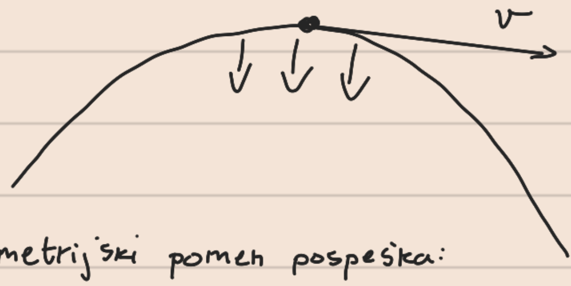
KINEMATIKA TOČKE

vektor časa

Točka $P(x, y, z)$ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}$ vektor hitrosti

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



$|\vec{v}| = v$ brzina ali velikost hitrosti

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ vektor pospeška

$\vec{a} = \lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

$a = |\vec{a}|$

Geometrijski pomen pospeška: kaže v smeri zavijanja

če je $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} < 0$ zaviranje

če je $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} > 0$ pospeševanje

če je $v = 0$ točka miruje

TRENUTNO   STALNO

PRIMERI • Linearno zaviranje

$\vec{r} = x\vec{i}$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{i}$

$v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$

$a = -kv$, $k > 0$

↳ lin. zaviranje

↳ $av = -kv^2 < 0 \Rightarrow$ zaviranje

• Nelinearno zaviranje: $a = -kv^p$, $p \neq 1$

• Premočrtno gibanje: tir leži na premici, $\boxed{\vec{v} \parallel \vec{a}}$ nikoli ne zavijamo, $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$

↳ Primer premočrtnega gibanja: HARMONIČNO NIHANJE

$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = A \cos(\omega t - \delta) = A(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta))$

amplituda   frekvenca   fazni zamik

$\Rightarrow A\cos\delta = A_1$, $A \sin\delta = B_1$ $\Rightarrow A^2 = A_1^2 + B_1^2$, $\tg \delta = \frac{B_1}{A_1}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{A > 0}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ko je točka v skrajni legi, rečemo da je to točka trenutnega mirovanja.

↳ nihajni čas

To je točka obrata

• ENAKOMERNO PREMOČRTNO GIBANJE: $\vec{v} =$ konst. $x = vt + x(t=0)$

• ENAKOMERNO POSPEŠENO GIBANJE: $\vec{a} =$ konst. $v = at + v(t=0)$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v(t=0)\cdot t + x(t=0)$

• RAVNINSKO GIBANJE

Polarni ks: $x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, za $x>0 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Sicer:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi, & x<0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0 \end{cases}$$

$r = r(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\,\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \underbrace{\dot{r}\,\vec{e}_r}_{\text{radialna hitrost}} + \underbrace{r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}_{\text{obodna hitrost}}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} = \underbrace{\vec{e}_\varphi}_{\text{obodni bazni vektor}}$$

$\dot{\varphi}$... kotna hitrost

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0, \quad \vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi$

$\vec{e}_r$ in $\vec{e}_\varphi$ sta BAZNA VEKTORJA PKS

$\dot{r}$.... radialna hitrost $\qquad r\dot{\varphi}$... obodna hitrost $\Rightarrow \vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}}_{\vec{e}_\varphi}\dot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\dot{\varphi} =$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j} = -\vec{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi = a_r\,\vec{e}_r + a_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ Radialni pospešek

$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$ Obodni pospešek

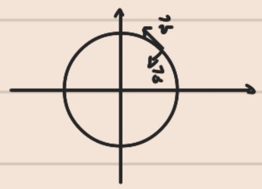
• KROŽENJE ... tir leži na krožnici

$r = \text{konst.} \Rightarrow a_r = -r\dot{\varphi}^2, \; a_\varphi = r\ddot{\varphi}$

$\dot{\varphi}$... kotna hitrost, $\ddot{\varphi}$... kotni pospešek

če je kroženje enakomerno: $\dot{\varphi} = \text{konst} = \omega$

$\Rightarrow \boxed{a_r = -r\omega^2}, \; a_\varphi = 0$



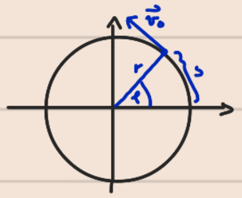
$\varphi = \varphi(t)$

↓

kot zasuka, ki ga telo opiše v času t

obodna hitrost ima smer tangente na krožnico in je enaka odvodu poti po času: $v = \frac{ds}{dt}$

kotna hitrost je določena z odvodom kota zasuka po času: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$



pot s... dolžina krožnega loka, ki ga med gibanjem opiše točka na krožnici, v času t

$v = r\omega$

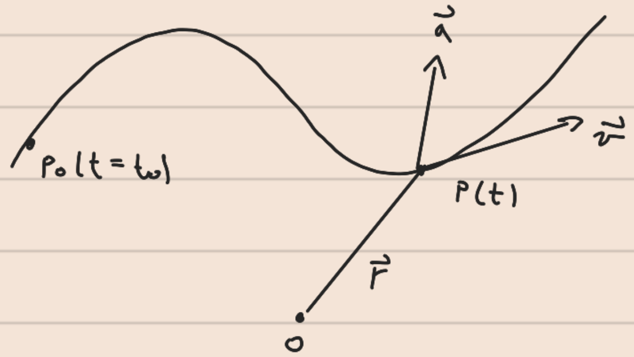
α... kotni pospešek, velja $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Radialni posp. pri kroženju je posledica delovanja CENTRIPETALNE SILE F_c, ki leži na zveznici osišča in trenutne lege točke na krožnici in je usmerjena proti osišču. $F_c = m a_r$

GIBANJE PO KRIVULJI

Ločna dolžina oz. dolžina krivulje:

$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$



Ideja: krivuljo razrežemo na majhne kose in vzamemo ravne črte teh majhnih kosov. Na ta način naredimo aproksimacijo z odvodom.

malo drugače: $s = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Rightarrow s = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}_{\text{kartezične kordinate}}\, dt$ ali $s = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}_{\text{polarne kordinate}}\, dt$

$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = v(t)$

Brzina (velikost vektorja hitrosti) je enaka odvodu poti po času $\qquad v = |\dot{s}|,\ v \geq 0$

krivuljo želimo parametrizirati z naravnim parametrom ... $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$

↳ tedaj velja, da je $|\vec{r}\,'(s)| = 1$, to pomeni, da ima tangentni vektor v naravni param. v vsaki točki dolžino 1

$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| |\dot{s}|$

$v = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| v \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t$ ... enotski vektor v tangentni smeri

torej velja: $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{s}\,\vec{e}_t}$ hitrost ima tangentno smer!

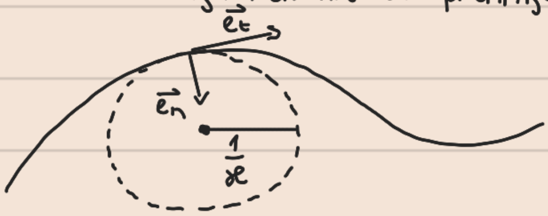
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \dot{s}\,\frac{d\vec{e}_t}{dt}$ ↗ tangenta ↘ čas

$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds}\dot{s}$, saj $\vec{e}_t = \vec{e}_t(s)$ $\qquad \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1 \ /'$

$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| \vec{e}_n = \varkappa\,\vec{e}_n \qquad \vec{e}_n$ ... normala na krivuljo $\qquad \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 0$ pravokotna

normalna (fleksijska) ukrivljenost krivulje; $\varkappa = \frac{1}{R}$ ↳ krivinski polmer

Fleksija meri hitrost spreminjanja v normalni smeri (torej levo, desno)



Radij največje krivulje, ki jo lahko pritisnemo h krivulji: $R = \frac{1}{\varkappa}$

Če $\varkappa = 0$ krivulja ni ukrivljena in lahko k njej pritisnemo poljubno veliko krožnico t.j. $R = \infty$

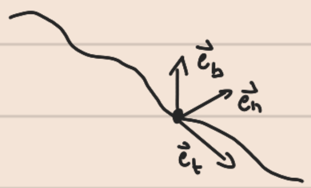
↳ velja $\vec{v} \parallel \vec{a}$, premočrtno gibanje

Pospešek torej: $\vec{a} = \underbrace{\ddot{s}\,\vec{e}_t}_{a_t} + \underbrace{\dot{s}^2 \varkappa\,\vec{e}_n}_{a_n}$

a_t ... tangentni posp. $\qquad a_n$ ... normalni pospešek

Ravninska krivulja s konstantno ukrivljenostjo je krožnica

$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$ ... enotska binormala



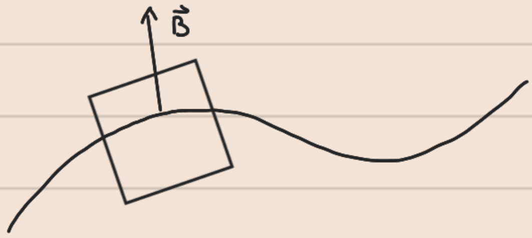
spremljajoči trieder

$$\vec v \times \vec a = \dot s \vec e_t \times (\ddot s \vec e_t + \dot s^2 \varkappa \vec e_n) = \varkappa \dot s^3 \vec e_b \Rightarrow \varkappa = \frac{|\vec v \times \vec a|}{\dot s^3}$$

$$\frac{d\vec e_b}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec e_t \times \vec e_n) = \cancelto{0}{\frac{d\vec e_t}{ds} \times \vec e_n} + \vec e_t \times \frac{d\vec e_n}{ds} = \vec e_t \times \frac{d\vec e_n}{ds} \Rightarrow \frac{d\vec e_b}{ds} \parallel \vec e_n \ !$$

Torej spreminjanje binormalne komponente: $\boxed{\frac{d\vec e_b}{ds} = -\tau \vec e_n}$

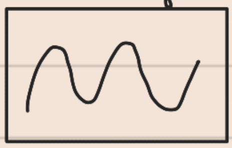
Torzijska ukrivljenost



$\vec B$ je normala ravnine, ki se najbolje prilega krivulji iz vrha, τ pa meri hitrost oz. velikost sprememb.

