

1 Guia 1

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Notacion y conceptos basicos

Usaremos \mathbf{R} para denotar el conjunto de los numeros reales, \mathbf{Z} para denotar el conjunto de los numeros enteros, \mathbf{N} para denotar el conjunto de los numeros naturales y ω para denotar al conjunto $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Dado un conjunto A , usaremos $\mathcal{P}(A)$ para denotar el conjunto formado por todos los subconjuntos de A , es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ denotara la cantidad de elementos de A .

Para $x, y \in \omega$, definamos

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dados $x, y \in \omega$ diremos que x divide a y cuando haya un $z \in \omega$ tal que $y = z \cdot x$. Notar que 0 divide a 0, 3 divide a 0 y 0 no divide a 23. Escribiremos $x \mid y$ para expresar que x divide a y . Si bien no hay una definicion natural en matematica de cuanto vale 0^0 (0 elevado a la 0), por convencion para nosotros $0^0 = 1$

Producto carteciano

Dados conjuntos A_1, \dots, A_n , con $n \geq 2$, usaremos $A_1 \times \dots \times A_n$ para denotar el *producto Cartesiano* de A_1, \dots, A_n , es decir el conjunto formado por todas las n -uplas (a_1, \dots, a_n) tales que $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. Si $A_1 = \dots = A_n = A$, con $n \geq 2$, entonces escribiremos A^n en lugar de $A_1 \times \dots \times A_n$. Para $n = 1$, definimos $A^n = A$, es decir $A^1 = A$. Usaremos \diamond para denotar la unica 0-upla. Definimos entonces $A^0 = \{\diamond\}$. Si A es un conjunto denotaremos con $A^{\mathbf{N}}$ al conjunto formado por todas las infinituplas (a_1, a_2, \dots) tales que $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbf{N}$. Por ejemplo

$$(1, 2, 3, 4, \dots) \in \omega^{\mathbf{N}}$$

donde $(1, 2, 3, 4, \dots)$ es una forma intuitiva de denotar la infinitupla cuyo i -esimo elemento es el numero natural i .

Si (A_1, A_2, \dots) es una infinitupla de conjuntos, entonces usaremos $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ o $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ para denotar al conjunto

$$\{a : a \in A_i, \text{ para algun } i \in \mathbf{N}\}$$

Conjuntos

Supondremos que el lector sabe las nociones basicas sobre conjuntos, aunque resaltaremos algunas de las mas importantes para que el lector las repase.

La propiedad de *extensionalidad* nos dice que, dados conjuntos A, B , se tiene que $A = B$ si y solo si para cada objeto x se da que

$$x \in A \text{ si y solo si } x \in B$$

Esta propiedad es importante metodologicamente ya que a la hora de probar que dos conjuntos A, B son iguales, extensionalidad nos asegura que basta con ver que se dan las dos inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Otro tema importante es manejar correctamente la notacion cuando definimos un conjunto usando llaves y mediante propiedades que caracterizan la pertenencia al mismo. Algunos ejercicios para entrenar esta notacion:

Ejercicio 1: Entender en forma precisa que conjunto se esta denotando en cada uno de los siguientes casos

- (a) $\{x \in \mathbf{N} : x = 1 \text{ o } x \geq 5\}$
- (b) $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ y } x^2 \geq 100\}$
- (c) $\{x : x = 100\}$
- (d) $\{x^2 + 1 : x \in \omega\}$
- (e) $\{x + y + z : x, y, z \in \{1, 2\}\}$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.

- (a) $\{x.y : x, y \in \omega\} = \omega$
- (b) $|\{x.y : x, y \in \omega \text{ y } 1 \leq x, y \leq 5\}| = 25$
- (c) Dados $A, B \subseteq \omega$, se tiene que $\{a \in A \text{ y } b \in B : a + b = 1000\} \subseteq A \times B$
- (d) $\{a \in \mathbf{N}, a \geq 3\} \subseteq \omega$
- (e) $\{x + 1 : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Alfabetos

Un *alfabeto* es un conjunto finito de simbolos. Notese que \emptyset es un alfabeto. Si Σ es un alfabeto, entonces Σ^* denotara el conjunto de todas las palabras formadas con simbolos de Σ . Las palabras de longitud 1 son exactamente los elementos de Σ , en particular esto nos dice que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$. La unica palabra de longitud 0 es denotada con ε . Ya que en ε no ocurren simbolos, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$, para cualquier alfabeto, mas aun notese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. Usaremos $|\alpha|$ para denotar la longitud de la palabra α . Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, usaremos $|\alpha|_\sigma$ para denotar la cantidad de ocurrencias del simbolo σ en α . Usaremos Σ^+ para denotar al

conjunto $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$. Notese que funciones, n -uplas y palabras son objetos de distinto tipo, por lo cual \emptyset , \diamond y ε son tres objetos matematicos diferentes.

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma^*$, con $n \geq 0$, usaremos $\alpha_1 \dots \alpha_n$ para denotar la *concatenacion* de las palabras $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (notese que cuando $n = 0$, resulta que $\alpha_1 \dots \alpha_n = \varepsilon$). Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$, entonces escribiremos α^n en lugar de $\alpha_1 \dots \alpha_n$. O sea que $\alpha^0 = \varepsilon$.

Diremos que α es *subpalabra (propia)* de β cuando ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$. Diremos que β es un *tramo inicial (propio)* de α si hay una palabra γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final (propio)*.

Dados $i \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definamos

$$[\alpha]_i = \begin{cases} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1 \leq i \leq |\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|} [\gamma]_{|\gamma|-1} \dots [\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ .

Ocurrencias

Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de i en β* cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$. Intuitivamente hablando α ocurre a partir de i en β cuando se de que si comensamos a leer desde el lugar i -esimo de β en adelante, leeremos la palabra α completa y luego posiblemente seguiran otros simbolos.

Notese que una palabra α puede ocurrir en β , a partir de i , y tambien a partir de j , con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de α en β . Por ejemplo hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

ccccccabaccccabaccccc

y tambien hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

ccccccababaccccccccc

En el primer caso diremos que dichas ocurrencias de *aba* son *disjuntas* ya que ocupan espacios disjuntos dentro de la palabra. En cambio en el segundo caso puede apreciarse que las dos ocurrencias se superponen en una posicion. A veces diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo la segunda ocurrencia de *ab* en *babbbfabcccfabccc* esta contenida en la primer ocurrencia de *fab* en *babbbfabcccfabccc*.

No definiremos en forma matematica precisa el concepto de ocurrencia pero el lector no tendra problemas en comprenderlo y manejarlo en forma correcta.

Reemplazos de ocurrencias Tambien haremos *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo el resultado de reemplazar la primer ocurrencia de *abb* en *ccabbgfgabbgg* por *oolala* es la palabra *ccoolalagfgabbgg*. Cuando todas las ocurrencias de una palabra α en una palabra β sean disjuntas entre si, podemos hablar del resultado de *reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de α en β por γ* . Por ejemplo si tenemos

$$\begin{aligned}\alpha &= yet \\ \beta &= ghsyetcjjjyetbcpyetabc \\ \gamma &= \%\%\end{aligned}$$

entonces *ghs%%cjjj%%bcp%%eabc* es el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de α en β por γ . Es importante notar que los reemplazos se hacen simultaneamente y no secuencialmente (i.e. reemplazando la primer ocurrencia de α por γ y luego al resultado reemplazarle la primer ocurrencia de α por γ y así sucesivamente). Obviamente el reemplazo secuencial puede dar un resultado distinto al simultaneo (que es el que usaremos en general) e incluso puede suceder que en el reemplazo secuencial el proceso se pueda iterar indefinidamente. Dejamos al lector armar ejemplos de estas situaciones.

Tambien se pueden hacer reemplazos simultaneos de distintas palabras en una palabra dada. Supongamos tenemos palabras $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (con $\alpha_i \neq \alpha_j$, para $i \neq j$) las cuales tienen la propiedad de que las distintas ocurrencias de ellas en la palabra β son siempre disjuntas de a pares, y tenemos ademas palabras $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Entonces hablaremos del resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β , por γ_1
- cada ocurrencia de α_2 en β , por γ_2
- \vdots
- cada ocurrencia de α_n en β , por γ_n

Por ejemplo si tomamos

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= gh \\ \alpha_2 &= yet \\ \alpha_3 &= ana \\ \beta &= ghbbbyetbbgh\%\%ana\#\%ana!!!ana \\ \gamma_1 &= AA \\ \gamma_2 &= BBBB \\ \gamma_3 &= CCC\end{aligned}$$

entonces *AAbbbBBBBbbAA%%CCC##CCC!!!CCC* es el resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β , por γ_1

- cada ocurrencia de α_2 en β , por γ_2
- cada ocurrencia de α_3 en β , por γ_3

Matematica orientada a objetos

Nuestro estilo o enfoque matematico pondra enfasis en los objetos, es decir haremos matematica prestando atencion a los distintos objetos matematicos involucrados, los cuales siempre seran definidos en forma precisa en terminos de objetos mas primitivos. Hay ciertos objetos matematicos los cuales no definiremos y supondremos que el lector tiene una idea clara y precisa de los mismos. Por ejemplo un tipo de objeto matematico, quizas el mas famoso, son los *numeros*. No diremos que es un numero pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de este tipo de objetos y de sus propiedades basicas. Otro tipo de objeto que no definiremos y que sera clave para nuestro enfoque son los *conjuntos*. Nuevamente, no diremos que es un conjunto pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de estos objetos y sus propiedades basicas. Es importante que en nuestro enfoque, numeros y conjuntos son objetos de distinta naturaleza por lo cual nunca un numero es un conjunto ni un conjunto es un numero. En particular esto nos dice que el numero 0 y el conjunto \emptyset son objetos distintos. Otro tipo de objeto matematico muy importante para la matematica discreta son los *simbolos*. No discutiremos que es un simbolo sino que aceptaremos este concepto en forma primitiva. Tambien constituyen un tipo de objeto matematico las *palabras*, las cuales intuitivamente hablando son juxtaponiciones de simbolos. Otro tipo de objeto matematico muy importante son los *pares ordenados* o *2-uplas*, es decir los objetos de la forma (a, b) , donde a y b son objetos matematicos cualesquiera. Tambien son objetos matematicos y de distinta naturaleza las *3-uplas*, las *4-uplas* y en general las *n-uplas* para n un numero natural mayor o igual a 2. Cabe destacar que en nuestro enfoque no habra 1-uplas. Sin envargo, si bien hay una sola *0-upla*, ella constituye un tipo de objeto matematico distinto a los antes mencionados. El ultimo tipo de objeto matematico que consideraremos es aquel de las *infinituplas*.

Tenemos entonces dividido nuestro universo matematico en las distintas categorias de objetos:

NUMERO
 CONJUNTO
 PALABRA
 0-UPLA
 2-UPLA
 3-UPLA
 \vdots
 INFINITUPLA

(Notar que los simbolos quedan contenidos en la categoria de las palabras). Es importante entender que las anteriores categorias o tipos de objetos son disjuntas entre si, es decir nunca un numero sera una palabra o una palabra sera una 3-upla etc. Esto nos permite definir una funcion Ti la cual a un objeto matematico le asigna su tipo de objeto matematico segun la lista anterior. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} Ti(\pi) &= \text{NUMERO} \\ Ti(\mathbf{N}) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti(\mathcal{P}(\mathbf{N})) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti((1, 2, 3)) &= \text{3-UPLA} \\ Ti(\emptyset) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti(\varepsilon) &= \text{PALABRA} \\ Ti(\diamond) &= \text{0-UPLA} \\ Ti(\alpha) &= \text{PALABRA, si } \alpha \text{ es un simbolo} \\ Ti(f) &= \text{CONJUNTO, si } f \text{ es una funcion} \end{aligned}$$

El concepto de funcion

Asumiremos que el lector tiene una idea intuitiva del concepto de funcion. Daremos aqui una definicion matematica de dicho concepto. Una *funcion* es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

(F) Si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

Por ejemplo, si tomamos $f = \{(x, x^2) : x \in \omega\}$ se puede ver facilmente que f cumple la propiedad (F). Dada una funcion f , definamos

$$\begin{aligned} D_f &= \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algun } y\} \\ I_f &= \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algun } x\} \end{aligned}$$

A veces escribiremos $\text{Dom}(f)$ y $\text{Im}(f)$ para denotar, respectivamente, el dominio y la imagen de una funcion f . Como es usual dado $x \in D_f$, usaremos $f(x)$ para denotar al unico $y \in I_f$ tal que $(x, y) \in f$. Notese que \emptyset es una funcion y que $D_\emptyset = I_\emptyset = \emptyset$. Por ejemplo para $f = \{(x, x^2) : x \in \omega\}$ se tiene que $D_f = \omega$ y $I_f = \{y : y = x^2 \text{ para algun } x \in \omega\}$. Ademas notese que $f(x) = x^2$, para cada $x \in D_f$.

Escribiremos $f : S \subseteq A \rightarrow B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$. Tambien escribiremos $f : A \rightarrow B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$. En tal contexto llamaremos a B *conjunto de llegada*. Por supuesto B no esta determinado por f ya que solo debe cumplir $I_f \subseteq B$.

Muchas veces para definir una funcion f , lo haremos dando su dominio y su regla de asignacion, es decir especificaremos en forma precisa que conjunto es el dominio de f y ademas especificaremos en forma precisa quien es $f(x)$ para

cada x de dicho dominio. Obviamente esto determina por completo a la funcion f ya que $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Por ejemplo si decimos que f es la funcion dada por:

$$\begin{aligned} D_f &= \omega \\ f(x) &= 23x^2 \end{aligned}$$

nos estaremos refiriendo a la funcion $\{(x, 23x^2) : x \in \omega\}$. Tambien escribiremos

$$\begin{array}{ccc} f : \omega & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & 23x^2 \end{array}$$

para describir a f . Es decir, a veces para hacer mas intuitiva aun la descripcion de la funcion, tambien incluiremos un conjunto de llegada de dicha funcion y a la regla de asignacion la escribiremos usando una flecha. Para dar otro ejemplo, si escribimos sea f dada por:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & \begin{cases} x+1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases} \end{array}$$

estaremos diciendo que f es la funcion

$$\{(x, x+1) : x \text{ es par y } x \in \mathbf{N}\} \cup \{(x, x^2) : x \text{ es impar y } x \in \mathbf{N}\}$$

Funcion identidad

Dado un conjunto A , a la funcion

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ a & \rightarrow & a \end{array}$$

La denotaremos con Id_A y la llamaremos la funcion *identidad sobre A*. Notese que $Id_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

Igualdad de funciones

Sean f y g dos funciones. Ya que las mismas son conjuntos, tendremos que f sera igual a g si y solo si para cada par (a, b) , se tiene que $(a, b) \in f$ sii $(a, b) \in g$. Muchas veces sera util el siguiente criterio de igualdad de funciones:

Lemma 1 Sean f y g funciones. Entonces $f = g$ sii $D_f = D_g$ y para cada $x \in D_f$ se tiene que $f(x) = g(x)$

Ejercicio 3: (S) Pruebe el lema anterior

Ejercicio 4: V o F o I, justifique.

(a) Si

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array}$$

entonces $f = g$

(b) Si

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^4/x \end{array}$$

entonces $f = g$

(c) Si f es una funcion y $z \in D_f$, entonces $Ti(z) = \text{CONJUNTO}$

(d) $\text{Dom}((1, 2)) = \{1\}$

(e) $\text{Dom}(\{(1, 2)\}) + 1 = 2$

(f) Si f es una funcion, entonces $D_f = \{a : (a, b) \in f\}$

(g) Si $f : A \rightarrow B$, entonces $D_f \subseteq A$

(h) Si $f : A \rightarrow B$, entonces $I_f = B$

(i) Si f es una función y $g \subseteq f$, entonces g es una función

Funciones Σ -mixtas

Sea Σ un alfabeto finito. Dados $n, m \in \omega$, usaremos $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ para abreviar la expresion

$$\overbrace{\omega \times \dots \times \omega}^{n \text{ veces}} \times \overbrace{\Sigma^* \times \dots \times \Sigma^*}^{m \text{ veces}}$$

Por ejemplo, $\omega^3 \times \Sigma^{*4}$ sera una forma abreviada de escribir $\omega \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Debe quedar claro que estamos haciendo cierto abuso notacional ya que en principio si no hacemos esta convencion notacional, $\omega^3 \times \Sigma^{*4}$ denota un conjunto de pares y $\omega \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$ es un conjunto de 7-uplas.

Notese que:

- Cuando $n = m = 0$, tenemos que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto $\{\diamond\}$
- Si $m = 0$, entonces $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto ω^n
- Si $n = 0$, entonces $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto Σ^{*m}

Es decir que tenemos que tener cuidado cuando leemos esta notacion y no caer en la confucion de interpretarla mal. A manera de ultimo ejemplo, si vemos $\omega^1 \times \Sigma^{*0}$, segun esta nueva convencion debemos pensar en ω y no leer en forma convencional lo cual nos haria pensar que $\omega^1 \times \Sigma^{*0}$ denota el conjunto de pares $\omega \times \{\diamond\}$

Con esta convencion notacional, un elemento generico de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es una $(n + m)$ -upla de la forma $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Para abreviar, escribiremos $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ en lugar de $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Definicion de funcion Σ -mixta Sea Σ un alfabeto finito. Dada una funcion f , diremos que f es Σ -mixta si cumple las siguientes propiedades

- (M1) Existen $n, m \geq 0$, tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
(M2) Ya sea $I_f \subseteq \omega$ o $I_f \subseteq \Sigma^*$

Algunos ejemplos:

E₁ Sea $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$. La funcion

$$\begin{aligned} f : \omega \times \{\square, \%, \blacktriangle\}^* &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow x + |\alpha| \end{aligned}$$

es Σ -mixta ya que se cumple (M1) con $n = m = 1$ y (M2). Notese que f no es $\{\square, \%\}$ -mixta ya que no cumple (M1) respecto del alfabeto $\{\square, \%\}$. Sin envargo note que f es $\{\square, \%, \blacktriangle, @\}$ -mixta

E₂ La funcion

$$\begin{aligned} \omega^4 &\rightarrow \omega \\ (x, y, z, w) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

es Σ -mixta cualesquiera sea el alfabeto Σ

E₃ Sea $\Sigma = \{\square, @\}$. La funcion

$$\begin{aligned} \{\square\square\square, @@\} &\rightarrow \omega \\ \alpha &\rightarrow |\alpha| \end{aligned}$$

es Σ -mixta ya que se cumple (M1) (con $n = 0$ y $m = 1$) y (M2)

E₄ Supongamos $\Sigma = \emptyset$. Tenemos entonces que $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \omega \\ (x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

donde $D = \{(x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) : x \text{ es impar}\}$, es Σ -mixta (con $n = 1$ y $m = 3$ en (M1)). Tambien notese que

$$\begin{aligned} \{(\varepsilon, \varepsilon)\} &\rightarrow \{\varepsilon\} \\ (\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

es Σ -mixta (con $n = 0$ y $m = 2$ en (M1)).

Dejamos al lector la facil prueba del siguiente resultado basico.

Lemma 2 Supongamos $\Sigma \subseteq \Gamma$ son alfabetos finitos. Entonces si f es una funcion Σ -mixta, f es Γ -mixta

Una funcion Σ -mixta f es Σ -total cuando haya $n, m \in \omega$ tales que $D_f = \omega^n \times \Sigma^{*m}$. El lema anterior nos dice que si $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces toda funcion Σ -mixta es Γ -mixta. Sin envargo una funcion puede ser Σ -total y no ser Γ -total, cuando $\Sigma \subseteq \Gamma$. Por ejemplo tomemos $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$ y $\Gamma = \{\square, \%, \blacktriangle, !\}$, y consideremos la funcion

$$\begin{aligned} f : \omega \times \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow x + |\alpha| \end{aligned}$$

Es claro que f es Σ -mixta y Σ -total. Tambien es Γ -mixta ya que $D_f \subseteq \omega \times \Gamma^*$ y $I_f \subseteq \omega$, por lo cual cumple (M1) y (M2). Sin envargo f no es Γ -total ya que D_f no es igual a $\omega^n \times \Gamma^{*m}$, cualesquiera sean n y m .

Como hemos visto recien, una funcion f puede ser Σ -mixta y Γ -mixta para dos alfabetos distintos Σ y Γ e incluso es facil construir un ejemplo en el cual Σ y Γ sean incomparables como conjuntos, es decir que ninguno incluya al otro. Dejamos al lector convencerse de que si f es una funcion que es Σ -mixta para algun alfabeto Σ , entonces hay un alfabeto Σ_0 el cual es el menor de todos los alfabetos respecto de los cuales f es mixta, es decir Σ_0 cumple que f es Σ_0 -mixta y si Γ es tal que f es Γ -mixta, entonces $\Sigma_0 \subseteq \Gamma$.

A continuacion daremos algunas funciones Σ -mixtas basicas las cuales seran frecuentemente usadas.

Funciones Suc y $Pred$ La funcion sucesor es definida por

$$\begin{aligned} Suc : \omega &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n + 1 \end{aligned}$$

La funcion predecesor es definida por

$$\begin{aligned} Pred : \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n - 1 \end{aligned}$$

Las funciones d_a Sea Σ un alfabeto no vacio. Para cada $a \in \Sigma$, definamos

$$\begin{aligned} d_a : \Sigma^* &\rightarrow \Sigma^* \\ \alpha &\rightarrow \alpha a \end{aligned}$$

La funcion d_a es llamada la funcion *derecha sub a* , respecto del alfabeto Σ .

Las funciones $p_i^{n,m}$ Sea Σ un alfabeto. Para $n, m \in \omega$ e i tal que $1 \leq i \leq n$, definamos

$$\begin{aligned} p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} &\rightarrow \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow x_i \end{aligned}$$

Para $n, m \in \omega$ e i tal que $n + 1 \leq i \leq n + m$, definamos

$$\begin{aligned} p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} &\rightarrow \Sigma^* \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \alpha_{i-n} \end{aligned}$$

Las funciones $p_i^{n,m}$ son llamadas *proyecciones*. La funcion $p_i^{n,m}$ es llamada la *proyeccion n, m, i* , respecto del alfabeto Σ . Notese que esta definicion requiere que $n + m \geq 1$ ya que i debe cumplir $1 \leq i \leq n + m$.

Las funciones $C_k^{n,m}$ y $C_\alpha^{n,m}$ Sea Σ un alfabeto. Para $n, m, k \in \omega$, y $\alpha \in \Sigma^*$, definamos

$$\begin{array}{ccc} C_k^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_\alpha^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & \alpha \end{array}$$

Notese que $C_k^{0,0} : \{\diamond\} \rightarrow \{k\}$ y que $C_\alpha^{0,0} : \{\diamond\} \rightarrow \{\alpha\}$.

Ejercicio 5: V o F o I, justifique.

- (a) La funcion $x + 1$ es \emptyset -mixta
- (b) La función

$$\begin{array}{ccc} \left\{ (x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_{\#} = 0 \right\} & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & |\alpha|.x \end{array}$$

es $\{\&, @\}$ -mixta

- (c) f es Σ -mixta si existen $n, m \geq 0$, tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y $I_f \subseteq \omega \cup \Sigma^*$
- (d) Sea $f : \omega \rightarrow \omega$. Entonces $f(5) = 2$
 $x \rightarrow C_2^{1,0}$

El tipo de una funcion mixta Dada una funcion Σ -mixta f , si $n, m \in \omega$ son tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y ademas $I_f \subseteq \omega$, entonces diremos que f es una funcion de tipo $(n, m, \#)$. Similarmente si $n, m \in \omega$ son tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y ademas $I_f \subseteq \Sigma^*$, entonces diremos que f es una funcion de tipo $(n, m, *)$. Notese que si $f \neq \emptyset$, entonces hay unicos $n, m \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que f es una funcion de tipo (n, m, s) . Sin envargo \emptyset es una funcion de tipo (n, m, s) cualesquiera sean $n, m \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$. De esta forma, cuando $f \neq \emptyset$ hablaremos de "el tipo de f " para referirnos a esta unica terna (n, m, s) . Notese que Suc es de tipo $(1, 0, \#)$ y d_a es de tipo $(0, 1, *)$.

Ejercicio 6: Hacer

- (a) De que tipo es cada una de las siguientes funciones
 - i. $C_\varepsilon^{1,2}$
 - ii. $\left\{ (x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_{\#} = 0 \right\} \rightarrow \omega$
 $(x, \alpha) \rightarrow |\alpha|.x$
 - iii. Id_ω
 - iv. Id_{Σ^*}
 - v. $\Sigma^* \rightarrow \omega$
 $\alpha \rightarrow |\alpha|$

$$\begin{array}{ll}
\text{vi. } \{(\varepsilon, \varepsilon)\} & \rightarrow \{\varepsilon\} \\
& (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \varepsilon \\
\text{vii. } \{\diamond\} & \rightarrow \omega \\
& \diamond \rightarrow 0
\end{array}$$

(b) (S) Que significa la frase

- la relacion " f es una funcion de tipo (n, m, s) " no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Predicados Σ -mixtos Un *predicado Σ -mixto* es una funcion f la cual es Σ -mixta y ademas cumple que $I_f \subseteq \{0, 1\}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{ll}
\omega \times \omega & \rightarrow \omega \\
(x, y) & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \Sigma^* & \rightarrow \omega \\
(x, \alpha) & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = |\alpha| \\ 0 & \text{si } x \neq |\alpha| \end{cases}
\end{array}$$

Operaciones logicas entre predicados Dados predicados $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$, con el mismo dominio, definamos nuevos predicados $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{ll}
(P \vee Q) : S & \rightarrow \omega \\
(\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ o } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\
(P \wedge Q) : S & \rightarrow \omega \\
(\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ y } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\
\neg P : S & \rightarrow \omega \\
(\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \end{cases}
\end{array}$$

Composicion de funciones

Dadas funciones f y g definamos la funcion $f \circ g$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{e \in D_g : g(e) \in D_f\} \\
f \circ g(e) &= f(g(e))
\end{aligned}$$

Notar que $f \circ g = \{(u, v) : \text{existe } z \text{ tal que } (u, z) \in g \text{ y } (z, v) \in f\}$.

Ejercicio 7: V o F o I, justifique

- (a) $Pred = Pred \circ (Pred \circ Suc)$
- (b) $Pred \circ (Suc \circ Pred) = Pred$
- (c) $Pred \circ (Suc \circ \{(x, x) : x \in \mathbf{N}\}) = Pred \circ Suc$
- (d) $\emptyset \circ f = f \circ \emptyset = \emptyset$ cualquiera sea la funcion f
- (e) Sea Σ un alfabeto finito. Si $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \omega$ se tiene que $(Suc \circ p_2^{5,0})(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3$
- (f) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $Suc \circ Pred = p_1^{1,0}$
- (g) $Suc \circ x = Suc$
- (h) $Suc \circ 4 = 5$
- (i) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $\emptyset = Pred \circ C_0^{0,0}$
- (j) Si $f : D_f \subseteq \omega \rightarrow \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \rightarrow \omega$, entonces $D_{f \circ g} = \{x \in \omega : x \in D_g \text{ y } I_g \subseteq D_f\}$

A la hora de probar enunciados acerca de funciones hay una regla o idea basica que si la tenemos en cuenta nos facilitara la construccion de la prueba.

