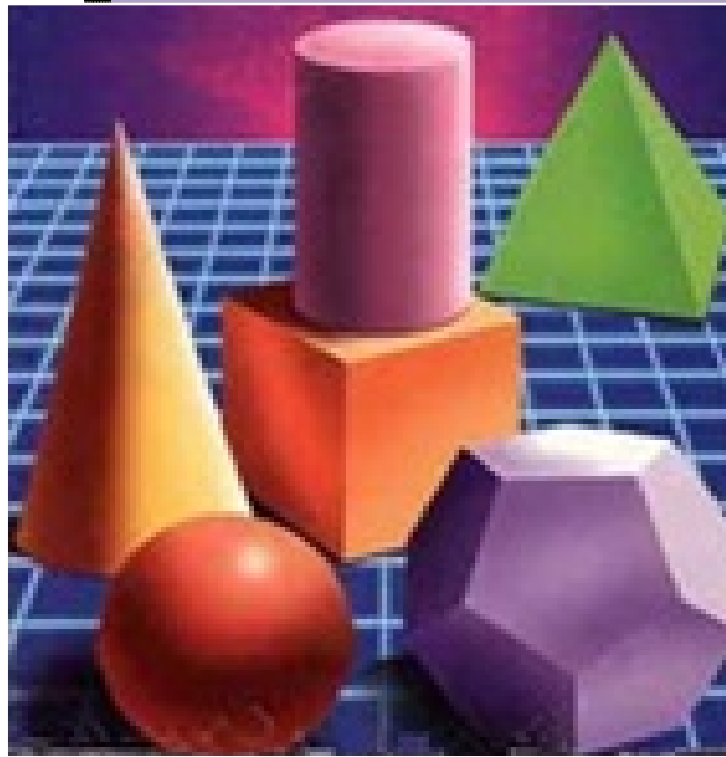


Conceptos básicos de Geometría y Trigonometría



Luis Castellanos

2004



Conceptos básicos de Geometría y Trigonometría

Dr Luis Castellanos,
Maracaibo 2004

Versión 1.11 revisada en enero 2014.



<http://luiscastellanos.wordpress.com>



luiscastellanos@yahoo.com



[@lrcastellanos](https://twitter.com/lrcastellanos)



	Reconocimiento (Attribution)
	No Comercial (Non commercial)
	Sin obras derivadas (No Derivate Works)
	Compartir Igual (Share alike)

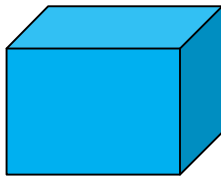
Índice

1	CONCEPTOS, ÁNGULOS, TEOREMA DE PITÁGORAS, SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.....	1
1.1	CONCEPTOS.....	1
1.2	ÁNGULOS FORMADOS CON DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE.....	4
1.3	TRIÁNGULOS Y TEOREMA DE PITÁGORAS.....	6
1.4	SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS	8
1.5	EJERCICIOS.....	9
2	ECUACIÓN DE CIRCUNFERENCIA, ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS Y CUERPOS REGULARES.	17
2.1	SUPERFICIES, ÁREAS Y VOLÚMENES.....	17
2.2	POLÍGONOS Y PARALELOGRAMOS.....	22
2.3	EJERCICIOS.....	25
3	FUNCIONES Y RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS, IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS, TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO.....	30
3.1	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	30
3.2	RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.....	32
3.3	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.....	34
3.4	VARIACIONES Y GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	36
3.5	EJERCICIOS.....	37
4	BIBLIOGRAFÍA.....	42

1 Conceptos, Ángulos, Teorema de Pitágoras, Semejanza de Triángulos.

1.1 Conceptos.

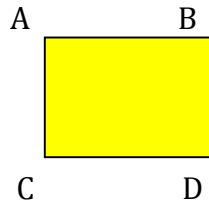
- Geometría: rama de las Matemáticas que estudia las propiedades intrínsecas de las figuras (las que no se alteran con el movimiento de las mismas).
- Axioma: proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.
- Postulado: proposición no tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.
- Teorema: proposición que puede ser demostrada (Hipótesis + Tesis).
- Corolario: proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
- Lema: proposición que sirve de base a la demostración de un teorema.
- Reducción al Absurdo: consiste en suponer lo contrario a lo que se quiere demostrar, y mediante un razonamiento, obtener una conclusión que se contradice con postulados o teoremas ya demostrados.
- Punto: El punto no se define. Un punto geométrico es imaginado tan pequeño que carece de dimensión. Se suelen designar por letras mayúsculas (Punto A).
- Línea: Conjunto de Puntos.
 - Línea Recta: Por dos puntos pasa una recta y solamente una. Dos rectas no pueden tener más que un solo punto común. Se suele designar por dos de sus puntos con el símbolo — encima (\overline{AB}). Una línea tiene una sola dimensión: longitud.
- Cuerpos Geométricos o Sólidos: Tienen tres (3) dimensiones: largo, ancho y alto.



- Superficies: Son los límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea. Tienen dos (2) dimensiones: largo y ancho.



- Plano: Es un conjunto parcial de infinitos puntos. Se representa por un paralelogramo y se nombra por tres (3) de sus puntos no alineados o por una letra griega. (ABC o α)



Si una recta tiene dos (2) puntos comunes con un plano, toda la recta está contenida en el plano. Por tres (3) puntos no alineados pasa un plano y solamente uno.

- Poligonales: también se llaman así a las líneas quebradas. Sus segmentos reciben el nombre de **lados** y los puntos comunes de los lados se llaman **vértices**.

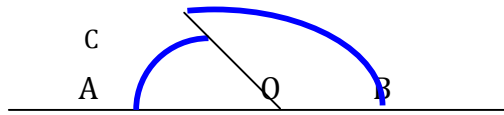


- Ángulo: es la abertura formada por dos semirrectas (**lados**) con un mismo origen (llamado **vértice**). $\angle OAB$
- Bisectriz de un Ángulo: semirrecta que tiene como origen el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales.
- Medida de los Ángulos:
 - Grado Sexagesimal: se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales. Cada división se llama grado. Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales, llamadas minutos. Cada minuto se divide en 60 partes iguales, llamadas segundos. ($G^\circ M' S''$)
 - Radián: es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.
 - Relación entre Grado Sexagesimal y Radián:

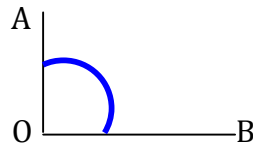
$$\frac{S}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

- Clasificación de los ángulos:

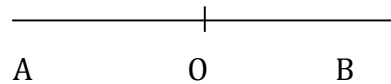
- Ángulos Adyacentes: son los que están formados de manera que un lado es común y los otros dos lados pertenecen a la misma recta.



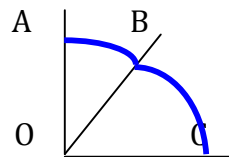
- Ángulo Recto: Es el que mide 90°



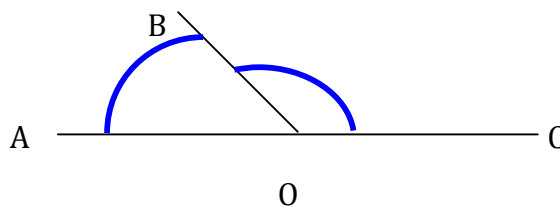
- Ángulo Llano: Es en el cual un lado es la prolongación del otro. Mide 180° .



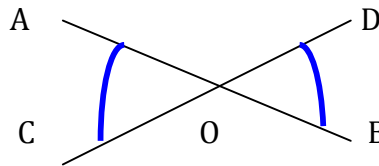
- Ángulos Complementarios: son dos ángulos que sumados valen un ángulo recto: 90° .



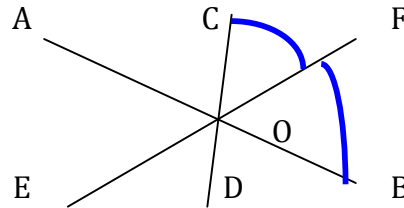
- Complemento de un Ángulo: lo que le falta a un ángulo para valer un ángulo recto.
- Ángulos Suplementarios: Son los ángulos que sumados valen dos ángulos rectos (180°).



- Suplemento de un Ángulo: lo que le falta a un ángulo para valer dos ángulos rectos.
- Ángulos opuestos por el vértice: los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.

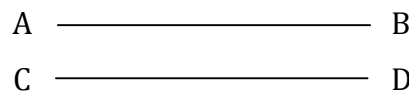


- Ángulos Consecutivos: tienen un lado común.

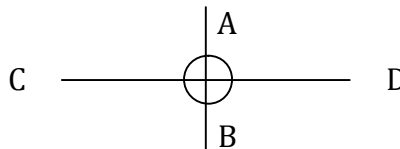


1.2 Ángulos formados con dos rectas paralelas cortadas por una secante.