To je PRITISNJENA RAVNINA

Za ravninsko gibanje velja: $\tau = 0$



$\vec e_t, \vec e_n, \vec e_b$ INTERNISTIČNI KS

Pri kroženju velja: $\vec e_t = \vec e_\varphi$, $\vec e_n = -\vec e_r$, $\vec e_b = -\vec k$

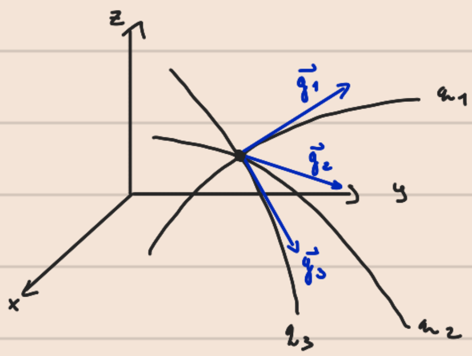
Krivulja je do togega premika natančno določena s funkcijama $\varkappa = \varkappa(s)$, $\tau = \tau(s)$

Kot primer smo si pogledali vijačnico: $\vec r = r_0 \cos\varphi\, \vec i + r_0 \sin\varphi\, \vec j + b\varphi\, \vec k$

KRIVOČRTNE KOORDINATE

= bijekcija $x = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow q = (q_1, q_2, q_3)$

↳ koordinatne premice so ukrivljene $P(x_1, x_2, x_3)$ DIFEOMORFIZEM



$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3) \\ q_i &= q_i(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{q})$$

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| \neq 0 \quad \text{Jac. determinanta}$$

$\vec r = \vec r(\underline{x}(\underline{q}))$

$\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}$ Tangenta na kordinatno krivuljo

$$\frac{\partial \vec r}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec r}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec e_j \qquad \vec q_i = \frac{\partial \vec r}{\partial q_i} \quad i = 1,2,3$$

$\vec r = x_1 \vec e_1 + x_2 \vec e_2 + x_3 \vec e_3$

$\frac{\partial \vec r}{\partial x_j} = \vec e_j$

$\vec q_i$ so linearno neodvisni $\{\vec q_1, \vec q_2, \vec q_3\}$ sestavljajo lokalno bazo (krivočrtno bazo)

↳ $\vec q_1 \cdot (\vec q_2 \times \vec q_3) \neq 0$ (ne ležijo vsi trije v isti ravnini)

V splošnem $\{\vec q_1, \vec q_2, \vec q_3\}$ ni ortogonalna in ni normirana

Če je ortogonalna, imamo ortogonalne krivočrtne koordinate.

Gibanje: $q_i = q_i(t)$

čese v zapisu indeks pojavi dvakrat Σ izpustimo

$$\vec v = \frac{\partial \vec r}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\dot q_i = \sum_{i=1}^{3} \dot q_i \vec g_i = \dot q_i \cdot \vec g_i$$

kot primer: cilindrične koordinate (r, φ, z)

↳ $\vec r = r\cos\varphi\, \vec i + r \sin\varphi\, \vec j + z \vec k$

POSPEŠEK: $\vec v = \dot q_i \vec g_i$

$$\vec a = \frac{\partial \vec v}{\partial t} = \ddot q_i \vec g_i + \dot q_i \underbrace{\frac{\partial \vec g_i}{\partial t}}_{\frac{\partial \vec g_i}{\partial q_j}\dot q_j} = \ddot q_i \vec g_i + \dot q_i \dot q_j \frac{\partial \vec g_i}{\partial q_j} = \ddot q_i \vec g_i + \dot q_i \dot q_j \left\{ {k \atop i\, j} \right\} \vec g_k = \left(\ddot q_k + \dot q_i \dot q_j \left\{ {k \atop i\, j} \right\}\right) \vec g_k$$

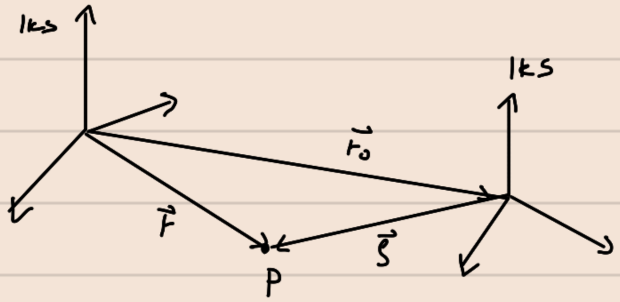
$$\frac{\partial \vec g_i}{\partial q_j} = \left\{ {k \atop i\, j} \right\} \vec g_k$$

↑ CHRISTOFFELOVI SIMBOLI

DINAMIKA TOČKE

NEWTONOVI ZAKONI

1. KS je inercialen ⇔ prosta materialna točka se giblje premočrtno s konstantno brzino ali miruje.



$\vec r = \vec r_0 + \vec \rho$

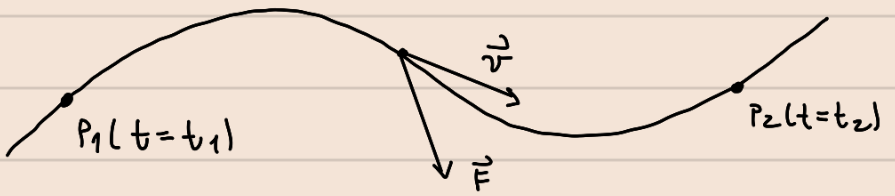
2. V IKS velja Newtonova enačba $m\vec a = \vec F$

$$\vec F = \vec 0 \Rightarrow \vec a = 0 \Rightarrow \vec v = \text{konst}$$

3. $\vec F_{21} = -\vec F_{12}$

Gibanje je natančno določeno z začetnim pogojem in New. enačbo

DELO, ki ga opravi sila $\vec F$ pri gibanju točke P od P_1 do P_2 je:



$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec F\, dP = \int_{r_1}^{r_2} \vec F\, d\vec r = \int_{t_1}^{t_2} \vec F(\vec r(t)) \cdot \vec v\, dt$$

$$dP = \vec v\, dt$$

$$\frac{dP}{dt} = \vec v = \dot P$$

$\vec F \cdot \vec v$ ... MOČ (delo je integral moči)

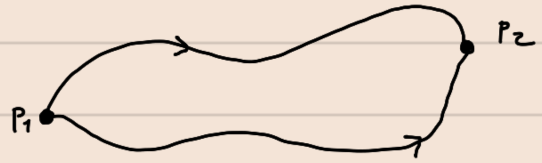
$$A=\int_{t_1}^{t_2}\vec F\cdot\vec v\,dt=\int_{t_1}^{t_2} m\vec a\cdot\vec v\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\left(\tfrac12 m\vec v\cdot\vec v\right)}dt=\Big(\underbrace{\tfrac12 m|\vec v|^2}_{}\Big|_{t=t_2}-\Big(\tfrac12 m|\vec v|^2\Big|_{t=t_1}\Big)=T_2-T_1$$

$\vec a=\dot{\vec v}$ KINETIČNA ENERGIJA

$\vec a\cdot\vec v=\vec v\cdot\dot{\vec v}=\dot{\left(\tfrac12\vec v\cdot\vec v\right)}$

IZREK O DELU: $A=T_2-T_1$ Delo, ki ga opravi sila na materialno točko pri gibanju vzdolž tira, je enako razliki kinetične energije. Izrek o delu velja vedno.

Ali je delo odvisno od poti? P se giblje v polju sile



Ali je delo po katerikoli sklenjeni poti enako 0?

