Mathématiques appliquées 2

1 Les nombres complexes

1.1 Introduction

Considérons et résolvons les équations suivantes.

- ⋆ $x - 2 = 0$ admet une unique solution : 2. Il s'agit d'un **nombre naturel**. On écrit l'ensemble des nombres naturels par $\mathbb{N}$.

- ⋆ $2x+6 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. Cependant, elle admet pour unique solution le nombre -3 qui est un **nombre entier** (négatif). On écrit l'ensemble des nombres entiers par $\mathbb{Z}$ (il comprend en particulier l'ensemble des nombres naturels).

- ⋆ $4x-1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Cependant, elle admet pour unique solution le nombre $\frac{1}{4}$ qui est un **nombre rationnel**. On écrit l'ensemble des nombres rationnels par $\mathbb{Q}$ (il comprend en particulier l'ensemble des nombres entiers).

- ⋆ $x^2 - 6 = 0 \iff x^2 = 6$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Cependant, elle admet 2 solutions distinctes : les nombres $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$ qui sont des **nombres réels**. On écrit l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R}$ (il comprend en particulier l'ensemble des nombres rationnels).

- ⋆ $x^2 + 16 = 0 \iff x^2 = -16$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Mais comme pour les équations précédentes, nous allons pouvoir construire un ensemble de nombres « plus grand »(càd qui comprend les nombres réels) dans lequel cette équation admet des solutions. Il s'agit de l'ensemble des **nombres complexes**.

Nous allons créer un ensemble de nombres dans lequel la dernière équation peut être résolue. Pour cela, commençons par considérer les trois équations suivantes :

$x^2 = 4$	$x^2 = 9$	$x^2 = 36$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2 solutions : -2 et 2	2 solutions : -3 et 3	2 solutions : -6 et 6

Nous remarquons que $4 \cdot 9 = 36$ et $2 \cdot 3 = 6$.

$\leadsto$ Les solutions de l'équation $x^2 = a \cdot b$ sont les produits des solutions des équations $x^2 = a$ et $x^2 = b$.

Retour sur l'exemple : essayons de « couper » l'équation $x^2 = -16$ en deux pour pouvoir utiliser cette propriété :

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & -16 \\ & = & -1 \cdot 16 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x^2 = -1 & & x^2 = 16 \end{array}$$

⋆ L'équation $x^2 = 16$ admet deux solutions (réelles) : -4 et 4.

⋆ L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. $\hookrightarrow$ Créons un nombre qui n'existe pas, que nous notons avec une lettre (nombre **imaginaire**) et qui est solution de cette équation.
Ce nombre est noté i et il est solution de $x^2 = -1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

<u>Remarque</u> : dans $\mathbb{R}$, si a est solution de l'équation $x^2 = b$, alors $-a$ l'est aussi.
Donc puisque i est solution de $x^2 = -1$, $-i$ l'est aussi. En effet :

Conclusion de l'exemple :

1.2 Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

1.2.1 Définitions et vocabulaire

Définitions

Tout nombre complexe s'écrit de **manière unique** sous la forme, dite **algébrique**, $z = a + bi$, avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Le nombre réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
Le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple : $z = 3 - 2i \in \mathbb{C}$. On a :

Remarques :

- ⋆ Lorsque $\mathrm{Im}(z) = 0$, $z = a$ est un réel.
- ⋆ Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$, $z = bi$ est un **imaginaire pur**.

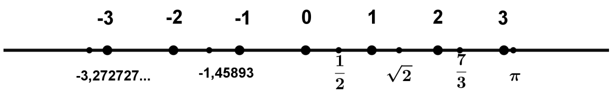
Propriété

Deux complexes z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si

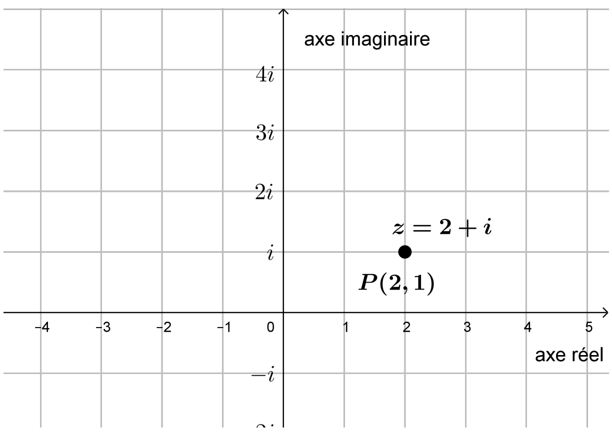
$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

1.2.2 Représentation graphique des complexes

L'ensemble des nombres réels se représente sur une droite comme illustré ci-dessous.



Pour l'ensemble des nombres complexes, nous avons besoin d'une droite pour la partie réelle et d'une autre droite pour la partie imaginaire. On le représente donc dans un plan, appelé **plan complexe** ou **plan de Gauss**.



Définitions

Tout nombre complexe $z = a + bi$ peut être représenté dans un repère cartésien par un unique point $P(a,b)$.

$P(a,b)$ est appelé **point-image** du complexe z.
Le nombre complexe $z = a + bi$ porte le nom d'**affixe** du point P.

Remarques :

- ⋆ Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur l'axe des abscisses.
- ⋆ Les complexes $z = bi, b \in \mathbb{R}$, sont les imaginaires purs et sont représentés sur l'axe des ordonnées.

⚠ Dans $\mathbb{R}$, nous pouvons classer les éléments : $-3 \leq -2$; $\pi > 3$ ...
Dans $\mathbb{C}$, il n'y a plus de relation d'ordre : **il n'est pas permis**, par exemple, d'écrire $1 + i > 1 - i$!

1.3 Opérations dans $\mathbb{C}$

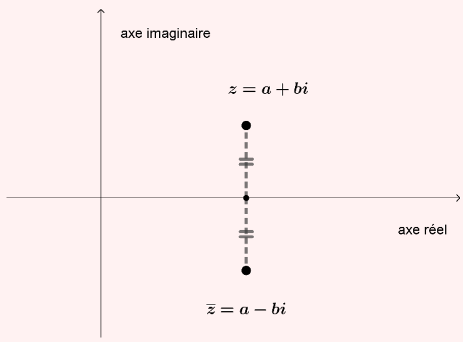
1.3.1 Conjugué d'un complexe

Définition

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le complexe $\overline{z} = a - bi$.

$$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$$

Graphiquement, des nombres complexes conjugués sont représentés par des points symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemples :

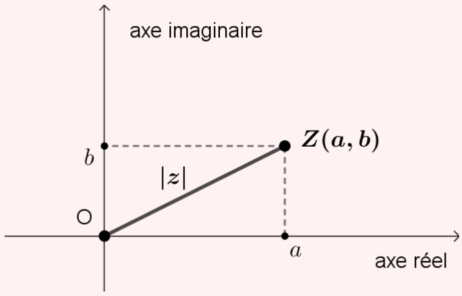
- ⋆ Si $z = 1 + 2i$, $\overline{z} =$
- ⋆ Si $z = 3$, $\overline{z} =$
- ⋆ Si $z = -3i$, $\overline{z} =$

1.3.2 Module d'un complexe

Définition

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre réel et positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Graphiquement, il s'agit de la norme du vecteur $\overrightarrow{OZ}$, où Z est le point-image de z. C'est donc la distance entre le point O et le point Z.



Exemples :

- ⋆ Si $z = 1 + 2i$, $|z| =$
- ⋆ Si $z = 3$, $|z| =$
- ⋆ Si $z = -3i$, $|z| =$

1.3.3 Somme de deux complexes

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

Exemple : $(2 + i) + (3 - 2i) =$

Propriété

L'addition dans $\mathbb{C}$ est

- ⋆ **commutative** : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- ⋆ **associative** : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

1.3.4 Multiplication par un réel

$$\boxed{k \cdot (a + bi) = k \cdot a + (k \cdot b)i = (a + bi) \cdot k,\ k \in \mathbb{R}}$$

Exemple : soit $z = 4 - 6i$. Calculer :

- ⋆ $2 \cdot z =$

⋆ $-3 \cdot z =$

Propriété

Tout nombre complexe $z = a + bi$ admet un élément symétrique pour l'addition dans $\mathbb{C}$. Il s'agit du nombre complexe $z = -1 \cdot z = -a - bi$.

1.3.5 Produit de deux complexes

Soient 2 nombres complexes $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$. Calculons :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) &= a.c + a.di + bi.c + bi.di \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i}$$

Exemple : $(2+i) \cdot (3-2i) =$

Propriété

La multiplication dans $\mathbb{C}$ est

⋆ **commutative** : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

⋆ **associative** : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

De plus, la multiplication dans $\mathbb{C}$ se distribue sur l'addition dans $\mathbb{C}$: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2$$

Exemple : soient $z = 2 + 3i$, $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 3 - i$. Calculer $z \cdot (z_1 + z_2)$:

1.3.6 Inverse d'un complexe

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. On cherche un nombre $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$. Ce nombre existe-t-il toujours ? Quelle est sa valeur ? Calculons...

Notons $z^{-1} = c + di$ et cherchons à exprimer c et d en fonction de a et b. Rappelons-nous qu'on veut que $z \cdot z^{-1} = 1$ (ou $z^{-1} \cdot z = 1$, ça revient au même). On a :

$$\begin{aligned}
z \cdot z^{-1} = 1 &\iff (a+bi)\cdot(c+di) = 1 \\
&\iff ac - bd + i(ad+bc) = 1 \\
&\iff \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \quad \text{par égalité entre 2 nombres complexes} \\
&\iff \begin{cases} a \cdot \frac{-ad}{b} - bd = 1 \\ c = \frac{-ad}{b} \end{cases} \quad \text{Si } b \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} -a^2d - b^2d = b \\ c = \frac{-ad}{b} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} d = \frac{-b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{-ad}{b} \end{cases} \quad \text{si } a^2+b^2 \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} d = \frac{-b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases} \iff z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}
\end{aligned}$$

<u>Remarques</u> :

⋆ Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$ et $z^{-1} = \frac{1}{a}$ si $a \neq 0$.

⋆ Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = b = 0$ et donc $z = 0$. Dès lors, z^{-1} n'existe pas.

Nous pouvons donc conclure que si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ est tel que $z \neq 0$, alors z admet un inverse et :

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Exemple : $\dfrac{1}{1+2i} =$

1.3.7 Quotient de deux complexes

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_2 \neq 0$. On a :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}}$$

On se ramène donc au calcul de l'inverse d'un complexe et à la multiplication entre 2 nombres complexes. Cependant une autre méthode peut être utilisée en tenant compte du fait suivant.

⚠ Lorsqu'on a une fraction entre deux nombres complexes, il ne peut jamais rester de « i » au dénominateur !
Pour s'en débarrasser, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur.

Exemple : $\dfrac{3+i}{2-3i} =$

1.3.8 Exercices

Exercice 1. Représenter dans le plan complexe/plan de Gauss les nombres complexes suivants :

1) $2i$
2) $1-i$
3) -2
4) $-3+i$
5) $-1-2i$

Exercice 2. Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4 et i^5 et en déduire une règle pour calculer $i^n, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Trouver les réels x et y vérifiant :

1) $(2x-1)+(1-y)i = 5-3i$
2) $3xi - 2y = 3x + 2 - 4yi - 2i$
3) $xi - y - x + 3i = 0$

Exercice 4. Pour quelle valeur du réel m les deux nombres complexes :$m^2 - 1 + i$ et $3 + (m^2 + m - 1)i$ sont-ils égaux ?

Exercice 5. Calculer et donner la réponse finale sous la forme $a + bi$.

1) $(3 - 5i) + (-2 + 2i) - (-2 + 3i)$

2) $\overline{2 + 3i}$

3) $|2 + 3i|$

4) $|3 - 4i| \cdot \overline{3i - 1}$

5) $\dfrac{4 - 3i}{2} - \dfrac{2}{3}(1 - i) - \dfrac{2 - i}{6}$

6) $(3 + 2i).(4 - 3i)$

7) $(-\sqrt{3} - \dfrac{i}{2}).(-\sqrt{3} + \dfrac{i}{2})$

8) $(2 + \sqrt{3}i).(\sqrt{5} - i)$

9) $\big((2i+3) - (\sqrt{2} - i)\big).\big((1 - 3i) + (-i - 2)\big)$

10) $(3 - i)^2 - (5 + i) \cdot (5 - i)$

Exercice 6. Exprimer les complexes suivants sous la forme $a + bi$.

1) $\dfrac{1 + i}{1 - 2i}$

2) $\dfrac{1}{i}$

3) $\dfrac{i}{i - 4}$

4) $\dfrac{1 + i}{3i}$

5) $\dfrac{4 + i}{4 - 2i}$

6) $\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}$

7) $\dfrac{i}{2 + 3i} + \dfrac{1}{2 - 3i}$

8) $\dfrac{2i}{3 - i} - \dfrac{2}{i + 1}$

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z - 1).(\overline{z} - 1)$ soit un réel.

Exercice 8. Soit z un nombre complexe non nul. Montrer que

(a) $\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}$ est un nombre réel ;

(b) $\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}$ est un imaginaire pur.

Exercice 9. Montrer que le nombre $\dfrac{i - 1}{i} - \dfrac{2}{(i - 1)^2}$ est un nombre réel.

Exercice 10. Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Justifier !

1) $-3 + i$ est le complexe conjugué de $-3 - i$.

2) Le complexe z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$;

3) Le complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$;

4) Pour tout nombre complexe z, le produit $z.\overline{z}$ est un nombre réel positif.

5) La partie imaginaire d'un complexe est un imaginaire pur.

6) Si z est un nombre complexe, $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$;

7) Si z est un nombre complexe, $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)$.

8) Si a et b sont des réels, alors $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}i$.

9) Le conjugué de l'opposé d'un nombre complexe est l'opposé de son conjugué.

10) $7 + 5i > 2 - 3i$.

Exercice 11. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Démontrer les propriétés suivantes.

1) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z) \in \mathbb{R}$

2) $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z) \cdot i$ est un imaginaire pur.

3) $|z| = |\overline{z}|$

4) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

5) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

6) $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$

7) Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

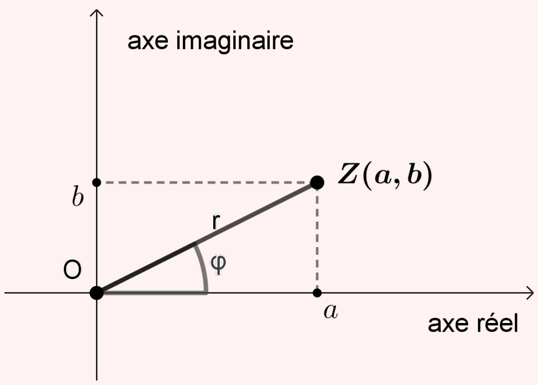
8) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

1.4 Forme trigonométrique d'un complexe

Définitions

Soit un nombre complexe non nul d'affixe $z = a + bi$ et soit $Z(a,b)$, son point-image dans le plan complexe.

La position de Z peut également être déterminée par sa distance à l'origine $|OZ|$ et par l'amplitude de l'angle formé par les demi-droites $[OX$ et $[OZ$.



- Le **module** de z est la distance $|OZ|$:

$$|z| = |OZ| \underset{\text{Pythagore}}{\underset{\downarrow}{=}} \sqrt{a^2+b^2} \underset{\text{not}}{\underset{\downarrow}{=}} r \in \mathbb{R}_0^+$$

- L'**argument** de z est l'amplitude de l'angle $\left(\widehat{[OX,[OZ}\right)$:

$$\arg z = \left|\widehat{[OX,[OZ}\right| \underset{\text{not}^{1}}{\underset{\downarrow}{=}} \varphi$$

Pour déterminer la valeur de φ, nous utilisons les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{b}{r} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}}$$

De plus, nous constatons que :

$$\begin{aligned}
z &= a + bi && \text{forme algébrique}\\
&= r.\cos\varphi + r.\sin\varphi.i\\
&= r.(\cos\varphi + \sin\varphi.i)\\
&= r.(\textbf{cos } \varphi + \boldsymbol{i}.\textbf{sin } \varphi)\\
&\overset{\text{not}}{=} r \ \textbf{cis } \varphi && \textbf{forme trigonométrique}
\end{aligned}$$

1. φ se lit « phi ».

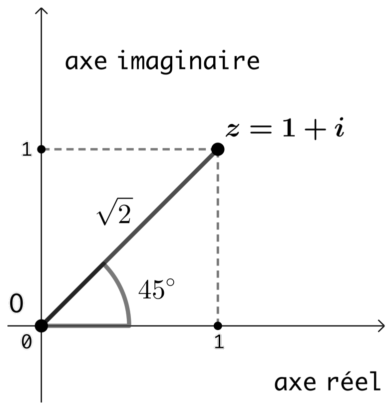
Définition

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme $z = r\text{cis}\ \varphi$, avec $r = |z|$ et $\varphi = \arg z$.
Cette forme s'appelle la **forme trigonométrique** de z.

Remarque : dans l'écriture sous forme trigonométrique, nous pouvons remplacer φ par n'importe quelle valeur de la forme $\varphi + k.360\,^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$, si φ est exprimé en degrés, ou par $\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, si φ est exprimé en radians.

Exemple : déterminer la forme trigonométrique du complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Remarque : parfois, la forme trigonométrique d'un complexe peut se trouver facilement grâce à sa représentation graphique.



Exemple : la forme trigonométrique du complexe $z = 1 + i$ est $z = \sqrt{2}$ cis $45\,^\circ$.

Propriété

Deux nombres complexes sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument (à $360\,^\circ$ ou 2π rad près).

1.5 Opérations sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

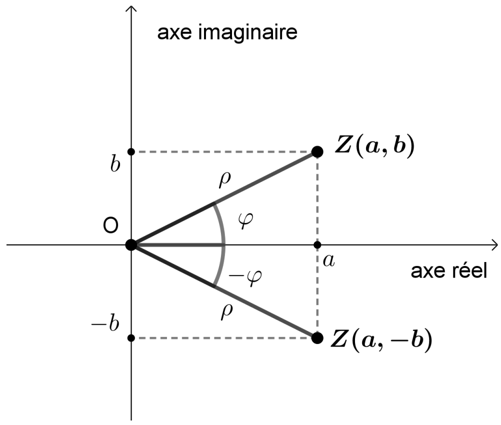
Dans cette section, nous allons revenir sur certaines opérations sur les nombres complexes déjà vues précédemment. Mais nous allons cette fois travailler avec la forme trigonométrique des nombres complexes. En effet, certaines opérations fournissent des résultats intéressants. Mais ce n'est pas le cas de toutes ! Par exemple, nous ne reviendrons pas sur l'addition entre 2 nombres complexes. En effet, pour additionner 2 nombres complexes sous forme trigonométrique, nous n'avons pas d'autre méthode que de passer par leur forme algébrique.

1.5.1 Conjugué d'un complexe

Rappelons que si $z = a + bi$, alors le conjugué de z est le nombre $\overline{z} = a - bi$.

Graphiquement, les points-images de ces 2 nombres sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

En utilisant cette remarque, il est évident que z et $\overline{z}$ ont même module, càd $|z| = |\overline{z}|$, et qu'ils ont des arguments opposés, càd arg $\overline{z} = -$ arg z.



Propriété

Le **conjugué** d'un nombre complexe z a **même module** que z et a pour argument l'**opposé de l'argument** de z.

$$\overline{r\,\text{cis}\,\varphi} = r\,\text{cis}(-\varphi)$$

1.5.2 Produit de deux complexes

Soient 2 nombres complexes : $z_1 = \rho_1 \,\text{cis}\, \varphi_1$ et $z_2 = \rho_2 \,\text{cis}\, \varphi_2$. On a :

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2\,\text{cis}(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

Propriété

Le produit de deux nombres complexes non nuls a pour module le **produit des modules** des deux nombres et pour argument la **somme de leurs arguments**.

$$(r_1\text{cis }\varphi_1).(r_2\text{cis }\varphi_2) = r_1.r_2\text{ cis }(\varphi_1+\varphi_2)$$

Exemple : soient les deux complexes $z_1 = \sqrt{2}\text{ cis } 40^\circ$ et $z_2 = 2\text{ cis } 20^\circ$.

1.5.3 Inverse d'un nombre complexe

Soit $z = \rho \operatorname{cis} \varphi$. Calculons son inverse.

On a vu que $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Or, on a déjà vu comment calculer $\overline{z}$ sous forme trigonométrique et on sait que $|z| = \rho$. Dès lors,

$$z^{-1} = \frac{\overline{\rho \operatorname{cis} \varphi}}{\rho^2} = \frac{\rho \operatorname{cis}(-\varphi)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \operatorname{cis}(-\varphi)$$

Propriété

L'inverse d'un nombre complexe z a pour module l'inverse du module de z et pour argument l'opposé de l'argument de z.

$$(r \operatorname{cis} \varphi)^{-1} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\varphi)$$

1.5.4 Quotient de deux complexes

Soient $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ et $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \varphi_2$. Par les résultats vus aux sections précédentes, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot z_2^{-1} = (\rho_1 \operatorname{cis} \varphi_1) \cdot (\rho_2 \operatorname{cis} \varphi_2)^{-1} \\
&= \rho_1 \operatorname{cis} \varphi_1 \cdot \frac{1}{\rho_2} \operatorname{cis}(-\varphi_2) \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

Propriété

Le quotient de deux nombres complexes non nuls a pour module le **quotient des modules** des deux nombres et pour argument la **différence de leurs arguments**.

$$\frac{r_1 \text{cis } \varphi_1}{r_2 \text{cis } \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Exemple : soient les deux complexes $z_1 = \sqrt{2}$ cis $\frac{\pi}{3}$, et $z_2 = 2$ cis $\frac{\pi}{4}$. Calculer $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

1.5.5 Puissance d'un complexe

Comme conséquence immédiate des résultats précédents, nous pouvons montrer le résultat suivant qui permet de calculer les puissances entières d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique.

Formule de De Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}$, si $z = r$ cis φ, alors

$$z^n = r^n \text{ cis } (n\varphi)$$

Exemple : calculer $(1+i)^4$

1.5.6 Racines n^es d'un complexe

Les **racines n^es** d'un nombre complexe ω sont les solutions de l'équation $z^n = \omega$.

Par le *théorème fondamental de l'algèbre*, nous savons que pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}_0$ donnés, l'équation $z^n = \omega$ possède n solutions.

Exemple : résoudre l'équation $z^3 = 8i$. Nous savons qu'elle possède trois solutions.

On peut généraliser ce raisonnement.

Résolvons l'équation $z^n = \omega$ où $\omega \in \mathbb{C}$. Puisque z et ω sont des nombres complexes, nous pouvons les écrire sous leur forme trigonométrique.

Posons $z = \rho_z \operatorname{cis} \varphi_z$ et $\omega = \rho \operatorname{cis} \varphi$. Nous pouvons donc écrire :

$$z^n = \omega \iff \left(\rho_z \operatorname{cis} \varphi_z\right)^n = \rho \operatorname{cis} \varphi \iff \rho_z^n \operatorname{cis}(n\varphi_z) = \rho \operatorname{cis} \varphi$$

où la dernière équivalence provient de la formule de De Moivre vue précédemment. Par égalité entre 2 nombres complexes écrits sous forme trigonométrique, on a :

$$\begin{cases} \rho_z^n = \rho \\ n\varphi_z = \varphi + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho_z = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi_z = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

où $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. On s'arrête en effet à $k = n - 1$, car si $k = n$ nous obtenons comme argument $\varphi_z = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ qui est le même que celui obtenu pour $k = 0$. L'équation possède donc n solutions distinctes.

Propriété

L'équation $z^n = \omega$ possède n solutions distinctes. Son ensemble de solutions est donné par

$$S = \left\{ \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \mid k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} \right\}$$

où $\omega = r$ cis φ.

Les solutions de l'équation $z^n = \omega$ sont appelées les **racines n**$^{\text{es}}$ de ω. Les racines n^{es} de ω ont pour images, dans le plan de Gauss, les sommets d'un n-gone régulier.

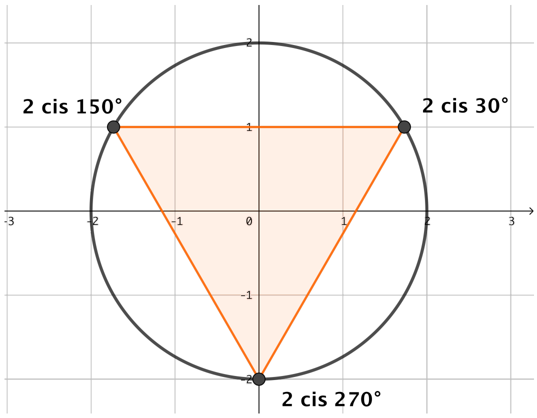
Propriété

Les solutions de l'équation $z^n = \omega$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit au cercle de rayon $\sqrt[n]{|\omega|}$ et de centre $(0,0)$.

Si nous revenons à l'équation $z = 2i$, nous avions obtenu comme solutions :

$$S = \left\{ 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}; 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}; 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2} \right\}$$

Si on représente leur point-image dans le plan complexe, on observe effectivement que ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrite dans le cercle de centre (0,0) et de rayon 2.



1.5.7 Exercices

Exercice 12. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les placer dans un plan de Gauss.

1) $-4i$
2) $\sqrt{3} - 3i$
3) -7
4) 1
5) i
6) -1
7) $-1 - i$
8) $i\sqrt{3} - 1$

Exercice 13. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

1) cis $\frac{\pi}{4}$
2) 3 cis 210°
3) $4.(\text{cis}\ 0 + \text{cis}\ (-\frac{\pi}{2}))$

Exercice 14. Calculer et donner la réponse finale sous la forme $\rho\,\text{cis}\,\varphi$ avec $\varphi \in [-\pi; \pi]$.

1) $\overline{2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}}$
2) $\left(2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3})\right) \cdot \left(3\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4})\right)$

3) $\dfrac{1}{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}$

4) $\dfrac{15\operatorname{cis}\frac{\pi}{5}}{3\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}}$

5) $\left(3\operatorname{cis}\frac{-7\pi}{4}\right)^3$

6) $5\operatorname{cis}\pi\cdot\dfrac{\operatorname{cis}\frac{-\pi}{4}}{10\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}$

7) $\dfrac{\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^5}{16\operatorname{cis}\frac{-\pi}{3}}$

8) $\left(\overline{\frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}}\right)^4\cdot 8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

Exercice 15. Rechercher le module et l'argument des complexes suivants.

1) $z = i^3.(1+i)^2$

2) $t = (1-i)^3.(\sqrt{3}-i)^4$

3) $u = \dfrac{(1-i)^3}{4(1+i)^4}$

4) $w = (1+i)^{17}$

Exercice 16. Résoudre $z^4 = -16$ et représenter les solutions dans un plan de Gauss.

Exercice 17. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles l'égalité $z^7 - \dfrac{2+i}{i-3}z^4 - z^3 + \dfrac{2+i}{i-3} = 0$ est vérifiée.

Exercice 18. Calculer les racines :

1) cubiques de i
2) cinquièmes de $-\sqrt{3}+i$
3) sixièmes de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$, avec $n \in \mathbb{N}_0$.
Vérifier la réponse trouvée pour $n = 4$ avec les solutions de l'exercice précédent.
Représenter les solutions de l'équation $z^6 = 1$.

Exercice 20. Soit le nombre complexe $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Calculer le module et l'argument de z.
(b) Calculer $\dfrac{z}{1-i}$.
(c) Calculer z^{2022}.
(d) Calculer les racines quatrièmes de z.

1.6 Opérations dans $\mathbb{C}$ et transformations du plan

Rappel

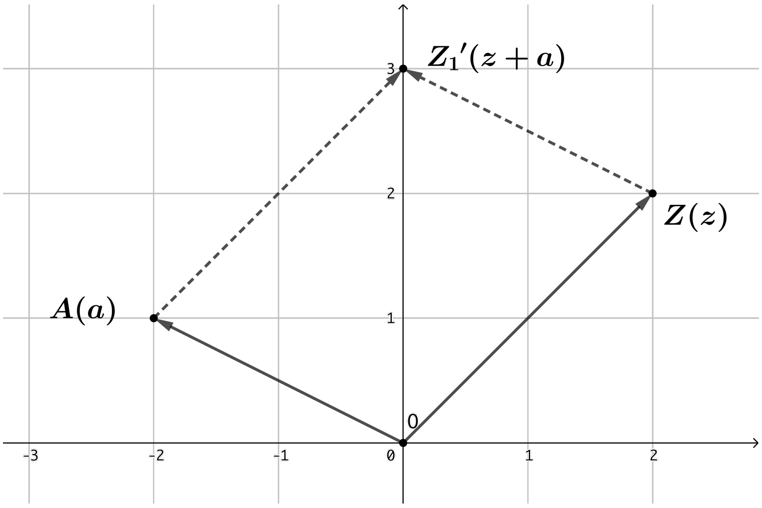
1) Une **isométrie du plan** est une transformation du plan qui conserve les distances (rotations, translations et symétries).
2) Une **similitude du plan** est une transformation du plan qui multiplie toutes les distances par un même réel strictement positif appelé **rapport de similitude**. Une similitude est composée d'une isométrie avec une homothétie.

