# 数学：计数

青岛 数学

张若天 me@zrt.io

2018 年 6 月 10 日

清华大学 交叉信息研究院

大家好!

我是张若天。

今天讲一下数数相关工具。

大家好!

我是张若天。

今天讲一下数数相关工具。

数数，最重要的就是不重不漏。

# 推荐

- 图书:《具体数学》
- 图书:《组合数学》Richard
- 网站: oeis.org

# 目录

- 组合数相关
- 斯特林数相关
- 整数划分
- Burnside & Polya
- 生成函数、指数型生成函数

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个5334。

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个5334。

字母 a-f 按顺序入栈，但随时可以出栈，形成的出栈序列有种

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个5334。

字母 a-f 按顺序入栈，但随时可以出栈，形成的出栈序列有种132。

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个5334。

字母 a-f 按顺序入栈，但随时可以出栈，形成的出栈序列有种132。

将 2*2 的网格黑白染色，旋转不同构的染色方案有种

# Sample

从 5 名男士，6 名女士，2 名男孩与 4 名女孩中选择一男一女一男孩一女孩的方案数为240；选取一个人的方案数为17。

使用数字 0-9 每个恰一次共能产生个排列3628800，其中有个首位不为0。3265920

若有理数 m/n 是无限小数，则必然是无限循环小数。

10000 以内不能被 4,5,6 中任意一个数整除的自然数有个5334。

字母 a-f 按顺序入栈，但随时可以出栈，形成的出栈序列有种132。

将 2*2 的网格黑白染色，旋转不同构的染色方案有种6。

# 组合数相关

# 基本

加法原理

乘法原理

鸽笼原理 (抽屉原理)

# 排列

n 个元素的集合，写成一个序列的方式有 $A(n) = n!$ 或 $P(n) = n!$ 种。

# 排列

n 个元素的集合，写成一个序列的方式有 $A(n) = n!$ 或 $P(n) = n!$ 种。

乘法原理应用。

$0! = 1$

# 圆 (环) 排列

$n!/n = (n\text{-}1)!$

# 错位排列

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

# 多重集的全排列

多重集：元素可以重复的集合

# 多重集的全排列

多重集：元素可以重复的集合

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}$$

# 组合数

一个大小为 n 的集合，选出 m 个元素的方案数。$C(n, m)$ 也记作 $\binom{n}{m}$，其中 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$。

# 隔板法

n 相同的球，放到 m 个不同的盒子里。

- 每个盒子至少有一个球
- 盒子可以为空
- 每个盒子至少两个球

# 捆绑法

BZOJ 2729

$n$ 名男生，$m$ 名女生，2 名老师排成一行，老师和老师不能相邻，女生和女生不能相邻。

BZOJ 2729

n 名男生，m 名女生，2 名老师排成一行，老师和老师不能相邻，女生和女生不能相邻。

老师可以相邻数量 - 把两个老师捆绑起来的数量

# 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$$

# 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$$

练习：NOIP2011 d2t1

# Catalan 数

1，1，2，5，14，42，132...

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

对应的 n 个问题。

例子：

有 n 个 +1，n 个-1，每个前缀和都 >=0 的方案数。

# Catalan 数

1，1，2，5，14，42，132...

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

对应的 n 个问题。

例子：

有 n 个 +1，n 个-1，每个前缀和都 >=0 的方案数。

n 个左括号，n 个右括号，合法的括号序列数。

# Catalan 数

1，1，2，5，14，42，132...

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

对应的 n 个问题。

例子：

有 n 个 +1，n 个-1，每个前缀和都 >=0 的方案数。

n 个左括号，n 个右括号，合法的括号序列数。

n 个节点构成的二叉树数量。

# Catalan 数

1，1，2，5，14，42，132...

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

对应的 n 个问题。

例子：

有 n 个 +1，n 个-1，每个前缀和都 >=0 的方案数。

n 个左括号，n 个右括号，合法的括号序列数。

n 个节点构成的二叉树数量。

进栈次序是 1，2，3,...,n，出栈排列数。

# Catalan 数

1，1，2，5，14，42，132...

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

对应的 n 个问题。

例子：

有 n 个 +1，n 个-1，每个前缀和都 >=0 的方案数。

n 个左括号，n 个右括号，合法的括号序列数。

n 个节点构成的二叉树数量。

进栈次序是 1，2，3,...,n，出栈排列数。

正 n+1 边形的三角剖分数量。

# 组合数的计算

求 C(n,m) mod p，其中：

- $n, m \leq 10^3, p \leq 10^9$
- $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$
- $n, m \leq 10^{18}, p \leq 10^3$ 且 p 为素数
- $n, m \leq 10^9, p \leq 10^5$

## $n, m \leq 10^3, p \leq 10^9$

递推

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

除法?