DEF: Sila je POTENCIALNA, če obstaja skalarna funkcija U, tako da je: $\vec F=-\text{grad}\,U$

DEF: Sila $\vec F$ je KONSERVATIVNA, če je potencialna in odvisna samo od položaja

v splošnem je $\vec F=\vec F(t,\vec r,\dot{\vec r})$. Veljati mora torej $\vec F=\vec F(P)$, $U=U(P)$, da bo sila konservativna

To je torej sila, katere skupno opravljeno delo po poljubno izbrani zaključeni poti je identično enako nič. Delo, ki ga kon. sila opravi pri premiku med dvema izbranima točkama, je neodvisno od izbranega tira, če ostajata začetna in končna točka isti.

Velja: Vse osnovne sile so konservativne. Pri takih silah lahko uvedemo potencial.

$$A=\int_{P_1}^{P_2}\vec F\vec v\,dt\overset{\vec F\text{ potencialna}}{=}-\int_{P_1}^{P_2}\text{grad}\,U(\vec r(t))=\int_{t_1}^{t_2}\text{grad}\,U(\vec r(t))\cdot\vec v\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{dt}dt=-U(t=t_2)+U(t=t_1)=-U_2+U_1$$

$\underbrace{U=U(P)=U(\vec r)}_{\text{konservativnost}}$ $P_2=\vec r(t=t_1)$ $\underset{d\vec r=\vec v\cdot dt}{\overset{\dot s=v\cdot t}{}}$ $\frac{dU(\vec r(t))}{dt}=\frac{dU}{dx}\underset{\frac{dx}{dt}}{\dot x}+\frac{dU}{dy}\dot y+\frac{dU}{dz}\dot z=\text{grad}\,U\cdot\vec v$ $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$

od prej vemo $A=T_2-T_1$ in od zdaj $A=-U_2+U_1$ $\Rightarrow$ $T_2-T_1=U_1-U_2$ $\Rightarrow T_2+U_2=T_1+U_1=E_0$

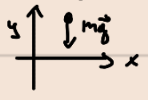
IZREK O ENERGIJI: Če je sila konservativna, je vsota kinetične in potencialne energije konstantna $\Rightarrow$ $T+U=E_0$

PREGLED SIL

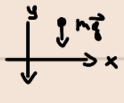
- Gibanje v polju konstantne sile $\vec F=\vec F_0=m\vec g$ (primer je sila teže)

$U=-\vec F_0\vec r\Rightarrow U=-m\vec g\,\vec r$

npr: $\vec g=g_1\vec i+g_2\vec j+g_3\vec k$ potem $U=-m(g_1x+g_2y+g_3z)$; $\frac{\partial U}{\partial x}=mg_1$



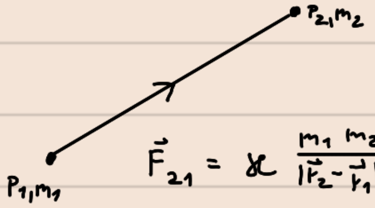
$U=mgy$



$U=-mgy$

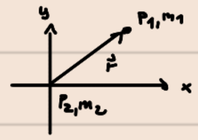
- Gravitacijska sila $\vec{F} = -\frac{\varkappa m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ (gravitacijska sila ni enako kot sila teže!)

med dvema masama se vedno vzpostavi gravitacijska sila



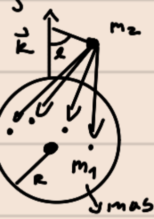
$$\vec{F}_{21} = \varkappa \frac{m_1 m_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|^2} \underbrace{\frac{\vec r_2 - \vec r_1}{|\vec r_2 - \vec r_1|}}$$

kaže torej v smeri zveznice



(če imamo 2 točki lahko eno vedno postavimo v izhodišče ks in tako dobimo + v gravitacijski formuli)

če imamo zemljo in točko:



ko točka niha, lahko zanemarimo l, saj je $R \gg l$

vse mase se seštejejo v skupno maso zemlje m_1

$\frac{\vec r}{|\vec r|} = \vec k$ $\vec F = -m_1 g \vec k$ $g = \frac{\varkappa m_1}{R^2}$ sila teže je torej aproksimacija gravitacijskega zakona, ki velja ko so odkloni majhni in R velik

(Newtonov) Gravitacijski zakon: gravitacijska sila pojema z razdaljo.

$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$ vsako telo v vesolju privlači vsako drugo telo s silo, katere smer leži na zveznici njunih težišč in je sorazmerna zmnožku njunih mas in obratno soraz. kvadratu razdalje med njima

zakon velja za točkasta telesa. Če imajo telesa prostornino, se silo dobi z integriranjem sil med različnimi točkami.

Potencial... $U = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r}$

- ELEKTRIČNA SILA (med dvema nabojema se vzpostavi električna sila)

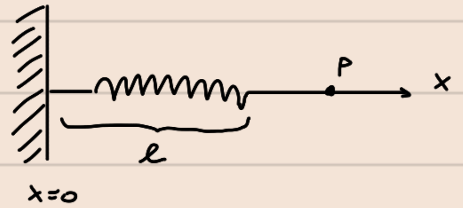
Prav tako kot gravitacijska, je obratnosorazmerna kvadratu razdalje

- $e_1 e_2 > 0$ ... odbojna
- $e_1 e_2 < 0$ ... privlačna

$$\vec{F}_{21} = -\mu \frac{e_1 e_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^2} \frac{\vec r_2 - \vec r_1}{|\vec r_2 - \vec r_1|}$$

Potencial... $U = -\mu e_1 e_2 \frac{1}{|\vec r|}$

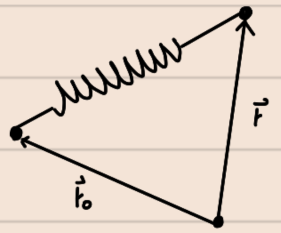
- SILA VZMETI (HOOKOVA SILA) (odvisna je od raztega vzmeti)



$K > 0$ ... koeficient vzmeti

$F = -K(x - l)$ l... neutralna dolžina

$U = \frac{1}{2} k \underbrace{(x - l)}_{\text{raztezek}}{}^2$ x... dolžina raztegnjene vzmeti v splošnem:



$$\vec{F} = -k\left(|\vec{r}-\vec{r}_0| - \ell\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(|\vec{r}-\vec{r}_0| - \ell\right)^2$$

SILA UPORA (te sile niso konservativne, saj so odvisne od hitrosti)

$\vec{F}_u = -\underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} f(|\vec{v}|)$, $f > 0$

↳ nasprotna smer gibanja, ki je podana s tem enotskim vektorjem

- linearni zakon: $f(|\vec{v}|) = k|\vec{v}|$, $k>0$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -k\vec{v}$

  ↳ f je linearna funkcija

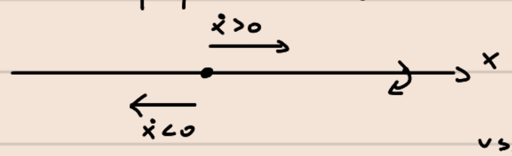
- kvadratni zakon: $f(|\vec{v}|) = k|\vec{v}|^2$, $k>0$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -k|\vec{v}|\vec{v} = \underbrace{-k\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}}_{\text{nelinearna enačba}}$

- Sila trenja: $\vec{F} = -\gamma\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $k>0$ konstantna! $\gamma = mg\,k_{tr}$

  če se telo ne giblje namesto k_{tr} nastopi k_e, ki je običajno večji

PREMOČRTNO GIBANJE

= tir leži na premici oz. bolje: gibanje je premočrtno, če ima vektor pospeška konstantno smer



$m\vec{a} = \vec{F}$ zapišemo kot $m\ddot{x} = \underbrace{f(t, x, \dot{x})}$ (v splošnem je sila odvisna od časa, poti in hitrosti) in imamo začetne pogoje: $x(t=t_0) = x_0$, $\dot{x}(t=t_0) = v_0$

$\vec{F} = f\vec{i}$ (vse se dogaja samo v eni smeri)

↳ v splošnem je ta enačba težko rešljiva, zato jo rešujemo numerično

če je pa sila odvisna samo od položaja pa velja $m\ddot{x} = f(x)$. Ali je tudi potencialna?

Ali torej obstaja U, tako da je $f(x) = -\frac{dU}{dx}$ $\Rightarrow$ $U = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi + U(x_0)$

Ali je res $-\frac{dU}{dx} = f(x)$. Ja, če je f ZVEZNA!

