Sapiens. Revista Universitaria de Investigación
ISSN: 1317-5815
marta_dsousa@hotmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela

Serres Voisin, Yolanda
Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza
Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, vol. 12, núm. 1, enero-junio, 2011, pp. 122-142
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Caracas, Venezuela

Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza

Yolanda Serres Voisin
yolanda.serres.voisin@gmail.com
Universidad Central de Venezuela

RESUMEN

El propósito de este trabajo es analizar qué se entiende por álgebra escolar, cómo se relaciona el lenguaje y el pensamiento algebraico y analizar la iniciación del aprendizaje del álgebra, relacionando los procesos de generalización y simbolización con el desarrollo de las concepciones de variable, con la resolución de problemas y con el uso de las calculadoras. Como conclusión se obtiene la necesidad de: (a) identificar y promover el uso de estrategias de generalización como actividad central del álgebra escolar, para cuando sea el momento propicio adquirir la simbología propia de la matemática; (b) diseñar actividades para trabajar las variables desde sus diferentes usos; (c) trabajar la resolución de problemas como una forma de identificar la necesidad del uso de variables y (d) promover el uso de las calculadoras para desarrollar el pensamiento algebraico a través de la comunicación de las ideas matemáticas.

Palabras clave: generalización, simbolización, desarrollo del pensamiento algebraico, concepto de variable, resolución de problemas.

Recibido: septiembre 2010
Aceptado: diciembre 2010

ABSTRACT
Introduction to the learning of algebra and its consequences for teaching

The purpose of this work is to analyze what school algebra means, and how language and algebraic thinking relate and we want to analyze the initiation of the learning of algebra, relating the processes of generalization and symbolization to the development of the concepts of variable, to the resolution of problems and to the use of calculators. In conclusion we obtain the need of: (a) identifying and promoting the use of generalization strategies as a central activity of school algebra, waiting for the propitious time to purchase the symbology of mathematics , (b) designing activities to work the variables from their different uses , (c) working the resolution of problems as a way of identifying the need for the use of variables and (d) promoting the use of calculators to develop algebraic thinking through the communication of the mathematical ideas.

Keywords: generalization, symbolization, development of algebraic thinking, concept of variable resolution of problems.

RESUMÉ

Initiation a l'apprentissage de l'algèbre et ses conséquences pour l'enseignement

Le but de ce travail est d'analyser le sens de l'algèbre scolaire, l'initiation de l'apprentissage de l'algèbre et la relation entre la langue et la pensée algebraïque; tout cela grâce à la relation des processus de généralisation et symbolisation avec le développement des concepts de variable, la solution des problèmes et l'utilisation de calculatrices. En définitive, on a eu la nécessité de: (a) identifier et promouvoir l'utilisation des stratégies de généralisation en tant qu'activité principale de l'algèbre scolaire, afin d'attendre le meilleur moment pour acquérir la symbologie propre a la mathématique; (b) créer des activités pour travailler les variables et ses différents usages; (c) travailler la solution de problèmes afin d'identifier la nécessité d'utilisation des variables, et (d) promouvoir l'utilisation de calculatrices pour développer le pensée algebraïque à travers la communication des idées mathématiques.

Mots-clés: généralisation, symbolisation, développement de la pensée algebraïque, concept de variable, solution de problèmes.

RESUMO

Introdução à aprendizagem da Álgebra e suas conseqüências no ensino

O objetivo deste trabalho é analisar o que se entende por álgebra escolar, e como a linguagem se relaciona com o pensamento algébrico e analisar o início da aprendizagem da álgebra, relacionando os processos de generalização e simbolização com o desenvolvimento dos conceitos de variável, a resolução de problemas eo uso de calculadoras. Em conclusão começa a necessidade de: (a) identificar e promover o uso de estratégias de generalização como uma atividade central da álgebra escolar , quando é o momento certo para pegar a simbologia da matemática, (b) variáveis de projeto para trabalhar atividades a partir de seus diferentes usos, (c) a resolução de problemas, como forma de identificar a necessidade do uso de variáveis e (d) promover o uso de calculadoras para desenvolver o pensamento algébrico através da comunicação das idéias matemáticas.

Palavras-chave: generalização, simbolização, desenvolvimento do pensamento algébrico, o conceito de solução de problemas variável.

¿Qué es el álgebra escolar?

La conceptualización del álgebra escolar está relacionada con distintos factores. El primero de ellos es su relación con la aritmética y la definición de la misma como una aritmética generalizada, lo cual presenta ciertas dificultades para comprender los cambios de significado de los símbolos de la aritmética al álgebra, como es el caso del signo igual y de las operaciones. Otra acepción muy aceptada es la del álgebra como un lenguaje que sirve para comunicar las ideas de la matemática, para expresar generalizaciones a través de símbolos. También el álgebra se asocia a actividad, a herramienta que se utiliza para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos.