1.6.1 Ajouter un complexe à un autre complexe

Exemple : considérons le complexe $z = 2 + 2i$, affixe du point $Z(2{,}2)$, et le complexe $a = -2 + i$, affixe du point $A(-2{,}1)$.

Effectuons leur somme : $z + a = 0 + 3i$.

Représentons dans le plan complexe les points Z, A et le point Z_1', point-image du complexe $z + a$.



Nous constatons que le point Z_1' est l'image du point Z par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Remarquons également que le vecteur $\overrightarrow{OZ_1'}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OZ}$.

Propriété

Soit un complexe z, affixe d'un point Z.

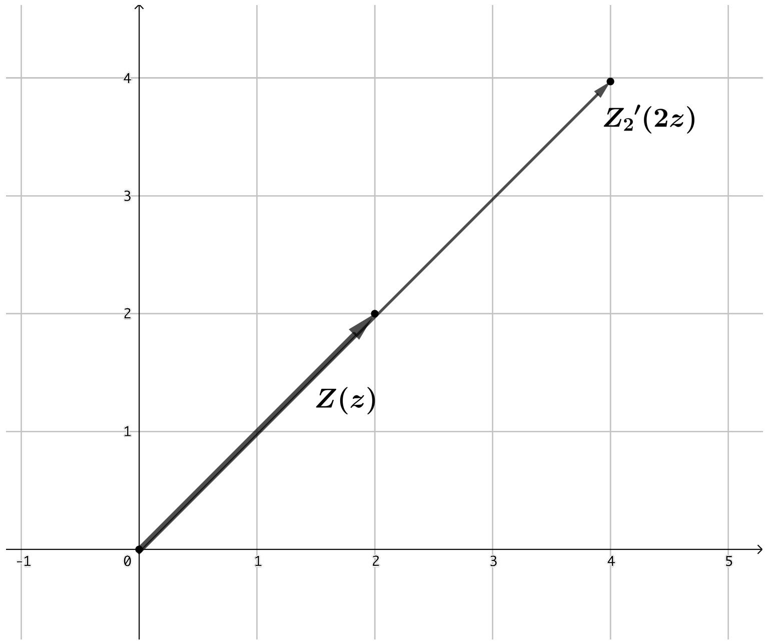
Lorsque nous ajoutons un complexe a, affixe du point A, au complexe z, nous faisons subir au point Z une **translation** de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

1.6.2 Multiplier un complexe par un réel

Exemple : considérons le complexe $z = 2 + 2i$, affixe du point $Z(2{,}2)$, et le réel strictement positif $r = 2$.

Multiplions z par r : $r.z = 4 + 4i$.

Représentons dans le plan complexe le point Z et le point Z_2', point-image du complexe $2.z$.



Nous constatons que le point Z_2' est l'image du point Z par l'homothétie de centre (0,0) et de rapport 2. Remarquons également que le vecteur $\overrightarrow{OZ_2'}$ est obtenu en multipliant le vecteur $\overrightarrow{OZ}$ par le réel 2.

Propriété

Soit un complexe z, affixe d'un point Z.

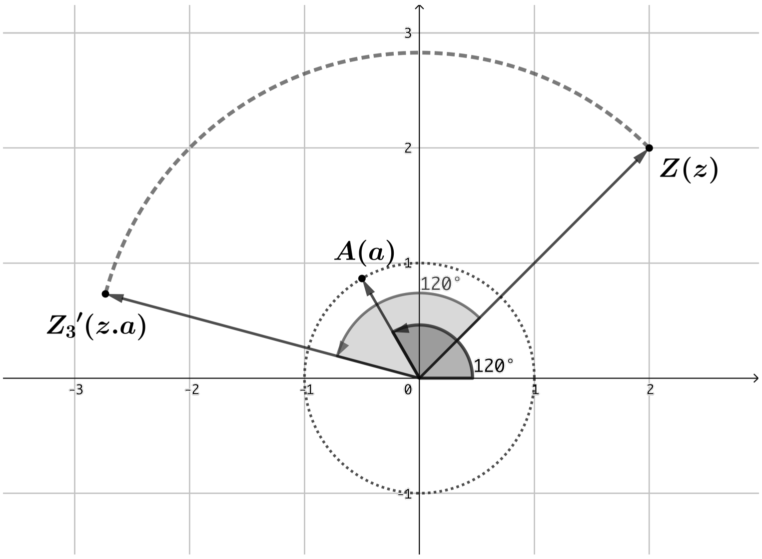
Lorsque nous multiplions z par un réel strictement positif r, nous faisons subir au point Z une **homothétie** de centre O et de rapport r.

1.6.3 Multiplier un complexe par un complexe de module 1

Exemple : considérons le complexe $z = 2 + 2i$, affixe du point $Z(2{,}2)$, et le complexe $a = \text{ cis } 120^\circ$, affixe du point $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pour effectuer le produit de a et z, déterminons la forme trigonométrique de z :

Représentons dans le plan complexe les points Z, A et le point Z'_3, point-image du complexe $z.a$.



Nous constatons que le point Z'_3 est l'image du point Z par la rotation de centre (0,0) et d'amplitude 120 ° .

Propriété

Soit un complexe z, affixe d'un point Z.

Lorsque nous multiplions z par un complexe de module 1 et d'argument θ, nous faisons subir au point Z une **rotation** de centre O et d'amplitude θ.

<u>En effet</u> :

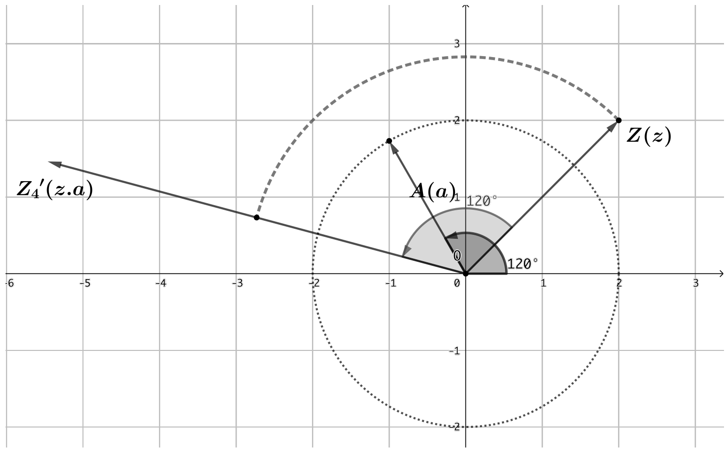
Si $z = r \text{ cis } \varphi$ et $a = \text{ cis } \theta$, alors $z.a = (r \text{ cis } \varphi).(\text{cis } \theta) = r \text{ cis } (\varphi + \theta)$.
Nous avons donc bien une rotation de centre O et d'amplitude θ.

1.6.4 Multiplier un complexe par un complexe quelconque

Exemple : considérons le complexe $z = 2 + 2i$, affixe du point $Z(2,2)$, et le complexe $a = 2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$, affixe du point $A(-1,\sqrt{3})$.

Effectuons leur produit :

Représentons dans le plan complexe les points Z, A et le point Z'_4, point-image du complexe $z.a$.



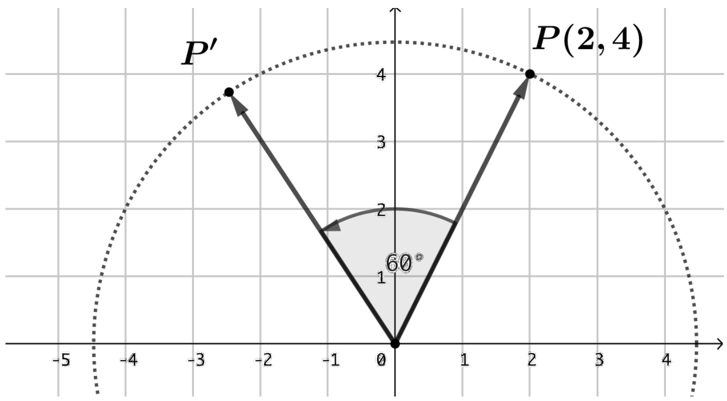
Nous constatons que le point Z'_4 est l'image du point Z par la similitude de centre (0,0), de rapport 2 et d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Propriété

Soit un complexe z, affixe d'un point Z. Lorsque nous multiplions z par un complexe de module s et d'argument θ, nous faisons subir au point Z une **similitude** de centre O, de rapport s et d'amplitude θ.

1.6.5 Application géométrique

Recherchons les coordonnées de l'image du point $P(2{,}4)$ par la rotation de centre (0,0) et d'amplitude 60 ° :



1.6.6 Exercices

Exercice 21. Dans le plan complexe, rechercher et représenter l'image du point P d'affixe $z = 2 + i$ par :

1) la translation qui applique l'origine O sur le point $A(-1{,}3)$;
2) la rotation de centre O et d'angle de $\frac{\pi}{4}$ rad ;
3) la rotation précédente suivie d'une homothétie de centre O et de rapport 2.

Exercice 22. Dans le plan de Gauss, représenter le point P d'affixe $z = 1 + i$ et le point Q d'affixe $u = 1 - i$. Construire géométriquement le point S d'affixe :

(a) $z + u$

(b) $3u - 2z$

(c) zu

(d) $(z + u)(-2z + 1)$

(e) $z \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

Exercice 23. Soient les complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = \frac{z_1^5}{z_2^4}$.

1) Calculer z_1^5 et z_2^4 sous forme algébrique, ainsi que z_3, toujours sous forme algébrique.
2) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_2. De là, calculer la forme trigonométrique de z_3.
3) Déduire des deux points précédents la valeur de $\sin 15°$ et celle de $\cos 15°$.

2 Les limites

2.1 Introduction

2.1.1 Point adhérent

Définition

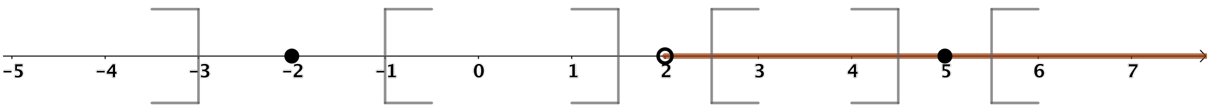
Le réel a est un **point adhérent** à un sous-ensemble P de $\mathbb{R}$ si et seulement si tout intervalle ouvert centré en a possède une intersection non vide avec P.

Un réel a **n'**est donc **pas** un point adhérent à un sous-ensemble P de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert centré en a qui possède une intersection vide avec P.

Notation

L'ensemble des points adhérents à une partie P de $\mathbb{R}$ est noté $\overline{P}$.

Exemple 1 : soit $P =]2, +\infty[$.



- ⋆ -2 n'est pas adhérent à P car l'intervalle $]-3, -1[$, ouvert et centré sur -2, possède une intersection vide avec P.
- ⋆ 5 adhère à P car tout intervalle ouvert A centré en 5 possède une intersection non vide avec P. En effet, A et P contiennent tous les deux le réel 5.
- ⋆ 2 adhère à P car tout intervalle ouvert centré en 2 possède une intersection non vide avec P.
- ⋆ Conclusion : $\overline{P} = [2, +\infty]$.

Exemple 2 : soit $Q = [2,3[$.

- ⋆ 4 est adhérent à Q ? ....
- ⋆ 1 est adhérent à Q ? ....
- ⋆ 2 est adhérent à Q ? ....
- ⋆ 3 est adhérent à Q ? ....
- ⋆ Conclusion : $\overline{Q} =$ ....

Convention

Par convention, nous dirons que $+\infty$ et $-\infty$ adhèrent à $\mathbb{R}$.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des points adhérents au domaine de la fonction $f(x)$.

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

3) $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$

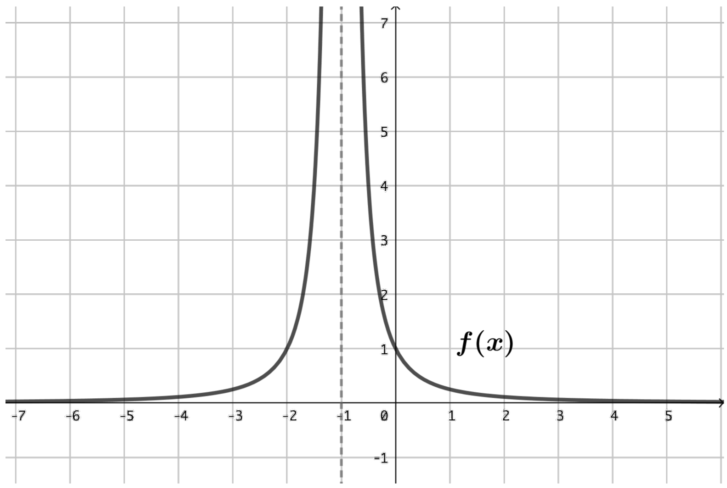
2.1.2 Exemples graphiques

Définition intuitive de « limite »

L'expression $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, énoncée par « la **limite** de $f(x)$ quand x tend vers a est égale à b », signifie que plus les valeurs de x vont être proches de a, au plus les valeurs de $f(x)$ vont être proches de b (a,$b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Remarque : pour que l'expression $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ait un sens, il faut que a soit adhérent à dom f.

Exemple : considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ dont le graphe est le suivant :



$\star$ dom$f$ $= \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

⋆ $\overline{\mathsf{dom} f} = \overline{\mathbb{R}}$

⋆ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ car au plus les valeurs de x se rapprochent de 0, au plus les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 1. Remarquons que $0 \in \mathsf{dom} f$ et que $f(0) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. On dit que f est **continue** en 0.

⋆ La fonction f est en fait continue sur son domaine de définition : quelque soit $a \in \mathsf{dom} f$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

⋆ Étudions les limites aux points appartenant à $\overline{\mathsf{dom} f}$ mais pas à $\mathsf{dom} f$, c'est-à-dire en $-\infty$, -1 et $+\infty$:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ car au plus les valeurs de x sont petites, au plus les valeurs de $f(x)$ sont proches de 0.
- $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ car au plus les valeurs de x sont proches de -1, au plus les valeurs de $f(x)$ deviennent plus grandes que n'importe quel réel.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car au plus les valeurs de x sont grandes, au plus les valeurs de $f(x)$ sont proches de 0.

⋆ Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, on dit que le graphe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$ ($AH \equiv y = 0$).

⋆ $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ signifie que le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = -1$ ($AV \equiv x = -1$).

Exercice 2. A la page suivante se trouvent les représentations graphiques de 4 fonctions. Pour chaque fonction, déterminer :

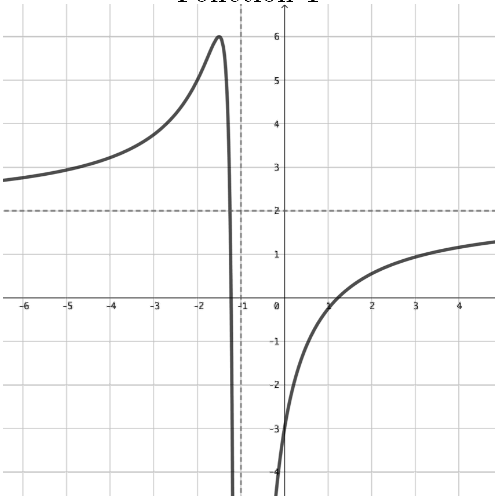
1) son domaine ($\mathsf{dom} f$) ;

2) l'ensemble des points adhérents à son domaine ($\overline{\mathsf{dom} f}$) ;

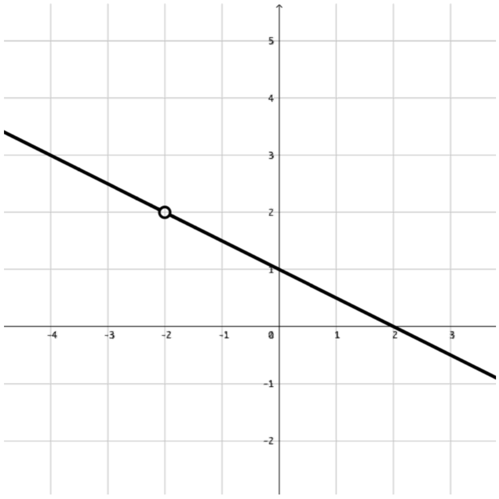
3) les limites aux points appartenant à $\overline{\mathsf{dom} f}$ mais pas à $\mathsf{dom} f$;

4) les éventuelles asymptotes à son graphe.

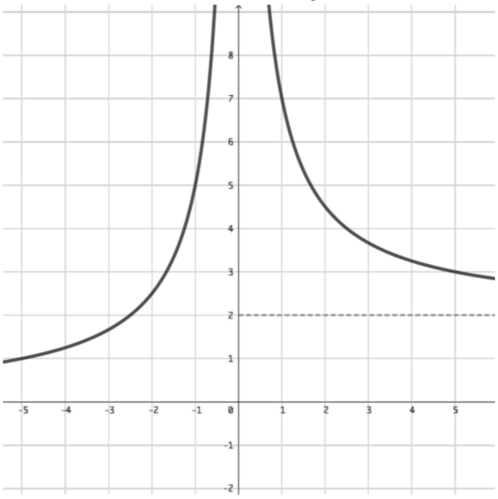
Fonction 1



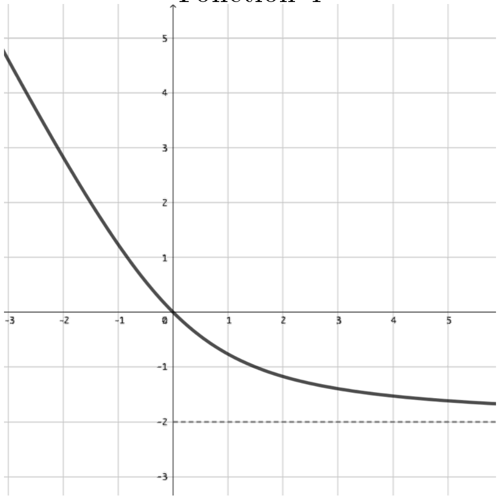
Fonction 2



Fonction 3



Fonction 4



2.1.3 Exemples avec la calculatrice

Il est également possible de déterminer le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point a adhérent à dom f en établissant un tableau de valeurs. Repartons des exemples précédents avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$			
x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-0{,}1$	1,234568	0,1	0,826446
$-0{,}01$	1,020304	0,01	0,980296
$-0{,}001$	1,002003	0,001	0,998003
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	1	0	1

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$		$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$	
u_n	$f(u_n)$	u_n	$f(u_n)$
-10	0,0123	10	0,00826
-100	0,000102	100	0,000098
-1000	$1{,}002.10^{-6}$	1000	$9{,}98.10^{-7}$
-10000	$1{,}0002.10^{-8}$	10000	$9{,}998.10^{-9}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	0	$+\infty$	0

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$			
u_n	$f(u_n)$	u_n	$f(u_n)$
$-1{,}1$	100	$-0{,}9$	100
$-1{,}01$	10000	$-0{,}99$	10000
$-1{,}001$	10^6	$-0{,}999$	10^6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
-1	$+\infty$	-1	$+\infty$

2.2 Limite à gauche, limite à droite

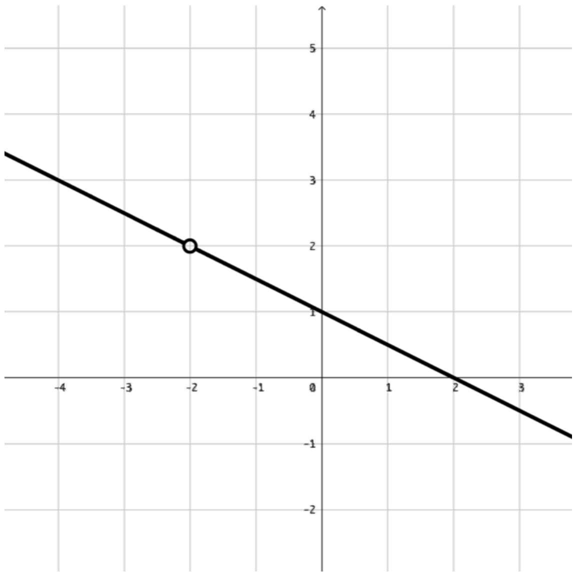
Parfois, lorsque nous nous rapprochons d'un point adhérent au domaine d'une fonction, il se peut que le comportement en venant par la gauche soit différent de celui en venant par la droite. On parle de limite à gauche et de limite à droite.

Définition

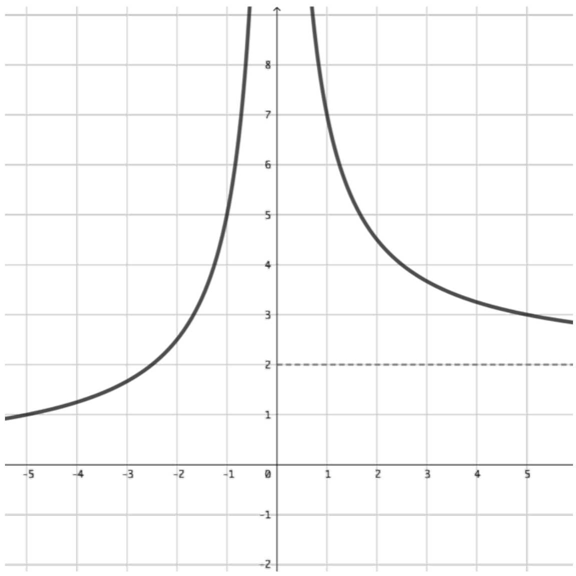
- ⋆ L'expression $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, énoncée par « la **limite à droite** de $f(x)$ quand x tend vers a est égale à b », signifie que plus les valeurs de x vont être proches de a en restant supérieures à a, au plus les valeurs de $f(x)$ vont être proches de b ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$).

- ⋆ L'expression $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, énoncée par « la **limite à gauche** de $f(x)$ quand x tend vers a est égale à b », signifie que plus les valeurs de x vont être proches de a en restant inférieures à a, au plus les valeurs de $f(x)$ vont être proches de b ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$).

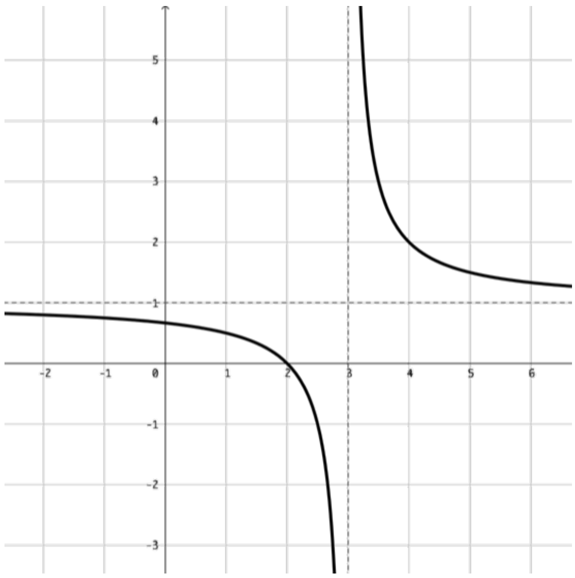
Exemples :



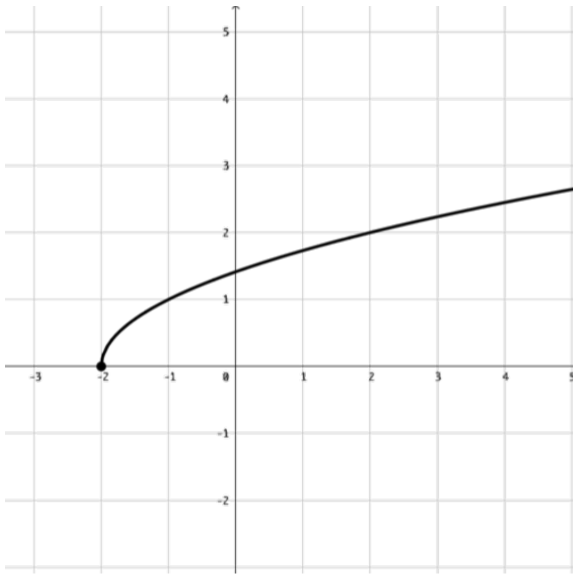
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} f(x) = 2$
Le graphe de f possède un « trou » au point $(-2{,}2)$.



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$
Le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.



$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$
Le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.



$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ n'a pas de sens (car f ne peut pas prendre de valeurs inférieures à -2).
Le point $(-2{,}0)$ appartient au graphe de f.

Propriété

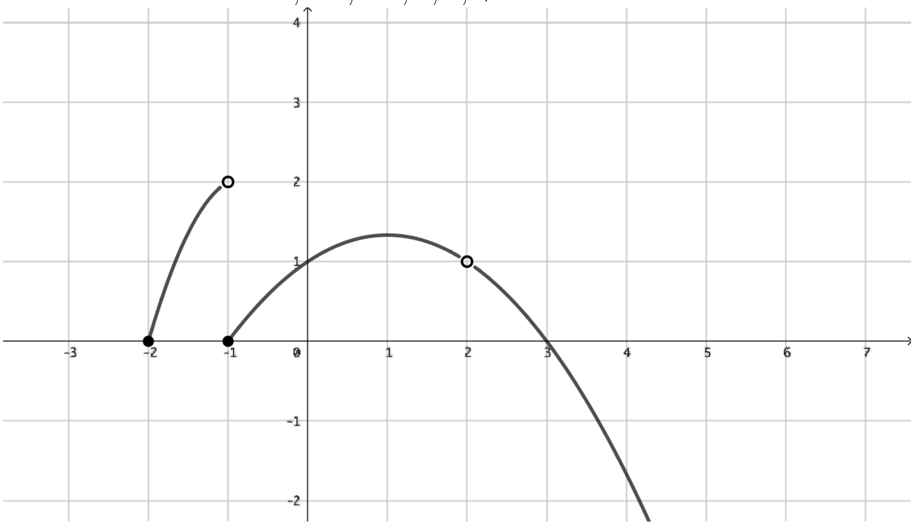
Si les limites à gauche et à droite sont égales, alors la fonction $f(x)$ a une limite en $x = a$ et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

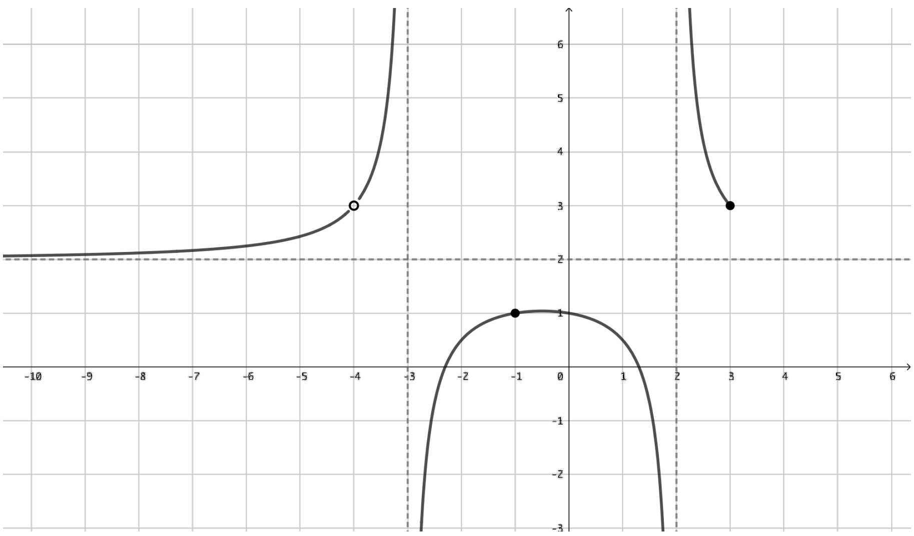
Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 3. Que vaut la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a dans les cas suivants ? Préciser les éventuelles asymptotes.

Fonction 1 : $a = -\infty; -2; -1; 0; 2; +\infty$



Fonction 2 : $a = -\infty; -4; -3; -1; 2; 3; +\infty$



2.3 Propriétés des limites

2.3.1 Fonctions usuelles

Pour toute fonction usuelle, la valeur de sa limite en un réel a du domaine est égale à sa valeur numérique calculée en a.

