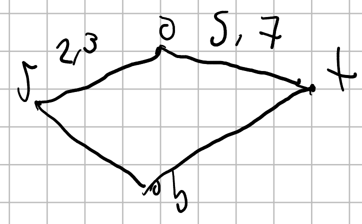
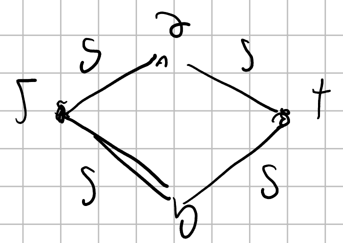
I):Supongamos que cambiamos la definición de network permitiendo que cada lado tenga dos capacidades asociados: $c_1(\overrightarrow{xy})$ y $c_2(\overrightarrow{xy})$, con la condicion $c_1(\overrightarrow{xy}) \leq c_2(\overrightarrow{xy})$ para todo lado $\overrightarrow{xy}$. La definición de flujo ahora es modificada pidiendo que $c_1(\overrightarrow{xy}) \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c_2(\overrightarrow{xy})$ para todo lado $\overrightarrow{xy}$. (las demas condiciones para ser flujo quedan iguales).
Dar un ejemplo en donde con estas condiciones puede no existir ningún flujo de s a t.

II):Si en un network dado las capacidades de todos los lados se incrementan en una constante k, (i.e, las nuevas capacidades son la viejas mas k en cada lado). ¿es cierto que el max flow value se incrementa en exactamente k unidades? ¿en a lo sumo k unidades? ¿en al menos k unidades?

III):Supongamos que tiene una caja negra que que resuelve el max flow problem en networks sin arcos paralelos (en particular si existe $\overrightarrow{xy}$ no existe el $\overrightarrow{yx}$) ni loops (lados $\overrightarrow{xx}$). (i.e., la caja negra recibe un network en cierto formato y resuelve el max flow problem para ese network correctamente si el network no tiene lados paralelos ni loops.). Usted tiene sin embargo varios networks en los cuales hay lados paralelos entre vertices (tanto de ida como de vuelta, pero tambien lados multiples), y loops. ¿Como resuelve este problema? (lo que se pide es un algoritmo que transforme estos networks en networks permisibles para la caja negra y que luego transforme las respuestas de la caja negra en respuestas a su problema).

1) 

, luego $f(\overrightarrow{sa}) \in [2,3]$ y $f(\overrightarrow{at}) \in [5,7]$ por ende el f $\nexists$

2) en a network 

si aumento las cap en 5, el max flow pasa de 10 a 20, por lo que tengo que probar si se aumenta en al menos k.
como se que si f es maxim. $\Rightarrow V(f) = cap(S)$, luego la $cap(S) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S \\ \overrightarrow{xy} \in E}} c(\overrightarrow{xy})$, todas esas cap aumentan en k, por ende cap(S) aumenta en al menos k.

3)

negra y que luego transforme las respuestas de la caja negra en respuestas a su problema).

IV):Suponga que tiene un "network" con multiples fuentes $s_1, s_2, \ldots, s_k$ y multiples resumideros $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Transforme este problema en un Max flow problem usual.

V):Supongamos que tenemos un network donde ademas de las capacidades de los lados, los vertices tambien tienen capacidades. Un flujo, ademas de las restricciones en los lados tiene la restricción que el flujo que pasa por un vertice x no puede ser mayor a su capacidad. Se desea hallar un flujo maximal con estas condiciones. Transformar el problema en un problema de Max Flow común.

4) dado era net $N=(V,E,c)$, formamos una nueva N' con esta transformación.

$$T(N) = \left(V_N \cup \{s^*, t^*\}, E_N \cup \{s^* s_i \ \forall_{i=1 \ldots k}\} \cup \{t_i t^* \ \forall_{i=1 \ldots r}\}, c' \text{ tq } c'(\overrightarrow{xy}) = \begin{cases} c_N(\overrightarrow{xy}) & \text{si } \overrightarrow{xy} \in E_N \\ \infty & \text{c.c} \end{cases} \right)$$

esta nueva $N' = (V', E', c')$ tiene un problema de Maxflow usual.

definimos s como una funsion que transforma el flujo de cada lado.

Sea g_N un fluto en N y $g'_{N'}$ un fluyo en N', entonces

$s = g_N(\overrightarrow{xy}) = g'_{N'}(\overrightarrow{xy}) \ \forall \overrightarrow{xy} \in E_N$ (Lados originales)

esta funcion me transforma un fluyo "normal" a un fluyo para nuestro Network original, entonces sea:

f' el fluyo obtenido como $s(EK(T(N)))$ entonces nos que ver que f' tambien es maximal.

Veamos, sea g_N un fluto en N, entonces es facil ver que

$$v(g_N) = \sum_{\substack{1 \le i \le k \\ x \in \Gamma^+(s_i)}} g_N(\overrightarrow{s_i x}) \underset{\text{def } s}{=} \sum g'_{N'}(\overrightarrow{s_i x}) \underset{*}{=} \sum \text{Out}_{g'_{N'}}(s_i)$$

$*$ en nuestra N', el unico lado in para cada s_i es $\overrightarrow{s^* s_i}$ que tiene cap ∞, por lo que la cap de in y out de s_i es igual.

$$= \sum_{1 \le i \le k} \text{in}(s_i) = \sum_{i=1}^{k} g(\overrightarrow{s^* s_i}) = \text{Out}_{g'_{N'}}(s^*) = v(g'_{N'})$$

$\to$ concluimos que $v(g_N) = v(g'_{N'})$

orig   normalizado.

ahora hay que ver por el absurdo que un flujo F_N obtenido con $S(EK(T(N)))$ es tambien maximo de N.
($EK(T(N))$ nos da maximo de N' y S transforma el flujo a nuestra network original).
Supongamos que existe un flujo g_N tq $v(g_N) > v(F_N)$

luego, podemos ver que S es biyectiva porque solo tiene como camino lados que estan en N y N'.
entonces veremos que si:

$$v(g_N) > v(F_N) \xrightarrow{S} v(g'_{N'}) > v(F'_{N'})$$ pero

es absurdo! porque F_N fue obtenido a partir de $F'_{N'}$ con $EK(T(N))$ que da un flujo maximo.

Entonces $\therefore$ sea F_N flujo obtenido como $S(EK(T(N)))$ es maximo en N. ■

5)