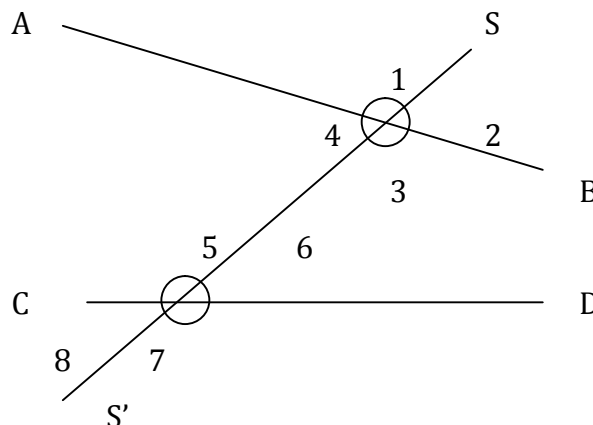
- Paralelismo: dos rectas son paralelas cuando al prolongarlas no tienen ningún punto común. El paralelismo se expresa con el signo: \parallel . $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



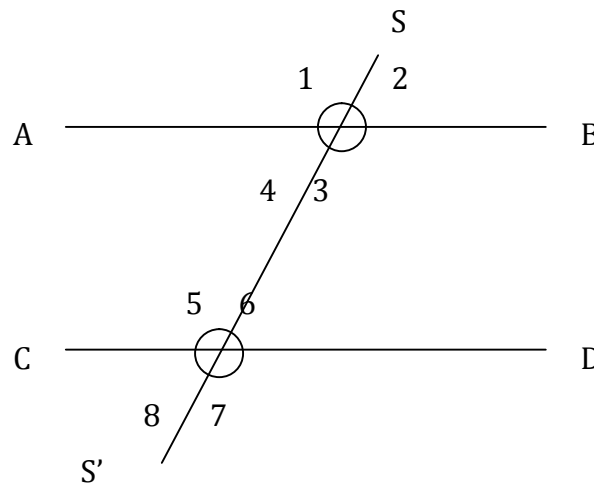
- Perpendicularidad: dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales, y cada uno es un ángulo recto. Perpendicularidad se expresa con el signo: \perp . ($\overline{AB} \perp \overline{CD}$).



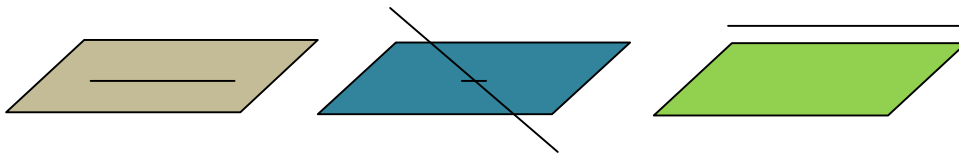
- Rectas cortadas por una secante: al cortar dos rectas \overline{AB} y \overline{CD} por una tercera $\overline{SS'}$ (llamada secante), se forman ocho (8) ángulos (4 en cada punto de intersección).



- Ángulos internos: $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
- Ángulos externos: $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
- Ángulos alternos: $\angle 3$ y $\angle 5, \angle 4$ y $\angle 6, \angle 1$ y $\angle 7, \angle 2$ y $\angle 8$
- Ángulos correspondientes: $\angle 1$ y $\angle 5, \angle 2$ y $\angle 6, \angle 3$ y $\angle 7, \angle 4$ y $\angle 8$
- Paralelas cortadas por una secante: toda secante forma, con dos paralelas, ángulos correspondientes iguales.

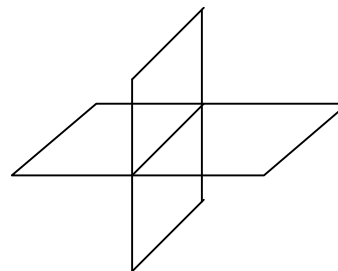
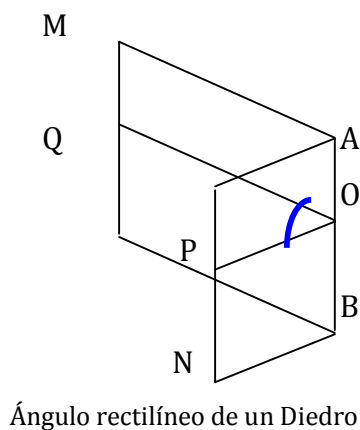


- Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces:
 - $\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$
- Posiciones de una recta y un plano
 - Estar la recta en el plano
 - Cortarse (tienen un punto A común)
 - Paralelos (no tienen ningún punto común)



- Paralelismo entre rectas y planos (no tienen ningún punto común)
- Perpendicularidad entre rectas y planos: una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por la intersección (pie).
- Ángulo Diedro (o Diedro): porción de espacio comprendido entre dos semiplanos que tienen un borde común (arista).

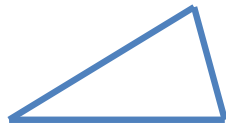
- Para medir el ángulo rectilíneo de un Diedro, se mide el ángulo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en un mismo punto, de manera que las rectas estén en caras distintas del Diedro.



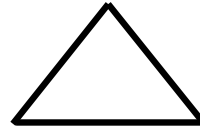
- Perpendicularidad entre Planos: dos planos son perpendiculares si forman un ángulo diedro recto.

1.3 Triángulos y Teorema de Pitágoras.

- Triángulo: es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos.
 - Los puntos de intersección se llaman **vértices**. (A, B, C)
 - Los segmentos son los lados del triángulo. (a, b, c).
 - El lado opuesto a un ángulo se nombra con la misma letra, pero minúscula.
 - Un Triángulo tiene los elementos: 3 ángulos, 3 vértices, 3 lados.
 - El Perímetro de un Triángulo viene dado por la suma de sus tres lados.
- Clasificación de los Triángulos:
 - Por sus lados:
 - Isósceles: tiene dos lados iguales (y dos ángulos)
 - Equilátero: tiene sus tres lados iguales (los tres ángulos también son iguales).
 - Escaleno: tiene sus tres lados diferentes. (los tres ángulos también son diferentes).



Isósceles



Equilátero



Escaleno

- Por sus ángulos (la suma de los tres ángulos = 180°):
 - Acutángulo: tiene los tres ángulos agudos ($< 90^\circ$)
 - Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso ($> 90^\circ$)
 - Rectángulo: Tiene un ángulo recto (90°). Los catetos son los lados que forman el ángulo recto, y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.



Acutángulo

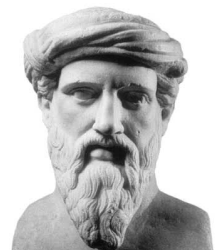


Obtusángulo



Rectángulo

- Rectas Notables en el Triángulo:
 - Mediana: segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres (3) medianas, correspondiendo una por cada lado. (m)
 - El punto de intersección de las medianas se llama **baricentro (G)**.
 - Altura: *perpendicular* trazada desde un vértice, al lado opuesto o a su prolongación (h).
 - El punto de intersección de las alturas se llama **ortocentro (O)**.
 - Bisectriz: recta notable que corresponde a la bisectriz de un ángulo interior. (α, β, γ)
 - El punto de intersección de las bisectrices se llama **incentro (I)**.
 - Mediatriz: perpendicular en el punto medio de cada lado. (M).
 - El punto de intersección de las mediatrices se llama **circuncentro (K)**.
- Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. $a^2 = b^2 + c^2$



Pitágoras

- Clasificación de un Triángulo conociendo los lados:
 - Si $a^2 = b^2 + c^2$ \therefore El triángulo es rectángulo
 - Si $a^2 < b^2 + c^2$ \therefore El triángulo es acutángulo
 - Si $a^2 > b^2 + c^2$ \therefore El triángulo es obtusángulo
- Igualdad de Triángulos: dos triángulos son iguales si superpuestos coinciden. Estrictamente hablando, todos los lados y los ángulos deben ser iguales.
- Se acepta que dos triángulos son iguales si tienen iguales:
 - Un lado y los dos ángulos adyacentes, o
 - Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, o
 - Los tres lados.
- Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales:
 - La hipotenusa y un ángulo agudo
 - Un cateto y un ángulo agudo
 - Dos catetos
 - La hipotenusa y un cateto

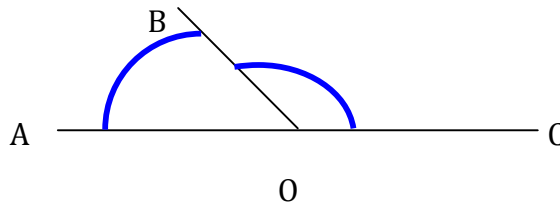
1.4 Semejanza de Triángulos

- Definición: dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales. (\sim)
- Lados Homólogos: son los lados que se oponen a los ángulos iguales.
- Razón de semejanza: razón de dos lados homólogos.
- Casos de semejanzas de triángulos:
 - Si tienen dos ángulos respectivamente iguales.
 - Si $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B' \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
 - Si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.
 - $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\angle A = \angle A' \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
 - Si tienen sus tres lados proporcionales.
 - $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

- Casos de semejanzas de triángulos rectángulos (tienen un ángulo igual: el ángulo recto):
 - Si tienen un ángulo agudo igual
 - Si $\angle B = \angle B' \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
 - Si los catetos son proporcionales
 - $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
 - Si la hipotenusa y un cateto son proporcionales
 - $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

1.5 Ejercicios

- Demostrar el Teorema “Dos ángulos adyacentes son suplementarios”.



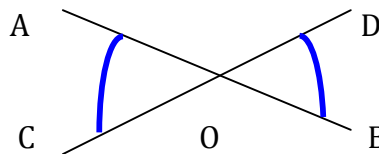
Hipótesis: $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos adyacentes.

Tesis: $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$

Demostración: $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$

$\angle AOC = 180^\circ$

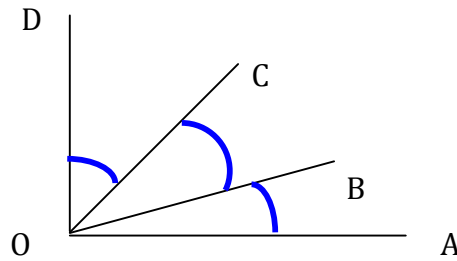
- Demostrar el Teorema “Los ángulos opuestos por el vértice son iguales”.



