\}$$

El mismo resultado se hubiese obtenido si en vez de despejar la variable x en la primera ecuación se hubiese despejado en la segunda. Solo que en este caso se debe sustituir el resultado del despeje en la primera ecuación y no en la segunda.

Además, el lector puede comprobar como ejercicio que si se hubiese despejado la variable y en cualquiera de las dos ecuaciones y se sustituye la expresión encontrada en la otra ecuación, se obtendrá una ecuación lineal en la variable x que conducirá a la misma respuesta. $\square$

Método 3. Método de Suma y Resta

Este método es muy importante pues será usado para resolver sistemas lineales con más variables en cursos superiores. Consiste en multiplicar ambas ecuaciones por valores apropiados de forma tal que, al sumar las nuevas ecuaciones se elimine una de las variables y quede una ecuación lineal en términos de la otra variable.

Luego, se repite el proceso para despejar la segunda variable.

Ejemplo 3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1 \\ 5x+4y & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución

Si se multiplica la primera ecuación por -5 y la segunda ecuación por 2 se obtiene un sistema equivalente al inicial

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+3y & = & 1 & (\times -5) \\ 5x+4y & = & 2 & (\times 2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -10x-15y & = & -5 \\ 10x+8y & = & 4 \end{array}\right.$$

Sumando ambas ecuaciones del sistema de la derecha se obtiene una ecuación lineal en la variable y y se despeja.

$$\begin{array}{rcl} (-10x-15y)+(10x+8y) & = & -5+4 \quad \Rightarrow \\ -15y+8y & = & -1 \quad \Rightarrow \\ -7y & = & -1 \quad \Rightarrow \\ y & = & \dfrac{1}{7} \end{array}$$

Para despejar la variable x se realiza el mismo procedimiento pero eliminando la variable y. Para esto, en el sistema original se multiplica la primera ecuación por

-4 y la segunda por 3

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1 \quad (\times -4) \\ 5x+4y & = & 2 \quad (\times 3) \end{array}\right.$$

Entonces, el sistema se transforma en

$$\left\{\begin{array}{rcl} -8x-12y & = & -4 \\ 15x+12y & = & 6 \end{array}\right.$$

Sumando las ecuaciones se obtiene una ecuación lineal en la variable x la cual se puede despejar

$$\begin{array}{rcl} (-8x-12y)+(15x+12y) & = & -4+6 \quad \Rightarrow \\ -8x+15x & = & 2 \quad \Rightarrow \\ 7x & = & -1 \quad \Rightarrow \\ x & = & \dfrac{2}{7} \end{array}$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única y el conjunto solución es

$$S=\left\{\left(\frac{2}{7},\frac{1}{7}\right)\right\}$$

Se puede notar que, al igual que en los otros métodos se pudo iniciar eliminando la variable y primero y luego la variable x y el resultado será el mismo. $\square$.

Método 1. Método de Determinantes

Este método se llama también **Regla de Cramer**. Primeramente, se definen los "**determinantes**" Δ, Δ_x y Δ_y a partir de los coeficientes del sistema

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - fb; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce$$

Luego, si $\Delta \neq 0$ el sistema tiene solución única de la forma (x_0, y_0) donde:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Nota. Observe que si el determinante general $\Delta = 0$, el sistema de ecuaciones es inconsistente y por tanto el conjunto solución es $S = \phi$ o bien hay infinitas soluciones

Ejemplo 4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 5x + 4y &= 2 \end{cases}$$

Solución

Calculando el determinante general se ve que el sistema es consistente y además tiene solución única ya que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

Calculando el determinante Δ_x se tiene

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Calculando el determinante Δ_y se tiene

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 4 - 5 = -1$$

Por lo tanto se tiene que

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7} \quad \text{y} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

De donde se tiene que el conjunto solución es

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right) \right\}$$

Este método será generalizado en los cursos de algebra lineal a sistemas de n ecuaciones y n incógnitas y será de gran utilidad en los cursos de cálculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales. $\square$

2.2.1. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando los cuatro métodos vistos.

a. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 8 \end{cases}$ c. $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$ i. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando los cuatro métodos vistos.

a. $\begin{cases} 2(x+y) + 3(y-x) = 11 \\ 5(x-y) + 4(y+2x) = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 2y = 1 - x - y \\ 5x + 4y + -3 = 2(x+y) \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = \dfrac{5}{7} \\ \dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{4}y = \dfrac{2}{9} \end{cases}$ d. $\begin{cases} 4x^2 + 3y = 1 + x(4x+2) \\ 5x + 3(y-1)^2 = 2 + 3y^2 - y \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{3y-5}{4} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{5x-3}{2} + 4\dfrac{2y-3}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ f. $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} + \dfrac{3y-4}{3} = 1 \\ \dfrac{2x+y}{2} + 4(y-x) = 2 \end{cases}$

2.3. Ecuación Cuadrática

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación que puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Para resolverla se considera el **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ definido en la sección 1.3.10 donde se factorizó el polinomio de segundo grado. Se consideran los mismos tres casos:

- $\Delta > 0$. Hay dos raíces reales diferentes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$. Hay una raíz real repetida. En este caso, como $\Delta = 0$, tanto x_1 como x_2 de las fórmulas anteriores se reducen a

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$. La ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación $2x^2 + 5x - 4$.

Solución

Calculando el discriminante se tiene que $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 25 + 32 = 57 > 0$. Por lo tanto, la ecuación tiene dos raíces reales distintas . Aplicando la fórmula del trinomio de segundo grado se obtienen dichas raíces

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}; \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{4}$$

En consecuencia,

$$S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{57}}{4} \right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. $\square$

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $-x^2 - 3 = x - 8 - 3x^2$.

Solución

Colocando lo términos al lado izquierdo de la ecuación y simplificando se tiene

$$-x^2 - 3 = x - 8 - 3x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - x + 5 = 0$$

Analizando el discriminante de la ecuación se obtiene que $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 1 - 40 = -39 < 0$. Por lo tanto la ecuación no tiene raíces reales y

$$S = \phi$$

es el conjunto solución. $\square$

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

Solución

En principio, la ecuación no es una ecuación cuadrática. No obstante, si se hace el "*cambio de variable*"

$$t = x^2$$

la ecuación original se puede escribir en forma de una ecuación cuadrática en la variable t.

$$x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2)^2 - 5x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$

Calculando el discriminante $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$ se concluye que la ecuación cuadrática en la variable t tiene dos soluciones reales distintas. Aplicando la fórmula general se tiene

$$t_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2} = \frac{5-7}{2} = -1; \qquad t_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

Escribiendo t_1 y t_2 como x^2 se tiene que

$$x^2 = -1; \qquad \text{ó} \qquad x^2 = 6$$

La primera de estas ecuaciones es inconsistente y tiene conjunto solución vacío mientras que para la segunda se tienen las soluciones

$$x = \sqrt{6}; \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{6}$$

Luego,

$$S = \left\{ \sqrt{6}, -\sqrt{6} \right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. □

2.3.1. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Calcule el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

   a. $4x^2 + 3x - 22 = -1$ b. $6x^2 - x - 222 = 0$ c. $174x = 121 + 64x^2$

   d. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ e. $x^2 + 11x + 24 = 0$ f. $x^2 = -15x - 56$

   g. $27x^2 + 12x - 8 = 0$ h. $2(x^2 + 1) = 3(x - 9)$ i. $49x^2 - 69x + 25 = 0$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{10}$ b. $\dfrac{12}{x} = 5 - \dfrac{10(4x-3)}{x^2}$

   c. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{6}$ d. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x-5} = 0$

   e. $\dfrac{8x}{3x-1} + \dfrac{5x+1}{x-2} = 3$ f. $\dfrac{5x-8}{x-1} = \dfrac{7x-4}{x-2} =$

   g. $(x+2)^2 - \frac{2x-5}{3} = 2$ h. $(x-2)^3 - (x-3)^3 = 33$

   i. $\dfrac{x+2}{x} + x = \dfrac{74}{x}$ j. $\dfrac{3x+2}{5} = 4 - \dfrac{9x+14}{10x}$

2.4. Inecuaciones

Una **inecuación** en una variable real x es la comparación de dos expresiones algebraicas en la variable x por medio de los símbolos $,\leq,$ y $\geq$. Una **solución** de la inecuación es un valor real que satisface la inecuación, esto es, si se sustituye en la variable x se obtiene una desigualdad numérica verdadera. **Resolver una inecuación** es calcular todas las soluciones de la inecuación. El **conjunto solución de una inecuación** es el conjunto que contiene todas las soluciones de esta.

En el resto de este apartado, se analizarán algunos tipos clásicos de desigualdades y la forma de calcular su conjunto solución.

Las reglas para las inecuaciones son similares a las reglas de las ecuaciones y se basan en las propiedades de las desigualdades estudiadas en el capítulo 1.

Regla 1. En una inecuación se puede sumar el mismo número real a cada lado y la desigualdad se preserva

Ejemplo 1. $x-4>6 \iff x-4+4>6+4 \iff x>10.$

Regla 2. En una inecuación se puede restar el mismo número real a cada lado y la desigualdad se preserva

Ejemplo 2. $2x^2+3x-1<x^2-6x \iff 2x^2+3x-1-x^2<x^2-6x-x^2 \iff x^2+3x-1<-6x.$

Regla 3. En una inecuación se puede multiplicar por el mismo número real positivo no nulo y la desigualdad se preserva

Ejemplo 3. $\frac{1}{2}x \geq 6 \iff 2\cdot\frac{1}{2}x \geq 2\cdot 6 \iff x \geq 12$.

Regla 4. Si en una inecuación se multiplica o se divide por un número real negativo entonces la desigualdad se invierte

Ejemplo 4. $-3x < 1 \iff -\frac{1}{3} \cdot -3x > -\frac{1}{3} \cdot 1 \iff x > -\frac{1}{3}$.