Torej: če je f zvezna $\Rightarrow$ f je potencialna in $U = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi + U(x_0)$

Torej, ko je f zvezna je konservativna! Velja izrek o energiji $T + U = E_0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$ ... ENERGIJSKA ENAČBA

↓ E_0 dobim iz začetnih pogojev

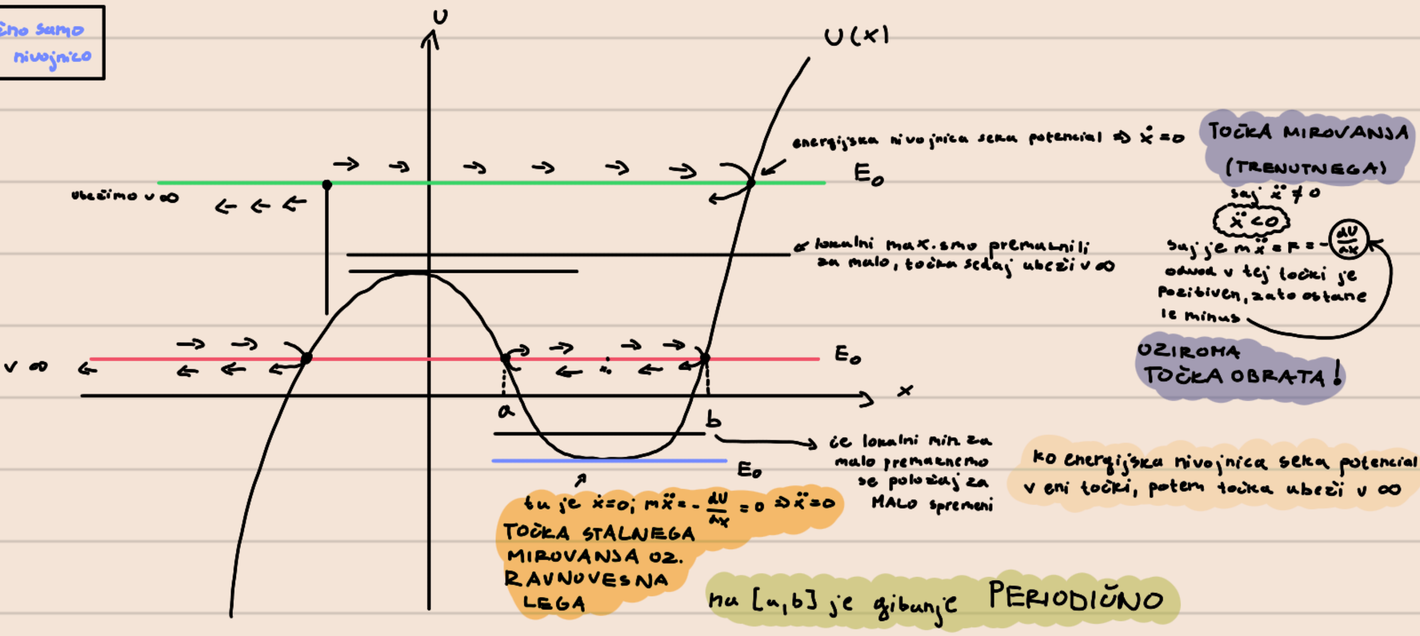
$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_0 - U(x))$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}$ ($\pm$ = sgn $\dot{x}$) $\Rightarrow$ $\text{sgn}\,\dot{x}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$

$\Rightarrow$ dobimo torej $t = t(x)$ (če vem kje sem, vem kdaj sem tam) tej integraciji rečemo tudi rešitev s KVADRATURAMI

želimo: $x = x(t)$, torej inverz od $t = t(x)$. To pa lahko dobimo, ko $\dot{x} \neq 0$

KVALITATIVNA ANALIZA GIBANJA (ali lahko povemo kaj o gibanju ne da bi šli računat)

Gibanje je možno samo nad energijsko nivojnico



na $[a,b]$ je gibanje PERIODIČNO

stacionarne točke potenciala so točke mirovanja!

Lokalni minimum je stabilna ravnovesna lega

Lokalni maksimum je nestabilna ravnovesne lega (majhna Δ povzroči veliko Δ v položaju)

Prevojna točka je tudi nestabilna ravnovesna lega

Poglejmo sičas za ravnovesno lego na rdeči nivojnici E_0:

$$t - t_0 = \operatorname{sgn}\dot{x} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}}$$

naj bo: $t_0 = 0$

t_1: od x_0 do b; $\dot{x} > 0$

t_2: od b do a; $\dot{x} < 0$

t_3: od a do x_0; $\dot{x} > 0$

$$\Rightarrow T = t_1 + t_2 + t_3 = \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{\ }} + \int_{b}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\ }} + \int_{a}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\ }} = 2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}}$$

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$$ (posplošeni integral)

$$U(a) = U(b) = E_0$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ obstaja za $p < 1$

↳ v T je v imenovalcu stopnja $\frac{1}{2}$, zato naš integral obstaja

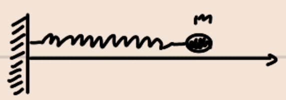
velja: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)(x-a)} = \pi$

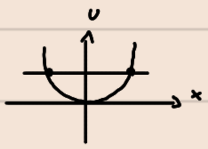
↳ $-x^2 + (a+b)x - ab$

vod koef. je -1

v krajiščih je Polinom enak 0

PRIMER: HARMONIČNI OSCILATOR





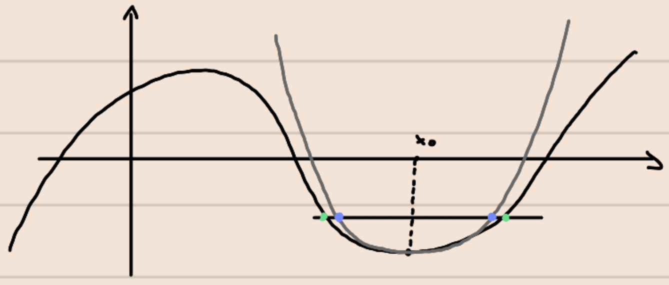
vsa gibanja so periodična

$$m\ddot{x} = -kx, \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega t - \delta) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

vsa gibanja so omejena oz. periodična

HARMONIČNA APROKSIMACIJA PERIODE



zanima nas kako je z nihanjem v okolici ravnovesne lege točke x_0

Naredim sledeče: v tej točki potencial aproksimiram s parabolo in periodo prvotnega potenciala nadomestim s periodo te aproksimacije.

To pomeni, da v okolici te ravnovesne lege razvijem potencial v Taylorjevo vrsto:

$$U(x) \doteq U(x_0) + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}(x_0)}_{=0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0)(x-x_0)^2$$

$$T = \sqrt{2m}\int_{\tilde a}^{\tilde b}\frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x_0) - \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2}} = \sqrt{2m}\int_{\tilde a}^{\tilde b}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}U''(x_0)}\sqrt{\alpha+\beta x - x^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}$$

Vemo: $U'(x_0)=0$ in imamo lokalni minimum $\Rightarrow$ $U''(x_0)>0$!

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}$$ HARMONIČNA APROKSIMACIJA PERIODE

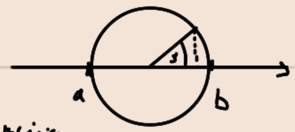
↳ v formuli nikjer ne nastopa E_0 $\Rightarrow$ aproks. ni odvisna od E_0 (dobra je samo za majhna nihanja okoli ravnovesne lege, torej koje energija za malenkost večja od potenciala. za večje odmike ta aproks. ni dobra)

LIBRACIJSKA APROKSIMACIJA PERIODE

(ta je odvisna od energije)

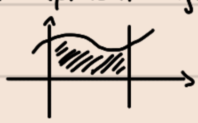
↳ je pa težje izračunljiva

$$T = \sqrt{2m}\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\varkappa(\vartheta)}}$$



↳ spet je v imenovalcu korenska funkcija

Uporabimo trapezno aproksimacijo: $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\varkappa(\vartheta)}} = \pi\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa(\vartheta=0)}}+\frac{1}{\sqrt{\varkappa(\vartheta=\pi)}}\right)$



$$\Rightarrow T \doteq \sqrt{\frac{m}{2}}\,\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa(a)}}+\frac{1}{\sqrt{\varkappa(b)}}\right)$$ ... Libracijska aproksimacija periode

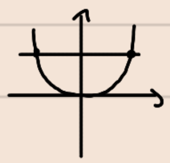
če je funkcija simetrična se poenostavi $T = \pi\sqrt{2m}\,\frac{1}{\sqrt{\varkappa(a)}}$

$$\varkappa(x) = \frac{E_0 - U(x)}{(b-x)(x-a)} \Rightarrow \varkappa(a) = \lim_{x\to a}\varkappa(x) = \frac{-U'(a)}{b-a}$$

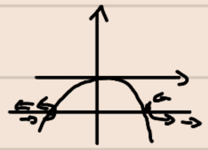
L'HOSPITAL (odvajam $\varkappa(x)$)

Primer: Duffingov oscilator

$U = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$; $\alpha,\beta>0$:

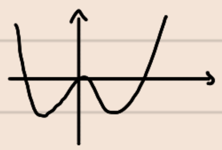


; $\beta>0$, $\alpha<0$:



vsa gibanja so neomejena

$\beta>0$, $\alpha<0$

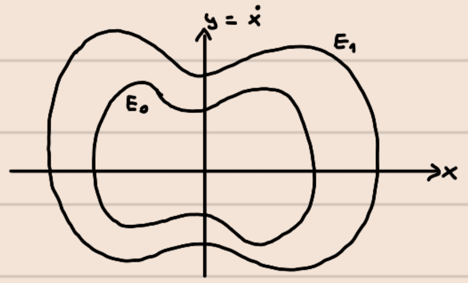


; $\beta<0$, $\alpha>0$

Ko računamo libr. aproksimacijo moramo poiskati presečišče energijske nivojnice s potencialom, torej ničle funkcije