Hipótesis: $\angle AOC$ y $\angle BOD$ son ángulos opuestos por el vértice

Tesis: $\angle AOC = \angle BOD$

- Si el $\angle AOD$ es recto, y $\angle AOB = 2x$, $\angle BOC = 3x$, y $\angle OCD = 4x$; ¿cuánto vale cada ángulo?



- Expresar los siguientes ángulos en Radianes:

- $80^{\circ} 34' 21''$

$$21'' = 0,35'$$

$$34,35' = 0,5725^{\circ}$$

$$S = 80,5725^{\circ}$$

$$\frac{S}{360^{\circ}} = \frac{R}{2\pi_{rad}} \Rightarrow R = \frac{2.3,1416rad \cdot 80,5725^{\circ}}{360^{\circ}} \Rightarrow$$

$$R = 1,4063 \text{ rad}$$

- $65^{\circ} 17' 49''$

- $45^{\circ} 29' 33''$

- $30^{\circ} 48' 51''$

- Expresar los siguientes ángulos en Grados Sexagesimales ($^{\circ}, ', ''$):

- 2,35 rad

$$\frac{S}{360^{\circ}} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{360^{\circ} \cdot 2,35rad}{2.3,1416rad} \Rightarrow S = 134,64^{\circ}$$

- 0,785 rad

- 1,963 rad

- 2,208 rad

- Expresar en Grados, Minutos y Segundos:

- $134,64^{\circ}$

$$\text{Minutos (M)} = 134,64^{\circ} - 134,00^{\circ} \Rightarrow M = 0,64^{\circ}$$

$$M = 0,64^{\circ}/\text{min} \times 60 \text{ min} \Rightarrow M = 38,4'$$

$$\text{Segundos (S)} = 38,4' - 38,00' \Rightarrow S = 0,4'$$

$$S = 0,4'/\text{seg} \times 60 \text{ seg} \Rightarrow S = 24''$$

$$134,64^{\circ} = 134^{\circ} 38' 24''$$

- $135,47^{\circ}$

- $205,23^{\circ}$

- $89,95^\circ$
- Halle los complementos de los siguientes ángulos:

- $67^\circ 35' 40''$

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$\underline{67^\circ 35' 40'' -}$$

$$22^\circ 25' 20''$$

- $18^\circ 27' 31''$
- $36^\circ 52' 5''$
- $48^\circ 39' 15''$
- Halle los suplementos de los siguientes ángulos:

- $35^\circ 43' 26''$

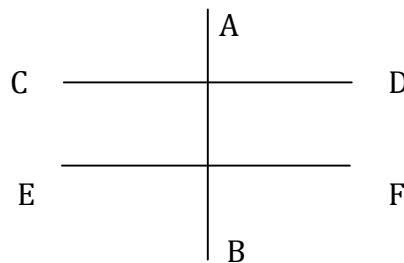
$$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$\underline{035^\circ 43' 26 -}$$

$$144^\circ 17' 34''$$

- $78^\circ 13' 39''$
- $92^\circ 15' 43''$
- $123^\circ 9' 16''$
- Demuestre el Teorema “Dos rectas de un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.”



Hipótesis: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$; $\overline{AB} \perp \overline{EF}$.

Tesis: $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$.

- Demuestre el Postulado de Euclides “Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta”.

Sea \overline{AB} la recta dada, y E el punto exterior. Por E trazamos $\overline{AB} \perp \overline{EF}$, y en E trazamos también $\overline{CD} \perp \overline{EF}$.

Por el Teorema anterior, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

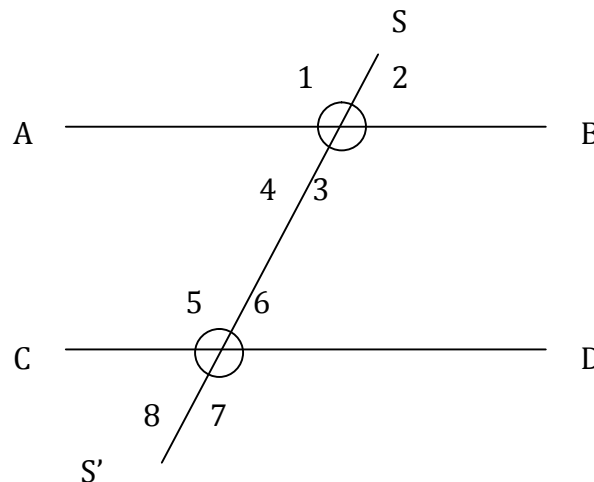
- Demuestre el Corolario “Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.”

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

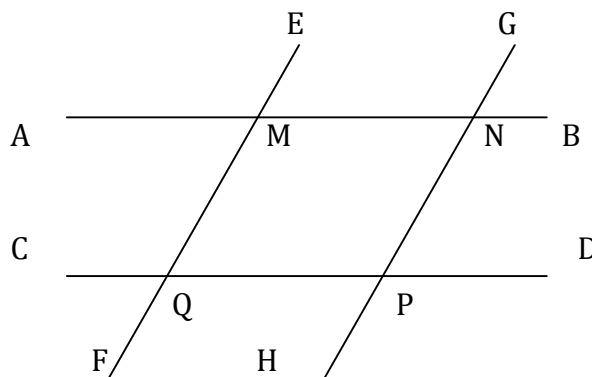
Tesis: $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$.

- Demuestre el Corolario “Si una recta corta a otra, corta también a las paralelas a ésta.”
- Demuestre el Corolario “Si una recta es perpendicular a otra, es también perpendicular a toda paralela a esta otra.”
- Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, y $\overline{SS'}$ es una secante y $\angle 1 = 120^\circ$.

Hallar los otros ángulos.



- Dados $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ y $\angle EMN = 60^\circ$; hallar $\angle HPD$.



- Halle los valores que faltan, aplicando Teorema de Pitágoras (a = Hipotenusa):

- $a=6, b=3, c=x$

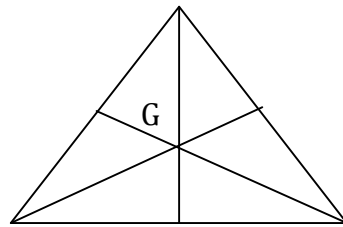
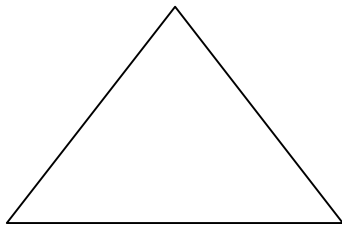
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 6^2 - 3^2 \Rightarrow c^2 = 36 - 9 \Rightarrow c^2 = 27 \Rightarrow c = \sqrt{27} \Rightarrow c = 5,19$$

- $b=10, c=6, a=x$

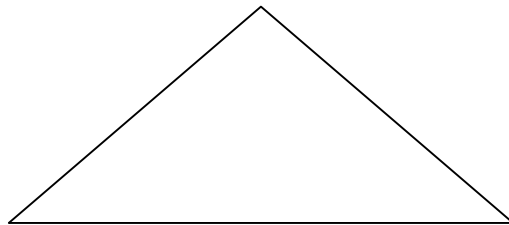
- $a=32, c=12, b=x$

- $a=32, c=20, b=x$

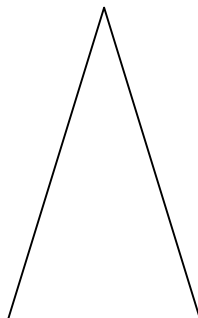
- Calcule la altura de la Estación Final de un Teleférico, si hace un recorrido de 8 Kms hasta la Estación Inicial, y se sabe que dicha Estación Inicial se encuentra situada a 6 Kms desde la Base de la Estación Final, empleando Teorema de Pitágoras.
- Calcule la longitud de una rampa, sabiendo que su altura es de 25 metros y la distancia en línea recta sobre el pavimento es de 35 mts.
- Halle gráficamente el punto G (Baricentro) del siguiente triángulo:



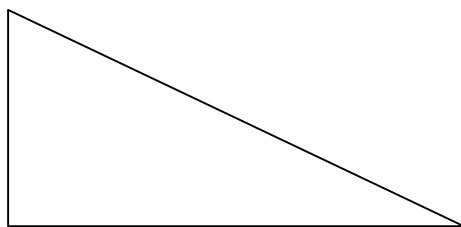
- Halle gráficamente el punto O (Ortocentro) del siguiente triángulo:



- Halle gráficamente el punto I (Incentro) del siguiente triángulo:



- Halle gráficamente el punto K (Circuncentro) del siguiente triángulo:

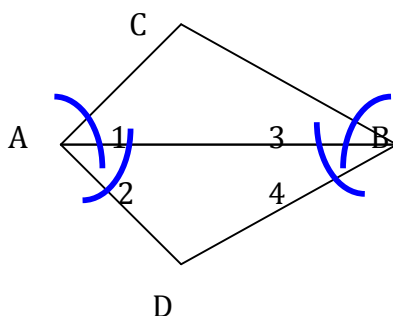


- Demuestre el Teorema “La suma de los ángulos internos de un triángulo vale dos ángulos rectos”.