Regla Pertenecer a la Imagen: Si f es una funcion y ud sabe que $z \in I_f$, entonces escriba a z en la forma $f(x)$ donde x denotara un elemento de D_f

Muchas veces tener esta regla en mente es de suma utilidad al hacer pruebas. Por ejemplo el lector puede usarla para hacer una prueba rigurosa del enunciado del siguiente ejercicio. Esa regla aqui es simplemente un consejo o sugerencia pero gana su existencia material en un entorno de inteligencia artificial al transformarse en parte de la estructura de un probador automatico de teoremas!

Ejercicio 8: Pruebe que $f \circ g \neq \emptyset$ si y solo si $I_g \cap D_f \neq \emptyset$ (esto nos dice que que muchas veces sucedera que $f \circ g = \emptyset$)

Funciones de la forma $[f_1, \dots, f_n]$

Dadas funciones f_1, \dots, f_n , con $n \geq 2$, definamos la funcion $[f_1, \dots, f_n]$ de la siguiente manera:

$$D_{[f_1, \dots, f_n]} = D_{f_1} \cap \dots \cap D_{f_n}$$

$$[f_1, \dots, f_n](e) = (f_1(e), \dots, f_n(e))$$

Notese que $I_{[f_1, \dots, f_n]} \subseteq I_{f_1} \times \dots \times I_{f_n}$. Por conveniencia notacional (que el lector entendera mas adelante) definiremos $[f_1] = f_1$. Es decir que hemos definido para cada sucecion de funciones f_1, \dots, f_n , con $n \geq 1$, una nueva funcion la cual denotamos con $[f_1, \dots, f_n]$.

Ejercicio 9: V o F o I, justifique

(a) Sea Σ un alfabeto y supongamos $\# \in \Sigma$. Entonces

$$p_4^{2,3} \circ [p_1^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1}, C_{\#\#}^{1,1}, p_2^{1,1}] = C_{\#\#}^{1,1}$$

(b) Si $f : \omega^2 \rightarrow \omega$, entonces $f = f \circ [x, y]$

(c) $[p_2^{2,3}, Suc] = \emptyset$

(d) Supongamos $f_i : \omega \rightarrow \omega$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, con $n \geq 2$. Entonces $I_{[f_1, \dots, f_n]} = I_{f_1} \times \dots \times I_{f_n}$

Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Una funcion f es *inyectiva* cuando no se da que $f(a) = f(b)$ para algun par de elementos distintos $a, b \in D_f$. Dada una funcion $f : A \rightarrow B$ diremos que f es *suryectiva* cuando $I_f = B$. Debe notarse que el concepto de suryectividad depende de un conjunto de llegada previamente fijado, es decir que no tiene sentido hablar de la suryectividad de una funcion f si no decimos respecto de que conjunto de llegada lo es. Muchas veces diremos que una funcion f es *sobre* para expresar que es suryectiva.

Dada una funcion $f : A \rightarrow B$ diremos que f es *biyectiva* cuando f sea inyectiva y suryectiva. Notese que si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces podemos definir una nueva funcion $f^{-1} : B \rightarrow A$, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(b) = \text{unico } a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

La funcion f^{-1} sera llamada la *inversa de f* . Notese que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Ejercicio 10: V o F o I, justifique.

(a) Una función f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ cada vez que $x = y$

(b) $F : A \rightarrow B$ es suryectiva sii para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $b = F(a)$

Ejercicio 11: Hacer:

(a) Dar una biyeccion entre \mathbf{N} y ω . Idem entre ω y $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$

(b) Dar una funcion inyectiva de ω^2 en ω

(c) Dar una funcion sobreyectiva de ω en ω^5

Lemma 3 Supongamos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ son tales que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$. Entonces f y g son biyectivas, $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$.

Ejercicio 12: (S) Haga una prueba del lema anterior

Conjuntos Σ -mixtos

Un conjunto S es llamado Σ -mixto si existen $n, m \in \omega$ tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Por ejemplo,

$$\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\blacktriangle, !\}^* : |\alpha| = x\}$$

$$\{(0, \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle, \varepsilon), (1, \% \blacktriangle \% , \blacktriangle\blacktriangle)\}$$

son conjuntos $\{\blacktriangle, \%, !\}$ -mixtos. Tambien notese que \emptyset y $\{\diamond\}$ son conjuntos Σ -mixtos, cualesquiera sea el alfabeto Σ . Por ultimo el conjunto

$$\{(x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$$

es \emptyset -mixto (con $n = 1$ y $m = 3$).

Ejercicio 13: V o F o I, justifique.

- (a) Un conjunto S es Σ -mixto sii $S = D_f$ para alguna función Σ -mixta f
- (b) $\{(1, 2, \varepsilon), (1, 2)\}$ es un conjunto Σ -mixto, cualesquiera sea el alfabeto finito Σ

El tipo de un conjunto mixto

Dado un conjunto Σ -mixto S , si $n, m \in \omega$ son tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces diremos que S es un conjunto de tipo (n, m) . Notese que si $S \neq \emptyset$, entonces hay unicos $n, m \in \omega$ tales que S es un conjunto de tipo (n, m) . De esta forma, cuando $S \neq \emptyset$ hablaremos de "el tipo de S " para refererirnos a este unico par (n, m) . Tambien es importante notar que de la definicion anterior sale inmediatamente que \emptyset es un conjunto de tipo (n, m) cualesquiera sean $n, m \in \omega$, por lo cual cuando hablemos de EL tipo de un conjunto deberemos estar seguros de que dicho conjunto es no vacio.

Notese que ω es de tipo $(1, 0)$ y Σ^* es de tipo $(0, 1)$.

Ejercicio 14: Hacer

- (a) De que tipo es cada uno de los siguientes conjuntos
 - i. $\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_{\#} = 0\}$
 - ii. $\{1, 2, 3\}$
 - iii. $\{\varepsilon\}$
 - iv. $\{\diamond\}$
 - v. $\{(1, \varepsilon)\}$
 - vi. $\{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

- (b) Para el caso $\Sigma = \emptyset$, describa para un $m \in \omega$ dado, como son los conjuntos no vacios de tipo $(0, m)$.
- (c) (S) Que significa la frase
- la relacion " S es un conjunto de tipo (n, m) " no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Notacion lambda

Usaremos la notacion lambda de Church en la forma que se explica a continuacion. Esta notacion siempre depende de un alfabeto finito previamente fijado. En general en nuestro lenguaje matematico utilizamos diversas expresiones las cuales involucran variables que una vez fijadas en sus valores hacen que la expresion tambien represente un determinado valor

En el contexto de la notacion lambda solo se podran utilizar expresiones con caracteristicas muy especiales por lo cual a continuacion iremos describiendo que condiciones tienen que cumplir las expresiones para que puedan ser usadas en la notacion lambda

- (1) Solo utilizaremos expresiones que involucran variables numericas, las cuales se valuaran en numeros de ω , y variables alfabeticas, las cuales se valuaran en palabras del alfabeto previamente fijado. Las variables numericas seran seleccionadas de la lista

$x, y, z, w, n, m, k, \dots$
 x_1, x_2, \dots
 y_1, y_2, \dots
etc

Las variables alfabeticas seran seleccionadas de la lista

$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \dots$
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
 β_1, β_2, \dots
etc

- (2) Por ejemplo la expresion:

$$x + y + 1$$

tiene dos variables numericas x e y (y ninguna alfabetica). Si le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 45, entonces la expresion $x + y + 1$ produce o representa el valor $48 = 2 + 45 + 1$.

- (3) Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$|\alpha\beta| + |\alpha|^x$$

la cual tiene una variable numerica x y dos variables alfabeticas α y β . Supongamos ademas que el alfabeto previamente fijado es $\{@, \%\}$. Si le asignamos a x el valor 2, a α el valor $@@$ y a β el valor $%%\%$, entonces la expresion $|\alpha\beta| + |\alpha|^x$ produce o representa el valor $|\@@\%\%|\%| + |\@@|^2 = 9$.

- (4) Para ciertas valuaciones de sus variables la expresion puede no estar definida. Por ejemplo la expresion

$$Pred(|\alpha|)$$

no asume valor o no esta definida cuando el valor asignado a α es ε . Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$x/(y - |\alpha|)^2$$

Esta expresion no esta definida o no asume valor para aquellas asignaciones de valores a sus variables en las cuales el valor asignado a y sea igual a la longitud del valor asignado a α .

- (5) En los ejemplos anteriores las expresiones producen valores numericos pero tambien trabajaremos con expresiones que producen valores alfabeticos. Por ejemplo la expresion

$$\beta^y$$

tiene una variable numerica, y , una variable alfabetica, β , y una vez valuadas estas variables produce un valor alfabetico, a saber el resultado de elevar el valor asignado a la variable β , a el valor asignado a y .

- (6) Una expresion E para poder ser utilizada en la notacion lambda relativa a un alfabeto Σ debera cumplir alguna de las dos siguientes propiedades
- (a) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas de manera que E este definida para esos valores, deberan ser siempre elementos de ω
 - (b) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas de manera que E este definida para esos valores, deberan ser siempre elementos de Σ^* .

- (7) Por ejemplo la expresion

$$x/2$$

no cumple la propiedad dada en (6) ya que para ciertos valores de ω asignados a la variable x , la expresion da valores numericos que se salen de ω por lo cual no cumple ni (a) ni (b).

- (8) Otro ejemplo, si el alfabeto fijado es $\Sigma = \{ @, \% \}$, entonces la expresion

$$@^x \y$

no cumple la propiedad dada en (6) ya que por ejemplo cuando le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 6, la expresion nos da la palabra $@@\$\$\$\$\$$ la cual no pertenece a Σ^* por lo cual no cumple ni (a) ni (b).

- (9) No necesariamente las expresiones que usaremos en la notacion lambda deben ser hechas como combinacion de operaciones matematicas conocidas. Muchas veces usaremos expresiones que involucran incluso lenguaje coloquial castellano. Por ejemplo la expresion

el menor numero primo que es mayor que x

Es claro que esta expresion para cada valor de ω asignado a la variable x produce o representa un valor concreto de ω . Otro ejemplo:

el tercer simbolo de α

notese que esta expresion, una vez fijado un alfabeto Σ , estara definida o producira un valor solo cuando le asignamos a α una palabra de Σ^* de longitud mayor o igual a 3.

- (10) **Expresiones Booleanas.** A las expresiones Booleanas tales como la expresion

$$x = y + 1 \text{ y } |\alpha| \leq 22$$

las pensaremos que asumen valores del conjunto $\{0, 1\} \subseteq \omega$. Por ejemplo la expresion anterior asume o produce el valor 1 cuando le asignamos a x el valor 11, a y el valor 10 y a α la palabra ε . Las expresiones Booleanas pensadas de esta forma podran ser utilizadas en la notacion lambda si es que tambien cumplen con las anteriores condiciones.

- (11) La expresion

$$5$$

no tiene variables por lo cual pensaremos que siempre produce el valor 5 cualesquiera sean los valores asignados a las variables.

Expresiones lambdificables con respecto a Σ

Dado un alfabeto Σ a las expresiones que cumplan las caracteristicas dadas anteriormente las llamaremos *lambdificables con respecto a Σ* . Notese que este concepto es intuitivo y no un concepto matematicamente definido en forma precisa. Mas aun el concepto de expresion tampoco ha sido definido matematicamente (aunque obviamente si sabemos que una expresion es una palabra de cierto alfabeto). Esto no nos traera problemas para el uso notacional que las

utilizaremos. Recien en la materia logica veremos la matematizacion de ciertas expresiones (no las lambdificables) y nos servira de ejemplo para imaginar como podriamos matematizar el concepto de expresion lambdificable.

Algunos ejemplos:

- (E1) $x/2$ no es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ
- (E2) $@x\$y$ es lambdificable con respecto a $\{ @, \$ \}$ y no es lambdificable con respecto a $\{ @, \#, \% \}$
- (E3) $x = y + 1$ es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ
- (E4) la expresion

el menor numero primo que es mayor que $x^{|\beta|}$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

- (E5) la expresion

5

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

Definicion de $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$

Supongamos ya hemos fijado un alfabeto finito Σ y supongamos E es una expresion la cual es lambdificable con respecto a Σ . Sea $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ una lista de variables todas distintas tal que las variables numericas que ocurren en E estan todas contenidas en la lista x_1, \dots, x_n y las variables alfabeticas que ocurren en E estan en la lista $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (puede suceder que haya variables de la lista $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ las cuales no ocurran en E). Entonces

$$\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$$

denotara la funcion definida por:

- (L1) El dominio de $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$ es el conjunto de las $(n + m)$ -uplas $(k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que E esta definida cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i .
- (L2) $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E] (k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) =$ valor que asume o representa E cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i .

Notese que por tener E la propiedad (6) de mas arriba, la funcion $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$ es Σ -mixta de tipo (n, m, s) para algun $s \in \{ \#, * \}$. Algunos ejemplos:

- (a) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, i\}$. Entonces $\lambda x \alpha [\alpha^{2x}]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \omega \times \{@, ?, i\}^* &\rightarrow \{@, ?, i\}^* \\ (x, \alpha) &\rightarrow \alpha^{2x} \end{aligned}$$

Aqui el lector puede notar la dependencia de la notacion lambda respecto del alfabeto fijado. Si en lugar de fijar $\Sigma = \{@, ?, i\}$ hubieramos fijado $\Sigma = \{\% \}$, entonces $\lambda x \alpha [\alpha^{2x}]$ denotaria otra funcion, a saber

$$\begin{aligned} \omega \times \{\%\}^* &\rightarrow \{\%\}^* \\ (x, \alpha) &\rightarrow \alpha^{2x} \end{aligned}$$

- (b) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, i\}$. Entonces $\lambda x \alpha [5]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \omega \times \{@, ?, i\}^* &\rightarrow \omega \\ (x, y, z, \alpha) &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

- (c) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{\%, !\}$. Entonces $\lambda \alpha \beta [\alpha \beta]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \{\%, !\}^* \times \{\%, !\}^* &\rightarrow \{\%, !\}^* \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \beta \end{aligned}$$

Tambien tenemos que $\lambda \beta \alpha [\alpha \beta]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \{\%, !\}^* \times \{\%, !\}^* &\rightarrow \{\%, !\}^* \\ (\beta, \alpha) &\rightarrow \alpha \beta \end{aligned}$$

Notese que estas funciones son distintas. Por ejemplo $\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] (\%, !) = \%!$ y $\lambda \beta \alpha [\alpha \beta] (\%, !) = !\%$

- (d) Independientemente de quien sea Σ el alfabeto previamente fijado, tenemos que $\lambda xy [x + y]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \omega^2 &\rightarrow \omega \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

Tambien $\lambda xyzw [x + w]$ es la funcion

$$\begin{aligned} \omega^4 &\rightarrow \omega \\ (x, y, z, w) &\rightarrow x + w \end{aligned}$$

- (e) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, i\}$. Entonces por la clausula (L1) tenemos que el dominio de la funcion $\lambda xy \alpha \beta [Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es

$$D = \{(x, y, \alpha, \beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : |\alpha| \geq 1 \text{ y } y \geq 1\}$$

Es decir que $\lambda xy \alpha \beta [Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es la funcion

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \omega \\ (x, y, \alpha, \beta) &\rightarrow Pred(|\alpha|) + Pred(y) \end{aligned}$$

(f) Atentos a (10) de mas arriba, la funcion $\lambda xy [x = y]$ es el predicado

$$\begin{aligned} \omega \times \omega &\rightarrow \omega \\ (x, y) &\rightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

y $\lambda x \alpha [Pred(x) = |\alpha|]$ es el predicado

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } Pred(x) = |\alpha| \\ 0 \text{ si } Pred(x) \neq |\alpha| \end{cases} \end{aligned}$$

Tambien $\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta]$ es el predicado

$$\begin{aligned} \Sigma^* \times \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned}$$

(g) Notar que para $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$

(h) Como dijimos, la notacion lambda depende del alfabeto previamente fijado, aunque para el caso en que la lista de variables que sigue a la letra λ no tenga variables alfabeticas, la funcion representada no depende del alfabeto

Un par de ejemplos sutiles

(a) La expresion

$$Suc$$

no es lambdificable respecto de cualquier alfabeto Σ . Esto es porque si bien cualesquiera sea el valor asignado a las variables, ella asume el valor Suc , no cumple (6) de mas arriba ya que Suc no es un elemento de ω ni tampoco una palabra (es una funcion!)

(b) La expresion

$$Suc + (|\beta| + 1)$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ . Por ejemplo $\lambda x \beta [Suc + (|\beta| + 1)]$ es la funcion \emptyset , ya que la expresion $Suc + (|\beta| + 1)$ cualesquiera sean los valores de x y β no esta definida.

Ejercicio 15: V o F o I, justifique

(a) La expresion

$$|\alpha \# @ @| + x$$

no es lambdificable con respecto a $\{\#, \%\}$

(b) La expresion

$$x + 1 = 1/3$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

(c) La expresion

$$\lambda x[x^2] + (|\beta| + 1)$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

Ejercicio 16: V o F o I, justifique

(a) $\lambda xy[x + y] = \lambda yx[x + y]$

(b) Si $f : \Sigma^{*2} \rightarrow \omega$, entonces $\lambda\alpha\beta[f(\alpha, \beta)] = \lambda\beta\alpha[f(\beta, \alpha)]$

(c) $\lambda xy\alpha\beta[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es la función

$$\begin{aligned} \{(x, y, \alpha, \beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : |\alpha|.y \neq 0\} &\rightarrow \omega \\ (x, y, \alpha, \beta) &\rightarrow (|\alpha| + y) - 2 \end{aligned}$$

(d) $D_{\lambda xy[x^2]} = \omega$

(e) $\lambda x[Pred(x).0] = C_0^{1,0}$

(f) $Suc = \lambda x[Suc]$

(g) $\lambda xy[x.y] \circ [\lambda xy[x.y], C_1^{2,0}] = \lambda xy[x.y]$

(h) Sea $\Sigma = \{\nabla, \square\}$. Entonces $\lambda\alpha\beta[\alpha = \square\beta] = \lambda\alpha\beta[\alpha = \beta] \circ [p_1^{0,2}, \lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \circ [d_{\square} \circ C_{\varepsilon}^{0,0}, p_2^{0,2}]]$

2 Guia 2

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Codificacion de infinituplas de numeros

Usaremos $\omega^{\mathbf{N}}$ para denotar el conjunto de todas las infinituplas con coordenadas en ω . Es decir

$$\omega^{\mathbf{N}} = \{(s_1, s_2, \dots) : s_i \in \omega, \text{ para cada } i \geq 1\}.$$

Definamos el siguiente subconjunto de $\omega^{\mathbf{N}}$

$$\omega^{[\mathbf{N}]} = \{(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{\mathbf{N}} : \text{hay un } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } s_i = 0, \text{ para } i \geq n\}.$$

Notese que $\omega^{\mathbf{N}} \neq \omega^{[\mathbf{N}]}$, por ejemplo las infinituplas

$$(10, 20, 30, 40, 50, \dots)$$

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

no pertenecen a $\omega^{[\mathbf{N}]}$. Notese que $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ si y solo si solo una cantidad finita de coordenadas de (s_1, s_2, \dots) son no nulas (i.e. $\{i : s_i \neq 0\}$ es finito).

Definamos

$$\begin{aligned} pr : \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n\text{-esimo numero primo} \end{aligned}$$

Nótese que $pr(1) = 2$, $pr(2) = 3$, $pr(3) = 5$, etc.

Es bien conocido que todo numero natural es expresable como producto de primos. Por ejemplo si tomamos $x = 57596$ tenemos que $x = 2.2.7.11.11.17$. Tambien es un hecho conocido que dicha representacion en producto de primos es unica, si escribimos a los factores primos de menor a mayor, tal como lo hicimos recién con el numero 57596. El Teorema Fundamental de la Aritmetica justamente acevera esta propiedad de factorizacion unica de todo numero natural. Trataremos de escribir este teorema de una forma un poco mas "cheta".

Ya que $57596 = 2.2.7.11.11.17$, podemos escribir

$$57596 = pr(1)^2 \cdot pr(4)^1 \cdot pr(5)^2 \cdot pr(7)^1$$

Notese que ahora cada primo que interviene en la factorizacion de 57596 figura con un exponente que nos dice cuantas veces ocurre en dicha factorizacion. Hay muchos primos que no ocurren en esta factorizacion, es decir ocurren 0 veces en la misma. Pero podemos escribir

$$57596 = pr(1)^2 \cdot pr(2)^0 \cdot pr(3)^0 \cdot pr(4)^1 \cdot pr(5)^2 \cdot pr(6)^0 \cdot pr(7)^1 \cdot pr(8)^0 \cdot pr(9)^0 \cdot pr(10)^0 \dots$$

y la igualdad no se altera ya que agregamos factores iguales a 1 (una cantidad infinita!). De esta manera hemos logrado que cada primo intervenga en la factorizacion. Ademas si vemos la infinitupla de exponentes de esta nueva factorizacion, es decir

$$(2, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

obtenemos un elemento de $\omega^{[\mathbf{N}]}$.

Por supuesto esto lo podemos hacer con cualquier numero natural y siempre la infinitupla de exponentes sera un elemento de $\omega^{[\mathbf{N}]}$. Ademas es facil notar (basandose en el Teorema Fundamental de la Aritmética) que estas representaciones "chetas" tambien resultan unicas. Mas concretamente tenemos la siguiente version del Teorema Fundamental de la Aritmetica.

Theorem 4 *Para cada $x \in \mathbf{N}$, hay una unica infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que*

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

(Tiene sentido escribir $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$, ya que en esta productoria solo una cantidad finita de factores son no iguales a 1.)

Ejercicio 1: Pruebe la existencia en el teorema anterior. (Hint: Inducción completa.)

Como podra notarse despues de hacer el ejercicio anterior, la existencia de dicha infinitupla para un numero x en general, no es un hecho dificil de probar. En realidad la potencia del Teorema Fundamental de la Aritmética radica en el hecho de que dicha infinitupla es unica.

Para probar la unicidad es clave el siguiente resultado el cual aceptamos sin demostracion.

Lemma 5 Si p, p_1, \dots, p_n son numeros primos (con $n \geq 1$) y p divide a $p_1 \dots p_n$, entonces $p = p_i$, para algun i .

Ejercicio 2: Use el lema anterior para probar que

- i. $17^{1045} \neq 13^{2000}$
- ii. $5^{55} \cdot 13^{90} \cdot 17^{1045} \neq 5^{55} \cdot 3^{122} \cdot 31^{400}$
- iii. $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 17^{1045} \neq 2^{100} \cdot 3^{12} \cdot 17^{1044}$

Ejercicio 3: Enuncie en forma precisa que significa la "unicidad" en el teorema anterior

Ejercicio 4: (O) Diga con palabras como se puede probar dicha unicidad usando el Lema 5.

A continuacion un poco de notacion. Dada una infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ usaremos $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$ para denotar al numero $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$.

Dado $x \in \mathbf{N}$, usaremos (x) para denotar a la unica infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que

$$x = \langle s_1, s_2, \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Ademas para $i \in \mathbf{N}$, usaremos $(x)_i$ para denotar a s_i de dicha infinitupla. Es decir que

- (1) $(x) = ((x)_1, (x)_2, \dots)$
- (2) $(x)_i$ es el exponente de $pr(i)$ en la (unica posible) factorizacion de x como producto de primos

Se le suele llamar la "bajada i -esima de x " al numero $(x)_i$. La idea de este nombre es que para obtener $(x)_i$ debemos bajar el exponente de $pr(i)$ en la factorizacion de x

Claramente entonces

(3) $\langle (x)_1, (x)_2, \dots \rangle = x$, para cada $x \in \mathbf{N}$

(4) Para cada $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$, se tiene que

$$(\langle s_1, s_2, \dots \rangle)_i = s_i, \text{ para } i \in \mathbf{N}$$

Es decir que

$$(\langle s_1, s_2, \dots \rangle) = (s_1, s_2, \dots)$$

Ejercicio 5: Justifique con palabras las propiedades (3) y (4)

Ejercicio 6: Pruebe que si $x, y \in \mathbf{N}$, entonces

- i. $(x)_i \leq x$, para cada $i \in \mathbf{N}$
- ii. $(x.y)_i = (x)_i + (y)_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$
- iii. $x|y$ si y solo si $(x)_i \leq (y)_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$

Tenemos entonces el siguiente resultado fundamental

Theorem 6 *Las funciones*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{N} & \rightarrow \omega^{[\mathbf{N}]} \\ x & \rightarrow (x) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \omega^{[\mathbf{N}]} & \rightarrow \mathbf{N} \\ (s_1, s_2, \dots) & \rightarrow \langle s_1, s_2, \dots \rangle \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Proof. Llamemos f a la funcion de la izquierda y g a la de la derecha. Notese que el Lema 3 de la Guia 1 nos dice que basta con probar que $f \circ g = Id_{\omega^{[\mathbf{N}]}}$ y $g \circ f = Id_{\mathbf{N}}$. Pero (3) justamente nos dice que $g \circ f = Id_{\mathbf{N}}$ y (4) nos dice que $f \circ g = Id_{\omega^{[\mathbf{N}]}}$. ■

Tal como se hace en la escuela primaria, el siguiente lema nos permite calcular $(x)_i$.

Lemma 7 *Dados $x, i \in \mathbf{N}$, se tiene que*

$$(x)_i = \max_t (pr(i)^t \text{ divide a } x)$$

Ejercicio 7: (O) Explique con palabras como se aplica el Lema 5 para probar el lema anterior

Definamos la funcion $Lt : \mathbf{N} \rightarrow \omega$ de la siguiente manera:

$$Lt(x) = \begin{cases} \max_i (x)_i \neq 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Se tienen las siguientes propiedades basicas

Lemma 8 Para cada $x \in \mathbf{N}$:

- (a) $Lt(x) = 0$ sii $x = 1$
- (b) $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Ejercicio 8: (S) Dar una prueba del lema anterior.

Ejercicio 9: Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

- i. $\lambda ix[(x)_i]$
- ii. $\lambda x[Lt(x)]$
- iii. $\lambda x[(x)_1, (x)_2, (x)_3, 0, 0, \dots]$

Ordenes totales

Antes de introducir los órdenes totales, repasaremos algunos conceptos básicos requeridos.

Sea A un conjunto. Recordemos que una *relacion binaria sobre A* es un subconjunto de A^2 . Algunos ejemplos:

- (E1) Sea $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre \mathbf{N} .
- (E2) Sea $R = \{(x, y) \in \omega^2 : x \text{ divide a } y\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω .
- (E3) Sea $R = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre \mathbf{R} .
- (E4) \emptyset es una relacion binaria sobre A , cualesquiera sea el conjunto A .
- (E5) Sea $R = \{(x, y) \in \omega^2 : x < y \text{ o } y = 0\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω .

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$ entonces R es una relacion binaria sobre B . Por ejemplo las relaciones dadas en los ejemplos (E1), (E2), (E4) y (E5) tambien son relaciones binarias sobre \mathbf{R} .

Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A , algunas veces escribiremos aRb en lugar de $(a, b) \in R$.

Recordemos que una relacion binaria R sobre un conjunto A es llamada un *orden parcial sobre A* si cumple las siguientes tres propiedades:

- Reflexividad xRx , cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad xRy y yRz implica xRz , cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Antisimetria xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

Algunos ejemplos:

- (E1) $\{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$ es un orden parcial sobre \mathbf{R} , llamado el orden usual de \mathbf{R}
- (E2) Sea $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1, 2, 3\}$
- (E3) Sea $R = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(\omega)$
- (E4) $\{(x, y) \in \omega^2 : x \leq y\}$ es un orden parcial sobre ω .
- (E5) Sea $R = \{(1, 1)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1\}$.
- (E6) $\{(a, b) \in A^2 : a = b\}$ es un orden parcial sobre A , cualesquiera sea el conjunto A
- (E7) Sea $\leq = \{(n, m) \in \mathbf{N}^2 : n \mid m\}$. Es facil ver que \leq es un orden parcial sobre \mathbf{N}

Notese que las relaciones dadas en (E1) y (E4) son distintas, ademas

Ejercicio 10: Es la relacion dada en (E4) un orden parcial sobre \mathbf{R} ?

Muchas veces denotaremos con \leq a una relacion binaria que sea un orden parcial. Esto hace mas intuitiva nuestra escritura pero siempre hay que tener en cuenta que \leq en estos casos esta denotando cierto conjunto de pares ordenados previamente definido.

Usaremos la siguiente

Convencion notacional Si hemos denotado con \leq a cierto orden parcial sobre un conjunto A , entonces

- Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Es decir que $< = \{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de $a < b$ diremos que *a es menor que b* o que *b es mayor que a* (respecto de \leq)

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\leq = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, entonces $< = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Ahora sí estamos en condiciones de definir orden total. Sea A un conjunto cualquiera. Por un *orden total sobre A* entenderemos un orden parcial \leq sobre A el cual cumple:

- (C) $a \leq b$ o $b \leq a$, cualesquiera sean $a, b \in A$

Ejercicio 11: Decida cuáles ordenes parciales de la lista de ejemplos (E1)-(E7) son ordenes totales.

Supongamos A es finito, no vacío, y que \leq es un orden total sobre A . La propiedad (C) nos permite probar que para cada conjunto no vacío $S \subseteq A$, hay un elemento $s \in S$ el cual cumple $s \leq s'$ para cada $s' \in S$. Por supuesto, s es único (por que?) y habitualmente es llamado el *menor elemento de S* , ya que es menor que todo otro elemento de S .

Si A es finito, no vacío, y \leq es un orden total sobre A , podemos definir recursivamente una función $f : \{1, \dots, |A|\} \rightarrow A$ de la siguiente manera:

- $f(1)$ = menor elemento de A
- Si $i \in \{1, \dots, |A| - 1\}$, entonces
 - $f(i + 1)$ = menor elemento de $A - \{f(1), \dots, f(i)\}$

Como es habitual, $f(i)$ es llamado el *i -ésimo elemento de A* .

Muchas veces para dar un orden total sobre un conjunto finito A , daremos simplemente sus elementos en forma creciente ya que esto determina el orden por completo. Por ejemplo si $A = \{1, 2, 3\}$, el orden total dado por $2 < 1 < 3$ es la relación $\leq = \{(2, 1), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Ejercicio 12: (S) (O) Sea A un conjunto finito de $n > 0$ elementos. Encuentre una biyección entre $\{R : R \text{ es un orden total sobre } A\}$ y $\{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : a_i \neq a_j \text{ para } i \neq j\}$. (¿Por qué este resultado se puede considerar informático?)

Ordenes naturales sobre Σ^*

Llamaremos *numerales* a los siguientes símbolos

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Usaremos Num para denotar el conjunto de numerales. Notese que $Num \cap \omega = \emptyset$. Es decir, no debemos confundir los símbolos que usualmente denotan los primeros diez números enteros con los números que ellos denotan. De hecho en china o japon los primeros diez números enteros se denotan con otros símbolos. Similarmente las palabras pertenecientes a Num^* denotan (notación decimal) a los números de ω pero debemos tener en cuenta que $Num^* \cap \omega = \emptyset$. Cuando tratamos con palabras de Num^* , debemos ser cuidadosos ya que muchas veces en nuestro discurso matemático (es decir las guías, el apunte, lo que escriben los profesores en el pizarrón, etc)

representamos dos objetos diferentes de la misma forma. Por ejemplo 45 puede estar denotando al numero entero cuarenta y cinco o tambien 45 puede estar denotando la palabra de longitud 2 cuyo primer simbolo es el numeral 4 y cuyo segundo simbolo es el numeral 5, es decir en este caso la palabra 45 se denota a ella misma. Por dar otro ejemplo, el simbolo 1 en nuestro discurso algunas veces se denotara a si mismo y otras veces denotara al numero uno.

Es bien conocido que, en notacion decimal, las siguientes palabras del alfabeto Num , denotan, de menor a mayor, a los numeros de ω

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots$$

Por supuesto esta lista de palabras es infinita pero asumimos que el lector sabe como obtener la palabra siguiente a cada miembro de la lista (i.e. sumar 1 en notacion decimal), lo cual determina por completo la lista conociendo que la misma comienza con la palabra 0.

Cabe destacar que debido a la presencia del numeral 0 en la lista, la n -esima palabra representa o denota al numero $n - 1$ o, dicho de otra forma, el numero $n \in \omega$ es representado por la $(n + 1)$ -esima palabra de la lista.

Un detalle de la representacion decimal de numeros de ω mediante palabras de Num^* es que la misma no nos da una biyeccion entre Num^* y ω ya que por ejemplo las palabras 00016 y 16 representan el mismo numero. Dicho de otra forma en la lista anterior no figuran todas las palabras de Num^* , a saber estan omitidas todas las palabras que comienzan con el simbolo 0 y tienen longitud mayor que uno. A continuacion daremos una representacion de los numeros de ω mediante palabras, la cual no tendra este problema. El alfabeto que usaremos tendra todos los numerales menos el 0 y ademas tendra un simbolo para denotar al numero diez, a saber el simbolo d . Es decir

$$\widetilde{Num} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d\}$$

Representaremos a los numeros de ω con la siguiente lista infinita de palabras de \widetilde{Num}

$$\begin{aligned} &\varepsilon, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d, \\ &11, 12, \dots, 1d, 21, 22, \dots, 2d, \dots, 91, 92, \dots, 9d, d1, d2, \dots, dd, \\ &111, 112, \dots, 11d, 121, 122, \dots, 12d, \dots \end{aligned}$$

El lector ya se habra dado cuenta de que el siguiente a una palabra α de la lista anterior se obtiene aplicando las siguientes clausulas

$$C_1 \text{ si } \alpha = d^n, \text{ con } n \geq 0 \text{ entonces el siguiente de } \alpha \text{ es } 1^{n+1}$$

C₂ si α no es de la forma d^n , con $n \geq 0$, entonces el siguiente de α se obtiene de la siguiente manera:

- i. buscar de derecha a izquierda el primer simbolo no igual a d
- ii. reemplazar dicho simbolo por su siguiente en la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d$
- iii. reemplazar por el simbolo 1 a todos los simbolos iguales a d que ocurrian a la derecha del simbolo reemplazado

Notese que

- El numero 0 es representado en la lista anterior con la palabra ε
- El numero 1 es representado en la lista anterior con la palabra 1
- \vdots
- El numero 9 es representado en la lista anterior con la palabra 9
- El numero 10 es representado en la lista anterior con la palabra d
- El numero 11 es representado en la lista anterior con la palabra 11
- \vdots
- El numero 19 es representado en la lista anterior con la palabra 19
- El numero 20 es representado en la lista anterior con la palabra $1d$
- El numero 21 es representado en la lista anterior con la palabra 21
- El numero 22 es representado en la lista anterior con la palabra 22
- \vdots

Como puede notarse en estos primeros veinte y pico numeros solo dos (el 0 y el 20) se representan en forma distinta a la representacion decimal clasica. Es natural que ε denote al numero 0 y ademas notese que la palabra $1d$ (que en la lista representa el 20) puede leerse como "diecidiez" (es decir la palabra que sigue a "diecinueve") que justamente es 20. Por supuesto con esta manera de pensar la palabra $2d$ deberiamos leerla como "ventidiez" y si nos fijamos en la lista ella representa al numero treinta lo cual nuevamente es muy natural. Otro ejemplo: a $6d$ deberiamos leerla como "sesentidiez" y es natural ya que en la lista representa al setenta. Tambien, la palabra $9d$ puede leerse noventidiez ya que representa en la lista al numero 100.

La lista anterior va representando los numeros de ω en forma muy natural pero, aunque nuestra intuicion nos diga que no, en principio podria pasar que una misma palabra del alfabeto \widetilde{Num} ocurra dos veces en la lista y esto nos diria que una misma palabra estaria representando a dos numeros distintos. Tambien, en principio podria suceder que haya una palabra del alfabeto \widetilde{Num} la cual nunca figure en la lista. Mas abajo daremos una serie de ejercicios que muestran que estas dos posibilidades no suceden, es decir muestran que

- (S) Toda palabra de \widetilde{Num}^* aparece en la lista
(I) Ninguna palabra de \widetilde{Num}^* aparece mas de una ves

Notese que la propiedad (S) nos dice que la funcion

$$\begin{aligned} * : \omega &\rightarrow \widetilde{Num}^* \\ n &\rightarrow (n+1)\text{-esimo elemento de la lista} \end{aligned}$$

es sobreyectiva y la propiedad (I) nos garantiza que dicha funcion es inyectiva, por lo cual entre las dos nos garantizan que dicha representacion establece una biyeccion entre ω y \widetilde{Num}^* .

Por supuesto, la pregunta que inmediatamente surge es como calcular la inversa de $*$. Llamemos $\#$ a la inversa de $*$. Notese que dada una palabra $\alpha \in \widetilde{Num}^*$, el numero $\#(\alpha)$ es justamente el numero representado por la palabra α , o dicho de otra forma $\#(\alpha)$ es la posicion que ocupa α en la lista, contando desde el 0 (es decir α es la $(\#(\alpha) + 1)$ -esima palabra de la lista). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \#(\varepsilon) &= 0 \\ \#(1) &= 1 \\ &\vdots \\ \#(9) &= 9 \\ \#(d) &= 10 \\ \#(11) &= 11 \\ \#(12) &= 12 \\ &\vdots \\ \#(19) &= 19 \\ \#(1d) &= 20 \end{aligned}$$

Aqui hay que tener cuidado como leemos las igualdades anteriores. Por ejemplo en la igualdad

$$\#(1) = 1$$

la primera ocurrencia del simbolo 1 se refiere al numeral uno, es decir denota una palabra y la segunda ocurrencia se esta refiriendo al numero uno, es decir denota un numero.

Dejamos al lector el ejercicio de ganar intuicion con ejemplos hasta que se convenga de que tal como en el caso de la notacion decimal, el numero $\#(\alpha)$ se expresa como una suma de potencias de 10, con los coeficientes dados en funcion de los simbolos de α . Mas concretamente si $\alpha = s_1 s_2 \dots s_k$ con $k \geq 1$ y $s_1, s_2, \dots, s_k \in \widetilde{Num}$, entonces

$$\#(\alpha) = \#(s_1).10^{k-1} + \#(s_2).10^{k-2} + \dots + \#(s_k).10^0$$

No daremos ahora una prueba formal de este hecho pero para ganar intuición sobre el mismo el lector puede hacer los Ejercicios 13, 14, 15 y 16. Algunos ejemplos

$$\begin{aligned}\#(1d) &= 1 \cdot 10^1 + 10 \cdot 10^0 = 10 + 10 = 20 \\ \#(dd) &= 10 \cdot 10^1 + 10 \cdot 10^0 = 100 + 10 = 110 \\ \#(111) &= 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 100 + 10 + 1 = 111 \\ \#(1d3d) &= 1 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 10 \cdot 10^0\end{aligned}$$

Ahora que sabemos que las palabras de \widetilde{Num} representan los números como suma de potencias de diez, en forma análoga a la notación decimal clásica, podemos reforzar aun más la analogía poniendo nombres adecuados que, tal como en el caso clásico, nos permitan leer las palabras de \widetilde{Num} describiendo su suma de potencias asociada. Por ejemplo podríamos llamar "decenta" al número 100, por analogía a "treinta", "cuarenta", ..., "noventa". O sea una decenta es diez veces diez. De esta forma la palabra $d1$ se lea "decenta y uno" y esto es natural ya que en la lista representa al 101. La palabra dd se lea "decenta y diez" y esto describe a la perfección el número que representa, i.e. el $10 \cdot 10 + 10 = 110$. La palabra que sigue en la lista a dd es 111 la cual representa al 111, es decir aquí como en los otros casos vistos en los cuales no hay ocurrencias del símbolo d la palabra representa al mismo número que representa en la notación decimal clásica. Por dar otro ejemplo, la palabra $59d3$ se lea "cinco mil novecientos decenta y tres" y representará al número 6003.

Para seguir debemos ponerle nombre a "diez veces cien", es decir, "decientos" (por analogía con "novecientos = nueve veces cien") denotará al número $1000 = 10 \cdot 100$. De esta forma la palabra $d51$ se lea "decientos cincuenta y uno" y esto es natural ya que pensando un rato se puede ver que ella representa al 1051. También, la palabra ddd se lea "decientos decenta y diez" y representará al número 1110.

Prueba de las propiedades (S) e (I)

Dado que el siguiente a un elemento α de la lista es de la misma longitud que α o tiene longitud igual a $|\alpha| + 1$, podemos representar la lista anterior de la siguiente manera:

$$B_0; B_1; B_2; B_3; B_4; \dots$$

donde cada B_n es, por definición, la parte de la lista en la cual las palabras tienen longitud exactamente n . Por ejemplo:

- B_0 es ε

- B_1 es $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d$
- B_2 es $11, 12, \dots, 1d, 21, 22, \dots, 2d, \dots, 91, 92, \dots, 9d, d1, d2, \dots, dd$

Notese que hasta el momento nada nos asegura que no suceda que para algun n se de que B_n sea una lista infinita, lo cual ademas nos diria que los bloques B_{n+1}, B_{n+2}, \dots son todos vacios. Es decir podria pasar que la lista se estanque en una longitud n y nunca aparezca una palabra de longitud mayor que n . Esto por supuesto obligaria a que se repitan muchas veces palabras de dicha longitud n ya que hay una cantidad finita de las mismas (10^n).

Por supuesto nuestra intuicion nos dice que en el bloque B_n estan listadas sin repeticion todas las palabras de \widetilde{Num}^* de longitud n , pero debemos justificar esto con argumentos solidos. Algunas propiedades basicas que se pueden probar facilmente son:

- (1) Si $B_n = \alpha_1, \dots, \alpha_k$, entonces $\alpha_1 = 1^n$ y $\alpha_k = d^n$
- (2) Si d^n ocurre en B_n lo hace en la ultima posicion

estas propiedades son consecuencias inmediatas de como se calcula el elemento siguiente a uno dado en la lista.

Ejercicio 13: (O) Justifique con palabras la propiedad (1)

Ejercicio 14: (O) Justifique con palabras la propiedad (2)

Otra propiedad importante es la siguiente

- (3) Si $B_n = \alpha_1, \dots, \alpha_k$, entonces $B_{n+1} = 1\alpha_1, \dots, 1\alpha_k, 2\alpha_1, \dots, 2\alpha_k, \dots, d\alpha_1, \dots, d\alpha_k$

Para probar (3) es muy util el siguiente resultado obvio

Lemma 9 Sea $\sigma \in \widetilde{Num}$ y supongamos $\alpha \in \widetilde{Num}^*$ no es de la forma d^n . Entonces el siguiente a $\sigma\alpha$ es $\sigma\beta$ donde β es el siguiente a α

Ejercicio 15: (O) Use (1), (2) y el lema anterior para dar una explicacion solida con palabras de por que es cierta la propiedad (3)

Ahora es facil usando (3) probar inductivamente que

- (4) B_n es una lista sin repeticiones de todas las palabras de longitud n

Ejercicio 16: (O) Pruebe (4)

Pero claramente de (4) se desprenden en forma obvia las propiedades (S) y (I).

El caso general

Sea Σ un alfabeto no vacío y supongamos \leq es un orden total sobre Σ . Supongamos que $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, con $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Inspirados en la lista dada anteriormente de las palabras de \widehat{Num}^* , podemos dar la siguiente lista de palabras de Σ^* :

$\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_n,$
 $a_1 a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_n, a_2 a_1, a_2 a_2, \dots, a_2 a_n, \dots, a_n a_1, a_n a_2, \dots, a_n a_n,$
 $a_1 a_1 a_1, a_1 a_1 a_2, \dots, a_1 a_1 a_n, a_1 a_2 a_1, a_1 a_2 a_2, \dots, a_1 a_2 a_n, \dots, a_1 a_n a_1, a_1 a_n a_2, a_1 a_n a_n,$
 $a_2 a_1 a_1, a_2 a_1 a_2, \dots, a_2 a_1 a_n, a_2 a_2 a_1, a_2 a_2 a_2, \dots, a_2 a_2 a_n, \dots, a_2 a_n a_1, a_2 a_n a_2, a_2 a_n a_n,$
 \vdots
 $a_n a_1 a_1, a_n a_1 a_2, \dots, a_n a_1 a_n, a_n a_2 a_1, a_n a_2 a_2, \dots, a_n a_2 a_n, \dots, a_n a_n a_1, a_n a_n a_2, a_n a_n a_n,$
 $a_1 a_1 a_1 a_1, a_1 a_1 a_1 a_2, \dots$

El objetivo es probar que la lista anterior enumera sin repeticiones todas las palabras de Σ^* , i.e. produce naturalmente una biyección entre ω y Σ^* . Pero antes debemos definir más formalmente la lista. Para esto definamos $s^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

- $s^{\leq}((a_n)^m) = (a_1)^{m+1}$, para cada $m \geq 0$
- $s^{\leq}(\alpha a_i (a_n)^m) = \alpha a_{i+1} (a_1)^m$, cada vez que $\alpha \in \Sigma^*$, $1 \leq i < n$ y $m \geq 0$

Notese que la definición de s^{\leq} es correcta ya que toda palabra de Σ^* es de la forma $(a_n)^m$, con $m \geq 0$, o es de la forma $\alpha a_i (a_n)^m$, con $\alpha \in \Sigma^*$, $1 \leq i < n$ y $m \geq 0$; y estos dos casos posibles son mutuamente excluyentes (convencerse fuertemente de que esto es así).

Ejercicio 17: Sea $\Sigma = \{\%, !, @\}$ y sea \leq el orden total sobre Σ dado por $\% < ! < @$ (es decir que aquí $a_1 = \%$, $a_2 = !$ y $a_3 = @$). Escriba los primeros elementos de la lista y describa para este caso particular la función s^{\leq} , sin hablar de a_i 's, i.e. solo haciendo referencia a los símbolos $\%, !, @$.

Ejercicio 18: Pruebe para el caso general que

- i. $\varepsilon \neq s^{\leq}(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$
- ii. Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^{\leq}(\beta)$ para algún β

Ejercicio 19: (a) Conviene de que valen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 s^{\leq}(\varepsilon) &= a_1 \\
 s^{\leq}(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1}, \quad i < n \\
 s^{\leq}(\alpha a_n) &= s^{\leq}(\alpha) a_1
 \end{aligned}$$

(b) (S) Pruebe formalmente que valen las ecuaciones de (a)

Ejercicio 20: (S) Note que sucesivas aplicaciones de las ecuaciones anteriores determinan por completo el valor de s^{\leq} en una palabra α previamente fijada. Explique esto con palabras.

Por supuesto, la lista anterior puede ser escrita de la siguiente manera

$$\varepsilon, s^{\leq}(\varepsilon), s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon)), s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon))), s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon)))) \dots$$

Con esta definicion formal de la lista, podemos probar de la misma forma en la que lo hicimos arriba que:

(S) Toda palabra de Σ^* aparece en la lista

(I) Ninguna palabra de Σ^* aparece mas de una vez en la lista

Ejercicio 21: (S) (O) Pruebe (S) e (I). Hint: use las mismas ideas que se usaron para probar (S) e (I) para el caso de $\Sigma = \widetilde{Num}$ y \leq dado por $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < d$.

Definamos $*^{\leq} : \omega \rightarrow \Sigma^*$ recursivamente de la siguiente manera:

- $*^{\leq}(0) = \varepsilon$
- $*^{\leq}(i+1) = s^{\leq}(*^{\leq}(i))$

Es claro que entonces $*^{\leq}(i)$ nos da el $(i+1)$ -esimo elemento de la lista, o lo que es lo mismo, el i -esimo elemento de la lista contando desde el 0. O sea que las propiedades (S) y (I) nos garantizan que la funcion $*^{\leq}$ es biyectiva. A continuacion describiremos su inversa. Primero un lema facil pero muy importante.

Lemma 10 Sea Σ un alfabeto no vacio y supongamos \leq es un orden total sobre Σ . Supongamos que $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, con $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Entonces para cada $\alpha \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ hay unicos $k \in \omega$ y $i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$\alpha = a_{i_k} \dots a_{i_0}$$

Notar que k del lema anterior es $|\alpha| - 1$ y los numeros i_k, \dots, i_0 van dando el numero de orden de cada simbolo de α yendo de izquierda a derecha. Por ejemplo si $\Sigma = \{\%, !, @\}$ y \leq es el orden total sobre Σ dado por $\% < ! < @$ (es decir que aqui $a_1 = \%$, $a_2 = !$ y $a_3 = @$) entonces para la

palabra $! \% @ \% @$ tenemos $k = 4$ y $i_4 = 2, i_3 = 1, i_2 = 3, i_1 = 1$ y $i_0 = 3$. Sin envargo si hubieramos tomado el orden dado por $@ < \% < !$, para la misma palabra hubieramos tenido $i_4 = 3, i_3 = 2, i_2 = 1, i_1 = 2$ y $i_0 = 1$.

Ahora podemos definir la funcion $\#^{\leq}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \#^{\leq} : \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ \varepsilon &\rightarrow 0 \\ a_{i_k} \dots a_{i_0} &\rightarrow i_k n^k + \dots + i_0 n^0 \end{aligned}$$

Ejercicio 22: Si \leq es el orden de $\{ @, \& \}$ dado por $@ < \&$, entonces $\#^{\leq}(@ \& @ \& @) = 2^4 + 2^4 + 2^2 + 2^2 + 1$ y $\#^{\leq}(@ \& @ \& @) = 2^5 + 2^3 + 1$

Ejercicio 23: Si \leq es el orden de $\{ @, \& \}$ dado por $@ < \&$, entonces $\#^{\leq}(\alpha @) = \#^{\leq}(\alpha).2 + 1$, para todo $\alpha \in \{ @, \& \}^*$

Ejercicio 24: Sea Σ un alfabeto finito no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ . Inspirese en el ejercicio anterior para dar una "definicion recursiva" de la funcion $\#^{\leq}$.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado fundamental

Lemma 11 *La funcion $\#^{\leq}$ es la inversa de $*^{\leq}$*

Cabe destacar que dada una palabra α , el numero $\#^{\leq}(\alpha)$ nos dice en que posicion se hubica α en la lista, es decir α es la $(\#^{\leq}(\alpha) + 1)$ -esima palabra de la lista.

De los desarrollos hechos se desprende el siguiente interesante resultado

Lemma 12 *Sea $n \geq 1$ fijo. Entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma unica de la siguiente manera:*

$$x = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + \dots + i_0 n^0,$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, \dots, i_0 \leq n$.

Ejercicio 25: (S) Pruebe el lema anterior

Ejercicio 26: (S) Si \leq es un orden total sobre un alfabeto no vacio Σ , entonces $s^{\leq} = *^{\leq} \circ Suc \circ \#^{\leq}$

Como hemos visto las biyecciones dadas producen una "identificación" entre números de ω y palabras del alfabeto Σ . Es decir, en algún sentido identificamos palabras y números ya que se corresponden biunivocamente. Supongamos que α es una palabra de $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$ y queremos "verla como un número". Entonces en vez de ver sus símbolos vemos los órdenes de aparición en Σ de los mismos y miramos la suma de potencias asociada.

Supongamos ahora que x es un número de $\omega - \{0\}$ y además supongamos que somos super inteligentes y que cuando vemos a x vemos la secuencia única de números i_k, i_{k-1}, \dots, i_0 que nos permite expresarlo como suma de potencias según el lema anterior. Entonces si queremos ver a x como una palabra simplemente miramos la secuencia i_k, i_{k-1}, \dots, i_0 como palabra, reemplazando cada i_j por el símbolo i_j -ésimo de Σ .

Ejercicio 27: Mastique mastique e imagine hasta que entienda con claridad el último párrafo. Luego será más mariposa.

Extension del orden total de Σ a Σ^*

Podemos extender el orden de Σ a Σ^* de la siguiente manera.

$$- \alpha \leq \beta \text{ sii } \#^{\leq}(\alpha) \leq \#^{\leq}(\beta)$$

Es decir $\alpha \leq \beta$ sii $\alpha = \beta$ o α ocurre antes que β en la lista.

Ejercicio 28: Probar que \leq es un orden total sobre Σ^* .

Una propiedad importante e intuitivamente clara es que el orden recién definido sobre Σ^* posee las mismas características que el orden usual de ω . Por ejemplo:

Lemma 13 Si $S \subseteq \Sigma^*$ es no vacío, entonces existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq \beta$, para cada $\beta \in S$.

Ejercicio 29: (S) Pruebe el lema anterior

3 Guía 3

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene más madurez e intuición básica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Procedimientos efectivos

Un concepto importante en ciencias de la computacion es el de *procedimiento* o *metodo* para realizar alguna tarea determinada. Nos interesan los procedimientos que estan definidos en forma precisa e inambigua, es decir aquellos en los cuales en cada paso a seguir, la tarea a realizar esta objetivamente descripta. Tambien deben ser repetibles, en el sentido de que si realizamos un procedimiento dos veces con el mismo dato de entrada, entonces ambas ejecuciones deben ser identicas, es decir se realizaran las mismas tareas y en el mismo orden.