Propriété

Si f est une fonction usuelle, $\forall a \in \mathsf{dom}f$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Toutes les fonctions usuelles sont donc continues sur leur domaine de définition.

Exemples :

1) $f(x) = x^2 + 3$
   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2^2 + 3 = 7$

2) $f(x) = \sqrt{-3x}$
   $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \sqrt{-3.(-1)} = \sqrt{3}$

La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ a pour domaine $\mathsf{dom}f = \mathbb{R}^+$. Remarquons donc que $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ n'a pas de sens car $\sqrt{x}$ n'est pas défini pour des valeurs inférieures à 0. Par contre, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

2.3.2 Cas particulier de la fonction inverse

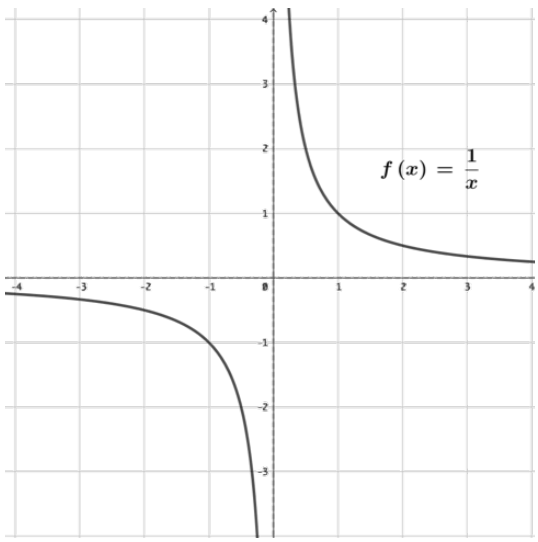
Considérons la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dont le domaine est $\mathbb{R}_0$ et $\overline{\mathsf{dom}f} = \overline{R}$. La fonction inverse possède des limites remarquables aux points appartenant à $\overline{\mathsf{dom}f}$ mais pas à $\mathsf{dom}f$. On peut les observer graphiquement.

Grâce au graphe de f, on constate que :

- ⋆ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- ⋆ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- ⋆ $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$



Pour déterminer le signe de l'infini dans le cas où x tend vers 0, nous pouvons recourir au tableau de signes de la fonction :

x		0	
$\frac{1}{x}$	$-$	$\nexists$	$+$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Remarque : ces limites nous indiquent que la fonction inverse admet

⋆ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$,

⋆ une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2.3.3 Opérations sur les limites

Propriété

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si ces limites existent et sont finies, on a :

$$\lim_{x\to a} \big(k.f(x)\big) = k.\lim_{x\to a} f(x) \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

2.3.4 Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soient $r, s \in \mathbb{R}_0^+$. Voici les règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$. FI signifie « forme indéterminée ».

Limite d'une somme

$+$	$-\infty$	$-r$	0	r	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
$-s$	$-\infty$	$-s-r$	$-s$	$-s+r$	$+\infty$
0	$-\infty$	$-r$	0	r	$+\infty$
s	$-\infty$	$s-r$	s	$s+r$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

En résumé, **la limite d'une somme est égale à la somme des limites** sauf dans les cas d'indétermination $\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$. Ces cas devront se résoudre en utilisant des méthodes de calculs spécifiques sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

Limite d'un produit

$\times$	$-\infty$	$-r$	0	r	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$-s$	$+\infty$	$s \cdot r$	0	$-s \cdot r$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
s	$-\infty$	$-s \cdot r$	0	$s \cdot r$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

En résumé, **la limite d'un produit est égale au produit des limites** sauf dans les cas d'indétermination $0 \cdot (\pm\infty)$. Ces cas devront se résoudre en utilisant des méthodes de calculs spécifiques sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

Limite d'un quotient

		Numérateur				
	$\div$	$-\infty$	$-r$	0	r	$+\infty$
Dénominateur	$-\infty$	FI	0	0	0	FI
	$-s$	$+\infty$	$\frac{r}{s}$	0	$-\frac{r}{s}$	$-\infty$
	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	s	$-\infty$	$-\frac{r}{s}$	0	$\frac{r}{s}$	$+\infty$
	$+\infty$	FI	0	0	0	FI

En résumé, **la limite d'un quotient est égale au quotient des limites** sauf dans les cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ces cas devront se résoudre en utilisant des méthodes de calculs spécifiques sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

Il est également à observer que $\pm\infty$ n'est pas un cas d'indétermination. En effet, le signe à placer devant ∞ sera déduit en fonction du signe du dénominateur.

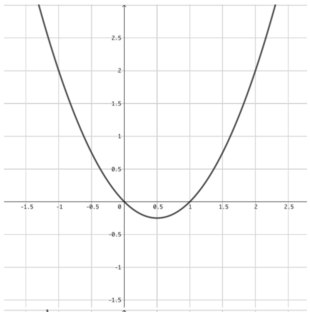
Quelques remarques sur les formes indéterminées...

⋆ Le réel 0 est absorbant pour la multiplication des réels et $\pm\infty$ joue un rôle similaire tout en n'étant pas un réel.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \cdot 0 = 0 \text{ et } r \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

Dès lors, que vaut $0 \cdot (\pm\infty)$?
Lorsque nous arrivons à une expression de ce type, nous parlons de « forme indéterminée ».
Les formes indéterminées relevées sont $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

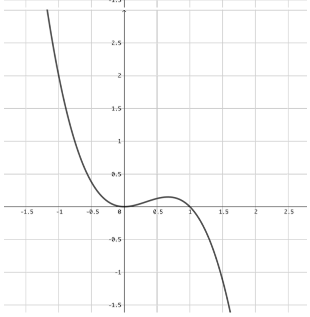
⋆ Pourquoi (par exemple) $\infty - \infty$ est une forme indéterminée ?



$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \lim_{x\to+\infty} x = [+\infty - (+\infty)]$$

Or, en observant le graphe de $f(x) = x^2 - x$, on constate que

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x^3) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \lim_{x\to+\infty} x^3 = [+\infty - (+\infty)]$$

Or, en observant le graphe de $f(x) = x^2 - x^3$, on constate que

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x^3) = -\infty$$

↬ Nous obtenons donc des résultats différents pour $[\infty - \infty]$, d'où la forme indéterminée.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement.

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 3}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + 3)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x - 2}$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2}{x + 3}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{4}{x^2} + 3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{x^2 - x + 6}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1}$

9) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-3}{x - 1}$

10) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

2.4 Limite en l'infini

2.4.1 Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exemple : déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

En utilisant les propriétés des limites vues précédemment, nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+2) = (+\infty)^2 - 3.(+\infty) + 2 = +\infty - (+\infty) + 2 = [+\infty - (+\infty)] \qquad \text{(FI)}$$

Pour lever l'indétermination, mettons en évidence le terme de plus haut degré. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+2) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2.(1-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2})\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2.(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2.\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}) = +\infty.(1-0+0)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Généralisation avec un polynôme quelconque :

Tout polynôme de degré n s'écrit sous la forme $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. En procédant comme avant, en mettant le terme de plus haut degré en évidence, on arrive au résultat suivant :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

NB : cette propriété peut être étendue aux fonctions irrationnelles.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes en indiquant les étapes intermédiaires :

1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x+1)$

2) $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-2x+1)$

3) $\lim_{x\to-\infty}|x^3-x+3|$

4) $\lim_{x\to-\infty}(3-3x^2+5x)$

5) $\lim_{x\to+\infty}\big((x-3).(2-3x^2)\big)$

6) $\lim_{x\to+\infty}(3-4x-6x^4)$

7) $\lim_{x\to-\infty}(1-2x)^5$

8) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-3x+5}$

9) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+5x-3}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3-x^2}$

2.4.2 Limite en l'infini d'un quotient de fonctions

Exemple 1 : déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{4x^3 + 5x + 2}{3x^3 + x^2 - 1}$.

En utilisant les propriétés des limites vues précédemment, nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 5x + 2}{3x^3 + x^2 - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^3 + 5x + 2)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3 + x^2 - 1)} = \frac{+\infty + \infty + 2}{+\infty + \infty - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \text{(FI)}$$

A nouveau, mettons en évidence les termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 5x + 2}{3x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3.\left(1 + \frac{5}{4x^2} + \frac{2}{4x^3}\right)}{3x^3.\left(1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{3x^3}. \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{5}{4x^2} + \frac{2}{4x^3}}{1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{3x^3}.\frac{1+0+0}{1+0-0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{3x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{4}{3}$, le graphe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \dfrac{4}{3}$.

Exemple 2 : déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x^2 - 3}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x^2 - 3} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - 3)} = \frac{\sqrt{+\infty - 3.(-\infty) + 1}}{+\infty - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \text{(FI)}$$

En procédant comme précédemment

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x^2 - 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2.(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}}{x^2.(1 - \frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x^2}. \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2}. \lim_{x\to-\infty} \frac{1-0+0}{1-0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Le graphe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$.

Généralisation avec une fonction rationnelle quelconque :

Soit $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$.

En procédant comme avant, en mettant au numérateur et au dénominateur le terme de plus haut degré en évidence, on obtient le résultat suivant :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_p x^p}$$

⋆ Si $m = p$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m x^m}{b_p x^p} = \dfrac{a_m}{b_p} \rightsquigarrow$ Asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{a_m}{b_p}$.

⋆ Si $m < p$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m x^m}{b_p x^p} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m}{b_p}.\dfrac{1}{x^{p-m}} = 0 \rightsquigarrow$ AH d'équation $y = 0$.

⋆ Si $m > p$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m x^m}{b_p x^p} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{a_m}{b_p}.x^{m-p}\right) = \infty$ (signe à déterminer)
$\rightsquigarrow$ Pas d'AH.

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
NB : cette propriété peut être étendue aux fonctions irrationnelles.

Exercice 6. Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser l'existence d'éventuelles asymptotes.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 4}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x - 9}$

3) $f(x) = \dfrac{x - x^2}{3x^3 + 2x - 1}$

4) $f(x) = \dfrac{(1 - x^2).(3x^3 - 2)}{x^6}$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2}$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{4x^2 - 5x}}$

7) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2 - 2x}}$

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}}{x - 3}$

10) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$

2.4.3 Indétermination du type $\infty - \infty$ avec des racines

Exemple : déterminons les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - x$.

⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x\right) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$

Le graphe de f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x\right) = \Big[(+\infty) - (+\infty)\Big]$ (FI)

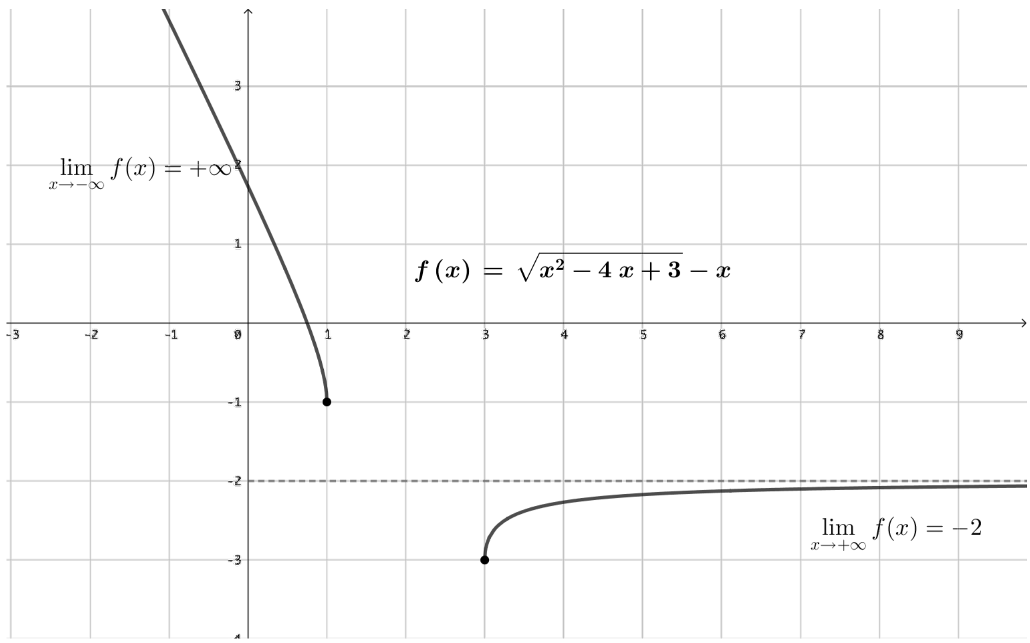
Procédons comme avant en mettant en évidence le terme de plus haut degré dans la racine :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2.(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}-x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|.\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x.\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right) && |x| = x \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\
&= \lim_{x\to+\infty} x.\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right) && x \text{ mis en évidence} \\
&= \left[\infty.0\right] && \text{(FI)}
\end{aligned}$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée, nous devons procéder différemment.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right).\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} && \text{On multiplie et divise par le BC du numérateur} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} && \text{formule des BC} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{|x|+x} && \text{plus hauts degrés} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x} = -2
\end{aligned}$$

Le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $+\infty$.



Remarque : avec cet exemple, on remarque que le comportement en $-\infty$ d'une fonction peut être différent de celui en $+\infty$.

Propriété

Pour lever une indétermination du type $[\infty - \infty]$ avec des racines carrées, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le **binôme conjugué** du numérateur.

Exercice 7. Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser l'existence d'éventuelles asymptotes.

1) $f(x) = x + \sqrt{x^2+2}$

2) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 3x}$

3) $f(x) = x - \sqrt{4x^2+1}$

4) $f(x) = x^2 - \sqrt{2x^2 - x}$

5) $f(x) = \sqrt{x^3} - x^2$

6) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x}$

7) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+2} + x + 1$

8) $f(x) = \sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^3+2x}$

9) $f(x) = 3x - \sqrt[3]{x^3+1}$

10) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 5}$

2.5 Limite en un réel

2.5.1 Limite du type $\frac{r}{0}$ avec $r \in \mathbb{R}_0$

Exemple 1 : déterminons la limite en 2 de la fonction $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2-4}$.

En utilisant les propriétés des limites, nous obtenons :

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-x}{x^2-4} = \frac{3-2}{2^2-4} = \frac{1}{0} = \infty$$

Pour déterminer le signe de l'infini, nous devons étudier le signe de $f(x)$ autour de $x = 2$.

Le numérateur valant 1 en $x = 2$, nous allons uniquement établir le tableau de signes du dénominateur.
$x^2 - 4$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 2. Son tableau de signes est le suivant :

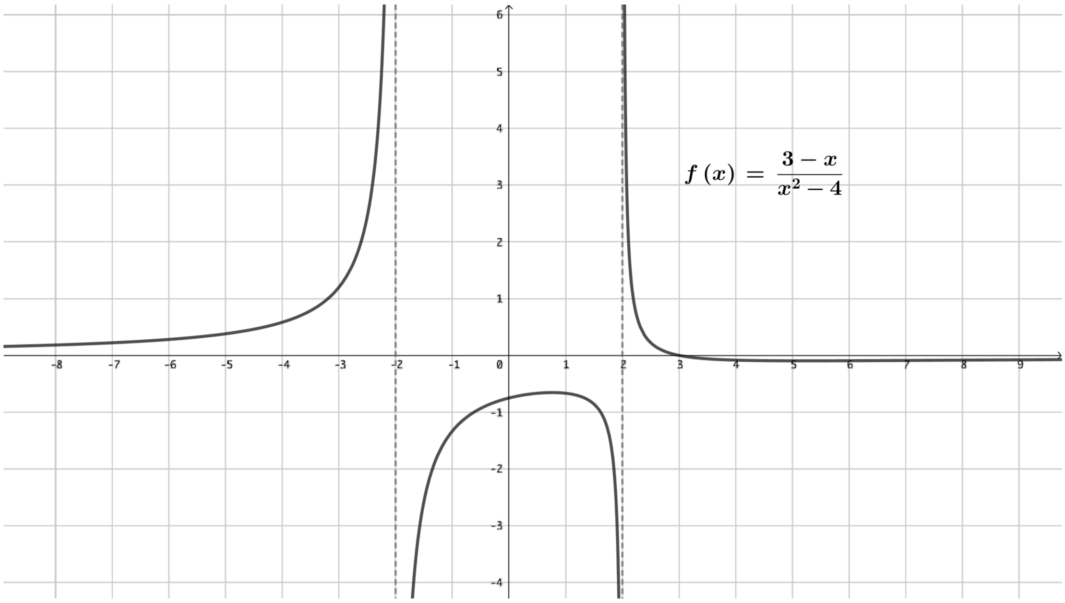
x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Puisque le comportement à gauche et à droite de 2 est différent, nous allons devoir distinguer la limite à gauche de la limite à droite de 2.
Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3-x}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{3-x}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La limite en $x = 2$ de la fonction f n'existe donc pas.

Puisque $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$, le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 2$.



Exemple 2 : déterminons la limite en -1 de la fonction $f(x) = \dfrac{-x-2}{\sqrt{x^2-1}}$.

En utilisant les propriétés des limites :

$$\lim_{x\to -1} \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-(-1)-2}{\sqrt{(-1)^2-1}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

A nouveau, étudions le signe du dénominateur :

x		-1		1	
$\sqrt{x^2-1}$	$+$	0	$\nexists$	0	$+$

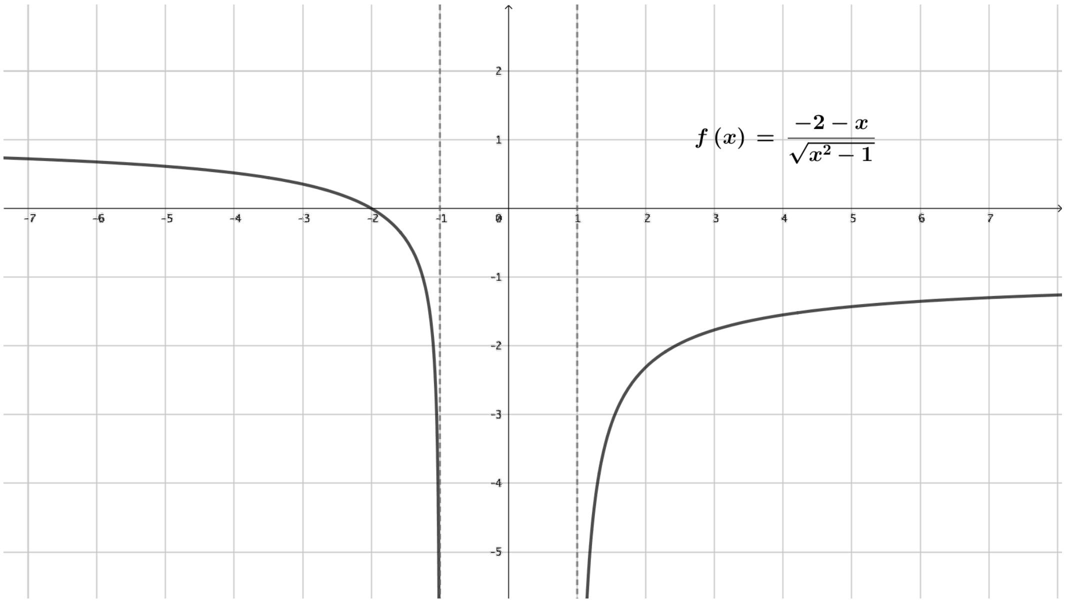
La limite à droite de -1 n'a pas de sens car dom $f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

A gauche de -1, nous avons le résultat suivant :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = -1$.

Remarque : dans ce cas, il n'était pas nécessaire d'établir un tableau de signes pour le dénominateur, étant donné qu'une racine carrée est toujours positive.



Exemple 3 : déterminons la limite en 1 de la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-6}{(x-1)^2}$.

En utilisant les propriétés des limites :

$$\lim_{x \to 1} \frac{-x^2+5x-6}{(x-1)^2} = \frac{-1+5-6}{(1-1)^2} = \frac{-2}{0} = \infty$$

A nouveau, étudions le signe du dénominateur :

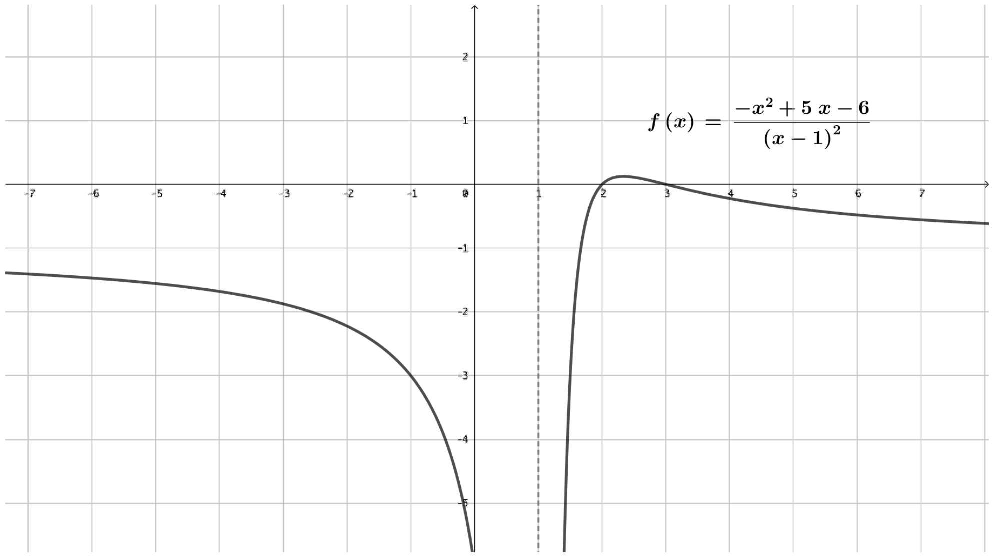
x		1	
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$

Le comportement à gauche et à droite de 1 est similaire. Dès lors,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2+5x-6}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2+5x-6}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2+5x-6}{(x-1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 1$.

Remarque : à nouveau, dans ce cas, il n'était pas nécessaire d'établir un tableau de signes pour le dénominateur, étant donné qu'un carré est toujours positif.



Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-x}{x^2-4x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{2x^2-x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}$

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{9-x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to -1/3} \dfrac{3x-1}{|3x+1|}$

7) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-2x}{x^2-9}$

8) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{1}{x^2+3x-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}$

10) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-5x+6}$

2.5.2 Indétermination du type $\dfrac{0}{0}$

Exemple 1 : déterminons la limite en -3 de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(-3)^2-9}{-3+3} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \text{(FI)}$$

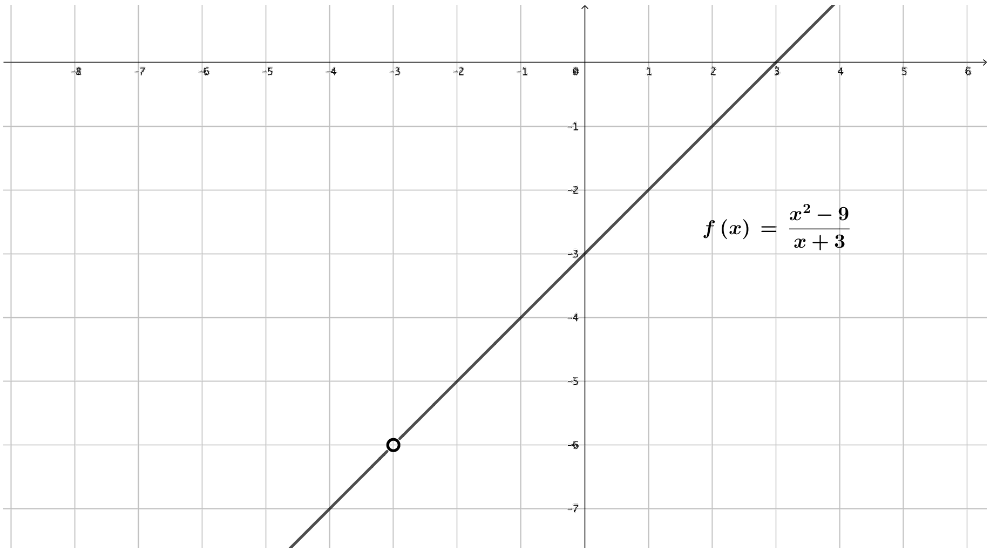
Puisque le numérateur et le dénominateur s'annulent en $x=-3$, cela signifie que -3 est une racine du numérateur et du dénominateur.

Pour lever l'indétermination, il suffit alors de factoriser le numérateur et le dénominateur pour y faire apparaître le facteur $(x+3)$ et ainsi le simplifier.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3).(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -3-3 = -6$$

Puisque $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$, le graphe de f possède un « trou » au point $(-3, -6)$.

Remarque : les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ et $g(x) = x - 3$ sont égales sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.



Exemple 2 : déterminons la limite en 1 de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 3 + 3 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \text{(FI)}$$

A nouveau, factorisons le numérateur et le dénominateur afin d'y faire apparaître des facteurs $(x - 1)$ (*Remarque* : $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$) :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1).(x^2 + x - 2)}{(x - 1).(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \text{(FI)}$$

Mettons encore un facteur $(x - 1)$ en évidence au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1).(x + 2)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{3}{0} = \infty$$

Étudions le signe du dénominateur :

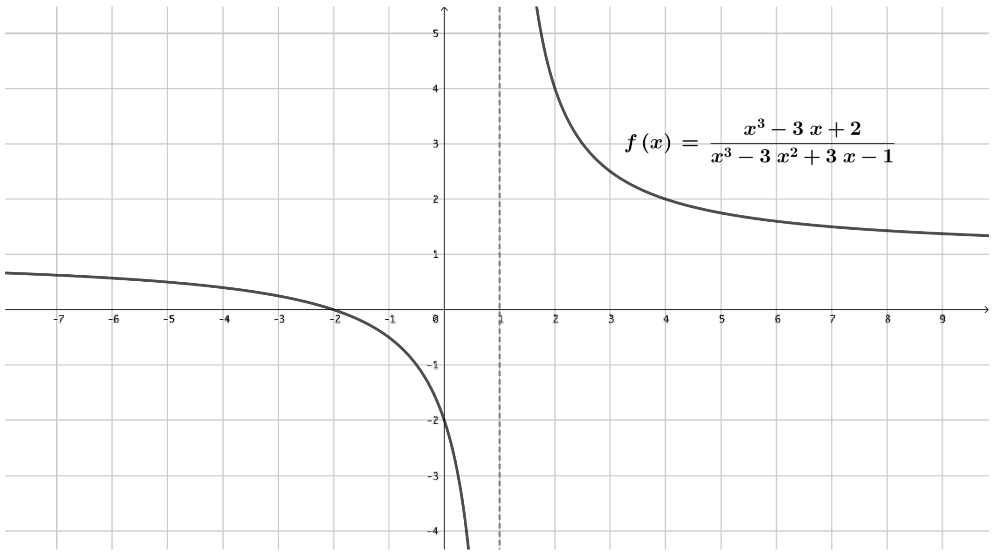
x		1	
$x - 1$	$-$	0	$+$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

La limite en $x = 1$ de la fonction f n'existe donc pas.

Puisque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$, le graphe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 1$.



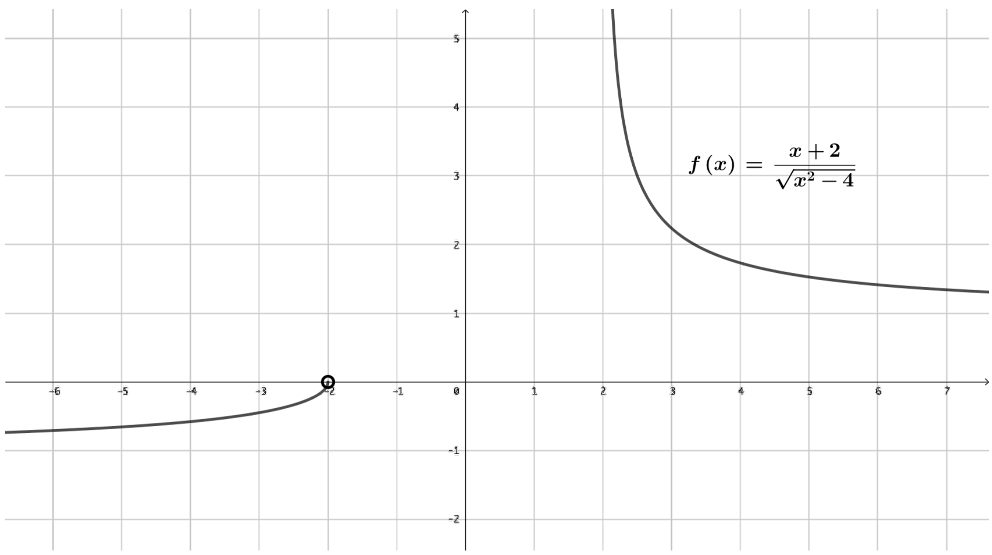
Exemple 3 : déterminons la limite à gauche en -2 de la fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{-2+2}{\sqrt{(-2)^2-4}} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \text{(FI)}$$

Pour lever l'indétermination, multiplions le numérateur et le dénominateur par la racine puis factorisons le numérateur et le dénominateur afin d'y faire apparaître des facteurs $(x+2)$:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x+2).\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x+2).\sqrt{x^2-4}}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = 0$$

Le graphe de f possède un « trou » au point $(-2{,}0)$.