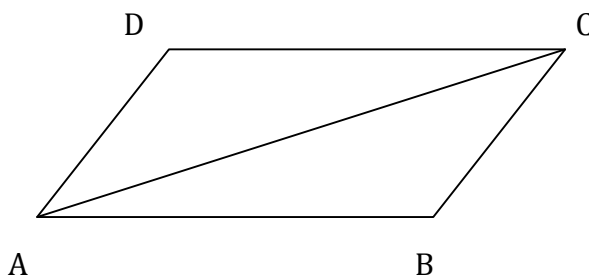
Hipótesis: Sean $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los ángulos interiores del ΔABC

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

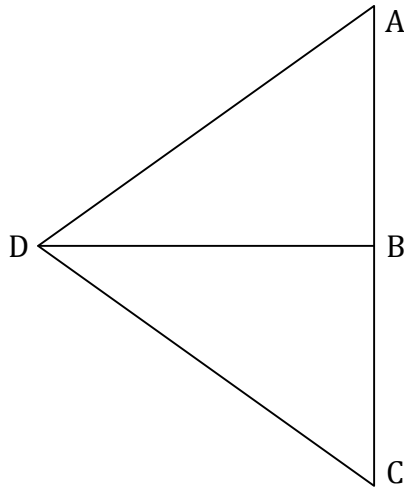
- Sea ΔABC un triángulo equilátero. ¿Cuánto valen cada uno de sus ángulos interiores?
- Si $\angle 1 = \angle 2$ y $\angle 3 = \angle 4$, demostrar que $\Delta ABC = \Delta ABD$
- Si $\overline{AC} = \overline{AD}$ y $\angle 1 = \angle 2$, demostrar que $\Delta ABC = \Delta ABD$
- Si $\overline{AC} = \overline{AD}$ y $\overline{BC} = \overline{BD}$, demostrar que $\Delta ABC = \Delta ABD$



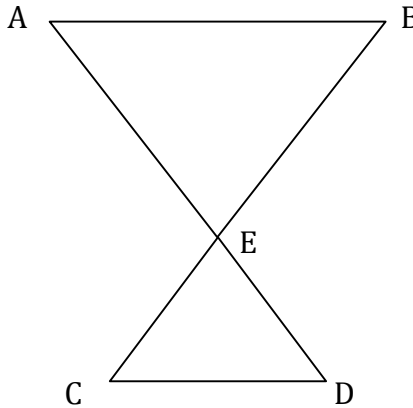
- Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, demostrar que: $\Delta ABC = \Delta ACD$
- Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, demostrar que: $\Delta ABC = \Delta ACD$



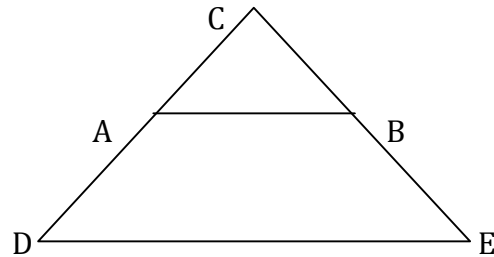
- Si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\angle ADB = \angle CDB$ y $\overline{AD} = \overline{CD}$; demostrar $\Delta ABD = \Delta CBD$
- Si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\angle BAD = \angle BCD$; demostrar $\Delta ABD = \Delta CBD$



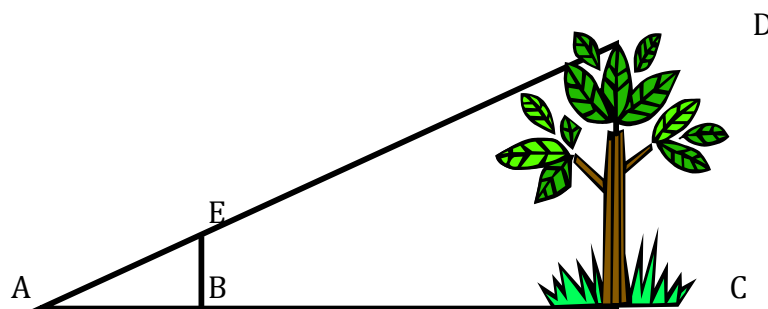
- Sean dos triángulos $\Delta ABE \sim \Delta CDE$; si $\overline{CD} = 3$ m, $\overline{EC} = 4$ m y $\overline{EB} = 12$ m. Calcule \overline{AB} .



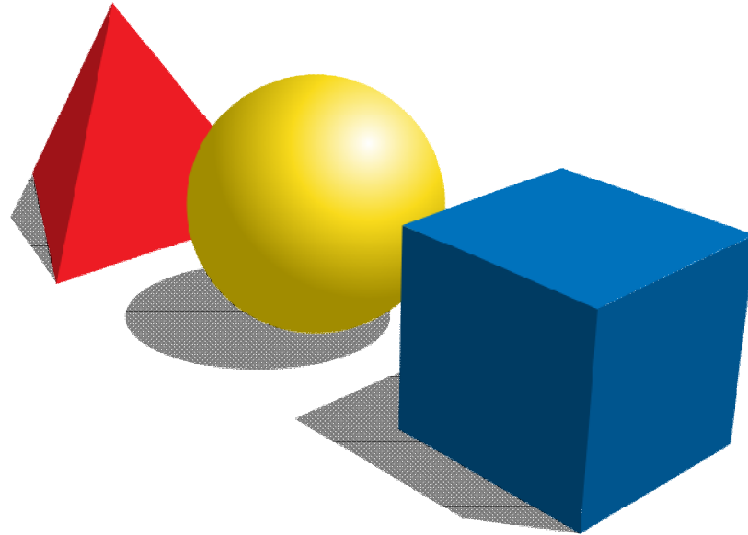
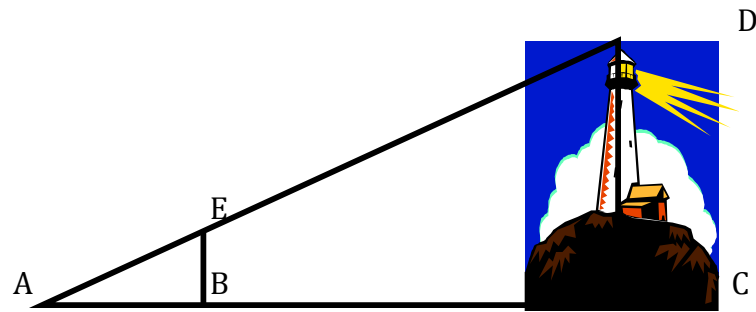
- Sean dos triángulos $\Delta ABC \sim \Delta CDE$; si $\overline{AC} = 3$ m, $\overline{AD} = 2$ m y $\overline{AB} = 4$ m. Calcule \overline{DE} .



- Sean dos triángulos $\Delta ACD \sim \Delta ABE$; si $\overline{BE} = 3$ m, $\overline{BC} = 18$ m y $\overline{AB} = 2$ m. Calcule \overline{CD} .



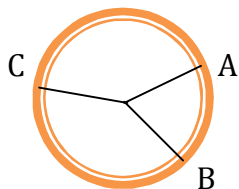
- Sean dos triángulos $\triangle ACD \sim \triangle ABE$; si $\overline{CD} = 80$ m, $\overline{BE} = 6$ m y $\overline{AB} = 9$ m. Calcule \overline{BC} .
- Sean dos triángulos $\triangle ACD \sim \triangle ABE$; si $\overline{CD} = 120$ m, $\overline{BE} = 8$ m y $\overline{AB} = 12$ m. Calcule \overline{BC} .



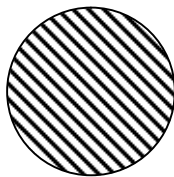
2 Ecuación de Circunferencia, Área y Volumen de figuras y cuerpos regulares.

2.1 Superficies, Áreas y Volúmenes.

- Circunferencia: conjunto de puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro. Se denominan con una letra mayúscula.

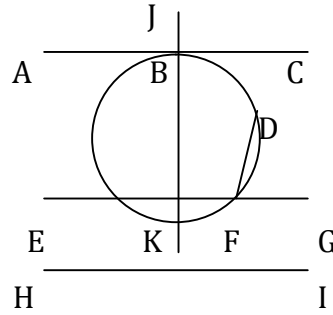


- Los puntos A, B y C son puntos de la circunferencia, y los segmentos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$, se llaman radios.
- Puntos exteriores: puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio.
- Puntos interiores: puntos cuya distancia al centro es menor que el radio.
- Círculo: es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los puntos interiores a la misma.

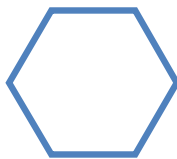


- Recta Secante a una Circunferencia: recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia.
- Recta Tangente a una Circunferencia: recta que tiene un solo punto común con la circunferencia (Punto de Contacto o Punto de Tangencia).
- Recta Exterior a una Circunferencia: recta que no tiene ningún punto común con la circunferencia.
- Recta Normal a una Circunferencia: es la recta perpendicular a la tangente en el punto de contacto.
- Arco de Circunferencia: es una porción de la circunferencia.

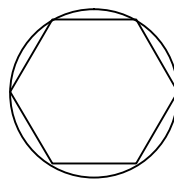
- **Cuerda de la Circunferencia:** es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia.



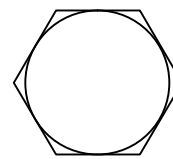
- Secante: \overline{EG}
 - Tangente: \overline{AC}
 - Normal: \overline{JK}
 - Exterior: \overline{HI}
 - Arco: \overline{BD}
 - Cuerda: \overline{DF}
- **Diámetro de la Circunferencia:** toda cuerda que pasa por el centro.
 - Un diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.
- **Semicircunferencias:** arcos iguales determinados por el diámetro.
- **Polígono:** porción del plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal.
- **Polígono Regular:** es aquel que tiene los lados y ángulos iguales.
- **Polígono Inscrito:** es aquel que tiene todos sus vértices sobre una circunferencia.
- **Polígono Circunscrito:** es aquel cuyos lados son tangentes a la circunferencia.
- **Circunferencia Inscrita:** cuando el polígono está circunscrito, la circunferencia está inscrita.