Nos interesan los procedimientos \mathbb{P} que posean las siguientes características:

1. Siempre supondremos que el interprete o ejecutante de \mathbb{P} es una persona que trabajara con papel y lapiz (ambos recursos disponibles en forma ilimitada).
2. Cada paso o tarea que \mathbb{P} encomiende a realizar debe ser simple y facil de realizar en forma *efectiva* por cualquier persona.
3. El procedimiento \mathbb{P} comienza a funcionar siempre a partir de cierto dato de entrada y una vez que haya comensado, siempre sucedera una de las dos siguientes posibilidades
 - (a) \mathbb{P} se detiene y da cierto dato de salida
 - (b) \mathbb{P} nunca se detiene, es decir a medida que se van realizando las instrucciones o tareas, \mathbb{P} siempre direcciona a realizar nuevas tareas y lo hace sucesiva e indefinidamente.

En el caso (a) diremos que \mathbb{P} se detiene partiendo del dato de entrada en cuestion y en el caso (b) diremos que \mathbb{P} no se detiene partiendo de dicho dato.

4. Hay $n, m \in \omega$ y un alfabeto Σ tales que el conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Cabe aclarar que para ciertas $(n + m)$ -uplas de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ el procedimiento \mathbb{P} se detendra y para ciertas otras no lo hara.

Llamaremos *procedimientos efectivos* a aquellos procedimientos que posean las características arriba mencionadas.

El *conjunto de datos de salida* de \mathbb{P} es el conjunto de todos los datos que el procedimiento \mathbb{P} dara como salida en alguna de las posibles ejecuciones al variar todos los datos de entrada posibles. Si bien siempre el conjunto de datos de entrada sera de la forma $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, puede ser muy dificil o imposible, en general, conocer con precision el conjunto de datos de salida de un procedimiento (esto lo justificaremos mas adelante).

Ya que el interprete de \mathbb{P} es una persona dotada de lapiz y papel, supondremos que los elementos de ω que intervienen en los datos de entrada y de salida estaran representados por palabras de Num usando la notacion decimal.

Quizas el procedimiento efectivo mas famoso de la matematica es aquel que se enseña en los colegios para sumar dos numeros naturales expresados en notacion decimal. Notar que el conjunto de datos de entrada de dicho procedimiento es ω^2 y el conjunto de datos de salida es el conjunto formado por todas las sumas posibles de pares de elementos de ω , es decir ω . Por supuesto este procedimiento solo usa lapiz, papel y pasos extremadamente simples a seguir en cada momento de la computacion, es decir, en algun sentido, no es necesario "entender que es lo que se esta haciendo" para llegar al final y obtener la palabra que representa en notacion decimal a la suma de los numeros iniciales. Dejamos al lector repasar este procedimiento asi como el que calcula dado un numero x no nulo de ω , al numero $x - 1$, los cuales nos haran falta mas adelante en los ejemplos.

Funciones Σ -efectivamente computables

Una funcion Σ -mixta $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ sera llamada Σ -efectivamente computable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- (2) El conjunto de datos de salida esta contenido en ω .
- (3) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces \mathbb{P} se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$, dando como dato de salida $f(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
- (4) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$, entonces \mathbb{P} no se detiene partiendo desde $(\vec{x}, \vec{\alpha})$

Analogamente una funcion Σ -mixta $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ sera llamada Σ -efectivamente computable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- (2) El conjunto de datos de salida esta contenido en Σ^* .
- (3) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces \mathbb{P} se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$, dando como dato de salida $f(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
- (4) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$, entonces \mathbb{P} no se detiene partiendo desde $(\vec{x}, \vec{\alpha})$

En ambos casos diremos que \mathbb{P} computa a la funcion f .

Veamos algunos ejemplos:

- (E1) La funcion $\lambda xy [x + y]$ es Σ -efectivamente computable, cualquiera sea el alfabeto Σ ya que el procedimiento enseñado en la escuela primaria para sumar numeros en notacion decimal es efectivo y computa esta funcion.
- (E2) La funcion $C_3^{1,2}$ es Σ -efectivamente computable ya que el siguiente procedimiento \mathbb{P} con conjunto de datos de entrada $\omega \times \Sigma^{*2}$ la computa:

- Independientemente de quien sea el dato de entrada $(x_1, \alpha_1, \alpha_2)$, detenerse dando como salida el numero 3
- (E3) La funcion $p_3^{2,3}$ es Σ -efectivamente computable ya que el siguiente procedimiento con conjunto de datos de entrada $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ la computa:
- Dado el dato de entrada $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, detenerse y dar como salida la palabra α_1
- (E4) $Pred$ es Σ -efectivamente computable. Para realizar el procedimiento efectivo que compute a $Pred$ necesitaremos el procedimiento de la escuela primaria que dado un numero no nulo x , expresado en notacion decimal, calcula el numero $x - 1$, en notacion decimal. Llamemos \mathbb{P}_{-1} a dicho procedimiento. El siguiente procedimiento (con conjunto de datos de entrada igual a ω) computa a $Pred$:
- Dado como dato de entrada un elemento $x \in \omega$, realizar lo siguiente:
- Etapas 1
- Si $x = 0$, entonces ir a Etapa 3, en caso contrario ir a Etapa 2.
- Etapas 2
- Correr \mathbb{P}_{-1} con dato de entrada x obteniendo y como dato de salida. Detenerse y dar y como dato de salida.
- Etapas 3
- Si $x = 0$, entonces ir a Etapa 1.
- Como puede notarse el procedimiento anterior es efectivo ya que como todos sabemos, los sucesivos pasos efectuados al correr \mathbb{P}_{-1} en la Etapa 2 son todos simples y efectivamente realizables. Por supuesto si uno quisiera ser mas prolijo, deberia reemplazar la Etapa 2 por las distintas instrucciones de \mathbb{P}_{-1} , referidas a x .
- (E5) El predicado $\lambda xy[x < y]$ es Σ -efectivamente computable cualquiera sea el alfabeto Σ . Describiremos con palabras un procedimiento $\mathbb{P}_{<}$ que computa a $\lambda xy[x < y]$. Su conjunto de datos de entrada es ω^2 . Dado un par $(x, y) \in \omega^2$, el procedimiento primero compara las longitudes de las palabras que en notacion decimal representan a x y y . Por supuesto esto lo hace borrando de a un simbolo y viendo si alguna se termina primero. Si resultan de distinta longitud, es facil darse cuenta como sigue. En caso de que las palabras resulten de igual longitud, entonces se hace el procedimiento clasico de ir comparando digitos de izquierda a derecha.
- (E6) Veamos que la funcion $\lambda \alpha[|\alpha|]$ es Σ -efectivamente computable. Como en los lenguajes de programacion, usaremos variables y asignaciones para diseñar el procedimiento. Ademas llamemos \mathbb{P}_{+1} a el procedimiento de la escuela primaria que dado un numero no nulo x , expresado en notacion decimal, calcula el numero $x + 1$, en notacion decimal. Sea $\mathbb{P}_{|}$ el siguiente procedimiento.

Dado como dato de entrada un elemento $\alpha \in \Sigma^*$, realizar lo siguiente:

Etapla 1: Hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \alpha \\ B &\leftarrow 0 \end{aligned}$$

e ir a Etapa 2.

Etapla 2: Si A no es ε , ir a Etapa 3. En caso contrario detenerse y dar como salida B .

Etapla 3: Correr \mathbb{P}_{+1} con dato de entrada igual al contenido de B , obteniendo y como salida. Hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A \\ B &\leftarrow y \end{aligned}$$

e ir a Etapa 2.

Ejercicio 1: Convensase que el uso de asignaciones puede realizarse usando solo lapiz y papel. Imagine como lo haria en el caso anterior y corrobore que dicho procedimiento es efectivo y ademas computa a $\lambda\alpha[|\alpha|]$.

Ejercicio 2: Use los procedimientos $\mathbb{P}_{<}$ y $\mathbb{P}_{|}$ de los dos ejemplos anteriores para diseñar usando asignaciones un procedimiento que compute a la funcion $\lambda i\alpha[[\alpha]_i]$

Un ultimo ejemplo:

(E7) Si \leq es el orden total sobre $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ dado por $\blacktriangle < \%$, entonces veremos que la funcion s^{\leq} es Σ -efectivamente computable. En un par de ejercicios de la Guia2 vimos que cualquiera sea $\alpha \in \Sigma^*$, se cumple

$$\begin{aligned} s^{\leq}(\varepsilon) &= \blacktriangle \\ s^{\leq}(\alpha\blacktriangle) &= \alpha\% \\ s^{\leq}(\alpha\%) &= s^{\leq}(\alpha)\blacktriangle \end{aligned}$$

y que estas ecuaciones permiten calcular el valor de s^{\leq} . Usaremos esta idea para dar un procedimiento efectivo (con conjunto de datos de entrada igual a Σ^*) que compute a s^{\leq} . Como en los lenguajes de programacion, usaremos variables y asignaciones para diseñar el procedimiento.

Etapla 1: Dado el dato de entrada $\alpha \in \Sigma^*$, hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \alpha \\ B &\leftarrow \varepsilon \\ F &\leftarrow \blacktriangle \end{aligned}$$

e ir a Etapa 2.

Etapa 2: Si A comienza con \blacktriangle , entonces hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A \\ F &\leftarrow B\% \\ B &\leftarrow B\blacktriangle \end{aligned}$$

e ir a la Etapa 2. En caso contrario ir a la Etapa 3.

Etapa 3: Si A comienza con $\%$, entonces hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A \\ F &\leftarrow F\blacktriangle \\ B &\leftarrow B\% \end{aligned}$$

e ir a la Etapa 2. En caso contrario ir a la Etapa 4.

Etapa 4: Dar como salida F

Observacion: Notese que la definicion de funcion Σ -efectivamente computable para el caso $f = \emptyset$ tiene a priori cierta ambigüedad ya que cualesquiera sean $n, m \in \omega$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ tenemos que $\emptyset : \emptyset \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ ya que $D_\emptyset = \emptyset$ y $I_\emptyset = \emptyset$. De todas maneras, cualesquiera sean los n, m y O elejidos, siempre hay un procedimiento efectivo que computa a $f = \emptyset$, i.e. un procedimiento que nunca se detiene, cualesquiera sea el dato de entrada de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Es decir que la funcion \emptyset es Σ -efectivamente computable cualesquiera sea el alfabeto Σ . Cabe destacar que para el caso de una funcion $f \neq \emptyset$, nuestra definicion es inambigua ya que hay unicos $n, m \in \omega$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ tales que $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$.

Ejercicio 3: Sea \mathbb{P}_+ un procedimiento efectivo que compute a la funcion $\lambda xy [x + y]$. Basado en \mathbb{P}_+ diseñe un procedimiento efectivo que compute a $\lambda xy [x.y]$

Ejercicio 4: Sea \leq es el orden total sobre $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ dado por $\blacktriangle < \%$. Usando que s^\leq es Σ -efectivamente computable diseñe un procedimiento efectivo que compute a $*^\leq : \omega \rightarrow \Sigma^*$

Ejercicio 5: Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ y sea $f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ dada por:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(0, 1, \varepsilon), (55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle), (1, 1, \blacktriangle\blacktriangle)\} \\ f(0, 1, \varepsilon) &= 1 \\ f(55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle) &= 2 \\ f(1, 1, \blacktriangle\blacktriangle) &= 3 \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 6: Diga con palabras como diseñaria un procedimiento efectivo que compute la funcion $\lambda ix [(x)_i]$

Ejercicio 7: Sean

$$\begin{aligned} f &: D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_1 &: D_{f_1} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_2 &: D_{f_2} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_3 &: D_{f_3} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2, f_3]} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$?
- (b) De una descripción del dominio de $f \circ [f_1, f_2, f_3]$.
- (c) Si f, f_1, f_2, f_3 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2, f_3]$ lo es.

Ejercicio 8: V o F o I. Justifique

- (a) Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo que computa una función no vacía $f : D_f \subseteq \omega \rightarrow \omega$ entonces el conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es ω
- (b) Si \mathbb{P} y \mathbb{Q} son procedimientos efectivos, entonces $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ lo es.
- (c) Denotemos con e a la cantidad de veces que estornudó Alan Turing a lo largo de su vida. Sea $f : \omega \rightarrow \omega$, dada por $f(x) = x^e$. Entonces f es \emptyset -efectivamente computable.
- (d) Si f y g son Σ -efectivamente computables entonces $f.g$ lo es

Ejercicio 8,3: Si $f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \{\emptyset, \uparrow\}^* \rightarrow \omega$ es tal que D_f es finito, entonces f es $\{\emptyset, \uparrow\}$ -efectivamente computable

Conjuntos Σ -efectivamente computables

Sea X un conjunto cualquiera y sea $S \subseteq X$. Usaremos χ_S^X para denotar la función

$$\begin{aligned} \chi_S^X : X &\rightarrow \omega \\ x &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

Llamaremos a χ_S^X la *función característica de S con respecto a X* .

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado *Σ -efectivamente computable* cuando la función $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -efectivamente computable. Notese que S es Σ -efectivamente computable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} , el cual computa $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, es decir:

- El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, siempre termina y da como dato de salida un elemento de $\{0, 1\}$.
- Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, \mathbb{P} da como salida al número 1 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$ y al número 0 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin S$.

Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, diremos que \mathbb{P} decide la pertenencia a S , con respecto al conjunto $\omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Observacion: Notese que la definicion de conjunto Σ -efectivamente computable, para el caso $S = \emptyset$, tiene a priori cierta ambigüedad ya que cualesquiera sean $n, m \in \omega$ tenemos que $\emptyset \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. De todas maneras, cualesquiera sean los n, m elejidos, siempre hay un procedimiento efectivo que computa a $\chi_{\emptyset}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, i.e. un procedimiento que siempre da como salida 0, cualesquiera sea el dato de entrada de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Es decir que el conjunto \emptyset es Σ -efectivamente computable cualesquiera sea el alfabeto Σ . Cabe destacar que para el caso de un conjunto $S \neq \emptyset$, nuestra definicion es inambigua ya que hay unicos $n, m \in \omega$ tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Ejercicio 9: $\omega^3 \times \Sigma^{*2}$ es Σ -efectivamente computable

Ejercicio 9,3: Si $S \subseteq \omega^2 \times \{\@, \uparrow\}^{*3}$ es finito, entonces es $\{\@, \uparrow\}$ -efectivamente computable

Ejercicio 10: $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha|^x \text{ es par}\}$ es Σ -efectivamente computable

Ejercicio 11: Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ y sea

$$S = \{(0, 1, \varepsilon), (55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle), (1, 1, \blacktriangle\blacktriangle)\}$$

Pruebe que S es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 12: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente computables. Entonces $S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S_1$ son Σ -efectivamente computables.

Ejercicio 13: (S) Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{\@, \uparrow\}^*$ tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Entonces S y L son ambos $\{\@, \uparrow\}$ -efectivamente computables sii $S \times L$ es $\{\@, \uparrow\}$ -efectivamente computable

Conjuntos Σ -efectivamente enumerables

Supongamos que $k, l, n, m \in \omega$ y que $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Supongamos ademas que $n + m \geq 1$. Entonces denotaremos con $F_{(i)}$ a la funcion $p_i^{n,m} \circ F$. Notar que

$$F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, \text{ para cada } i = 1, \dots, n$$

$$F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, \text{ para cada } i = n + 1, \dots, n + m$$

Por lo cual cada una de las funciones $F_{(i)}$ son Σ -mixtas.

Ejercicio 14: Sea $F : \{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha|^x \text{ es par}\} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega^2 \times \Sigma^*$ dada por $F(x, \alpha) = (x, x^2 + |\alpha|, \varepsilon)$. Diga quienes son $F_{(1)}, F_{(2)}$ y $F_{(3)}$. Que funcion es $[F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}]$?

Ejercicio 15: En la definicion anterior, para el caso $n + m = 1$, quien es $F_{(1)}$?

Ejercicio 16: Pruebe que $F = [F_{(1)}, \dots, F_{(n+m)}]$

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -efectivamente enumerable cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -efectivamente computable, para cada $i \in \{1, \dots, n + m\}$.

Observacion: Notese que para el caso $n = m = 0$, la condicion anterior de que $F_{(i)}$ sea Σ -efectivamente computable, para cada $i \in \{1, \dots, n + m\}$ se cumple vacuamente y por lo tanto la definicion anterior nos dice que un conjunto $S \subseteq \omega^0 \times \Sigma^{*0} = \{\diamond\}$ sera Σ -efectivamente enumerable sii es vacio o hay una funcion Σ -efectivamente computable $F : \omega \rightarrow \{\diamond\}$, tal que $I_F = S$. Por supuesto, esto nos dice que \emptyset y $\{\diamond\}$ son Σ -efectivamente enumerables.

Para entender mejor la idea de esta definicion consideremos el siguiente resultado.

Lemma 14 *Un conjunto no vacio $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente enumerable sii hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que*

- (1) *El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es ω*
- (2) *\mathbb{P} se detiene para cada $x \in \omega$*
- (3) *El conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es igual a S . (Es decir, siempre que \mathbb{P} se detiene, da como salida un elemento de S , y para cada elemento $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathbb{P} da como salida a $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando lo corremos con x como dato de entrada)*

Ejercicio 17: (S) Explique con palabras una justificacion del lema anterior

Cuando un procedimiento \mathbb{P} cumpla (1), (2) y (3) del lema anterior, diremos que \mathbb{P} enumera a S . O sea que S es Σ -efectivamente enumerable sii es vacio o hay un procedimiento efectivo el cual enumera a S .

Dicho de otra forma un conjunto no vacio S es Σ -efectivamente enumerable sii hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} el cual tiene conjunto de datos de entrada ω y ademas para los sucesivos datos de entrada $0, 1, 2, 3, \dots$, el procedimiento \mathbb{P} produce respectivamente los datos de salida $e_0, e_1, e_2, e_3, \dots$ de manera que $S = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$. Cabe destacar aqui que puede suceder que $e_i = e_j$, para ciertos i, j , con $i \neq j$.

Nota Importante: en lo que sigue muchas veces daremos procedimientos que son efectivos en terminos de otros que ya se han dado, es decir daremos un procedimiento que en principio no es claro que sea efectivo pero el cual se

volveria efectivo si reemplazamos ciertas instrucciones por la manera efectiva de simularlas. Para hacer mas dinamico el discurso no distinguiremos entre este tipo de procedimientos (efectivisables) y los efectivos propiamente dichos.

Algunos ejemplos:

(E1) Un procedimiento efectivo que enumera $\omega \times \omega$ es el siguiente:

Etapas 1

Si $x = 0$, dar como salida el par $(0, 0)$ y terminar. Si $x \neq 0$, calcular $x_1 = (x)_1$ y $x_2 = (x)_2$.

Etapas 2

Dar como dato de salida el par (x_1, x_2) y terminar

Como puede notarse el procedimiento es efectivo (efectivisable) y ademas el conjunto de datos de salida es $\omega \times \omega$ ya que si tomamos un par cualquiera $(a, b) \in \omega \times \omega$, el procedimiento lo dara como dato de salida para la entrada $x = 2^a 3^b$.

(E2) Veamos que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es Σ -efectivamente enumerable cualquiera sea el alfabeto no vacio Σ . Sea \leq un orden total para el alfabeto Σ . Utilizando el orden \leq podemos diseñar el siguiente procedimiento para enumerar $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$:

Etapas 1

Si $x = 0$, dar como salida $(0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ y terminar. Si $x \neq 0$, calcular

$x_1 = (x)_1$

$x_2 = (x)_2$

$\alpha_1 = *^{\leq}((x)_3)$

$\alpha_2 = *^{\leq}((x)_4)$

$\alpha_3 = *^{\leq}((x)_5)$

Etapas 2

Dar como dato de salida la 5-upla $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Ejercicio 18: Explique por que es efectivo el procedimiento de (E2)

Ejercicio 19: Pruebe que el procedimiento de (E2) tiene conjunto de datos de salida igual a $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$.

Ejercicio 20: Sea $S = \{(x, \uparrow^x) : x \text{ es par}\}$. Pruebe que S es $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 21: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ -efectivamente enumerable

Ejercicio 22: (S) Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -efectivamente enumerable. (No es facil, en el apunte esta probado en forma de lema.)

Ejercicio 23: (Explicado en video en granlogico.com) Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo cuyo conjunto de datos de entrada es $\omega \times \Sigma^*$ entonces el conjunto $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : \mathbb{P} \text{ termina partiendo de } (x, \alpha)\}$ es Σ -efectivamente enumerable. Saque como conclusion que el dominio de una funcion Σ -efectivamente computable es Σ -efectivamente enumerable.

Lemma 15 Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente computable entonces S es Σ -efectivamente enumerable.

Proof. Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \gamma) \in S$, fijo. Sea \mathbb{P} un procedimiento efectivo que compute a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$. Ya vimos en el ejemplo anterior que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es Σ -efectivamente enumerable. En forma similar se puede ver que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ lo es. Sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces el siguiente procedimiento enumera a S :

Etapa 1

Realizar \mathbb{P}_1 con x de entrada para obtener como salida un $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Etapa 2

Realizar \mathbb{P} con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor Booleano e de salida.

Etapa 3

Si $e = 1$ dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$. Si $e = 0$ dar como dato de salida (\vec{z}, γ) .

■

Como veremos mas adelante en la Guia 9, hay conjuntos que son Σ -efectivamente enumerables y no Σ -efectivamente computables. Sin envargo tenemos el siguiente interesante resultado:

Theorem 16 Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes

(a) S es Σ -efectivamente computable

(b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -efectivamente enumerables

Proof. (a) \Rightarrow (b). Por el lema anterior tenemos que S es Σ -efectivamente enumerable. Notese ademas que, dado que S es Σ -efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ tambien lo es (por que?). Es decir que aplicando nuevamente el lema anterior tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es Σ -efectivamente enumerable.

(b) \Rightarrow (a). Si $S = \emptyset$ o $S = \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es claro que se cumple (a). O sea que podemos suponer que ni S ni $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ son igual al conjunto vacio. Sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a S y sea \mathbb{P}_2 un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$. Es facil ver que el siguiente procedimiento computa el predicado $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$:

Etapa 1

Darle a la variable T el valor 0.

Etapa 2

Realizar \mathbb{P}_1 con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.

Etapa 3

Realizar \mathbb{P}_2 con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

Etapa 4

Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1. Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0. Si no suceden ninguna de las dos posibilidades antes mencionadas, aumentar en 1 el valor de la variable T y dirigirse a la Etapa 2. ■

Ejercicio 24: Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(1, @@) \in S$ y $f(1, @@) = @!!$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, \alpha) \in S : f(x, \alpha) = @!!\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 25: Sea $S = \{(x, \alpha) \in \omega \times \{ @, \uparrow \}^* : \alpha \text{ tiene exactamente } x \text{ ocurrencias de } @\}$. Pruebe que S es $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 26: (Explicado en video en granlogico.com) Si $S \subseteq \omega$ y $f : S \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x \text{ es par } x/2 \in S \text{ y } f(x) = f(x/2)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 27: Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{ @, \uparrow \}^*$ tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Entonces $S \times L$ es $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente enumerable si y solo si ambos S y L son $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente enumerables

Ejercicio 27,5: Sea $f : S \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ una función Σ -efectivamente computable. Supongamos que $\varepsilon \in S$ y que $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Sea

$$L = \{\alpha \in S : f(\alpha) \in S \text{ y } f(f(\alpha)) = \alpha\}$$

Notar que $\varepsilon \in L$. Pruebe que L es Σ -efectivamente enumerable

Ejercicio 28: V o F o I. Justifique

- (a) Denotemos con e a la cantidad de veces que estornudó Alan Turing a lo largo de su vida. Sea $S = \{e\}$. Entonces S es un conjunto \emptyset -efectivamente computable
- (b) $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ es Σ -efectivamente enumerable
- (c) Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo, entonces $I_{\mathbb{P}}$ es Σ -efectivamente enumerable

- (d) Sea $S \subseteq \omega$ y supongamos \mathbb{P} es un procedimiento efectivo el cual enumera a S . Entonces el siguiente procedimiento (con dato de entrada $x \in \omega$) enumera a $\{u \in S : u \text{ es par}\}$:
- i. Etapa 1: Guardar en la variable X el valor x .
 - ii. Etapa 2: Correr \mathbb{P} con dato de entrada X y guardar en la variable E el dato de salida dado por \mathbb{P}
 - iii. Etapa 3: Si E es par, dar como salida E y detenerse. Caso contrario aumentar en 1 el valor de X e ir a Etapa 2

4 Guia 4

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Tres paradigmas matematicos de la computabilidad efectiva

Ya que el concepto de procedimiento efectivo es un concepto intuitivo, impresiso y a priori no expresado en el formalismo matematico, los conceptos de

- Funcion Σ -efectivamente computable
- Conjunto Σ -efectivamente computable
- Conjunto Σ -efectivamente enumerable

tambien son impresisos y estan fuera del formalismo matematico, debido a que los tres se definen en terminos de la existencia de procedimientos efectivos. Por supuesto, los tres conceptos son fundamentales en el estudio teorico de la computabilidad por lo que es muy importante poder dar un modelo o formalizacion matematica de estos conceptos. Pero notese que los dos ultimos se definen en funcion del primero por lo que una formalizacion matematica precisa del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, resuelve el problema de modelizar en forma matematica a estos tres conceptos.

En esta materia daremos las tres formalizaciones matematicas mas classicas del concepto de funcion Σ -efectivamente computable. La primera y la mas apegada a la idea intuitiva de procedimiento efectivo es la dada por Alan Turing via la matematizacion del concepto de maquina y es tema central de esta guia. La segunda, es la dada por Godel en su estudio de sistemas formales de la logica de primer orden. Por ultimo veremos una formalizacion via un lenguaje de programacion imperativo. En honor a la influencia que tuvo Von Neumann en el diseño de la primer computadora de caracter universal (i.e. programable de proposito general), llamaremos a este paradigma el paradigma imperativo de Von Neumann.

El paradigma de Turing

Estudiaremos el concepto de maquina de Turing, el cual fue introducido por Alan Turing para formalizar o modelizar matematicamente la idea de procedimiento efectivo. Una vez definidas las maquinas podremos dar una modelizacion matematica precisa del concepto de funcion Σ -efectivamente computable. Llamaremos a estas funciones Σ -Turing computables y seran aquellas que (en algun sentido que sera bien precisado matematicamente) pueden ser computadas por una maquina de Turing. Por supuesto, la fidedignidad de este concepto, es decir cuan buena es la modelizacion matematica dada por Turing, puede no ser clara al comienzo pero a medida que vayamos avanzando en nuestro estudio y conozcamos ademas los otros paradigmas y su relacion, quedara claro que el modelo de Turing es acertado.

Vivimos en un mundo plagado de maquinas (ascensores, celulares, relojes, taladros, etc). Una característica comun a todas las maquinas es que tienen distintos estados posibles. Un estado es el conjunto de características que determinan un momento concreto posible de la maquina cuando esta funcionando. Por ejemplo un estado posible de un ascensor seria:

- esta en el tercer piso, con la primer puerta abierta y la otra cerrada, esta apretado el boton de ir al sexto piso, etc

donde ponemos etc porque dependiendo del tipo de ascensor (si es con memoria, a que pisos puede ir, etc) habra mas datos que especificar para determinar un estado concreto.