Según Socas y Palarea (1997) la forma más convencional de concebir el álgebra es como la rama de las matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como "una aritmética generalizada" y como tal involucra a la formulación y manipulación de relaciones y a las propiedades numéricas. Sin embargo, las investigaciones ponen de manifiesto las implicaciones que tienen para el aprendizaje del álgebra, considerar la aritmética como su antecesora; el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes en la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal (Socas y Palarea, 1997; Papini, 2003).

En un estudio realizado durante cuatro años en la década de los noventa, con el propósito de explorar la comprensión algebraica, se preguntó "*qué es álgebra*" a un grupo de matemáticos, docentes, estudiantes e investigadores de educación matemática, los resultados de las entrevistas se agruparon en siete temas: 1.- Álgebra es un asunto escolar. 2.- Álgebra es aritmética generalizada. 3.- Álgebra es una herramienta. 4.- Álgebra es un lenguaje. 5.- Álgebra es una cultura. 6.- Álgebra es una forma de pensamiento. 7.- Álgebra es una actividad. La tendencia que se observó en las entrevistas fue la de *álgebra es una actividad*, pues el álgebra emerge como una actividad, como algo que hacer, como un área de acción en casi todas las entrevistas (Lee, citado por Kieran, 2004). En relación con este resultado Kieran (2004) plantea que las actividades del álgebra escolar son de tres tipos: generacionales, transformacionales y de global/meta nivel. Las actividades generacionales son aquellas que involucran la formación de expresiones y ecuaciones objetos del álgebra. El foco de estas actividades es la representación e interpretación de situaciones, propiedades, patrones y relaciones. Las actividades transformacionales incluyen factorizaciones, ampliaciones, sustituciones, adición y multiplicación de expresiones polinómicas, productos notables, solución de ecuaciones, simplificación de expresiones y trabajo con expresiones y ecuaciones equivalentes. Las actividades de global/meta nivel son aquellas donde el álgebra es utilizada como una herramienta, como son la solución de problemas, modelación, estructuras notables, estudio de cambios, generalización, relaciones analíticas, pruebas y predicciones.

Para Papini (2003) el álgebra puede considerarse desde dos dimensiones. Desde la dimensión de instrumento se usa como una herramienta para resolver problemas tanto intramatemáticos como extramatemáticos. Desde la dimensión de objeto como un conjunto estructurado (parámetros, incógnitas, variables, ecuaciones, inecuaciones y funciones) que tiene propiedades y que se trata de modo formal con distintas representaciones (escrituras algebraicas, gráficos, etc.).

Para Cedillo (1999) el álgebra escolar puede concebirse como el estudio de las reglas de la manipulación simbólica complementado con el desarrollo de habilidades para usar eficientemente las representaciones algebraicas, tabular y gráfica de las funciones como herramienta para expresar y justificar las generalizaciones y plantear y resolver problemas.

Para MacGregor (2004, p. 318) gran parte de la comunidad de educación matemática acepta que el álgebra:

1. Es una parte necesaria del conocimiento general de miembros de una sociedad democrática y educada.
2. Es un prerrequisito para futuros estudios de matemáticas, ciertos cursos de una educación superior y muchos campos de empleo.

3. Es un componente crucial de la alfabetización matemática, en el cual se basa un futuro tecnológico y el progreso económico de la nación.
4. Es un camino eficiente para resolver ciertos tipos de problemas.
5. Promueve la actividad intelectual de generalización, pensamiento organizado y razonamiento deductivo.

Desarrollo del pensamiento algebraico

El objetivo del álgebra escolar es desarrollar el razonamiento o pensamiento algebraico. El razonamiento algebraico o pensamiento algebraico consiste en un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión; para luego resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, tanto dentro de la propia matemática como fuera de ella en otras áreas del conocimiento y en situaciones reales de la vida cotidiana.

Para MacGregor (2004) el razonamiento algebraico implica análisis de situaciones reales, formulación de relaciones críticas como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados; y en cambio lo que algunos estudiantes parcialmente aprenden es una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizajes aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela.

El lenguaje algebraico es un instrumento del pensamiento algebraico, el cual se desarrollará en la medida que se domine el lenguaje algebraico. La escuela, específicamente el docente, juega un rol fundamental al ofrecer oportunidades de interactuar con este lenguaje y de recibir retroacciones que permitan producir nuevos significados (Papini, 2003).