2.4.1. Inecuaciones Lineales

Una **inecuación lineal** es una inecuación que se puede escribir de la forma

$$ax + b < 0; \quad ax + b > 0; \quad ax + b \leq 0 \quad \text{o } ax + b \geq 0$$

La forma de resolverla es similar a la de las ecuaciones pues las reglas de resolver una ecuación también son aplicables aquí, con la salvedad de que si se divide o multiplica a ambos lados de la desigualdad por un número negativo, la desigualdad se invierte según las propiedades de desigualdades estudiadas en el capítulo 1.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación $2x + 3 \leq 4$.

Solución

Restando 3 a cada lado de la desigualdad y posteriormente dividiendo el resultado por 2 se obtiene

$$2x + 3 \leq 4 \iff 2x \leq 4 - 3 \iff 2x <\leq 1 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

De donde el conjunto solución es

$$S =]-\infty, \frac{1}{2}]$$

. □

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación lineal $-5x + 7 \geq 3$.

Solución

Primero se resta 7 a cada lado de la desigualdad para obtener

$$-5x + 7 \geq 3 \iff -5x + 7 - 7 \geq 3 - 7 \iff -5x \geq -4$$

Para despejar la variable x se debe multiplicar a ambos lados por el inverso multiplicativo de -5, pero como este es negativo se debe invertir la desigualdad como sigue

$$-5x \geq -4 \iff -\frac{1}{5} \cdot -5x \leq -4 \cdot -\frac{1}{5} \iff x \leq \frac{5}{4}$$

De donde el conjunto solución es $S =]-\infty, \frac{5}{4}]$. □

Algunas inecuaciones que inicialmente no se ven como lineales se transforman en lineales por medio de manipulaciones algebraicas

Ejemplo 3. Encuentre el conjunto solución de $(x+2)(x-1)+26 < (x+4)(x+5)$.

Solución

Desarrollando y simplificando a cada lado de la desigualdad se tiene

$$(x + 2)(x - 1) + 26 < (x + 4)(x + 5) \quad \iff \quad x^2 + x + 24 < x^2 + 9x + 20$$

A primera vista no es una ecuación lineal pero si se pasan todos los términos de la izquierda a la derecha de la desigualdad vemos que el término cuadrático se cancela y se obtiene una ecuación de tipo lineal

$$x^2 + x + 24 < x^2 + 9x + 20 \iff 0 < x^2 + 9x + 20 - x^2 - x - 24 \iff 0 < 8x - 4$$

Resolviendo esta inecuación lineal se tiene

$$0 < 8x - 4 \iff 4 < 8x \iff \frac{4}{8} < x \iff \frac{1}{2} < x$$

de donde obtenemos el conjunto solución $S =]\frac{1}{2}, \infty[$ $\square$

Ejemplo 4. Resuelva la inecuación $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{2x-3}{x^2+1}$.

<u>Solución</u>

En este caso, aunque se tienen fracciones racionales se nota que el denominador es siempre positivo por lo que se puede multiplicar toda la inecuación por el término del denominador de ambas fracciones x^2+1 y la inecuación se simplifica a una inecuación lineal sencilla.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{2x-3}{x^2+1} &\iff (x^2+1)\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{2x-3}{x^2+1}(x^2+1) \\
&\iff (x^2+1)\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{2x-3}{x^2+1}(x^2+1) \\
&\iff 1 < 2x - 3 \\
&\iff 4 < 2x \\
&\iff 2 < x
\end{aligned}$$

Resolviendo la inecuación se obtiene el conjunto solución $S =]2, \infty[$. $\square$

Ejemplo 5. Resuelva la inecuación $\dfrac{2x-5}{4} < \dfrac{6x+4}{3}$.

<u>Solución</u>

Multiplicando por 12 que es el mínimo común múltiplo de los denominadores de la inecuación y usando la ley de cancelación se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{2x-5}{4} < \frac{6x+4}{3} \quad &\Longleftrightarrow \quad 12 \cdot \frac{2x-5}{4} < 12 \cdot \frac{6x+4}{3} \\
&\Longleftrightarrow \quad 3(2x-5) < 4(6x+4) \\
&\Longleftrightarrow \quad 6x - 15 < 24x + 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad -23 < 18x \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{23}{18} < x
\end{aligned}$$

Luego el conjunto solución es $S = \left]-\frac{23}{18}, \infty\right[$. $\square$

Ejemplo 6. Resuelva la inecuación $\dfrac{3x-2}{3} > x - 3$.
<u>Solución</u>

Multiplicando a cada lado de la inecuación por 3 y despejando la variable x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{3x-2}{3} > x - 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3x - 2 > 3x - 9 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3x - 3x > -9 + 2) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 > -7
\end{aligned}$$

La variable x desaparece pero la desigualdad numérica que queda es verdadera. Esto dice que la desigualdad no depende del valor de la variable por lo que el conjunto solución es $S = \mathbb{R}$. $\square$

Nota. Si en el ejemplo anterior la desigualdad numérica que queda al desaparecer la variable fuera falsa, el conjunto solución sería el conjunto vacío.

2.4.2. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

a. $2x - 4 \geq 5$ b. $3 \leq 4x - 2$ c. $2x - (6x + 4) > 5x + 1$

d. $\frac{2}{3}x + \frac{7}{4} < \frac{1}{3}$ e. $-7x + \frac{1}{3} > \frac{x}{3} - 2$ f. $\frac{5x-3}{4} \geq \frac{3x-6}{7}$

g. $6(x - \frac{2}{3}) \geq \frac{-x-3}{3}$ h. $x + 4 + \frac{x}{3} \leq \frac{x}{5} - 7$ i. $\frac{2x-3}{4} \geq \frac{3x-2}{8}$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes inecuaciones.

a) $(x-1)^2 - 6 > (x-2)^2$

b) $(x-3)(x+4) + 7 < (x-1)(x+8)$

c) $3(x-2) + 2x(x+2) > (2x+1)(x+5)$

d) $\dfrac{x-3}{x^2+5} \geq \dfrac{2+5(x-3)}{x^2+5}$

e) $(x+1)^3 - 4 \leq x(x^2+3x) - 5x - 2)$

f) $(2x-1)(2x+1) - 4x \geq (x-2)(4x-3)$

g) $5(3x-1) + 4(-6x+3) \geq \dfrac{2x-4}{5}$

h) $3(x-4) - \dfrac{2x-1}{5} < (9x+2) - \dfrac{x}{3}$

2.4.3. Inecuaciones Cuadráticas

Una **inecuación cuadrática** es una inecuación que tiene la forma

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

o bien

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{o} \quad ax + bx + c > 0$$

Para resolver una inecuación de este tipo se colocan todos los términos a un solo lado de la desigualdad y se factoriza la expresión resultante. Posteriormente,se hace un **cuadro de signo** para determinar los intervalos donde la desigualdad buscada se cumple. En este tipo de ejercicios es conveniente recordar la propiedad de números reales que dice que, para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$$

Comúnmente se dice que $\mathbb{R}$ no tiene "*divisores de cero*".

Ejemplo 1. Encuentre el conjunto solución de la inecuación $x^2 < x + 6$.

<u>Solución</u>

Primero se colocan todos los términos a un mismo lado de la desigualdad

$$x^2 < x + 6 \iff x^2 - x - 6 < 0 \iff (x-3)(x+2) < 0$$

Si se analiza el signo de cada factor se tiene que

$$(x-3) < 0 \iff x < 3$$

como consecuencia de este cálculo se tiene que $x - 3 > 0 \iff x > 3$.

Por otro lado

$$(x+2) < 0 \iff x < -2$$

y por tanto $(x+2) > 0 \iff x > -2$. Si se construye un cuadro de signo para la factorización $(x-3)(x+2)$ se tiene

.

x	$-\infty$	-2	3	∞
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$	
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$	
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$	

y por tanto el conjunto solución de la inecuación es $]-2,3[$.

Ejemplo 2. Encuentre el conjunto solución de la inecuación $x^2+x+1<0$.

Solución

Analizando el discriminante de la expresión cuadrática de la izquierda se ve que $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3$ por lo que la expresión no es factorizable en $\mathbb{R}$. Esto quiere decir que la expresión cuadrática no cambia de signo en todo el eje real y como en $x=0$ se tiene que $0^2+0+1=1>0$ la expresión cuadrática es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto el conjunto solución es

$$S=\phi$$

Pues no hay un solo valor real que satisfaga la inecuación. □

Ejemplo 3. Encuentre el conjunto solución de la inecuación $x^2-4x+8>0$.

Solución

Este ejercicio es similar al anterior. Si se analiza el discriminante $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot8=16-32=-16<0$ se ve que la expresión cuadrática no se puede factorizar en $\mathbb{R}$. Esto indica que la expresión conserva su signo en todo el eje real. Dado que para $x=0$ la expresión tiene signo positivo y de hecho tiene el mismo signo que el término constante 8, se deduce que la inecuación es válida para cualquier valor real. De aquí que el conjunto solución es todo $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 4. Calcule el conjunto solución de la inecuación $6x - 9 \geq x^2$.

<u>Solución</u>

Colocando los términos al mismo lado del término cuadrático se tiene

$$6x - 9 \geq x^2 \iff 0 < x^2 - 6x + 9 \iff 0 \geq (x-3)^2$$

Ahora bien, como cualquier expresión elevada al cuadrado es mayor o igual que cero, la desigualdad planteada solo se puede cumplir si el término de la derecha es cero. Pero esto ocurre solo cuando $x = 3$ por lo que

$$S = \{3\}$$

Es el conjunto solución de la inecuación. $\square$

Ejemplo 5. Resuelva la siguiente inecuación $x^2 - 3x > x(x-2) + 6x^2 - 3$.