Otra característica comun de las maquinas es que interactuan de distintas formas con el usuario o mas generalmente su entorno. Dependiendo de que accion se ejecute sobre la maquina y en que estado este, la maquina realizara alguna tarea y ademas cambiara de estado. En general las maquinas son *deterministicas* en el sentido que siempre que esten en determinado estado y se les aplique determinada accion, realizaran la misma tarea y pasaran al mismo estado.

Descripcion informal de las maquinas de Turing

Son un modelo abstracto de maquina con una cantidad finita de estados la cual trabaja sobre una cinta de papel dividida en cuadros e interactua o recibe acciones externas por medio de una cabeza lectora la cual lee de a un cuadro de la cinta a la vez y ademas puede borrar el contenido del cuadro leído y escribir en el un simbolo. Tambien la cabeza lectora puede moverse un cuadro hacia la izquierda o hacia la derecha. La cinta tiene un primer cuadro hacia su izquierda pero hacia la derecha puede extenderse todo lo necesario. En un cuadro de la cinta podra haber un simbolo o un cuadro puede simplemente estar en blanco. Es decir que habra un alfabeto Γ el cual consiste de todos los simbolos que pueden figurar en la cinta. Esto sera parte de los datos o características de cada maquina, es decir, Γ puede cambiar dependiendo de la

maquina. La maquina, en funcion del estado en que se encuentre y de lo que vea su cabeza lectora en el cuadro escaneado, podra modificar lo que encuentre en dicho cuadro (borrando y escribiendo algun nuevo simbolo), moverse a lo sumo un cuadro (izquierda, derecha o quedarse quieta), y cambiar de estado (posiblemente al mismo que tenia). Para simplificar supondremos que hay en Γ un simbolo el cual si aparece en un cuadro de la cinta, significara que dicho cuadro esta sin escribir o en blanco. Esto nos permitira describir mas facilmente el funcionamiento de la maquina. En gral llamaremos B a tal simbolo. Tambien por lo general llamaremos Q al conjunto de estados de la maquina.

Tambien cada maquina tendra un estado especial el cual sera llamado su estado inicial, generalmente denotado con q_0 , el cual sera el estado en el que estara la maquina al comenzar a trabajar sobre la cinta. Hay otras características que tendran las maquinas de Turing pero para dar un primer ejemplo ya nos basta. Describiremos una maquina de Turing M que tendra $\Gamma = \{ @, a, b, B \}$ y tendra dos estados, es decir $Q = \{ q_0, q_1 \}$. Obviamente q_0 sera su estado inicial y ademas el "comportamiento o personalidad" de M estara dado por las siguientes clausulas:

- Estando en estado q_0 si ve ya sea b o B o $@$, entonces se queda en estado q_0 y se mueve a la derecha
- Estando en estado q_0 si ve a entonces reescribe $@$, se mueve a la izquierda y cambia al estado q_1
- Estando en estado q_1 si ve a o b o B o $@$ entonces lo deja como esta, se mueve a la izquierda y queda en estado q_1

Supongamos ahora que tomamos una palabra $\alpha \in \Gamma^*$ y la distribuimos en la cinta dejando el primer cuadro en blanco y luego poniendo los simbolos de α en los siguientes cuadros. Supongamos ademas que ponemos la maquina en estado q_0 y con su cabeza lectora escaneando el primer cuadro de la cinta. Esto lo podemos representar graficamente de la siguiente manera

$$\begin{array}{cccccccc} B & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & & & & & \\ q_0 & & & & & & & \end{array}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los sucesivos simbolos de α . Supongamos ademas que a ocurre en α . Dejamos al lector ir aplicando las clausulas de M para convencerse que luego de un rato de funcionar M , la situacion sera

$$\begin{array}{cccccccc} B & \beta_1 & \dots & \beta_n & B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & & & & & \\ q_1 & & & & & & & \end{array}$$

donde $\beta_1 \dots \beta_n$ es el resultado de reemplazar en α la primer ocurrencia de a por $@$.

Ejercicio 1: Que sucede cuando a no ocurre en α ?

Una cosa que puede pasar es que para un determinado estado p y un $\sigma \in \Gamma$, la maquina no tenga contemplada ninguna accion posible. Por ejemplo sea M la maquina de Turing dada por $Q = \{q_0\}$, $\Gamma = \{ @, \$, B \}$ y por la siguiente clausula:

- Estando en estado q_0 si ve ya sea $@$ o B , entonces se queda en estado q_0 y se mueve a la derecha

Es facil ver que si partimos de una situacion

$$\begin{array}{ccccccc} B & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & & & & & \\ q_0 & & & & & & & \end{array}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$, entonces si ningun α_i es igual a $\$$, la maquina se movera indefinidamente hacia la derecha y en caso contrario se movera i pasos a la derecha y se detendra, donde i es el menor l tal que $\alpha_l = \$$.

Otro caso posible de detencion de una maquina de Turing es cuando esta escaneando el primer cuadro de la cinta y su unica accion posible implica moverse un cuadro a la izquierda. Tambien en estos casos diremos que la maquina se detiene ya que la cinta no es extensible hacia la izquierda.

Otra caracteristica de las maquinas de Turing es que poseen un *alfabeto de entrada* el cual esta contenido en el alfabeto Γ y en el cual estan los simbolos que se usaran para formar la configuracion inicial de la cinta (exepcto B). En general lo denotaremos con Σ al alfabeto de entrada y los simbolos de $\Gamma - \Sigma$ son considerados auxiliares. Tambien habra un conjunto F contenido en el conjunto Q de los estados de la maquina, cuyos elementos seran llamados *estados finales*.

Diremos que una palabra $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \Sigma^*$ es *aceptada por M por alcance de estado final* si partiendo de

$$\begin{array}{ccccccc} B & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & & & & & \\ q_0 & & & & & & & \end{array}$$

en algun momento de la computacion M esta en un estado de F . Llamaremos $L(M)$ al conjunto formado por todas las palabras que son aceptadas por alcance de estado final

Ejercicio 2: Para cada uno de los siguientes lenguajes, encuentre una máquina de Turing M tal que $L(M)$ sea dicho lenguaje

- $\{\alpha \in \{a, b\}^* : a \text{ ocurre en } \alpha\}$
- $\{ab\}$
- $\{a^n b^n : n \geq 2\}$ (explicada en video en granlogico.com)

(d) $\{\alpha \in \{a, b\}^* : |\alpha|_a \text{ es par y } |\alpha|_b \text{ es impar}\}$

Diremos que una palabra $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \Sigma^*$ es *aceptada por M por detencion* si partiendo de

$$\begin{array}{ccccccc} B & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & B & B & B \dots \\ \uparrow & & & & & & \\ q_0 & & & & & & \end{array}$$

en algun momento M se detiene. Llamaremos $H(M)$ al conjunto formado por todas las palabras que son aceptadas por detencion

Ejercicio 3: Para cada uno de los lenguajes del ejercicio anterior encuentre una máquina de Turing M tal que $H(M)$ sea dicho lenguaje (hint: modifique adecuadamente cada una de las maquinas construidas para el ejercicio anterior)

Definicion matematica de maquina de Turing

Una *maquina de Turing* es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ donde

- Q es un conjunto finito cuyos elementos son llamados *estados*
- Γ es un alfabeto que contiene a Σ
- Σ es un alfabeto llamado el *alfabeto de entrada*
- $B \in \Gamma - \Sigma$ es un simbolo de Γ llamado el *blank symbol*
- $\delta : D_\delta \subseteq Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, K\}$
- q_0 es un estado llamado el *estado inicial* de M
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados llamados *finales*

Notese que la funcion δ da la "personalidad" de la maquina. Aqui los simbolos L, R, K serviran para especificar que hace el cabezal. O sea:

- $\delta(p, \sigma) = (q, \gamma, L)$ significara que la maquina estando en estado p y leyendo el simbolo σ borrara σ y escribira γ en su lugar y luego se movera un cuadro a la izquierda (esto en caso que el cabezal no este en el cuadro de mas a la izquierda, en cuyo caso no podra realizar dicha tarea y se detendra).
- $\delta(p, \sigma) = (q, \gamma, K)$ significara que la maquina estando en estado p y leyendo el simbolo σ borrara σ y escribira γ en su lugar y luego el cabezal se quedara kieto

- $\delta(p, \sigma) = (q, \gamma, R)$ significara que la maquina estando en estado p y leyendo el simbolo σ borrarla σ y escribira γ en su lugar y luego el cabezal se movera un cuadro a la derecha

Si bien en nuestra definicion de maquina de Turing no hay ninguna restriccion acerca de la naturaleza de los elementos de Q , para continuar nuestro analisis asumiremos en lo que sigue de esta guia que Q es un alfabeto disjunto con Γ . Esto nos permitira dar definiciones matematicas precisas que formalizaran el funcionamiento de las maquinas de Turing en el contexto de las funciones mixtas. Deberia quedar claro que el hecho que solo analicemos maquinas en las cuales Q es un alfabeto disjunto con Γ , no afectara la profundidad y generalidad de nuestros resultados.

Ejercicio 4: V o F o I, justifique.

- Si $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ es una maquina de Turing, entonces δ es una funcion $(Q \cup \Gamma \cup \{L, K, R\})$ -mixta
- Si $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ es una maquina de Turing, entonces D_δ es un conjunto $(Q \cup \Gamma)$ -mixto

Descripciones instantaneas Una *descripcion instantanea* sera una palabra de la forma $\alpha q \beta$, donde $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, $[\beta]_{|\beta|} \neq B$ y $q \in Q$. Notese que la condicion $[\beta]_{|\beta|} \neq B$ nos dice que $\beta = \varepsilon$ o el ultimo simbolo de β es distinto de B . La descripcion instantanea $\alpha_1 \dots \alpha_n q \beta_1 \dots \beta_m$, con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \Gamma$, $n, m \geq 0$ representara la siguiente situacion

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & B & B & B & \dots \\ & & & & \uparrow & & & & & & & \\ & & & & q & & & & & & & \end{array}$$

Notese que aqui n y m pueden ser 0. Por ejemplo si $n = 0$ tenemos que $\alpha_1 \dots \alpha_n q \beta_1 \dots \beta_m = q \beta_1 \dots \beta_m$ y representa la siguiente situacion

$$\begin{array}{cccccccc} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & & & & & \\ q & & & & & & & \end{array}$$

Si $m = 0$ tenemos que $\alpha_1 \dots \alpha_n q \beta_1 \dots \beta_m = \alpha_1 \dots \alpha_n q$ y representa la siguiente situacion

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & B & B & \dots \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & q & & \end{array}$$

Si ambos n y m son 0 entonces tenemos que $\alpha_1 \dots \alpha_n q \beta_1 \dots \beta_m = q$ y representa la siguiente situacion

$$\begin{array}{cccc} B & B & B & \dots \\ \uparrow & & & \\ q & & & \end{array}$$

La condicion de que en una descripcion instantanea $\alpha q \beta$ deba suceder que $[\beta]_{|\beta|} \neq B$ es para que haya una correspondencia biuniboca entre descripciones instantaneas y situaciones de funcionamiento de la maquina. Dejamos al lector meditar sobre esto hasta convenserse de su veracidad.

Usaremos Des para denotar el conjunto de las descripciones instantaneas. Definamos la funcion $St : Des \rightarrow Q$, de la siguiente manera

$$St(d) = \text{unico simbolo de } Q \text{ que ocurre en } d$$

Ejercicio 5: V o F o I, justifique.

- (a) Si d es una descripcion instantanea, entonces $Ti(d) = 3\text{-UPLA}$
- (b) Si d es una descripcion instantanea, entonces $St(d) = d \cap Q$

La relacion \vdash

Dado $\alpha \in (Q \cup \Gamma)^*$, definamos $[\alpha]$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \varepsilon \\ [\alpha\sigma] &= \alpha\sigma, \text{ si } \sigma \neq B \\ [\alpha B] &= [\alpha] \end{aligned}$$

Es decir $[\alpha]$ es el resultado de remover de α el tramo final mas grande de la forma B^n . Dada cualquier palabra α definimos

$$\curvearrowleft_\alpha = \begin{cases} [\alpha]_2 \dots [\alpha]_{|\alpha|} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si } |\alpha| \leq 1 \end{cases} \quad \alpha^\curvearrowleft = \begin{cases} [\alpha]_1 \dots [\alpha]_{|\alpha|-1} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si } |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

Dadas $d_1, d_2 \in Des$, escribiremos $d_1 \vdash d_2$ cuando existan $\sigma \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ y $p, q \in Q$ tales que se cumple alguno de los siguientes casos

Caso 1.

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha p \beta \\ \delta(p, [\beta B]_1) &= (q, \sigma, R) \\ d_2 &= \alpha \sigma q^\curvearrowleft \beta \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha p \beta \\ \delta(p, [\beta B]_1) &= (q, \sigma, L) \text{ y } \alpha \neq \varepsilon \\ d_2 &= \left[\alpha^{\frown} q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma^{\frown} \beta \right] \end{aligned}$$

Caso 3.

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha p \beta \\ \delta(p, [\beta B]_1) &= (q, \sigma, K) \\ d_2 &= [\alpha q \sigma^{\frown} \beta] \end{aligned}$$

Escribiremos $d \not\vdash d'$ para expresar que no se da $d \vdash d'$. Para $d, d' \in Des$ y $n \geq 0$, escribiremos $d \vdash^n d'$ si existen $d_1, \dots, d_{n+1} \in Des$ tales que

$$\begin{aligned} d &= d_1 \\ d' &= d_{n+1} \\ d_i &\vdash d_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Notese que $d \vdash^0 d'$ sii $d = d'$. Finalmente definamos

$$d \vdash^* d' \text{ sii } (\exists n \in \omega) d \vdash^n d'.$$

Ejercicio 6: V o F o I, justifique.

- (a) $d \vdash d$, para cada $d \in Des$
- (b) Si $\alpha p \beta \not\vdash d$ para toda descripción instantánea d entonces $(p, [\beta B]_1) \notin D_\delta$
- (c) Si $\delta(p, a) = (p, a, L)$ entonces $pa \not\vdash d$ para toda descripción instantánea d
- (d) Dadas $d, d' \in Des$, se tiene que si $d \vdash d'$, entonces $|d| \leq |d'| + 1$

Detencion

Dada $d \in Des$, diremos que M se detiene partiendo de d si existe $d' \in Des$ tal que

- $d \vdash^* d'$
- $d' \not\vdash d''$, para cada $d'' \in Des$

Ejercicio 7: Estudie los dos posibles casos de detención:

- (a) estando el cabezal sobre el primer cuadro de la cinta
- (b) estando el cabezal en un cuadro que no es el primero

Ejercicio 8: V o F o I, justifique.

- (a) Sea $d \in Des$. Entonces existe una infinitupla (d_1, d_2, \dots) tal que $d \vdash d_1 \vdash d_2 \vdash d_3 \vdash d_4 \vdash \dots$ si y solo si M no se detiene partiendo de d
- (b) Supongamos que para cada $(p, \sigma) \in Q \times \Gamma$ la tercera coordenada de $\delta(p, \sigma)$ es igual a L . Entonces M se detiene partiendo de cada $d \in Des$

El lenguaje $L(M)$

Diremos que una palabra $\alpha \in \Sigma^*$ es *aceptada por M por alcance de estado final* cuando

$$[q_0 B \alpha] \vdash^* d, \text{ con } d \text{ tal que } St(d) \in F.$$

El *lenguaje aceptado por M por alcance de estado final* se define de la siguiente manera

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es aceptada por } M \text{ por alcance de estado final}\}.$$

Ejercicio 9: Para cada uno de los siguientes conjuntos, encuentre una máquina de Turing M tal que $L(M)$ sea dicho conjunto

- (a) $\{\alpha \in \{a, b\}^* : |\alpha|_a = 2|\alpha|_b\}$
- (b) $\{a^i b^j c^k : i \neq j \text{ o } j \neq k\}$
- (c) $\{\alpha \in \{a, b\}^* : \alpha = \alpha^R\}$ (palabras capicuas)
- (d) $\{\alpha \in \{\textcircled{a}, \textcircled{b}\}^+ : \exists x \in \Sigma^* \text{ tal que } \alpha = xx\}$

Ejercicio 10: V o F o I, justifique.

- (a) Si q_2 es un estado final de la máquina M , $\delta(q_0, B) = (q_1, B, R)$ y $\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$ entonces $a \in L(M)$.
- (b) Si q_2 es un estado final de la máquina M , $\delta(q_0, B) = (q_1, B, R)$ y $\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$ entonces $b \in L(M)$.
- (c) $\alpha \notin L(M)$ si y solo si existe una infinitupla (d_1, d_2, \dots) tal que
 - i. $St(d_i) \notin F$, para cada $i = 1, 2, \dots$
 - ii. $[q_0 B \alpha] \vdash d_1 \vdash d_2 \vdash d_3 \vdash d_4 \vdash \dots$

El lenguaje $H(M)$

Diremos que una palabra $\alpha \in \Sigma^*$ es *aceptada por M por detencion* cuando M se detiene partiendo de $\lfloor q_0 B \alpha \rfloor$. El *language aceptado por M por detencion* se define de la siguiente manera

$$H(M) = \{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es aceptada por } M \text{ por detencion}\}$$

Ejercicio 11: Para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 9 encuentre una máquina de Turing M tal que $H(M)$ sea dicho conjunto (hint: modifique adecuadamente cada una de las maquinas construidas para el Ejercicio 9)

Ejercicio 12: V o F o I, justifique.

- (a) Si q_2 es un estado final de la máquina M , $\delta(q_0, B) = (q_1, B, R)$ y $\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$ entonces $a \in H(M)$.
- (b) Si q_2 es un estado final de la máquina M , $\delta(q_0, B) = (q_1, B, R)$ y $\delta(q_1, a) = (q_2, b, K)$ entonces $a \in H(M)$.
- (c) Sea $\alpha \in \Sigma^*$. Existe una infinitupla (d_1, d_2, \dots) tal que $\lfloor q_0 B \alpha \rfloor \vdash d_1 \vdash d_2 \vdash d_3 \vdash d_4 \vdash \dots$ sii $\alpha \notin H(M)$

Aceptaremos sin demostracion el siguiente resultado.

Lemma 17 Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Entonces son equivalentes

- (1) Existe una maquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ tal que $L = L(M)$
- (2) Existe una maquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ tal que $L = H(M)$

Funciones Σ -Turing computables

Para poder computar funciones mixtas con una maquina de Turing necesitaremos un simbolo para representar numeros sobre la cinta. Llamaremos a este simbolo *unit* y lo denotaremos con ι . Mas formalmente una *maquina de Turing con unit* es una 8-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \iota, F)$ tal que $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ es una maquina de Turing y ι es un simbolo distinguido perteneciente a $\Gamma - (\{B\} \cup \Sigma)$.

Diremos que una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -Turing computable si existe una maquina de Turing con unit, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \iota, F)$ tal que:

- (1) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces hay un $p \in Q$ tal que

$$\lfloor q_0 B \iota^{x_1} B \dots B \iota^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor \vdash^* \lfloor p B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$$

y $\lfloor p B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor \not\vdash d$, para cada $d \in Des$

(2) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} - D_f$, entonces M no se detiene partiendo de

$$\lfloor q_0 B \upharpoonright^{x_1} B \dots B \upharpoonright^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor.$$

En forma similar, una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, es llamada Σ -Turing computable si existe una maquina de Turing con unit, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \upharpoonright, F)$, tal que:

(1) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces hay un $p \in Q$ tal que

$$\lfloor q_0 B \upharpoonright^{x_1} B \dots B \upharpoonright^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor^* \vdash \lfloor p B \upharpoonright^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \rfloor$$

y $\lfloor p B \upharpoonright^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \rfloor \not\vdash d$, para cada $d \in Des$

(2) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} - D_f$, entonces M no se detiene partiendo de

$$\lfloor q_0 B \upharpoonright^{x_1} B \dots B \upharpoonright^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor$$

Cuando M y f cumplan los items (1) y (2) de la definicion anterior, diremos que la funcion f es *computada* por M .

Por supuesto esta definicion no tendria sentido como modelo matematico del concepto de funcion Σ -efectivamente computable si no sucediera que toda funcion Σ -Turing computable fuera Σ -efectivamente computable. Este hecho es intuitivamente claro y lo expresamos en forma de proposicion.

Proposition 18 Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$, es computada por una maquina de Turing con unit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \upharpoonright, F)$, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Proof. Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Sea \mathbb{P} el siguiente procedimiento efectivo.

- Conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} igual a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- Conjunto de datos de salida de \mathbb{P} contenido en O
- Funcionamiento: Hacer funcionar paso a paso la maquina M partiendo de la descripcion instantanea $\lfloor q_0 B \upharpoonright^{x_1} B \dots B \upharpoonright^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor$. Si en alguna instancia M termina, dar como salida el resultado de remover de la descripcion instantanea final los dos primeros simbolos.

Notese que este procedimiento termina solo en aquellos elementos $(\vec{x}, \vec{\sigma}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que la maquina M termina partiendo desde

$$\lfloor q_0 B \upharpoonright^{x_1} B \dots B \upharpoonright^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m \rfloor$$

por lo cual termina solo en los elementos de D_f ya que M computa a f . Ademas es claro que en caso de terminacion el procedimiento da como salida $f(\vec{x}, \vec{\sigma})$. ■

Sin envargo el modelo Turingiano podria a priori no ser del todo correcto ya que podria pasar que haya una funcion que sea computada por un procedimiento efectivo pero que no exista una maquina de Turing que la compute. En otras

palabras el modelo podria ser incompleto. La completitud de este modelo puede no ser clara al comienzo pero a medida que vayamos avanzando en nuestro estudio y conozcamos ademas los otros paradigmas y su relacion, quedara claro que el modelo de Turing es acertado.

Ejercicio 13: Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Para cada una de las siguientes funciones Σ -mixtas dar una máquina de Turing $(Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \iota, \emptyset)$ que la compute

- (a) $Suc : \omega \rightarrow \omega$
 $n \rightarrow n + 1$
- (b) $Pred : \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $n \rightarrow n - 1$
- (c) $p_2^{1,1} : \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
 $(x, \alpha) \rightarrow \alpha$
(explicada en video en granlogico.com)
- (d) $C_2^{1,1} : \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$
 $(x, \alpha) \rightarrow 2$

Ejercicio 13,5: Sea $\Sigma = \{ @, \% \}$. Sea

$$f : \{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha| \text{ es impar}\} \rightarrow \omega$$

$$(x, \alpha) \rightarrow x + |\alpha|$$

- (a) De el diagrama de una maquina de Turing M la cual compute a f .
- (b) Para cada una de los siguientes pares (x, α) dar la sucecion de descripciones instantaneas que parte de $\lfloor q_0 B \uparrow^x B \alpha \rfloor$.
 - i. $(x, \alpha) = (0, \varepsilon)$
 - ii. $(x, \alpha) = (100, @)$
 - iii. $(x, \alpha) = (3, @@\%)$
 - iv. $(x, \alpha) = (100, @\%)$
(Note que dicha sucecion para ciertos casos debe ser infinita)

Ejercicio 13,7: Sea $\Sigma = \{ @, \% \}$. Sea

$$R : \{\alpha \in \Sigma^+ : \exists x \in \Sigma^* \text{ tal que } \alpha = xx\} \rightarrow \Sigma^*$$

$$\alpha \rightarrow \text{único } x \text{ tal que } \alpha = xx$$

- (a) De el diagrama de una maquina de Turing M la cual compute a R .
- (b) Para cada una de las siguientes palabras α dar la sucecion de descripciones instantaneas que parte de $\lfloor q_0 B \alpha \rfloor$.
 - i. $\alpha = \varepsilon$
 - ii. $\alpha = @@$
 - iii. $\alpha = @@\%\%$

iv. $\alpha = @ \% @ \% \%$

v. $\alpha = @ @ \% @$

(Note que dicha sucesion para ciertos casos debe ser infinita)

Ejercicio 14: V o F o I, justifique.

- (a) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \vdash, F)$ una maquina de Turing con unit y supongamos que M computa a f . Entonces $D_f = \{d \in Des : M \text{ se detiene partiendo desde } d\}$
- (b) Si f y g son dos funciones y M es es una máquina de Turing que computa a f y a g entonces $f = g$.
- (c) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \vdash, F)$ una maquina de Turing con unit y supongamos que M computa a f y que f es Σ -total. Entonces M se detiene partiendo desde d , cualesquiera sea $d \in Des$

Ejercicio 15: Como se vio anteriormente el modelo de Turing del concepto de funcion Σ -efectivamente computable es el concepto matematico de funcion Σ -Turing computable.

- (a) Cual seria el modelo de Turing del concepto de conjunto Σ -efectivamente computable? que nombre le pondria?
- (b) Cual seria el modelo de Turing del concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable? que nombre le pondria?

5 Guia 5

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

El paradigma de Godel: Funciones Σ -recursivas

En esta guia y la siguiente desarrollaremos el modelo matematico del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, dado por Godel. Dichas funciones seran llamadas Σ -recursivas. La idea es partir de un conjunto inicial de funciones muy simples y obviamente Σ -efectivamente computables y luego obtener nuevas funciones Σ -efectivamente computables usando constructores que preservan la computabilidad efectiva. Las funciones Σ -recursivas seran las que se obtienen iterando el uso de estos constructores, partiendo del conjunto inicial de funciones antes mencionado. Nos referiremos a este paradigma como el paradigma Godeliano o recursivo. A veces tambien lo llamaremos el paradigma funcional.

La familia de funciones simples y obviamente Σ -efectivamente computables de la que partiremos es la siguiente

$$\{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$$

Los constructores que usaremos son:

- Composicion
- Recursion primitiva
- Minimizacion de predicados totales

Estos constructores nos permiten dadas ciertas funciones construir o definir una nueva funcion y tienen la propiedad de preservar la computabilidad efectiva en el sentido que si las funciones iniciales son Σ -efectivamente computables, entonces la funcion obtenida tambien lo es. Un concepto fundamental es el de funcion Σ -recursiva primitiva. Estas funciones seran aquellas que se obtienen a partir de las del conjunto inicial usando solo los dos primeros constructores: composicion y recursion primitiva. Nuestro primer objetivo es definir el concepto de funcion Σ -recursiva primitiva para lo cual en las proximas dos secciones definiremos y estudiaremos los constructores de composicion y recursion primitiva. Luego definiremos el concepto de funcion Σ -recursiva primitiva y nos abocaremos a desarrollar este concepto fundamental. Recien despues ya en la Guia 6 estudiaremos el constructor de minimizacion y definiremos el concepto de funcion Σ -recursiva.

Composicion

Dadas funciones Σ -mixtas f, f_1, \dots, f_r , con $r \geq 1$, diremos que la funcion $f \circ [f_1, \dots, f_r]$ es *obtenida por composicion a partir de las funciones f, f_1, \dots, f_r* . Un hecho que a priori no es obvio es que si f, f_1, \dots, f_r son Σ -mixtas, entonces $f \circ [f_1, \dots, f_r]$ lo es. Esto es consecuencia del siguiente lema.