↳ nato potrebujemo $x(a)$. Torej je bolj zahtevna, vendar je bolj natančna

FAZNI PORTRET



$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0 \Rightarrow y = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

graf seka os x, ko je $E_0 = U(x) \Leftrightarrow \dot{x} = 0$

$$m\ddot{x} = F = -\frac{dU}{dx}$$

Graf seka os x pod pravim kotom

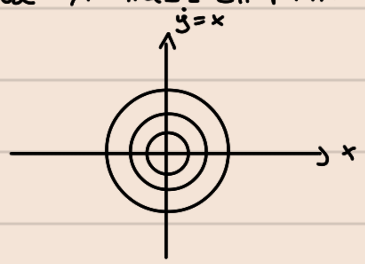
PRIMER: Harmonični oscilator

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2}_{\text{elipsa}} = E_0 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E_0}{k}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2E_0}{m}}\right)^2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2E_0}{k}},\ b = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$$

Ploščina faznega portreta: $A = \pi ab = 2\pi\sqrt{\frac{1}{mk}}\,E_0$

odprej vemo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{m}T E_0$ → $\boxed{\frac{\partial A}{\partial E_0} = \frac{1}{m}T}$



Naj bo A ploščina faznega portreta periodičnega gibanja. Potem $\frac{dA}{dE_0} = \frac{1}{m}T$

Gibanje je izokronično natanko tedaj, ko je $\frac{\partial A}{\partial E_0}$ konstanta, oz. A je je afina funkcija energije: $A = \alpha E_0 + \beta$

PREMOČRTNO GIBANJE POD VPLIVOM NEKONSERVATIVNE SILE

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\frac{dU}{dx}}_{\text{konservativna sila, ki ji pripada potencial}} + \left(-\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}g(\dot{x})\right) \quad /\cdot\dot{x}$$

nekonservativna sila (torej odvisna od hitrosti) $\qquad g(\dot{x}) > 0$

$-\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ je nasprotna smer gibanja

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dU}{dx} = -\frac{\dot{x}^2}{|\dot{x}|}g(\dot{x}) = -|\dot{x}|g(\dot{x})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)}\right) = -|\dot{x}|g(\dot{x})$$

$$\frac{dE}{dt} = -\underbrace{|\dot{x}|g(\dot{x})}_{6xos<0} < 0$$

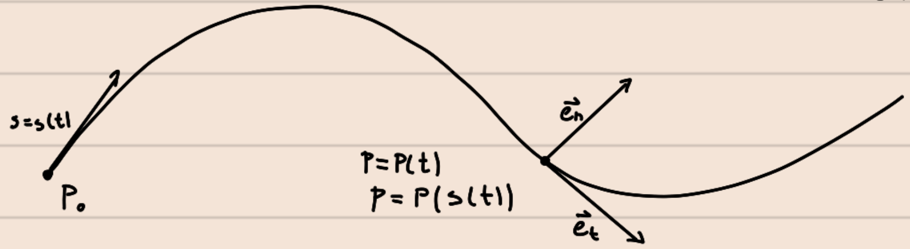
$\frac{dE}{dt}$ — sprememba energije

$\Rightarrow$ E monotono pada !

Tipični primer: dušeno nihanje $m\ddot{x} = -kx - \underbrace{b\dot{x}}_{\text{linearno dušenje}} + \underbrace{A_0\sin\omega t}_{\text{vzbujanje}}$ (na račun tega ohranjamo gibanje)

GIBANJE PO KRIVULJI (krivulja gibanja je dana vnaprej!)

↳ Primer: matematično nihalo



Položaj točke lahko določimo z ločno dolžino

$s=s(t)$ ... določa gibanje po krivulji

$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec v = \dot s \vec e_t \Rightarrow v = |\vec v| = |\dot s|$

$\vec r = \vec r(s)$, $\vec e_t$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot s \vec e_t + \dot s \frac{d\vec e_t}{ds} \dot s$

$\kappa \vec e_n$; $\kappa = \frac{1}{R}$; R... krivinski polmer

$\vec a = \underbrace{\ddot s e_t}_{\text{tangentni pospešek}} + \underbrace{\kappa \dot s^2}_{\text{normalni pospešek}}$

$\vec a$ leži v pritisnjeni ravnini in kaže v smer zavijanja

$\vec a \cdot \vec v = \dot s \ddot s$

Newtonova enačba: $m(\ddot s \vec e_t + \kappa \dot s^2 \vec e_n) = \vec F_r = \vec F + \vec S$

aktivne sile; sila vezi (veže gibanje točke na krivuljo)

Gibanje po gladki krivulji ⇔ $\vec S \cdot \vec e_t = 0$ oz. $\vec S \perp \vec e_t$ $\quad A(\vec S) = \int_{P_1}^{P_2} \vec S \cdot d\vec r = \int_{t_1}^{t_2} \vec S \dot s \vec e_t \, dt = 0$ sila vezi je pravokotna na tangento

Sila vezi je idealna, če je $\vec S \perp \vec e_t$ ⇔ delo sile vezi je enako nič

$\vec e_b = \vec e_t \times \vec e_n$

Coulombov zakon trenja: $\vec S = S_1 \vec e_t + S_2 \vec e_n + S_3 \vec e_b$; $S_1 = S_1(S_2, S_3)$

Splošno: $m\vec a = \vec F + \vec S \; / \cdot \vec e_t \; / \cdot \vec e_n \; / \cdot \vec e_b$

$\Rightarrow m\ddot s = \vec F \vec e_t + \vec S \cdot \vec e_t$

$\Rightarrow m\kappa \dot s^2 = \vec F \cdot \vec e_n + \vec S \vec e_n$

neznanki S_1, S_2 (težko rešljivo)

$\Rightarrow 0 = \vec F \vec e_b + \vec S \cdot \vec e_b \Rightarrow \vec S \cdot \vec e_b = \vec F \cdot \vec e_b$

Če se gibljemo po gladki krivulji se enačba poenostavi: $m\ddot s = \vec F \vec e_t$

↳ Gibanje po gladki krivulji je reduciabilno na premočrtno gibanje v konfiguracijskem prostoru ločne dolžine

Sedaj nas zanima, ali je $m\ddot s = \underbrace{\vec F \cdot \vec e_t}$

konservativna?

$\vec F = -\text{grad}\, U(\vec r)$; Ali je tudi $\vec F \vec e_t$ potencialna? DA

$\frac{dU}{ds} = \frac{d}{ds}(U(\vec r(s)) = \text{grad}\, U \frac{d\vec r}{ds}$

$\vec F \vec e_t = -\text{grad}\, U(\vec r(s)) \cdot \frac{d\vec r}{ds} = -\frac{dU}{ds}$

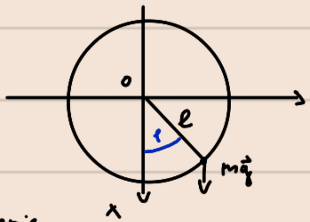
$\Rightarrow m\ddot s = -\frac{dU}{ds}$

↓ na ta način lahko uporabimo teorijo

premočrtnega gibanja po gladki krivulji

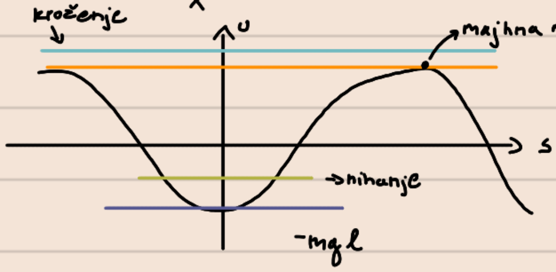
(gibanje po ludki je pod vplivom konservativne sile integrabilno)

Primer: matematično nihalo (gibanje po gladki krožnici pod vplivom sile teže)



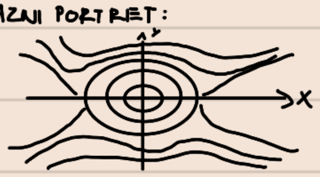
$s = l\varphi$

$U = U(s)$? $U = -mgx = -mgl\cos\varphi = -mgl\cos\left(\frac{s}{l}\right)$



majhna motnja jo prevrže levo ali desno (do te točke potuje neskončno dolgo, jo ne doseže)

FAZNI PORTRET:

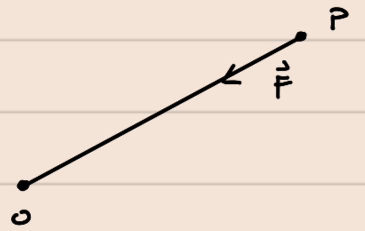


$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)$

popolni eliptični integral prve vrste

GIBANJE V POLJU CENTRALNE SILE (npr. gravitacijska sila, coulombova sila, sila vzmeti)

DEF: Sila $\vec{F}$ je centralna, če obstaja točka O (center sile), tako da je $\vec{F} = \underbrace{f(|P-O|)}_{\text{odvisno od razdalje}} \frac{P-O}{|P-O|} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\vec{e}_r$



$\overbrace{f(|P-O|)}^{f(r)}$ je zvezna funkcija razdalje točke P do O.