<u>Solución</u>

Simplificando la expresión de la derecha de la desigualdad y trasladando los términos al lado derecho de la desigualdad se tiene que

$$x^2 - 3x > x(x-2) + 6x^2 - 3 \iff x^2 - 3x > x^2 - 2x + 6x^2 - 3 \iff 0 > 6x^2 + x - 3$$

Analizando el discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 1 + 72 = 73 > 0$ se nota que la expresión cuadrática de la derecha se puede factorizar completamente y entonces la inecuación original es equivalente a la inecuación de la forma

$$0 > 7 \cdot \left(x - \frac{-1-\sqrt{73}}{12} \right) \left(x - \frac{-1+\sqrt{85}}{12} \right).$$

Analizando el signo de cada factor se tiene que

$$x - \frac{-1-\sqrt{73}}{12} < 0 \iff x < \frac{-1-\sqrt{73}}{12}$$

Además

$$x - \frac{-1+\sqrt{73}}{12} < 0 \iff x < \frac{-1+\sqrt{73}}{12}$$

De donde, si se realiza el cuadro de signo se tiene

.

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{73}}{12}$	$\frac{-1+\sqrt{73}}{12}$	∞
$(x - \frac{-1-\sqrt{73}}{12})$	$-$	$+$	$+$	
$(x - \frac{-1+\sqrt{73}}{12})$	$-$	$-$	$+$	
$7(x - \frac{-1-\sqrt{73}}{12})(x - \frac{-1+\sqrt{73}}{12})$	$+$	$-$	$+$	

De donde se tiene que el conjunto solución es el intervalo entre los ceros de la cuadrática

$$S = \left] \frac{-1-\sqrt{73}}{12}, \frac{-1+\sqrt{73}}{12} \right[$$

. $\square$

2.4.4. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

a. $x^2-1>0$	b. $-x^2+4<3x$	c. $x^2+1>0$
d. $2x^2-x\geq 3$	e. $-x^2+3\leq 2x+1$	f. $5x^2-4x\geq x-6$
g. $x+1<3x^2+4$	h. $3(x-4)>-x^2+2$	i. $-x^2+5x-6>0$

Ejercicios tipo B

1. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

a. $\frac{1}{4}x^2-3>(x-1)^2$	b. $(\sqrt{2}x+2)^2-4\sqrt{2}x>x-3$
c. $x+10-x^2\geq(x-3)^2+1$	d. $3(x^2-3x+4)-4x>x^2-1$
e. $3x^2+5x-3<x^2-4x-6$	f. $-x^2-5x+4>x^2-6x$
g. $(2x-3)x+3<(x-2)^2-6$	h. $x^2-(3x-4)^2\geq(5x-1)^2-2$

2.4.5. Inecuaciones con Expresiones racionales

Este tipo de inecuaciones contienen expresiones racionales a cada lado de la desigualdad. Para resolver estas inecuaciones se procede de manera similar que en el caso de las inecuaciones cuadráticas. Esto es,

- Se colocan todos los términos a un solo lado de la desigualdad.
- Se simplifica al máximo la expresión resultante dejando factorizado al máximo tanto en numerador como el denominador.
- Se hace un cuadro de signo para determinar los intervalos donde se cumple la desigualdad buscada.

Ejemplo 1. Encuentre el conjunto solución de la inecuación $\frac{1}{x} \leq 2$.

Solución

Inicialmente, se debe tomar en cuenta que x no puede ser cero. Además, no se puede "*pasar a multiplicar*" la variable x al lado derecho de la desigualdad pues no se conoce el signo de esta y por tanto no se sabe si la desigualdad de invierte o no con base en las propiedades de desigualdades estudiadas en el capítulo 1.

En vez de eso se transforma la inecuación en una inecuación equivalente colocando todos los términos a un mismo lado de la desigualdad. Esto es

$$\frac{1}{x} - 2 \leq 0$$

Simplificando la expresión de la izquierda, expresándola como una sola fracción racional se tiene la desigualdad

$$\frac{1-2x}{x} \leq 0$$

Si se analiza el signo del numerador de la fracción de la izquierda se tiene

$$1 - 2x \leq 0 \iff 1 \leq 2x \iff \frac{1}{2} \leq x$$

Esto indica que la expresión $1 - 2x$ es negativa o cero en $[\frac{1}{2}, \infty[$ y positiva en su complemento $] - \infty, \frac{1}{2}[$.

Luego,se puede hacer un cuadro de signo para analizar la variación de signo de la fracción racional

.

x	$-\infty$ 0	0 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ∞
$1-2x$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$+$	$+$
$\frac{1-2x}{x}$	$-$	$+$	$-$

Finalmente, observando el cuadro de signo, se ve que el conjunto solución debe ser

$$S =] - \infty, 0[\cup [\frac{1}{2}, \infty[$$

Se incluye el punto frontera $x = \frac{1}{2}$ pues en ese punto el numerador se hace cero. El punto $x = 0$ no es parte del conjunto solución pues la desigualdad original se indefine en ese punto. Esto se hace notar en el cuadro de signo trazando una doble línea continua. $\square$

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $\dfrac{3x+1}{5x-2} < 3$.

Solución.
Analizando las restricciones de dominio de la expresión algebraica de la izquierda, se tiene que x no puede ser $\dfrac{2}{5}$.

Restando 3 a cada lado de la desigualdad se tiene

$$\frac{3x+1}{5x-2} < 3 \iff \frac{3x+1}{5x-2} - 3 < 0$$

Simplificando y factorizando al máximo la expresión de la izquierda se obtiene la desigualdad

$$\frac{3x+1}{5x-2} - 3 < 0 \iff \frac{3x+1-3(5x-2)}{5x-2} < 0 \iff \frac{-12x+7}{5x-2} < 0$$

Seguidamente, se analiza el signo del numerador y el denominador . Esto es:

$$-12x+7 < 0 \iff -12x < -7 \iff x > \frac{7}{12}$$

Esto dice que $-12x+7$ es negativo en $]\frac{7}{12}, \infty[$ y positivo o cero en su complemento, esto es, en $]-\infty, \frac{7}{12}]$.

De la misma forma se analiza el signo de $5x-2$

$$5x-2 < 0 \iff 5x < 2 \iff x < \frac{2}{5}$$

O sea $5x-2$ es negativo en $]-\infty, \frac{2}{5}[$ y positivo o cero en su complemento $[\frac{2}{5}, \infty[$.

Para obtener el conjunto solución de la inecuación original se hace un cuadro de signo donde podemos calcular el cociente de signos del numerador y denominador en los diferentes intervalos.

Los puntos en los cuales se indefine la expresión algebraica se marcan en el cuadro de signo con una doble línea continua.

En este caso, el cuadro de signo es el siguiente:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{12}$	∞
$-12x+7$	$+$	$+$	$-$	
$5x-2$	$-$	$+$	$+$	
$\dfrac{-12x+7}{5x-2}$	$-$	$+$	$-$	

Luego el conjunto solución de la inecuación original es

$$S =]-\infty, \frac{2}{5}[\ \cup \ ]\frac{7}{12}, \infty[$$

Tomando la unión de los intervalos donde el cociente de la última fila de la tabla es negativo. $\square$

En resumen, las inecuaciones con expresiones racionales se resuelven transformándola en una desigualdad de la forma $A(x) < 0, A(x) \leq 0, A(x) > 0$ o $A(x) \geq 0$ según sea el caso, donde $A(x)$ es la expresión que se obtiene al colocar todos los términos al lado izquierdo de la inecuación. Luego se factoriza al máximo la expresión $A(x)$ y se analizan los intervalos donde $A(x)$ cambia de signo. Finalmente, se escoge como solución la unión de los intervalos donde se cumple la desigualdad.

2.4.6. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Encuentre el conjunto solución para las siguientes inecuaciones

   a. $\dfrac{1}{2x} \geq 0$ b. $\dfrac{2x}{x+1} < 0$ c. $\dfrac{2x-3}{4x-5} < 0$

   d. $\dfrac{2}{x-4} < 3$ e. $\dfrac{4x}{x+2} \geq 5$ f. $\dfrac{2x-3}{4x+2} < 3$

   g. $\dfrac{-5x-7}{x+4} + 1 > 0$ h. $\dfrac{8x-7}{-x+2} \geq 3$ i. $\dfrac{5x+6}{-x-4} < 0$

Ejercicios tipo B

1. Encuentre el conjunto solución para las siguientes inecuaciones

   a. $\dfrac{2x+1}{x+2} < \dfrac{x-1}{x+3}$ c. $\dfrac{-x+2}{4} + x < \dfrac{x+1}{5}$

   b. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+2}$ d. $\dfrac{x+4}{2x} + \dfrac{x+1}{x-4} \leq 0$

   e. $\dfrac{3x-2}{5x+3} > \dfrac{4x+1}{-x+2}$ f. $\dfrac{x-2}{x+1} + 1 < \dfrac{1-2x}{x-2}$

   g. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x+1} < 1$ h. $\dfrac{x+1}{x+-2} + \dfrac{x-3}{x+4} \geq 0$

2.4.7. Inecuaciones con Valor Absoluto

Las inecuaciones que involucran un valor absoluto se deben resolver considerando los intervalos en que las expresiones dentro de valor absoluto son positivas o negativas. Luego se analizan los distintos casos en que se puede expresar la desigualdad dependiendo de la forma de las expresiones en valor absoluto en cada caso. La solución se da comúnmente por casos. Esto es debido a que las expresiones en valor absoluto admiten dos casos que deben ser analizados. La expresión $|x-a|, a \in \mathbb{R}$ es equivalente a

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \iff \quad x-a \geq 0 \iff x \geq a \\ -(x-a) & \iff \quad x-a < 0 \iff x < a \end{cases}$$

En las inecuaciones con valor absoluto es conveniente recordar las siguientes propiedades que son una consecuencia inmediata de las propiedades de valor absoluto estudiadas anteriormente:

- $|x-a| < k \iff -k < x-a < k; a, k \in \mathbb{R}$
- $|x-a| > k \iff x-a < -k$ ó $x-a > k$

Equivalencias análogas se hacen con los símbolos $\leq, >$ y $\geq$.

Ejemplo 1. Resuelva la desigualdad $|x-4| < 5$.