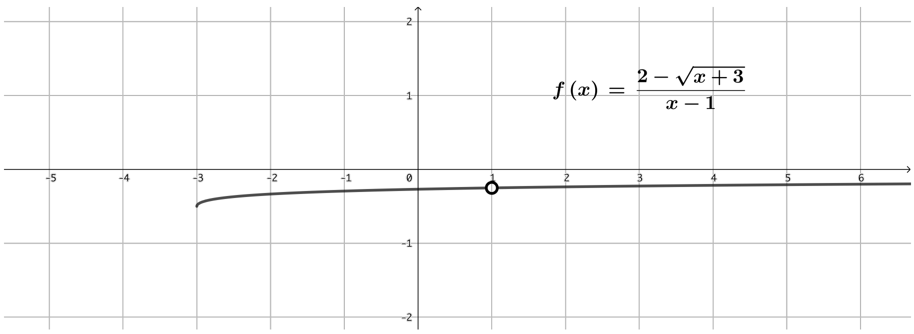
Exemple 4 : déterminons la limite en 1 de la fonction $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{2-\sqrt{1+3}}{1-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \text{(FI)}$$

Pour lever l'indétermination, multiplions le numérateur et le dénominateur par le binôme conjugué du numérateur puis factorisons le numérateur et le dénominateur afin d'y faire apparaître des facteurs $(x-1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(2-\sqrt{x+3}).(2+\sqrt{x+3})}{(x-1).(2+\sqrt{x+3})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4-(x+3)}{(x-1).(2+\sqrt{x+3})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{(x-1).(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1).(2+\sqrt{x+3})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2+\sqrt{x+3}} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{1+3}} = \frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

Le graphe de f possède un « trou » au point $(1, \frac{-1}{4})$.



Exercice 9. Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement.

1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+3x-2}{4x^2-1}$

3) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$

4) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2}$

5) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{x^2+4x+4}$

6) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x-1}}$

7) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+2}}{2-\sqrt{2x+8}}$

8) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{x-1}$

9) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}}$

10) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{-2x}+x}{x+2}$

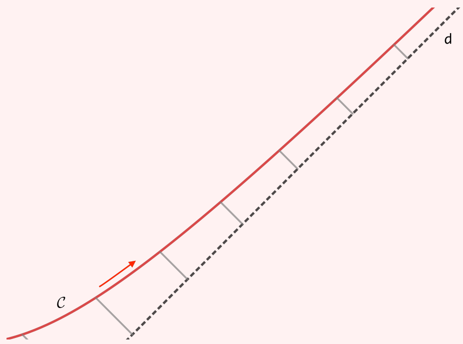
2.6 Les Asymptotes

Nous avons déjà rencontré deux types d'asymptotes : les **asymptotes verticales** et les **asymptotes horizontales**.

Définissons maintenant le terme **asymptote** de manière plus générale :

Définition

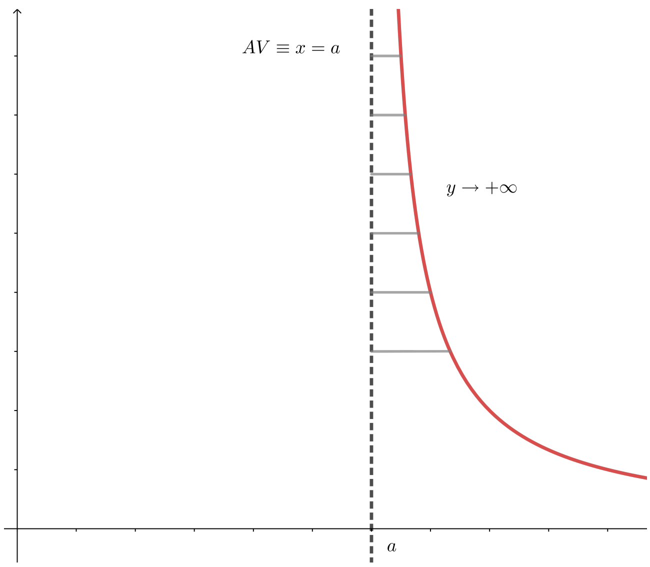
Une droite d est **asymptote** à une branche infinie de courbe si et seulement si la distance d'un point de cette courbe à la droite d tend vers 0 quand le point s'éloigne à l'infini sur la courbe.



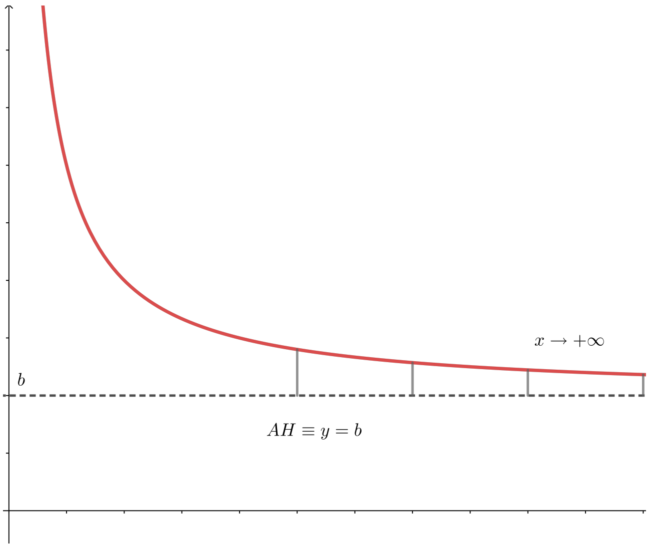
Remarque : nous sommes en présence d'une **branche infinie** dès qu'au moins une des coordonnées x ou y tend vers l'infini.

Il existe trois types d'asymptotes.

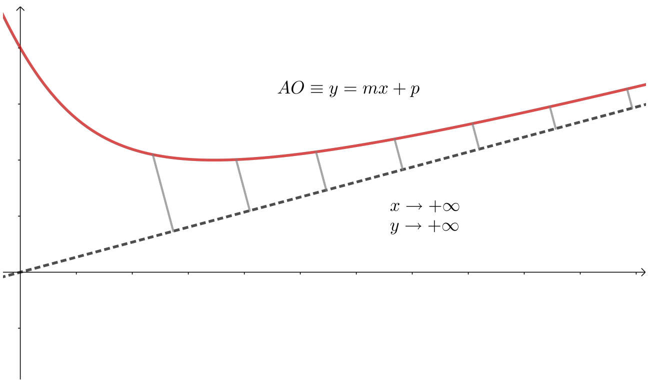
⋆ Asymptote verticale :



⋆ Asymptote horizontale :



⋆ Asymptote oblique :



2.6.1 Asymptotes verticales

Définition

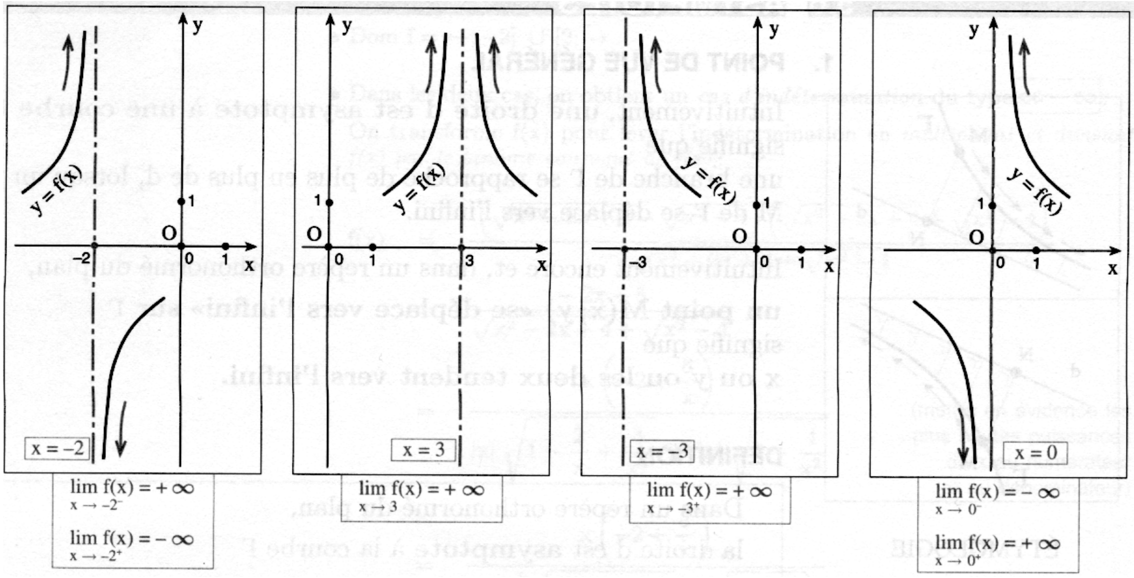
La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** au graphe cartésien de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \text{ et/ou } \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

Remarques :

1) Une fonction peut posséder plusieurs asymptotes verticales.
2) Une fonction ne croise jamais une de ses asymptotes verticales.

Exemples graphiques :



Exemples algébriques : voir sections précédentes.

2.6.2 Asymptotes horizontales

Définition

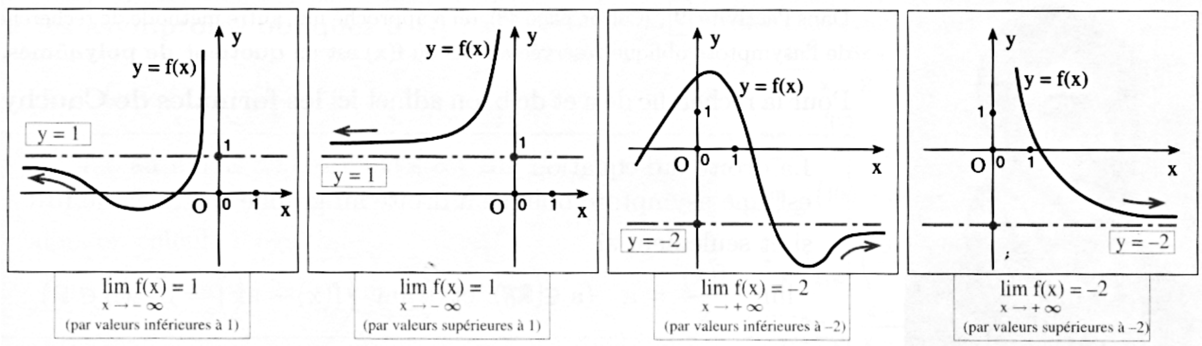
La droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** au graphe cartésien de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ si et seulement si

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (asymptote horizontale à gauche)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (asymptote horizontale à droite)

Remarques :

1) Une fonction ne peut posséder qu'une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Les asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$ peuvent être différentes.
3) Une fonction peut croiser une de ses asymptotes horizontales.

Exemples graphiques :



Exemples algébriques : voir sections précédentes.

2.6.3 Asymptotes obliques

Définition

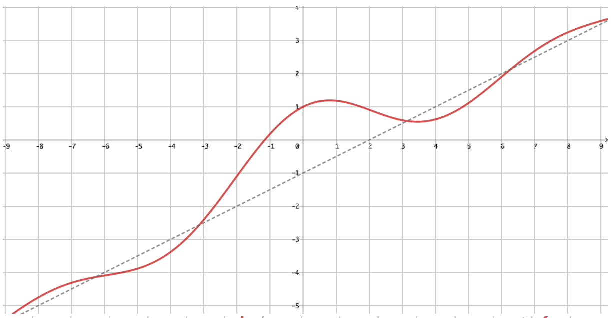
La droite d'équation $y = mx + p$ est une **asymptote oblique** au graphe cartésien de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ si et seulement si

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0$ (asymptote oblique à gauche)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0$ (asymptote oblique à droite)

Remarques :

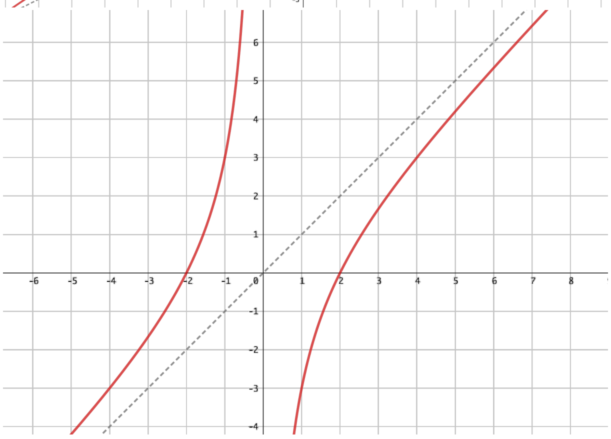
1) Une asymptote horizontale est un cas particulier d'une asymptote oblique pour lequel $m = 0$.
2) Une fonction ne peut posséder qu'une asymptote horizontale ou oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.
3) Les comportements en $-\infty$ et $+\infty$ peuvent être différents.
4) Une fonction peut croiser une de ses asymptotes obliques.

Exemples graphiques :



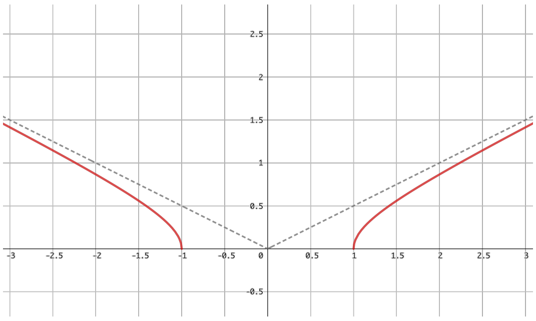
Les comportements en $-\infty$ et $+\infty$ sont identiques et le graphe coupe l'asymptote une infinité de fois.

$$AO \equiv y = \frac{x}{2} - 1$$



Les comportements en $-\infty$ et $+\infty$ sont identiques et le graphe ne croise jamais l'asymptote.

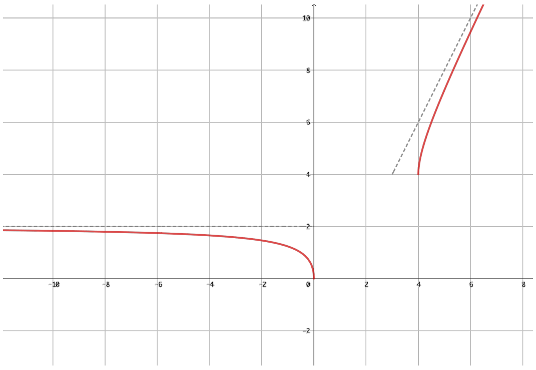
$$AO \equiv y = x$$



Les comportements en $-\infty$ et $+\infty$ sont différents.

$AO \equiv y = \frac{x}{2}$ en $+\infty$

$AO \equiv y = -\frac{x}{2}$ en $-\infty$



Les comportements en $-\infty$ et $+\infty$ sont différents.

$AO \equiv y = 2x - 2$ en $+\infty$

$AH \equiv y = 2$ en $-\infty$

Détermination des valeurs de m et p :

1) Calcul de m :

En développant la définition d'asymptote oblique, nous avons :

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(mx+p)\big)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx-p\big)=0$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, nous pouvons multiplier notre dernière expression par cette limite sans en changer le résultat.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx-p\big)=0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}.\big(f(x)-mx-p\big)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{p}{x}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to\infty}m-\lim_{x\to\infty}\frac{p}{x}=0\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-m-0=0\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-m=0\\
&\Leftrightarrow m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

2) Calcul de p :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx-p\big)=0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\Big[\big(f(x)-mx\big)-p\Big]=0\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)-\lim_{x\to\infty}p=0\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)-p=0\\ &\Leftrightarrow p=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)\end{aligned}$$

Propriété : formules de Cauchy

La droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique au graphe cartésien d'une fonction f si et seulement si

- $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\qquad (m \in \mathbb{R}_0)$
- $p = \lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big)$ $\qquad (p \in \mathbb{R})$

Remarques :

1) Attention, ces limites doivent avoir un sens !
2) Si $m = 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors l'asymptote est horizontale.
3) Si la fonction est un quotient de polynômes, il est parfois possible de déterminer les asymptotes horizontales et obliques au moyen de la division euclidienne.

Exemples algébriques :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$

Recherche d'éventuelles asymptotes obliques d'équation $y = mx + p$:

$\star$ $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\star$ $p = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-mx\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2-4}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-4}{x} = 0$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x$.

Remarque : en recherchant l'asymptote oblique au moyen des formules de Cauchy, nous n'avons aucune information sur la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Une façon d'y remédier est d'effectuer la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +0x & -4 & x \\ \cline{4-4}
-x^2 & & & x \\ \cline{1-3}
 & & -4 &
\end{array}
$$

La fonction de départ peut alors s'écrire sous la forme $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$.

En cherchant la limite en l'infini, $-\frac{4}{x}$ devient négligeable (tend vers 0). En l'infini, la fonction se comporte comme la droite $y = x$, qui est donc l'asymptote oblique.

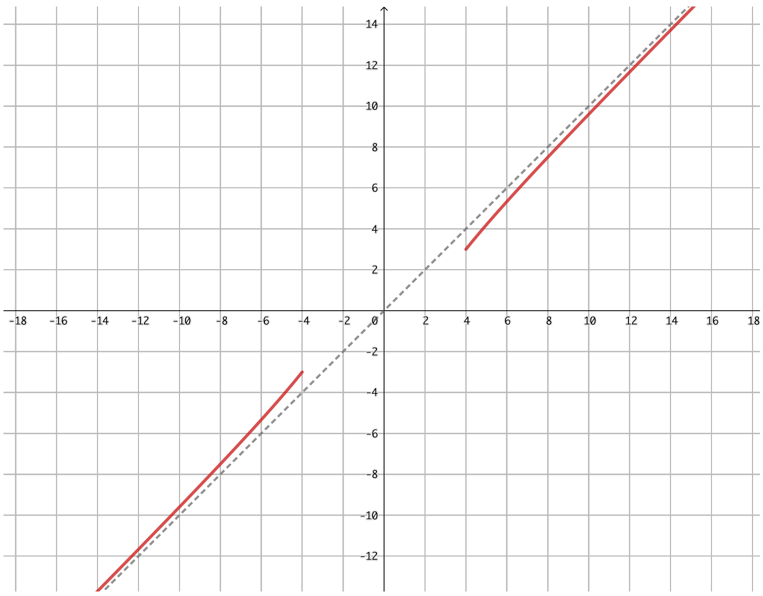
Pour déterminer si la fonction se trouve au-dessus ou en dessous de l'asymptote, étudions le signe de $-\dfrac{4}{x}$:

x		0	
$-\dfrac{4}{x}$	$+$	$\nexists$	$-$

⋆ En $-\infty$, $-\dfrac{4}{x}$ est strictement positif, ce qui signifie que $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$ est strictement supérieure à $y = x$.
↬ La fonction se trouve au-dessus de l'AO.

⋆ En $+\infty$, $-\dfrac{4}{x}$ est strictement négatif, ce qui signifie que $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$ est strictement inférieure à $y = x$.
↬ La fonction se trouve en dessous de l'AO.

Avec les informations dont nous disposons, nous connaissons le comportement en l'infini de la fonction.



2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$

Recherche d'éventuelles asymptotes obliques d'équation $y = mx + p$:

$\star$ $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \pm\infty$

Le graphe de f n'admet pas d'asymptotes obliques.

Remarque : effectuons la division euclidienne pour vérifier ce résultat...

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +0x^2 & +0x & -1 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & & -1 & \\
 & x^2 & +x & & \\ \cline{2-4}
 & & x & -1 & \\
 & & -x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

La fonction de départ s'écrit alors $f(x) = x^2 - x + 1 - \dfrac{2}{x + 1}$.

En cherchant la limite en l'infini, $-\dfrac{2}{x + 1}$ tend vers 0.
La fonction se comporte donc comme la fonction $g(x) = x^2 - x + 1$, qui n'est pas une fonction du premier degré. Le graphe de f n'admet donc pas d'asymptotes obliques.

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

Recherche d'éventuelles asymptotes obliques d'équation $y = mx + p$:

$\star$ $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0$

$\star$ $p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Le graphe de f admet donc une asymptote **horizontale** d'équation $y = 1$.

Remarque 1 : puisqu'il s'agit d'une asymptote horizontale, le calcul de m et p n'était pas nécessaire.

Remarque 2 : effectuons la division euclidienne pour étudier la position du graphe par rapport à son asymptote.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +0x & -1 & x^2+x \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & 1 \\ \cline{1-3} & -x & -1 & \end{array}$$

La fonction de départ s'écrit alors $f(x) = 1 + \dfrac{-x-1}{x^2+x}$.

En cherchant la limite en l'infini, $\dfrac{-x-1}{x^2+x}$ tend vers 0. La fonction se comporte donc comme la droite $y = 1$, qui est son asymptote horizontale.

Déterminons la position de la fonction par rapport à cette asymptote en étudiant le signe de $\dfrac{-x-1}{x^2+x}$:

x		-1		0	
$-x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{-x-1}{x^2+x}$	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$

⋆ En $-\infty$, la fonction se trouve au-dessus de l'AH.

⋆ En $+\infty$, la fonction se trouve en dessous de l'AH.

Généralisation pour les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) :

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes.

- Si $d°(N(x)) = d°(D(x)) + 1$, alors le graphe de f admet une asymptote oblique dont nous pouvons trouver l'équation au moyen de la division euclidienne.

- $d°(N(x)) = d°(D(x))$, alors le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$, avec $b \neq 0$, que nous pouvons déterminer grâce à la division euclidienne.

- $d°(N(x)) < d°(D(x))$, alors le graphe de f admet comme asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$.

- $d°(N(x)) > d°(D(x)){+}1$, alors le graphe de f n'admet pas d'asymptote non verticale.

4) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} - 1$

Recherche d'éventuelles asymptotes obliques d'équation $y = mx + p$:

$\star$ $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2|x|}{x}$

La valeur de m diffère en $-\infty$ et $+\infty$. Séparons les cas.

En $+\infty$:

$\star$ $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2|x|}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\star$ $p = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(\sqrt{4x^2-1} - 1 - 2x\big) = [\infty - \infty]$

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\sqrt{4x^2-1} - (1+2x)\big).\big(\sqrt{4x^2-1} + (1+2x)\big)}{\sqrt{4x^2-1} + (1+2x)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 1 - (1 + 4x + 4x^2)}{\sqrt{4x^2-1} + (1+2x)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{4x} = -1 \end{aligned}$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ en $+\infty$.

Pour étudier la position du graphe par rapport à cette asymptote oblique, nous ne pouvons évidemment pas faire de division euclidienne ici. On va mettre en évidence le terme de plus haut degré sous la racine. On a :

$$f(x) = \sqrt{4x^2-1} - 1 = \sqrt{4x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - 1 = 2|x|\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - 1 = 2x\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - 1$$

car en $+\infty$, $|x| = x$. Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

Ainsi, on retrouve bien qu'en $+\infty$, la fonction se comporte comme la droite $y = 2x - 1$.

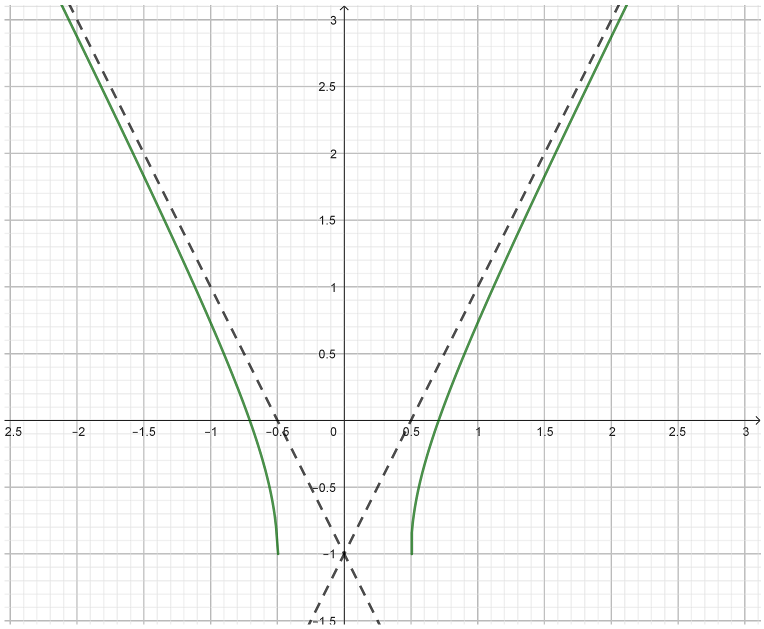
Et puisque $\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}} < 1$, le graphe est en-dessous de l'AO.

En $-\infty$:

Par des calculs similaires, nous trouvons que le graphe admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x - 1$ en $-\infty$ et qu'il se trouve sous l'AO.

Rappel : en $-\infty$, $|x| = -x$.

En déterminant le domaine de la fonction $\text{dom} f =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$ et certaines images ($f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -1$), on peut alors esquisser le graphe de la fonction.



2.6.4 Comment déterminer toutes les asymptotes d'une fonction ?

- Asymptotes verticales :
  - ⋆ Rechercher les réels qui adhèrent au domaine de la fonction sans lui appartenir.
  - ⋆ Étudier les limites (à gauche et à droite) en chaque réel a trouvé. Si au moins une de ces limites est infinie, alors le graphe de la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

- Asymptotes horizontales :
  Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction.
  - ⋆ Si la limite en $-\infty$ de la fonction vaut un réel b, alors le graphe admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = b$.
  - ⋆ Si la limite en $+\infty$ de la fonction vaut un réel b, alors le graphe admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = b$.

- Asymptotes obliques :
  - ⋆ Utiliser les formules de Cauchy.
  - ⋆ Si m et p sont des réels, alors le graphe admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$ (qui peut être différente à gauche et à droite).

Remarques :

1) Même si l'AH est un cas particulier de l'AO, pour plus de facilité, il vaut toujours mieux commencer par la recherche d'une éventuelle AH.
2) Une fonction peut ne pas posséder un ou plusieurs types d'asymptotes.

2.7 Limites trigonométriques

Les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente sont des fonctions périodiques. Ainsi, calculer des limites en l'infini de telles fonctions n'a pas de sens. On ne parlera jamais d'asymptote oblique ou horizontale pour une fonction périodique. On ne considèrera donc que les limites en un réel a.

2.7.1 Limites des fonctions trigonométriques usuelles

⋆ Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$. Quelque soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$$

⋆ La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Quelque soit le réel a appartenant à son domaine, on a :

$$\lim_{x \to a} \tan(x) = \tan(a)$$

Par contre, en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on peut observer les résultats suivants :

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$$

La fonction tangente admet donc une infinité d'asymptotes verticales d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

⋆ La fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Quelque soit le réel a appartenant à son domaine, on a :

$$\lim_{x \to a} \cot(x) = \cot(a)$$

Par contre, en $k\pi$, on peut observer les résultats suivants :

$$\lim_{x \to k\pi^-} \cot(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to k\pi^+} \cot(x) = +\infty$$

La fonction tangente admet donc une infinité d'asymptotes verticales d'équation $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.7.2 Limites particulières

Exemple 1 : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On est ici dans le cas d'une forme d'indétermination $\frac{0}{0}$. On peut pas factoriser le numérateur, car il s'agit de la fonction sinus, et l'utilisation d'un binôme conjugué ici n'a pas de sens car le numérateur et le dénominateur sont tous les deux des monômes.

Nous allons nous convaincre du résultat numériquement en prenant des valeurs de x de plus en plus proches de 0 et en calculant pour ces valeurs $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$			
x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-0{,}1$	$0{,}998\ldots$	$0{,}1$	$0{,}998\ldots$
$-0{,}01$	$0{,}999\ldots$	$0{,}01$	$0{,}999\ldots$
$-0{,}001$	$0{,}9999\ldots$	$0{,}001$	$0{,}9999\ldots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	1	0	1

On observe donc numériquement que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Graphiquement, la fonction f possède un « trou »au point $(0{,}1)$.

Exemple 2 : $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$.

A nouveau, nous sommes à une forme d'indétermination $\frac{0}{0}$. Cette fois, on va calculer la limite en multipliant le numérateur et le dénominateur par le binôme conjugué du numérateur et en utilisant le résultat précédent. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x\cdot(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))} && \text{Formule fondamentale de trigono} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \\
&= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Graphiquement, la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ possède un « trou »au point $(0{,}0)$.