Polígono
(Hexágono)



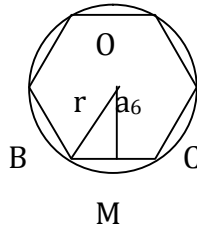
Polígono Inscrito



Polígono Circunscrito
Circunferencia Inscrita

- **Apotema de un Polígono Regular:** segmento de perpendicular trazada desde el centro del polígono a uno cualquiera de sus lados. Se designa con la letra “a” minúscula, acompañada de un subíndice que indica el número de lados del polígono.

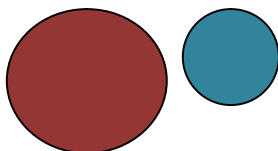
- $a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2}$
- a_4 : apotema de un cuadrado
- a_5 : apotema del pentágono, etc.



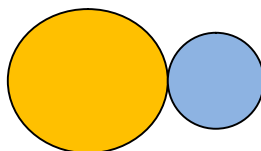
- El número π : es el valor constante de la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro. El valor generalmente usado es: 3,1416.

$$\frac{C}{d} = \pi$$

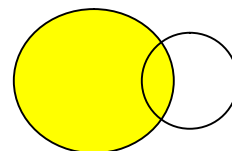
- Longitud de una Circunferencia: $C = 2 \pi r$
- Longitud de una arco de Circunferencia: $l = \frac{r \cdot \pi \cdot n^\circ}{180^\circ}$
- Posiciones Relativas de dos Circunferencias:
 - Circunferencias Exteriores: los puntos de cada una son exteriores a la otra
 - Circunferencias Tangentes Exteriormente: tienen un punto común y los demás puntos de cada una son exteriores a la otra.
 - Circunferencias Secantes: tienen dos puntos comunes.
 - Circunferencias Tangentes Interiormente: tienen un punto común y todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra.
 - Circunferencias Interiores: todos los puntos de una de ella son interiores de la otra.
 - Circunferencias Concéntricas: tienen el mismo centro.



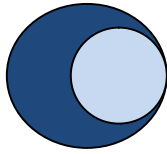
Circunferencias
Exteriores



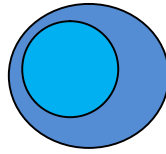
Circunferencias Tangentes
Exteriormente



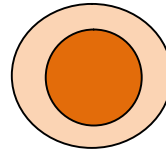
Circunferencias Secantes



Circunferencias
Tangentes Interiormente



Circunferencias Interiores



Circunferencias Concéntricas

- Superficie: se refiere a la **forma** (rectangular, cuadrada, circular).

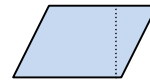
- Área: es la medida de la superficie, y se refiere al **tamaño**.

- de un Cuadrado: $A = l^2$ (l = lado)



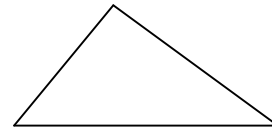
- de un rectángulo: $A = b \times h$ (base por altura)

- de un paralelograma: $A = b \times h$ (base por altura)



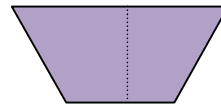
- de un triángulo: $A = \frac{bh}{2}$

- de un triángulo equilátero: $A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

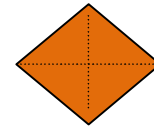


- De un triángulo: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- de un trapecio: $A = \frac{(b + b')h}{2}$



- de un rombo: $A = \frac{dd'}{2}$ (diagonales)

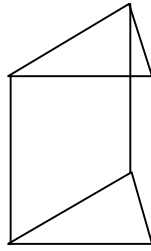


- de un polígono regular: $A = \frac{nl}{2} a_n$

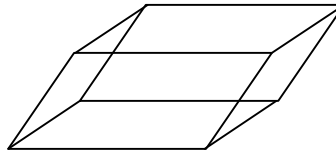
- de un círculo: $A = \pi r^2$

- de un sector circular: $A = \frac{lr}{2}$ (l es arco, r es radio) o $A = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$

- Prisma: poliedro limitado por varios paralelogramos (caras) y dos polígonos iguales (bases) cuyos planos son paralelos.
- Prisma triangular: prisma cuyas bases son triángulos.
- Paralelepípedo: prisma cuyas bases son paralelogramos.
- Ortoedro: paralelepípedo cuyas aristas laterales son perpendiculares a sus bases.



Prisma Triangular

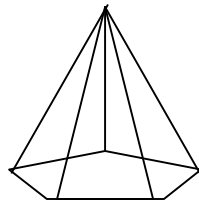


Paralelepípedo

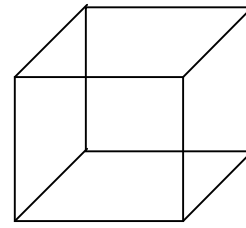


Ortoedro

- Pirámide: es el poliedro que tiene una cara llamada base, que es un polígono cualquiera, y las otras, llamadas caras laterales, son triángulos que tienen un vértice común (cúspide).
- Cubo: ortoedro que tiene iguales todas sus aristas. Las seis caras son cuadrados.

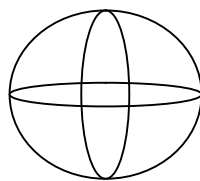


Pirámide

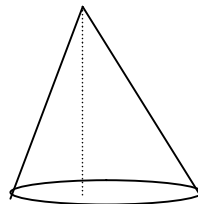


Cubo

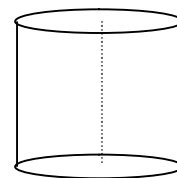
- Superficies de Revolución: superficie generada por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje. (La línea que gira es la generatriz).
 - Esfera: sólido de revolución generado por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.
 - Cono: sólido de revolución generado por una semirrecta cuyo origen está en el eje y no es perpendicular al eje.
 - Cilindro: sólido de revolución generado por una recta paralela al eje.



Esfera

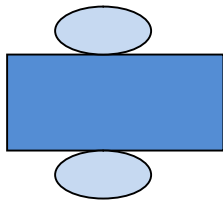


Cono

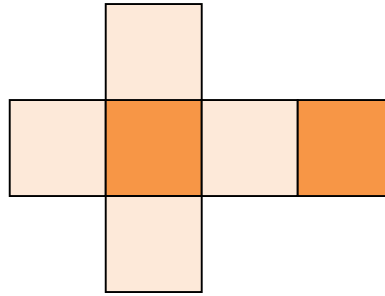


Cilindro

- Áreas de poliedros:
 - De un cubo: $A = 6 l^2$
 - de un cilindro: $A = 2 \pi r (g + r)$
 - de un cono: $A = \pi r (g + r)$
 - de una esfera: $A = 4 \pi r^2$



Área Cilindro

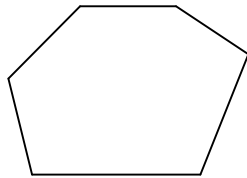


Área Cubo

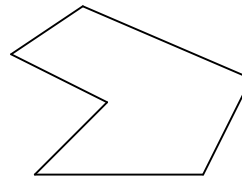
- Volumen de un poliedro: medida del espacio limitado por el cuerpo.
 - de un cubo: $V = l^3$ (lado)
 - de un paralelepípedo: $V = \text{Área Base} \times h$ (Altura)
 - de una pirámide: $V = \frac{\text{Área Base}}{3} h$
 - de un cilindro: $V = \pi r^2 g$ (generatriz o altura)
 - de un cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
 - de una esfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

2.2 Polígonos y Paralelogramos.

- Clasificación de Polígonos:
 - Convexo: cuando está formado por una poligonal convexa.
 - Cóncavo: cuando está formado por una poligonal cóncava.

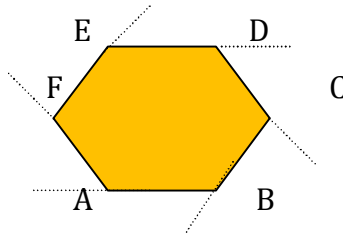


Polígono Convexo



Polígono Cóncavo

- Ángulos:
 - Internos o interiores: son los formados por cada dos lados consecutivos.
 - Externos o exteriores: son los ángulos adyacentes a los interiores, obtenidos prolongando los lados en un mismo sentido.



- Ángulos Internos: $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDE, \angle DEF, \angle EFA, \angle FAB$
- Por su número de lados:
 - Triángulo: 3
 - Cuadrado: 4
 - Pentágono: 5
 - Hexágono: 6
 - Eptágono: 7
 - Octágono: 8
 - Oneágono: 9
 - Decágono: 10
 - Endecágono: 11
 - Dodecágono: 12
 - Pentadecágono: 15
- Diagonal
 - Concepto: segmento determinado por dos vértices no consecutivos.
 - Número de Diagonales que pueden ser trazadas desde un vértice de cualquier Polígono Regular: $d = n - 3$
 - Número total de Diagonales que pueden ser trazadas en un Polígono Regular: $D = \frac{n(n-3)}{2}$
- Valores de ángulos interiores y exteriores de un Polígono:
 - Ángulos Interiores: $i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$
 - Suma de Ángulos Interiores: $S_i = 180^\circ(n-2)$
 - Ángulos Exteriores: $e = \frac{360^\circ}{n}$
 - Suma de Ángulos Exteriores: $S_e = 360^\circ$

- Clasificación de los Cuadriláteros (polígonos de 4 lados):
 - De acuerdo al paralelismo de sus lados opuestos:
 - Paralelogramo: los lados opuestos son paralelos dos a dos.
 - Rectángulo: tiene los cuatro ángulos iguales y los lados contiguos desiguales.
 - Cuadrado: tiene los cuatro ángulos iguales y los cuatro lados iguales.
 - Romboide: tiene los lados y ángulos contiguos desiguales.
 - Rombo: tiene los cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales.



