Tarea 2021.

Ejercicio 1. Encuentre una aproximación a la probabilidad de que el número de unos obtenidos al arrojar 12000 veces un dado está entre 1900 y 2150.

$P(d=1) = \frac{1}{6}$, $\frac{12000}{6} = 2000$

Ejercicio 2. En una intersección con mucho tráfico los accidentes se producen según un proceso de Poisson a un ritmo de dos accidentes por semana. En tres de cada cuatro accidentes está implicado el consumo de alcohol.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima semana se produzcan tres accidentes en los que está implicado el alcohol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que mañana se produzca al menos un accidente?

c) Si se producen seis accidentes en febrero (cuatro semanas), ¿cuál es la probabilidad de que en menos de la mitad de ellos esté implicado el alcohol?

$\lambda = 2.$

a) Sea P el proc de poisson con $\lambda = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}\,2}$, representa la cantidad de accidentes causados por el alcohol.
luego

$$P(N(1) = 3) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\cdot 1}\left(1\cdot\frac{3}{2}\right)^3}{3!} = 0{,}12551.$$

b) $$P\left(N\left(\tfrac{1}{7}\right) \geq 1\right) = 1 - P\left(\underbrace{N\left(\tfrac{1}{7}\right)}_{\lambda=2} = 0\right) = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{7}\cdot 2}\cdot \lambda t^0}{0!} = 1 - e = 0{,}24852.$$

c) Sea $p = \frac{3}{4}$ prob de que un accidente sea por alcohol, entonces la prob esta dado por una v.a. $X \sim B(6, \frac{3}{4})$ $p_X(i) = \binom{6}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{6}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

2022

Ejercicio 1. Se sabe que el tiempo (en días) durante el cuál el motor de una máquina funciona correctamente sin fallas distribuye según el modelo exponencial. El motor de marca A tiene un tiempo medio de falla igual a 1000 días y el motor de marca B tiene un tiempo medio de falla igual a 1500 días. Si los dos motores se ponen en funcionamiento al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que el motor A falle antes que el motor B?.

$M_A \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{1000}\right)$ $M_B \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{1500}\right)$, M_i = "tiempo func sin fallar motor marca i".

luego sea $X = \min\{M_A, M_B\}$, busco:

$$P(X = M_A) \overset{\text{por prop de v.a. exp indep.}}{=} \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{1500}} = 0{,}6$$

Ejercicio 2. Considerar un juego entre dos personas donde A sortea un valor de una uniforme $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y B sortea un valor de una uniforme $V \sim \mathcal{U}(0,1)$. U y V son independientes. Si el máximo entre U y V es mayor que 0.6, entonces gana A. De lo contrario gana B.

a) Calcular la función de distribución acumulada de la variable $M = \max\{U, V\}$, esto es, $P(M \leq x)$.

b) Calcular la probabilidad de que A gane el juego.

c) ► Implementar un código que estime la probabilidad de que A gane el juego realizando 10000 simulaciones.

a) $P(M \leq x) = P(U \leq x \wedge V \leq x) = P(U \leq x) \cdot P(V \leq x)$ son indep.

$= \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-a}{b-a} = x^2 \qquad F_M = \begin{cases} x^2 & a \leq x \leq b \\ 0 & c.c \end{cases}$

b) $P(M > 0{,}6) = 1 - P(M \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}6^2 = \boxed{0{,}64}$

Ejercicio 3. Un proceso de Poisson no homogéneo tiene intensidad $\lambda(t)$ dada por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 4 \\ 4 & t > 4 \end{cases}$$

con t medido en horas.

a) Dar la distribución de la variable aleatoria "número de arribos en el intervalo $[2, 5]$".

b) Calcular la probabilidad de que en las primeras 5 horas hayan ocurrido 10 arribos dado que en las dos primeras horas ocurrieron 8 arribos.

a) Dado un proceso no homogeneo, se tiene que el # llegadas en el intervalo $[t, t+s]$ tiene una distribución de poisson con media $m(t, t+s)$.

Calculo $m(2,5) = \int_2^5 \lambda(t)\,dt = \int_2^4 t\,dt + \int_4^5 4\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_2^4 + 4 \cdot t\Big|_4^5 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} + 4$

$= 8 - 2 + 4 = 10$

X: "número de arribos en $[2,5]$" distribuye poisson con $\lambda = 10$.

$X \sim P(10)$

b) $P(N(5) = 10 \mid N(2) = 8) = P(N(5) - N(2) = 2 \mid N(2) = 8)$

$= \frac{P(N(5) - N(2) = 2) \cdot \cancel{P(N(2) = 8)}}{\cancel{P(N(2) = 8)}} = \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2}$

Parcialito 2023.

Ejercicio 1) Uno de cada 25 adultos está afectado de cierta enfermedad para la que se ha desarrollado una prueba de diagnóstico. La prueba es tal que, cuando un individuo padece la enfermedad, el resultado de la prueba es positivo en un 99 % de las veces, mientras que un individuo sin la enfermedad mostrará un resultado positivo sólo el 2 % de las veces. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que un resultado de la prueba sea positivo? **b)** Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo tenga la enfermedad? **c)** Dado que el resultado de la prueba es negativo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo no tenga la enfermedad?

Ejercicio 2) $N(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson homogéneo con tasa de arribos $\lambda = 4{,}5$. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ denotan los tiempos entre arribos. Calcule $P(X_1 > 3 | X_1 > 1)$.

a) $P(+) = \frac{1}{25} \cdot 0{,}99 + \frac{24}{25} \cdot 0{,}02 = 0{,}0588$

b) $P(E \mid +) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{P(+ \mid Enf) \cdot P(Enf)}{P(+)} = \frac{0{,}99 \cdot \frac{1}{25}}{0{,}0588}$

c) $P(\neg E \mid -) = \frac{P(\neg E \cap -)}{P(-)} = \frac{P(- \mid \neg E) \cdot P(\neg E)}{1 - P(+)} = \frac{0{,}02 \cdot \frac{1}{25}}{1 - 0{,}0588}$