Exemple 3 : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

Il s'agit encore d'une forme d'indétermination $\frac{0}{0}$. Pour la lever, nous allons utiliser le fait que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\\ &= 1\cdot\frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

Graphiquement, la fonction $f(x)=\dfrac{\tan(x)}{x}$ possède un « trou »au point (0,1).

Exercice 10. Calculer les limites trigonométriques suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin(x)}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan(4x)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{\sin(2x)}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\cdot\dfrac{\tan(x)}{x^2}$

2.8 Exercices récapitulatifs

Exercice 11. Esquisser le graphique d'une fonction f répondant aux conditions suivantes :

1) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\end{cases}$

2) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3\\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)=3\\ -2\notin \mathsf{dom} f\end{cases}$

Exercice 12. Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{1-7x}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-5x-3x^2}{x-2x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^2-1)(x+2)$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+4x-3}{x^2-2x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^3-x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{\tan(4x)}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2-5x}}$

8) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-4x}}{3x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4-x^2}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{3x^2+x}$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}+x+1\right)$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$

15) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

16) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{4x^3-4}}$

18) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

Exercice 13. Déterminer le domaine de définition et toutes les asymptotes aux graphiques des fonctions suivantes. Esquisser leur graphique.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}+3$

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$

6) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}+1-2x$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+1}}$

9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

10) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x.(x+2)}$

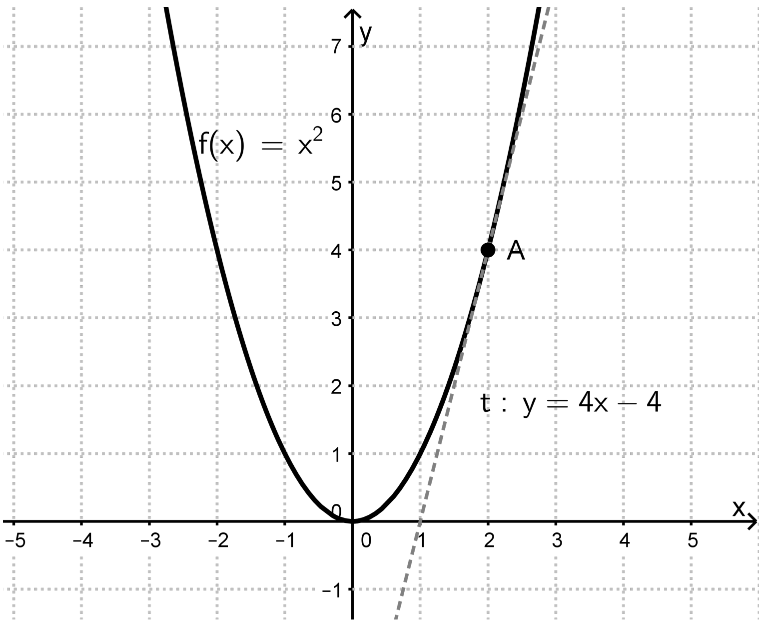
12) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2$

3 Les dérivées

3.1 Introduction

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.
Nous souhaitons déterminer l'équation de la tangente au point $A(2{,}4)$ du graphique de la fonction f.

GeoGebra nous donne cette équation :



Pour rappel, l'équation d'une droite de coefficient angulaire m et comprenant le point $(x_A{,}y_A)$ peut s'écrire sous la forme

$$d \equiv y - y_A = m.(x - x_A)$$

Pour trouver l'équation de la tangente, nous connaissons un point de la droite (le point A), mais nous ne connaissons pas la pente :

$$t \equiv y - 4 = m.(x - 2)$$

Pour trouver m, il nous faudrait un deuxième point de la droite, mais nous ne l'avons pas.
Idée : nous allons prendre un point P de la parabole et déterminer l'équation de la droite passant par A et P.
Ensuite, pour trouver l'équation de la tangente, on va rapprocher P de A.

<u>Avec $P_1(-1{,}1)$</u>

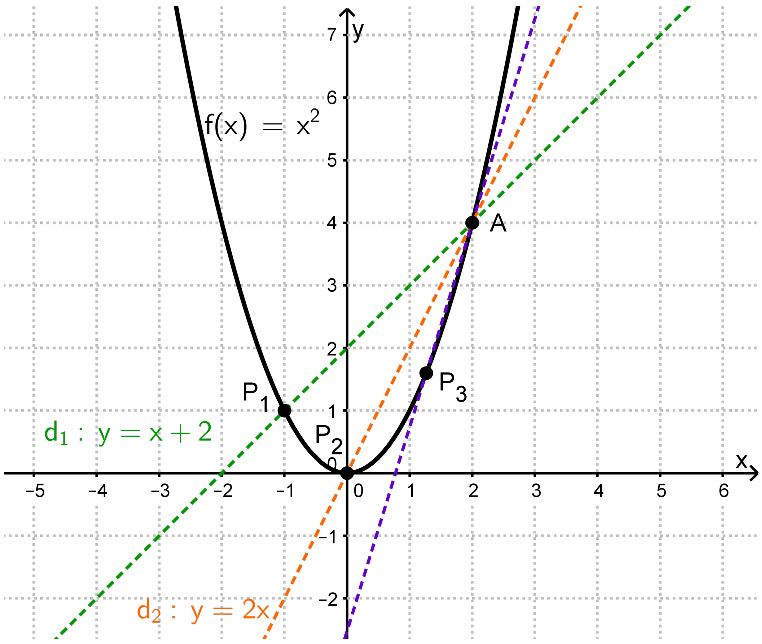
$d_1 \equiv y - 4 = \dfrac{1-4}{-1-2}.(x-2) \;\Rightarrow\; d_1 \equiv y = x + 2$

<u>Avec $P_2(0,0)$</u>

$d_2 \equiv y - 4 = \dfrac{0-4}{0-2}.(x-2) \;\Rightarrow\; d_2 \equiv y = 2x$

<u>Avec $P_3(x_P,x_P^2)$</u>

$d_3 \equiv y - 4 = \dfrac{x_P^2-4}{x_P-2}.(x-2)$



Maintenant, « rapprochons » P de A. On obtient ce résultat en rapprochant l'abscisse de P de celle de A. Cela revient à faire **tendre** l'abscisse de P vers celle de A.

On obtient :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x_P\to 2} \frac{x_P^2-4}{x_P-2} = \lim_{x_P\to 2} \frac{(x_P-2).(x_P+2)}{x_P-2} \\ &= \lim_{x_P\to 2} (x_P+2) = 2+2 = 4 \end{aligned}$$

L'équation de la tangente t au point $A(2,4)$ du graphique de f est donc

$$t \equiv y - 4 = 4.(x-2) \Leftrightarrow t \equiv y = 4x - 4$$

3.2 Vocabulaire et notations

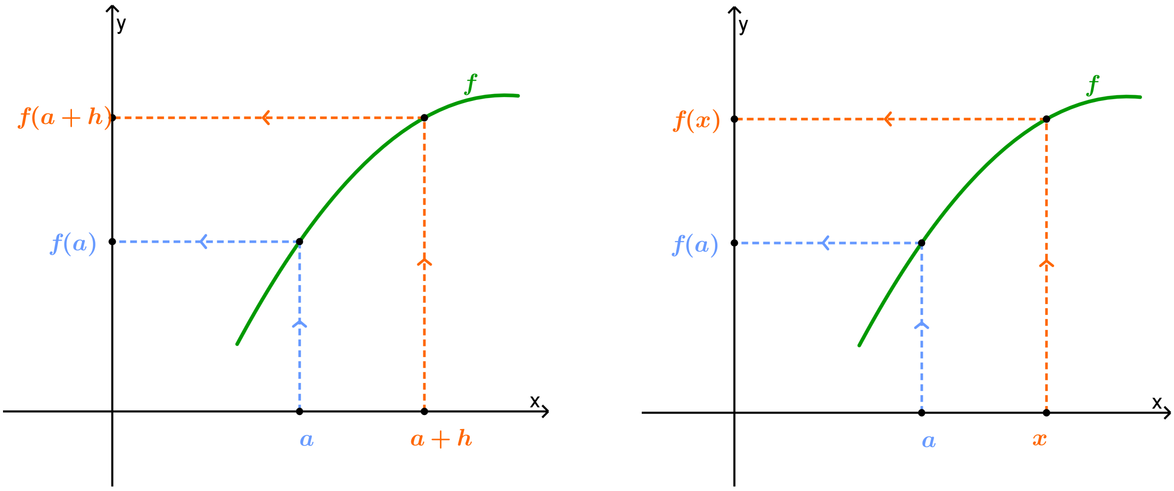
Soit :

⋆ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$;

⋆ $a \in \mathrm{dom} f$, avec f continue en a ;

⋆ I, un intervalle centré en a, inclus à dom f ;

⋆ $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h$, noté x, $\in I$.



Définition

Le **taux d'accroissement** de f en a est le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Quand x tend vers a, h tend vers 0, nous obtenons le **nombre dérivée** de f en $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

pourvu que ces limites existent dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 : soit $f(x) = 2x^2+1$, calculer $f'(1)$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2.(1+h)^2+1-(2.1+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2+4h+2h^2+1-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+4h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h.(2h+4)}{h} = 2.0+4 = 4 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+1-3}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1).(x+1)}{x-1} = 2.(1+1) = 4 \end{aligned}$$

Exemple 2 : soit $f(x) = \sqrt{x}$, calculer $f'(a)$, avec $a \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}).(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h.(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h.(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

<u>ou</u>

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}).(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a).(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{(x-a).(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

La fonction f est **dérivable** en a si elle admet une dérivée en a.

La **dérivée** de la fonction f est la fonction f' définie par $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$, si f est dérivable en x.

Le **domaine de dérivabilité** de f, noté $\mathsf{dom}_d f$, est l'ensemble des réels où f est dérivable.

3.3 Interprétation géométrique

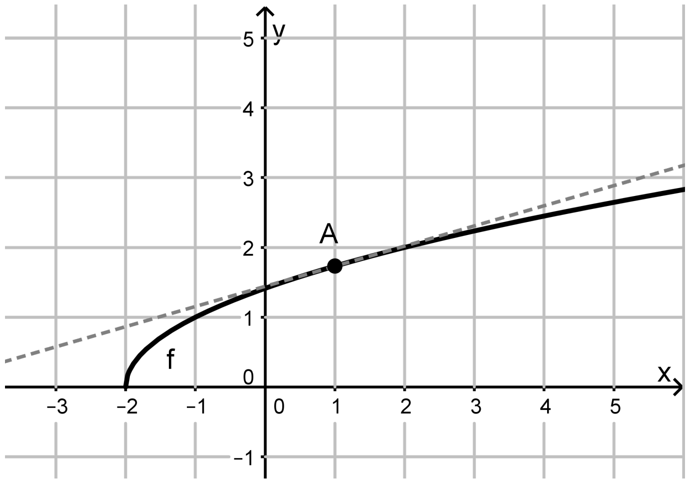
La dérivée de f en a est la pente de la tangente au graphique de f au point $\big(a,f(a)\big)$.

Si f n'est pas dérivable en a ($\in \text{dom} f$) :

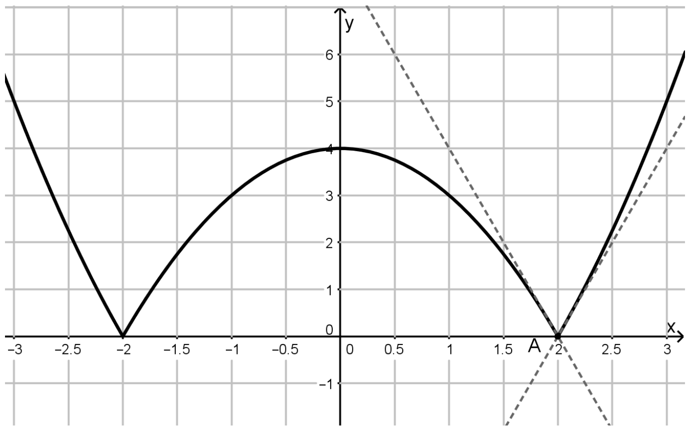
- $\star$ soit f n'est pas continue en a ;
- $\star$ soit a est un **point anguleux** : la dérivée à gauche et à droite existent, au moins une des deux est finie mais elles sont distinctes ;
- $\star$ soit la tangente en a est **verticale** ; si la dérivée à gauche et la dérivée à droite sont infinies mais distinctes, a est un **point de rebroussement**.

Exemple 1 : $f(x) = \sqrt{x+2}$

Il existe une tangente en $x = 1$.
La fonction est dérivable en $x = 1$.

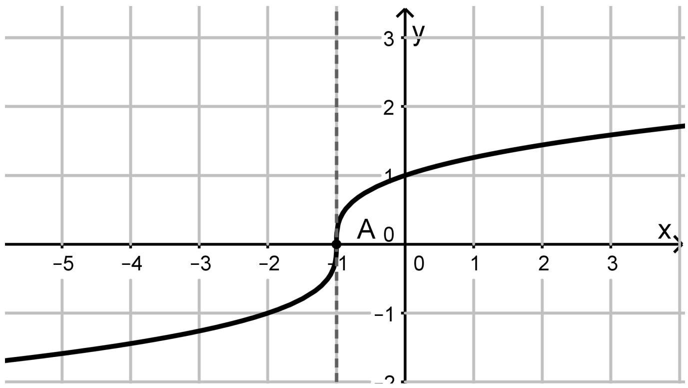


Exemple 2 : $f(x) = |x^2 - 4|$



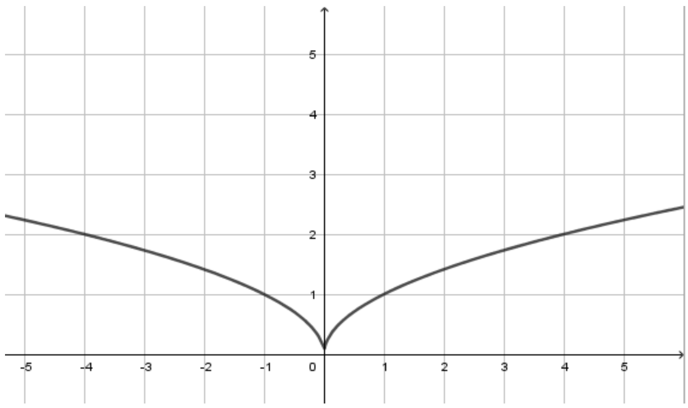
Il n'existe pas de tangente en $x = 2$ (elle n'est pas unique).
La fonction est continue en $x = 2$ mais n'est pas dérivable en $x = 2$. Il s'agit d'un point anguleux.

Exemple 3 : $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$



Il n'existe pas de tangente à pente réelle en $x = -1$. La tangente est verticale.
La fonction est continue en $x = -1$ mais n'est pas dérivable en $x = -1$.

Exemple 4 : $f(x) = \sqrt{|x|}$



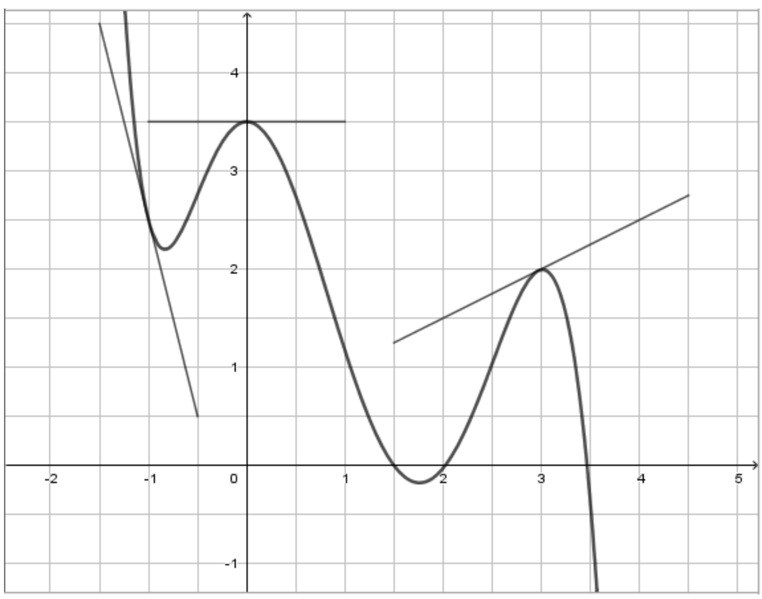
Il n'existe pas de tangente à pente réelle ou verticale en $x = 0$. En effet, on peut montrer que la dérivée à gauche $f'(0^-) = -\infty$ et la dérivée à droite $f'(0^+) = +\infty$.
La fonction est continue en $x = 0$ mais n'est pas dérivable en $x = 0$. Il s'agit d'un point anguleux.

Propriété

Si f est dérivable au point d'abscisse a, l'équation de la tangente au graphique de f au point $\big(a,f(a)\big)$ est donnée par

$$t \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{ou encore} \quad t \equiv y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

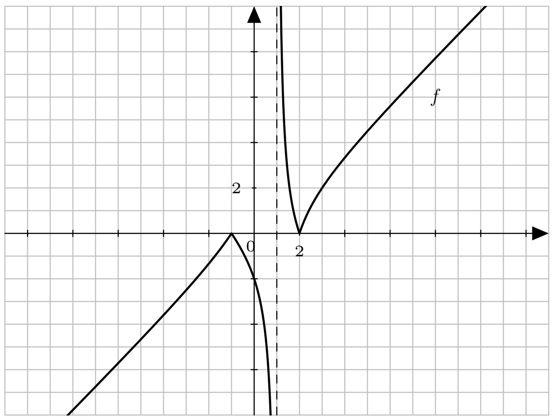
Exercice 1. Soit la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous.

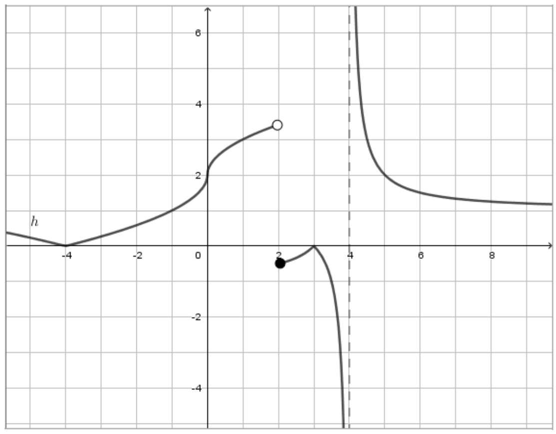


(1) Lire graphiquement $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(3)$.

(2) Donne une équation des tangentes au graphe de f en $x=-1$, $x=0$ et $x=3$.

Exercice 2. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions représentées ci-dessous. Pour les points du domaine de définition en lesquels la fonction n'est pas dérivable, en donner la raison.





3.4 Formules usuelles de dérivation

Nous ne démontrerons aucune des formules. Elles peuvent toutes se démontrer en utilisant la définition en terme de limite du taux d'accroissement. Cependant, on gardera en tête l'interprétation géométrique : si $f'(a)$ existe, il s'agit de la pente de la tangente au graphe de f en $(a,f(a))$.

Ainsi, le graphique d'une fonction constante $f(x)=k$ est la droite horizontale $y=k$. En tout point d'abscisse a, la tangente au graphe de f est horizontale et donc de pente nulle. Dès lors, $f'(a)=0$ quelque soit a. Il s'agit de la première formule ci-dessous.

3.4.1 Dérivées des fonctions polynomiales et linéarité

Propriété

- ⋆ **Fonction constante** : $k'=0$, $\forall k\in\mathbb{R}$.
- ⋆ **Fonction identité** : $x'=1$.
- ⋆ **Fonction carrée** : $(x^2)'=2x$.
- ⋆ **Fonction racine carrée** : $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- ⋆ **Généralisation** : $(x^n)'=nx^{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{R}$.

De plus, la dérivation est linéaire.

Propriété

- ⋆ **Produit par une constante** : $(cf(x))' = cf'(x)$.
- ⋆ **Dérivée d'une somme** : $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

Exercice 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = 5x^5$

(b) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 2$

(c) $f(x) = \sqrt{x} - 2x$

(d) $f(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

Exercice 4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $y = x\sqrt{x}$ au point (1,1).

Exercice 5. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $y = x^4 - 6x^2 + 4$ en lesquels la tangente est horizontale.

3.4.2 Dérivées des fonctions triogonométriques et cyclométriques

Propriété

- ⋆ **Sinus** : $(\sin x)' = \cos x$
- ⋆ **Cosinus** : $(\cos x)' = -\sin x$
- ⋆ **Tangente** : $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- ⋆ **Cotangente** : $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
- ⋆ **Arcsinus** : $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ⋆ **Arccosinus** : $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ⋆ **Arctangente** : $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- ⋆ **Arccotangente** : $(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Exercice 6. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = -2\cos x$

(b) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

(c) $f(\theta) = \sin\theta - \dfrac{1}{2}\cot\theta$

(d) $f(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

Exercice 7. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $y = x + 2\sin x$ en lesquels la tangente est horizontale.

3.4.3 Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

Propriété

- **Exponentielle** : $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$
- **Logarithme** : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

En particulier, en base e, on a :

$$(e^x)' = e^x \quad \text{et} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Exercice 8. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = 3\log_3 x$

(b) $f(x) = 2e^x - 2^x$

(c) $f(x) = \log_{e^2} x + \ln x$

(d) $N(t) = \dfrac{5^t}{3^t}$

Exercice 9. Déterminer le point de la courbe $y = e^x$ en lequel la tangente est parallèle à la droite $y = 2x$.

Exercice 10. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $y = x^2 - \ln x$ au point (1,1).

3.4.4 Dérivées d'un produit et d'un quotient

Dans les formules précédentes, nous avons vu que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées. De même, la dérivée d'une différence est égale à la différence des dérivées. Cela ne se passe pas aussi simplement dans le cas d'un produit ou d'un quotient.

En effet, prenons par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. On a donc $f(x) \cdot g(x) = x^3$. On obtient ainsi :

$$(f(x) \cdot g(x))' = (x^3)' = 3x^2,\ f'(x) = (x^2)' = 2x,\ g'(x) = x' = 1,\ \text{et } f'(x) \cdot g'(x) = 2x.$$

Clairement, $(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x)$. De façon similaire, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x} = x,\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = x' = 1,\ \text{et } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{1} = 2x.$$

Encore une fois, il est clair que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Les formules pour le produit et le quotient sont énoncées ci-dessous. La formule pour le quotient permet d'obtenir, en particulier, la formule pour l'inverse d'une fonction.

Propriété

Dérivée d'un produit : $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Fonction inverse : $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2}$

Exercice 11. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$

(c) $g(t) = t^3\cos t$

(d) $g(x) = \dfrac{x}{\tan x}$

Exercice 12. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ au point $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$.

3.4.5 Dérivées de fonctions composées

Propriété

Si g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors la fonction composée $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ est dérivable en x. La dérivée de $(f\circ g)(x)$ est donnée par :

$$(f\circ g)'(x) = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Exercice 13. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = (x^2-1)^8$

(b) $g(x) = \sqrt{\sin x}$

(c) $h(x) = \sin(\sqrt{x})$

(d) $f(u) = e^{\arctan(2u)}$

Exercice 14. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $y = \ln(x^2-3)$ au point $(2,0)$.

3.5 Dérivation et étude graphique d'une fonction

3.5.1 Dérivée seconde

Nous allons voir que la dérivée d'une fonction mais aussi la dérivée de sa dérivée, appelée **dérivée seconde**, permettent d'étudier graphiquement une fonction.

Définition

Soit une fonction $f(x)$ dérivable et soit $f'(x)$ sa dérivée. Si $f'(x)$ est elle-même dérivable, alors la **dérivée seconde** de $f(x)$, notée $f''(x)$, est la dérivée de $f'(x)$:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)'$$

Exercice 15. Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 10$

(b) $f(x) = \arctan(x)$

(c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

3.5.2 Croissance et extrema d'une fonction

On peut établir un lien entre le signe de la dérivée d'une fonction f et la croissance de cette fonction f.

Propriété

Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ⋆ Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur cet intervalle.
- ⋆ Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Nous pouvons également établir un lien entre la dérivée et les extrema d'une fonction. Rappelons pour commencer les définitions de maximum et de minimum, local ou global.

Définition

Une fonction f admet :

- ⋆ un **maximum absolu/global** en $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si et seulement si $\forall x \in \operatorname{dom} f$: $f(x_0) \geq f(x)$.
- ⋆ un **minimum absolu/global** en $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si et seulement si $\forall x \in \operatorname{dom} f$: $f(x_0) \leq f(x)$.

⋆ un **maximum local** en $x_0 \in \text{dom } f$ si et seulement s'il existe un intervalle I ouvert et centré en x_0 tel que $\forall x \in I \cap \text{dom } f : f(x_0) \geq f(x)$.

⋆ un **minimum local** en $x_0 \in \text{dom } f$ si et seulement s'il existe un intervalle I ouvert et centré en x_0 tel que $\forall x \in I \cap \text{dom } f : f(x_0) \leq f(x)$.

Pour un minimum, la fonction est donc décroissante avant et croissante après.
Sa dérivée prend donc des valeurs négatives à gauche, s'annule au minimum et prend des valeurs positives à droite.

Pour un maximum, c'est l'inverse et donc la dérivée est positive à gauche, s'annule au maximum et est négative à droite.

Propriété

Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un maximum ou un minimum en $c \in I$, alors $f'(c) = 0$. De plus :

- si $f'(x) > 0$ à gauche de c et $f'(x) < 0$ à droite de c, alors f admet un maximum en c.
- si $f'(x) < 0$ à gauche de c et $f'(x) > 0$ à droite de c, alors f admet un minimum en c.

Le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f permet donc d'obtenir le tableau de variations de la fonction f.

Exemple : établir le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

On a $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
Déterminons les racines de f' : $\Delta = 324 - 4.24.3 = 36$.

$$x_1 = \frac{18-6}{6} = 2 \qquad\qquad x_2 = \frac{18+6}{6} = 4$$

Puisque $f'(x)$ est une fonction du second degré, nous pouvons obtenir facilement son tableau de signes et donc le tableau de variations de f.

x		2		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ est un extremum de f.

En effet, prenons par exemple la fonction cubique $f(x) = x^3$. Sa dérivée vaut donc $f'(x) = 3x^2$ et s'annule donc en $x = 0$.

Or 0 n'est pas un extremum de la fonction cubique, nous le remarquons d'ailleurs à l'aide du tableau de signes de sa dérivée.

x		0	
$f'(x)$	+	0	+

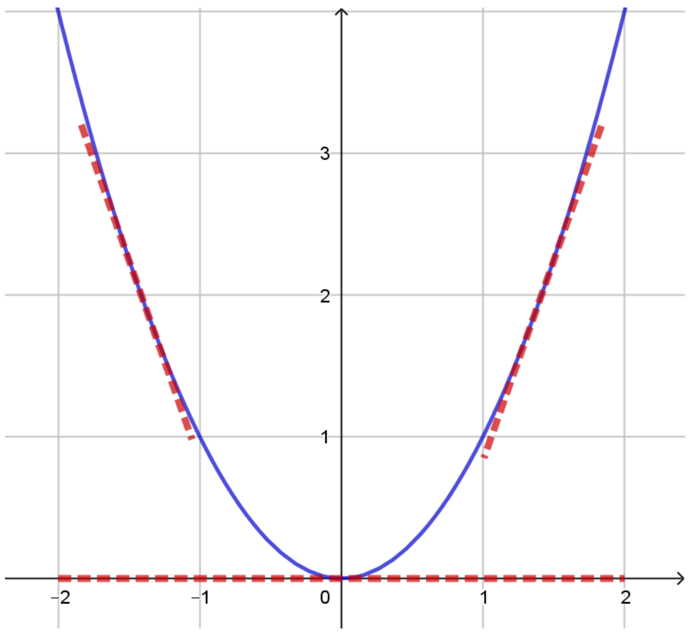
En fait, $x = 0$ est ce qu'on appelle un **point d'inflexion** de la fonction f. Nous reparlerons de cette notion dans la section suivante.

3.5.3 Concavité d'une fonction et dérivée

Le graphique d'une fonction peut être tourné vers le haut ou vers le bas. On parle de **concavité**.

Vers le haut :	Vers le bas :
$\overset{\uparrow}{\cup}$	$\underset{\downarrow}{\cap}$
f est convexe	f est concave

Nous pouvons établir un lien entre la concavité d'une fonction $f(x)$ et sa dérivée seconde. Pour l'illustrer, considérons la fonction $f(x) = x^2$ et traçons trois tangentes à sa courbe.