Lemma 19 *Supongamos que f, f_1, \dots, f_r son funciones Σ -mixtas, con $r \geq 1$. Supongamos ademas que $f \circ [f_1, \dots, f_r] \neq \emptyset$. Entonces hay $n, m, k, l \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que*

- $r = n + m$
- f es de tipo (n, m, s)
- f_i es de tipo $(k, l, \#)$, para cada $i = 1, \dots, n$
- f_i es de tipo $(k, l, *)$, para cada $i = n + 1, \dots, n + m$

Mas aun, en tal caso la funcion $f \circ [f_1, \dots, f_{n+m}]$ es Σ -mixta de tipo (k, l, s) y:

$$D_{f \circ [f_1, \dots, f_{n+m}]} = \left\{ (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{f_i} : (f_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), \dots, f_{n+m}(\vec{x}, \vec{\alpha})) \in D_f \right\}$$

$$f \circ [f_1, \dots, f_{n+m}](\vec{x}, \vec{\alpha}) = f(f_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), \dots, f_{n+m}(\vec{x}, \vec{\alpha})).$$

Ejercicio 1: Justifique con palabras la veracidad del lema anterior

Ahora si es facil probar que la composicion preserva la computabilidad efectiva. Mas formalmente:

Lemma 20 Si f, f_1, \dots, f_r , con $r \geq 1$, son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, \dots, f_r]$ lo es.

Proof. Si $f \circ [f_1, \dots, f_r] = \emptyset$, entonces claramente es Σ -efectivamente computable. Supongamos entonces que $f \circ [f_1, \dots, f_r] \neq \emptyset$. Por el lema anterior hay $n, m, k, l \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que

- $r = n + m$
- f es de tipo (n, m, s)
- f_i es de tipo $(k, l, \#)$, para cada $i = 1, \dots, n$
- f_i es de tipo $(k, l, *)$, para cada $i = n + 1, \dots, n + m$

Sean $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{n+m}$ procedimientos efectivos los cuales computen las funciones f, f_1, \dots, f_{n+m} , respectivamente. Usando estos procedimientos es facil definir un procedimiento efectivo el cual compute a $f \circ [f_1, \dots, f_{n+m}]$ ■

Ejercicio 2: Complete la prueba anterior

Recursion primitiva

La recursion primitiva es un tipo muy particular de recursion. Mas adelante lo definiremos matematicamente pero antes daremos varios ejemplos para aproximarnos gradualmente a la definicion. Consideremos por ejemplo las siguientes ecuaciones:

- (1) $R(0) = 1$
- (2) $R(t + 1) = 1 + R(t) + R(t)^2$

Notese que hay una unica funcion $R : \omega \rightarrow \omega$ la cual cumple (1) y (2). Esto es ya que el valor de R en t esta determinado por sucesivas aplicaciones de las ecuaciones (1) y (2). Por ejemplo la ecuacion (1) nos dice que $R(0) = 1$ pero entonces la ecuacion (2) nos dice que $R(1) = 1 + 1 + 1^2 = 3$ por lo cual nuevamente la ecuacion (2) nos dice que $R(2) = 1 + 3 + 3^2 = 13$ y asi podemos notar facilmente que R esta determinada por dichas ecuaciones.

Se suele decir que las ecuaciones (1) y (2) definen recursivamente a la funcion R pero hay que tener cuidado porque esto es una manera de hablar ya que la funcion R podria en nuestro discurso ya haber sido definida de otra manera. Mas propio es pensar que dichas ecuaciones determinan a R en el sentido que R es la unica que las cumple. Por ejemplo las ecuaciones:

$$(a) \quad R(0) = 50$$

$$(b) \quad R(t+1) = R(t)$$

definen recursivamente a la funcion $C_{50}^{1,0}$ pero esta claro que la definicion de $C_{50}^{1,0}$ en esta materia no fue dada de esta forma.

Ejercicio 3: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda t[2^t]$

Hay casos de recursiones en las cuales el valor de $R(t+1)$ no solo depende de $R(t)$ sino que tambien depende de t . Por ejemplo

$$(i) \quad R(0) = 1$$

$$(ii) \quad R(t+1) = t.R(t) + 1$$

De todas maneras deberia quedar claro que las ecuaciones (i) y (ii) determinan una unica funcion $R : \omega \rightarrow \omega$ que las satisface.

Ejercicio 4: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda t[t!]$

Tambien podemos generalizar pensando que la funcion R depende no solo de un parametro t sino que tiene otras variables. Por ejemplo

$$(p) \quad R(0, x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$$

$$(q) \quad R(t+1, x_1, x_2, x_3) = t + x_1 + x_2 + x_3 + R(t, x_1, x_2, x_3)$$

Ejercicio 5: Explique con palabras por que las ecuaciones (p) y (q) determinan una unica funcion $R : \omega^4 \rightarrow \omega$. Cuanto vale $R(3, 1, 2, 3)$?

Por supuesto la cantidad de variables extra puede ser cualquiera y no justo 3.

Ejercicio 6: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda tx_1[t + x_1]$, usando la funcion Suc .

Tambien podriamos tener variables alfabeticas. Por ejemplo consideremos

$$(r) \ R(0, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = x_1 + |\alpha_1|^{x_2}$$

$$(s) \ R(t + 1, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = t + x_1 + x_2 + |\alpha_1| + |\alpha_2| + R(t, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

Es claro aqui que las ecuaciones (r) y (s) determinan una unica funcion $R : \omega^3 \times \Sigma^{*2} \rightarrow \omega$ que las cumple. Esto se puede explicar de la siguiente manera:

- La ecuacion (r) determina los valores de R sobre el conjunto $\{0\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Pero una vez determinados estos valores, la ecuacion (s) tomada con $t = 0$, determina los valores de R sobre el conjunto $\{1\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Pero una vez determinados estos valores, la ecuacion (s) tomada con $t = 1$, determina los valores de R sobre el conjunto $\{2\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$, etc

El caso anterior podria generalizarse de la siguiente manera: Si tenemos dadas dos funciones

$$\begin{aligned} f &: \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega \\ g &: \omega^{n+2} \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega \end{aligned}$$

entonces las ecuaciones:

$$(a) \ R(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

$$(b) \ R(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

determinan una unica funcion $R : \omega^{n+1} \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ que las cumple. Notese que para el caso

$$\begin{aligned} n &= m = 2 \\ f &= \lambda x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 [x_1 + |\alpha_1|^{x_2}] \\ g &= \lambda x t x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 [t + x_1 + x_2 + |\alpha_1| + |\alpha_2| + x] \end{aligned}$$

las ecuaciones (a) y (b) se transforman en las ecuaciones (r) y (s).

Conjuntos rectangulares

El primer caso de recursion primitiva que definiremos a continuacion engloba todos los ejemplos vistos recien dentro de un marco general. Para enunciarlo necesitaremos una definicion muy importante en la materia. Sea Σ un alfabeto finito. Un conjunto Σ -mixto S es llamado *rectangular* si es de la forma

$$S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$$

con cada $S_i \subseteq \omega$ y cada $L_i \subseteq \Sigma^*$. Notar que todo subconjunto de ω es rectangular (es el caso $n = 1$ y $m = 0$). Analogamente, todo subconjunto de Σ^* es rectangular (es el caso $n = 0$ y $m = 1$). Tambien $\{\diamond\}$ es rectangular (es el caso $n = m = 0$). Otros ejemplos:

- $\mathbf{N} \times \{1, 2\} \times \{@@, \varepsilon\}$ es rectangular (aqui $n = 2$ y $m = 1$)
- $\{!!!, !!\} \times \{@@, \varepsilon\}$ es rectangular (aqui $n = 0$ y $m = 2$)

Tambien notese que $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ por lo cual \emptyset es un conjunto rectangular.

El concepto de conjunto rectangular es muy importante en nuestro enfoque. Aunque en general no habra restricciones acerca del dominio de las funciones y predicados, nuestra filosofia sera tratar en lo posible que los dominios de las funciones que utilicemos para hacer nuestro analisis de recursividad de los distintos paradigmas, sean rectangulares.

Aunque en principio puede parecer que todos los conjuntos son rectangulares, el siguiente lema mostrara cuan ingenua es esta vision. Lo aceptaremos sin demostracion aunque es facil de probar.

Lemma 21 Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$. Entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$(R) \text{ Si } (x, \alpha), (y, \beta) \in S, \text{ entonces } (x, \beta) \in S$$

Ejercicio 7: Supongamos $\Sigma = \{\#, \blacktriangle, \%\}$. Use el lema anterior para probar que

$$\{(0, \#\#\#), (1, \%\%\%\%)\} \text{ y } \{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha| = x\}$$

no son rectangulares

Recursion primitiva sobre variable numerica con valores numericos

Ahora si daremos el primer caso del constructor de recursion primitiva. Supongamos tenemos dadas funciones

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \\ g &: \omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \end{aligned}$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos. Usando el razonamiento inductivo usado en los ejemplos anteriores, se puede probar que hay una única función

$$R : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

la cual cumple las ecuaciones

- $R(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- $R(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

Llamaremos $R(f, g)$ a esta única función que cumple las ecuaciones anteriores. Resumiendo, diremos que las ecuaciones

- (1) $R(f, g)(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- (2) $R(f, g)(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

definen recursivamente a la función $R(f, g)$. También diremos que $R(f, g)$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y g .

NOTA IMPOTANTE: No confundirse y pensar que $R(f, g)$ es el resultado de aplicar una función R al par (f, g) , de hecho hasta el momento no hemos definido ninguna función R cuyo dominio sea cierto conjunto de pares ordenados de funciones!

Ejercicio 8: Justifique con palabras que la función $R(f, g)$ está bien definida, es decir que dada una $(1+n+m)$ -upla $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ perteneciente a $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$, las ecuaciones de (1) y (2) determinan el valor $R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

- (1) $R(f, g)(0) = f(\diamond)$
- (2) $R(f, g)(t+1) = g(R(f, g)(t), t)$

Veamos algunos ejemplos

E₁ Tomemos $f = p_1^{1,0}$ y $g = \text{Suc} \circ p_1^{3,0}$. De la definición de $R(f, g)$, obtenemos que su dominio es ω^2 y

$$\begin{aligned} R(f, g)(0, x_1) &= p_1^{1,0}(x_1) = x_1 \\ R(f, g)(t+1, x_1) &= \left(\text{Suc} \circ p_1^{3,0} \right) (R(f, g)(t, x_1), t, x_1) = R(f, g)(t, x_1) + 1 \end{aligned}$$

Es fácil notar que la única función que cumple estas dos ecuaciones es $\lambda t x_1 [t + x_1]$, lo cual implica que $\lambda t x_1 [t + x_1] = R(p_1^{1,0}, \text{Suc} \circ p_1^{3,0})$

E₂ Sean $f = C_0^{0,0}$ y $g = p_1^{2,0}$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que su dominio es ω y

$$R(f, g)(0) = C_0^{0,0}(\diamond) = 0$$

$$R(f, g)(t+1) = p_1^{2,0}(R(f, g)(t), t) = R(f, g)(t)$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $C_0^{1,0}$ lo cual implica que $C_0^{1,0} = R\left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}\right)$

Nota importante: En los dos ejemplos anteriores y en todos los casos que manejaremos en la Guia 5, en las aplicaciones del constructor de recursion primitiva (en sus cuatro formas) las funciones iniciales seran Σ -totales (es decir $S_1 = \dots = S_n = \omega$ y $L_1 = \dots = L_m = \Sigma^*$). Solo a partir de la Guia 6 veremos aplicaciones con funciones no Σ -totales

Ejercicio 9: Sean $n, m, k \in \omega$ y supongamos $n \geq 1$. Encuentre f y g tales que $R(f, g) = C_k^{n,m}$

Ejercicio 10: Encuentre f y g tales que $R(f, g) = \lambda tx_1[t.x_1]$. Idem para $\lambda tx_1\alpha_1\alpha_2[t.x_1]$

Recordemos que por definicion teniamos que $0^0 = 1$. Esto nos dice que $D_{\lambda xy[x^y]} = \omega \times \omega$.

Ejercicio 11: Encuentre f y g tales que $R(f, g) = \lambda tx_1[x_1^t]$

Ejercicio 12: Encuentre f y g tales que $R(f, g) = \lambda t[t!]$

Ejercicio 13: Explique la forma en la que aplicando los constructores de composicion y recursion primitiva a las funciones del conjunto inicial se puede obtener la funcion $\lambda x_1x_2\alpha_1[x_1!]$

Ejercicio 14: $V \circ F \circ I$, justifique.

$$(a) \lambda tx_1[t + x_1] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{2,0}\right)$$

$$(b) R(\lambda xy[0], p_2^{4,0}) = p_1^{3,0}$$

$$(c) \text{ Si } f : \omega^2 \rightarrow \omega \text{ y } g : \omega^4 \rightarrow \omega, \text{ entonces para cada } (x, y) \in \omega^2, \text{ se tiene que } R(f, g)(2, x, y) = g \circ (g \circ [f \circ [p_2^{3,0}, p_3^{3,0}], p_1^{3,0}, p_2^{3,0}, p_3^{3,0}]) (0, x, y)$$

Como era de esperar, este caso del constructor de recursion primitiva preserva la computabilidad efectiva

Lemma 22 Si f y g son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.

Ejercicio 15: Suponga que tiene procedimientos efectivos \mathbb{P}_f y \mathbb{P}_g que computan a f y g , respectivamente. Construya un procedimiento efectivo que compute a $R(f, g)$. Concluya que el lema anterior es cierto.

Recursion primitiva sobre variable numerica con valores alfabeticos

Ahora haremos el caso en el que la funcion definida recursivamente tiene imagen contenida en Σ^* . Es claro que entonces f y g tambien deberan tener imagen contenida en Σ^* . El unico detalle a tener en cuenta en la definicion de este caso es que si solo hicieramos estos cambios y pusieramos las mismas ecuaciones la funcion g no resultaria Σ -mixta en general. Para que la g de la recursion siga siendo Σ -mixta deberemos modificar levemente su dominio en relacion al caso ya hecho

Supongamos Σ es un alfabeto finito. Sean

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ g &: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios. Definamos

$$R(f, g) : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$$

de la siguiente manera

- (1) $R(f, g)(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- (2) $R(f, g)(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha}))$

Diremos que $R(f, g)$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y g . Notese que cuando $m = n = 0$, se tiene que $D_f = \{\diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

- (1) $R(f, g)(0) = f(\diamond)$
- (2) $R(f, g)(t+1) = g(t, R(f, g)(t))$

Veamos algunos ejemplos

E₁ Tomemos $f = C_{\varepsilon}^{0,1}$ y $g = \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ [p_3^{1,2}, p_2^{1,2}]$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} R(f, g)(0, \alpha_1) &= C_{\varepsilon}^{0,1}(\alpha_1) = \varepsilon \\ R(f, g)(t+1, \alpha_1) &= \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ [p_3^{1,2}, p_2^{1,2}] (t, \alpha_1, R(f, g)(t, \alpha_1)) = R(f, g)(t, \alpha_1)\alpha_1 \end{aligned}$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $\lambda t\alpha_1 [\alpha_1^t]$, lo cual implica que $\lambda t\alpha_1 [\alpha_1^t] = R(C_{\varepsilon}^{0,1}, \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ [p_3^{1,2}, p_2^{1,2}])$

E₂ Sean $f = C_{\varepsilon}^{0,0}$ y $g = p_2^{1,1}$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} R(f, g)(0) &= C_{\varepsilon}^{0,0}(\diamond) = \varepsilon \\ R(f, g)(t+1) &= p_2^{1,1}(t, R(f, g)(t)) = R(f, g)(t) \end{aligned}$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $C_{\varepsilon}^{1,0}$ lo cual implica que $C_{\varepsilon}^{1,0} = R(C_{\varepsilon}^{0,0}, p_2^{1,1})$

Ejercicio 16: Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$. Encuentre f y g tales que $\lambda tx_1[\%@@@@\%?^t] = R(f, g)$

Ejercicio 17: V o F o I, justifique.

- (a) $C_\varepsilon^{2,,2} = R(C_\varepsilon^{1,2}, C_\varepsilon^{2,3})$
- (b) $R(C_\varepsilon^{1,1}, C_\varepsilon^{1,1}) = C_\varepsilon^{1,1}$
- (c) Si f, g son funciones Σ -mixtas tales que $R(f, g)$ esta definida y es de tipo $(1 + n, m, *)$, entonces f es de tipo $(n, m, *)$ y g es de tipo $(n, m + 1, *)$

La prueba del siguiente lema es completamente analoga a la del lema anterior que fue dejada como ejercicio.

Lemma 23 *Si f y g son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.*

Recursion primitiva sobre variable alfabetica con valores numericos

Ya vimos dos casos de recursion donde el parametro o variable que comanda la recursion es numerico. Daremos a continuacion un ejemplo de recursion en el cual el parametro principal es alfabetico. Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$ y consideremos las siguientes ecuaciones:

- (1) $R(\varepsilon) = 15$
- (2) $R(\alpha\%) = R(\alpha) + 1$
- (3) $R(\alpha@) = R(\alpha).5$
- (4) $R(\alpha?) = R(\alpha)^{20}$

Notese que las ecuaciones anteriores determinan una funcion $R : \Sigma^* \rightarrow \omega$. Esto es ya que R en ε debe valer 15 y sabiendo esto las ecuaciones (2), (3) y (4) (con $\alpha = \varepsilon$) nos dicen que

$$\begin{aligned} R(\%) &= 16 \\ R(@) &= 75 \\ R(?) &= 15^{20} \end{aligned}$$

por lo cual podemos aplicarlas nuevamente a dichas ecuaciones (con $\alpha \in \{\%, @, ?\}$) para calcular R en todas las palabras de longitud 2; y así sucesivamente.

Daremos otro ejemplo un poco mas complicado para seguir aproximandonos al caso general. Nuevamente supongamos que $\Sigma = \{\%, @, ?\}$ y supongamos tenemos una funcion

$$f : \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

y tres funciones

$$\mathcal{G}_{\%} : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$\mathcal{G}_{@} : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$\mathcal{G}_{?} : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

Entonces hay una unica funcion $R : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ la cual cumple las siguientes ecuaciones

$$(1) R(x_1, \alpha_1, \varepsilon) = f(x_1, \alpha_1)$$

$$(2) R(x_1, \alpha_1, \alpha\%) = \mathcal{G}_{\%}(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$$

$$(3) R(x_1, \alpha_1, \alpha@) = \mathcal{G}_{@}(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$$

$$(4) R(x_1, \alpha_1, \alpha?) = \mathcal{G}_{?}(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$$

Ejercicio 18: Justifique que las ecuaciones anteriores determinan a la funcion R

Ejercicio 19: Por que el parametro α de la recursion es la ultima coordenada de R ?

El ejemplo anterior nos muestra que para hacer recursion sobre parametro alfabetico nos hace falta "una funcion g por cada simbolo de Σ ". Esto motiva la siguiente definicion. Dado un alfabeto Σ , una *familia Σ -indexada de funciones* sera una funcion \mathcal{G} tal que $D_{\mathcal{G}} = \Sigma$ y para cada $a \in D_{\mathcal{G}}$ se tiene que $\mathcal{G}(a)$ es una funcion. Algunos ejemplos:

E₁ Sea \mathcal{G} dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \{\square, \%, \blacktriangle\} &\rightarrow \{Suc, Pred\} \\ \square &\rightarrow Suc \\ \% &\rightarrow Suc \\ \blacktriangle &\rightarrow Pred \end{aligned}$$

Claramente \mathcal{G} es una familia $\{\square, \%, \blacktriangle\}$ -indexada de funciones. Notar que

$$\mathcal{G} = \{(\square, Suc), (\%, Suc), (\blacktriangle, Pred)\}$$

Se tiene tambien por ejemplo que $\mathcal{G}(\%) = Suc$ por lo cual tambien es cierto que $\mathcal{G}(\%)(22) = 23$, etc.

E₂ Si Σ es un alfabeto no vacio, la funcion

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \Sigma &\rightarrow \{f : f \text{ es una funcion de } \Sigma^* \text{ en } \Sigma^*\} \\ a &\rightarrow d_a \end{aligned}$$

es una familia Σ -indexada de funciones. Notar que

$$\mathcal{G} = \{(a, d_a) : a \in \Sigma\}$$

E₃ Sea $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$. Entonces $\{(\square, Suc), (\%, p_3^{2,4}), (\blacktriangle, \emptyset)\}$ es una familia $\{\square, \%, \blacktriangle\}$ -indexada de funciones.

NOTACION: Si \mathcal{G} es una familia Σ -indexada de funciones, entonces para $a \in \Sigma$, escribiremos \mathcal{G}_a en lugar de $\mathcal{G}(a)$.

Ahora si podemos dar la definicion matematica precisa del primero de los dos casos de recursion primitiva sobre parametro alfabetico. Sea

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea \mathcal{G} una familia Σ -indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Definamos

$$R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

de la siguiente manera

$$(1) R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

$$(2) R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

Diremos que $R(f, \mathcal{G})$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y \mathcal{G} .

Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

$$(1) R(f, \mathcal{G})(\varepsilon) = f(\diamond)$$

$$(2) R(f, \mathcal{G})(\alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\alpha), \alpha)$$

Ejercicio 20: Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$. Encuentre f y \mathcal{G} tales que $\lambda\alpha[|\alpha|] = R(f, \mathcal{G})$

Ejercicio 21: Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$. Encuentre f y \mathcal{G} tales que $\lambda\alpha_1\alpha[|\alpha_1| + |\alpha|_{@}] = R(f, \mathcal{G})$

Ejercicio 22: V o F o I, justifique.

$$(a) \text{ Sea } \Sigma = \{ @, \& \}. \text{ Se tiene que } \lambda\alpha[|\alpha|] = R\left(C_0^{0,0}, \{Suc \circ p_1^{1,1}, Suc \circ p_1^{1,1}\}\right)$$

$$(b) R\left(p_1^{2,0}, \{(@, p_1^{3,1}), (\&, p_2^{3,1})\}\right) = p_1^{2,1}$$

Lemma 24 Si f y cada \mathcal{G}_a son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

Ejercicio 23: Haga la prueba del lema anterior para el caso $\Sigma = \{ @, \blacktriangle \}$

Recursion primitiva sobre variable alfabetica con valores alfabeticos

Supongamos Σ es un alfabeto finito. Sea

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea \mathcal{G} una familia Σ -indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

para cada $a \in \Sigma$. Definamos

$$R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

de la siguiente manera

- (1) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- (2) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha, R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha))$.

Diremos que $R(f, \mathcal{G})$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y \mathcal{G} . Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

- (1) $R(f, \mathcal{G})(\varepsilon) = f(\diamond)$
- (2) $R(f, \mathcal{G})(\alpha a) = \mathcal{G}_a(\alpha, R(f, \mathcal{G})(\alpha))$

Ejercicio 24: Encuentre f y \mathcal{G} tales que $\lambda \alpha_1 \alpha [\alpha_1 \alpha] = R(f, \mathcal{G})$

Ejercicio 25: Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Diga que funcion conocida es $R(C_\varepsilon^{0,1}, \mathcal{G})$, donde \mathcal{G} es dada por $\mathcal{G}_\triangle = d_\triangle \circ p_3^{0,3}$ y $\mathcal{G}_\blacktriangle = d_\blacktriangle \circ p_3^{0,3}$

Sea Σ un alfabeto finito. Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|} [\gamma]_{|\gamma|-1} \dots [\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ . Para $a \in \Sigma$, definamos la funcion

$$\begin{array}{ccc} I_a : \Sigma^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ \alpha & \rightarrow & a\alpha \end{array}$$

Recordemos que $\alpha^0 = \varepsilon$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$, por lo cual tenemos que $D_{\lambda x \alpha [\alpha^x]} = \omega \times \Sigma^*$.

Ejercicio 26: Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Explique la forma en la que aplicando los constructores de composicion y recursion primitiva a las funciones del conjunto inicial se pueden obtener las siguientes funciones

- (a) I_a
- (b) $\lambda\alpha[\alpha^R]$
- (c) $\lambda t\alpha[\alpha^t]$

Ejercicio 27: V o F o I, justifique.

- (a) Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Entonces $R(p_1^{0,1}, \{(\triangle, p_3^{0,3}), (\blacktriangle, d_\blacktriangle \circ p_3^{0,3})\})(\triangle\blacktriangle, \triangle\blacktriangle) = \triangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$
- (b) $R(p_1^{0,1}, d_\alpha \circ p_3^{0,3}) = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha_1\alpha]$

La prueba del siguiente lema es completamente analoga a la del lema anterior que fue dejada como ejercicio.

Lemma 25 *Si f y cada \mathcal{G}_a son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.*

Funciones Σ -recursivas primitivas

Intuitivamente hablando ya sabemos que una funcion es Σ -recursiva primitiva si se puede obtener de las iniciales usando los constructores de composicion y recursion primitiva. Daremos ahora una definicion matematica de este concepto. Definamos los conjuntos $\text{PR}_0^\Sigma \subseteq \text{PR}_1^\Sigma \subseteq \text{PR}_2^\Sigma \subseteq \dots \subseteq \text{PR}^\Sigma$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{PR}_0^\Sigma &= \{ \text{Suc}, \text{Pred}, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0} \} \cup \{ d_a : a \in \Sigma \} \cup \{ p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m \} \\ \text{PR}_{k+1}^\Sigma &= \text{PR}_k^\Sigma \cup \{ f \circ [f_1, \dots, f_r] : f, f_1, \dots, f_r \in \text{PR}_k^\Sigma, r \geq 1 \} \cup \\ &\quad \{ R(f, \mathcal{G}) : f \text{ y cada } \mathcal{G}_a \text{ pertenecen a } \text{PR}_k^\Sigma \} \cup \\ &\quad \{ R(f, g) : f, g \in \text{PR}_k^\Sigma \} \\ \text{PR}^\Sigma &= \bigcup_{k \geq 0} \text{PR}_k^\Sigma \end{aligned}$$

Una funcion es llamada Σ -recursiva primitiva (Σ -p.r.) si pertenece a PR^Σ .

Proposition 26 *Si $f \in \text{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable.*

Ejercicio 28: Explique con palabras por que es cierta la proposicion anterior

Algunas funciones Σ -recursivas primitivas

En los siguientes cuatro lemas se prueba bien formalmente que varias funciones bien conocidas son Σ -primitivas recursivas. La mayoría de estas funciones ya fueron obtenidas usando los constructores de composicion y recursion primitiva, en los desarrollos anteriores o en los ejercicios.

Lemma 27 *Sea Σ un alfabeto finito.*

$$(1) \emptyset \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$(2) \lambda xy [x + y] \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$(3) \lambda xy [x.y] \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$(4) \lambda x [x!] \in \text{PR}^\Sigma.$$

Proof. (1) Notese que $\emptyset = \text{Pred} \circ C_0^{0,0} \in \text{PR}_1^\Sigma$

(2) Notar que

$$\begin{aligned} \lambda xy [x + y] (0, x_1) &= x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy [x + y] (t + 1, x_1) &= \lambda xy [x + y] (t, x_1) + 1 \\ &= \left(\text{Suc} \circ p_1^{3,0} \right) (\lambda xy [x + y] (t, x_1), t, x_1) \end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda xy [x + y] = R \left(p_1^{1,0}, \text{Suc} \circ p_1^{3,0} \right) \in \text{PR}_2^\Sigma$.

