Complex Number (Versity)

① $\dfrac{i^{592}+i^{590}+i^{588}+i^{586}+i^{584}}{i^{582}+i^{580}+i^{578}+i^{576}+i^{574}}-1$

a) -1 ✓b) -2 c) -3 d) -4

সমাধান:

$$\frac{i^{592}+i^{590}+i^{588}+i^{586}+i^{584}}{i^{582}+i^{580}+i^{578}+i^{576}+i^{574}}-1$$

$$\Rightarrow \frac{i^{584}(i^8+i^6+i^4+i^2+1)}{i^{574}(i^8+i^6+i^4+i^2+1)}-1$$

$$\Rightarrow i^{10}-1$$

$$\Rightarrow i^2-1$$

$$\Rightarrow -1-1$$

$$\Rightarrow -2$$

② $i^{57}+\dfrac{1}{i^{125}}=?$

✓a) 0 b) $2i$ c) $-2i$ d) 2

সমাধান: $i^{57}+\dfrac{1}{i^{125}} = i+\dfrac{1}{i} = i-i = 0$

③ $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=?$

a) 1 b) -1 ✓c) 0 d) None of these

সমাধান: $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$

$= i^n(1+i^n+i^2+i^3) = 0$

④ $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{2n} = ?$

a) ঋণাত্মক b) ধনাত্মক c) 0 d) নির্ণয় করা যাবে না

ব্যাখ্যা: $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{2n}$

$\Rightarrow 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (i^2)^n$

∵ n এর মান বলতেছে বলেই তাই এর মান নির্ণয় করা যাবে না।

⑤ $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25} \right]^2$

a) 4 b) −4 c) 2 d) −2

ব্যাখ্যা: $\left\{ i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25} \right\}^2 \Rightarrow \left(i^3 + \frac{1}{i}\right)^2 \Rightarrow (-i - i)^2 \Rightarrow (-2i)^2 \Rightarrow 4i^2 \Rightarrow -4$

⑥ যদি n স্বাভাবিক ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে $\frac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2} = ?$

a) 1 b) −1 c) i d) −i

ব্যাখ্যা: $\frac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2} \Rightarrow \frac{i^{4n} \cdot i - i^{4n} \cdot i^{-1}}{2} \Rightarrow \frac{i - \frac{1}{i}}{2} \Rightarrow \frac{i + i}{2} \Rightarrow \frac{2i}{2} \Rightarrow i$

⑦ n এর ধনাত্মক মানের জন্য $(1-i)^n \left(1 - \frac{1}{i}\right)^n = ?$ (Ans) $\Rightarrow n = 2$

ব্যাখ্যা: $(1-i)^n \left(1 - \frac{1}{i}\right)^n \Rightarrow (1^2 - i^2)^n \Rightarrow 2^n$

$\therefore i^n = -1$

$\therefore n = 2$

⑧ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = -1$ হলে n এর সর্বনিম্ন ধনাত্মক সংখ্যা

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = -1$

$(i)^n = -1$

$n = 2$

⑨ $(1+i)^{2n} = (1-i)^{2n}$ হলে n এর সর্বনিম্ন ধনাত্মক সংখ্যা? Ans ⇒ $n=2$

ব্যাখ্যা: $(1+i)^{2n} = (1-i)^{2n} \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow i^{2n} = 1$

$\therefore n = 2$

⑩ $\frac{1+2i}{1-i}$ জটিল সংখ্যাটির অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?

a) প্রথম ✓ b) দ্বিতীয় c) তৃতীয় d) চতুর্থ

ব্যাখ্যা: $\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Rightarrow \frac{1+2i+i-2}{1^2+1^2} \Rightarrow \frac{-1+3i}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

⑪ $\frac{(1-i)^3}{(1-i)} \frac{(1-i)^3}{1-i^3} = ?$

a) i b) -1 c) 1 ✓ d) -2

ব্যাখ্যা: $\frac{(1-i)^3}{1-i^3} \Rightarrow \frac{1+3i-3+i}{1+i} \Rightarrow \frac{-2-2i}{1+i} \Rightarrow \frac{-2(1+i)}{(1+i)} \Rightarrow -2$

