Procesos de Poisson.

Sea I el subconj de números reales, dado un espacio de prob (S,P) un proceso estocástico X es una familia de VA.

- Si I es un intervalo Real, se dice continuo
- Si I es un subconj de N, se dice discreto.

pueden ser dif distribuciones.

para cada $t \in I$, $X(t)$ es una variable aleatoria. En un proceso estocástico, la var t suele representar una variante espacial.

2.1. El proceso de Poisson homogéneo

Se puede pensar como el número de eventos hasta el tiempo t, y la tasa de llegada por unidad de tiempo es λ.

Definición 2.1. Un proceso estocástico continuo $\{N(t), \quad t \geq 0\}$ es un **proceso de Poisson homogéneo de intensidad** λ, para un $\lambda > 0$, si cumple las siguientes propiedades:

a) $N(0) = 0$ $\quad N(t_0) = \#\text{eventos hasta } t_0.$

b) para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ se tiene que $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, …, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.

c) Para cada $t \geq 0$, $s > 0$, se cumple que la distribución de $N(t+s) - N(t)$ y $N(s)$ están igualmente distribuidas.

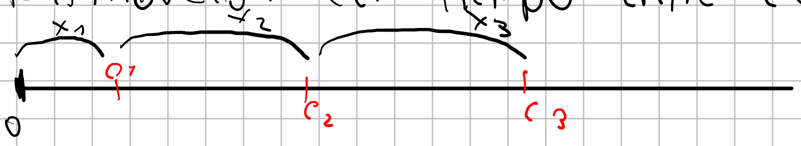
d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(h) = 1)}{h} = \lambda h$ la prob de que ocurra un evento en un intervalo pequeño depende de la proporción λ.

e) $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0.$ la prob de que ocurran dos eventos en un intervalo pequeño es 0.

Un proceso de Poisson puede pensarse como el proceso de contar el número de arribos o llegadas ocurridos hasta el tiempo t, sabiendo que la tasa de llegada por unidad de tiempo es λ.

para cada t, la VA $N(t)$ tiene $\sim P(\lambda t)$ → $p(i) = P(X = i) = \dfrac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^i}{i!}$

Distribución del tiempo entre eventos.



e_i: eventos

X_i: tiempo transcurrido entre e_{i-1} y e_i, $i \geq 2$

para cada X_i, $i \geq 1$, es una VA continua con distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$ → $X_i \sim E(\lambda)$. Y $\forall n$, $X_1, \ldots, X_n$ son VA independientes.

↳ $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Distribución del tiempo de arribo.

$X_1, \dots, X_n$ describen tiempos entre arribos sucesivos tq $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda)$. ahora si

S_n representa el tiempo de arribo del n-esimo evento.

entonces

$$\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$$

$$P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N(t)=k) =$$

esta es la función de distribucion acomulada

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Luego la función de densidad de S_n está dada por:

$$\begin{aligned} f_n(t) = \frac{d}{dt}F_n(t) &= \sum_{j=n}^{\infty}(-\lambda)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{j\lambda(\lambda t)^{j-1}}{j!} \\ &= -\sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Así vemos que f_n es la función de densidad de una **variable aleatoria Gamma** con parámetros $(n, \beta = \frac{1}{\lambda})$. Esto es,

$$S_n \sim Gamma(n, \frac{1}{\lambda}).$$

Superposición de procesos de Poisson homogeneos:

tenemos $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ n proc de Poisson indep con tasas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Cada uno cuenta una sucesión de eventos con una tasa de arribo.

La suma de ellos da:

$M(t) = N_1(t) + \dots + N_n(t)$, es otro proc de Poisson con $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

al estar contabilizando el arribo de eventos en conjunto. Queremos poder calcular la prob de que el primer evento (o cosa) sea del proc. $N_k(t)$

Sabemos que el tiempo transcurrido hasta cierto evento esta dado por una distr. exponencial.

para cada $N_j(t)$ tenemos $X_1^j \rightarrow$ tiempo hasta el primer evento.