(3) Primero note que

$$\begin{aligned} C_0^{1,0}(0) &= C_0^{0,0}(\diamond) \\ C_0^{1,0}(t + 1) &= C_0^{1,0}(t) \end{aligned}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R \left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0} \right) \in \text{PR}_1^\Sigma$. Tambien note que

$$\lambda tx [t.x] = R \left(C_0^{1,0}, \lambda xy [x + y] \circ \left[p_1^{3,0}, p_3^{3,0} \right] \right),$$

lo cual por (2) implica que $\lambda tx [t.x] \in \text{PR}_4^\Sigma$.

(4) Note que

$$\begin{aligned} \lambda x [x!] (0) &= 1 = C_1^{0,0}(\diamond) \\ \lambda x [x!] (t + 1) &= \lambda x [x!] (t) \cdot (t + 1), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lambda x [x!] = R \left(C_1^{0,0}, \lambda xy [x.y] \circ \left[p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0} \right] \right).$$

Ya que $C_1^{0,0} = \text{Suc} \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \text{PR}_1^\Sigma$. Por (3), tenemos que

$$\lambda xy [x.y] \circ [p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}] \in \text{PR}_5^\Sigma,$$

obteniendo que $\lambda x [x!] \in \text{PR}_6^\Sigma$. ■

Ahora consideraremos dos funciones las cuales son obtenidas naturalmente por recursion primitiva sobre variable alfabetica.

Lemma 28 *Supongamos Σ es un alfabeto finito.*

$$(a) \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \in \text{PR}^\Sigma$$

$$(b) \lambda \alpha [[\alpha]] \in \text{PR}^\Sigma$$

Proof. (a) Ya que

$$\begin{aligned} \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] (\alpha_1, \varepsilon) &= \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] (\alpha_1, \alpha a) &= d_a(\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] (\alpha_1, \alpha)), a \in \Sigma \end{aligned}$$

tenemos que $\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] = R(p_1^{0,1}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$.

(b) Ya que

$$\begin{aligned} \lambda \alpha [[\alpha]] (\varepsilon) &= 0 = C_0^{0,0}(\diamond) \\ \lambda \alpha [[\alpha]] (\alpha a) &= \lambda \alpha [[\alpha]] (\alpha) + 1 \end{aligned}$$

tenemos que $\lambda \alpha [[\alpha]] = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = \text{Suc} \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$. ■

Lemma 29 *Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \text{PR}^\Sigma$, para cada $n, m, k \geq 0$ y $\alpha \in \Sigma^*$.*

Proof. (a) Note que $C_{k+1}^{0,0} = \text{Suc} \circ C_k^{0,0}$, lo cual implica $C_k^{0,0} \in \text{PR}_k^\Sigma$, para $k \geq 0$. Tambien note que $C_{\alpha a}^{0,0} = d_a \circ C_\alpha^{0,0}$, lo cual dice que $C_\alpha^{0,0} \in \text{PR}_\alpha^\Sigma$, para $\alpha \in \Sigma^*$. Para ver que $C_k^{0,1} \in \text{PR}^\Sigma$ notar que

$$\begin{aligned} C_k^{0,1}(\varepsilon) &= k = C_k^{0,0}(\diamond) \\ C_k^{0,1}(\alpha a) &= C_k^{0,1}(\alpha) = p_1^{1,1}(C_k^{0,1}(\alpha), \alpha) \end{aligned}$$

lo cual implica que $C_k^{0,1} = R(C_k^{0,0}, \mathcal{G})$, con $\mathcal{G}_a = p_1^{1,1}$, $a \in \Sigma$. En forma similar podemos ver que $C_k^{1,0}, C_\alpha^{1,0}, C_\alpha^{0,1} \in \text{PR}^\Sigma$. Supongamos ahora que $m > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} C_k^{n,m} &= C_k^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \\ C_\alpha^{n,m} &= C_\alpha^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \text{PR}^\Sigma$. El caso $n > 0$ es similar. ■

Lemma 30 Sea Σ un alfabeto finito.

$$(a) \lambda xy [x^y] \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$(b) \lambda t\alpha [\alpha^t] \in \text{PR}^\Sigma.$$

Proof. (a) Note que

$$\lambda tx [x^t] = R \left(C_1^{1,0}, \lambda xy [x.y] \circ [p_1^{3,0}, p_3^{3,0}] \right) \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$\text{O sea que } \lambda xy [x^y] = \lambda tx [x^t] \circ [p_2^{2,0}, p_1^{2,0}] \in \text{PR}^\Sigma.$$

(b) Note que

$$\lambda t\alpha [\alpha^t] = R \left(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ [p_3^{1,2}, p_2^{1,2}] \right) \in \text{PR}^\Sigma.$$

■

Ejercicio 29: Si \leq es un orden total sobre un alfabeto no vacío Σ , entonces s^\leq , $\#^\leq$ y $*^\leq$ pertenecen a PR^Σ

Ejercicio 30: Sea $\Sigma = \{\$, ?, @, \forall, \rightarrow, \{\}$ y sea $S = \{\$, ?\}^*$. Pruebe que

$$\begin{aligned} \chi_S^{\Sigma^*} : \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ \alpha &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in S \\ 0 & \text{si } \alpha \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

es Σ -p.r.

Dados $x, y \in \omega$, definamos

$$x \dot{-} y = \max(x - y, 0).$$

Lemma 31 (a) $\lambda xy [x \dot{-} y] \in \text{PR}^\Sigma$

$$(b) \lambda xy [\max(x, y)] \in \text{PR}^\Sigma$$

$$(c) \lambda xy [x = y] \in \text{PR}^\Sigma$$

$$(d) \lambda xy [x \leq y] \in \text{PR}^\Sigma$$

$$(e) \lambda\alpha\beta [\alpha = \beta] \in \text{PR}^\Sigma$$

Proof. (a) Primero notar que $\lambda x [x \dot{-} 1] = R \left(C_0^{0,0}, p_2^{2,0} \right) \in \text{PR}^\Sigma$. También note que

$$\lambda tx [x \dot{-} t] = R \left(p_1^{1,0}, \lambda x [x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0} \right) \in \text{PR}^\Sigma.$$

$$\text{O sea que } \lambda xy [x \dot{-} y] = \lambda tx [x \dot{-} t] \circ [p_2^{2,0}, p_1^{2,0}] \in \text{PR}^\Sigma.$$

- (b) Note que $\lambda xy [\max(x, y)] = \lambda xy [x + (y \dot{-} x)]$.
- (c) Note que $\lambda xy [x = y] = \lambda xy [1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))]$.
- (d) Note que $\lambda xy [x \leq y] = \lambda xy [1 \dot{-} (x \dot{-} y)]$.
- (e) Sea \leq un orden total sobre Σ . Ya que

$$\alpha = \beta \text{ sii } \#^{\leq}(\alpha) = \#^{\leq}(\beta)$$

tenemos que

$$\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] = \lambda xy [x = y] \circ [\#^{\leq} \circ p_1^{0,2}, \#^{\leq} \circ p_2^{0,2}]$$

lo cual nos dice que $\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta]$ es Σ -p.r. ■

Ejercicio 31: Complete las pruebas de (b),(c),(d) y (e) del lema anterior

Ejercicio 32: Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) $\lambda x [x \text{ es par}]$ es Σ -p.r..
- (b) $\lambda xyz \alpha \beta \gamma [x.y + \max(x, |\alpha|)^{|\beta|}]$ es Σ -p.r.
- (c) $\lambda x \alpha [x = |\alpha|]$ es Σ -p.r..
- (d) $\lambda xy \alpha \beta [\alpha^x = \beta]$ es Σ -p.r..

Operaciones logicas entre predicados

Dados predicados $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, con el mismo dominio, definamos nuevos predicados $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (P \vee Q) : S &\rightarrow \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ o } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\ (P \wedge Q) : S &\rightarrow \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ y } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\ \neg P : S &\rightarrow \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lemma 32 Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -p.r., entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

Proof. Note que

$$\begin{aligned}\neg P &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ [C_1^{n,m}, P] \\ (P \wedge Q) &= \lambda xy [x.y] \circ [P, Q] \\ (P \vee Q) &= \neg(\neg P \wedge \neg Q)\end{aligned}$$

■

Ejercicio 33: V o F o I, justifique.

- (a) Si P_1, P_2, P_3 son predicados Σ -p.r. y $D_{P_1} = D_{P_2} = D_{P_3}$, entonces el predicado $(P_1 \vee P_2 \wedge P_3)$ es Σ -p.r.
- (b) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $\lambda x \alpha \beta [x = |\alpha| \wedge \alpha = \beta] = (\lambda x \alpha [x = |\alpha|] \wedge \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta])$
- (c) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $(\lambda x [x = 1] \wedge \lambda \alpha [\alpha = \varepsilon])(2, \varepsilon) = 0$
- (d) Si $S, T \subseteq \omega$, entonces $\chi_{S \times T}^{\omega \times \omega} = (\chi_S^\omega \wedge \chi_T^\omega)$

Conjuntos Σ -recursivos primitivos

Un conjunto Σ -mixto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ -*recursivo primitivo* si su funcion caracteristica $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -p.r.. Notese que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$.

Ejercicio 34: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Pruebe que los siguientes conjuntos son Σ -p.r.

- (a) ω
- (b) Σ^*
- (c) $\{(x, y) \in \omega^2 : x = y\}$
- (d) $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : x = |\alpha|\}$
- (e) $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$
- (f) $\{(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3} : x \leq |\gamma|\}$

Lemma 33 Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ -p.r., entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.

Proof. Note que

$$\begin{aligned}\chi_{S_1 \cup S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} &= (\chi_{S_1}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \vee \chi_{S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}) \\ \chi_{S_1 \cap S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} &= (\chi_{S_1}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \wedge \chi_{S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}) \\ \chi_{S_1 - S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ [\chi_{S_1}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \chi_{S_2}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}]\end{aligned}$$

■

Ejercicio 35: Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ -p.r. Haga el caso $n = m = 1$. (Hint: haga el caso en que S tiene un solo elemento y luego aplique el lema anterior).

Ejercicio 36: Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) Pruebe que Σ es Σ -p.r.
- (b) Pruebe que $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$ es Σ -p.r.
- (c) Pruebe que $\Sigma^* - (\{\varepsilon\} \cup \Sigma)$ es Σ -p.r.
- (d) Pruebe que $\omega - \{0, 1\}$ es Σ -p.r.
- (e) Pruebe que $\{(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3} : \alpha \neq \varepsilon \vee x \leq |\gamma|\}$ es Σ -p.r.
- (f) Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) : |\alpha| > 6\}$ es Σ -p.r.

El siguiente lema caracteriza cuando un conjunto rectangular es Σ -p.r..

Lemma 34 *Supongamos $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$, $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacíos. Entonces $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r. sii $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r.*

Ejercicio 37: (S) Haga la prueba del lema anterior para el caso de $n = m = 1$ (en el apunte esta la prueba general)

Dada una función f y un conjunto $S \subseteq D_f$, usaremos $f|_S$ para denotar la restricción de f al conjunto S , i.e. $f|_S = f \cap (S \times I_f)$. Notese que $f|_S$ es la función dada por

$$\begin{aligned} D_{f|_S} &= S \\ f|_S(e) &= f(e), \text{ para cada } e \in S \end{aligned}$$

Notese que cualesquiera sea la función f tenemos que $f|_\emptyset = \emptyset$ y $f|_{D_f} = f$.

Lemma 35 *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -p.r., donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ -p.r., entonces $f|_S$ es Σ -p.r..*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Entonces

$$f|_S = \lambda x \alpha [\alpha^x] \circ \left[\text{Suc} \circ \text{Pred} \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, f \right]$$

lo cual nos dice que $f|_S$ es Σ -p.r.. El caso $O = \omega$ es similar usando $\lambda xy [x^y]$ en lugar de $\lambda x \alpha [\alpha^x]$. ■

Usando el lema anterior en combinacion con el Lema 32 podemos ver que muchos predicados usuales son Σ -p.r.. Por ejemplo sea

$$P = \lambda x \alpha \beta \gamma \left[x = |\gamma| \wedge \alpha = \gamma^{Pred(|\beta|)} \right].$$

Notese que

$$D_P = \omega \times \Sigma^* \times (\Sigma^* - \{\varepsilon\}) \times \Sigma^*$$

Ademas D_P es Σ -p.r. ya que

$$\chi_{D_P}^{\omega \times \Sigma^{*3}} = \neg \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ [p_3^{1,3}, C_\varepsilon^{1,3}]$$

Tambien note que los predicados

$$P_1 = \lambda x \alpha \beta \gamma [x = |\gamma|]$$

$$P_2 = \lambda x \alpha \beta \gamma [\alpha = \gamma^{Pred(|\beta|)}]$$

son Σ -p.r. ya que pueden obtenerse componiendo funciones Σ -p.r.. Un error seria pensar que $P = (P_1 \wedge P_2)$ ya que P_1 y P_2 tienen dominios distintos por lo cual no esta definido $(P_1 \wedge P_2)$. Sin envargo tenemos que $P = (P_1|_{D_P} \wedge P_2)$, lo cual nos dice que P es Σ -p.r. ya que $P_1|_{D_P}$ es Σ -p.r. por el Lema 35 y por lo tanto podemos aplicar el Lema 32

Ejercicio 38: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Sea $P = \lambda x y \alpha \beta \gamma [Pred(Pred(|\beta|)) \neq 6 \wedge \alpha^x = \beta]$

- (a) Encuentre por definicion de notacion lambda el dominio de P
- (b) Pruebe que P es Σ -p.r.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado (ver el apunte por una prueba)

Lemma 36 Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -p.r., entonces existe una funcion Σ -p.r. $\tilde{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, tal que $f = \tilde{f}|_{D_f}$.

Ahora podemos probar una proposicion muy importante.

Proposition 37 Un conjunto S es Σ -p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ -p.r..

Proof. Supongamos que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

(\Rightarrow) Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$.

(\Leftarrow) Probaremos por induccion en k que D_F es Σ -p.r., para cada $F \in PR_k^\Sigma$. El caso $k = 0$ es facil. Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos

$F \in \text{PR}_{k+1}^\Sigma$. Veremos entonces que D_F es Σ -p.r.. Hay varios casos. Consideremos primero el caso en que $F = R(f, g)$, donde

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ g &: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, \end{aligned}$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y $f, g \in \text{PR}_k^\Sigma$. Notese que por definicion de $R(f, g)$, tenemos que

$$D_F = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m.$$

Por hipotesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r., lo cual por el Lema 34 nos dice que los conjuntos $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r.. Ya que ω es Σ -p.r., el Lema 34 nos dice que D_F es Σ -p.r..

Los otros casos de recursion primitiva son dejados al lector.

Supongamos ahora que $F = g \circ [g_1, \dots, g_r]$ con $g, g_1, \dots, g_r \in \text{PR}_k^\Sigma$. Si $F = \emptyset$, entonces es claro que $D_F = \emptyset$ es Σ -p.r.. Supongamos entonces que F no es la funcion \emptyset . Tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$\begin{aligned} g &: D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O \\ g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, i = 1, \dots, n \\ g_i &: D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, i = n + 1, \dots, n + m \end{aligned}$$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$. Por Lema 36, hay funciones Σ -p.r. $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ -totales y cumplen

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}, \text{ para } i = 1, \dots, n + m.$$

Por hipotesis inductiva los conjuntos $D_g, D_{g_i}, i = 1, \dots, n + m$, son Σ -p.r. y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese que

$$\chi_{D_F}^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} = (\chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}})$$

lo cual nos dice que D_F es Σ -p.r.. ■

Lema de division por casos para funciones Σ -p.r.

Una observacion interesante es que si $f_i : D_{f_i} \rightarrow O, i = 1, \dots, k$, son funciones tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es la funcion

$$\begin{aligned} D_{f_1} \cup \dots \cup D_{f_k} &\rightarrow O \\ e &\rightarrow \begin{cases} f_1(e) & \text{si } e \in D_{f_1} \\ \vdots & \vdots \\ f_k(e) & \text{si } e \in D_{f_k} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemma 38 Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, $i = 1, \dots, k$, son funciones Σ -p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -p.r..

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean

$$\bar{f}_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*, i = 1, 2,$$

funciones Σ -p.r. tales que $\bar{f}_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 36). Por Lema 37 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ -p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ \left[\lambda x \alpha [\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_1}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_1 \right], \lambda x \alpha [\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_2}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_2 \right] \right] \right) |_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ -p.r..

El caso $k > 2$ puede probarse por induccion ya que

$$f_1 \cup \dots \cup f_k = (f_1 \cup \dots \cup f_{k-1}) \cup f_k.$$

■

CONSEJO IMPORTANTE: Si uno quiere usar el lema de division por casos para probar que una funcion f es Σ -p.r., entonces lo primero que hay que hacer, antes de ver que algo sea Σ -p.r. o no, es (a lo mariposa) definir correctamente funciones f_1, \dots, f_k tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$ y ademas $f_1 \cup \dots \cup f_k = f$. Consejos para encontrar dichas funciones:

1. Determinar el k , es decir, k es justamente la cantidad de "casos" en la descripcion de f
2. Para cada "caso" de la descripcion de f , asociar un subconjunto del dominio de f el cual sea justamente definido por la propiedad correspondiente a ese caso. Ojo que dijimos subconjunto de D_f , no confundir los tipos!! (a veces los casos se describen usando no todas las variables de las cuales depende la funcion)
3. Notar que los subconjuntos S_1, \dots, S_k asi definidos deben ser disjuntos de a pares y unidos deben dar el dominio de f
4. Para cada i defina f_i de la siguiente manera:
 - (a) dominio de $f_i = S_i$
 - (b) regla de f_i dada por la regla que describe f para el caso i -esimo
5. En general suele suceder que f_i es la restriccion a S_i de una funcion con dominio mas amplio y se prueba entonces que tanto dicha funcion como S_i son Σ -p.r., resultando asi que f_i es Σ -p.r.

Ejercicio 38,3: Sea $\Sigma = \{ @, \$ \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \omega \times \Sigma^* &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} |\alpha| \cdot x^2 & \text{si } x + |\alpha| \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } x + |\alpha| \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r..

Ejercicio 38,6: Sea $\Sigma = \{ @, \$ \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \{10, 11, 17\} \times \Sigma^+ &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} Pred(x) & \text{si } x \text{ es impar} \\ |\alpha| & \text{si } x \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r..

Ejercicio 39: Sea $\Sigma = \{ @, \$ \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} \times \Sigma^+ &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} x^2 & \text{si } x + |\alpha| \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x + |\alpha| \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r..

Ejercicio 40: Sea $\Sigma = \{ @, \$ \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \{(x, y, \alpha) : x \leq y\} &\rightarrow \omega \\ (x, y, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} x^2 & \text{si } |\alpha| \leq y \\ 0 & \text{si } |\alpha| > y \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r.. (Explicado en video colgado en granlogico.com)

Ejercicio 41: Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbf{N} \times \{ @, \% \}^* &\rightarrow \Sigma^* \\ (x, y, \alpha) &\rightarrow \begin{cases} \alpha^2 & \text{si } \alpha = @@ \\ !!! & \text{si } \alpha \neq @@ \wedge |\alpha| > y \\ \alpha^{x+y} & \text{si } \alpha \neq @@ \wedge |\alpha| \leq y \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r..

Ejercicio 41,5: Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} \times \{ @, \% \}^* \times \{ @, !, \% \}^+ &\rightarrow \omega \\ (x, \alpha, \beta) &\rightarrow \begin{cases} Pred(|\alpha|) & \text{si } |\alpha| > 2 \text{ y } x \geq 1 \\ |\beta| & \text{si } |\alpha| \leq 2 \text{ o } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -p.r..

Ejercicio 42: Sea $F : \omega \rightarrow \omega$ dada por

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ F(1) &= 2^2 \\ F(2) &= (2^2)^3 \\ F(3) &= ((2^2)^3)^2 \\ F(4) &= (((2^2)^3)^2)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pruebe que F es Σ -p.r..

Usaremos el lema de division por casos para probar que la funcion $\lambda i \alpha [[\alpha]_i]$ es Σ -p.r.. Recordemos que dados $i \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$, definimos

$$[\alpha]_i = \begin{cases} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1 \leq i \leq |\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Notese que $D_{\lambda i \alpha [[\alpha]_i]} = \omega \times \Sigma^*$.

Lemma 39 $\lambda i \alpha [[\alpha]_i]$ es Σ -p.r..

Proof. Supongamos $\Sigma = \{ @, ! \}$. Note que

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_i &= \varepsilon \\ [\alpha @]_i &= \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ @ & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases} \\ [\alpha!]_i &= \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ ! & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

lo cual dice que $\lambda i \alpha [[\alpha]_i] = R(C_\varepsilon^{1,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es dada por

$$\mathcal{G}_a(i, \alpha, \zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$$

para cada $a \in \Sigma$. O sea que solo resta probar que cada \mathcal{G}_a es Σ -p.r.. Veamos que $\mathcal{G}_@$ es Σ -p.r.. Primero note que los conjuntos

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i \neq |\alpha| + 1\} \\ S_2 &= \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i = |\alpha| + 1\} \end{aligned}$$

son Σ -p.r. ya que

$$\begin{aligned} \chi_{S_1}^{\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*} &= \lambda xy [x \neq y] \circ [p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda \alpha [[\alpha]] \circ p_2^{1,2}] \\ \chi_{S_2}^{\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*} &= \lambda xy [x = y] \circ [p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda \alpha [[\alpha]] \circ p_2^{1,2}] \end{aligned}$$

Notese que por el Lema 35 tenemos que $p_3^{1,2}|_{S_1}$ y $C_{\mathbb{Q}}^{1,2}|_{S_2}$ son Σ -p.r.. Ademas

$$\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = p_3^{1,2}|_{S_1} \cup C_{\mathbb{Q}}^{1,2}|_{S_2}$$

por lo cual el Lema 38 nos dice que $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ es Σ -p.r.. Analogamente se prueba que $\mathcal{G}_!$ es Σ -p.r.. ■

6 Guia 6

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Sumatoria, productoria y concatenatoria de funciones Σ -p.r.

Sea Σ un alfabeto finito. Sea $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$, con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Para $x, y \in \omega$ y $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$, definamos

$$\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) + \dots + f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

$$\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \cdot f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) \dots f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

En forma similar, cuando $I_f \subseteq \Sigma^*$, definamos

$$\bigcup_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) \dots f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

Note que, en virtud de la definicion anterior, el dominio de las funciones

$$\lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \quad \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \quad \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bigcup_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

es $\omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$.

Lemma 40 Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces las funciones $\lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ y $\lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ son Σ -p.r.
- (b) Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bigcup_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r.

Proof. (a) Sea $G = \lambda t x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$. Ya que

$$\lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \dots, p_{n+m+2}^{n+2,m} \right]$$

basta con probar que G es Σ -p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{aligned}$$

O sea que si definimos

$$\begin{aligned} h : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m &\rightarrow \omega \\ (x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ g : \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m &\rightarrow \omega \\ (A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{aligned}$$

tenemos que $G = R(h, g)$. Es decir que solo nos falta probar que h y g son Σ -p.r.. Sean

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > 0\} \\ D_2 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x = 0\} \\ H_1 &= \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > t+1\} \\ H_2 &= \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x \leq t+1\}. \end{aligned}$$

Notese que

$$\begin{aligned} h &= C_0^{n+1,m} \upharpoonright_{D_1} \cup \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{D_2} \\ g &= C_0^{n+3,m} \upharpoonright_{H_1} \cup \lambda A t x \vec{x} \vec{\alpha} [A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{H_2} \end{aligned}$$

Ya que f es Σ -p.r. y

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] &= f \circ \left[C_0^{n+1,m}, p_2^{n+1,m}, p_3^{n+1,m}, \dots, p_{n+1+m}^{n+1,m} \right] \\ \lambda A t x \vec{x} \vec{\alpha} [A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})] &= \lambda x y [x + y] \circ \left[p_1^{n+3,m}, f \circ \left[Suc \circ p_2^{n+3,m}, p_4^{n+3,m}, \dots, p_{n+3+m}^{n+3,m} \right] \right] \end{aligned}$$

tenemos que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ y $\lambda A t x \vec{x} \vec{\alpha} [A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ son Σ -p.r.. O sea que solo nos falta ver que los conjuntos D_1, D_2, H_1, H_2 son Σ -p.r.. Veamos que por ejemplo H_1 lo es. Es decir debemos ver que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -p.r.. Ya que f es Σ -p.r. tenemos que $D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r., lo cual nos dice que los conjuntos $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r. y

por lo tanto $R = \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r.. Notese que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} = (\chi_R^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [x > t + 1])$ por lo cual $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados Σ -p.r. ■

Nota: Aceptaremos sin prueba (b) y el caso de la productoria en (a). Las pruebas son muy similares a la dada para la sumatoria

Veamos un ejemplo de como se puede aplicar el lema anterior. Sea $F = \lambda y x_1 \left[\sum_{t=0}^{t=y} (x_1)^t \right]$. Es claro que $D_F = \omega^2$. Para ver que F es Σ -p.r. aplicaremos el lema anterior por lo cual es importante encontrar la f adecuada a la cual se le aplicara el lema. Tomemos $f = \lambda t x_1 [(x_1)^t]$. Claramente f es Σ -p.r. por lo cual el lema anterior nos dice que

$$G = \lambda x y x_1 \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, x_1) \right] = \lambda x y x_1 \left[\sum_{t=x}^{t=y} (x_1)^t \right]$$

es Σ -p.r.. Notar que G no es la funcion F pero es en algun sentido "mas amplia" que F ya que tiene una variable mas y se tiene que $F(y, x_1) = G(0, y, x_1)$, para cada $y, x_1 \in \omega$. Es facil ver que

$$F = G \circ [C_0^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}]$$

por lo cual F es Σ -p.r..

Haga los siguientes ejercicios aplicando el lema anterior. No caiga en la tentacion de hacerlos aplicando recursion primitiva ya que no se ejercitara en la habilidad de aplicar el lema en forma madura.

Ejercicio 1: Pruebe que la función

$$\lambda x y \alpha \left[\prod_{t=y+1}^{t=|\alpha|} (t + |\alpha|) \right]$$

es Σ -p.r..

Ejercicio 1,5: Pruebe que la función $\lambda x \left[\prod_{t=10}^{t=x} t^t \right]$ es Σ -p.r..