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

除法？逆元

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

除法? 逆元 逆元不存在?

## $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

除法? 逆元 逆元不存在?

将 p 分解，单独考虑每个 $pi^{ai}$

# $n, m \leq 10^6, p \leq 10^9$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

除法? 逆元 逆元不存在?

将 p 分解，单独考虑每个 $pi^{ai}$

做除法

# 例题

求 $\binom{n}{m}$ 后 9 位。

# $n, m \leq 10^{18}, p \leq 10^3$

n,m 很大，p 很小

## $n, m \le 10^{18}, p \le 10^3$

n,m 很大，p 很小

Lucas 定理： $\binom{n}{m} = \binom{n \mod p}{m \mod p}\binom{n/p}{m/p} \mod p$

# $n, m \leq 10^{18}, p \leq 10^3$

n,m 很大，p 很小

Lucas 定理：$\binom{n}{m} = \binom{n \mod p}{m \mod p}\binom{n/p}{m/p} \mod p$

练习：BZOJ1951 古代猪文

# $n, m \leq 10^9, p \leq 10^5$

p 小了些，n，m 还是很大。

## $n, m \le 10^9, p \le 10^5$

p 小了些，n，m 还是很大。

review 之前做法.

# $n, m \le 10^9, p \le 10^5$

p 小了些，n，m 还是很大。

review 之前做法.

递归做除法?

# tyvj 1298 分苹果

n 个有区别的苹果，分到 3 个无区别的袋子中的方案数。

# tyvj 1298 分苹果

n 个有区别的苹果，分到 3 个无区别的袋子中的方案数。

$\frac{3^{n-1}+1}{2}$

# tyvj 1298 分苹果

n 个有区别的苹果，分到 3 个无区别的袋子中的方案数。

$\frac{3^{n-1}+1}{2}$

$\frac{3^n-3}{6}+1$

# 斯特林数相关

# 斯特林数

这个稍作了解即可。

- 第二类斯特林数
- 第一类斯特林数

# 第二类斯特林数

$S_2(n, k)$

n 个数的集合的划分为 k 个非空集合方法的数目。（n 个不同小球放到 m 个相同的盒子，每个盒子至少放一个球的种数）

$S_2(3, 2) = 3$,{{a}, {b, c}}, {{b}, {a, c}}, {{c}, {a, b}}

递推式:

$S_2(n, k) = kS_2(n-1, k) + S_2(n-1, k-1)$

把 $n$ 个不同的小球分到 $k$ 个可区分的盒子里且没有空盒子的划分个数?

把 n 个不同的小球分到 k 个可区分的盒子里且没有空盒子的划分个数?

k! $S_2(n, k)$

# 第一类斯特林数

$S_1(n, k)$

将 n 个不同元素排成 k 个非空环排列的方法数。

$S_1(n, k) = (n-1)S_1(n-1, k) + S_1(n-1, k-1)$

# 划分数 (整数划分)

# 整数划分问题

给两个整数 n 和 k。

问:

- 将 n 划分成若干正整数之和的划分数
- 将 n 划分成 k 个正整数之和的划分数
- 将 n 划分成最大数不超过 k 的划分数
- 将 n 划分成若干奇正整数之和的划分数
- 将 n 划分成若干不同整数之和的划分数

# 整数划分问题

给两个整数 n 和 k。

问:

- 将 n 划分成若干正整数之和的划分数 $\sum_{i=1}^{n} P(n,i)$
- 将 n 划分成 k 个正整数之和的划分数 $P(n,k)$
- 将 n 划分成最大数不超过 k 的划分数 $\sum_{i=1}^{k} P(n,i)$
- 将 n 划分成若干奇正整数之和的划分数
- 将 n 划分成若干不同整数之和的划分数

其中，$P(i,j) = P(i-1,j-1) + P(i-j,j)$

练习：HEOI2014 平衡

# Burnside & Polya

# Burnside & Polya

需要了解一些群论。

群：一堆元素，一个运算，满足封闭性，结合律，幺元存在唯一，逆元存在唯一。

需要了解一些群论。

群：一堆元素，一个运算，满足封闭性，结合律，幺元存在唯一，逆元存在唯一。

加法群，置换群为例。

# Burnside 引理

G 为 X 的置换群，C(p) 为 X 中满足在 p 作用下着色不变的着色集大小，

$C(p)$

$$l = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|}(C(p_i))$$

# Burnside 引理

G 为 X 的置换群，C(p) 为 X 中满足在 p 作用下着色不变的着色集大小，

$C(p)$

$$I = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|}(C(p_i))$$

是不是很神奇.. 要只详情，可以看《组合数学》一书中的证明，应用了“算两遍”的技巧。

# Polya 定理

Polya 定理为计算 C(p) 提供了一种方法，$p'$ 表示置换 p 的循环个数。

Polya 定理告诉我们 $C(p) = k^{p'}$。(一种 k 种颜色)