De manera análoga a como plantea Beyer (2006) la definición de lenguaje matemático, el lenguaje algebraico es aquel que una persona utiliza para transmitir las ideas algebraicas a otras personas y se caracteriza mediante diversas dimensiones como son la verbal, la simbólica y la gráfica. Los elementos de este lenguaje comúnmente son llamados expresiones algebraicas, fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones y sirven para resolver problemas y modelar matemáticamente distintas situaciones.

La creación del lenguaje algebraico permite estudiar los conjuntos numéricos paralelamente al trabajo operativo con los mismos. El lenguaje algebraico es un instrumento de estudio de las propiedades de los números, las cuales a su vez permiten transformar y crear nuevas expresiones algebraicas (Papini, 2003).

El lenguaje algebraico presupone actos de generalización y abstracción, se utiliza para comunicar y producir nuevo conocimiento matemático. El lenguaje algebraico puede ser usado de manera abstracta y descontextualizada para transformar expresiones algebraicas sin referirse constantemente a los objetos que estas simbolizan; pero al mismo tiempo la estructuración del álgebra se basa en el contexto numérico y por lo tanto depende de las relaciones y propiedades numéricas (Papini, 2003).

Filloy (1999) estudió la adquisición del lenguaje algebraico trabajando sobre dos estrategias globales: .- la de modelaje de situaciones "más abstractas" en lenguajes "más concretos", para desarrollar habilidades sintácticas;.- la de producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Uno de los primeros resultados del estudio indica que hay una relación dialéctica entre los avances sintácticos y los semánticos, que el avance de una componente supone el avance de la otra.

Por otra parte el desarrollo del pensamiento algebraico conlleva al desarrollo de ciertas competencias algebraicas:

"1. Habilidad para pensar en un lenguaje simbólico, comprender el álgebra como una aritmética generalizada y como el estudio de las estructuras matemáticas. 2. Habilidad para comprender igualdades y ecuaciones de álgebra y aplicarlas dentro del conjunto de la solución de problemas del mundo real. 3. Habilidad para comprender relaciones de cantidades a través de patrones, definición de funciones y aplicación de modelos matemáticos" (Crawford, citado por MacGregor, 2004, p. 314).

Aprendizaje y enseñanza del álgebra

Plantea MacGregor (2004) que en el siglo XXI los estudiantes seguirán aprendiendo el uso de los símbolos, la notación, fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones y gráficas. Todos los estudiantes deben ser capacitados para abordar problemas numéricos usando variables, fórmulas y ecuaciones como un lenguaje para comunicarse con la tecnología. Debe haber un énfasis en aprender por medio de la solución de problemas en vez de practicando primero técnicas de manipulación y luego tratar de aplicarlas a los problemas.

Para MacGregor (2004, p. 325) los conocimientos básicos de álgebra capacitarán a los estudiantes para: - sentirse seguros sobre su habilidad para interpretar información expresada en notación algebraica; - reconocer estructuras y patrones matemáticos y comprender que el álgebra se usa para expresar tales generalidades; - interpretar y usar fórmulas; - saber cómo las fórmulas son relativas y derivadas de conjuntos de datos; - comprender las relaciones entre funciones y gráficas; - conocer al menos cualitativamente algunas propiedades importantes de las funciones, y las implicaciones para manejar asuntos financieros personales, para entender cuestiones ambientales y para hacer juicios sobre planes y políticas en muchos campos de los negocios y el gobierno; - comprender cómo pueden usarse notaciones y representaciones para modelar ciertas situaciones y resolver problemas; .- comprender operaciones aritméticas más profundamente para lograr un alcance más seguro de las ideas matemáticas básicas; - usar herramientas tecnológicas; .- experimentar el placer de hacer experimentos matemáticos haciendo conjeturas, probándolas en un nivel apropiado y convenciéndose ellos mismos y a otros de que están en lo correcto.

Para Torres y otras (2002) es a partir del trabajo numérico y geométrico en diferentes contextos que los estudiantes pueden, a través de su experiencia, encontrarle sentido al lenguaje simbólico y así iniciarse en el álgebra. Además, al enfrentarse a este trabajo los estudiantes tienen una actitud más positiva hacia las matemáticas, mostrándose más dispuestos, más participativos y más seguros de su propio trabajo.

Para llegar a una construcción de la sintaxis algebraica Torres y otras (2002) plantean el uso de los modelos como herramientas de traducción entre los distintos lenguajes: natural, geométrico, gráfico, numérico. Adoptando la concepción de modelaje que conjuga dicha traducción al lenguaje algebraico y que da sentido y significado en un contexto concreto a los objetos y operaciones, y la separación de estos objetos y operaciones de los significados más concretos a un nivel puramente sintáctico.

