

## Lenguajes y Compiladores. Práctico 4 del 07/04/2021

**Objetivos:** Comprender las ecuaciones semánticas para el lenguaje imperativo simple. Utilizar semántica denotacional para comparar si dos programas son equivalentes o no. Computar las cadenas de sucesivas ejecuciones de un ciclo, identificar el caso general de la cadena y probar por inducción que es correcto. Definir nuevas construcciones para el lenguaje imperativo, dando sus ecuaciones semánticas. Relacionar valores del dominio semántico  $\Sigma \rightarrow \Sigma_{\perp}$  con la denotación de programas. Conocer los teoremas de sustitución, renombre y coincidencia y utilizarlos para concluir si dos programas son equivalentes o no.

*Recordar* que utilizamos tipografía sans-serif (como en  $x$ ) para variables concretas y tipografía serif (como en  $e$ ) para meta-variables.

**Repaso.** Decida si los siguientes argumentos son correctos:

- (1) Sea  $D$  un dominio y  $f: D \rightarrow D$ . Si  $f$  es continua, entonces  $f$  tiene un menor punto fijo.
- (2) Sea  $D$  un dominio y  $f: D \rightarrow D$ . Si  $f$  es continua, entonces  $\perp$  es el menor punto fijo de  $f$ .
- (3) Sea  $D$  un dominio y sea  $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \dots$  una cadena en  $D \rightarrow D$ . Si el supremo de la cadena pertenece a la cadena, entonces existe un índice  $k$  tal que  $f_k = f_{k+1} = f_{k+2}$ .

**Ejercicios.**

- (1) Utilizar la semántica denotacional para demostrar o refutar las siguientes equivalencias:
  - (a)  $c; \mathbf{skip} \equiv c$
  - (b)  $c_1; (c_2; c_3) \equiv (c_1; c_2); c_3$
  - (c)  $(\mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1); c_2 \equiv \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0; c_2 \mathbf{ else } c_1; c_2$
  - (d)  $c_2; (\mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1) \equiv \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_2; c_0 \mathbf{ else } c_2; c_1$
  - (e)  $x := y; z := w \equiv z := w; x := y$
- (2) Utilizar la semántica denotacional para demostrar o refutar las siguientes equivalencias:
  - (a)  $\mathbf{newvar } x := e \mathbf{ in skip} \equiv \mathbf{skip}$
  - (b)  $\mathbf{newvar } x := e \mathbf{ in } y := x \equiv y := e$
  - (c)  $\mathbf{newvar } x := e_1 \mathbf{ in } (\mathbf{newvar } y := e_2 \mathbf{ in } c) \equiv \mathbf{newvar } y := e_2 \mathbf{ in } (\mathbf{newvar } x := e_1 \mathbf{ in } c)$
- (3) Teniendo en cuenta los ejercicios anteriores, discuta en grupo las siguientes afirmaciones:
  - (a) El parser puede eliminar toda ocurrencia de **skip**.
  - (b) El parser puede elegir inclinar las secuencias de más de dos comandos hacia la derecha o hacia la izquierda.
- (4) Considere el comando **while true do**  $x := x - 1$ 
  - (a) Dar la función  $F$  que define su semántica. Calcular la expresión más sencilla que pueda para  $F$ .
  - (b) Existe algún  $n$  tal que  $F^n \perp_{\Sigma \rightarrow \Sigma_{\perp}}$  no sea idénticamente  $\perp$ ?
  - (c) Considere la cadena en  $\Sigma \rightarrow \Sigma_{\perp}$  dada por

$$\omega_i \sigma = \begin{cases} \sigma & \text{si } 0 \leq \sigma x \leq i \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Es sabido que la continuidad de  $F$  garantiza la igualdad  $F(\bigsqcup \omega_i) = \bigsqcup F\omega_i$ . Compruebe la misma calculando cada miembro de la igualdad para el caso de la cadena dada.

- (5) Calcule la semántica denotacional de los siguientes comandos:
- (a) **while**  $x < 2$  **do** **if**  $x < 0$  **then**  $x := 0$  **else**  $x := x + 1$
  - (b) **while**  $x < 2$  **do** **if**  $y = 0$  **then**  $x := x + 1$  **else** **skip**
- (6) Suponga que  $\llbracket \textbf{while } b \textbf{ do } c \rrbracket \sigma \neq \perp$ .
- (a) Demuestre que existe  $n \geq 0$  tal que  $F^n \perp \sigma \neq \perp$ .
  - (b) Demuestre que si  $\sigma' = \llbracket \textbf{while } b \textbf{ do } c \rrbracket \sigma$  entonces  $\neg \llbracket b \rrbracket \sigma'$
- (7) Demostrar o refutar las siguientes equivalencias usando semántica denotacional:
- (a) **while** **false** **do**  $c \equiv \textbf{skip}$
  - (b) **while**  $b$  **do**  $c \equiv \textbf{while } b \textbf{ do } (c; c)$
  - (c)  $(\textbf{while } b \textbf{ do } c); \textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1 \equiv (\textbf{while } b \textbf{ do } c); c_1$
- (8) Considerar las siguientes definiciones como syntactic sugar del comando **for**  $v := e_0$  **to**  $e_1$  **do**  $c$ :
- (a)  $v := e_0; \textbf{while } v \leq e_1 \textbf{ do } c; v := v + 1$ .
  - (b) **newvar**  $v := e_0$  **in** **while**  $v \leq e_1$  **do**  $c; v := v + 1$ .
  - (c) **newvar**  $w := e_1$  **in** **newvar**  $v := e_0$  **in** **while**  $v \leq w$  **do**  $c; v := v + 1$
- ¿Hay alguna que pueda considerarse satisfactoria? Justificar.
- (9) Enunciar de manera completa el teorema de coincidencia y demostrar el caso **while**.
- (10) Usando el Teorema de coincidencia para comandos probar que para todo par de comandos  $c_0, c_1$ , si
- $$FV \ c_0 \cap FA \ c_1 = FV \ c_1 \cap FA \ c_0 = \emptyset,$$
- entonces  $\llbracket c_0; c_1 \rrbracket = \llbracket c_1; c_0 \rrbracket$ .
- (11) Considere los siguientes comandos:
- $$c_0 \doteq \textbf{newvar } x := x + y \textbf{ in } c; \textbf{while } x > 0 \textbf{ do } y := y + 1; x := x - 1$$
- $$c_1 \doteq \textbf{newvar } y := x + z \textbf{ in } c; \textbf{while } y > 0 \textbf{ do } z := z + 1; y := y - 1$$
- Asuma que  $c$  es un comando que satisface  $(FV \ c) \cap \{x, y, z\} = \emptyset$ . Formule la relación que existe entre estos comandos (vistos como funciones que transforman estados), y pruebe tal relación sin calcular semántica.
- (12) Considere la siguiente cadena en  $\Sigma \rightarrow \Sigma_\perp$ . Decida si existe un programa cuya semántica sea el supremo de la cadena.  $f_i \sigma = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma x \leq \sigma y \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$