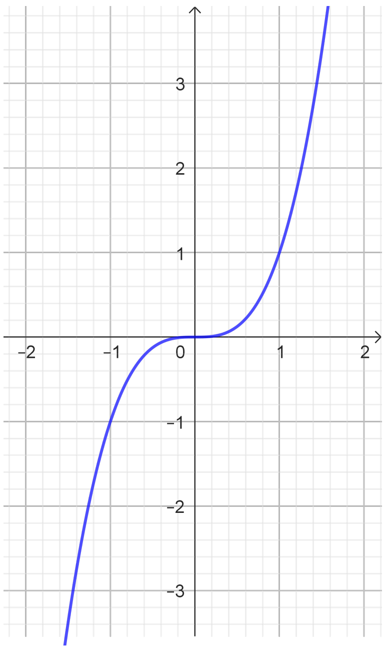


Evidemment, on remarque que la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.
Si on regarde de gauche à droite, on constate que les pentes des tangentes sont de plus en plus grandes.
La fonction qui donne les pentes (càd $f'(x)$) est donc une fonction croissante. Si elle est croissante, cela signifie que sa dérivée est positive.
Donc, la dérivée de la fonction qui donne les pentes est positive. Or, la dérivée de $f'(x)$ est la dérivée seconde de f, $f''(x)$.
On en déduit donc que $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et on avait remarqué que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
On peut généraliser cela.

Propriété

Soit $f(x)$ une fonction dérivable 2 fois sur un intervalle I.

- ⋆ Si $f''(x) > 0$ sur I, alors le graphe de f est convexe sur cet intervalle (sa concavité est tournée vers le haut).
- ⋆ Si $f''(x) < 0$ sur I, alors le graphe de f est concave sur cet intervalle (sa concavité est tournée vers le bas).



L'exemple que nous venons de voir, $f(x) = x^2$, est une fonction qui est toujours convexe sur son domaine. On a vu qu'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est convexe si $a > 0$ et concave si $a < 0$. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée seconde puisque $f''(x) = 2a$.

Mais certaines fonctions n'ont pas toujours la même concavité sur leur domaine de définition. C'est le cas, par exemple, de la fonction cubique $f(x) = x^3$. Le graphe de cette fonction est orienté vers le bas à gauche de 0 et orienté vers le haut à droite de 0.

Il y a donc un changement de concavité en $x = 0$. On dit que le graphe de f admet un **point d'inflexion** en $x = 0$.

Définition

Un **point d'inflexion** du graphe d'une fonction f est un point en lequel la concavité de f change de sens.

On peut établir le lien suivant entre l'existence d'un point d'inflexion et la dérivée seconde.

Propriété

Soit $f(x)$ une fonction dérivable 2 fois sur un intervalle I. Le graphe de f admet un point d'inflexion au point $(a; f(a))$ si f'' change de signe autour de a.

De plus, si f admet un point d'inflexion en $(a; f(a))$, alors $f''(a) = 0$.

Le tableau de signes de la dérivée seconde d'une fonction f permet donc d'obtenir le tableau de concavité de la fonction f.

Exemple : étudions la croissance et la concavité de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$. On a :
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x		2		3		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	↱	max	⤵	PI	↳	min	⤴

Le point (3,6) est un **point d'inflexion**.

<u>Remarque</u> : une unique ligne du tableau permet de décrire à la fois la croissance et la concavité d'une fonction f. Voici les 4 cas possibles :

f'	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	⤴	↱	↳	⤵

⚠ $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow f$ admet un point d'inflexion en x_0.

En effet, prenons par exemple $f(x) = x^4$. On a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$. On peut donc obtenir les variations et la concavité de f via le tableau ci-dessous.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Bien que la dérivée seconde s'annule en $x = 0$, le point $(0{,}0)$ n'est pas un point d'inflexion car la concavité ne change pas de sens.

Remarque : Un point d'inflexion peut également exister dans le cas d'une tangente verticale. C'est le cas, par exemple, de la fonction racine cubique $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dont le graphe admet une tangente verticale en $x = 0$ et un point d'inflexion en $x = 0$.

3.5.4 Étude graphique d'une fonction

L'étude complète d'une fonction f comprend, si nécessaire :

1) le domaine de f,
2) un éventuel domaine restreint sur lequel l'étude est suffisante pour être étendue ensuite au domaine entier de f (parité, périodicité),
3) les racines de f,
4) les asymptotes verticales, horizontales et obliques de f,
5) les dérivées première et seconde, leurs signes et les tableaux de variations et de la concavité de f,
6) les tangentes aux points du domaine où la dérivée de f n'est pas définie,
7) quelques points appartenant au graphe de f (ordonnée à l'origine...),
8) le graphique de f.

Exercice 16. Etudier les fonctions suivantes.

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

(b) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

3.6 Problèmes d'optimisation

Les **problèmes d'optimisation** ont pour but de déterminer la valeur maximale ou minimale d'une grandeur qui dépend d'une autre grandeur variable.

Comment résoudre un problème d'optimisation ?

1) Lire avec attention l'énoncé et veiller à la bonne compréhension de celui-ci : établir les données, les inconnues et les conditions imposées.

2) Réaliser un schéma reprenant les différents éléments du point précédent.

3) Utiliser des variables : choisir une lettre pour la grandeur que l'on souhaite maximiser ou minimiser (par exemple A pour une aire, h pour une hauteur, etc.) et choisir d'autres symboles pour les quantités inconnues (par exemple l et L pour la largeur et la longueur d'un rectangle, etc.).

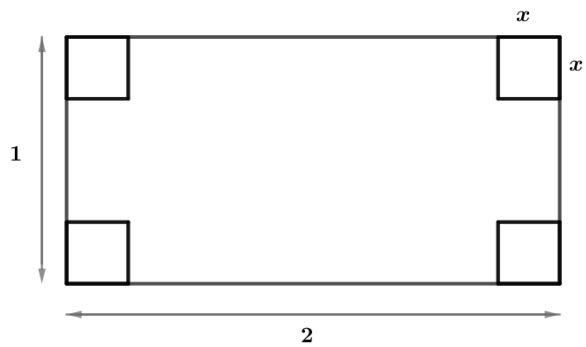
4) Exprimer la quantité Q, que l'on cherche à optimiser, en fonction des autres variables établies au point précédent.

5) Si plusieurs variables se trouvent dans l'expression précédente, utiliser les données afin d'éliminer toutes les variables sauf une dans l'expression de Q. Déterminer le domaine de définition de la variable restante.

6) Utiliser la dérivée de la fonction $Q(x)$ pour trouver le maximum ou le minimum global de cette fonction.

Exemple : On découpe un carré aux quatre coins d'une tôle rectangulaire dont les dimensions sont de 1 mètre sur 2. Les 4 carrés ainsi découpés ont tous la même dimension. En pliant les quatre côtés, on fabrique une boîte sans couvercle.
Quelles sont les dimensions du carré qui maximisent le volume de la boîte ainsi formé ?
Quel en est le volume ?

On note par x la longueur d'un côté d'un carré découpé à l'un des coins du rectangle.



Les dimensions de la boite étant donnée par : $h = x$ pour la hauteur, $l = 1 - 2x$ pour la largeur et $L = 2 - 2x$ pour la longueur, le volume de la boîte est donné par :

$$\begin{aligned} V(x) &= (1-2x).(2-2x).x \\ &= (2-2x-4x+4x^2).x \\ &= 4x^3-6x^2+2x \end{aligned}$$

On cherche à trouver le volume maximal de la boîte. Il faut donc dériver la fonction qui donne le volume de la boite, $V(x)$ et en trouver les racines.

$$V'(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

Recherche des racines :

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 1 = 0 \\ &\quad \Delta = 36 - 24 = 12 \\ &\quad x_1 = \frac{6+2\sqrt{3}}{12} \simeq 0{,}79 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6-2\sqrt{3}}{12} \simeq 0{,}21 \end{aligned}$$

La valeur 0,79 est à rejeter car $1 - 2.0{,}79 < 0$.

Vérifions maintenant que $x = 0{,}21$ est bien un maximum de la fonction $V(x)$.

x		0,21		(0,79)	
$V'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$V(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Il faut donc raboter la tôle de 0,21 mètre (= 21 cm) à chaque coin.
Dans ce cas, le volume de la boîte vaut $V = 0{,}58.1{,}58.0{,}21 \simeq 0{,}19$ m^3.

Exercice 17. Quelles sont les dimensions d'une canette de 33 cl qui nécessitent le moins de matériau possible ?

3.7 Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital permet de calculer la limite d'un quotient de fonctions à l'aide des dérivées dans le cas d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions telles que

- $\star$ f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert contenant a,
- $\star$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ présente un cas d'indétermination ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$),
- $\star$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (réelle ou infinie)

alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La règle reste valable lorsque l'on fait tendre x vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou lorsqu'on calcule une limite à gauche ou à droite.

Exemple 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$ donne une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Utilisons l'Hospital.

Rappelons-nous que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $(x-1)' = 1$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exemple 2 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ donne une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Utilisons l'Hospital.

Rappelons-nous que $(\sin x)' = \cos x$ et $x' = 1$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

⚠ La règle de l'Hospital n'est pas valable si la limite de départ ne donne pas un cas d'indétermination.

Par exemple, on a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{1-3x} = \dfrac{0}{-2} = 0$, il ne s'agit donc pas d'une forme indéterminée. Si on calcule maintenant les dérivées, $(x-1)' = 1$ et $(1-3x)' = -3$. On a donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)'}{(1-3x)'} = \dfrac{-1}{3}$ ce qui ne correspond pas à la limite de départ.

La règle de l'Hospital permet également de lever une indétermination de la forme $0\cdot(\pm\infty)$ car on peut facilement ramener un produit en un quotient : $fg = \dfrac{f}{\frac{1}{g}} = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$.

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ donne une une forme indéterminée $0\cdot(+\infty)$. Or, on peut écrire $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

et on se ramène à une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Par l'Hospital, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Enfin, on peut également utiliser la règle de l'Hospital pour lever une indétermination de la forme $\infty-\infty$ en se ramenant à une indétermination de la forme $\dfrac{0}{0}$ via la transformation suivante.

$$f-g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$$

Exemple : $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \tan x\right)$ donne une forme indéterminée $\infty-\infty$. Ramenons-nous à une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$:

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

On a bien que $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ donne une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Utilisons l'Hospital :

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{-0}{-1} = 0.$$

Exercice 18. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

(b) $\lim_{t\to0} \dfrac{\sin(2t)}{\tan(4t)}$

(c) $\lim_{u\to\frac{\pi}{2}} \big((2u-\pi)\tan(u) - 2\big)$

(d) $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

3.8 Exercices récapitulatifs

Exercice 19. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x + 3$

2) $f(x) = \frac{x}{3} - 1$

3) $f(x) = x^3 - 5x$

4) $f(x) = (x+1)(2x-3)$

5) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

6) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

7) $f(x) = (3x^2 - 5x + 2)(\frac{x}{2} - 5)$

8) $f(x) = \frac{4}{x^3}$

9) $f(x) = e^{x^2+3x-5}$

10) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

11) $f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$

12) $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

14) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

15) $f(x) = \arcsin(2x+1)$

16) $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(3x+1)}$

17) $f(x) = (2x+1)^3$

18) $f(x) = \frac{1}{\cos^3(x)}$

19) $f(x) = (2x-1)^3(3x+2)^2$

20) $f(x) = x \cdot \arctan(\sqrt{x})$

21) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{2-x}}$

22) $f(x) = \pi^{2017}$

23) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2+5x+3)}$

24) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{-1}{1-x^2}}$

25) $f(x) = (1+x^2) \cdot 2^x$

26) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\log_5(x)}$

27) $f(t) = 2\sqrt[4]{2+3t^2}$

28) $f(x) = \tan(\sqrt{x^2+2})$

29) $f(t) = (1 + 3x^2 - 4x + 4t^2)^2$

30) $f(u) = \left(\frac{2u^3-1}{1-3u^5}\right)^3$

31) $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^{4x-2}$

32) $f(x) = 2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3$

33) $f(x) \log_3\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$

34) $f(z) = \tan(z) \cdot \sqrt{z}$

35) $f(u) = \frac{2u^3-1}{(1-3u^5)^3}$

36) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}$

37) $f(x) = 3^{\sqrt[3]{x^2-1}}$

38) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$

39) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-x+3)^2}$

40) $f(x) = \dfrac{\cos^3(2x)}{\sqrt{\sin(x)}}$

Exercice 20. Déterminer l'équation de la tangente au graphique de $f(x)$ en son point d'abscisse a.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1\,; \quad a = -2$

2) $f(x) = \sqrt[3]{-2x^2+1}\,; \quad a = -1$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+x-2}\,; \quad a = 0$

4) $f(x) = (1+2x)^{10}\,; \quad a = 0$

5) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)\,; \quad a = \dfrac{-\pi}{6}$

6) $f(x) = e^{x^2-4}\,; \quad a = 2$

Exercice 21. Déterminer l'équation de la tangente au graphique de $f(x)$ parallèle à la droite d avec :

$$f(x) = \sqrt{4x+5} \quad \text{et} \quad d \equiv 2x - y = 0.$$

Exercice 22. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2$. Déterminer les points du graphe de f en lesquels la tangente a pour pente 9.

Exercice 23. Étudier et représenter graphiquement les différentes fonctions ci-dessous.

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{2x^2+2x+1}$

4) $f(x) = \sqrt{x.(x-3)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$

7) $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2-9}$

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$

9) $f(x) = \dfrac{-2x^2+5x+1}{x-2}$

10) $f(x) = \dfrac{x^3-3x-6}{2(x+2)}$

11) $f(x) = \sin(2x) - 2\cos(x)$

12) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

13) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

Exercice 24. Avec un fil de fer de 40 cm de long, il est possible de créer de nombreux rectangles. Quel est celui qui possède la plus grande aire ?

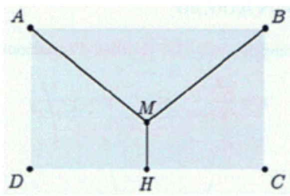
Exercice 25. Parmi tous les triangles rectangles de même hypoténuse, quel est celui qui possède la plus grande aire ? Quel est celui qui possède le plus grand périmètre ?

Exercice 26. Le coût total de production d'un article varie en fonction du nombre d'objets x fabriqués suivant la formule $C(x) = x^2 - 24x + 225$.

1) Calculer $C(1)$, $C(10)$, $C(15)$, $C(20)$ et $C(25)$.
2) Représenter graphiquement $C(x)$ pour $x \in [1,25]$.
3) Les articles sont vendus 16€ pièce. On note $V(x)$ le montant correspondant à la vente de x articles. Exprimer $V(x)$ en fonction de x et représenter graphiquement $V(x)$.
4) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x et le représenter. Pour rappel, le bénéfice est obtenu en soustrayant le coût de fabrication à la recette.
5) Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Le calculer.

Exercice 27. A partir d'un tronc d'arbre cylindrique de diamètre 12 dm, on veut fabriquer une poutre prismatique dont la base est un rectangle de largeur l et de longueur L inscrit dans un cercle de diamètre 12 dm. Sachant que la résistance d'une telle poutre est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la longueur du rectangle de base, calculer l et L pour que la résistance de la poutre soit maximale.

Exercice 28. On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir. On donne ci-dessous le plan de cette façade (MH est la médiatrice de BC). On a $|AB| = 10$ m et $|BC| = 6$ m. Trouver, sur cette façade, la position du point M pour minimiser la longueur des tuyaux.



Exercice 29. Soit un rectangle dont le périmètre est de 40 cm. En le faisant tourner autour de l'un de ses axes de symétrie, nous obtenons un cylindre. Quelles sont les dimensions du rectangle pour que ce cylindre ait :

1) le plus grand volume possible ?
2) la plus grande aire latérale ?
3) la plus grande aire totale ?

Exercice 30. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

6) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \tan x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \cot(2x)\cdot\sin(6x)$

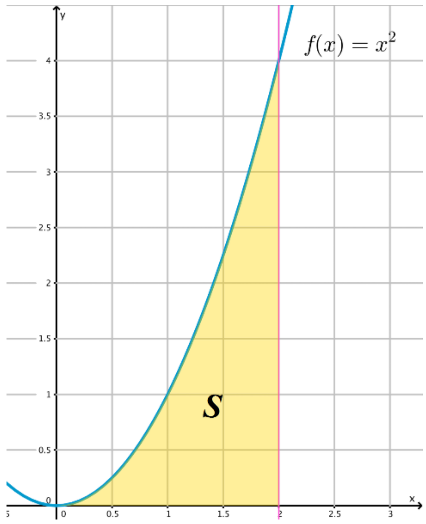
8) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} xe^{-x}$

4 Les intégrales

4.1 Introduction

Soit la fonction continue sur son domaine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

Nous souhaitons trouver l'aire de la surface du plan délimitée par le graphique de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
Notons S cette aire.



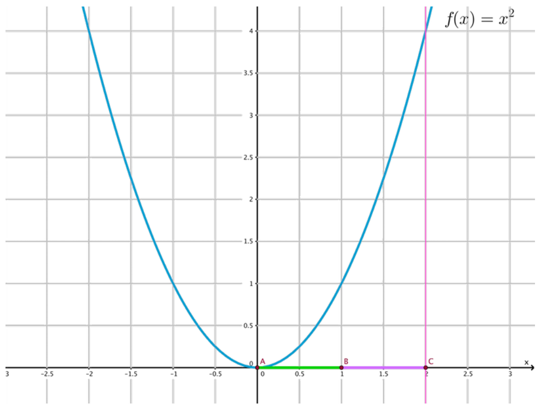
On va déterminer une approximation de l'aire recherchée en utilisant des **rectangles**.
On privilégie le rectangle comme figure géométrique car son aire est facile à déterminer.

4.1.1 Approximation de l'aire avec deux rectangles

Première étape :

On coupe l'intervalle [0,2] en deux parties égales (pour obtenir deux rectangles de même base).

On obtient donc deux segments de longueur 1 ([0,1] et [1,2]).

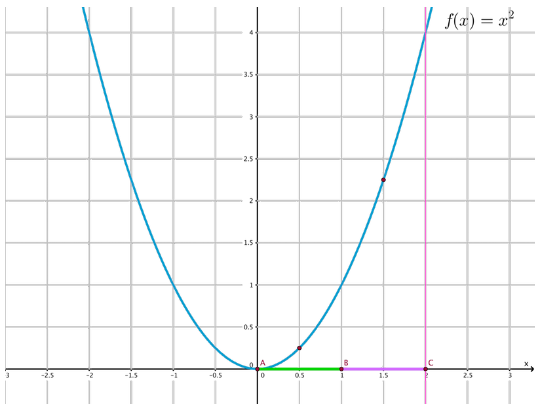


Deuxième étape :

On détermine le milieu de chaque sous-intervalle et ensuite les images par la fonction f de ces milieux.

Ici, les milieux sont $\frac{0+1}{2} = 0{,}5$ et $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

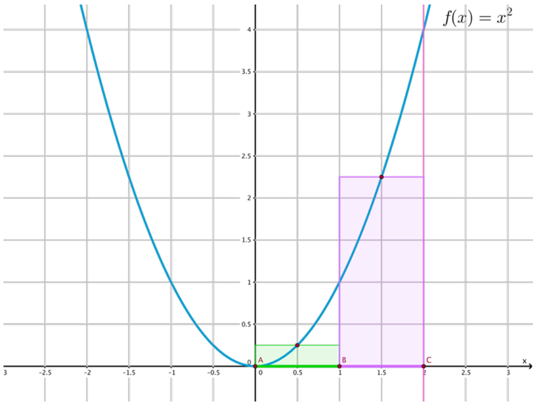
On calcule ensuite $f(0{,}5)$ et $f(1{,}5)$.



Troisième étape :

On construit les deux rectangles. Les bases sont les deux sous-intervalles de l'intervalle de départ et les hauteurs vont jusqu'aux images trouvées juste avant.

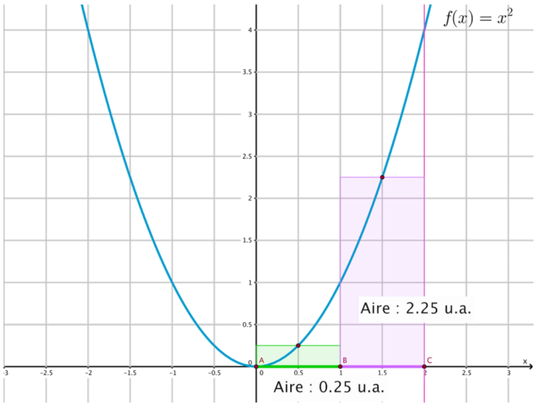
Ici, on construit le 1er rectangle à partir de l'intervalle $[0,1]$ et allant jusque $f(0,5)$ et le 2ème rectangle à partir de $[1,2]$ et allant jusque $f(1,5)$.



Quatrième étape :

On calcule les aires des deux rectangles et on les somme pour obtenir une approximation de S.

Aire du 1$^{\text{er}}$ rectangle : $1.f(0,5) = (0,5)^2 = 0,25$.
Aire du 2$^{\text{ème}}$ rectangle : $1.f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25$.
Aire totale : $0,25 + 2,25 = 2,50$ (unités d'aire).



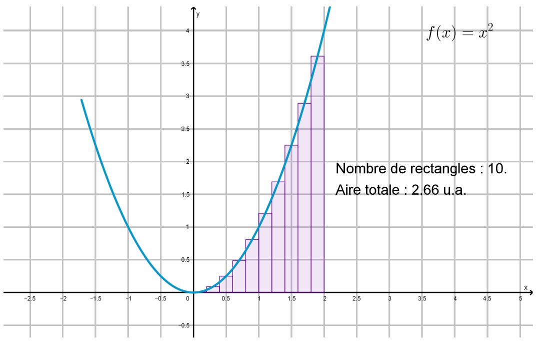
Constat :

Avec les deux rectangles, nous obtenons une approximation assez grossière de l'aire que nous cherchons $\rightarrow$ ce n'est pas très précis.

4.1.2 Amélioration de la précision

Pour améliorer la précision de l'encadrement, on va augmenter le nombre de rectangles.

Grâce à une animation GeoGebra, on constate qu'au plus le nombre de rectangles augmente, au plus nous nous rapprochons de la valeur exacte de l'aire que nous cherchons.



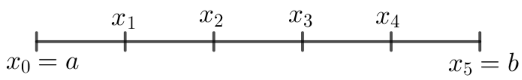
4.1.3 Calcul de l'aire avec n rectangles

Première étape :

Prendre une subdivision de l'intervalle de départ. Si l'intervalle $[a,b]$ doit être divisé en n sous-intervalles, on note : $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$.

Ce sont des abscisses !

Exemple avec $n = 5$:



Deuxième étape :

Pour chaque sous-intervalle, la surface à déterminer est remplacée par un rectangle dont la base, le **pas**, vaut $\frac{b-a}{n}$ et la hauteur est la valeur que prend la fonction au milieu de ce sous-intervalle.

$H = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ dans le sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, pour $1 \leq i \leq n$.

Troisième étape :

On calcule l'aire de chaque rectangle : elle vaut $\frac{b-a}{n}.f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ (base fois hauteur).

Quatrième étape :

Pour trouver l'approximation de l'aire de la surface avec une subdivision en n sous-intervalles, il suffit de sommer les aires des n rectangles.
Si S_n désigne cette approximation, nous obtenons alors :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}.f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

Rappel : $\sum$ (sigma) est le **symbole sommatoire** : il permet d'écrire de façon concise une somme.
Par exemple, $1+2+3+4+5+6 = \sum_{i=1}^{6} i$.

4.1.4 Retour sur l'exemple de départ

- Pas : $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$.
- Abscisse des x_i : $x_i = i.\frac{2}{n}$

  En effet : $x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n} = 2.\frac{2}{n}, x_3 = \frac{6}{n} = 3.\frac{2}{n}, \ldots, x_n = n.\frac{2}{n} = 2.$
- Hauteur d'un rectangle quelconque ($1 \leq i \leq n$) :

$$H_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = f\left(\frac{(i-1).\frac{2}{n}+i.\frac{2}{n}}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{2}{n}.(2i-1)}{2}\right) = f\left(\frac{2i-1}{n}\right) = \left(\frac{2i-1}{n}\right)^2$$

- Aire du rectangle construit sur le sous-intervalle $[x_{i-1},x_i]$: $A_i = \frac{2}{n}.\left(\frac{2i-1}{n}\right)^2$
- Aire des n rectangles : $S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2i-1}{n}\right)^2$

  Des formules usuelles sur les sommes permettent de montrer que (admis) :

$$S_n = \frac{8n^2-2}{3n^2}$$

- Aire totale de la surface : nous avons vu qu'au plus le nombre de rectangles augmentait, au plus l'approximation semblait correcte.
  L'idée est donc de travailler avec un **très grand nombre** de rectangles. En mathématiques, cela revient à utiliser une **limite** en faisant tendre le nombre de rectangles vers $+\infty$.

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{8n^2-2}{3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8n^2}{3n^2} = \frac{8}{3} \qquad \text{(Termes de plus hauts degrés.)}$$

- **<u>Conclusion</u> : l'aire de la surface du plan recherchée vaut donc $\frac{8}{3}$ u.a.**

4.1.5 Formalisation

De manière générale, et pour pouvoir travailler avec n'importe quel autre exemple, remplaçons :

⋆ $\frac{b-a}{n}$ par Δx car il s'agit d'une constante qui se lit sur l'axe des abscisses.

⋆ $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ par $a_i \in [x_{i-1},x_i]$.

Les a_i ne se trouvent pas forcément aux milieux des sous-intervalles, mais lorsque nous travaillons avec de nombreux rectangles, les largeurs des rectangles sont tellement petites qu'on peut travailler avec n'importe quelles valeurs des sous-intervalles sans commettre une erreur trop importante.

En généralisant l'exemple précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i).\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La notation dx signifie que les intervalles sont très petits et on peut donc assimiler a_i à x sur ces intervalles réduits.

4.2 Intégrale définie

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur son domaine.
Alors :

- $\star$ f est intégrable sur $[a,b]$.
- $\star$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i).\Delta x$ est appelée **intégrale définie** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$, avec a et b, les **bornes d'intégration** [a].

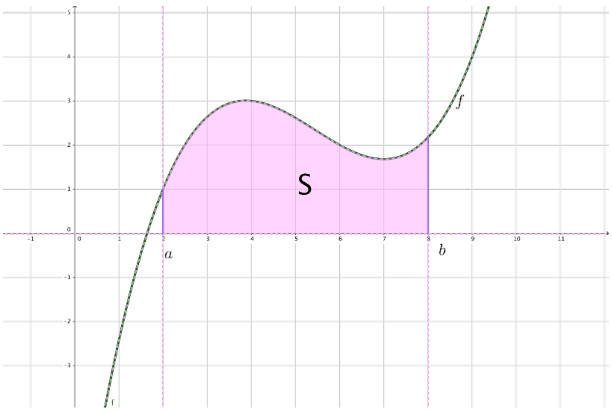
Remarque : l'intégrale ne change pas de valeur si on change la variable d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Cette définition est très peu utilisée en pratique.

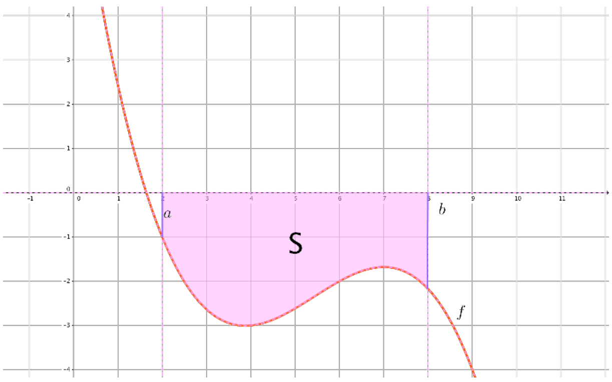
4.2.1 Interprétation géométrique

1) 1er cas : $f(x) \geq 0$, quel que soit $x \in [a,b]$.



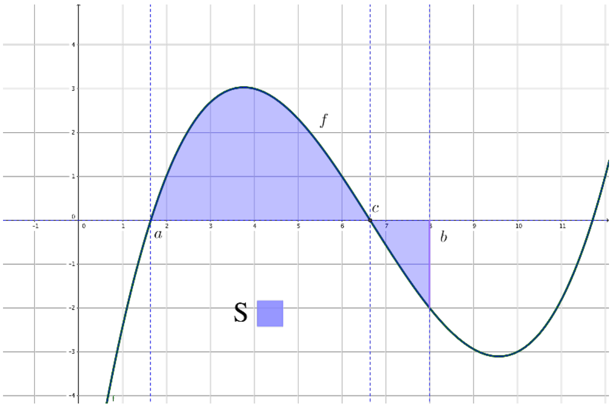
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \text{mes } S\\ &\geq 0\end{aligned}$$

2) 2ème cas : $f(x) \leq 0$, quel que soit $x \in [a,b]$.