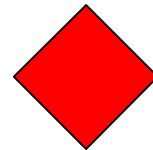
Rectángulo



Cuadrado



Romboide



Rombo

- Trapecio: hay paralelismo en un par de lados opuestos.
 - Rectángulo: tiene dos ángulos rectos.
 - Isósceles: los lados paralelos no son iguales.
 - Escaleno: no son rectángulos ni isósceles.



Rectángulo

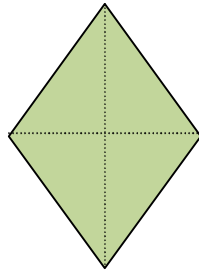


Isósceles

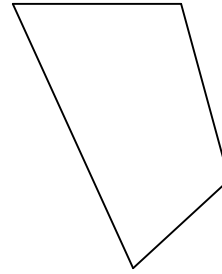


Escaleno

- Trapezoide: no hay paralelismo alguno.
 - Simétricos: tienen dos pares de lados consecutivos iguales, pero el primer par de lados consecutivos iguales es diferente del segundo.
 - Asimétricos: no son simétricos.



Simétrico



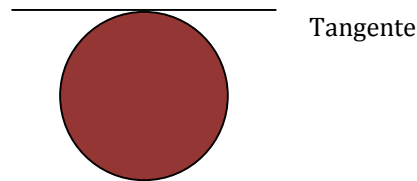
Asimétrico

- Polígonos Semejantes:
 - Dos Polígonos son semejantes cuando tienen sus ángulos ordenadamente iguales y sus lados homólogos proporcionales. (Es necesario que se cumplan ambas condiciones).

2.3 Ejercicios

- Halle las siguientes rectas, respecto a una circunferencia:

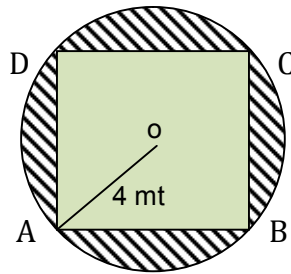
- Tangente
- Normal
- Cuerda
- Diámetro
- Arco



- Halle la menor distancia del punto a la circunferencia, si:
 - Dista 2 cm. del centro de una circunferencia de 6 cm. de diámetro
Si trazamos un radio desde el centro, pasando por el punto hasta la circunferencia, tenemos que $r = 3$ cm. Como el segmento radio-punto mide 2 cm., dista 1 cm. de la Circunferencia.
 - Dista 3 cms del centro de una circunferencia de 4 cm de diámetro
- Los radios de 2 circunferencias son 10 y 16 cm. Hallar la distancia entre sus centros si las circunferencias son:
 - Concéntricas
 - Tangentes Interiores
 - Tangentes Exteriores
- Halle el área de los siguientes Polígonos:
 - Rectángulo con base igual a 15,38 cm. y altura de 3,5 cm.

$$a = b \times h \rightarrow a = 15,38 \text{ cm} \times 3,5 \text{ cm} \rightarrow a = 53,83 \text{ mt}^2$$

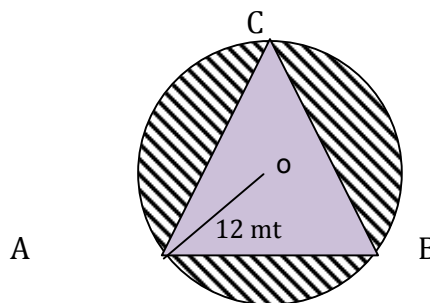
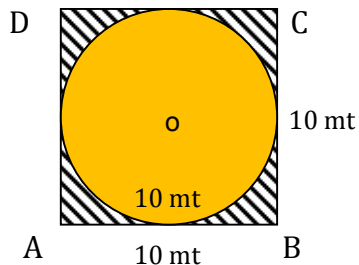
- Rectángulo cuya diagonal mide 10 mt. y su altura 6 mt.
- Cuadrado cuyo lado mide 8,62 mt.
- Cuadrado cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ mt.
- Paralelogramo cuya base mide 30 cm. y su altura 20 cm.
- Triángulo equilátero de 8 cm. de lado.
- Triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 12 cm.
- Dado el área de los siguientes polígonos, halle sus dimensiones:
 - Rectángulo de 288 mt^2 , y su base es el doble de la altura.
 $a = b \times h \rightarrow 288 \text{ mt}^2 = 2.h \times h \rightarrow 144 \text{ mt}^2 = h^2 \rightarrow \underline{h = 12 \text{ mt.}}$
 $b = 2.h \rightarrow \underline{b = 24 \text{ mt.}}$
 - Rectángulo de 216 mt^2 , y su base es 6 mt. mayor que su altura.
 - Rectángulo de 96 mt^2 , y 44 mt. de perímetro.
 - Cuadrado con área de $28,09 \text{ mt}^2$
- Calcule el área de la parte rayada:



$$a_1 = \pi r^2 \rightarrow a_1 = 3,1416 \times (4 \text{ mt})^2 \rightarrow a_1 = 50,2655 \text{ mt}^2$$

$$a_2 = l^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow (8 \text{ mt})^2 = 2.l^2 \rightarrow l^2 = 32 \text{ mt}^2$$

$$a_t = a_1 - a_2 \rightarrow a_t = 50,2655 \text{ mt}^2 - 32 \text{ mt}^2 \rightarrow \underline{a_t = 18,2655 \text{ mt}^2}$$



- Halle el área de los siguientes sólidos:
 - Esfera de 10 cm. de diámetro.

$$a = 4 \pi r^2 \rightarrow a = 4 \times 3,1416 \times (5 \text{ cm.})^2 \rightarrow \underline{a = 314,16 \text{ cm}^2}$$

- Lata de refresco de 11 cm. de alto y 7 cm. de diámetro.
- Vaso cónico de 8 cm. de diámetro y 10 cm. de altura.
- Cubo de 12 cm. de lado

- Halle el volumen:

- Esfera de 10 cm. de diámetro.

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow v = \frac{4}{3} \pi (5 \text{ cm.})^3 \rightarrow v = 523,5988 \text{ cm}^3$$

- Lata de refresco de 11 cm. de alto y 7 cm. de diámetro.
- Vaso cónico de 8 cm. de diámetro y 10 cm. de altura.
- Cubo de 12 cm. de lado

- Halle la suma de los ángulos interiores de:

- Cuadrado

$$S_i = 180^\circ(n-2) \rightarrow S_i = 180^\circ(4-2) \rightarrow \underline{S_i = 360^\circ}$$

- Octágono
- Pentágono
- Triángulo

- Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale:

- 540°

$$S_i = 180^\circ(n-2) \rightarrow 540^\circ = 180^\circ(n-2) \rightarrow \frac{540^\circ}{180^\circ} = n-2 \rightarrow$$

$$n = 3 + 2 \rightarrow n = 5 \rightarrow \underline{\text{Pentágono}}$$

- 1260°
- 1800°

- Halle el valor de un ángulo interior de:

- Hexágono

$$i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow i = \frac{180^\circ(6-2)}{6} \rightarrow i = \frac{720^\circ}{6} \rightarrow i = 120^\circ$$

- Dodecágono
- Decágono

- Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide:

- 60°

$$i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow 60^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow 60^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ \rightarrow 360^\circ =$$

$$180^\circ n - 60^\circ n \rightarrow 360^\circ = 120^\circ n \rightarrow n = 3 \therefore \text{Triángulo}$$

- 90°
- 135°

- Halle el valor de un ángulo exterior de un:

- Octágono

$$e = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow e = \frac{360^\circ}{8} \rightarrow \underline{e = 45^\circ}$$

- Decágono
- Polígono regular de 20 lados

- Cuál es el polígono cuyo ángulo exterior vale:

- 120°

$$e = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow 120^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = \frac{360^\circ}{120^\circ} \rightarrow n = 3 \therefore \text{Triángulo}$$

- 60°
- 90°

- Calcule el número de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice de un:

- Pentágono

$$d = n - 3 \rightarrow d = 5 - 3 \rightarrow \underline{d = 2}$$

- Octágono
- Decágono

- Cuál es el polígono en el que se puede trazar el siguiente número de diagonales desde cada vértice:

- 3

$$d = n - 3 \rightarrow 3 = n - 3 \rightarrow n = 6 \therefore \text{Hexágono}$$

- 6
- 9

- Calcule el número total de diagonales que se pueden trazar en un :

- Octágono

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \rightarrow D = \frac{8(8-3)}{2} \rightarrow D = \frac{40}{2} \rightarrow \underline{D = 20}$$

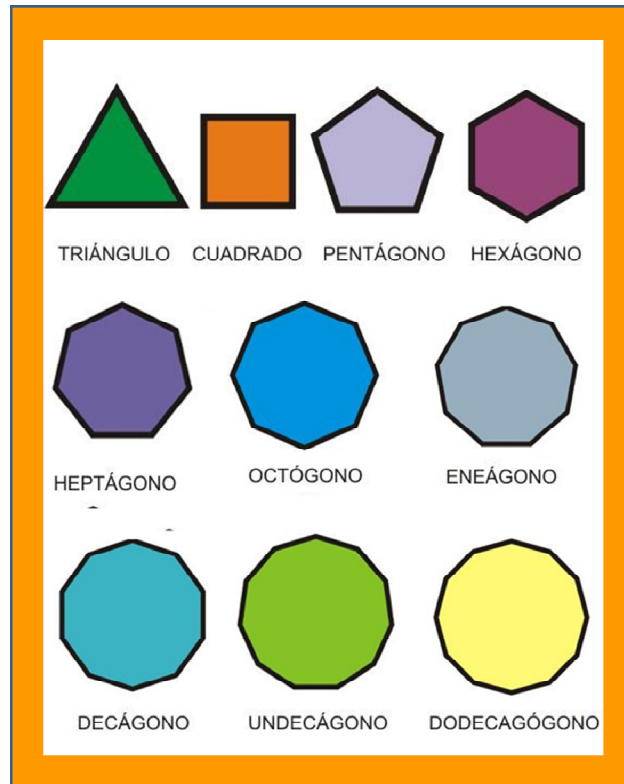
- Decágono
- Polígono de 20 lados
- Cuál es el polígono en el que se puede trazar el siguiente número total de diagonales:
 - 14

$$14 = \frac{n(n-3)}{2} \rightarrow 28 = n(n-3) \rightarrow 28 = n^2 - 3n \rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