En cuanto al proceso de generalización, el Grupo Azarquiel (1993) plantea que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas y otras muchas formas de "hacer matemáticas" requieren a menudo procesos de generalización. Lo que proporciona en muchos casos mayor potencia al lenguaje algebraico con respecto al lenguaje natural es, precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando símbolos. Los símbolos y las reglas usuales para utilizarlos aumentan su funcionalidad, permiten expresar las relaciones con mayor precisión y simplicidad, y mezclar información sobre distintas relaciones. Una de las vías por las que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo (Grupo Azarquiel, 1993).

Los procesos de generalización, y sobre todo aquellos que tienen relación con el álgebra, permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico (Mason y otros, 1985; Grupo Azarquiel, 1993). Como primera aproximación se puede distinguir entre, por una parte, la visión de la regularidad, la configuración definitiva, el proceso, y por otra su expresión. Desde el punto de vista del álgebra, esta expresión debe tender a ser simbólica, y por ello escrita. Por tanto, se considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados: a) la visión de la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes; b) su exposición verbal; c) su expresión escrita, de la manera más concisa posible. Más allá de la visión y de su expresión, en el proceso de generalización se busca la observación crítica, la cual implica análisis, realizar comparaciones y hacer conjeturas; luego la verbalización de las observaciones de forma que un compañero o compañera entienda la explicación o que pueda llegarse a un consenso en el aula sobre lo que se trata de explicar; y por último la escritura, en donde es central el proceso de simbolización.

Lannin (2003) encontró que algunas de las estrategias que los estudiantes emplean para generalizar una situación son: - la de contar el atributo deseado en una representación de la situación, - la de recursión, construyendo la secuencia de términos; - la de objeto entero, usando una porción como una unidad para construir una unidad más grande y utilizar múltiplos de la unidad; - la de contexto, construyendo una regla sobre la base de una relación que es determinada de una situación; - la adivinar y chequear una regla sin argumentar por qué puede funcionar; - la de ajustar a la razón de cambio constantes usándola como un factor multiplicador.

Mason (1999) plantea que la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en los niños y niñas desde su ingreso a la escuela. Esta capacidad necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse. Permitir a los estudiantes desarrollar ejemplos que expresen generalidades les dará experiencia para darle sentido al uso de las variables.

Para Ursini y otros (2005) la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de las variables para representar números; y si bien los estudiantes desde la escuela primaria han trabajado con las letras en fórmulas geométricas, es en la escuela secundaria cuando las letras surgen con mayor frecuencia en contextos algebraicos donde se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados dependiendo de la situación en que aparecen. Según ellos los resultados de numerosas investigaciones han reportado que la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión y una manipulación adecuada del uso de las letras en álgebra. Desde esta perspectiva han trabajado en el álgebra de secundaria y han definido el modelo de *tres usos de la variable,* llamado modelo 3UV, el cual plantea:

1. La variable como número general, el cual representa una situación general. Se utiliza para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos; representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar, y se manipulan sin necesidad de asignarle valores específicos a la variable. Exige la simbolización de situaciones generales, reglas y métodos dados o construidos por quien aprende.
2. La variable como incógnita específica, la cual debe identificarse como algo desconocido que se puede determinar y operar para hallar su valor específico.
3. La variable en una relación funcional, en la cual hay que reconocer que existe una correspondencia entre los valores de dos variables involucradas. Esta relación puede involucrar información presentada en forma verbal, en una tabla, con una gráfica o en forma analítica.

Para que los estudiantes puedan usar las variables en estas tres formas deben desarrollar las siguientes capacidades básicas (Ursini y otros, 2005): .- operar con las variables realizando cálculos sencillos; .- comprender las operaciones con las variables y el por qué de los resultados obtenidos; .- darse cuenta de la importancia de ser capaz de usar las variables para modelar matemáticamente distintas situaciones; .- diferenciar los distintos usos de las variables en álgebra; .- pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables; .- integrar los diversos usos de las variables como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se utilizan dependiendo de la situación particular.

Para tener éxito en situaciones que involucran los tres usos de las variables es necesario lograr los objetivos planteados en el Cuadro 1(Ursini y otros, 2005):

Cuadro 1
Objetivos a lograr en situaciones que involucran variables

Usos	Reconocer	Interpretar	Deducir	Simbolizar
Número general	Reconocer patrones, reglas y métodos en familias de problemas.	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general	Deducir reglas y métodos generales en los problemas, mediante manipulación de	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

		indeterminada.	la variable simbólica.	
Incógnita	Reconocer la presencia de algo desconocido que se puede determinar en los problemas.	Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de un valor determinado.	Deducir la cantidad desconocida que aparece en una ecuación o en un problema, mediante operaciones algebraicas y aritméticas.	Simbolizar cantidades desconocidas reconocidas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.
Relación Funcional	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas en distintos representaciones utilizadas.	Interpretar las variaciones de una de las variables o de ambas variables involucradas en la relación funcional, en cualquier representación utilizada.		Simbolizar una relación funcional mediante análisis de la información del problema.

