TP N°8 : Résolution des équations non linéaires de type f(x) = 0 par la méthode de newton

Travail de :

Belfodil Adnane
Medjkoune Nawel

TABLE DES MATIERES

I. RAPPELS DES NOTIONS ET DE RESULTAT THEORIQUES

1. DEFINITION : ZERO D'UNE FONCTION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, une valeur $r \in \mathbb{R}$ est dite **zéro** ou **racine** de f ssi $f(r) = 0$

2. OBJECTIVE :

Le but est de trouver pour une **précision** ε une valeur approché r^* de r (une racine d'une fonction f) vérifiant : $|r^* - r| \leq \varepsilon$

3. METHODE DU POINT FIXE

3.1. DEFINITION : POINT FIXE

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $r \in \mathbb{R}$ est dit point fixe de g ssi $g(r) = r$

3.2. IDEE DE METHODE DE POINT FIXE :

Pour résoudre une équation non linéaire de la forme $f(x) = 0$, on transforme le problème en un problème équivalent de point fixe : $g(x) = x$, puis on construit une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :

1. r_0 est une valeur initiale choisit **convenablement**
2. $r_{n+1} = g(r_n), \forall n \in \mathbb{N}$

4. METHODE DE NEWTON

4.1. METHODE :

Soit l'équation $f(x) = 0$ et r un zéro de f (une racine simple), on suppose que f dérivable et $f'(x) \neq 0$ sur I voisinage de r on définit :

1. Choix de g : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ***(1)***

2. Méthode : ***(2)***

2.1. $r_0$une valeur initiale proche de r

2.2. $r_{n+1} = g(r_n), \forall n \in \mathbb{N}$

4.2. CONCLUSIONS :

1. La méthode de newton est une méthode de point fixe, en effet :

$$f(r) = 0 \iff g(r) = r - \frac{0}{f'(r)} = r$$

2. Si f est de classe C^1 sur I un voisinage de r et f' dérivable alors

$$g'(r) = \frac{f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

D'où : $g'(r) = 0$ ceci nous ramène à déduire que :

2.1. Le point fixe r est attractif i.e. $\exists I\ un\ voisinage\ de\ r$ où pour tout r_0 choisi de I la suite « ***(2) page 3*** »converge

2.2. La méthode au minimum d'ordre de convergence égal à 2

4.3. THEOREME DE NEWTON (LOCAL)

Soit = $[r-\alpha, r+\alpha]$, on suppose que :

1. $f \in C^2(I)$
2. $f(r) = 0$
3. $f'(x) \neq 0$ sur I

Alors $\forall r_0 \in]r-\alpha, r+\alpha[$, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans « ***(2) page 3*** » est convergente vers l'unique point fixe de la fonction g définie dans « ***(1) page 3*** »

<u>Remarque 2 :</u>

Ce théorème assure que la méthode de newton converge si les conditions du théorème ci-dessus sont vérifiés et pour un bon choix de la valeur initiale r_0

4.4. TEST D'ARRET

On appelle test d'arrêt des incréments pour une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour une précision ε : $|r_{n+1} - r_n| < \varepsilon$.

Ce test peut être utilisé comme test d'arrêt pour la méthode de newton (c'est-à-dire on peut arrêter l'algorithme dès que la condition est vérifié) parceque on a $lim_n \frac{|r_{n+1}-r_n|}{|r_n - r|} = 1$ avec $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie dans « ***(2) page 3*** »

II. ALGORITHME DE LA METHODE DE NEWTON

La fonction **RacineNewton** qu'on va écrire son algorithme dans ce qui vas suivre a pour but de donner une valeur approximative d'un **zéro** d'une fonction $\boldsymbol{f}$ à partir d'une valeur initiale $r_0$choisit **convenablement** en utilisant la méthode de newton.