Solución

Aplicando la primera de las propiedades mencionadas se tiene

$$|x-4| < 5 \iff -5 < x-4 < 5 \iff -5+4 < x < 5+4 \iff -1 < x < 9$$

Luego, el conjunto solución de la desigualdad es

$$S =]-1, 9[$$

Este resultado se puede obtener resolviendo cada desigualdad de la equivalencia por separado y tomando el conjunto solución final como la intersección de los conjuntos de solución de cada desigualdad.

De hecho tomando la primera desigualdad se tiene

$$-5 < x-4 \iff -5+4 < x \iff -1 < x$$

Por lo que el conjunto solución de esta primera inecuación es

$$S_1 =]-1, \infty[$$

Por otra parte, si se resuelve la segunda inecuación se tiene

$$x - 4 < 5 \iff x < 5 + 4 \iff x < 9$$

de donde el conjunto solución de la segunda desigualdad es

$$S_2 =]-\infty, 9[$$

La solución final de la inecuación original es

$$S = S_1 \cap S_2 =]-1, \infty[\cap]-\infty, 9[=]-1, 9[$$

Tal y como se obtuvo resolviendo simultáneamente ambas inecuaciones. □

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $|2x + 3| \geq 7$.

Solución

En este tipo de ejercicios, esto es, los que tienen el símbolo $>$ o $\geq$, se utiliza la segunda equivalencia y se resuelven las dos inecuaciones resultantes por separado. Así, se tiene

$$2x + 3 < -7 \iff 2x < -10 \iff x < -5$$

El conjunto solución en este caso es el intervalo $S_1 =]-\infty, -5[$.

Para la segunda desigualdad se tiene

$$2x + 3 > 7 \iff 2x > 4 \iff x > 2$$

De donde el conjunto solución de esta inecuación es $S_2 =]2, \infty[$.
Finalmente, el conjunto solución de la inecuación en valor absoluto $|2x+3| \geq 7$ será la unión de los dos conjuntos solución anteriores, esto es :

$$S = S_1 \ \cup \ S_2 =]-\infty, -5[\cup]2, \infty[$$

Se debe notar que, para este tipo de desigualdades, el conjunto solución final es la unión de los conjuntos solución parciales de cada desigualdad. □

Ejemplo 3. Resuelva la desigualdad $|5x+3| < 0$.

Solución

Dado que el valor absoluto de cualquier número real debe ser necesariamente mayor o igual que cero según lo estudiado en el apartado de valor absoluto en el capítulo 1, se tiene que ningún número real $x \in \mathbb{R}$ puede satisfacer la desigualdad. Luego el conjunto solución

$$S = \phi$$

El lector podrá verificar este resultado haciendo el cálculo directamente aplicando la equivalencia y encontrando el conjunto solución. □

Ejemplo 4. Resuelva la inecuación $|3x+4| \leq \frac{1}{2}$.

Solución

Se escribe la expresión equivalente en términos de dos desigualdades simultáneas y se despeja la variable x

$$|3x+4| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq 3x+4 \leq \frac{1}{2}$$

Resolviendo las inecuaciones se tiene

$$-\frac{1}{2} \leq 3x+4 \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}-4 \leq 3x \leq \frac{1}{2}-4 \iff -\frac{9}{2} \leq 3x \leq -\frac{7}{2} \iff -\frac{9}{6} \leq x \leq -\frac{7}{6}$$

Del cálculo anterior se obtiene, después de simplificar que

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{7}{6}$$

y por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = [-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6}]$$

es el conjunto solución de la inecuación. □

2.4.8. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto

a. $|2x-6| < 9$ b $|-3x+2| > 7$. c. $|5x-4| \leq 3$.

d.$|-7x+8| \geq 2$ e. $|4x-5| < 6$ f. $|-8x+1| \geq 3$

g.$-|-2x+4| < 0$ h. $-|5x+3| > 0$ i. $-|3x-2| \leq 0$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes inecuaciones

a. $\left|\frac{1}{3}x+4\right| \geq \frac{4}{5}$ b. $-\left|\frac{2x}{5}+3\right| \leq \frac{2}{3}$ c. $|-5x-\pi| < \frac{\pi}{4}$

d. $-\left|\sqrt{3}x+2\right| \geq \sqrt{7}$ e. $\left|2x-\sqrt[3]{2}\right| < \frac{1}{6}$ f. $|x^2+2x+1| < 0$

g. $\frac{\pi}{3}\left|4\pi x-\frac{\pi}{6}\right| \geq \frac{\pi}{2}$ h. $\left|\frac{x}{3}+3x-2\right| \leq \frac{3}{5}$ i. $-|4x-3| > 0$

2.5. Otros tipos de ecuaciones

Algunas ecuaciones no son de las dos formas antes estudiadas. Sin embargo, aplicando las reglas de igualdades se pueden encontrar sus soluciones. Algunas de estas incluso se pueden reducir a ecuaciones de tipo lineal o cuadrático.

Por lo general, para resolver este tipo de ecuaciones se deben hacer consideraciones sobre el dominio de definición de las expresiones en la ecuación que requieren del uso de inecuaciones, valor absoluto y los demás conceptos ya estudiados.

2.5.1. Ecuaciones con Valor Absoluto

Estas ecuaciones contienen expresiones algebraicas en valor absoluto. Para resolverlas se procede como con las ecuaciones con radicales. Elevando al cuadrado se eliminan los valores absolutos. Se resuelve la ecuación resultante y al final se verifican las soluciones.

También es posible analizar casos determinando intervalos en los que la expresión dentro del valor absoluto sea positiva o negativa. Luego, se sustituye el valor absoluto por la correspondiente expresión dentro de cada intervalo y se resuelve la ecuación resultante sin valor absoluto. Al final se escogen las soluciones que se encuentren en cada uno de los intervalos determinados al inicio.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación $|2x-1|=6$.

Solución

Se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación para eliminar el valor absoluto

$$\begin{array}{rcl} |2x-1| & = & 6 \quad \Rightarrow \\ (|2x-1|)^2 & = & 36 \quad \Rightarrow \\ (|2x-1|)^2 & = & 36 \quad \Rightarrow \\ |(2x-1)^2| & = & 36 \quad \Rightarrow \\ (2x-1)^2 & = & 36 \quad \Rightarrow \\ 4x^2-4x+1 & = & 36 \quad \Rightarrow \\ 4x^2-4x-375 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo esta última ecuación se obtienen los valores

$$x = -\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación original se verifica que ambos valores son solución de la ecuación . Por tanto

$$S = \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right\}$$

Es el conjunto solución de la ecuación. $\square$

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $|2x - 5| + |2x - 3| = 4$.

Solución Se despeja un valor absoluto, digamos $|2x - 5|$ y se eleva al cuadrado

$$\begin{aligned}
|2x - 5| + |2x - 3| &= 4 \\
|2x - 5| &= 4 - |2x - 3| \\
(|2x - 5|)^2 &= (4 - |2x - 3|)^2 \\
(2x - 5)^2 &= 16 - 8|2x - 3| + (2x - 3)^2
\end{aligned}$$

Se simplifica esta ecuación y se vuelve a elevar al cuadrado para quitar el valor absoluto

$$\begin{array}{rcl}
(2x-5)^2 & = & 16 - 8|2x-3| + (2x-3)^2 \\
4x^2 - 20x + 25 & = & 16 + 4x^2 - 12x + 9 - 8|2x-3| \\
-8x & = & -8|2x-3| \\
x & = & |2x-3| \\
x^2 & = & 4x^2 - 12x + 9 \\
0 & = & 3x^2 - 12x + 9 \\
0 & = & x^2 - 4x + 3 \\
0 & = & (x-3)(x-1)
\end{array}$$

De este cálculo se obtiene que $x = 3$ y $x = 1$ son soluciones de la última ecuación. Debemos verificar cuales de estas son solución de la ecuación original. Sustituyendo los valores en la ecuación original se tiene que

$$S = \{3, 1\}$$

es el conjunto solución de la ecuación. $\square$

Otra técnica usada cuando la ecuación tiene más de un valor absoluto es la que utiliza resolución por casos como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación $|2x-3| = |3x+1| - 2$.

<u>Solución</u>

Considerando que

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}, \\ \\ -(2x-3) & \text{si } 2x-3 < 0 \iff x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

y además,

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } 3x+1 \geq 0 \iff x \geq \frac{-1}{3}, \\ \\ -(3x+1) & \text{si } 3x+1 < 0 \iff x < \frac{-1}{3} \end{cases}$$

podemos resumir esta información en el siguiente cuadro:

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{3}{2}$ ∞
$\|2x-3\|$	$-(2x-3)$	$-(2x-3)$	$2x-3$
$\|3x+1\|$	$-(3x+1)$	$3x+1$	$3x+1$
$\|2x-3\| = \|3x+1\| - 2$	S_1	S_2	S_3

Resolviendo el caso S_1 se tiene que

$$\begin{aligned} -(2x-3) &= -(3x+1)-2 \\ -2x+3 &= -3x-3 \\ -2x+3x &= -3-3 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Como $x=-6$ se encuentra en el intervalo $]-\infty, \frac{-1}{3}[$, se tiene que

$$S_1 = \{-6\}.$$

Seguidamente se resuelve el caso S_2.

$$\begin{array}{rcl} -(2x-3) & = & (3x+1)-2 \\ -2x+3 & = & 3x-1 \\ -2x-3x & = & -1-3 \\ -5x & = & -4 \\ x & = & \dfrac{4}{5} \end{array}$$

En este caso, la solución $x = \dfrac{4}{5}$ está en el intervalo en donde se analiza la ecuación y se tiene

$$S_2 = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

Se resuelve además el caso S_3 para obtener:

$$\begin{array}{rcl} (2x-3) & = & (3x+1)-2 \\ 2x-3 & = & 3x-1 \\ 2x-3x & = & -1+3 \\ -x & = & 2 \\ x & = & -2 \end{array}$$

En este caso, como $x = -2$ no esta en el intervalo en que se está analizando la ecuación, se tiene que la solución S_3 es

$$S_3 = \emptyset$$

Finalmente se tiene que la solución total S_t es

$$S_t = \left\{-6, \frac{4}{5}\right\}$$

O sea, $S_t = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ $\square$

Ejemplo 4. Resuelva la ecuación $|1-4x| - 3 = |5x-1|$.