⑫ $Re\left[\frac{(1+i)^2}{3-i}\right]$ এর মান কত? ✓ a) $-\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $-\frac{1}{10}$

ব্যাখ্যা: $\frac{(1+i)^2(3+i)}{(3-i)(3+i)} \Rightarrow \frac{(1+2i+i^2)(3+i)}{(3)^2+(1)^2} \Rightarrow \frac{2i(3+i)}{10} \Rightarrow \frac{2i^2+6i}{10} \Rightarrow \frac{-2+6i}{10}$

$\Rightarrow -\frac{2}{10}+\frac{6}{10}i$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{5}i$

(CKRUET)

***

⑬ $a^2+b^2 = 1$ হলে $\frac{1+b+ia}{1+b-ia} = ?$ a) 1 b) 2 ✓ c) $b+ia$ d) $a+ib$

ব্যাখ্যা: $\frac{(1+b+ia)(1+b+ia)}{(1+b-ia)(1+b+ia)}$

$\Rightarrow \frac{(1+b+ia)^2}{(1+b)^2+a^2}$

$\Rightarrow \frac{(1+b)^2+2(1+b)\times ia+(ia)^2}{1+2b+(b^2+a^2)} \Rightarrow 1$ (যদতমা আরও)

$$\Rightarrow \frac{1+2b+b^2+2ia+2iab-a^2}{2+2b}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+2b+b^2+2ia(1+b)-a^2}{2(b+1)} \quad *(1=a^2+b^2) \text{ মান বসাই}$$

$$\Rightarrow \frac{2b(b+1)+2ia(1+b)}{2(b+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2(b+1)\{b+ia\}}{2(b+1)}$$

$$\Rightarrow b+ia \quad (Ans)$$

(14) $\sqrt{2i} = ?$ a) $1+i$ b) $1-i$ c) $-\sqrt{2}i$ d) None

ব্যাখ্যা: $\sqrt{2i} \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{i} \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow (1+i)$

(15) $(x+iy)^{1/3} = a+ib$ হলে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = ?$

a) $2(a^2-b^2)$ b) $4(a^2-b^2)$ c) $8(a^2-b^2)$ d) None

ব্যাখ্যা: $(x+ib)^{1/3} = a+ib$

$\Rightarrow x+iy=(a+ib)^3$

$\Rightarrow x+iy= a^3+3a^2ib-3ab^2-ib^3$

$\Rightarrow x+iy= a^3-3ab^2+3a^2ib-ib^3$

$\Rightarrow x+iy = a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3)$

$\therefore x = a^3-3ab^2$ ও $y = 3a^2b+b^3$

$$\therefore \frac{a^3-3ab^2}{a}+\frac{3a^2b-b^3}{b} \Rightarrow a^2-3b^2+3a^2-b3$$

$$\Rightarrow 4a^2-4b^2$$

$$\Rightarrow 4(a^2-b^2)$$

(Ans)

(16) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x+iy$ হলে $(x,y) = ?$

a) $(0,2)$ b) $(-2,0)$ ✓c) $(0,-2)$ d) None

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 \Rightarrow i^3 - (-i)^3 \Rightarrow -i - i \Rightarrow -2i$

$\therefore x = 0,\ y = -2 \quad \therefore (x,y) = (0,-2)$

(17) $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা = ?

a) $\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$ b) $\frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$ c) $-\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$ ✓d) $-\frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$

ব্যাখ্যা: বাস্তব সংখ্যা দিয়ে যদি বর্গ মূল নির্ণয় করতে বলে, মুটি বাস্তব সংখ্যা বিদ্যমান আবার বলে, মুটি কাল্পনিক সংখ্যা বিদ্যমান আবার বলে, অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নির্ণয় করতে বলে তখন $a+ib$ আকারের প্রকাশ করে নিবে।

$\frac{2-i}{(1-2i)^2} \Rightarrow \frac{2-i}{1-4i-4} \Rightarrow \frac{(2-i)(3-4i)}{-(3+4i)(3-4i)} \Rightarrow \frac{6-3i-8i+4i^2}{-25} \Rightarrow \frac{2-11i}{-25} \Rightarrow -\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$

$-\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\Rightarrow -\frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$