Paramètre d'entrée de la fonction :

- $\boldsymbol{fonction}$ **:** la fonction qu'on veut calculer sa racine approximative
- $\boldsymbol{r_0}$: valeur initiale de la suite définie par la méthode de newton cité dans « *(2) page 3* »
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***:*** la précision qu'on souhaite avoir qui est utilisée comme **critère d'arrêt**
- $\boldsymbol{itermax}$: le nombre d'itération maximale toléré qui est aussi utilisé comme **critère d'arrêt**

Sorties de la fonction :

- $\boldsymbol{r}$ **:** la valeur approximative obtenue d'une racine de f obtenu après application de la méthode de newton
- $\boldsymbol{iter}$: le nombre d'itérations que l'algorithme a fait pour nous donner comme résultat $\boldsymbol{r}$

Algorithme :

Fonction RacineNewton (fonction : **Function**, r_0, ε , itermax : **entier**) : [r, iter : **entier**]

Var g : **Function**
    x, i, r : **entier**

Debut
$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
$r = r_0$
$i = 1$
Tantque ($i < itermax$ et $|g(r) - r| \geq \varepsilon$) faire
    Dtq
    $r = g(r)$
    $i = i + 1$
    Ftq
$r = g(r)$
$iter = i$
Retourner r, iter
Fin

III. CODE MATLAB REPRESENTANT LA FONCTION RACINENEWTON

Rappel :

Rappelons que la fonction permet de donner en résultat une racine approximative de f en prenant comme valeur initial r_0, il est a noté que si r_0 n'est pas bien choisit ou que f ne respecte pas les conditions cités dans **4.1.** la fonction ci-dessous ne donne pas des résultat correctes !

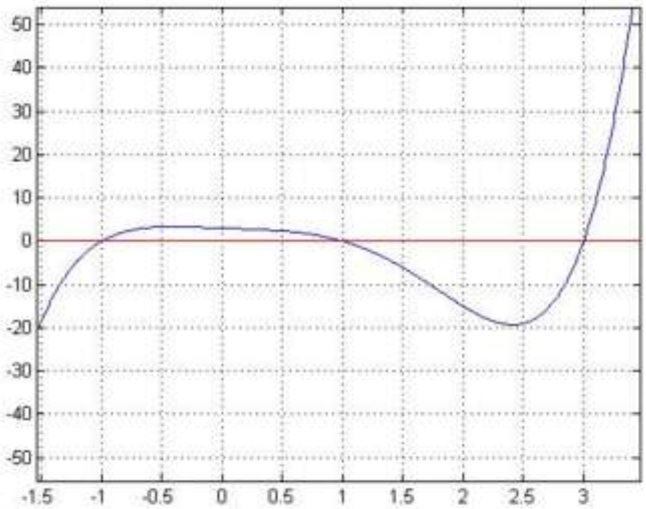
```
%Remarque : la fonction est introduite comme étant une chaine
de caractère en fonction de x %
function [ r ,iter] = RacineNewton(
fonction,r0,epsilon,itermax)
syms f fderiv g x %syms a pour but de définir les symboles qui
vont            être utilisés%
f(x) = sym(fonction); %sym permet de récupérer une fonction à
partir d'une chaine de caractère%
fderiv = diff(f(x)); %diff permet de dériver une fonction f
g(x) = x - f(x)/fderiv;
i=1;
r=r0;
while (i<itermax &&(abs(eval(g(r)) - r) >= epsilon))
    r=eval(g(r)); % eval permet d'évaluer la fonction pour une
valeur donné
    i=i+1;
end
r=eval(g(r));
iter=i;
syms f fderiv g x clear; %permet de supprimer de la mémoire
les symboles définient ci-dessus
end
```

IV. TESTS ET RESULTATS

Les deux exemples vont illustrer l'efficacité de la méthode de newton dans le cas où la fonction respecte les conditions cité dans **4.1.** Et r_0 est choisi **convenablement.**

EXEMPLE 1 :

Soit la fonction f définit comme suit : $f(x) = x^5 - 3x^4 - x + 3$, sa représentation graphique est représentée ci-dessous :



