PUC GOIÁS

ENG1106 - Fundamentos de Mecânica

MECÂNICA VETORIAL

Notas de Aula e Exercícios Resolvidos

Sumário

Prefácio

Dos grandes edifícios que tornam-se morada, às pontes e ferrovias que ligam lugares distantes, até os grandes oleodutos que nutrem todo um país, a mecânica se faz presente. Mecânica, a ciência que descreve o movimento, aqui estudada de forma aplicada a estruturas. Na Engenharia Elétrica, a mecânica estática é crucial para o projeto de estruturas de suporte para cabos e componentes elétricos. Na Engenharia de Produção, é aplicada no design de equipamentos e sistemas de transporte de materiais dentro de fábricas e armazéns. Na Engenharia de Controle e Automação, a mecânica estática é utilizada no desenvolvimento de robôs e sistemas automatizados que requerem estruturas estáveis e precisas para operação eficiente. A necessidade de desenvolver esta apostila surgiu para abordar os conhecimentos exigidos na ementa da disciplina de uma forma mais simples e objetiva que a encontrada nos livros didáticos, utilizando uma linguagem mais acessível. A apostila é projetada para tornar o conhecimento mais acessível, desfazendo a impressão de que a mecânica é uma matéria muito difícil e aumentando a confiança e motivação dos alunos. Esta apostila conta com exercícios resolvidos passo a passo, questões comentadas, aplicações dos conceitos teóricos em problemas práticos de várias engenharias, e um apêndice com tabelas de integração, derivadas, centróides e momentos de inércia. Nosso objetivo é enriquecer o curso e proporcionar uma ferramenta de estudo prática e acessível. Desejamos a todos um bom estudo, e nas palavras de Fernando Pessoa: ”Deus quer, o homem sonha, a obra nasce.”

Goiânia, 2024

CAPÍTULO 1 Introdução Vetorial

Figura 1: Representação de um vetor deslocamento.Nota-se que cada vetor é expresso por um segmento de reta, quanto maior o trajeto, maior o segmento e portanto sua intensidade. Nota-se também que o vetor 3 (V_3) está com sinal negativo, isso porque o mesmo tem sentido oposto ao deslocamento inicial.

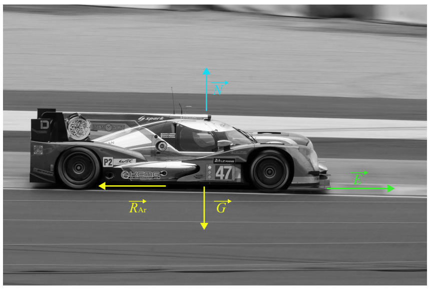

Figura 2: Forças atuantes em um carro. Nota-se que o sistema de referência tem como ponto de origem o corpo do carro.Como a força atuante muda conforme a posição do carro em relação ao solo, estes são vetores livres.

1 Vetores

Definição de Vetor

Vetor é uma quantidade física, que obrigatoriamente tem direção, intensidade e sentido.

Como indicado na Figura 1, vetores são representados por segmentos de reta e serão distinguidos das grandezas escalares[a]. São exemplos de grandezas vetoriais: Velocidade, Aceleração, Momento. Utiliza-se para notação de um vetor uma seta sobre a letra, no caso da figura: $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ e $-\vec{V}_3$. A intensidade do Vetor é obtida pelo comprimento da seta. Podemos dizer observando a figura que o deslocamento pela rua expressa por $\vec{V}_1$ é maior que o deslocamento de $\vec{V}_2$[b].
Um vetor usado para representar uma força que atua em um ponto tem um "ponto de ancoragem"bem definido, diz-se que esse vetor é fixo e não pode ser deslocado. Porém, em momentos e binários, trabalhamos com vetores que podem ser movidos no espaço, e que são chamados vetores livres. E, por último, para forças atuantes em um ponto, trabalhamos com vetores deslizantes. Se deve atentar ao referencial adotado para o estudo de um vetor. O referencial fornece o contexto espacial necessário para definir a posição, direção e sentido do vetor. Alguns pontos principais sobre como vetores dependem de um referencial são:

- Ponto de Origem[c]
- Sistema de Coordenadas[d]

Quando se muda o sistema de referência, cartesianas para cilíndricas, polares, elípticas, geográficas; devemos transformar essas coordenadas utilizando ferramentas matemáticas [e]. Trabalharemos ao longo da apostila com o sistema de coordenadas retângulares.

[a] Escalares são grandezas físicas que podem ser descritas através de apenas um número, não tendo direção e sentido. São exemplos de grandezas escalares: Massa, Tempo, Temperatura, Comprimento.

[b] Pode também se utilizar Negrito para indicar um Vetor e Itálico para a sua magnitude, respectivamente.

[c] Vetores são definidos a partir de um ponto de origem. Se o ponto de origem mudar, o vetor pode ter uma nova representação, embora sua magnitude e direção relativas permaneçam inalteradas.

[d] A representação de um vetor pode mudar ao se transformar para um novo sistema de coordenadas. Por exemplo, em coordenadas cartesianas um vetor $\vec{V}$ pode ser descrito por seus componentes (V_x, V_y, V_z). Se mudarmos o sistema de coordenadas, suas componentes também mudarão, mas o vetor em si (seu comprimento e direção) permanecerá o mesmo.

[e] Recomenda-se estudar tais conversões e familiarizar-se com elas, visto que elas são essenciais no curso de Engenharia.