TRDITEV: Centralna sila je konservativna

Torej: Sila je centralna, če je njena velikost odvisna le od razdalje telesa r od koordinatnega izhodišča in je usmerjena v smeri premice, ki ju povezuje

Pri gibanju v polju centralnih sil je vrtilna količina $\vec{\ell}(O,P)$ konstantna.

Vrtilna količina je vektorska količina, ki jo izračunamo kot vek. produkt ročice $\vec{r}$ in gib. količine $\vec{G}$.

$\vec{\ell}(P) = (P-O)\times m\dot{\vec{r}} = \vec{r}\times m\vec{v}$; velja $\dot{\vec{\ell}} = \vec{0}$

IZREK: Gibanje v polju centralne sile ima dve konstanti gibanja, energijo in vrtilno količino.

TRDITEV: Gibanje v polju centr. sile je RAVNINSKO! Točka se giblje v ravnini, ki gre skozi center sile in ima normalo v smeri vektorja vrtilne količine.

OPIS GIBANJA V POLARNEM KS.

$\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$, $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

PLOŠČINSKA HITROST: $\dot{\vec{A}} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,\vec{k}$ $\quad A = \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2$ $\quad c_0 = r^2\dot{\varphi}$ dvojna ploščinska hitrost , $\ell = mc_0$ (vrtilna količina)

TRDITEV: Ploščinska hitrost je konstantna

KEPLERJEVI ZAKONI

1. Planeti se gibljejo okrog sonca po elipsah s soncem v gorišču elipse
2. Radij vektor od sonca do planeta v enakih trenutkih opiše enako ploščino = ploščinska hitrost je konstantna
3. Kvadrat periode planeta okrog sonca je sorazmeren kubu večje polosi elipse $(T^2 = ka^3)$

TRDITEV: Obodni pospešek je enak nič $\Leftrightarrow$ ploščinska hitrost je konstantna

BINETOVA FORMULA: $a_r = -c_0^2u^2(u + u'')$, $u = \frac{1}{r}$ (kadar poznamo tir)

FORMULA ZA ELIPSO V POL. KOORDINATAH: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $\quad\varepsilon$... ekscentričnost elipse $(0 \leq \varepsilon < 1)$

p... gorišični parameter

TRDITEV: če je tir elipsa, je radialni pospešek obratno sorazmeren s kvadratom oddaljenosti

$$a_r = -\frac{c_0^2}{p}\frac{1}{r^2}$$

vrtenje zemlje okrog sonca: $\vec{F} = \varkappa \frac{mM}{r^2}\underbrace{(-\vec{e}_r)}_{\text{privlačna sila}}$

$$m\vec{a} = m a_r \vec{e}_r = -m\cdot\frac{c_0^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \varkappa M = \frac{c_0^2}{p}$$

TRDITEV: kvocient $\frac{c_0^2}{p}$ je za vse planete v osončju enak

REDUKCIJA NA PREMOČRTNO GIBANJE

$$E_0 = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{c_0^2}{r^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)}_{U(r)} \qquad r = r(t)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Rightarrow v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\frac{c_0^2}{r^4}$$

$$c_0 = r^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c_0}{r^2}, \quad \ell = mc_0$$

$\Rightarrow$ EFEKTIVNI POTENCIAL: $U(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$

vemo: $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$, $\dot{\varphi} = \frac{c_0}{r^2} \Rightarrow \varphi = \int_{t_0}^{t}\frac{c_0}{r^2}\,dt + \varphi(t=t_0)$ izraziš $\dot{r}$ iz te enačbe

želimo tir: $r = r(\varphi)$ kako bi ga določili?

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{c_0}{r^2} \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U)} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{c_0}{r^2} \quad /\int$$

$$\pm\int d\varphi = dr\,\frac{c_0}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(E_0-U)}} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm\frac{\ell}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - U}}$$

dobili smo $\varphi = \varphi(r)$ $\Rightarrow$ obrnemo, dobimo $r = r(\varphi)$

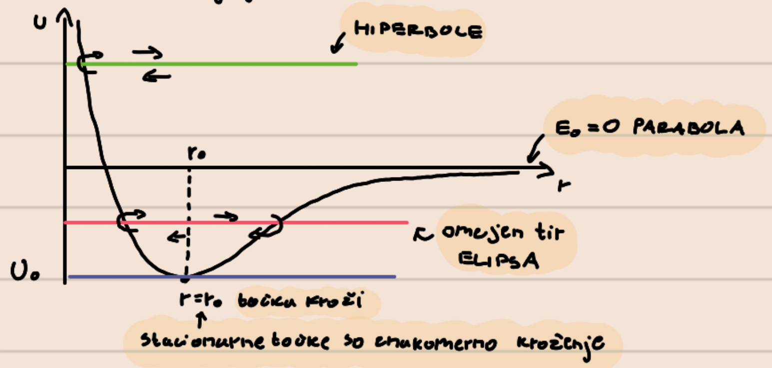
TIR PRI GIBANJU V POLJU CENTRALNE SILE

sedaj lahko izvedemo kvalitativno analizo gibanja

PRIMER: Gibanje v polju gravitacijske sile

$$\vec{F} = -\frac{\varkappa mM}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\gamma}{r^2}\vec{e}_r = -f(r)\vec{e}_r \Rightarrow \underset{\text{potencial}}{V = -\frac{\gamma}{r}} \qquad U = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r}$$

ena između mas se giblje, druga je v centru sile



TIRGIBANJA: $\varphi - \varphi_0 =$ $\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - U}}$ $\gamma = \varkappa m M$

z nekaj računanja pridemo do: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0 + \pi/2)}$, $p = \frac{\ell^2}{m\gamma}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\gamma^2}}$

Pove katera stožnica je

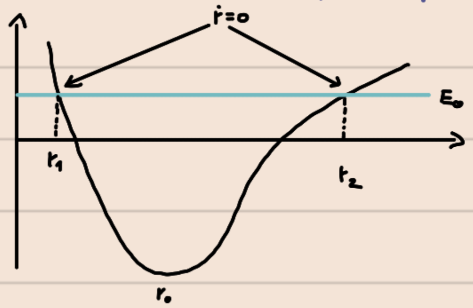
$\varepsilon = 0$ ($E_0 = U_0$) krožnica

$0 < \varepsilon < 1$ ($U_0 < E_0 < 0$) elipsa

$\varepsilon = 1$ ($E_0 = 0$) parabola

$\varepsilon > 1$ ($E_0 > 0$) hiperbola

KVALITATIVNA ANALIZA GIBANJA



r_1, r_2 apsidna radija

r_1... pericenter

r_2... apocenter

$$\varphi_+ - \varphi_1 = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - U}} \qquad \varphi_- - \varphi_0 = -\frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \qquad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_- = \varphi_+ - \varphi_1$$

TRDITEV: Tir je simetričen glede na absidni radij

$r = r(\varphi)$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(r(\varphi)\vec{e}_r\right) = \frac{dr}{d\varphi}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi}\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi = \underbrace{\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}}_{=0}\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi$$

TRDITEV: Tir se dotika apsidnih krožnic

TRDITEV: Tir je zaprt, če je $\frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - U(r)}} \in \mathbb{Q}$

TRDITEV: če tir ni zaprt, je gosta množica v kolobarju med apsidnima radijema

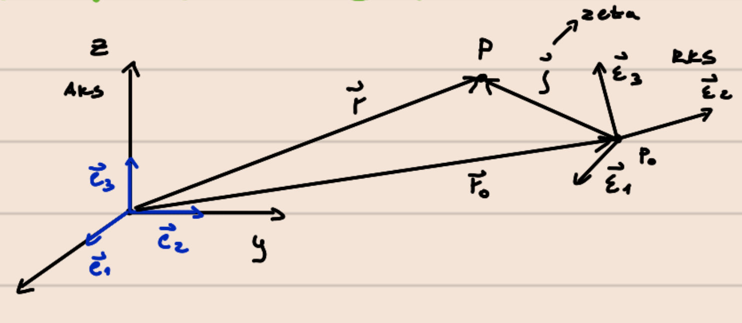
za gravitacijski potencial so vsi omejeni tiri zaprti. kateri potenciali imajo to lastnost?

$$U = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

HOOKOV POTENCIAL: $V = \frac{1}{2}kr^2$, $k > 0$

BERTRANDOV IZREK: Edina potenciala za katera so vsi omejeni tiri zaprti sta Hookov in gravitacijski potencial

RELATIVNO GIBANJE



AKS... absolutni koordinatni sistem

RKS... relativni

$\vec{\rho} = P - P_0 = \overrightarrow{P_0P}$

$\vec{\varepsilon}_i$ ... bazni vektorji RKS

$r_0 = \vec{r}_0(t)$

$\vec{\varepsilon}_i$ so zarotirane osi $\vec{e}_i$: $\vec{\varepsilon}_i = Q\vec{e}_i$; $Q = Q(t)$ je rotacija $\Rightarrow$ $\vec{\varepsilon}_i = \vec{\varepsilon}_i(t)$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$ $\quad /'$

hitrost izhodišča RKS gledena AKS (TRANSLATORNA) hitrost

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}} = \vec{v}_0 + (\rho_i \vec{\varepsilon}_i)^{\cdot} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\rho}_i \vec{\varepsilon}_i + \rho_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i$ $\qquad$ $\vec{\rho} = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \vec{\varepsilon}_i = \rho_i \vec{\varepsilon}_i$

vektor absolutne hitrosti

relativna hitrost (hitrost, ki jo izmeri relativni opazovalec (ker vidi svojo bazo kot fiksno bazo))

ROTACIJSKA HITROST

$\vec{r}$; $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ vektor hitrosti, ki ga vidi opazovalec v AKS

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

TRDITEV: obstaja vektor $\vec{\omega}$, tako da je $\dot{\vec{\varepsilon}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i$. Vektorju $\vec{\omega}$ pravimo vektor kotne hitrosti.