Solución

Considerando que

$$|1-4x| = \begin{cases} 1-4x & \text{si } 1-4x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{4}, \\ \\ -(1-4x) & \text{si } 1-4x < 0 \iff x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

y además,

$$|5x-1| = \begin{cases} 5x-1 & \text{si } 5x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{5}, \\ \\ -(5x-1) & \text{si } 5x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{5} \end{cases}$$

podemos resumir esta información en el siguiente cuadro:

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	∞
$\|1-4x\|$	$1-4x$	$1-4x$	$-(1-4x)$	
$\|5x-1\|$	$-(5x11)$	$5x-1$	$5x-1$	
$\|1-4x\| - 3 = \|5x-1\|$	S_1	S_2	S_3	

Se resuelve el caso S_1 y se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 1-4x-3 & = & -(5x-1) \\ -4x-2 & = & -5x+1 \\ -4x+5x & = & 1+2 \\ x & = & 3 \end{array}$$

Luego, como $x=3$ no se encuentra en el intervalo $]-\infty, \frac{1}{5}[$, se tiene que

$$S_1 = \emptyset.$$

El caso S_2 tiene el siguiente desarrollo.

$$\begin{array}{rcl} 1-4x-3 & = & (5x-1) \\ -4x-2 & = & 5x-1 \\ -2+1 & = & 5x+4x \\ -1 & = & 9x \\ \dfrac{-1}{9} & = & x \end{array}$$

En este caso, la solución $x = \dfrac{-1}{9}$ no está en el intervalo $\left]\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}\right[$ en donde se analiza la ecuación, de donde

$$S_2 = \emptyset$$

Se continua con el caso S_3 para obtener:

$$\begin{aligned} (4x-1)-3 &= (5x-1) \\ 4x-4 &= 5x-1 \\ -4+1 &= -5x-4x \\ -3 &= x \end{aligned}$$

Luego, como $x = -3$ no esta en el intervalo $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$, se tiene que la solución S_3 es

$$S_3 = \emptyset$$

Finalmente se tiene que la solución total S_t es la unión de las tres soluciones

$$S_t = S_1 \cup S_2 \cup \S_3 = \emptyset$$

□

2.5.2. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a. $\lvert x+2\rvert = 2x+1$	b. $\lvert 2x-3\rvert = \lvert 3x-1\rvert$	c. $\left\lvert\frac{3x+1}{5x+2}\right\rvert = 3$
d. $\lvert 3x-2\rvert = x+1$	e. $\lvert -5x+6\rvert + 2 = 1$	f. $\lvert 9x+4\rvert = 2x+1$
g. $\lvert x+3\rvert = 5$	h. $\lvert 5x-3\rvert = 4$	i. $\lvert 5x+1\rvert = -2$
j. $\lvert 5x+7\rvert = 6$	k. $\lvert 8x-3\rvert = 4\lvert 2x+1\rvert$	l. $\lvert 3x-1\rvert = 7$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a. $|\frac{3}{2}x+7|+2=-5$ b. $\left|\frac{x^2+1}{6}\right|=|11x^2+5x+1|$

c. $|2x-3|+1=-x^2-3$ d. $|3x+5|+|3x+2|=0$

e. $|x^2+x+4|=x^2+3$ f. $|x^2-2x+8|=x^2+4$

g. $|5x+7|+|2x+3|=1$ h. $|3x+5|-|1-2x|=2$

2.5.3. Ecuaciones con Expresiones Radicales

Estas ecuaciones contienen algún radical cuyo subradical contiene a la incógnita. Al inicio de la resolución de la ecuación se deben considerar las restricciones que puedan generar las expresiones radicales en términos de evitar escoger valores de la variable que hicieran algún subradical negativo.

Para resolver estas ecuaciones se despeja dicho radical y se eleva a la potencia necesaria para eliminar el radical. Una vez eliminados los radicales se obtiene una ecuación que se resuelve por medio de los métodos ya estudiados.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación $3\sqrt{x-3}=x-1$.
Solución
Primero que todo se observa que solo los valores mayores que $x=3$ pueden ser solución de la ecuación.
Inicialmente, se eleva al cuadrado a cada lado de la ecuación para obtener:

$$(3\sqrt{x-3})^2=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 9(x-3)=x^2-2x+1$$

Resolviendo esta última ecuación se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 9(x-3) & = & x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \\ 9x-27 & = & x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \\ 0 & = & x^2-11x+28 \quad \Rightarrow \\ 0 & = & (x-4)(x-7) \end{array}$$

Luego las soluciones de la última ecuación son $x = 4$ y $x = 7$. Se sustituyen en la ecuación original para verificar si estos valores son solución de la ecuación original. Así, para $x = 4$ se tiene que

$$3\sqrt{4-3} = 4-1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = 3$$

luego $x = 4$ es una solución.

Para $x = 7$ se tiene que

$$3\sqrt{7-3} = 7-1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \cdot 2 = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 6 = 6$$

Luego $x = 7$ también es solución de la ecuación original. Por lo tanto

$$S = \{4, 7\}$$

Es el conjunto solución de la ecuación. □

El proceso de elevar a una potencia una ecuación con radicales genera una nueva ecuación que, en general, no es equivalente a la ecuación original. Esto se debe a que el conjunto solución de la segunda ecuación contiene las soluciones de la ecuación original, pero podría tener otros valores que no corresponden a soluciones de la primera ecuación. Por tal motivo, una vez encontradas las posibles soluciones, se deben verificar sustituyendo estas en la ecuación original.

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $x + 2 = \sqrt{4x+9}$.

<u>Solución</u>

Primero que todo se analizan las restricciones para la variable x. En este caso, los valores posibles de x deben ser tal que $4x + 9$ sea mayor que cero para que el subradical no sea negativo. Esto ocurre cuando $x > -\frac{9}{4}$. Se eleva al cuadrado a cada lado de la ecuación para eliminar el subradical y se simplifican las expresiones resultantes.

$$\begin{array}{rcl} x+2 & = & \sqrt{4x+9} \quad \Rightarrow \\ (x+2)^2 & = & 4x+9 \quad \Rightarrow \\ x^2+4x+4 & = & 4x+9 \quad \Rightarrow \\ x^2 & = & 5 \end{array}$$

Resolviendo esta última ecuación cuadrática se tiene que

$$x = -\sqrt{5} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{5}$$

Sustituyendo $\sqrt{5}$ en la ecuación original se tiene

$$\sqrt{5} + 2 = \sqrt{4\sqrt{5} + 9}$$

ya que

$$\sqrt{4\sqrt{5}+9} = \sqrt{4+4\sqrt{5}+5} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = 2+\sqrt{5}$$

Pero en el caso de $-\sqrt{5}$ la igualdad no se da puesto que

$$\sqrt{-4\sqrt{5}+9} = \sqrt{4-4\sqrt{5}+5} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5})$$

Así, solamente $x = \sqrt{5}$ satisface la ecuación original. Por lo tanto

$$S = \left\{\sqrt{5}\right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación original.

Note que aún cuando $-\sqrt{5}$ está en el dominio de definición de la ecuación original, no es solución una solución de ella. De aquí la necesidad de realizar la verificación de los valores obtenidos. $\square$

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{4x+5}$.

Solución

Inicialmente se nota que solo los valores $x > \frac{-1}{3}$ pueden ser solución de la ecuación pues de lo contrario alguno de los dos subradicales se haría negativo.

$\square$

Ejemplo 4. Resuelva la ecuación $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1}=\sqrt{5x+9}$.

Solución

Para que todos los subradicales sean mayores o iguales a cero se debe tener que x debe ser mayor que -1

Se eleva al cuadrado para eliminar el radical de la derecha y se obtiene

$$\begin{array}{rcll} (\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1})^2 & = & (\sqrt{5x+9})^2 & \Rightarrow \\ (3x+4)+2\sqrt{3x+4}\sqrt{x+1}+(x+1) & = & 5x+9 & \Rightarrow \\ 4x+5+2\sqrt{3x+4}\sqrt{x+1} & = & 5x+9 & \Rightarrow \\ 2\sqrt{3x+4}\sqrt{x+1} & = & x+4 & \Rightarrow \end{array}$$

Se eleva por segunda ves al cuadrado para eliminar los radicales de la izquierda

$$\begin{array}{rcll}
(2\sqrt{3x+4}\sqrt{x+1})^2 & = & (x+4)^2 & \Rightarrow \\
4(3x+4)(x+1) & = & (x+4)^2 & \Rightarrow \\
4(3x^2+7x+4) & = & x^2+8x+16 & \Rightarrow \\
12x^2+28x+16 & = & x^2+8x+16 & \Rightarrow \\
11x^2+20x & = & 0 & \Rightarrow \\
x(11x+20)=0 & & &
\end{array}$$

De qui se encuentran las los valores

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = -\frac{20}{11}$$

El lector puede verificar que solamente $x = 0$ es una solución de la ecuación original. Luego

$$S = \{0\}$$

Es el conjunto solución de la ecuación. □

2.5.4. Ejercicios

Ejercicios tipo A

1. Resuelva las siguientes ecuaciones. absoluto

   a. $\sqrt{x+2} = 2x+1$

   b. $\sqrt{3x-2} = 3x-4$

   c. $\sqrt{5x+1} = \sqrt{4x+5}+1$

   d.$\sqrt{x+2}+1 = \sqrt{x+1}$

   e. $\sqrt{3x+7}+2 = \sqrt{4x+5}$

   f. $\sqrt{3x+1} = 2x+1$

   g.$|x+1| = \sqrt{5x-3}$

   h. $\sqrt{4x-3} = x-4$

   i. $\sqrt{3x-2} = -(x+1)^2$

Ejercicios tipo B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a. $\sqrt{2x-10}+\sqrt{3x-2} = \sqrt{4x+5}$

   b. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+6} = \sqrt{11x-5}$

   c. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$

   d. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x+4} = \sqrt{4x+5}$

   e. $\sqrt{4x-7}+\sqrt{5x+2} = \sqrt{3x-5}$

   f. $\sqrt{2x-7}+6 = \sqrt{2x-1}+5$

   g. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{-3x+2} = \sqrt{6x+5}$

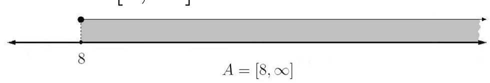
   h. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2} = \sqrt{x-5}$