La mayoría de los estudiantes necesitarán muchas experiencias en interpretación de relaciones entre cantidades en una variedad de contextos problema antes de que puedan trabajar significativamente con variables y expresiones simbólicas. Una comprensión de los significados y de los usos de las variables se desarrolla gradualmente mientras los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas y la relacionan con representaciones verbales, tabulares y gráficas. Las relaciones entre cantidades usualmente pueden expresarse simbólicamente en más de una forma, dando oportunidad a los estudiantes de examinar la equivalencia de varias expresiones algebraicas (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Para mejorar la manipulación simbólica de los estudiantes hay que darles muchas oportunidades de experimentar con cantidades en diferentes contextos para que desarrollen su comprensión inicial del significado y los usos de las variables, y su habilidad para asociar expresiones simbólicas con contextos problema. Ellos adquirirán fluidez si comprenden las relaciones de equivalencia y tienen facilidad con el orden de las operaciones y las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Los estudiantes pueden enfocarse en los usos de las funciones para modelar patrones de cambios cuantitativos utilizando computadoras y calculadoras gráficas, específicamente la tecnología los ayuda a producir representaciones gráficas, realizar cálculos complejos y probar algunas conjeturas más fácilmente que con los métodos de lápiz y papel. Los estudiantes pueden aprender las fortalezas y debilidades de varios métodos comprobando la equivalencia de las expresiones, en algunos casos la equivalencia puede demostrarse geométricamente (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Una actividad para comenzar a generalizar es la construcción de expresiones algebraicas de la forma general de distintos números, iniciando con los conocidos números pares y números impares, se puede presentar los números pares e irlos ubicando en orden con los números naturales a través de la idea de un contador, el número natural (n), para construir las expresiones n y $2n+1$. Luego se puede trabajar con la forma general de otros números como los triangulares $(n/(n+1))/2$, cuadrados n^2, rectangulares $(n(n+1))$, pentagonales $(n(3n-1))/2$, relacionando de esta forma contextos aritméticos y geométricos. También se pueden construir expresiones algebraicas de números poliédricos, los cuales representan cubos, pirámides triangulares y cuadrangulares (Socas y otros, 1996). Existen muchos recursos disponibles como textos de didáctica del álgebra, textos, revistas y folletos de difusión de la matemática, en donde los docentes pueden obtener información para diseñar actividades de generalización en contextos aritméticos y geométricos.

Una vez que se han trabajo actividades de generalización y se ha adquirido el *concepto de variable como patrón* y además se han observado y verbalizado los nuevos significados de los símbolos, comienza el trabajo con las ecuaciones.

Para trabajar con las ecuaciones Socas y otros (1996) proponen comenzar a trabajar con su construcción e iniciar su enseñanza basándose tanto en contextos intramatemáticos de la aritmética y de la geometría, como extramatemáticos de situaciones reales. Esto con el objetivo de adquirir el concepto de variable como incógnita.

Hay varias formas de construir una ecuación. Una forma es basándose en la aritmética, proponiendo una identidad aritmética que permita introducir el *concepto de incógnita*. Se pueden plantear otras situaciones tanto intramatemáticas como extramatemáticas donde sea necesaria la construcción de ecuaciones y así ayudar a los estudiantes a comprender el significado de las incógnitas. Sólo luego de la construcción de ecuaciones se trabaja la resolución de las mismas, se busca que a través de distintos modelos se comprenda la estructura de la ecuación y su construcción para su posterior resolución. Algunos de estos modelos son: 1.- Modelos con despeje, como el de la balanza, de compartimientos, de grafos lineales, de grafos de bloques. 2.- Modelos sin despeje, como el de aproximación lineal y el método gráfico. Cada modelo tiene un énfasis en particular el cual es discutido en el Cuadro 2 (Serres, 2006).

Cuadro 2
Modelos de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita

Modelos	Recomendado en caso de:
Balanza	Ecuaciones lineales de la forma x+a= b, soluciones naturales.
Compartimientos	Ecuaciones lineales de la forma ax+b=cx+d, soluciones naturales.
Grafo Lineal	Ecuaciones lineales de la forma ax+b=c, soluciones reales. Sirve para discutir prioridad de las operaciones matemáticas.
Grafo Por Bloques	
Aproximación Lineal	Trabajo por tanteo sistemático. Se comienza con el valor cero, se sigue con el valor uno y se analiza qué ocurre (la diferencia aumenta, disminuye, es negativa, es cero siempre)
Gráfico	Sistema de ecuaciones, para discutir el significado de la solución: -intersección en un punto (x,y), en ningún punto, en todos los puntos-. Y para relacionar con el estudio de funciones afines.