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= -\text{mes } S\\ &\leq 0\end{aligned}$$

3) <u>3$^{\text{ème}}$ cas</u> : $f(x)$ change de signe sur $[a,b]$.



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\neq \text{mes } S \\ &\neq -\text{mes } S \end{aligned}$$

$$\text{mes } S = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où c est une racine de la fonction f.

4.2.2 Propriétés

Propriété 1 : permutation des bornes d'intégration

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Conséquence : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

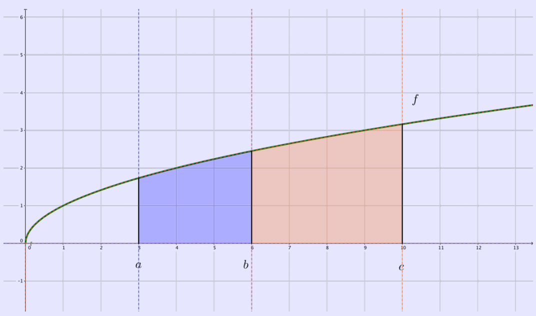
Propriété 2

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Il s'agit d'un cas particulier de la première propriété avec $b = a$:
$\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Propriété 3 : additivité de l'intégrale

Pour $b \in [a,c]$: $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$



Théorème de la moyenne

Soient :

- ⋆ f, une fonction continue sur $[a,b]$;
- ⋆ M, la plus grande valeur prise par f sur $[a,b]$;
- ⋆ m, la plus petite valeur prise par f sur $[a,b]$.

Alors :

1) $m.(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.(b-a)$;

2) il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).(b-a)$.

Remarque : $f(c) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ est la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$.

Illustration du point 1) : $m.(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.(b-a)$.

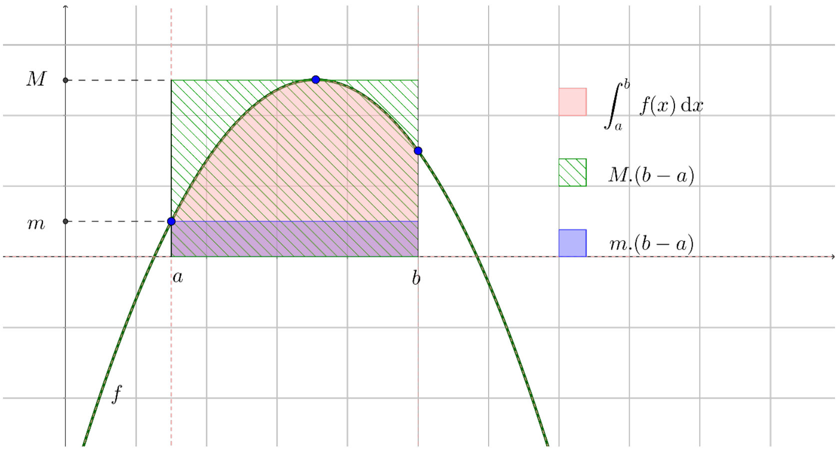
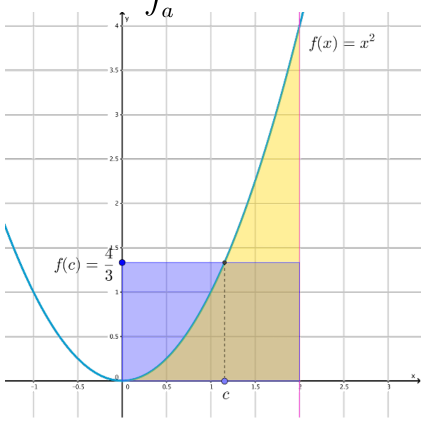


Illustration du point 2) : il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).(b-a)$.

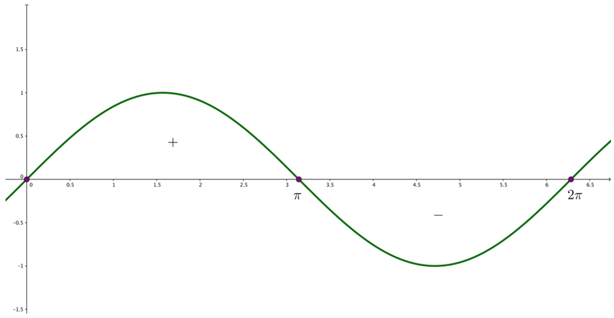
Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0,2]$ (exemple du début) :

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x}{2} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3} \simeq 1{,}33.$$

L'aire de la surface délimitée par l'intégrale est la même que celle du rectangle dont la base est de longueur $b-a$ et la hauteur de longueur $f(c)$.



Exemple : Quelle est la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \sin x$ sur $[0,2\pi]$?



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \underset{\text{additivité}}{\underset{\downarrow}{=}} \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$$

En effet, les aires sont égales, mais les surfaces sont situées de part et d'autre de l'axe Ox.

La valeur moyenne de f sur $[0,2\pi]$ est donc 0.

4.3 Primitive d'une fonction

4.3.1 Introduction

Exemple physique : le MRUA

Position :	$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
	$\downarrow$ dérivée $\quad\uparrow$ primitive $\int$
Vitesse :	$v(t) = at + v_0 = \frac{dx}{dt}$
	$\downarrow$ dérivée $\quad\uparrow$ primitive $\int$
Accélération :	$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt}$

Exemple mathématique :

La dérivée de $3x^2 + 7x + 8$ est $6x + 7$.
La dérivée de $3x^2 + 7x - 14$ est $6x + 7$
Les **primitives** de $6x + 7$ sont $3x^2 + 7x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Primitive d'une fonction

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors F est une **primitive** de f si et seulement si :

$$\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x).$$

4.3.2 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est une primitive de f, c'est-à-dire $F' = f$.

Conséquences :

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a) = -\Big(F(a) - F(b)\Big) = -\big[F(x)\big]_b^a = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriété 1

Si F est une primitive de f, alors $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f.

Propriété 2

Si F et G sont deux primitives de f, alors elles ne diffèrent que par une constante additive, c'est-à-dire $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$.

Propriété 3

Si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions du type $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

On note cet ensemble $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$. C'est l'**intégrale indéfinie** de f.

Exemples :

1) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c$ $(c \in \mathbb{R})$ $\rightarrow$ famille de fonctions (intégrale indéfinie).

2) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ $\rightarrow$ valeur chiffrée (intégrale définie).

Propriété 4

$$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 5

$$\int c.f(x)\,\mathrm{d}x = c.\int f(x)\,\mathrm{d}x \ (c \in \mathbb{R}).$$

4.3.3 Primitives usuelles

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$\int r\,\mathrm{d}x = r.x + c \qquad (c,r \in \mathbb{R})$$

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$$

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \tan x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int -(1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x = \cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$$

4.3.4 Choix de la primitive

Si $f(x)$ est une fonction continue sur $[a,b]$, alors nous avons vu qu'elle possédait une infinité de primitives. Dès lors, laquelle choisir dans le cadre d'une intégrale définie ?

Soit $F(x)$, une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$. Par conséquent, $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) est encore une primitive de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)+c\Big]_a^b \\
&= \Big(F(b)+c\Big) - \Big(F(a)+c\Big) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Nous constatons donc que toutes les primitives de f conviennent pour le calcul de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (intégrale définie).

Tout comme les intégrales indéfinies, les intégrales définies conservent les propriétés de linéarité.

Propriété 6

$\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

$\displaystyle\int_a^b c.f(x)\,\mathrm{d}x = c.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($c \in \mathbb{R}$).

4.3.5 Exercices

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int (x^4 + 3x^2)\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int 3(\sqrt{x} + \sin x)\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \left(4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}\right)\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int (x-3)\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Exercice 2. Calculer les intégrales définies suivantes.

1) $\displaystyle\int_1^{-2} (x-1)(x+2)\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_8^{1} \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{2} 2^x - 3x^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 3. Déterminer la fonction f vérifiant les conditions suivantes.

1) $f'(x) = e^x + \dfrac{20}{1+x^2}$ et $f(0) = -2$.

2) $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ et $f(1) = 1$.

4.4 Méthodes d'intégration

4.4.1 Intégration par substitution ou changement de variables

On sait que la dérivée de fonctions composées est donnée par :

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Si on veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

on pose $t = f(x)$ et $\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= G(t) + c \qquad \text{où } G \text{ est une primitive de } g \\ &= G(f(x)) + c \qquad \text{car } t = f(x)\end{aligned}$$

Règle

$$\int g\big(\underbrace{f(x)}_{t}\big).\underbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

1) $\displaystyle\int \sin^2 x.\cos x\,\mathrm{d}x = \int (\underbrace{\sin x}_{t})^2.\underbrace{\cos x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

On pose : $t = \sin x$
$\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int (\underbrace{4x^2 - 5x + 17}_{t})^8.\underbrace{(8x-5)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int t^8\,\mathrm{d}t = \frac{t^9}{9} + c = \frac{(4x^2-5x+17)^9}{9} + c.$

On pose : $t = 4x^2 - 5x + 17$
$\mathrm{d}t = (8x-5)\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^2 x^2.e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{3}.e^{x^3}.3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^8 e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.\left[e^t\right]_0^8 = \frac{1}{3}\left(e^8 - 1\right).$

On pose : $t = x^3$
$\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$
$x = 0 \to t = 0$
$x = 2 \to t = 8$

⚠ Dans le cadre d'une intégrale **indéfinie**, il ne faut pas oublier d'exprimer la réponse finale au moyen de la variable de départ.

⚠ Dans le cadre d'une intégrale **définie**, il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration lors du changement de variables.

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{4}{\cos^2 4x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-4x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5. Calculer les intégrales définies suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^4 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

4.4.2 Intégration par parties

Utilisons la formule de la dérivée d'un produit...

$$\begin{aligned} & (f.g)' = f'.g + f.g' \\ \Rightarrow\ & f.g' = (f.g)' - f'.g \\ \Rightarrow\ & \int f.g' = \int (f.g)' - \int f'.g \end{aligned}$$

Règle

$$\int f.g' = f.g - \int f'.g$$

Exemples :

1) $\displaystyle\int x.e^x\,\mathrm{d}x$

Mauvais choix :

$f = e^x \qquad f' = e^x$

$g' = x \qquad g = \frac{x^2}{2}$

$$\int x.e^x\,\mathrm{d}x = e^x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.e^x\,\mathrm{d}x = ???$$

Bon choix :

$f = x \qquad f' = 1$

$g' = e^x \qquad g = e^x$

$$\int x.e^x\,\mathrm{d}x = x.e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = x.e^x - e^x + c = e^x.(x-1) + c$$

2) $\displaystyle\int 1.\ln x\,\mathrm{d}x$

Mauvais choix :

$f = 1 \qquad f' = 0$

$g' = \ln x \qquad g = ???$

Bon choix :

$f = \ln x \qquad f' = \frac{1}{x}$

$g' = 1 \qquad g = x$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x.\ln x - \int \frac{1}{x}.x\,\mathrm{d}x = x.\ln x - x + c = x.(\ln x - 1) + c$$

3) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\cdot \arctan x \,\mathrm{d}x$

$f = \arctan x \qquad f' = \frac{1}{1+x^2}$

$g' = 1 \qquad g = x$

$\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \big[x \arctan x\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ Pour la deuxième intégrale,

on pose : $t = x^2+1$

$\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

$x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$

$x = 0 \to t = 1$

$x = 1 \to t = 2$

Donc : $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \arctan 1 - 0 - \int_1^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\big[\ln|t|\big]_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int (x^3-2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$

Exercice 7. Calculer les intégrales définies suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 x e^{3x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$

4.4.3 Intégration de quotients de polynômes

Pour intégrer un quotient de polynômes, il n'existe pas de « méthode-type » mais plusieurs techniques sont possibles.

- ⋆ Regarder s'il n'est pas possible d'effectuer une intégration immédiate.
- ⋆ Si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, effectuer la division euclidienne.
- ⋆ Si le numérateur comporte une somme/différence, scinder la fraction en une somme de fractions.
- ⋆ Utiliser un changement de variables.
- ⋆ Essayer de faire apparaître la dérivée d'une fonction ln ou arctan.
- ⋆ ...

⋆ Utiliser la **décomposition en somme de fractions simples** si le dénominateur est factorisable.

Exemple 1 : calculer l'intégrale $\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-4}\,\mathrm{d}x$. Par substitution :

on pose : $\quad t = 3x^2+9x-4$

$\qquad\qquad \mathrm{d}t = (6x+9)\mathrm{d}x$

$$\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(t) + c = \ln(3x^2+9x-4) + c$$

Exemple 2 : calculer l'intégrale $\int \frac{2x^4+3x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, on commence par réaliser la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrr}
 & 2x^4 & + & 0x^3 & + & 3x^2 & + & 0x & + & 3 & x^2 & + & 1 \\
\hline
- & (2x^4 & & & + & 2x^2) & & & & & 2x^2 & + & 1 \\
 & & & & & x^2 & + & 0x & + & 3 & & & \\
 & & & & - & (x^2 & & & + & 1) & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & &
\end{array}$$

On en déduit que $2x^4+3x^2+3 = (2x^2+1)\cdot(x^2+1)+2$. Dès lors,

$$\frac{2x^4+3x^2+3}{x^2+1} = \frac{(2x^2+1)\cdot(x^2+1)+2}{x^2+1} = 2x^2+1+\frac{2}{x^2+1}.$$

Donc $\int \frac{2x^4+3x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x^2+1+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} + x + 2\arctan(x) + c.$

Exemple 3 : calculer l'intégrale $\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

1- Factoriser le dénominateur : x^2-5x+6. On a $\Delta = 25-24 = 1$. Dès lors le polynôme possède 2 racines :

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

On obtient : $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$.

2- Écrire la fraction de départ en une somme de fractions :

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

3- Réduire au même dénominateur : $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{a.(x-2)}{(x-3).(x-2)} + \frac{b.(x-3)}{(x-2).(x-3)}.$

4- Égaler les numérateurs : $2x-1 = ax-2a+bx-3b$.

5- Égaler les coefficients des termes semblables : $\begin{cases} 2 = a+b \\ -1 = -2a-3b \end{cases}$.

6- Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 = a+b \\ -1 = -2a-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-b \\ -1 = -4+2b-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$$

7- Repartir de la première égalité et calculer l'intégrale :

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-3}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln(x-3) - 3\ln(x-2) + c.$$

Exemple 4 : calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$.

1- Factoriser le numérateur : $x^2-4x+4 = (x-2)^2$.

2- Ecrire la fraction de départ en une somme de fractions :

$$\frac{x}{x^2-4x+4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

3- Réduire au même dénominateur : $\displaystyle\frac{x}{x^2-4x+4} = \frac{a\cdot(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^2}$

4- Egaler les numérateurs : $x = ax-2a+b$.

5- Egaler les coefficients des termes semblables : $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = -2a+b \end{cases}$

6- Résoudre le système : $a = 1$ et $b = 2$.

7- Repartir de la première égalité et calculer l'intégrale :

$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + c$$

Exemple 5 : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$.

1- Le dénominateur n'est pas factorisable : $\Delta = 4-40 = -36 < 0$. On ne peut pas décomposer en fractions simples.

2- Faire apparaître un trinôme carré parfait au dénominateur. Rappel : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dans l'expression $x^2 - 2x + 10$, on choisit $a = x$ et $-2x = 2ab$ càd $b = -1$.

On a $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Le dénominateur devient $x^2 - 2x + 10 = (x^2 - 2x + 1) + 9 = (x-1)^2 + 9$.

3- Changement de variable pour résoudre l'intégrale :

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9\left(1 + \frac{(x-1)^2}{9}\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{On pose : } \quad t = \frac{x-1}{3}$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{9\left(1 + \frac{(x-1)^2}{9}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{(x-1)}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\arctan(t) + c = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + c$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

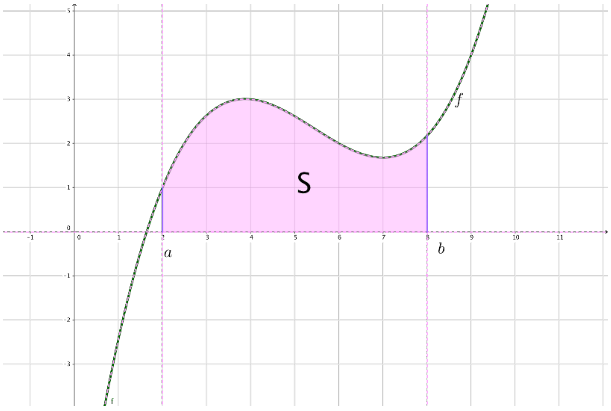
4) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x$

4.5 Applications

4.5.1 Aires

Rappel

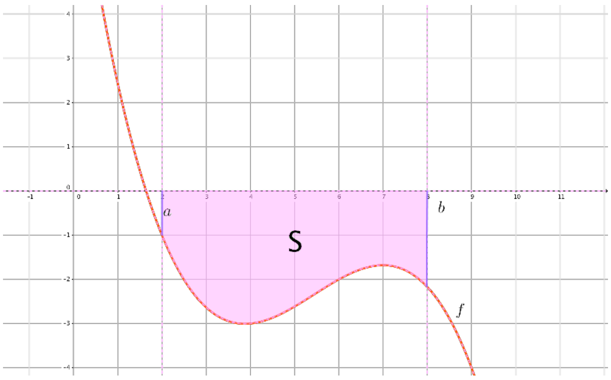
Si $f(x) \geq 0$, quel que soit $x \in [a,b]$:



$$\begin{aligned} \text{mes } S &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[F(x)\big]_a^b \end{aligned}$$

$$(\text{avec } F' = f)$$

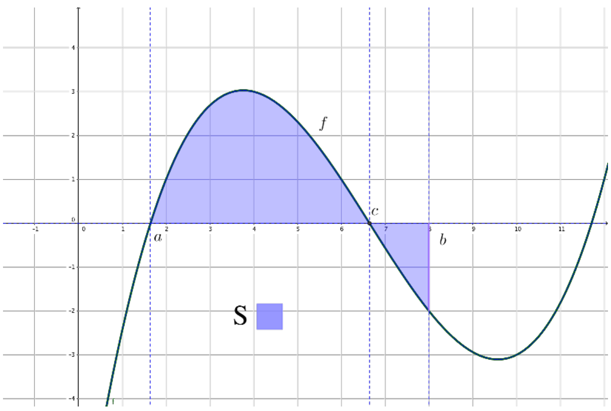
Si $f(x) \leq 0$, quel que soit $x \in [a,b]$:



$$\text{mes } S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0\right)$$

Si $f(x)$ change de signe sur $[a,b]$:

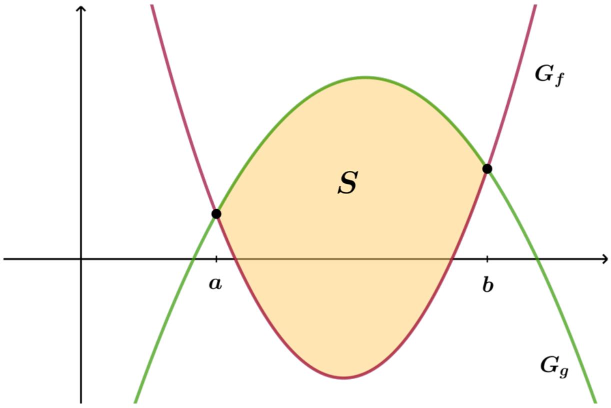


$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\neq \text{mes } S \\ &\neq -\text{mes } S \end{aligned}$$

$$\text{mes } S = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aire d'une surface limitée par deux courbes

Soient G_f et G_g, les graphes de deux fonctions f et g intégrables sur un intervalle $[a,b]$. Nous souhaitons calculer l'aire de la surface du plan limitée par G_f et G_g.

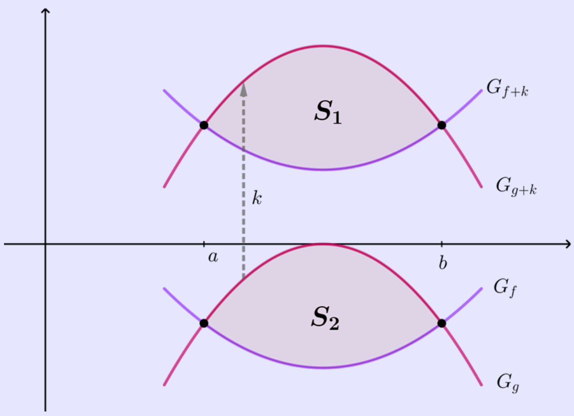


Méthode

1) Esquisser les graphes des fonctions f et g.
2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de G_f et de G_g.
3) Regarder la position des courbes entre les points d'intersection des graphes.
4) ⋆ Si G_f est au-dessus de G_g, nous avons :
   $$\text{mes } S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$
   ⋆ Si G_g est au-dessus de G_f, nous avons :
   $$\text{mes } S = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

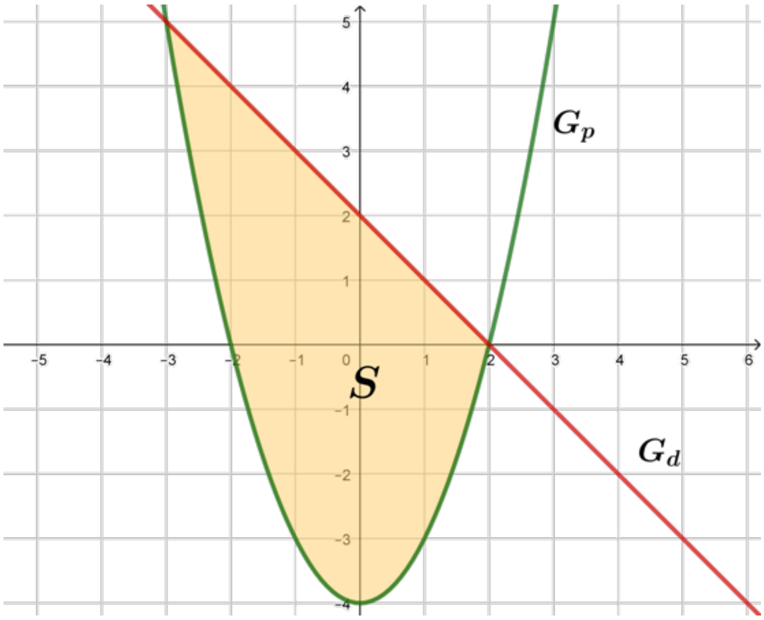
Propriété

La surface limitée par les graphes de $f(x)$ et de $g(x)$ entre a et b a la même mesure que celle limitée par les graphes de $f(x) + k$ et $g(x) + k$.



Exemples :

1) Calculer la mesure de la surface limitée par les graphes de la droite $d \equiv y = -x + 2$ et de la parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 4$.



⋆ Abscisses des points d'intersection :

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2 = x^2 - 4 \end{cases}$$

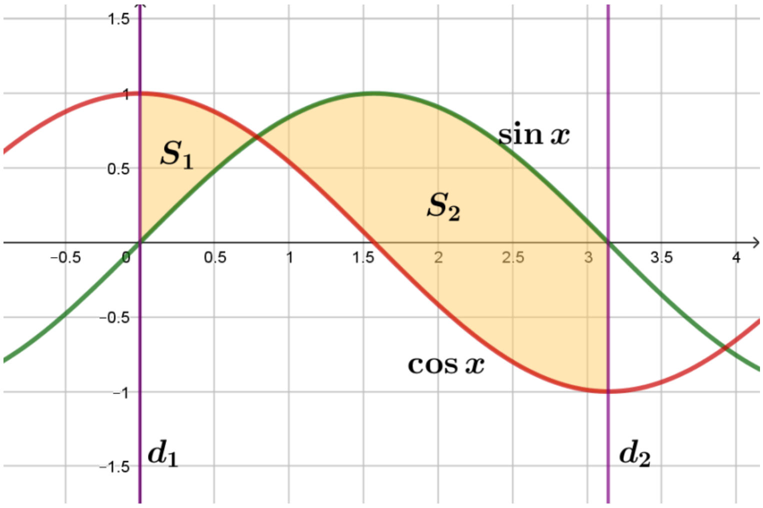
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ x = -3 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

Abscisses des points d'intersection : -3 et 2.

⋆ Sur $[-3{,}2]$, G_d est au-dessus de G_P.

$$\begin{aligned} \text{mes S} &= \int_{-3}^{2} \big((-x + 2) - (x^2 - 4)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2} (-x + 2 - x^2 + 4)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} \\ &= \left(\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} + 12\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18\right) = \frac{-35}{3} + 28 + \frac{9}{2} \\ &= \frac{-70 + 168 + 27}{6} = \frac{125}{6} \text{ ua} \\ &\simeq 20{,}8 \text{ ua} \end{aligned}$$

2) Calculer la mesure de la surface limitée par les graphes des fonctions $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ et des droites $d_1 \equiv x = 0$ et $d_2 \equiv x = \pi$.



⋆ Abscisses des points d'intersection :

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \underbrace{0 = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Impossible}} \end{cases}$$

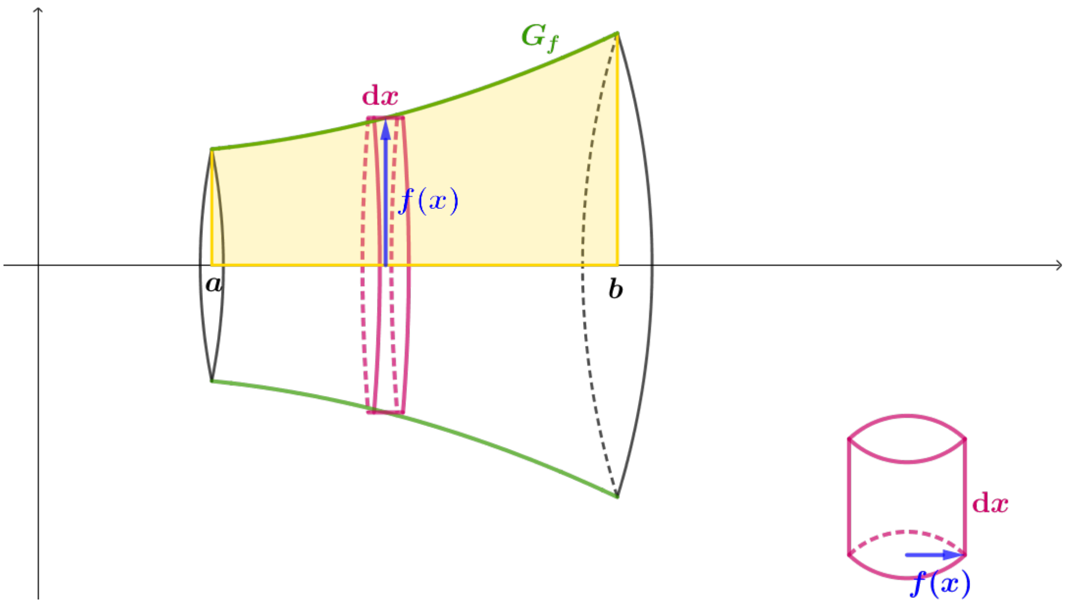
Abscisse du point d'intersection : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ càd $x = \dfrac{\pi}{4}$ puisque $x \in [0,\pi]$.

⋆ Sur $[0,\frac{\pi}{4}]$, G_g est au-dessus de G_f et sur $[\frac{\pi}{4},\pi]$, c'est G_f qui est au-dessus de G_g.

$$\begin{aligned}
\text{mes } S &= \text{mes } S_1 + \text{mes } S_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \big(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\big) - \big(\sin 0 + \cos 0\big) + \big(-\cos\pi - \sin\pi\big) - \big(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\big) \\
&= \big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\big) - (0+1) + \big(-(-1) - 0\big) - \big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\big) \\
&= \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ua} \\
&\simeq 2{,}83 \text{ ua}
\end{aligned}$$

4.5.2 Volumes

On fait tourner la surface colorée autour de l'axe Ox. Elle engendre un **solide de révolution** dont on souhaite déterminer le volume.



Comme dans le cas du calcul d'une intégrale définie, on découpe la surface en rectangles de largeur dx et on fait tendre dx vers 0. Lorsque l'on fait tourner un rectangle autour de l'axe Ox, le solide de révolution généré est un cylindre dont les dimensions sont données sur le dessin ci-dessus : la hauteur du cylindre est la largeur du rectangle dx ; le rayon du cylindre est la longueur du rectangle $f(x)$.

Le volume d'un tel cylindre vaut donc $\pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.
Le volume du solide de révolution est approché par la somme des volumes de ces cylindres en faisant tendre le nombre de rectangles vers l'infini ou, de façon équivalente, dx vers 0.