Respuestas a los ejercicios

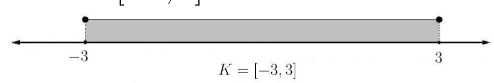
Soluciones de Ejercicios 1.1.6 Pág. 22

Ejercicios tipo A

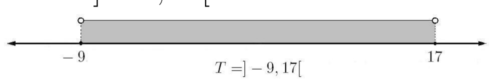
a. $A = [8, \infty]$



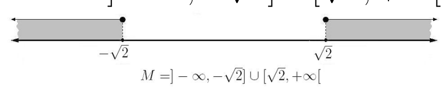
b. $K = [-3, 3]$



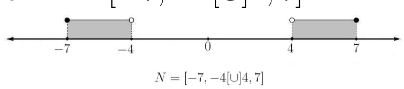
c. $T =]-9, 17[$



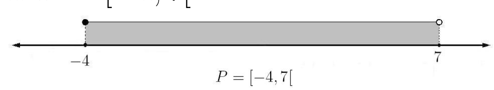
d. $M =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$



e. $N = [-7, -4[\cup]4, 7]$

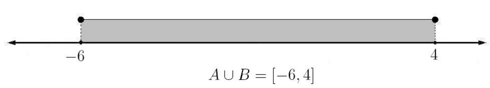


f. $P = [-4, 7[$

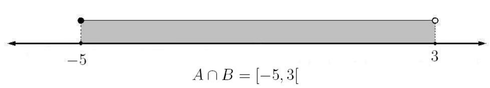


Ejercicios tipo B

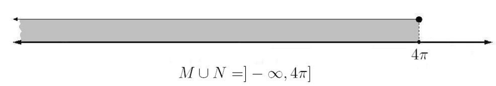
a. $A \cup B = [-6, 4]$



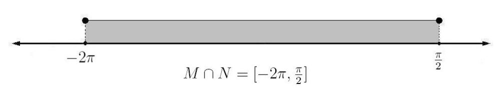
$A \cap B = [-5, 3[$



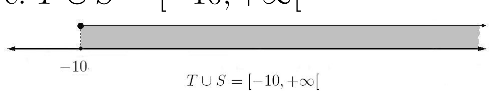
b. $M \cup N =]-\infty, 4\pi]$



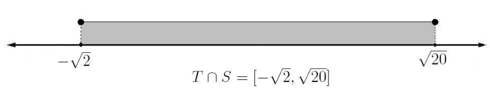
$M \cap N = [-2\pi, \frac{\pi}{2}]$



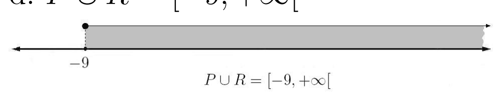
c. $T \cup S = [-10, +\infty[$



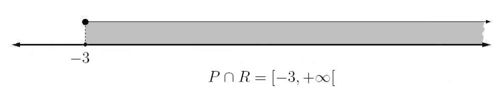
$T \cap S = [-\sqrt{2}, \sqrt{20}]$



d. $P \cup R = [-9, +\infty[$



$P \cap R = [-3, +\infty[$



Soluciones de Ejercicios 1.2.3 Pág. 26

Ejercicios tipo A

a. $256x^8y^20$ b. $-6x^6y^6$ c. $6x^2y^2$

d. $\dfrac{a^4b^{10}}{4c^6}$ e. $\dfrac{z^6c^6}{27b^{12}a^{12}}$ f. $16x^4y^4$

g. $\dfrac{9b^2}{2ac^7}$ h. $\dfrac{7b^6}{5c^4}$ i. $\dfrac{15y^7}{22x^6z^{25}}$

Ejercicios tipo B

a. $x^{2r-1}y^4$ b. $\dfrac{1}{x^9y^{3b}}$

c. $a^{3n-1}b^{4n+2}$ d. $x^{2s-r}y^{s-2r}$

Soluciones de Ejercicios 1.2.6 Pág. 32

Ejercicios tipo A

a. s b. $\dfrac{a^8}{b^4}$ c. $3x^2y^2z\sqrt[3]{xz}$

d. $3x^2y\sqrt[3]{x}$ e. $|s|\sqrt[4]{5x^3y^2}$ f. $8x^8y^10$

g. $3|x|^3y^6$ h. $-\dfrac{x^n}{x^{2m}}$ i. $2a^2|b|^3c^6\sqrt[6]{2ac}$

Ejercicios tipo B

a. $x^2y\sqrt[3]{x^2y}$ b. $\dfrac{2|t|}{y^2}$ c. $\dfrac{x^4}{3y^2|z|^3}$

d. $-\dfrac{2xy^2}{3x^3}$ e. $-\dfrac{5y}{6m^8}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ f. $\dfrac{2|t|^3x^2}{|y|^5}$

g. $\dfrac{5x^2}{y\sqrt{y}}$ h. $\sqrt[6]{2^5x^3}$ i. $\dfrac{2y^4}{x^2}$

Soluciones de Ejercicios 1.2.10 Pág. 38

Ejercicios tipo A

a. $3(4m^2 + 2q + 3n^2)$ b. $5x(x^2y^2 - xy + 2)$ c. $2x^2(x - 4y)$

d. $4a^5b^2c^4(a + 2b)$ e. $3a(a - 2b)$ f. $x(1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)$

g. $\frac{1}{2}er(e - \frac{1}{3}r)$ h. $6yz(z^2 - 2y^2)$ i. $x(a + y + z)$

Ejercicios tipo B

a. $\frac{6}{5}xy(4xy - \frac{1}{5}y + 3x)$ b. $\frac{1}{2}tk^2(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}k + \frac{5}{3}t^4k^2)$

c. $(x + 1)(x - y - z)$ d. $(r + t)(6r - 5s)$

e. $(x + 1)(x + y + 1)$ f. $x^2(x^2 - x + 2)$

Soluciones de Ejercicios 1.2.12 Pág. 43

Ejercicios tipo A

a. $36x^2 + 12xy + y^2$ b. $16y^{10} + 40y^5n^6 + 25n^{12}$

c. $x^{2m} - 2x^my^n + y^{2n}$ d. $9x^6 - 48x^3y^4 + 64y^8$

e. $9x^{2a} - 25y^{2m}$ f. $x^{22} - 10x^{11}y^{20} + 25y^{40}$

g. $x^{2m+2} + 2x^{m+1}y^{n+2} + y^{2n+4}$ h. $4a^2 - 1$

i. $a^4x^2 - b^2y^4$ j. $64x^4y^4 - 144x^2y^2m^4 + 81m^8$

k. $a^6 - b^8$ l. $a^4x^2 - 2a^2xby^2 + b^2y^4$

Ejercicios tipo B

a. $\dfrac{x - 2}{(5x + 7)}$ b. $x^n + y^n$ c. $1 - x + y$

d. $1 - 3x^{m+2}$ e. $y^2 - 1$ f. $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$

g. $4xy^2 - 5a^3$ h. $x^4 + 3x^y + 9y^2$ i. $x^{m+1} + 8$

Soluciones de Ejercicios 1.2.14 Pág. 48

Ejercicios tipo A

1. .
   a. $(x+2)^2-4$ b. $(2y-3x)^2-9x^2$ c. $(x+\sqrt{5})^2+1-\sqrt{5}$

   d. $(\sqrt{3}x+\dfrac{5}{6})^2-\dfrac{25}{36}$ e. $(x-5)^2-1$ f. $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{45}{4}$

   g. $(\sqrt{5}x+\dfrac{41}{2\sqrt{5}})^2-\dfrac{1521}{20}$ h. $(\sqrt{8}x+\dfrac{25}{\sqrt{8}})^2-\dfrac{121}{8}$ i. $-(\sqrt{2}t+\dfrac{9}{4})^2+\dfrac{101}{4}$

2. .
   a. $(x-9)(x-7)$ b. $6(y+2)(y-\frac{5}{6})$ c. $2(x+2)(x-\frac{3}{2})$

   d. $12(a+\frac{2}{3})(a-\frac{1}{4})$ e. $11(t-15)(t-\frac{12}{11})$ f. $30(y-\frac{6}{5})(y+\frac{1}{6})$

   g. $5(x+8)(x+\frac{1}{5})$ h. $8(x+\frac{9}{2})(x+\frac{7}{4})$ i. $-2(t+5)(t-\frac{1}{2})$

Ejercicios tipo B

a. $\dfrac{2(x-3)}{x+1}$ b. $-\dfrac{y+4}{y^2}$ c. $-\dfrac{3}{2+x}$

d. $a+b$ e. $\dfrac{4(2t+5)}{t+2}$ f. $\dfrac{7x+17}{x^2+10x+7}$

Soluciones de Ejercicios 1.3.1 Pág. 56

Ejercicios tipo A

a. $C(x)=x+2; R(x)=1$

b. $C(x)=x-4; R(x)=-2x+5$

c. $C(x)=x^3-2x^2+7x-15; R(x)=29$

d. $C(x)=2x^2+5x-1; R(x)=0$

e. $C(x)=3x+9; R(x)=-4x^2-18x-24$

f. $C(x) = x^2 - 5x + 4; R(x) = -17x + 2$

g. $C(x) = 4x^2 - 5x - 3; R(x) = -4x - 3$

h. $C(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 8; R(x) = 12x - 14$

i. $C(x) = -6x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7x - 12; R(x) = 10$

j. $C(x) = x^3 - 3x^2 - 11x - 38; R(x) = -107$

Ejercicios tipo B

a. $C(x) = x^2 + x; R(x) = 0$

b. $C(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2; R(x) = 2x + 4$

c. $C(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{8}x + \frac{3}{32}; R(x) = -\frac{381}{128}$

d. $C(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{81}x - \frac{65}{243}; R(x) = \frac{599}{243}$

e. $C(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{21}{64}x^2 + \frac{41}{256}x + \frac{461}{1024}; R(x) = -\frac{3839}{1024}x - \frac{767}{1024}$

f. $C(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 30x + 60; R(x) = 124$

g. $C(x) = 5x^4 + 70x^3 + 1050x^2 + 15750x + 236255; R(x) = 708762$

h. $C(x) = x^2 + x - 2; R(x) = 5x - 5$

i. $C(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3; R(x) = 2x^2 - 3x + 5$

j. $C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}; R(x) = \frac{7}{9}x - \frac{1}{9}$