Hernández y Andonegui (2003) en una experiencia con estudiantes de sexto grado (edades entre 11 y 12 años) encontraron que con el trabajo vía el tanteo sistemático y luego con un soporte concreto como la balanza, se apoya al estudiante en el proceso de despeje de la incógnita, y a partir de este trabajo se procede con las operaciones algebraicas de despeje la cuales imponen la manipulación simbólica. Lo resultados de su experiencia evidencian que los aprendizajes obtenidos por los estudiantes fueron: .- reconocimiento del carácter bidireccional del signo igual. -reconocimiento de la equivalencia de los miembros de una igualdad, incluyendo aquellos donde se involucran números y letras y advirtiendo la diferencia entre estos últimos. -reconocimiento de la convención establecida entre un número y la incógnita cuando están escritos de la forma 4x. -identificación de las operaciones y sus inversas. También Torres y otras (2002) plantean que el modelo de la balanza es potente para avanzar en el concepto de igualdad como una relación de equivalencia, más allá de la idea que se maneja en aritmética y que reduce su significado a ejecutar una operación.

En el estudio de Filloy (1999), se contempló la resolución de ecuaciones, clasificándolas como *ecuaciones aritméticas* (de la forma $Ax+-B=C$) y *ecuaciones no-aritméticas (*de la forma $Ax+-B=Cx+-D$, donde A, B, C y D son números particulares dados); y el proceso de abstracción de las operaciones de la incógnita, a partir del uso de un modelo concreto en la resolución de ecuaciones, específicamente un *modelo geométrico* y el modelo de la balanza.

El estudio afirma que el paso de las ecuaciones aritméticas a las no aritméticas no es inmediato, depende de la construcción de ciertos elementos de sintaxis algebraica que se lleva a cabo sobre la base de un conocimiento aritmético bien consolidado y sólo es posible si se logra romper con algunas nociones que pertenecen al dominio de la aritmética. Por ejemplo, la noción aritmética de la igualdad donde el miembro izquierdo de una ecuación corresponde a una secuencia de operaciones que se realizan sobre números y el miembro derecho es el resultado de haber ejecutado dichas operaciones. Dicha noción no se puede aplicar a una ecuación no aritmética, ya que su resolución involucra operaciones de la incógnita, las cuales son operaciones no aritméticas. Es necesario que las ecuaciones no aritméticas estén provistas de algún significado para que dichas operaciones puedan llegar a tener algún sentido para las y los estudiantes y así puedan llevar a cabo un proceso de resolución.

En cuanto a los modelos utilizados para operar las incógnitas el modelo geométrico consiste en comparar las áreas de rectángulos, cuyos lados representan la incógnita y los coeficientes de una ecuación de la forma $Ax+B=Cx$, y A, B y C son enteros positivos con $C>A$. Y el modelo de la balanza consiste en la reducción iterada de los objetos de peso desconocido (la incógnita) de una balanza de dos platillos, manteniendo el equilibrio, hasta eliminar todos los objetos de este tipo de uno de los platillos, igual que en el modelo geométrico la ecuación propuesta es de la forma $Ax+B=Cx$, y A, B y C son enteros positivos con $C>A$. Una vez dominado el uso de los modelos para la ecuación de la forma $Ax+B=Cx$ se proponen ecuaciones más complejas ($Ax+B=Cx+D$; $Ax-B=Cx+D$ $Ax-B=Cx-D$) a fin de observar los procesos de abstracción de las operaciones con incógnitas en distintos modelos.

En este proceso de abstracción de las operaciones con incógnitas se detectaron los siguientes fenómenos: 1.- Pérdida momentánea de destrezas adquiridas acompañadas de la presencia de operatividad aritmética. 2.- Modificación de la noción aritmética de ecuación. 3.- Uso de códigos personales para indicar acciones ya realizadas y por realizar sobre los elementos de la ecuación en el proceso de resolución. 4.- Arraigo al modelo (aun en casos muy complejos de representar). 5.- Desprendimiento del modelo, transfiriendo la operatividad sobre los coeficientes a la operatividad de los términos que incluyen incógnitas, esto es, la operación defectuosa de la incógnita. 6.- Presencia de obstrucciones propias de cada modelo. 7.- Reconocimiento de la diversidad del tipo de ecuaciones de primer grado, a través de los modelos.

Estas recomendaciones sirven de orientación a los docentes en la decisión de cuál es el modelo más apropiado de utilizar en cada momento de la instrucción del tema de ecuaciones: si se está comenzando con el tema y se quiere discutir el nuevo significado del signo igual, si se está trabajando ecuaciones aritméticas o no aritmética, con soluciones en los distintos conjuntos numéricos, si se está relacionando la solución de sistemas de ecuaciones con la graficación de funciones.