将 2*2 的网格黑白染色，旋转不同构的染色方案有 6 种。

将 2*2 的网格黑白染色，旋转不同构的染色方案有 6 种。

有多少种□用两种颜□色给正□方形四个点染□色的染□色□方案 (通过旋转和翻转相同的算同□一种)

将 2*2 的网格黑白染色，旋转不同构的染色方案有 6 种。

有多少种□用两种颜□色给正□方形四个点染□色的染□色□方案 (通过旋转和翻转相同的算同□一种)

练习题: POJ 2409, 1286, 2154, 2888/ BZOJ 1004,

# 生成函数系列

# 泰勒展开

泰勒展开：(在某个点附近) 把一个函数展开成一个无限的多项式。

# 泰勒展开

泰勒展开：(在某个点附近) 把一个函数展开成一个无限的多项式。

我们会的泰勒展开，等比求和。

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

# 泰勒展开

泰勒展开：(在某个点附近) 把一个函数展开成一个无限的多项式。

我们会的泰勒展开，等比求和。

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

收敛？不关心。

# 广义牛顿二项式定理

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k) x^{n-k} y^k$

其中 $C(n,k) = \Pi_{i=1}^{k}(n-i+1)/i$。

# 广义牛顿二项式定理

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)x^{n-k}y^k$

其中 $C(n,k) = \Pi_{i=1}^{k}(n-i+1)/i$。

其中 n 对于分数，负数都对。

# 形式幂级数

对于一个序列 $a_i$，可以定义一个多项式 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$。

这个叫做原序列的生成函数，是一个形式幂级数。(因为我们不太关系收敛)

1,1,1,... $\frac{1}{1-x}$

1,0,0,..., 1,0,... $\frac{1}{1-x^m}$

1,2,3,... $\frac{1}{(1-x)^2}$

1,2,4,6,... $\frac{1}{1-2x}$

# 生成函数的运算

生成函数整体可以做多项式运算。(无论用封闭形式还是用多项式形式)

生成函数的乘法相当于做两个两个集合的组合。

# 生成函数的运算

生成函数整体可以做多项式运算。(无论用封闭形式还是用多项式形式)

生成函数的乘法相当于做两个两个集合的组合。

解递推式

比如斐波那契

# 生成函数的运算

生成函数整体可以做多项式运算。(无论用封闭形式还是用多项式形式)

生成函数的乘法相当于做两个两个集合的组合。

解递推式

比如斐波那契

可能会结合明天的 FFT。

求这样的 n 位数个数：数字的各个数字都是奇数，而且 1 和 3 必须出现且出现偶数次。

# 递推?

考虑 n 位数的结尾。

令 $a_n$ 为这样的 n 位数，每个数的各个数字都是奇数，而且 1 和 3 出现偶数次。

令 $b_n$ 为这样的 n 位数，每个数的各个数字都是奇数，1 出现奇数次，3 出现偶数次。（由对称性，也可表示 3 出现奇数次，1 出现偶数次）

令 $c_n$ 为这样的 n 位数，每个数字的各个数字都是奇数，1 和 3 都出现奇数次。

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = 3b_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1}$$

$$c_n = 3c_{n-1} + 2b_{n-1}$$

# 加速递推

矩阵乘法

求解递推式 (特征值、生成函数)

等等，上面式子不对。还需要考虑 1 和 3 没出现的情况。

等等，上面式子不对。还需要考虑 1 和 3 没出现的情况。

现在需要减去 1 和 3 没有同时出现的，需要减去 1 没出现、3 出现偶数次，减去 3 没出现、1 出现偶数次 (由对称性与前一项相等)，加上 1 没出现、3 没出现的数量。

1 没出现、3 出现偶数次 (3 没出现、1 出现偶数次) 的数量为 $2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1}$。

1 没出现、3 没出现的数量为 $3^n$。

# 直接指数型生成函数

$$(e^x)^3 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right)^2$$

# 指数型生成函数

对于序列 $a_i$，定义生成函数 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$。

这样 1,1,1,1,... 对应 $e^x$。

# 指数型生成函数

对于序列 $a_i$，定义生成函数 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$。

这样 1,1,1,1,... 对应 $e^x$。

表示偶数?

表示 3 的倍数? (x)

# 指数型生成函数

对于序列 $a_i$，定义生成函数 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$。

这样 1,1,1,1,... 对应 $e^x$。

表示偶数?

表示 3 的倍数? (x)

生成函数的乘法表示了两个集合的排列。(why?

**Questions?**

# 谢谢大家！

Email: me@zrt.io

QQ: 401794301

https://zrt.io

LaTeX