Soluciones de Ejercicios 1.3.3 Pág. 60

Ejercicios tipo A

a. $C(x) = x^2 - x - 1;$
$R(x) = -7$

b. $C(x) = x^2 + 6x - 1;$
$R(x) = 2$

c. $C(x) = x^3 - 4x^2 + 11x - 5;$
$R(x) = 7$

d. $C(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x + 11;$
$R(x) = 44$

e. $C(x) = -7x^3 - 33x^2 - 123x - 516;$
$R(x) = -2047$

f. $C(x) = -16x^3 - 24x^2 - 52x - 102;$
$R(x) = -205$

Ejercicios tipo B

a. $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{27};$
$R(x) = \frac{28}{27}$

b. $C(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{35}{9}x - \frac{62}{27};$
$R(x) = \frac{343}{81}$

c. $C(x) = ax^3 - 2ax^2 + ax - 4a;$
$R(x) = 1 + 8a$

d. $C(x) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 - a + 1;$
$R(x) = a^4 - a^2 + a - 3$

e. $C(x) = \frac{1}{a}x^4 - \frac{1}{a^2}x^3 + \frac{1}{a^3}x^2 + \left(-\frac{1}{a^4} - \frac{4}{a}\right)x + \left(-4 + \frac{1}{a^5} + \frac{4}{a^2}\right);$
$R(x) = 4 - \frac{1}{a^5} - \frac{4}{a^2}$

f. $C(x) = \frac{3}{5a}x^3 - \frac{9}{25a}x^2 + \frac{2}{125}x - \frac{6}{625a};$

$R(x) = -\frac{1857}{625}$

Soluciones de Ejercicios 1.3.5 Pág. 69

Ejercicios tipo A

1. .
   a. $(x-4)(x+1)(x+2)$ b. $2(x-4)(x+2)(x+3)$

   c. $(x-2)(x+3)(2x-5)$ d. $(x-1)(x^2+5x-1)$

   e. $(x-4)(x+7)(x^2+2)$ f. $(3x-4)(x^2+x+5)$

   g. $(4x+3)(x^2+3x+9)$ h. $x(x+2)(2x-3)(3x+1)$

   i. $x^2(x+3)(2x-1)(3x+2)$

2. .
   a. $C(x) = x^2 - x - 12; R(x) = -32$

   b. $C(x) = x^2 - x - 17; R(x) = 3$

   c. $C(x) = 10x^2 - \frac{53}{2}x + \frac{91}{2}; R(x) = -152$

   d. $C(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}; R(x) = 17$

   e. $C(x) = 2x^3 + 17x^2 + 104x + 721; R(x) = 5052$

f. $C(x) = 6x^2 + \dfrac{112}{5}x + \dfrac{459}{5}; R(x) = 1816$

g. $C(x) = x^2 - 14x + 101; R(x) = -377$

h. $C(x) = -6x^3 - 9x^2 - 48x - 198; R(x) = -792$

Ejercicios tipo B

a. $k = 3$

b. $k =$

c. $k = \dfrac{4761}{1666}$

d. $k = -\dfrac{95}{9}$

e. $k = -\dfrac{2698}{1261}$

f. $k = -\dfrac{1}{2}$

g. $k = -\dfrac{9}{4}$

h. $k = -1, k = 0, k = 1$

Soluciones de Ejercicios 1.4.1 Pág. 73

Ejercicios tipo A

a. $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$

b. $\dfrac{\sqrt[4]{9a^3}}{9a}$

c. $\dfrac{\sqrt[4]{3x^2}}{3}$

d. $\dfrac{\sqrt[5]{4a}}{2a}$

e. $\dfrac{\sqrt[4]{25x}}{25ax}$

f. $\dfrac{\sqrt{2ax}}{x}$

g. $-5 + 4\sqrt{2})$

h. $\dfrac{5(4+\sqrt{3})}{13}$

i. $\dfrac{-3(7+3\sqrt{6})}{5}$

Ejercicios tipo B

a. $\dfrac{2a + \sqrt{7}\sqrt{a} - 7}{4a - x}$

b. $\dfrac{2(a - \sqrt{a^2 - b^2}))}{2b}$

c. $-(1 + \sqrt{x})$

d. $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

e. $(x^2 + x + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$

f. $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$

Soluciones de Ejercicios 2.1.2 Pág. 84

Ejercicios tipo A

a. $S = \emptyset$

b. $S = \left\{\dfrac{-29}{8}\right\}$

c. $S = \left\{\dfrac{-45}{136}\right\}$

d. $S = \{11\}$

e. $S = \left\{\dfrac{7}{50}\right\}$

f. $S = \left\{\dfrac{-21}{32}\right\}$

g. $S = \left\{\dfrac{91}{80}\right\}$

h. $S = \left\{\dfrac{32}{125}\right\}$

i. $S = \left\{\dfrac{7}{19}\right\}$

j. $S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

Ejercicios tipo B

a. $S = \left\{\dfrac{-20}{9}\right\}$

b. $S = \{\emptyset\}$

c. $S = \left\{\dfrac{-105}{13}\right\}$

d. $S = \left\{\dfrac{-4}{79}\right\}$

e. $S = \left\{\dfrac{-10}{3}\right\}$

f. $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

g. $S = \{4\}$

h. $S = \{-1\}$

i. $S = \left\{\dfrac{38}{23}\right\}$

j. $S = \left\{\dfrac{528}{123}\right\}$

Soluciones de Ejercicios 2.2.1 Pág. 94

Ejercicios tipo A

a. $S = \{(2, 1)\}$

b. $S = \emptyset$

c. $S = \left\{\left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right)\right\}$

d. $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)\right\}$

e. $S = \left\{\left(\frac{13}{5}, \frac{-14}{5}\right)\right\}$

f. $S = \{(-1 + 2k, k) : k \in \mathbb{R}\}$

g. $S = \{(7, -8)\}$

h. $S = \{(19, -10)\}$

i. $S = \left\{\left(\frac{10}{7}, \frac{-1}{7}\right)\right\}$

Ejercicios tipo B

a. $S = \left\{\left(\frac{21}{64}, \frac{145}{64}\right)\right\}$

b. $S = \left\{\left(\frac{7}{5}, \frac{-3}{5}\right)\right\}$

c. $S = \left\{\left(\frac{-275}{36}, \frac{950}{189}\right)\right\}$

d. $S = \left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

e. $S = \left\{\left(\frac{396}{497}, \frac{747}{497}\right)\right\}$

f. $S = \left\{\left(\frac{19}{12}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

Soluciones de Ejercicios 2.3.1 Pág. 126

Ejercicios tipo A

a. $S = \left\{\frac{-3 - \sqrt{345}}{8}, \frac{-3 + \sqrt{345}}{8}\right\}$

b. $S = \left\{-6, \frac{37}{6}\right\}$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$

e. $S = \{-8, -3\}$

f. $S = \{-8, -7\}$

g. $S = \left\{\frac{-2 - 2\sqrt{7}}{9}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{9}\right\}$

h. $S = \emptyset$

i. $S = \emptyset$

Ejercicios tipo B

a. $S = \left\{\dfrac{-1}{2}, 3\right\}$

b. $S = \left\{\dfrac{20-\sqrt{310}}{5}, \dfrac{20+\sqrt{310}}{5}\right\}$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \{1\}$

e. $S = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{401}}{28}, \dfrac{-3+\sqrt{401}}{28}\right\}$

f. $S = \left\{\dfrac{-7-\sqrt{145}}{4}, \dfrac{-7+\sqrt{145}}{4}\right\}$

g. $S = \emptyset$

h. $S = \left\{\dfrac{15-\sqrt{393}}{6}, \dfrac{15+\sqrt{393}}{6}\right\}$

i. $S = \{-9, 8\}$

j. $S = \left\{\dfrac{27-\sqrt{393}}{12}, \dfrac{27+\sqrt{393}}{12}\right\}$

Soluciones de Ejercicios 2.4.2 Pág. 104

Ejercicios tipo A

a. $S = \left[\dfrac{9}{2}, \infty\right[$

b. $S = \left[\dfrac{5}{4}, \infty\right[$

c. $S = \left]-\infty, \dfrac{-5}{9}\right[$

d. $S = \left]-\infty, \dfrac{-17}{8}\right[$

e. $S = \left]-\infty, \dfrac{7}{22}\right[$

f. $S = \left]\dfrac{-3}{14}, \infty\right[$

g. $S = \left[\dfrac{9}{19}, \infty\right[$

h. $S = \left]-\infty, \dfrac{-165}{7}\right[$

i. $S = [4, \infty[$

Ejercicios tipo B

a. $S = \left]\dfrac{9}{2}, \infty\right[$

b. $S =]2, \infty[$

c. $S = \left]-\infty, \dfrac{-11}{4}\right[$

d. $S = \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

e. $S = \left]-\infty, \dfrac{1}{8}\right]$

f. $S =]1, \infty[$

g.$S = \left]-\infty, \dfrac{39}{47}\right[$

h. $S = \left]\dfrac{-203}{169}, \infty\right[$

Soluciones de Ejercicios 2.4.4 Pág. 109

Ejercicios tipo A

a. $S = \mathbb{R} - [-1, 1]$ b. $S = \mathbb{R} - [-4, 1]$ c. $S = \mathbb{R}$

d. $S = \mathbb{R} - \left]-1, \frac{3}{2}\right[$ e. $S = \mathbb{R} - \left]-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\right[$ f. $S = \mathbb{R}$

g. $S = \mathbb{R}$ h. $S = \mathbb{R} - \left]\frac{-3 - \sqrt{65}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{65}}{2}\right[$ i. $S =]2, 3[$