En cuanto a la resolución de problemas de enunciado, el Grupo Azarquiel (1993) plantea que es preciso trabajar la resolución de estos problemas como otra forma de construir ecuaciones y adquirir el concepto de variable como incógnita, pues para resolver este tipo de problema se necesita desarrollar el concepto de incógnita, hacer determinadas generalizaciones, establecer relaciones cuantitativas entre datos e incógnitas del problema, utilizar adecuadamente los símbolos, y finalmente establecer la ecuación o ecuaciones adecuadas y resolverlas, interpretando después las soluciones obtenidas.

Para resolver problemas verbales aritméticos-algebraicos Filloy (1999) considera tres métodos: 1.- El *método cartesiano* (MC) considerado el método algebraico por excelencia; en cuyo proceso de resolución se representan las incógnitas del enunciado del problema mediante una expresión algebraica, para luego traducir el texto del problema a una serie de relaciones algebraicas que conducen a ecuaciones, cuya solución, mediante un regreso en la traducción, arrojan la solución del problema. 2.- El *método de inferencias analíticas sucesiva* (MIAS), más enraizado en la aritmética. La resolución de problemas mediante este método se da como producto de inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema. 3.- El *método analítico de exploraciones sucesivas* (MAES), igual que el método anterior con más tendencia hacia la aritmética. El proceso de resolución de problemas con este método comienza con la identificación de lo que se quiere obtener, o lo que se considera la incógnita del problema, para luego asignar un valor numérico a dicha incógnita, considerándolo como una solución hipotética. Esta representación numérica del problema va a tener el mismo "patrón" que el que tendría la representación algebraica, por lo cual una vez establecido se puede asignar la letra que juega el mismo papel que el valor numérico hipotético usado como solución, con lo cual se obtiene la ecuación algebraica del problema. Finalmente se utilizan las reglas de la sintaxis algebraica para obtener el valor numérico de la incógnita, en una especie de "verificación" de la hipótesis.

Cedillo (1999) realizó una investigación cuyos resultados sustentan una propuesta didáctica que sugiere que es factible explotar los recursos de las calculadoras para aprender álgebra a través de su uso y sin necesidad de partir de una instrucción basada en reglas y definiciones. Esta propuesta no sólo se basa en el uso de las calculadoras algebraicas sino también en el rol del docente y las actividades de aprendizaje que este diseñe, en las cuales deben existir distintas formas de obtener o expresar la solución de manera de permitir el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Los principios didácticos de la propuesta de Cedillo (1999) son:

1. El lenguaje se aprende a través del uso y ese aprendizaje es apoyado por un notable sistema instruccional.

2. La relación entre el docente y sus estudiantes es asimétrica. El docente es un experto en el uso del lenguaje que desea comunicar y sus estudiantes no manejan el lenguaje y quieren aprenderlo.

3. La instrucción del lenguaje se modula de manera que sintonice con el avance lingüístico del que aprende, respetando el ritmo de avance del aprendiz.

4. Debe existir un conjunto de convenciones compartidas que permitan establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha.

5. Debe establecerse una base compartida para explotar las posibilidades del contexto temporal, espacial e interpersonal.

6. Debe disponerse de medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos.

Las calculadoras son un excelente medio para producir y manipular expresiones algebraicas, pero es el docente quien decide de mejor manera cuándo y cómo introducir las nuevas formas de expresión algebraica que las calculadoras no entregan a los estudiantes. Otro rol del docente en esta propuesta consiste en entender las expresiones *no ortodoxas* de sus estudiantes y auxiliarlos en el paso de los "balbuceos" al lenguaje (Cedillo, 1999).

La calculadora exige el uso del lenguaje de las matemáticas, de los códigos de la aritmética y el álgebra, juega el rol de la comunidad con quien se comunica el aprendiz. El modelo didáctico propuesto por Cedillo (1999) consiste en el diseño de un ambiente de aprendizaje basado en el uso de la calculadora, donde las y los estudiantes participen activamente, pues la calculadora capta su interés y estimula su creatividad intelectual a la vez que desarrolla las habilidades matemáticas orientadas a un uso apropiado de los códigos matemáticos y al uso del álgebra en la resolución de problemas.

La privacidad que brinda la calculadora hace que los estudiantes exploren distintos acercamientos a la solución de un problema, afinen sus planteamientos y los hagan públicos cuando ellos lo deciden. La retroalimentación inmediata que da la calculadora y la posibilidad de explorar soluciones siguiendo formas propias de razonamiento da lugar a producciones distintas y a soluciones originales a un mismo problema, lo cual estimula el compartir y discutir los hallazgos con compañeros y con el docente. El trabajo individual con la calculadora no inhibe el trabajo colaborativo (Cedillo, 1999).