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rel} + \rho_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rel} + \rho_i \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}_{rel}$

hitrost točke $\qquad$ hitrost izhodišča RKS $\qquad$ rotacijska hitrost

TRDITEV: vektor kotne hitrosti rotacije Q za kot $\varphi = \varphi(t)$ okrog stalne osi $\vec{e}$ je $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$ $\qquad$ $R = Q(\vec{e}, \varphi)$

za nestalno os $\vec{e} = \vec{e}(t)$ pa velja: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e} + \sin\varphi\,\dot{\vec{e}} + (1-\cos\varphi)\,\vec{e} \times \dot{\vec{e}}$ $\qquad$ $\varphi = \varphi(t)$

$\dot{\vec{\rho}} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

Pospešek: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + (\dot{\vec{v}}_{rel})$

$\dot{\vec{v}}_0 = \vec{a}_0$ pospešek izhodišča RKS gledena AKS $\qquad$ $(\dot{\vec{v}}_{rel}) = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$

$\vec{\rho} = \vec{v}_{rel} \Rightarrow \vec{\rho} = \rho_i \vec{\varepsilon}_i$

$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\rho}_i \vec{\varepsilon}_i + \rho_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i = \vec{v}_{rel} + \rho_i \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i =$

$= \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

eulerjev posp. $\qquad$ rel. posp.

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$ $\qquad$ $\vec{a}_{rel} = \ddot{\rho}_i \vec{\varepsilon}_i$

absolutni opazovalec

centrifugalni pospešek

coriolisov pospešek

SISTEMSKI POSPEŠEK

$(\vec{v}_{rel})^{\cdot} \neq \vec{a}_{rel}$

$\vec{v}_{rel} = \dot{\rho}_i \vec{\varepsilon}_i$ $\quad /'$

$\dot{\vec{v}}_{rel} = \ddot{\rho}_i \vec{\varepsilon}_i + \dot{\rho}_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i = \vec{a}_{rel} + \dot{\rho}_i \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i =$

$= \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$

NEWTONOVA ENAČBA V RKS

AKS: inercialen... $m\vec{a} = \vec{F}$

FIKTIVNE SILE (rel. opazovalec jih opazi, abs. pa ne)

$$m\vec{a}_{rel} = \underbrace{\vec{F} - \overbrace{m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}}}_{\vec{F}_{rel}}$$

$m\vec{a}_{rel} = \vec{F}_{rel}$

$-m\vec{a}_0$ INERCIJSKA SILA TRANSLATORNEGA GIBANJA
$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\jmath}$ INERCIJSKA SILA ROTACIJE
$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\jmath})$ CENTRIPETALNA SILA
$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$ CORIOLISOVA SILA

SISTEM MATERIALNIH TOČK

$P_i\ ;\ i=1,\dots,N$

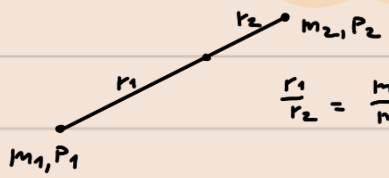
$m_i\ ;\ \vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i} = P_i - O$

masa posamezne točke

MASNO SREDIŠČE

krajevni vektor domasnega središča

$$\vec{r}_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\ ;\ m=\sum_{i=1}^{N} m_i$$



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ENAČBA GIBANJA MASNEGA SREDIŠČA

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} F_{ji}$$

rezultanta notranjih sil: sila P_j na P_i

rezultanta sil, ki delujejo na i-to točko

rezultanta zunanjih sil

$\vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ji}(P_j, P_i)$

Funkcija položaja P_j in P_i

$\vec{F}_{ii} = 0$

$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i,j}^{N}\vec{F}_{ji}$$

$$m\vec{a}_* = \vec{F} + \underbrace{\sum_{i,j}^{N}\vec{F}_{ji}}_{0}$$

rezultanta zunanjih sil

$$\vec{v}_* = \dot{\vec{r}}_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{a}_* = \ddot{\vec{r}}_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

$m\vec{a}_* = \vec{F}$ ... enačba gibanja masnega središča

VRTILNA KOLIČINA

$$\vec{\ell}_i = \vec{\ell}_i(O) = \overrightarrow{OP_i}\times\overbrace{m_i\vec{v}_i}^{\text{gib. količina}} = (P_i - O)\times m_i\dot{P}_i$$

vrt. kol. posamezne točke

odvisna od pola

krajevni vektor od pola do točke (ročica)

$$\vec{L} = \vec{L}(O) = \sum_{i=1}^{N}\vec{\ell}(O, P_i)$$

vrt. kol. sistema

odvisna od pola

IZREK O VRTILNI KOLIČINI

Newtonova enačba: $\vec{OP_i}\times \,/\; m_i\ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_{j=1}^N \vec F_{ji}$

$$\sum_{i=1}^N \vec{OP_i}\times m_i\ddot{\vec r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{OP_i}\times\vec F_i + \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \vec{OP_i}\times \vec F_{ji}}_{\text{rezultanta navorov notranjih sil } \vec N_n(O)}$$

$\vec{OP_i} = \vec r_i$ $\qquad \underbrace{\vec r_i \times \vec F_i}_{\text{ročica} \times \text{sila (navor)}}$

$$\sum_{i=1}^N \vec{OP_i}\times\vec F_i = \vec N(O) \;\ldots \text{ rezultanta navorov zunanjih sil}$$

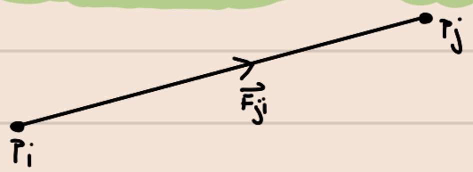
pol

$$\frac{d}{dt}\vec L = \sum_{i=1}^N \underbrace{(\vec{OP_i}\times m_i\dot{\vec r}_i)}_{\underbrace{\dot{\vec r}_i\times m_i\dot{\vec r}_i}_{0} + \vec{OP_i}\times m_i\ddot{\vec r}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{OP_i}\times m_i\ddot{\vec r}_i = \vec N + \vec N_n$$

izrek o vrtilni količini

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec L = \vec N + \vec N_n$$

DEF: Sila je centralna, če je $\vec F_{ji}(P_i,P_j) = F_{ji}(|P_i-P_j|)\dfrac{P_i-P_j}{|P_i-P_j|}$ $\qquad P_i - P_j = \vec{P_jP_i}$



TRDITEV: Če so vse notranje sile centralne, je navor notranjih sil enak nič

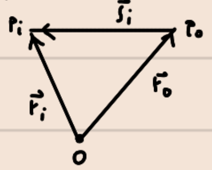
$$\vec N_n(O) = \sum_{i,j}\vec r_i\times\vec F_{ji} = \frac12\Big(\sum_{i,j}^N \vec r_i\times \vec F_{ji} + \underbrace{\sum_{i,j}^N \vec r_i \times \vec F_{j,i}}_{\sum_{j,i}^N \vec r_j\times\vec F_{ij} = -\sum_{j,i}^N \vec r_j\times\vec F_{ji}}\Big) = \frac12\sum_{i,j}^N(\vec r_i-\vec r_j)\times\vec F_{ji} = 0$$

↓ sta vzporedna

IZREK O VRTILNI KOLIČINI: Če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine sistema materialnih točk s polom v fiksni točki enak rezultanti navorov zunanjih sil: $\dfrac{d\vec L(O)}{dt} = \vec N(O)$

kaj pa, če točka ni fiksna?

$$\vec L(P_0) = \sum_{i=1}^N (P_i-P_0)\times m_i\vec v_i = \sum_{i=1}^N \vec r_i\times m_i\vec v_i - \sum_{i=1}^N \vec r_0\times m_i\vec v_i = \vec L(O) - \vec r_0\times\sum_{i=1}^N m_i\vec v_i = \vec L(O) - \vec r_0\times m\vec v_*$$