Por ecuación de 2do Grado; $x_1 = 7$ y $x_2 = -4$

$\rightarrow n = 7 \therefore$ Eptágono

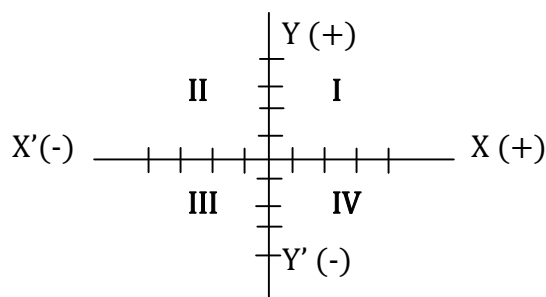
- 20
- 27



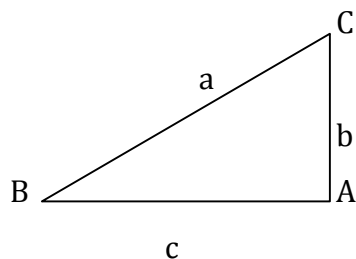
3 Funciones y Relaciones Trigonométricas, Identidades y Ecuaciones Trigonométricas, Teoremas del Seno y del Coseno.

3.1 Funciones Trigonométricas.

- Sistema de Eje de Coordenados (Coordenadas) Rectangulares
 - Sobre una Recta $\overline{XX'}$ (eje de abscisas), se toma un punto O (Origen) por donde se traza una Recta Perpendicular $\overline{YY'}$ (eje de ordenadas). Se establece una unidad, y se gradúan ambos ejes a partir del O. La abscisa se gradúa positivamente hacia la derecha, y negativamente hacia la izquierda. La ordenada se gradúa positivamente hacia arriba y negativamente hacia abajo. Los Ejes de Abscisas y de Ordenadas dividen el Plan en cuatro (4) cuadrantes. Las coordenadas de un punto se designan: a(x,y).



- Funciones Trigonométricas de un Ángulo Agudo en un Triángulo Rectángulo



- Seno: razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa
 - $\text{sen } B = \frac{b}{a}$; $\text{sen } C = \frac{c}{a}$
- Coseno: razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa
 - $\text{cos } B = \frac{c}{a}$; $\text{cos } C = \frac{b}{a}$

- Tangente: razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente
 - $\tan B = \frac{b}{c}$; $\tan C = \frac{c}{b}$
- Cotangente: razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto
 - $\cot B = \frac{c}{b}$; $\cot C = \frac{b}{c}$
- Secante: razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente
 - $\sec B = \frac{a}{c}$; $\sec C = \frac{a}{b}$
- Cosecante: razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto
 - $\csc B = \frac{a}{b}$; $\csc C = \frac{a}{c}$

- Signos de las Funciones Trigonométricas por Cuadrantes

Función / Cuadrante	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
Cosecante	+	+	-	-

- Funciones Trigonométricas de Ángulos Notables

Función \ Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	No	0	No	0
Cotangente	No	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	No	0	No
Secante	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	No	-1	No	1
Cosecante	No	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	No	-1	No

3.2 Relaciones Fundamentales entre las Funciones Trigonométricas e Identidades Trigonométricas.

- Relaciones Fundamentales entre las Funciones Trigonométricas:

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\text{csc } \alpha}$	$\text{cos } \alpha = \frac{1}{\text{sec } \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$
$\text{csc } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$	$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$		$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$
$1 + \cot^2 \alpha = \text{csc}^2 \alpha$	$1 + \tan^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$	$\cot \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$

- Identidades Trigonométricas: igualdades que se cumplen para cualesquiera valores del ángulo que aparece en la igualdad.

- Se recomienda expresar todos los términos en función del seno o del coseno.

- Ejemplo:

- Demostrar: $\text{csc } \alpha \times \text{sec } \alpha = \cot \alpha + \tan \alpha$

$$\frac{1}{\text{sen } \alpha} \times \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} + \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\frac{1}{\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha} = \frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha} \rightarrow \frac{1}{\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha} = \frac{1}{\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha}$$

- Funciones Trigonométricas de suma de ángulos:

- $\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \times \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \times \text{sen } \beta$

- $\text{cos } (\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \times \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \times \text{sen } \beta$

- $\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - (\tan \alpha \tan \beta)}$

- $\cot (\alpha + \beta) = \frac{(\cot \alpha \cot \beta) - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$

- $\sec (\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta}$

$$\circ \csc(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}$$

- Funciones Trigonométricas de Diferencias de Ángulos:

$$\circ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \times \cos \beta - \cos \alpha \times \operatorname{sen} \beta$$

$$\circ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{sen} \beta$$

$$\circ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + (\tan \alpha \tan \beta)}$$

$$\circ \cot(\alpha - \beta) = \frac{(\cot \alpha \cot \beta) + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$\circ \sec(\alpha - \beta) = \frac{1}{\cos \alpha - \cos \beta}$$

$$\circ \csc(\alpha - \beta) = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}$$

- Ángulos Dobles:

$$\circ \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha$$

$$\circ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\circ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

- Ángulos Mitad:

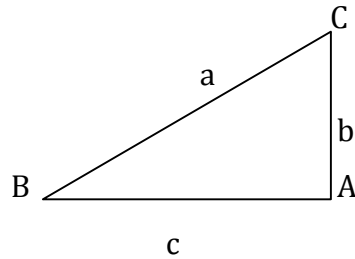
$$\circ \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \text{ (o } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\circ \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\circ \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

- Resolución de Triángulos: como quiera que un triángulo está compuesto por seis (6) elementos (3 ángulos y 3 lados), resolver un triángulo consiste en calcular 3 de los elementos, dados los otros 3.
- Resolución de Triángulos Rectángulos: como los Triángulos Rectángulos tienen un ángulo recto, se puede resolver cuando se conocen 2 de sus elementos (siempre que uno de ellos sea un lado).

- Casos:
 - Dados dos catetos



▪ Ejemplo:

- Dados $b = 50$ mts ; $c = 64$ mts.
- Se conoce que $A = 90^\circ$, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = 81,21 \text{ mts}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow \tan B = 0,78125.$$

$$\text{arc tan } B = 38^\circ \Rightarrow B = 38^\circ$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B) \Rightarrow C = 52^\circ$$

- Dados un cateto y la hipotenusa
- Dados un cateto y un ángulo agudo
- Dados la hipotenusa y un ángulo agudo

3.3 Resolución de Triángulos Oblicuángulos

- Para la Resolución de Triángulos Oblicuángulos se aplican las siguientes Leyes:

- Ley de los Senos: los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

- Ley de los Cosenos: el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A$$

- Ley de las Tangentes: en todo triángulo oblicuángulo, la diferencia de dos de sus lados es a su suma, como la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos a esos lados es a la tangente de la mitad de la suma de dichos ángulos.

$$\blacksquare \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

- Resolver el Triángulo cuyos datos son: $a = 34$; $b = 40$; $c = 28$.

- Aplicando Ley del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \cos A = \frac{1228}{2240} \rightarrow \cos A = 0,5482$$

$$\mathbf{A = 56,7554^\circ}$$

- Aplicando Ley del Seno: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\sin A = 0,8363$$

$$\sin B = \frac{\sin A \cdot b}{a} \rightarrow \sin B = 0,9839$$

$$\mathbf{B = 79,7134^\circ}$$

$$\sin C = \frac{\sin B \cdot c}{b} \rightarrow \sin C = 0,6887$$

$$\mathbf{C = 43,5297^\circ}$$

$A + B + C = 180^\circ$

- Área de Triángulos Oblicuángulos

- 1er Caso:

$$\text{Dados los tres lados} \rightarrow \text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- 2do Caso:

$$\text{Dados dos lados y un ángulo comprendido} \rightarrow \text{Area} = \frac{b \cdot a \cdot \sin C}{2} \text{ ó}$$

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \text{ ó } \text{Area} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

- 3er Caso:

$$\text{Dados un lado y dos ángulos} \rightarrow \text{Area} = \frac{c^2 \cdot \text{sen} A \cdot \text{sen} B}{2 \cdot \text{sen} C}$$

3.4 Variaciones y Gráficas de Funciones Trigonométricas. Ecuaciones Trigonométricas.

- Ecuaciones Trigonométricas: son aquellas en las que la incógnita aparece como ángulo de funciones trigonométricas.