(18) $\left|(1+i)\left(\frac{2+i}{3+i}\right)\right|$ এর মান = ? a) $-1/2$ b) $1/2$ ✓c) 1 d) -1

ব্যাখ্যা: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = 1$

(19) $\frac{(3+2i)^2}{4-3i}$ এর মডুলাস = ? ✓a) $\frac{13}{5}$ b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{9}{5}$ d) $\frac{7}{5}$

ব্যাখ্যা: $\frac{(3+2i)^2}{4-3i} \Rightarrow \frac{(\sqrt{9+4})^2}{\sqrt{16+9}} = \frac{13}{5}$

(20) $(\sqrt{3}+i)$ এর পোলার আকৃতি নিচের কোনটি ?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})$ ✓b) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

c) $\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})$ d) $4(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$

ব্যাখ্যা: $(\sqrt{3}+i) \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$

(CKRUET)

(21) *** $\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$ হলে, $a^2+b^2=1$ হলে $x=?$

a) $\frac{2a}{(1+a)^2+b^2}$ b) $\frac{2b}{(1+a)^2+b^2}$ / $\frac{b}{a+1}$ c) $\frac{2a}{(1+b)^2+a^2}$ d) $\frac{2b}{(1+b)^2+a^2}$

সমাধান: $\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$

$\Rightarrow 1-ix = a+iax-ib-i^2bx$

$\Rightarrow 1-ix = a+iax-ib+bx$

$\Rightarrow x = \frac{1-a+ib}{b+i(a+1)}$

$= \frac{\{(1-a)+ib\}\{b-i(1+a)\}}{b^2+(a+1)^2}$

$= \frac{b(1-a)+ib^2-i(1-a^2)+b(1+a)}{b^2+(a+1)^2}$

$= \frac{b-ab+ib^2-i+ia^2+b+ab}{b^2+(a+1)^2}$

$= \frac{2b}{b^2+(a+1)^2}$ (Ans)

$= \frac{2b}{b^2+a^2+2a+1}$

$= \frac{2b}{2a+1+1}$

$= \frac{2b}{2(a+1)}$

$= \frac{b}{(a+1)}$ (Ans)

(22) $\frac{\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)^8}{\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)^8} = ?$ a) -1 b) 0 c) 1 d) $2i$

ব্যাখ্যা: $\frac{-i}{i} = -1$

(23) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8$ এর মান = ? a) 4 b) 6 c) 8 d) 2.

ব্যাখ্যা: $(\sqrt{i})^8+(\sqrt{-i})^8$

$= i^4+(-1)^4$

$= 1+1$

$= 2$

(24) $\frac{4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}{4(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)} = ?$

a) $\frac{10}{\sqrt{2}}(1+i)$ b) $\frac{10}{\sqrt{2}}(1-i)$ c) $\frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)$ d) None

ব্যাখ্যা: $\frac{4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}{4(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)} = 10\left(\frac{e^{i75}}{e^{i30}}\right) = 10e^{i45}$

$= 10(\cos 45^\circ+i\sin 45)$

$= 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \frac{10}{\sqrt{2}}(1+i)$

(25) $\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^7(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{12}(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^{-6}} = ?$

a) $\cos 33\theta+i\sin 33\theta$ b) $\cos 33\theta-i\sin 33\theta$

c) $\cos 47\theta+i\sin 47\theta$ d) $\cos 47\theta-i\sin 47\theta$

ব্যাখ্যা: $\frac{(e^{-2\theta})^4 \cdot (e^{3\theta})^{-5}}{(e^{4\theta})^{12} \cdot (e^{5\theta})^{-6}}$

$= \frac{e^{-14i\theta} \cdot e^{-15i\theta}}{e^{48i\theta} \cdot e^{-30i\theta}}$

$= e^{(-29\theta - 48\theta + 30\theta)i}$

$= e^{-47i\theta}$

$= \cos 47\theta - i\sin 47\theta$

(26) $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5} \times (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^6}{(\sin\theta - i\cos\theta)^3}$ এর মান কত?