Ejercicios tipo B

a. $S = \emptyset$ b. $S = \mathbb{R}$

c. $S = \left[0, \frac{7}{2}\right]$ d. $S = \mathbb{R} - \left[\frac{13 - \sqrt{65}}{4}, \frac{13 + \sqrt{65}}{4}\right]$

e. $S = \left]\frac{-9 - \sqrt{57}}{4}, \frac{-9 + \sqrt{57}}{4}\right[$ f. $S = \left]\frac{1 - \sqrt{33}}{4}, \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right[$

g. $S = \emptyset$ h. $S = \emptyset$

Soluciones de Ejercicios 2.4.6 Pág. 114

Ejercicios tipo A

a. $S =]0, \infty[$ b. $S =]-1, 0[$ c. $S = \left]\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right[$

d. $S = \mathbb{R} - \left]\frac{3}{10}, 4\right[$ e. $S = [-10, -2]$ f. $S = \mathbb{R} - \left]\frac{-9}{10}, \frac{-1}{2}\right[$

g. $S = \left]\frac{-11}{14}, 4\right[$ h. $S = \left]-2, \frac{13}{11}\right]$ i. $S = \left]-4, \frac{-6}{5}\right[$

Ejercicios tipo B

a. $S =]-5,-3[\cup]-2,-1[$

b. $S =]-\infty, -611]$

c. $S = \left[\dfrac{-2-\sqrt{52}}{3}, -2\right[\cup \left]1, \dfrac{-2+\sqrt{52}}{3}\right] \cup]2, \infty[$

d. $S = \left[\dfrac{-8}{3}, 0\right[\cup [2,4[$

e. $S = \mathbb{R} - \left[\dfrac{5}{3}, 2\right]$

f. $S =]-1,2[- \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

g. $S =]-1,0[$

h. $S = \mathbb{R} - [-4,2]$

Soluciones de Ejercicios 2.4.8 Pág. 118

Ejercicios tipo A

a. $S = \left]\dfrac{-3}{2}, \dfrac{15}{2}\right[$

b. $S = \left[-\infty, \dfrac{-5}{2}\right[\cup]3, \infty]$

c. $S = \left[\dfrac{1}{5}, \dfrac{7}{5}\right]$

d. $S = \mathbb{R} - \left]\dfrac{6}{7}, \dfrac{10}{7}\right[$

e. $S = \left]\dfrac{-1}{4}, \dfrac{11}{4}\right[$

f. $S = \mathbb{R} - \left]\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{2}\right[$

g. $S = \mathbb{R}$

h. $S = \emptyset$

i. $S = \mathbb{R}$

Ejercicios tipo B

a. $S = \mathbb{R} - \left]\dfrac{-72}{5}, \dfrac{-48}{5}\right[$

b. $S = \mathbb{R}$

c. $S = \left]13 + 2\sqrt{41}\right[$

d. $S = \emptyset$

e. $S = \left]\dfrac{-1+6\sqrt[3]{2}}{12}, \dfrac{1+6\sqrt[3]{2}}{12}\right[$

f. $S = \emptyset$

g. $S = \mathbb{R} - \left]\dfrac{-9+\pi}{24}, \dfrac{9+\pi}{24}\right[$

h. $S = \left[\dfrac{21}{50}, \dfrac{39}{50}\right]$

i. $S = \emptyset$

Soluciones de Ejercicios 2.5.2 Pág. 126

Ejercicios tipo A

a. $S = \{1\}$

b. $S = \left\{-2, \frac{4}{5}\right\}$

c. $S = \left\{\frac{-5}{12}, \frac{-7}{18}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\right\}$

e. $S = \emptyset$

f. $S = \left\{\frac{-5}{11}, \frac{-3}{7}\right\}$

g. $S = \{2, -8\}$

h. $S = \left\{\frac{-7}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

i. $S = \emptyset$

j. $S = \left\{\frac{-13}{5}, \frac{-1}{5}\right\}$

k. $S = \left\{\frac{-7}{16}\right\}$

l. $S = \left\{-2, \frac{8}{3}\right\}$

Ejercicios tipo B

a. $S = \emptyset$

b. $S = \emptyset$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \emptyset$

e. $S = \{-1\}$

f. $S = \{2\}$

g. $S = \left\{\frac{-11}{5}, \frac{-9}{7}\right\}$

h. $S = \left\{-8, \frac{-2}{5}\right\}$

Soluciones de Ejercicios 2.5.4 Pág. 132

Ejercicios tipo A

a. $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b. $S = S = \{2\}$

c. $S = \left\{13 + 2\sqrt{41}\right\}$

d. $S = \emptyset$

e. $S = \left\{30 + 4\sqrt{61}\right\}$

f. $S = \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$

g. $S = \emptyset$

h. $S = \left\{6 + \sqrt{17}\right\}$

1. $S = \emptyset$

Ejercicios tipo B

a. $S = \left\{ \dfrac{51 + 4\sqrt{463}}{23} \right\}$

b. $S = \left\{ \dfrac{28 + \sqrt{694}}{3} \right\}$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \{-1\}$

e. $S = \emptyset$

f. $S = \left\{ \dfrac{53}{8} \right\}$

g. $S = \left\{ \dfrac{-3 + \sqrt{769}}{38} \right\}$

h. $S = \left\{ \dfrac{3 + \sqrt{53}}{2} \right\}$

Bibliografía

[1] Apostol, Tom. *Calculus*,Editorial Reverté S.A. (1965) 18–23.

[2] Baldor ,Aurelio . *Álgebra* ,Publicaciones Cultural .Mexico (2006).

[3] Gonzalez,Fabio.*Álgebra*, UNED, Costa Rica (1994).

[4] Rees ,Paul et al. *Álgebra* ,Decima Edición, Mc Graw Hill . (1992).

[5] Smith, Stanley et al. *Algebra* ,Addison Wesley Iberoamericana . U.S.A.(1992).

[6] Sullivan ,Michael . *Precálculo* ,Prentice Hall .Mexico (1997).

[7] Swokowski ,Earl; Cole, Jefrey . *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* ,Novena Edición, Thompson Editores. Mexico (1998).

Índice alfabético

algoritmo
  de la división, 52
asociatividad
  de la suma, 5
  del producto, 6
axioma, 5
axiomas
  de números positivos, 11
  de campo, 5
axiomas de orden, 11

base, 24
binomio, 33

campo
  de los números reales, 7
cerradura
  de la suma, 5
  del producto, 6
cociente, 52
coeficiente numérico, 32
commutatividad
  de la suma, 6
  del producto, 7
conjunto, 1
  de números irracionales, 4
  de números enteros $\mathbb{Z}$, 1
  de números naturales $\mathbb{N}$, 1
  de números racionales $\mathbb{Q}$, 1
  de números reales $\mathbb{R}$, 1
  numérico, 4
  solución de una ecuación , 77
  solución de una inecuación, 99

desigualdad triangular, 17
determinante 2×2, 92
discriminante, 45, 95
distancia entre dos puntos, 15
división, 7
  de polinomios, 52
  sintética, 57
dominio
  de una expresión, 23

ecuación, 75
  con expresiones radicales, 127
  con valor absoluto, 119
  cuadrática, 95
  de primer grado, 78
  lineal, 78
ecuaciones equivalentes, 77
elemento inverso
  de la suma, 6
  del producto, 6
elemento neutro
  de la suma, 5

del producto, 6
estructura algebraica, 4
exponente, 24
expresión
algebraica fraccionaria, 33
algebraica, 23
decimal, 1
decimal infinita, 3
decimal periodica, 3
radical, 33
expresión decimal
no pura, 3
pura, 3

fórmulas notables, 39
factor
literal, 35
numérico, 35
Factorización, 34
factorización
de polinomios, 61
del trinomio de segundo grado, 45
por factor común, 35
al máximo, 49
completando cuadrados, 44
maxima, 34
por fórmulas notables, 39

grado
de un polinomio, 49

incógnitas, 75
inecuación, 99
lineal, 100
resolver una , 99
con expresiones racionales, 110
con valor absoluto, 115
conjunto solución de una, 99
cuadrática, 105
solución de una, 99
infinito ∞, 18
intervalo, 17
abierto, 17
cerrado, 17
semiabierto, 18

ley
de distributividad, 7
de tricotomía, 13
leyes
de potencia, 24
de radicales, 10

método
de determinantes, 92
de igualación, 86
de suma y resta, 90
de sustitución, 88
monomio, 32
semejante, 33
multiplicación
de polinomios, 50

openaciones
con polinomios, 49
operación
división, 7
resta, 7

parte literal, 32
período, 3
periodo
de un número racional, 1
polinomio, 33, 49
cociente , 52
postulado, 5
potencia, 24
fraccionaria, 28
producto, 6
propiedades
de la suma, 5
de los números reales, 8

de radicales, 27
del producto , 6
de las desigualdades, 13
de los números reales, 8

raíz enésima, 27
racionalización, 70
de una suma o resta, 72
radical, 27
índice de un , 27
recta numérica, 11
regla
de Cramer, 92
reglas
de ecuaciones, 10
de ecuaciones, 77
de inecuaciones, 99
residuo, 52
resta, 7
de polinomios, 50

sistema
conjunto solución de un , 85
de ecuaciones, 85
inconsistente, 85
infinitas soluciones de un, 86
solución de un, 85
solución
de una ecuación, 76
subradical, 27
suma, 5
de polinomios, 49

Teorema
de raíces racionales, 66
del factor, 63
del residuo, 62
trinomio, 33

valor absoluto, 14
valor numérico, 23
variable, 23
variables, 75