- Resuelta la ecuación algebraicamente, se resuelve la parte trigonométrica para conocer el valor del ángulo.
- Las Funciones Trigonométricas repiten sus valores en los cuatro cuadrantes, es decir, hay dos ángulos para los cuales una función trigonométrica tiene el mismo valor y signo.
- Se recomienda expresar la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.
- Ejemplo:

$$\text{Resolver: } 3 + 3 \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$3 + 3 \cos \alpha = 2 (1 - \cos^2 \alpha) \rightarrow 3 + 3 \cos \alpha = 2 - 2 \cos^2 \alpha \rightarrow$$

$$2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 3 - 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 1 = 0$$

Aplicando ecuación de 2do grado:*

$$\cos \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

Separando las dos raíces:

$$\cos_1 \alpha = \frac{-3+1}{4} \Rightarrow \cos_1 \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 120^\circ$$

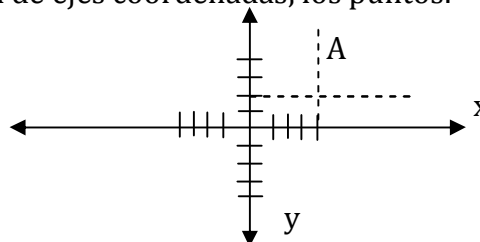
$$\cos_2 \alpha = \frac{-3-1}{4} \Rightarrow \cos_2 \alpha = -1 \rightarrow \alpha_2 = 180^\circ$$

* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

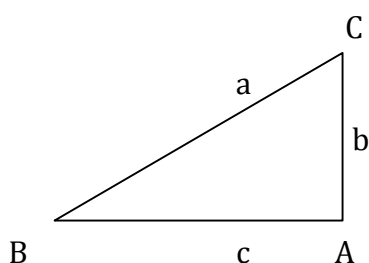
3.5 Ejercicios

- Representar, en un sistema de ejes coordenadas, los puntos:

- A (4, 2)
- B (-3, 3)
- C (-7, -2)
- D (5, -4)



- En el siguiente triángulo, calcule las funciones trigonométricas de los ángulos B y C, si $b = 2$ cm. y $c = 4$ cm.



Primeramente se calcula el valor de a .

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow a^2 = 20 \rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \rightarrow \text{sen } B = \frac{2}{2\sqrt{5}} \rightarrow \text{sen } B = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$$

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} \rightarrow \text{sen } C = \frac{4}{2\sqrt{5}} \rightarrow \text{sen } C = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \left[\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \right]$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \rightarrow \tan B = \frac{2}{4} \rightarrow \tan B = \frac{1}{2}$$

$$\tan C = \frac{c}{b} \rightarrow \tan C = \frac{4}{2} \rightarrow \tan C = 2$$

$$\sec B = \frac{a}{c} \rightarrow \sec B = \frac{2\sqrt{5}}{4} \rightarrow \sec B = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec C = \frac{a}{b} \rightarrow \sec C = \frac{2\sqrt{5}}{2} \rightarrow \sec C = \sqrt{5}$$

$$\text{sen } B = \cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}; \cos B = \text{sen } C = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \tan B = \cot C = \frac{1}{2};$$

$$\cot B = \tan C = 2; \sec B = \csc C = \frac{\sqrt{5}}{2}; \csc B = \sec C = \sqrt{5}$$

- Dados los Puntos siguientes, calcular las Funciones Trigonómicas del $\angle XOA$:

- A (2, 3)
- A (-1, 4)
- A (3, -4)
- A (-1, -3)

- Calcule el valor de las siguientes expresiones:

- $5 \sin^2 45^\circ + 8 \cos^2 30^\circ$

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} / 2; \cos 30^\circ = \sqrt{3} / 2$$

$$5 \times (\sqrt{2} / 2)^2 + 8 \times (\sqrt{3} / 2)^2 = (5 \times \frac{1}{2}) + (8 \times \frac{3}{4}) = \frac{5}{2} + \frac{12}{2} =$$

$$\frac{17}{2}$$

- $3 \sin 30^\circ + 6 \cos^2 45^\circ$
- $5 \tan^2 45^\circ + 2 \sec^2 45^\circ$
- $4 \cos 60^\circ + 5 \csc 30^\circ$

- Calcular las otras funciones, sabiendo que:

- $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x = 1 - (\frac{1}{2})^2 \rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \tan x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \cot x = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \rightarrow \cot x = \frac{3}{1} \rightarrow \cot x = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{csec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \rightarrow \operatorname{csec} x = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \operatorname{csec} x = 2$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \sec x = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec x = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\circ \cos x = \frac{1}{5}$$

$$\circ \tan x = \frac{3}{4}$$

$$\circ \cot x = \frac{3}{2}$$

- Probar las siguientes Identidades Trigonómicas:

$$\circ \operatorname{sen}^4 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{csc}^2 x}$$

$$\operatorname{sen}^4 x = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \rightarrow \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^4 x$$

$$\circ \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 - \frac{1}{\tan x}$$

$$\circ \frac{\cos x}{\cot x} = \operatorname{sen} x$$

$$\circ \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \sec x$$

- Calcular las Funciones Trigonómicas de los ángulos (a+b) y (a-b) sabiendo:

$$\circ \operatorname{sen} a = \frac{3}{5}; \cos b = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\circ \cos a = \frac{5\sqrt{41}}{41}; \cos b = \frac{5\sqrt{61}}{61}$$

$$\circ \operatorname{sen} a = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\tan a = \frac{1}{2} ; \cot b = \frac{1}{4}$
- Halle seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos, aplicando suma y diferencia de ángulos:
 - 105°
 - 75°
 - 15°
- Probar las siguientes Identidades:
 - $\cos (a + 45^\circ) \times \sin (a + 45^\circ) = \frac{1}{2} \times (2\cos^2 a - 1)$
 - $\cos (a + b) \times \cos b + \sin (a + b) \times \sin b = \cos a$
- Dados los siguientes valores, calcular seno, coseno y tangente de los ángulos dobles respectivos:
 - $a = 45^\circ$
 - $b = 60^\circ$
 - $c = 120^\circ$
- Probar las siguientes identidades:
 - $\tan x \cdot \sin 2x = 2 \sin^2 x$
 - $\cos 2a = \cos^4 a - \sin^4 a$
 - $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$
 - $\frac{2}{\cot \beta + \tan \beta} = \sin 2\beta$
- Dados los siguientes valores, calcular seno, coseno y tangente de los ángulos mitad respectivos:
 - $a = 30^\circ$
 - $b = 45^\circ$
- Resolver los siguientes Triángulos Rectángulos:
 - $b = 50; c = 40$
 - $a = 30; b = 25$
 - $c = 60; C = 28^\circ 30'$
 - $a = 4 ; B = 62^\circ 30'$

- Resolver los siguientes Triángulos Oblicuángulos, aplicando las Leyes del Seno, Coseno y/o Tangente:
 - $a = 41; b = 19,5; c = 32,48$
 - $a = 5,312; b = 10,913; c = 13$
 - $a = 32,45; b = 27,21; C = 66^\circ 56'$
 - $b = 50; c = 66,6; A = 83^\circ 26'$
 - $a = 41; B = 27^\circ 50'; C = 51^\circ$
 - $a = 78,6; A = 83^\circ 26'; B = 39^\circ 13'$
- Halle el área de los Triángulos Oblicuángulos anteriores.
- Resuelva las siguientes Ecuaciones Trigonómicas:
 - $\text{sen } \alpha + 1 = \cos \alpha$

$$\text{sen } \alpha + 1 = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$$

$$(\text{sen } \alpha + 1)^2 = (\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha})^2$$

$$\text{sen}^2 \alpha + 2\text{sen } \alpha + 1 = 1 - \text{sen}^2 \alpha$$

$$2\text{sen}^2 \alpha + 2\text{sen } \alpha = 0$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{sen } \alpha = 0$$

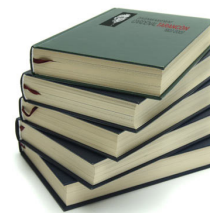
$$\text{sen } \alpha (\text{sen } \alpha + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \\ \text{sen } \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 270^\circ \end{cases}$$
 - $\cos (40^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
 - $2 \text{sen } x = 1$
 - $2 \cos x \cdot \tan x - 1 = 0$
 - $4 \cos^2 x = 3 - 4 \cos x$
 - $3 \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 3$
 - $2 \text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0$



4 Bibliografía

- BALDOR, J.A.: “Geometría Plana y del Espacio con una introducción a la Trigonometría”. Publicaciones CULTURAL. México, 1999.



Otras publicaciones para complementar:

- BARNETT: “Geometría”. Ed Mc Graw Hill. México.
- GELTNER & PETERSON: “Geometría”. Editorial Thomson.
- STUDER: “Precálculo, Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica”. Editorial Cultura Moderna. Bogotá.
- SWOKOWSKI, Cole: “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”. Editorial Thomson.
- SWOKOWSKI, Cole: “Trigonometría”. Editorial Thomson.
- WALTER & DALE: “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”. Editorial Prentice Hall.



Luis Castellanos



Nacido en Caracas, DC, Venezuela. Es Ingeniero de Sistemas (IUPFAN), Magíster en Ingeniería de Sistemas (USB), Magíster en Tecnología Educativa HC (CIHCE), y Doctor HC (CIHCE).

Ha sido docente en el IUPFAN, Academia Militar de Venezuela, Universidad Rafael Urdaneta y en La Universidad del Zulia. Actualmente es docente en UNEFA Zulia y en la Universidad Dr. José Gregorio Hernández.

Ha escrito los libros de Reflexiones Diarias (I), Reflexiones Diarias (II), Reflexiones Diarias (III) (Editorial Lulu), Seguridad en Informática y Metodología de Desarrollo de Sistemas de Información (Editorial Académica Española).

De igual manera, ha escrito Guías de Matemática I, Matemática II, y Cálculo Numérico.