dientes entre sí. Querríamos determinar para cada k cuál es la probabilidad de que el mínimo entre estas variables aleatorias sea alcanzado por la variable $X_1^{(k)}$ o equivalentemente, que $X_1^{(k)}$ tome un valor menor o igual a las restantes $n-1$ variables aleatorias. Tenemos que

$$\begin{aligned} P\left(\min\{X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(n)}\} = X_1^{(k)}\right) &= P\left(X_1^{(1)} \geq X_1^{(k)}, X_1^{(2)} \geq X_1^{(k)}, \ldots, X_1^{(n)} \geq X_1^{(k)}\right) \\ &= P\left(\min\{X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(k-1)}, X_1^{(k+1)},\ldots,X_1^{(n)}\} \geq X_1^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, el mínimo entre las $n-1$ exponenciales quitando $X_1^{(k)}$, es una variable aleatoria Y con distribución exponencial de parámetro $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}+\lambda_{k+1}+\ldots+\lambda_n$ y es independiente de X_k. Así, llamando f_{X_k} a la densidad de $X_1^{(k)}$, f_Y a la densidad de Y y f_{Y,X_k} a la densidad conjunta, tenemos que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} `P(Y \geq X_1^{(k)}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{Y,X_k}(y,x)dxdy \\ &= \int_0^{\infty} f_Y(y)\int_0^{y} f_{X_k}(x)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_Y e^{-\lambda_Y y}\left(1-e^{-\lambda_k y}\right)dy \\ &= 1-\lambda_Y\cdot\frac{1}{\lambda_Y+\lambda_k} = \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la probabilidad de que el mínimo entre n variables aleatorias exponenciales independientes, X_1, X_2, ..., X_n, sea la variable $X_1^{(k)}$ es proporcional a λ_k. Específicamente está dado por

$$P\left(\min\{X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(n)}\} = X_1^{(k)}\right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

prob de que el primer evento entre los n procesos sea del proceso k.

Ejemplo 2.3. Supongamos que en una estación de tren llegan tres líneas de trenes: Naranja, Amarilla y Verde. Los arribos de estos trenes constituyen cada uno un proceso de Poisson homogéneo con tasas de llegada de un tren cada 15 minutos, un tren cada 10 minutos y un tren cada 20 minutos, respectivamente. Un pasajero llega a la estación de tren y puede tomar cualquiera de estos trenes para ir a su destino.

a. ¿Cuál es el tiempo mínimo promedio que debe esperar hasta que llegue el primer tren?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer tren que llegue sea de la línea Naranja?

Línea naranja $\lambda_n = 4$ tren x hora

amarilla $\lambda_A = 6$

verde. $\lambda_v = 3$

a) tiempo hasta el primer tren

$\underline{\min\{X_1^N, X_1^A, X_1^V\}} \sim \mathcal{E}(4+6+3) = \mathcal{E}(13)$

$\searrow Y$

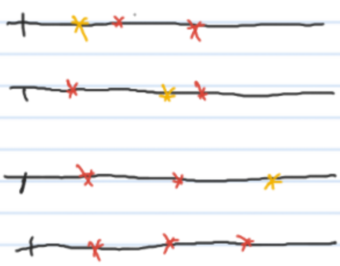
$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{13}$ en minutos $\Rightarrow$ $60 \cdot \frac{1}{13} = 4,6$ min.

b) $\frac{4}{13}$

Cual es la prob de que el segundo tren amarillo llegue antes que el segundo tren naranja.

ver que en los 3 primeros haya 2 naranjas

Es equivalente a que en los tres primeros trenes haya al menos 2 naranjas.



Tiene probabilidad $3 \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 \frac{6}{10}$

$\left(\frac{4}{10}\right)^3$

se suman

Procesos de Poisson no homogeneos:

Aca se toma la idea de que la tasa de arribos es dependiente del tiempo.

Definición 2.2. Un proceso $N(t)$, $t \geq 0$ es un **proceso de Poisson no homogéneo** con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si:

a) $N(0) = 0$

b) para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ se tiene que $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{P(N(t+h) - N(t) = 1)}{h} = \lambda(t)$,

d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{P(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{h} = 0$.

La intensidad media del número de llegadas en un intervalo se da por:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

, los incrementos son indep pero no estacionarios.

Tenemos que $N(t+s) - N(t) = \#$ eventos en $(t, t+s]$ significa una variable aleatoria poisson con media $m(t, t+s)$

$$m(t, t+s) = m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(x)\, dx$$

$\Rightarrow$

$$P(N(t+s) - N(t) = j) = e^{-m(t,t+s)} \cdot \frac{(m(t,t+s))^j}{j!}$$