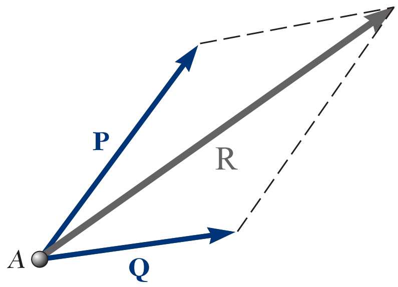

Figura 3: Regra do Paralelogramo

1.1 Adição de Vetores

Adição de Vetores - Regra do Paralelogramo

A soma de dois vetores pela regra do paralelogramo é encontrada desenhando um paralelogramo com os vetores como seus lados adjacentes e utilizando a diagonal que vai da origem à interseção das linhas paralelas como o vetor resultante.

Como visto na figura o vetor resultante $\vec{R}$ é obtido seguindo a lei do Paralelogramo: Partindo da origem **A**, temos dois vetores: **P** e **Q**. Na extremidade de cada um deles, é traçada uma linha paralela ao vetor que se quer somar. Ou seja, na extremidade de **P**, se desenha uma linha paralela a **Q**, e no final de **Q** uma linha paralela a **P**. Onde essas duas linhas se encontram, se traça uma diagonal até a origem A. Este é o vetor resultante $\vec{R}$. [a]

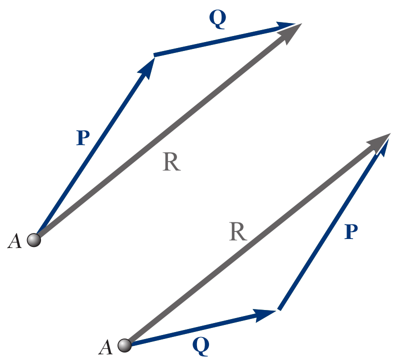

Figura 4: Regra do Triângulo

Adição de Vetores - Regra do Triângulo

A regra do triângulo para adição de vetores afirma que, para somar dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, você coloca o ponto inicial do vetor $\vec{B}$ no ponto final do vetor $\vec{A}$. O vetor resultante $\vec{C}$ é desenhado do ponto inicial de $\vec{A}$ ao ponto final de $\vec{B}$, representando a soma dos dois vetores.

Como visto na figura o vetor resultando $\vec{R}$ é obtido seguindo a regra do Triângulo. Temos dois vetores: **P** e **Q**. Adicionando o início de **Q** ao fim de **P**, temos um vetor resultando $\vec{R}$ se traçarmos uma reta entre as duas extremidades.[b]Nota-se que a ordem em que os vetores são dispostos não alteram o resultado.

[a]A regra do Paralelogramo só pode ser usada para somar dois vetores.

[b]A regra do Triângulo permite somar mais de 2 vetores, sendo aplicada de forma sucessiva. Isso significa que: Se soma dois vetores, ao vetor resultante se soma um terceiro, e assim por diante.

1.2 Subtração de Vetores

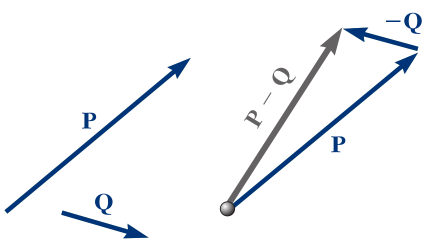

Figura 5: Subtração de vetores

Subtração de Vetores

A subtração de dois vetores é obtida se somando o vetor oposto a um outro vetor qualquer. Na figura 5, para se obter o resultado da subtração de **P** por **Q**, se soma o oposto de **Q** a extremidade de **P**. [a]. Matematicamente:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

[a]A ordem do vetor somado afeta o resultado ! $B - A \neq A - B$

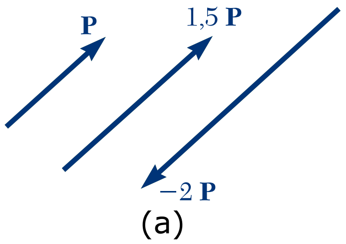

Figura 6: Exemplo de Vetor por escalar positivo/negativo.

1.3 Produto Entre Vetor e Escalar

Produto Entre Vetor e Escalar

A multiplicação de um vetor **P** por um escalar positivo n gera um vetor com a mesma direção e sentido, mas com magnitude ampliada. Por exemplo, na Figura 6, o vetor **P**, multiplicado pelo escalar 1.5, resulta em um novo vetor com magnitude maior. Quando o escalar é negativo, o vetor resultante tem sentido oposto ao vetor original (como no caso em que o vetor **P** é multiplicado por -2). Matematicamente, se temos um vetor **V** em $\mathbb{R}^n$, representado como $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, e um escalar n, o produto é dado por:

$$\mathbf{V} \cdot n = (nv_1, nv_2, \ldots, nv_n)$$

Essa propriedade também se aplica a divisão entre um vetor e um escalar. Se altera somente a intensidade do vetor.

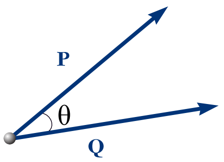

Figura 7: Produto Escalar Entre Vetores.

1.4 Produto Escalar Entre Vetores

Produto Escalar Entre Vetores

O produto escalar entre vetores é uma operação algébrica que toma dois vetores e retorna um número (escalar). Este escalar reflete a relação entre as magnitudes dos vetores e o ângulo entre eles.

A fórmula de um produto escalar entre dois vetores é :

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}| \ \cdot |\vec{Q}| \ \cos\theta$$

Sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores. As propriedades do produto são:

1. **Comutatividade:**
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

2. **Distribuição sobre adição:**
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

3. **Associatividade com escalar:**
$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

4. **Produto escalar de um vetor consigo mesmo:**
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2,$$
onde $\|\mathbf{a}\|$ é a norma do vetor $\mathbf{a}$. O produto escalar de um vetor consigo mesmo é sempre não-negativo, e é zero se e somente se $\mathbf{a}$ é o vetor nulo.