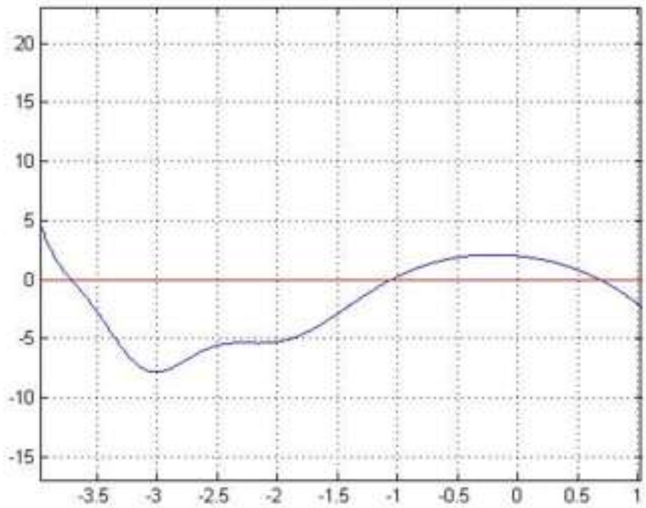
Après l'utilisation de la fonction RacineNewton sur le polynôme on a obtenu les résultats suivants : avec $\varepsilon = 0.001$ et $itermax = 20$

r_0	-0.7	0.8	4.8
r	-1	1	3
$nombre\ d'itération$	5	4	7

A noter les racines de f sont biens -1 , 1 et 3, cet exemple a pour but d'assurer la cohérence des résultats donné par la fonction RacineNewton et les vrais résultats

EXEMPLE 2 :

Soit la fonction f_2 définit comme suit : $f_2(x) = e^{-x} + cos(x^2) - 3x^2$, sa représentation graphique est représentée ci-dessous : avec $\varepsilon = 0.001$ et $itermax = 20$



On remarque que notre fonction f_2 a 3 racines, pour trouver des valeurs approximatives des zéros de f_2 on vas essayer de distinguer visuellement à partir du graph 3 valeurs approximatives des racines de f_2 qui vont servir de r_0 pour notre fonction.

Après l'utilisation dans MATLAB de notre fonction RacineNewton on a obtenu les résultats notes dans le tableau qui va suivre.

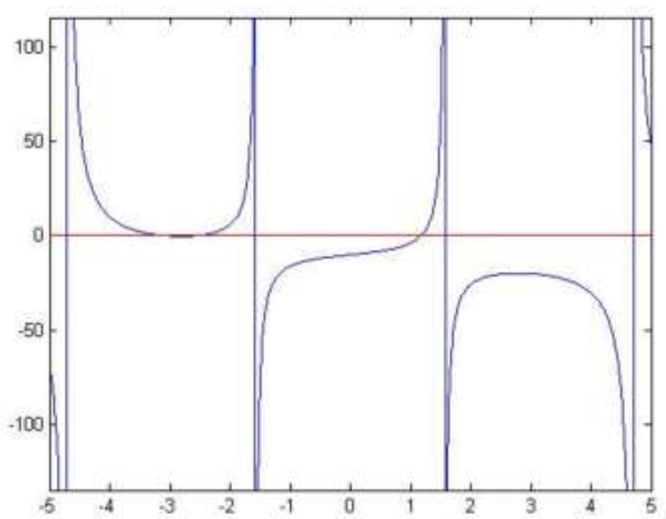
$\boldsymbol{r_0}$	$\mathbf{-3.75}$	$\mathbf{-1.1}$	$\mathbf{0.6}$
$\boldsymbol{r}$	-3.7136	-1.0503	0.6828
$\boldsymbol{nombre\ d'it\acute{e}ration}$	3	3	3
$\boldsymbol{f_2(r)}$	$-1.3641 * 10^{-4}$	$-7.7383 * 10^{-5}$	$-1.7138 * 10^{-4}$

Cela montre clairement qu'avec un choix convenable des valeurs initiales on peut aboutir à des résultats cohérents et convaincants.

EXEMPLE 3 :

A partir de cet exemple on va montrer qu'un choix **non convenables** de r_0 vas conduire à des résultats non cohérents ou à un grands nombre d'itérations en appliquant la méthode de Newton avant de pouvoir atteindre une des racines de la fonction.