a) $\cos 25\theta + i\sin 25\theta$ ✓ b) $\cos 25\theta - i\sin 25\theta$

c) $\sin 25\theta + i\cos 25\theta$ d) $\sin 25 - i\cos 25\theta$

ব্যাখ্যা: $\frac{(e^{i2\theta})^{-5} \times (e^{-i3\theta})^6}{(e^{-i\theta})^3} \Rightarrow \frac{e^{-i10\theta} \times e^{-i18\theta}}{e^{-3i\theta}} \Rightarrow e^{-i25\theta}$

$= (\cos 25^\circ - i\sin 25^\circ)$ (Ans)

(27) $(-1+\sqrt{3}i)^{62} + (-1-\sqrt{3}i)^{62} = ?$ a) 2^{62} b) 2^{64} ✓ c) -2^{62} d) $= 0$

ব্যাখ্যা: $2^{62}\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{62} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{62}\right\}$

$= 2^{62}\{\omega^{62} + (\omega^2)^{62}\}$

$= 2^{62}(\omega^{62} + \omega^{124})$

$= -2^{62}$

(28) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^6+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^6=?$ a) 2 b) -2 c) 1 d) 0

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^6+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^6 \Rightarrow \left\{\frac{-\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)}{-\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)}\right\}^6+\left\{\frac{-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}{-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right\}^6$

$\Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{\omega}\right)^6+\left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)^6$

$\Rightarrow \omega^6+\frac{1}{\omega^6}$

$\Rightarrow 1+1$

$\Rightarrow 2$

(29). $z+\frac{1}{z}=1$ হলে $z^{99}+\frac{1}{z^{99}}=?$ a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

ব্যাখ্যা: $z+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow z^2+1=z \Rightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{(1)^2-4}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow -\omega^2, -\omega$

$\therefore -\omega^{99}+\frac{1}{-\omega^{99}}=-2$

(30) $(3+5\omega+3\omega^2)^2+(3+3\omega+5\omega^2)^2=?$

a) 4 b) 0 c) -4 d) None

ব্যাখ্যা: $(3+5\omega+3\omega^2)^2+(3+3\omega+5\omega^2)^2$

$\Rightarrow \{3+3\omega+3\omega^2+2\omega\}^2+\{3+3\omega+3\omega^2+2\omega^2\}^2$

$\Rightarrow \{3(1+\omega+\omega^2)+2\omega\}^2+\{3(1+\omega+\omega^2)+2\omega^2\}^2$

$\Rightarrow 4\omega^2+4\omega^4$

$= 4(\omega^2+\omega)$

$= -4$

(31) $(1+\omega)^3 - (1+\omega^2)^3 = ?$ a) 2ω b) 2 c) -2 ✓d) 0

ব্যাখ্যা: $(1+\omega)^3 - (1+\omega^2)^3$

$\Rightarrow (-\omega^2)^3 - (-\omega)^3$

$\Rightarrow -\omega^6 + \omega^3$

$\Rightarrow -1+1$

$\Rightarrow 0$

(32) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) = ?$ Ans: 16

ব্যাখ্যা: $(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2) \Rightarrow 16$

(33) $Re\left(\frac{z+2i}{z+4}\right) = 0$ হয় হলে z এর quotient কত? Ans: $(-2, -1)$

ব্যাখ্যা: $Re\left(\frac{z+2i}{z+4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{x+iy+2i}{x+iy+4} = 0$

$\Rightarrow (x+iy+2i)\{(x+4)-iy\} = 0$

$\Rightarrow x(x+4) - i^2y^2 - 2i^2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

$\Rightarrow (-2, -1)$

(34) যদি $im\left(\frac{z+2i}{z+2}\right) = 0$ হয় তবে z এর সঞ্চারপথ = ?

Ans: $x+y+2=0$

ব্যাখ্যা: $\frac{z+2i}{z+2} = 0 \Rightarrow \frac{(x+iy+2i)(x+2-iy)}{(x+iy+2)(x+2-iy)} \Rightarrow iy(x+2)+2i(x+2)-ixy=0$

$\Rightarrow xy+2y+2x+4-xy=0 \Rightarrow 2x+2y+4=0 \Rightarrow x+y+2=0$

35. $|z-4i|+|z+4i|=10$ এর সঞ্চারপথ

ক) সরলরেখা খ) বৃত্ত গ) উপবৃত্ত ঘ) পরাবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $8<10 \Rightarrow$ উপবৃত্ত