Formule

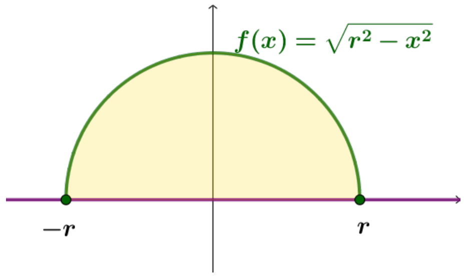
$$\text{mes } V = \int_a^b \mathrm{d}v = \int_a^b \pi.\left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

Remarque : dv est un **élément de volume**, il s'agit d'un cylindre dans le cas d'un solide de révolution d'axe Ox.

Exemples :

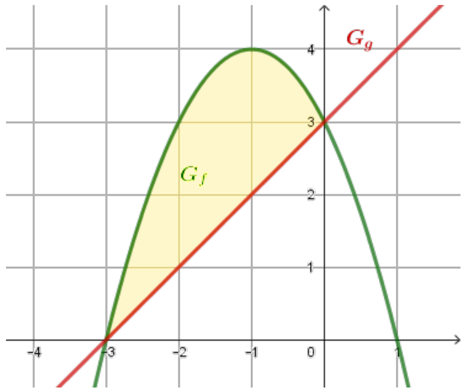
1) Calcul du volume d'une boule de rayon r :

   Pour obtenir une boule, on fait tourner autour de l'axe Ox un demi-disque de centre (0,0) et de rayon r situé au dessus de l'axe Ox.



$$\begin{aligned}\text{mes } V &= \int_{-r}^{r} \pi.(r^2 - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[r^2.x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \pi.\big((r^3 - \frac{r^3}{3}) - (-r^3 + \frac{r^3}{3})\big) \\ &= \pi.(2r^3 - \frac{2r^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ uv}\end{aligned}$$

2) Calcul du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface du plan comprise entre les courbes des fonctions $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x + 3$:



Points d'intersection :

$$\begin{aligned} & -x^2 - 2x + 3 = x + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x.(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Sur $[-3{,}0]$, G_f est à l'extérieur de G_g.

mes V = mes V_1 − mes V_2

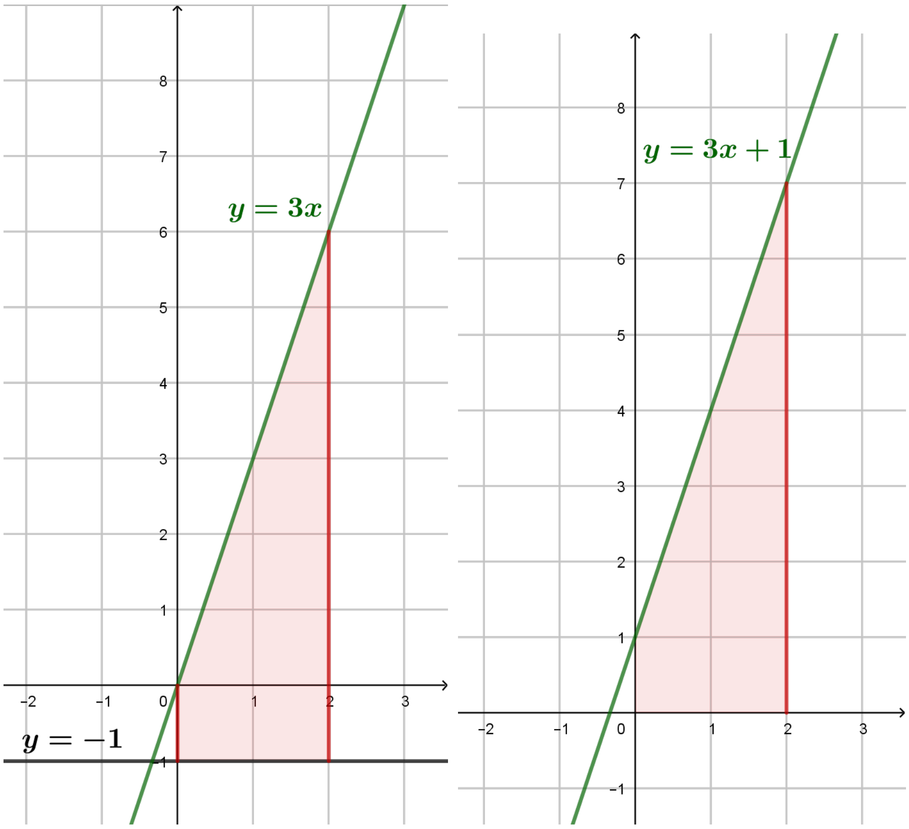
où V_1 est le volume engendré par G_f,

V_2 est le volume engendré par G_g.

$$\begin{aligned}\text{mes } V &= \int_{-3}^{0} \pi.(-x^2 - 2x + 3)^2 \,\mathrm{d}x - \int_{-3}^{0} \pi.(x+3)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-3}^{0} \big((x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x^2 - 12x + 9) - (x^2 + 6x + 9)\big) \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-3}^{0} (x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 18x) \,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} + x^4 - x^3 - 9x^2\right]_{-3}^{0} \\ &= \pi.\big(0 - (-\frac{243}{5} + 81 + 27 - 81)\big) = \frac{108}{5}\pi \simeq 67{,}86 \text{ uv}\end{aligned}$$

Rotation autour d'une droite parallèle à l'axe Ox. Si on s'intéresse au volume d'un solide généré par la rotation d'une surface autour de la droite d'équation $y = k$, il suffit de tout translater de $-k$ unités verticalement afin de se ramener au cas d'un solide engendré par la rotation d'une surface autour de l'axe Ox.

Exemple : calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par $y = 3x$, $y = -1$ et les droites $x = 0$ et $x = 2$ autour de la droite $y = -1$.



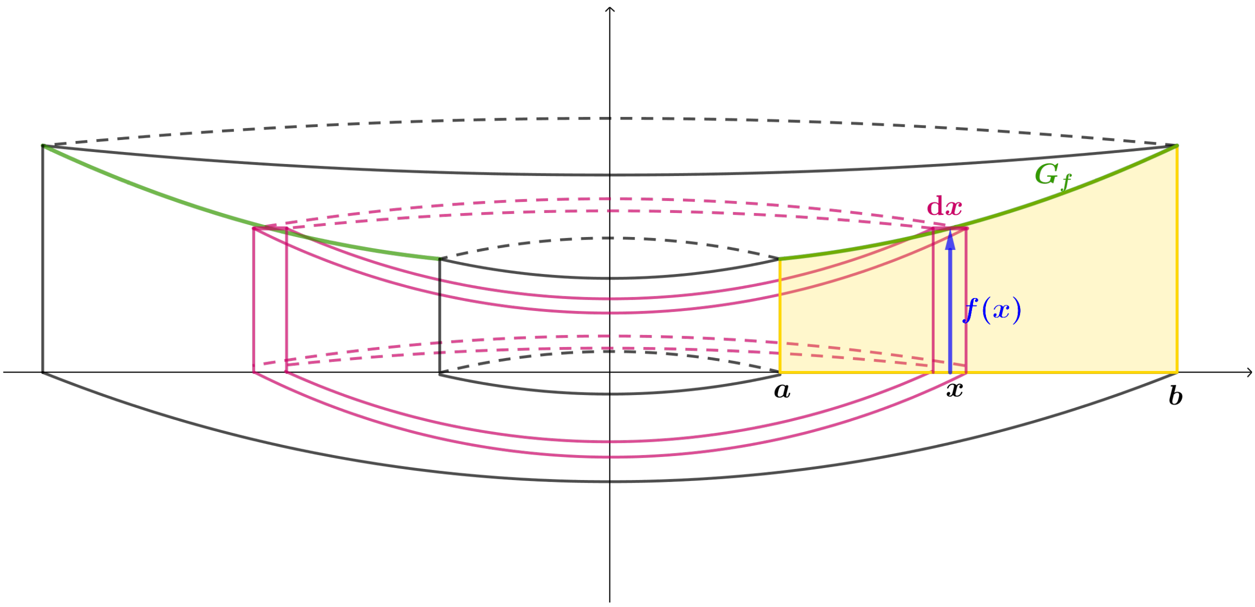
$$\text{mes } V = \int_0^2 \pi(3x+1)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (9x^2+6x+1)\,\mathrm{d}x = \pi\Big[3x^3+3x^2+x\Big]_0^2$$
$$= \pi(3\cdot 8 + 3\cdot 4 + 2) = 38\pi$$

Rotation autour de l'axe Oy. Dans le cas où on considère un solide de révolution engendré par la rotation d'une surface autour de l'axe Oy, 2 cas peuvent se présenter. Supposons que la surface en question ait pour équation $y = f(x)$.

Soit on peut facilement exprimer la réciproque de f. L'équation de la surface peut alors s'écrire sous la forme $x = f^{-1}(y)$. Dans ce cas, la méthode est la même que celle que l'on a vu précédemment, sauf que l'on intègre cette fois la fonction f^{-1} par rapport à y :

$$\text{mes } V = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi.\big[f^{-1}(y)\big]^2 \mathrm{d}y$$

Si on ne peut pas exprimer facilement la réciproque de f, il faut procéder différemment. A nouveau, on découpe la surface en rectangles de largeur $\mathrm{d}x$. Si on fait tourner ces rectangles autour de l'axe Oy, on forme des bagues.

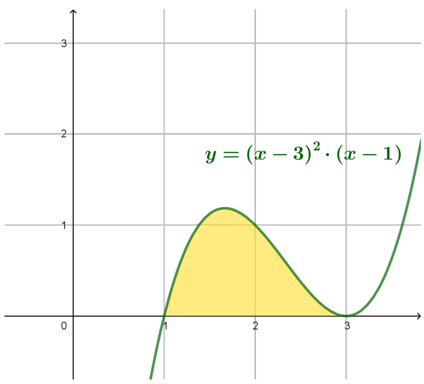


Si on coupe une bague selon un segment perpendiculaire à l'axe Ox on a un solide qui se rapproche d'un parallélépipède rectangle dont la base est un rectangle de longueur $f(x)$ et de largeur $\mathrm{d}x$ et dont la hauteur est la circonférence du cercle de rayon x.
Le volume d'une telle bague vaut donc $2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$.
Le volume du solide de révolution est approché par la somme des volumes de ces bagues.

Formule

$$\text{mes } V = \int_a^b \mathrm{d}v = \int_a^b 2\pi.x.f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : calcul du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la surface limitée par la courbe d'équation $y = (x-3)^2 \cdot (x-1)$ et la droite $y = 0$.



On a :

$$\begin{aligned}
\text{mes } V &= \int_1^3 2\pi \cdot x \cdot (x-3)^2 \cdot (x-1)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_1^3 (x^2 - x)\cdot(x^2 - 6x + 9)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_1^3 (x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \Big[\frac{x^5}{5} - 7\frac{x^4}{4} + 5x^3 - 9\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 \\
&= 2\pi\Big(\frac{243}{5} - 7\cdot\frac{81}{4} + 5\cdot 27 - 9\cdot\frac{9}{2} - \frac{1}{5} + \frac{7}{4} - 5 + \frac{9}{2}\Big) \\
&= 2\pi\Big(\frac{242}{5} - \frac{560}{4} + 130 - \frac{72}{2}\Big) = \frac{24}{5}\pi
\end{aligned}$$

4.6 Exercices récapitulatifs

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int x^4\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int 6t^7\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int 4\,\mathrm{d}u$

4) $\displaystyle\int (z^3 - 3)\,\mathrm{d}z$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \Big(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\Big)\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int \frac{4 - 2t + 5t^3}{3}\,\mathrm{d}t$

8) $\displaystyle\int \Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + 2t\Big)\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int (e^x + 2)\,\mathrm{d}x$

14) $\displaystyle\int (e^u - u)\,\mathrm{d}u$

15) $\displaystyle\int (y^2 + y^{-2})^2\,\mathrm{d}y$

16) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

17) $\displaystyle\int (\cos\theta - 5\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

18) $\displaystyle\int \Big(3\sqrt{x} + \frac{5}{x^6}\Big)\,\mathrm{d}x$

19) $\displaystyle\int \frac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}\,\mathrm{d}u$

20) $\displaystyle\int \Big(2x + 5(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big)\,\mathrm{d}x$

Exercice 10. Déterminer la fonction f vérifiant les conditions suivantes.

1) $f'(x) = \sqrt{x}(6+5x)$ et $f(1) = 10$

2) $f''(x) = \sin\theta + \cos\theta$, $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$.

Exercice 11. Calculer les intégrales définies suivantes.

1) $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_1^{-2} x \,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_1^{a^2} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_4^9 \frac{3}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^m} \,\mathrm{d}x$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{0{,}1\}$

7) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^n} \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$

8) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{2} \,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int_1^3 (x^3 + x + 1) \,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3x-1}{x^3} \,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int_0^3 (2x+3)^3 \,\mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int_2^4 (x + \frac{1}{\sqrt{3x}}) \,\mathrm{d}x$

Exercice 12. Calculer les primitives suivantes au moyen d'un changement de variables.

1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int e^{x^2}.x \,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int 3x^2.(x^3-1)^8 \,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int 10x.\sin(5x^2) \,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2(x^2-1)} \,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int e^{2u-1} \,\mathrm{d}u$

8) $\displaystyle\int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int \frac{u}{(3u^2+5)^2} \,\mathrm{d}u$

10) $\displaystyle\int t^3\sqrt{t^4+2} \,\mathrm{d}t$

11) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} \,\mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int 2^{-5x} \,\mathrm{d}x$

14) $x^3\cos(x^4+2) \,\mathrm{d}x$

Exercice 13. Calculer les intégrales définies suivantes au moyen d'un changement de variables.

1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} 5x.(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)e^{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2\pi}} x\sin x^2\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{x-3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^z+1}{e^z+z}\,\mathrm{d}z$

10) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2}$

Exercice 14. Calculer les primitives suivantes par parties.

1) $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int (x^2+x)e^x\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \arctan 2x\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int x^3e^{3x}\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int (2z-3)(z+1)^6\,\mathrm{d}z$

10) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

Exercice 15. Calculer les intégrales définies suivantes par parties.

1) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{1}^{2} x.e^{-x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{1}^{e} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \arccos x\,\mathrm{d}x$

Exercice 16. Calculer l'intégrale suivante en effectuant d'abord une substitution, puis une intégration par parties.

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+3}{2x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

14) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 18. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe Ox, le graphique de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, lorsque :

1) $f(x) = 2x+1$ $\quad a=1$ et $b=3$,

2) $f(x) = \sqrt{2x}$ $\quad a=0$ et $b=1$,

3) $f(x) = x^2-4x$ $\quad a=1$ et $b=2$,

4) $f(x) = x^3-2x^2$ $\quad a=-1$ et $b=1$,

5) $f(x) = e^x$ $\quad a=\ln 2$ et $b=\ln 3$,

6) $f(x) = \sin x$ $\quad a=\frac{\pi}{2}$ et $b=\frac{3\pi}{2}$,

7) $f(x) = -x^2+6x+7$ $\quad a$ et b sont tels que $f(a)=f(b)=0$,

8) $f(x) = (x^2-4)e^x$ $\quad a$ et b sont tels que $f(a)=f(b)=0$,

9) $f(x) = (x-1)(3-x)$ $\quad a$ et b sont tels que $f(a)=f(b)=0$,

10) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -2x+8 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ $\quad a$ et b sont tels que $f(a) = f(b) = 0$.

Exercice 19. Calculer les aires des surfaces suivantes limitées par les graphiques de $f(x)$ et de $g(x)$.

1) $f(x) = x$ $\quad g(x) = x^2 - 3x$,

2) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^3 + x^2 - 4x$,

3) $f(x) = x - 1$ $\quad g(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1$,

4) $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = e^{-x}$ $\quad$ entre $x = 0$ et $x = 4$,

5) $f(x) = e^{x+2}$ $\quad g(x) = 2e - e^{-x}$ $\quad$ entre $x = -1$ et $x = 0$,

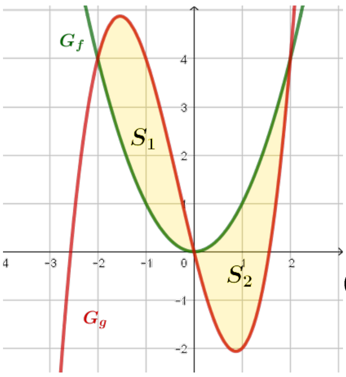
6) $f(x) = x^3 - 3x$ $\quad g(x) = -x$,

7) $f(x) = \sin x$ $\quad g(x) = \cos x$ $\quad$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$,

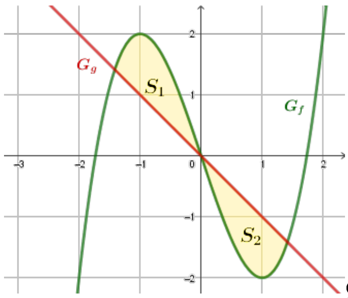
8) $f(x) = \frac{9}{x^2}$ $\quad g(x) = 10 - x^2$,

9) $f(x) = x^2(x-3)$ $\quad g(x) = x - 3$ $\quad$ entre $x = -2$ et $x = 3$,

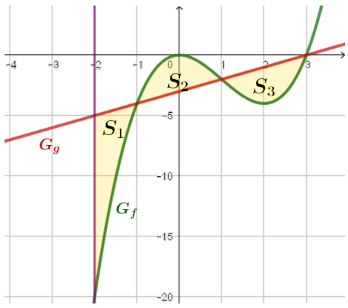
10) $f(x) = ex$ $\quad g(x) = xe^{x^2}$.



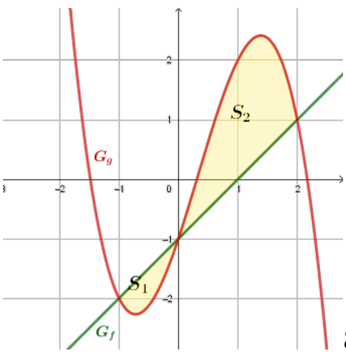
2)



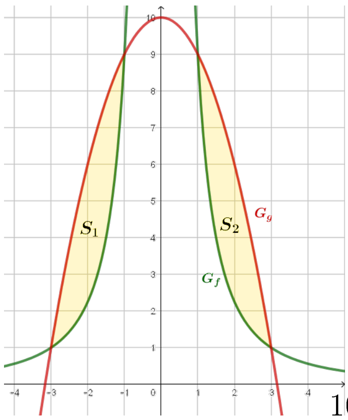
6)



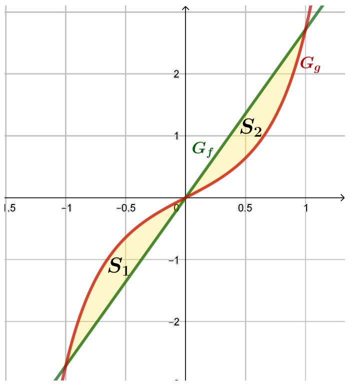
9)



3)



8)



10)

Exercice 20. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par le graphique de f et l'axe des x entre $x = a$ et $x = b$.

1) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ $\quad$ $a = -2$ et $b = 3$,

2) $f(x) = -x + 4$ $\quad$ $a = 1$ et $b = 5$,

3) $f(x) = 4 - x^2$ $\quad$ $a = -1$ et $b = 1$,

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $a = 1$ et $b = 2$,

5) $f(x) = 9 - x^2$ $\quad$ a et b sont tels que $f(a) = f(b) = 0$,

6) $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad$ a et b sont tels que $f(a) = f(b) = 0$,

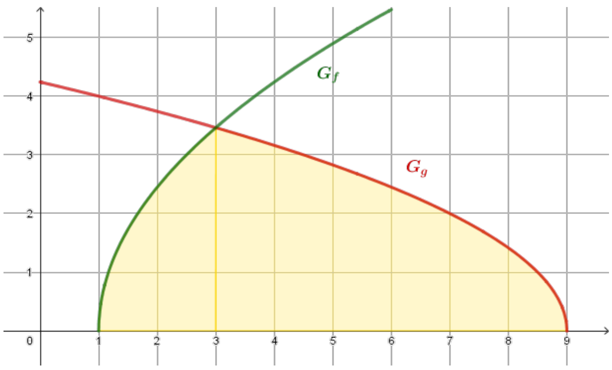
7) $f(x) = 2x$ $\quad$ $a = -1$ et $b = 2$,

8) $f(x) = e^x$ $\quad$ $a = -1$ et $b = 1$,

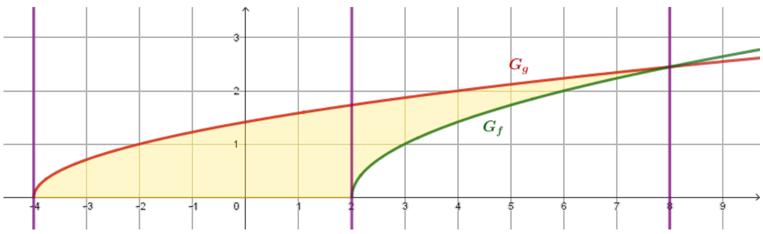
9) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ $\quad$ $a = 1$ et $b = 2$,

10) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ $\quad$ $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 21. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par les graphiques de f et g et l'axe des x, avec $f(x) = \sqrt{6x - 6}$ et $g(x) = \sqrt{-2x + 18}$.



Exercice 22. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par les graphiques de f et g entre $x = 2$ et $x = 8$, puis entre $x = -4$ et $x = 8$, avec $f(x) = \sqrt{x - 2}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2} + 2}$.



Exercice 23. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par les graphiques de f et g entre $x = a$ et $x = b$, où a et b sont les points d'intersection des deux graphiques.

1) $f(x) = 3$ $\qquad g(x) = 4 - x^2$

2) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $\qquad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

3) $f(x) = x^2 - 4$ $\qquad g(x) = -x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1$ $\qquad g(x) = x + 1$

Exercice 24. Une citerne sphérique de 1 mètre de rayon est remplie d'eau aux 4/5èmes de sa hauteur.
Est-elle remplie à 80% ? Si non, déterminer la hauteur à laquelle il faudrait la remplir pour que ce soit le cas.

Exercice 25. Une flûte à champagne a la forme d'un solide engendré par la rotation de la courbe $y = \sqrt{x}$ autour de l'axe Ox.
Calculer la hauteur de cette flûte si sa contenance est de 20 cl.

Exercice 26.

Les verres de Grimbergen sont obtenus par la rotation autour de l'axe Ox de la fonction $y = 1{,}5\sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 9$, l'unité étant le centimètre.

1) Calculer le volume total du verre en cm^3.
2) Si la mousse a une hauteur de 2 cm, que buvez-vous en fait comme liquide brassicole ?

Exercice 27. Vous devez fabriquer un verre à dégustation de vin. Afin que les arômes ne s'échappent pas trop vite, le bord du verre doit être de surface plus petite que sa valeur au 1/3.
Ce verre est en fait obtenu par la rotation autour de l'axe Ox de la fonction $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 4$ et de la fonction $y = 2$ entre $x = 4$ et $x = 9$.

1) Calculer le volume total de vin pouvant être contenu dans ce verre (en cm^3).
2) Si vous devez remplir votre verre à moitié, jusqu'à quelle hauteur faut-il le remplir ?

Exercice 28.

1) Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des ordonnées.

2) Calculer le volume du solide engendré par la rotation du cercle du cercle d'équation $(x+3)^2 + y^2 = 4$ autour de l'axe des ordonnées.

Table des matières

1 Les nombres complexes **1**

1.1 Introduction . . . 1

1.2 Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe . . . 2

1.2.1 Définitions et vocabulaire . . . 2

1.2.2 Représentation graphique des complexes . . . 3

1.3 Opérations dans $\mathbb{C}$ . . . 4

1.3.1 Conjugué d'un complexe . . . 4

1.3.2 Module d'un complexe . . . 5

1.3.3 Somme de deux complexes . . . 5

1.3.4 Multiplication par un réel . . . 5

1.3.5 Produit de deux complexes . . . 6

1.3.6 Inverse d'un complexe . . . 7

1.3.7 Quotient de deux complexes . . . 8

1.3.8 Exercices . . . 8

1.4 Forme trigonométrique d'un complexe . . . 11

1.5 Opérations sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique . . . 12

1.5.1 Conjugué d'un complexe . . . 13

1.5.2 Produit de deux complexes . . . 13

1.5.3 Inverse d'un nombre complexe . . . 14

1.5.4 Quotient de deux complexes . . . 14

1.5.5 Puissance d'un complexe . . . 15

1.5.6 Racines $\mathbf{n}^{\text{es}}$ d'un complexe . . . 15

1.5.7 Exercices . . . 17

1.6 Opérations dans $\mathbb{C}$ et transformations du plan . . . 19

1.6.1 Ajouter un complexe à un autre complexe . . . 19

1.6.2 Multiplier un complexe par un réel . . . 20

1.6.3 Multiplier un complexe par un complexe de module 1 . . . 20

1.6.4 Multiplier un complexe par un complexe quelconque . . . 21

1.6.5 Application géométrique . . . 22

1.6.6 Exercices . . . 23

2 Les limites **24**

2.1 Introduction . . . 24

2.1.1 Point adhérent . . . 24

2.1.2 Exemples graphiques . . . 25

2.1.3 Exemples avec la calculatrice . . . 27

2.2 Limite à gauche, limite à droite . . . 28

2.3 Propriétés des limites . . . 31

2.3.1 Fonctions usuelles . . . 31

2.3.2 Cas particulier de la fonction inverse . . . 31

2.3.3 Opérations sur les limites . . . 32

2.3.4 Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 32

2.4 Limite en l'infini . . . 35

2.4.1 Limite en l'infini d'une fonction polynôme . . . 35

2.4.2 Limite en l'infini d'un quotient de fonctions . . . 36
2.4.3 Indétermination du type $\infty - \infty$ avec des racines . . . 37
2.5 Limite en un réel . . . 39
2.5.1 Limite du type $\frac{r}{0}$ avec $r \in \mathbb{R}_0$ . . . 39
2.5.2 Indétermination du type $\frac{0}{0}$ . . . 42
2.6 Les Asymptotes . . . 46
2.6.1 Asymptotes verticales . . . 47
2.6.2 Asymptotes horizontales . . . 48
2.6.3 Asymptotes obliques . . . 49
2.6.4 Comment déterminer toutes les asymptotes d'une fonction ? . . . 56
2.7 Limites trigonométriques . . . 57
2.7.1 Limites des fonctions trigonométriques usuelles . . . 57
2.7.2 Limites particulières . . . 57
2.8 Exercices récapitulatifs . . . 59

3 Les dérivées **61**
3.1 Introduction . . . 61
3.2 Vocabulaire et notations . . . 63
3.3 Interprétation géométrique . . . 64
3.4 Formules usuelles de dérivation . . . 67
3.4.1 Dérivées des fonctions polynomiales et linéarité . . . 67
3.4.2 Dérivées des fonctions triogonométriques et cyclométriques . . . 68
3.4.3 Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques . . . 69
3.4.4 Dérivées d'un produit et d'un quotient . . . 69
3.4.5 Dérivées de fonctions composées . . . 70
3.5 Dérivation et étude graphique d'une fonction . . . 71
3.5.1 Dérivée seconde . . . 71
3.5.2 Croissance et extrema d'une fonction . . . 71
3.5.3 Concavité d'une fonction et dérivée . . . 73
3.5.4 Étude graphique d'une fonction . . . 76
3.6 Problèmes d'optimisation . . . 76
3.7 Règle de l'Hospital . . . 78
3.8 Exercices récapitulatifs . . . 81

4 Les intégrales **85**
4.1 Introduction . . . 85
4.1.1 Approximation de l'aire avec deux rectangles . . . 85
4.1.2 Amélioration de la précision . . . 86
4.1.3 Calcul de l'aire avec n rectangles . . . 86
4.1.4 Retour sur l'exemple de départ . . . 87
4.1.5 Formalisation . . . 88
4.2 Intégrale définie . . . 89
4.2.1 Interprétation géométrique . . . 89
4.2.2 Propriétés . . . 90
4.3 Primitive d'une fonction . . . 92

4.3.1 Introduction 92
4.3.2 Théorème fondamental du calcul intégral 93
4.3.3 Primitives usuelles 94
4.3.4 Choix de la primitive 95
4.3.5 Exercices 96
4.4 Méthodes d'intégration 96
4.4.1 Intégration par substitution ou changement de variables 96
4.4.2 Intégration par parties 98
4.4.3 Intégration de quotients de polynômes 99
4.5 Applications 103
4.5.1 Aires 103
4.5.2 Volumes 107
4.6 Exercices récapitulatifs 111