$r_* = \frac1m\sum_{i=1}^N m_i \vec r_i \;/'$

$v_* = \frac1m \sum_{i=1}^N m_i\vec v_i$

$$\frac{d\vec L(P_0)}{dt} = \vec N(P_0) - \vec v_0\times m\vec v_*$$

če $P_0 = P_* \Rightarrow \vec v_0 \parallel \vec v_* \Rightarrow$ drugi člen je 0

⇓

TRDITEV: Če je pol masno središče, izrek o vrtilni količini ohrani svojo obliko: $\dfrac{dL(P_*)}{dt} = \vec N(P_*)$

VRTILNA KOLIČINA RELATIVNEGA GIBANJA

$$\vec{\mathcal{L}}(P_0) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_0 = \vec{L}(P_0) - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i\right) \times \vec{v}_0 = \vec{L}(P_0) - (\vec{r}_* - \vec{r}_0) \times m \vec{v}_0$$

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0 \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_0 = m\vec{r}_* - m\vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}(P_0) = \vec{L}(P_0) - (\vec{r}_* - \vec{r}_0) \times m\vec{v}_0$$

Posledica: $\vec{\mathcal{L}}(P_*) = \vec{L}(P_*) \Rightarrow \dfrac{d\vec{\mathcal{L}}(P_*)}{dt} = \vec{N}(P_*)$ in $\dfrac{d\vec{\mathcal{L}}(P_0)}{dt} = \vec{N}(P_0) - (\vec{r}_* - \vec{r}_0) \times m\vec{a}_0$

1) $\vec{r}_0 = \vec{r}_*$ ($P_0 = P_*$) če je pol masno središče

2) $\vec{a}_0 = \vec{0}$ (Pol se giblje premočrtno s konst. hitrostjo)

IZREK O ENERGIJI

Če so zunanje sile konservativne in so notranje sile centralne ($\vec{F}_{ji}$ so zvezne funkcije) velja izrek o energiji.

$$T + U + U_n = E_0$$

Dekompozicija kinetične energije:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \Rightarrow \text{z nekaj računanja } T = \underbrace{\frac{1}{2} m |\vec{v}_*|^2}_{\text{kin. energija masnega središča}} + \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2}^{\text{kin. energija relativnega gibanja } \mathcal{T}(P_*)}$$

TOGO TELO

KINEMATIKA TOGEGA GIBANJA

Togo gibanje: ohranja se razdalja med vsakima dvema točkama

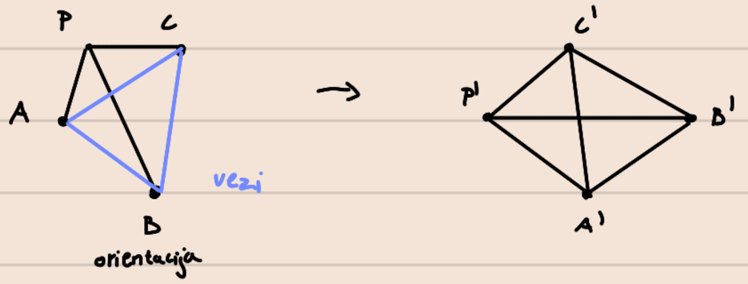
$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad \text{(togo gibanje ohranja kote)}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

Torej: gibanje sistema materialnih točk P_i, $i = 1, \dots, N$ je togo, če se razdalja med točkami ohranja

↳ $|\vec{r}_{ij}| = |P_i - P_j| = \text{konst}!$

Sistem točk je tog ⟺ edini način gibanja je togo gibanje

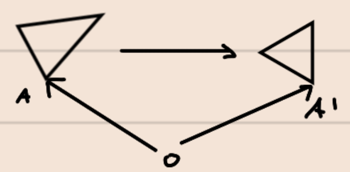


- Dovolj je poznati gibanje treh nekolinearnih točk
- kinematiko togega telesa opišemo s 6 parametri (9 koordinat − 3 vezi)

kompon. vektorja $\vec{d}$
↑
3 − translacija, 3 − rotacija

translacija + rotacija (okrog A' npr.)

$A \mapsto A'$



$\vec{OA'} = \vec{d} + \vec{OA}$

$\vec{OB'} = \vec{d} + \vec{OB}$

$\vec{OC'} = \vec{d} + \vec{OC}$

translacija (s premikom masnega središča)

rotacija (z vrtilno količino)

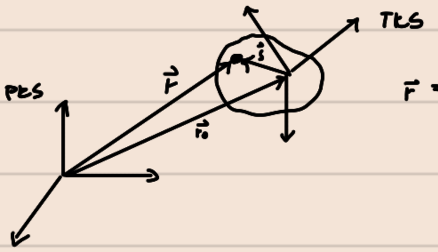
• togo gibanje / togi premik je sestavljen iz translacije in rotacije

opis togega gibanja z relativnim gibanjem:

(hkrati s telesom se giblje TKS - telesni KS)

RKS = TKS se giblje hkrati s togim telesom

AKS = prostorski KS (v njem opazujemo gibanje togega telesa) PKS



$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$

$\vec{\rho}$ je v TKS neodvisen od časa (točke telesa v TKS mirujejo) $\Rightarrow$ $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$, $\vec{a}_{rel} = \vec{0}$

Položaj v TKS je neodvisen od časa!

Dinamične enačbe lahko zapišemo v PKS.

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ — rotacijska hitrost ($\vec{\omega}$), translatorna hitrost ($\vec{v}_0$)

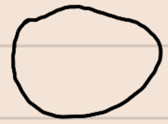
$\vec{\varepsilon}_i = Q\,\vec{e}_i$ — baza TKS ($\vec{\varepsilon}_i$), rotacija (Q), baza PKS ($\vec{e}_i$)

$\vec{e}_i = \vec{\varepsilon}_i(t)$

$\vec{\rho} = \rho_i \vec{\varepsilon}_i$; $\dot{\rho}_i = 0$

Posplošitev sistema materialnih točk na kontinuum mnogo točk:

P_i, m_i ← sistem mat. točk

telo:  poznam položaj telesa v nekem referenčnem času in dam točkam telesa oznako položaja v tem času

$$V = \int_B dV = \int_{B(0)} dV$$

(ohranjajo se razdalje med točkami, in tudi volumen

$B' = B(t)$; $B = B(0)$ ↓ nek položaj v prostoru označim z njegovim položajem, ki je bil v referenčnem času $t = 0$

$dm = \rho\, dV$; ρ gostota, $\rho > 0$

$$m(B) = \int_B \rho\, dV = \int_{B(0)} \rho\, dV$$

masa se tekom gibanja ne spreminja

$$\vec{r}_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Rightarrow r_* = \frac{1}{m}\int_{B(t)} \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\int_{B(t)} \vec{r}\rho\, dV$$

krajevni vektor masnega središča

$$v_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$a_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_* = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_{B(t)} \vec{r}\rho\, dV = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_{B(0)} (\vec{r}_0 + Q\vec{\eta})\hat{\rho}(\eta)\, dV(\vec{\eta})$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} = \vec{r}_0 + Q\vec{\eta}$

$\vec{\rho} = \rho_i \vec{\varepsilon}_i \Rightarrow \vec{\eta} = \rho_i \vec{e}_i$ ← eta $\hat{\rho}(\vec{\eta}) = \rho(\vec{r})$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_* = \frac{1}{m}\int_{B(0)} (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm(\vec{\eta}) =$$

$$= \frac{1}{m}\int_{B(t)} (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = \frac{1}{m}\int_{B(t)} \vec{v}\, dm$$

$$\Rightarrow \vec{a}_* = \frac{1}{m}\int_{B(t)} \ddot{\vec{r}}\, dm$$

VRTILNA KOLIČINA

$\vec{\mathcal{L}} = J\vec{\omega}$ $\quad$ $\vec{\mathcal{L}}(P_*) = \int_B \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}\, dm = \int_B \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = \int_B [(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\rho}\cdot\vec{\omega})\vec{\rho}\,]\, dm = \underline{\underline{J}}(P_*)\,\vec{\omega}$

vrtilna kol. relat. gibanja $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m\dot{\vec{\rho}}_i$ $\quad$ $(\vec{\rho} \otimes \vec{\rho})\vec{\omega}$ $\quad$ vztrajnosti tenzor

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$ $\quad$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \underset{\uparrow}{\underline{0}}$

ta člen je 0, ker se ne giblje skupaj s telesom

DEF: Tenzorski produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je linearna preslikava $\vec{a} \otimes \vec{b}$, ki poljubni vektor $\vec{c}$ preslika v $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.

$$\vec{c} \mapsto (\vec{a} \otimes \vec{b})\,\vec{c} = (b\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$$

TRDITEV: $A \in \mathcal{L}in(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

i) $(A\vec{a}) \otimes \vec{b} = A \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b})$

ii)