En esta propuesta el docente organiza las actividades en hojas de trabajo sueltas y atiende a sus estudiantes individualmente propiciando que logren producciones originales y que pueda seguírsele el razonamiento. La adecuada organización de las actividades facilita al docente el seguimiento del avance de cada uno de sus estudiantes. Las distintas producciones estudiantiles propician un diálogo entre el docente y sus estudiantes de manera que el docente puede tomar ese diálogo como punto de partida para nuevas discusiones, organizar debates y discutir los aspectos más relevantes de un bloque de actividades, los errores que se hayan presentado y los criterios para decidir por qué son incorrectas las respuestas (Cedillo, 1999).

Conclusiones

Las consecuencias para la enseñanza del álgebra y el logro del desarrollo del pensamiento algebraico según las investigaciones sobre aprendizaje del álgebra son:

1. Promover la observación analítica y crítica de generalidades y su verbalización durante el tiempo que sea necesario para luego promover la simbolización de las observaciones.

2. Hacer preguntas abiertas (¿Cuáles?, ¿Cómo?, ¿Por qué?, ¿Cuándo?) para que a través de la discusión los estudiantes puedan identificar las fortalezas y limitaciones de diferentes formas de representación (aritmética, algebraica, gráfica, verbal) y puedan traducir una en otra con fluidez.
3. Identificar y promover el uso de distintas estrategias de generalización desarrolladas por las y los estudiantes, como las de contexto, objeto entero, adivinar y chequear, recursiva.
4. Diseñar actividades de aprendizaje que permita a los estudiantes adquirir el concepto de variable con sus distintos usos, e ir apropiándose de los nuevos significados de los símbolos matemáticos ya utilizados en aritmética y geometría, como el signo igual, los signos de mayor y menor que, los signos de las operaciones, las letras y las fórmulas. Para Ursini y otros (2005) se espera que las y los estudiantes construyan significados, los desarrollen y puedan comunicar sus ideas algebraicas a las demás personas, específicamente que diferencien entre los distintos usos de las variables, pasando entre uno y otro de manera flexible, verbalicen las características de cada uso y usen el lenguaje algebraico para expresarse.
5. Trabajar la resolución de problemas, como una de las formas de desarrollar la simbolización, construir el concepto de incógnita o variable y construir y resolver ecuaciones.
6. Promover el uso de las calculadoras algebraicas para desarrollar el lenguaje algebraico a través de la comunicación de las ideas matemáticas.

Referencias

Beyer, Walter. (2006). El Laberinto del Significado: La comunicación en el Aula de Matemáticas. En David Mora y Wladimir Serrano (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática.* La Paz: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.

Cedillo, Tenoch. (1999). *Nubes de puntos y modelación algebraica*. México: Iberoamérica.

Filloy Eugenio. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Iberoamérica.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Hernández Milagros; Andonegui, Martín. (2003). Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en Educación Básica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16 (1). Chile: CLAME.

Kieran Carolyn. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En Kaye Stacey, Helen Chick & Margaret Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lannin John. (2003). Developing Algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 8(7), 342-348.

MacGregor Mollie. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. En Kaye Stacey, Helen Chick & Margaret Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason John; Gram, Alan; Pimm, David; Gowar, Norman. (1985). *Rutas hacia el/Raíces del Álgebra*. Traducción de Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mason John. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*. 4(3), 232-246.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Recuperado el 15 de Noviembre de 2006 del sitio Web del National Council of Teachers of Mathematics: http://standards.nctm.org/

Papini Maria Cecilia. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1). 41-71.

Serres Yolanda. (2006). Ejercicios, Problemas y Modelos en la Enseñanza del Álgebra. En Ricardo Cantoral y otros (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: CLAME AC -Díaz de Santos.

Socas Martín, Camacho Matías, Palarea Mercedes y Hernández Josefa. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Socas, Martín, y Palarea Mercedes. (1997). Las fuentes del significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*. 14, 7-24.

Torres Ligia, Valoye Edith y Malagón Rocío. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA*. 7(2), 227-246.

Ursini Sonia, Escareño Fortino, Montes Delia y Trigueros María. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Autora

Yolanda Serres Voisin. Licenciada en Educación, mención Matemática de la Universidad Central de Venezuela, magíster en Psicología cognitiva de la UCAB y doctora en Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional de México. Es docente investigadora de la UCV Facultad de Ingeniería, es miembro del Grupo de Investigación y Difusión de Educación Matemática, del Programa de Promoción al Investigador y participa activamente en la Asociación Venezolana de Educación Matemática.