Soit la fonction f_3 définit comme suit : $f_3(x) = 3.3\frac{x}{\cos(x)} - 10$, sa représentation graphique est représentée ci-dessous :



Ici le choix convenable de r_0 est nécessaire, par exemple si on choisit $r_0 = 4$ on aura en appliquant la fonction RacineNewton sur ce r_0 les résultats suivants :

$\boldsymbol{nombre\ d'itération}$	**20**	**30**	**100**	128
$\boldsymbol{r}$	-44.4936	-47.4410	-71.3184	-2.6061

On remarque ici que l'algorithme a réussie de trouver une des racines de f_3(***ce qui est assez étonnant***) mais cela après un grands nombre d'itérations, ainsi il est préférable de situer bien la racine avant d'appliquer la méthode de newton et cela pour réduire le coût de la méthode (nombre d'itérations)

En appliquant la méthode de newton sur $r_0 = 1$ on trouvera après **4 itérations** r=1.1732 qui est une racine de f_3

V. EXEMPLE PRATIQUE

La méthode de newton est utilisée pour résoudre numériquement les équations non linéaires de type $f(x) = 0$, on peut citer comme exemple l'utilisation de cette méthode dans la mécanique non linéaire 1D

Dans ces différents problèmes de mécaniques simplifiés, les équations d'équilibre sont analytiquement de la forme $F = r(u)$.
Avec des méthodes directes, nous aurons très rarement cette chance de trouver la solution exacte de ce problème, Il faut alors calculer numériquement les solutions de ces équations non linéaires.
En posant $f(u) = r(u) - F$ le problème de résolution des équations d'équilibre s'écrit :

Pour une force F donnée, trouver u tel que :

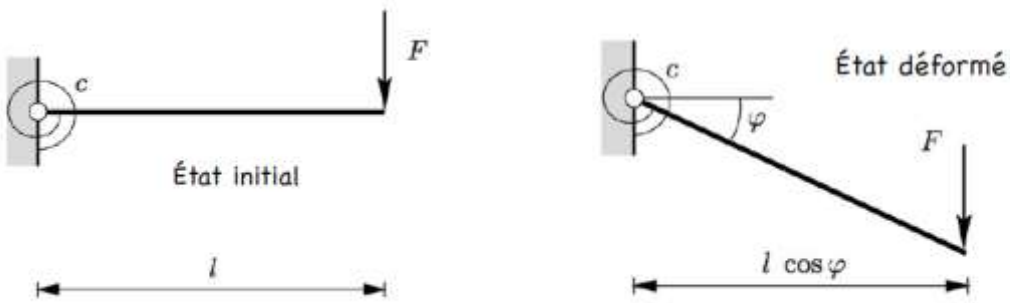
$$f(u) = r(u) - F = 0 \ (\mathbf{1})$$

Pour trouver alors une valeur approximative de u on utilise des méthodes itératives pour la résolution des équations non linéaires, on transforme alors l'équation **(1)** en un problème de point fixe puis on le résout par la méthode de newton

On peut citer à titre d'exemple le cas réel suivant:

POUTRE RIGIDE EN GRANDS DEPLACEMENTS :

On essaye de trouver la valeur de l'angle φ où le système mécanique trouve son équilibre :



L'équilibre des moments à l'articulation donne une relation non linéaire
Entre la force et la rotation de la poutre :

$$Fl\cos(\varphi) = c\,\varphi \ (\textit{Non linéarité géométrique})$$

La relation force-déplacement s'écrit simplement : $F = c/l \frac{\varphi}{\cos(\varphi)}$ qui est équivalente à $f(\varphi) = c/l \frac{\varphi}{\cos(\varphi)} - F = 0$, ce qui nous reste de faire est la rechercher du zéro de f que nous allons le calculer de manière numérique en utilisant la méthode de newton

EXERCICE ET SOLUTION :

EXERCICE :

Trouver φ pour lequel le système est en équilibre en posant $F = 10\ N$, $c = 33\ N.m$ et $l = 10\ m$, notons que l'étude sur le système a réussi de le borner et à donner que $\varphi \in I = [45°, 70°]$

Rappel : transformer les bornes en $radian$ avant de calculer φ_0

SOLUTION :

On a l'équation de l'équilibre est donné par $Fl\cos(\varphi) = c\,\varphi$,
On pose $f(\varphi) = c/l \frac{\varphi}{\cos(\varphi)} - F$, **A.N.** : $f(\varphi) = 3,3 \frac{\varphi}{\cos(\varphi)} - 10$ il nous reste maintenant de trouver une racine de f qui appartient à l'intervalle I, on utilise pour cela la méthode itérative de newton, ainsi en utilisant la fonction RacineNewton on trouve en prenant $\varphi_0 = 1\,rd \in I$ et après 4 itérations une valeur approximative de la racine de f qui est égal à : $\varphi = 1.1732\,rd \approx 67.219°$