Ejercicio 2: Pruebe que son Σ -p.r.:

- (a) $\lambda x x_1 \left[\sum_{t=1}^{t=x} \text{Pred}(x_1)^t \right]$
- (b) $\lambda x y z \alpha \beta [\subset_{t=3}^{t=z+5} \alpha^{\text{Pred}(z).t^x} \beta^{\text{Pred}(\text{Pred}(|\alpha|^y))}]$

(Ojo que en estos casos el dominio de la f a la cual le debe aplicar el lema es un rectangulo pero f no es Σ -total)

Ejercicio 2,5: Pruebe que $\lambda xzyx_2 \left[\sum_{t=Pred(y)}^{t=x} Pred(z)^t \right]$ es Σ -p.r.

Ejercicio 3: Pruebe que las siguientes funciones son Σ -p.r.:

- (a) $\lambda xyz\alpha\beta [\subset_{t=3}^{t=z+5} \alpha^t]$
- (b) $\lambda xzyx_2 \left[\sum_{t=Pred(x_2)}^{t=x_2} x.y.z.t \right]$
- (c) $\lambda x_2xyz\alpha\beta [\subset_{t=x_2}^{t=z+5} \alpha^{y.x.t} \beta^z]$
- (d) $\lambda x_2xyz\alpha\beta [\subset_{t=x_2}^{t=z+5} \alpha^t \beta^z]$

Cuantificacion acotada de predicados Σ -p.r. con dominio rectangular

Sea $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ un predicado, con $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

depende de las variables $x, \vec{x}, \vec{\alpha}$ y valdra 1 en una $(1 + n + m)$ -upla $(x, \vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ sea igual a 1 para cada $t \in \{u \in \bar{S} : u \leq x\}$; y 0 en caso contrario. Tenemos entonces que el dominio del predicado

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

es $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$. En forma analoga se define la forma de interpretar la expresion Booleana

$$(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Cabe destacar que

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Tambien podemos cuantificar sobre variable alfabetica. Sea $P : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times L \rightarrow \omega$ un predicado, con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L, L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L} \subseteq L$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

depende de las variables $x, \vec{x}, \vec{\alpha}$ y valdra 1 en una $(1 + n + m)$ -upla $(x, \vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ sea igual a 1 para cada $\alpha \in \{\beta \in \bar{L} : |\beta| \leq x\}$; y 0 en caso contrario. Tenemos entonces que el dominio del predicado

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

es $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$. En forma analoga se define la forma de interpretar la expresion Booleana

$$(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

Cabe destacar que

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = \neg \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

Lemma 41 Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) Sea $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r., con $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ -p.r.. Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ y $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ son predicados Σ -p.r..
- (b) Sea $P : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times L \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L, L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ -p.r.. Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ y $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ son predicados Σ -p.r..

Proof. (a) Sea

$$\bar{P} = P|_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{1+n,m}|_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$$

Notese que \bar{P} tiene dominio $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ y es Σ -p.r.. Ya que

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] &= \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \\ &= \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ [C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, \dots, p_{1+n+m}^{1+n,m}] \end{aligned}$$

el Lema 40 implica que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r..

Ya que

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

tenemos que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r. ■

Nota: Aceptaremos (b) sin prueba. Su prueba se basa en (a) y el lector puede verla en el apunte.

OBSERVACION: La cuantificacion no acotada no preserva la propiedad de ser Σ -p.r.. Como veremos mas adelante hay un predicado Σ -p.r., $P : \omega \times L_1 \rightarrow \omega$, tal que el predicado $\lambda \alpha [(\exists t \in \omega) P(t, \alpha)]$ no es Σ -efectivamente computable, por lo cual tampoco es Σ -p.r. (ni siquiera podra ser Σ -recursivo).

Veamos por ejemplo que el predicado $\lambda xy [x \text{ divide } y]$ es Σ -p.r.. Sea $P = \lambda tx_1x_2 [x_2 = t.x_1]$. Es claro que P es Σ -p.r.. El lema anterior nos dice que $\lambda xx_1x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} P(t, x_1, x_2)]$ es Σ -p.r.. Notese que x_1 divide x_2 si y solo si hay un $t \leq x_2$ tal que $x_2 = t.x_1$. Esto nos dice que

$$\lambda x_1x_2 [x_1 \text{ divide } x_2] = \lambda x_1x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2} P(t, x_1, x_2)]$$

Pero

$$\lambda x_1x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2} P(t, x_1, x_2)] = \lambda xx_1x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} P(t, x_1, x_2)] \circ \left[p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0} \right]$$

por lo cual $\lambda x_1x_2 [x_1 \text{ divide } x_2]$ es Σ -p.r.

La idea fundamental subyacente en la aplicacion anterior es que en muchos casos de predicados obtenidos por cuantificacion a partir de otros predicados, la variable cuantificada tiene una cota natural en terminos de las otras variables y entonces componiendo adecuadamente se lo puede presentar como un caso de cuantificacion acotada

Ejercicio 4: Use que

$$x \text{ es primo sii } x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x} t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$$

para probar que $\lambda x [x \text{ es primo}]$ es Σ -p.r.

Ejercicio 5: Pruebe que $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ -p.r..

Ejercicio 6: Pruebe que $\{\alpha^2 : \alpha \in \Sigma^*\}$ es Σ -p.r..

Ejercicio 7: Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \omega) \alpha^x = \beta^t\}$ es Σ -p.r..

Ejercicio 8: Dados $x, y \in \omega$, diremos que x e y son *coprimos* cuando 1 sea el unico elemento de ω que divide a ambos. Sea $P = \lambda xy [x \text{ e } y \text{ son coprimos}]$. Pruebe que P es Σ -p.r.

Ejercicio 9: Sea $\Sigma = \{\boxplus, \boxminus\}$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y, \alpha, \beta) \in \omega \times \mathbf{N} \times \Sigma^* \times \Sigma^+ : \boxplus \beta \boxplus = \gamma \boxminus \alpha \boxminus \gamma^R, \text{ para algun } \gamma\}$$

es Σ -p.r.. (Por definicion: $\gamma^R = [\gamma]_{|\gamma|} [\gamma]_{|\gamma|-1} \dots [\gamma]_1$ si $|\gamma| \geq 1$ y $\gamma^R = \varepsilon$ si $\gamma = \varepsilon$)

Ejercicio 10: Pruebe que $\{2^x : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$ es Σ -p.r.

Ejercicio 11: Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, \$\}$. Pruebe que $\{(2^x, \textcircled{0}^x, \$) : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$ es Σ -p.r.

Ejercicio 12: Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \text{Im}(pr)) \alpha^{Pred(Pred(x)).Pred(|\alpha|)} = \beta^t\}$ es Σ -p.r.. (ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ -total)

- Ejercicio 12,5: Pruebe que $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : (\exists \beta \in \Sigma^+) \alpha \beta^{Pred(x)} = \beta^{Pred(x)} \alpha\}$ es Σ -p.r.. (ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ -total)
- Ejercicio 12,6: Sea $\Sigma = \{\boxplus, \boxminus\}$. Sea $L = \{\boxminus^n \boxplus : n \in \omega \text{ y } n \text{ es impar}\}$. Pruebe que $\{(x, \alpha) \in \text{Im}(pr) \times L : (\exists t \in \omega) t^2 = |\alpha|.Pred(x)\}$ es Σ -p.r.. (ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ -total)

Como puede notarse, en los ejercicios anteriores se aplica una sola ves el lema de cuantificacion acotada. En los ejercicios que siguen veremos algunos casos en los cuales es necesario anidar cuantificaciones acotadas.

- Ejercicio 13:** (S) Pruebe que $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ ocurre en } \beta]$ es Σ -p.r..
- Ejercicio 14:** (S) Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Pruebe que $\{ @^t !^l : t \in \mathbf{N} \text{ y } l \text{ es impar} \}$ es Σ -p.r..
- Ejercicio 15:** (S) Pruebe que $\{x \in \mathbf{N} : \exists p, q \text{ tales que } x = p \cdot q \text{ y } p, q \text{ son primos}\}$ es Σ -p.r..
- Ejercicio 16:** (S) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ . Notese que para cada $\zeta \in (\Gamma \cup Q)^*$ se tiene que

$$\zeta \in Des \text{ si y solo si } (\exists \alpha \in \Gamma^*)(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*) ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha \beta \gamma)$$

Usaremos notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Notese que

$$\chi_{Des}^{(\Gamma \cup Q)^*} = \lambda \zeta [(\exists \alpha \in \Gamma^*)(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*) ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha \beta \gamma)]$$

- Sea $P_1 = \lambda \zeta \alpha \beta \gamma [[\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha \beta \gamma]$. Encuentre D_{P_1} y pruebe que P_1 es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.
- Sea $P_2 = \lambda \zeta \alpha \beta [(\exists \gamma \in \Gamma^*) ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha \beta \gamma)]$. Encuentre D_{P_2} y pruebe que P_2 es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.
- Sea $P_3 = \lambda \zeta \alpha [(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*) ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha \beta \gamma)]$. Encuentre D_{P_3} y pruebe que P_3 es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.
- Pruebe que $\chi_{Des}^{(\Gamma \cup Q)^*}$ es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. Concluya que Des es un conjunto $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.

Minimizacion y funciones Σ -recursivas

Tal como fue explicado en el comienzo de la Guia 5, para obtener la clase de las funciones Σ -recursivas debemos agregar un nuevo constructor a los ya definidos de composicion y recursion primitiva, a saber el constructor de *minimizacion*.

Minimizacion de variable numerica

Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado. Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales t 's. Notese que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un t tal que se da $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no estara definida cuando para cada $t \in \omega$ se da que $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no pertenece a D_P o $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no depende de la variable t . Por ejemplo, las expresiones $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ y $\min_i P(i, \vec{x}, \vec{\alpha})$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Notese que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) &= \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)} \end{aligned}$$

Diremos que $M(P)$ se obtiene por *minimizacion de variable numerica* a partir de P .

Veamos un par de ejemplos:

(E1) Tomemos $P = \lambda t x_1 [t^2 = x_1]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) P(t, x_1)\} \\ &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) t^2 = x_1\} \end{aligned}$$

Es decir el dominio de $M(P)$ es el conjunto de los cuadrados. Ademas para cada $x_1 \in D_{M(P)}$ tenemos que

$$M(P)(x_1) = \min_t P(t, x_1) = \min_t (t^2 = x_1)$$

por lo cual $M(P)(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in D_{M(P)}$.

(E2) Recordemos que dados $x_1, x_2 \in \omega$, con x_2 no nulo, el *cociente de dividir* x_1 por x_2 se define como el maximo elemento del conjunto $\{t \in \omega : t.x_2 \leq x_1\}$. Sea

$$\begin{aligned} Q : \omega \times \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \text{cociente de dividir } x_1 \text{ por } x_2 \end{aligned}$$

Sea $P = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < t.x_2]$. Notar que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x_1, x_2) \in \omega^2 : (\exists t \in \omega) P(t, x_1, x_2) = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) : (\exists t \in \omega) x_1 < t.x_2\} \\ &= \omega \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ademas si $(x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$, es facil de probar que

$$\min_t x_1 < t.x_2 = Q(x_1, x_2) + 1$$

por lo que $M(P) = \text{Suc} \circ Q$. Si quisieramos encontrar un predicado P' tal que $M(P') = Q$, entonces podemos tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < (t+1).x_2]$ y con un poco de concentracion nos daremos cuenta que $M(P') = Q$. De todas maneras hay una forma mas facil de hacerlo y es tomando P' de tal forma que para cada $(x_1, x_2) \in D_Q$ se de que

$$Q(x_1, x_2) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P'(t, x_1, x_2)$$

Por ejemplo se puede tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$ que dicho sea de paso es justo la definicion de cociente dada en la escuela primaria. Dejamos al lector corroborar que $M(P') = Q$, para este ultimo P' .

REGLA U: Si tenemos una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y buscamos un predicado P tal que $f = M(P)$ muchas veces es util tratar de diseñar P de manera que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ se de que

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Ejercicio 17: Sea $P = \lambda t x_1 [x_1 < t]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 17,3: Sea $P = \lambda t x_1 x_2 [x_2 + t = x_1]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 17,6: Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \blacksquare\}$. Sea $P = \lambda t \alpha_1 [[\alpha_1]_t = \blacksquare]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 17,9: Aplique la REGLA U para encontrar un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1 [\text{parte entera de } \sqrt{x_1}]$.

Ejercicio 18: Encuentre un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1 x_2 [x_1 \dot{-} x_2]$. (Aqui es natural hacerlo sin la idea de la REGLA U.)

Ejercicio 19: Elija V o F para el siguiente enunciado. Justifique.

- Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^2 \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -recursivo, entonces el siguiente procedimiento (con dato de entrada $(x, y) \in \omega^2$) computa la funcion $M(P)$.

Etapa 1: Hacer $T = 0$ e ir a Etapa 2

Etapa 2: Si $(T, x, y) \in D_P$ y $P(T, x, y) = 1$, entonces ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 3.

Etapa 3: Hacer $T = T + 1$ e ir a Etapa 2.

Etapa 4: Dar T como salida y terminar

Lemma 42 Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -efectivamente computable y D_P es Σ -efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 20: Pruebe el lema anterior

Lamentablemente si quitamos la hipotesis en el lema anterior de que D_P sea Σ -efectivamente computable, el lema resulta falso. Mas adelante veremos un ejemplo. Por el momento el lector puede ejercitar su comprension del tema convenciendose de que aun teniendo un procedimiento efectivo que compute a un predicado $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, no es claro como construir un procedimiento efectivo que compute a $M(P)$.

Ejercicio 21: V o F o I. Justifique.

- (a) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Si $\vec{x} \in \omega^n$ es tal que existe t en ω que cumple $(t, \vec{x}) \in D_P$, entonces $\vec{x} \in D_{M(P)}$.
- (b) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Entonces $M(P)(\vec{x}) \leq t$
- (c) Sea $P : \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado, con $n \geq 1$. Entonces $D_{M(P)} \subseteq \omega^{n-1}$
- (d) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $M(p_1^{1,2}) = C_0^{0,2}$

Definicion de funcion Σ -recursiva

Con este nuevo constructor de funciones estamos en condiciones de definir la clase de las funciones Σ -recursivas. Definamos los conjuntos $R_0^\Sigma \subseteq R_1^\Sigma \subseteq R_2^\Sigma \subseteq \dots \subseteq R^\Sigma$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 R_0^\Sigma &= PR_0^\Sigma \\
 R_{k+1}^\Sigma &= R_k^\Sigma \cup \{f \circ [f_1, \dots, f_r] : f, f_1, \dots, f_r \in R_k^\Sigma, r \geq 1\} \cup \\
 &\quad \{R(f, \mathcal{G}) : f \text{ y cada } \mathcal{G}_a \text{ pertenecen a } R_k^\Sigma\} \cup \\
 &\quad \{R(f, g) : f, g \in R_k^\Sigma\} \cup \\
 &\quad \{M(P) : P \text{ es } \Sigma\text{-total y } P \in R_k^\Sigma\} \\
 R^\Sigma &= \bigcup_{k \geq 0} R_k^\Sigma
 \end{aligned}$$

Una funcion f es llamada Σ -recursiva si pertenece a R^Σ . Cabe destacar que aunque $M(P)$ fue definido para predicados no necesariamente Σ -totales, en la definicion de los conjuntos R_k^Σ , nos restringimos al caso en que P es Σ -total.

Notese que $PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$, para cada $k \in \omega$, por lo cual $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$.

Proposition 43 Si $f \in R^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 22: Pruebe la proposicion anterior

Daremos sin prueba el siguiente conceptualmente importante resultado.

Proposition 44 Sea Σ un alfabeto finito. Entonces no toda funcion Σ -recursiva es Σ -p.r.. Es decir que $\text{PR}^\Sigma \subseteq \text{R}^\Sigma$ y $\text{PR}^\Sigma \neq \text{R}^\Sigma$.

Este resultado no es facil de probar. Mas adelante veremos ejemplos naturales de funciones Σ -recursivas que no son Σ -p.r.. Otro ejemplo natural es la famosa funcion de Ackermann.

Lema de minimizacion acotada de variable numerica de predicados Σ -p.r.

Como veremos mas adelante, no siempre que $P \in \text{R}^\Sigma$, tendremos que $M(P) \in \text{R}^\Sigma$. Sin envargo, el siguiente lema nos garantiza que cuando $P \in \text{PR}^\Sigma$, se da que $M(P) \in \text{R}^\Sigma$ y ademas da condiciones para que $M(P)$ sea Σ -p.r..

Lemma 45 Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces

- (a) $M(P)$ es Σ -recursiva.
- (b) Si hay una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ -p.r..

Proof. (a) Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1, m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Note que \bar{P} es Σ -p.r. (por que?). Veremos a continuacion que $M(P) = M(\bar{P})$. Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, por lo cual $M(P) = M(\bar{P})$.

Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ -recursiva. Sea k tal que $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma$. Ya que \bar{P} es Σ -total y $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma \subseteq \text{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \text{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \text{R}^\Sigma$.

(b) Ya que $M(P) = M(\bar{P})$, basta con probar que $M(\bar{P})$ es Σ -p.r. Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ -p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \circ [f, p_1^{n, m}, \dots, p_{n+m}^{n, m}]$$

Pero el Lema 41 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Note que P_1 es Σ -total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ -p.r. Ademas notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ -p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^y t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ [C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

y por lo tanto el Lema 40 nos dice que F es Σ -p.r.. ■

OBSERVACION: No siempre que P sea Σ -p.r. tendremos que $M(P)$ lo sera. Notese que si $M(P)$ fuera Σ -p.r., cada vez que P lo sea, entonces tendríamos que $\text{PR}^\Sigma = \text{R}^\Sigma$ (justifique) lo cual contradiría la Proposición 44. Mas adelante veremos un ejemplo natural de un predicado P el cual es Σ -p.r. pero $M(P)$ no es Σ -p.r.

El lema de minimización recién probado es muy útil como lo veremos en los siguientes dos lemas.

Lemma 46 *Sea Σ un alfabeto finito. Las siguientes funciones son Σ -p.r.:*

- (a) $Q : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow \text{cociente de la división de } x \text{ por } y$
- (b) $R : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow \text{resto de la división de } x \text{ por } y$

Proof. (a) Ya vimos anteriormente que $Q = M(P)$, donde $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$. Ya que P' es Σ -p.r. y

$$Q(x_1, x_2) \leq p_1^{2,0}(x_1, x_2), \text{ para cada } (x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$$

(b) del Lema 45 implica que $Q \in \text{PR}^\Sigma$.

(b) Notese que

$$R = \lambda xy [x \dot{-} Q(x, y).y]$$

y por lo tanto $R \in \text{PR}^\Sigma$. ■

Ejercicio 23: Dados $x, y \in \omega$ tales que $x \neq 0$ o $y \neq 0$, usaremos $\text{mcd}(x, y)$ para denotar el maximo comun divisor de x e y , es decir el mayor numero que divide a x y divide a y . Note que $M = \lambda xy[\text{mcd}(x, y)]$ tiene dominio igual a $\omega^2 - \{(0, 0)\}$. Pruebe que M es Σ -p.r.. (Hint: use la REGLA U)

Ejercicio 23,5: Dados $x, y \in \mathbf{N}$, usaremos $\text{mcm}(x, y)$ para denotar el minimo comun multiplo de x e y , es decir el menor numero no nulo que es multiplo de x y de y . Note que $G = \lambda xy[\text{mcm}(x, y)]$ tiene dominio igual a \mathbf{N}^2 . Pruebe que G es Σ -p.r..

Lemma 47 Sea Σ un alfabeto finito. Entonces la funcion

$$\begin{aligned} pr : \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n\text{-esimo numero primo} \end{aligned}$$

es Σ -p.r.

Proof. Para ver que pr es Σ -p.r., veremos que la extension $h : \omega \rightarrow \omega$, dada por $h(0) = 0$ y $h(n) = pr(n)$, $n \geq 1$, es Σ -p.r.. Luego $pr = h|_{\mathbf{N}}$ resultara Σ -p.r. por ser la restriccion de una funcion Σ -p.r. a un conjunto Σ -p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(t+1) &= \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > h(t)) \end{aligned}$$

O sea que $h = R(C_0^{0,0}, g)$, donde

$$\begin{aligned} g : \omega \times \omega &\rightarrow \omega \\ (A, t) &\rightarrow \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \end{aligned}$$

Es decir que solo nos resta ver que g es Σ -p.r.. Pero notese que $g = M(P)$, donde $P = \lambda iAt [i \text{ es primo} \wedge i > A]$. Claramente P es Σ -p.r. por lo cual para poder aplicar (b) del lema anterior debemos encontrar una funcion $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(A, t) \leq f(A, t), \text{ para cada } (A, t) \in \omega^2$$

Aceptaremos sin prueba que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

Es decir que $f = \lambda At[A! + 1]$ cumple lo deseado, lo cual implica que $g = M(P)$ es Σ -p.r. ■

Ejercicio 24: (O) Si tiene ganas y recuerda las propiedades basicas de divisibilidad, intente un rato probar que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

(Hint: factorice $A! + 1$ en producto de primos y vea que alguno debe ser mayor que A .)

Ejercicio 25: Pruebe que $\lambda xi [(x)_i]$ es Σ -p.r. (Hint: repase el significado de la expresion $(x)_i$ y encuentre entonces el dominio de $\lambda xi [(x)_i]$ antes de hacer el ejercicio)

Ejercicio 26: Pruebe que la funcion Lt es Σ -p.r.

Ejercicio 27: Sea $C = \{z^2 : z \in \omega\}$. Sea $f : C \rightarrow \omega$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in C$. Pruebe que f es Σ -p.r.

Ejercicio 27,3: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Sea $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$ dada por:

$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \text{ es capicua}\}$$

Pruebe que f es Σ -p.r. (Hint: use la Regla U)

Minimizacion de variable alfabetica

Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea \leq un orden total sobre Σ . Recordemos que \leq puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre Σ^* . Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado. Cuando $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es tal que existe al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ para denotar al menor $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Notese que la expresion $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un α tal que se da $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no estara definida cuando para cada $\alpha \in \Sigma^*$ se da que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no depende de la variable α . Por ejemplo, las expresiones $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ y $\min_{\beta}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M^{\leq}(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

Notese que

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$$

Diremos que $M^{\leq}(P)$ es obtenida por *minimizacion de variable alfabetica* a

partir de P .

Vemos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{\textcircled{a}, a, b, c, d, e\}$ y sea \leq un orden total sobre Σ . Sea $Dir = \{\alpha_1 \in \Sigma^* : |\alpha_1|_{\textcircled{a}} = 1\}$ y definamos $U : Dir \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$U(\alpha_1) = \text{unico } \alpha \text{ tal que } \alpha\textcircled{a} \text{ es tramo inicial de } \alpha_1$$

Sea

$$P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha_1 \in Dir \text{ y } \alpha\textcircled{a} \text{ es tramo inicial de } \alpha_1]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_{M^{\leq}(P)} &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\alpha_1, \alpha)\} \\ &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : \alpha_1 \in Dir \text{ y } (\exists \alpha \in \Sigma^*) \alpha\textcircled{a} \text{ es tramo inicial de } \alpha_1\} \\ &= Dir \end{aligned}$$

y ademas es claro que $M^{\leq}(P)(\alpha_1) = U(\alpha_1)$, para cada $\alpha_1 \in Dir$, por lo cual $M^{\leq}(P) = U$.

Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica de predicados Σ -p.r.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado. Su prueba es rutinaria y se basa en el Lema 45

Lemma 48 *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea \leq un orden total sobre Σ , sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces*

(a) $M^{\leq}(P)$ es Σ -recursiva.

(b) Si existe una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que

$$|M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)},$$

entonces $M^{\leq}(P)$ es Σ -p.r..

Ejercicio 28: Pruebe que la funcion U del ejemplo anterior es Σ -p.r.. Por que se eligieron los nombres Dir y U ?

Ejercicio 29: Dada una palabra $\alpha \in \Sigma^*$, si hay una palabra ρ tal que $\rho^2 = \alpha$, usaremos $\sqrt{\alpha}$ para denotar a ρ . Notese que la expresion $\sqrt{\alpha}$ tiene sentido o esta definida solo para ciertas palabras. Pruebe que $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$ es Σ -p.r..

Ejercicio 30: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ .

(a) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha[\alpha_1 = \varepsilon])$

(b) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha [\alpha^2 = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_1])$

Ejercicio 31: V o F o I, justifique.

(a) Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ . Entonces $p_1^{0,2} = M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha [\alpha = \alpha_1])$

(b) Sea \leq un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) (\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \in D_P\}$$

(c) Sea \leq un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \wedge (\forall \beta \in \Sigma^*)_{\beta < \alpha} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \alpha$$

Ejercicio 32: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ . Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha [\alpha_1\alpha = \alpha_2]$. Describa la funcion $M^{\leq}(P)$.

Ejercicio 32,3: (S) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ . Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Sea \leq un orden total sobre $\Gamma \cup Q$.

(a) Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha [\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$. Encuentre $D_{M^{\leq}(P)}$. Que relacion hay entre la funcion $St : Des \rightarrow Q$ y $M^{\leq}(P)$

(b) Encuentre un predicado R (modificando P) tal que $M^{\leq}(R) = St$.

(c) Pruebe que St es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.

Conjuntos Σ -recursivamente enumerables

Ya que la nocion de funcion Σ -recursiva es el modelo matematico Godeliano del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, nos podriamos preguntar entonces cual es el modelo matematico Godeliano del concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable. Si prestamos atencion a la definicion de conjunto Σ -efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ -efectivamente computables por lo cual la siguiente definicion cae de maduro:

Diremos que un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -recursivamente enumerable cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -recursiva, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.

Deberia entonces quedar claro que si el concepto de funcion Σ -recursiva modeliza correctamente al concepto de funcion Σ -efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ -recursivamente enumerable recién definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable.

Sin envargo para probar algunos de los resultados basicos acerca de los conjuntos Σ -recursivamente enumerables, deberemos esperar a tener probada la equivalencia del paradigma Godeliano con el imperativo.

Conjuntos Σ -recursivos

La version Godeliana del concepto de conjunto Σ -efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -*recursivo* cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -recursiva. Todo conjunto Σ -recursivo es Σ -recursivamente enumerable pero esto lo probaremos mas adelante junto con otros resultados basicos sobre conjuntos Σ -r.e., los cuales se prueban usando el modelo imperativo. Mas adelante daremos un ejemplo natural de un conjunto que es Σ -r.e. pero el cual no es Σ -recursivo.

Ejercicio 33: Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -r., entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.
- (b) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -recursivos. Entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -recursivos

Independencia del alfabeto

El siguiente resultado es conceptualmente muy importante. Su prueba tiene cierta dificultad tecnica por lo cual la omitiremos.

Theorem 49 Sean Σ y Γ alfabetos finitos cualesquiera.

- (a) Supongamos una funcion f es Σ -mixta y Γ -mixta, entonces f es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.) sii f es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.)
- (b) Supongamos un conjunto S es Σ -mixto y Γ -mixto, entonces S es Σ -recursivo (resp. Σ -r.e., Σ -p.r.) sii S es Γ -recursivo (resp. Γ -r.e., Γ -p.r.)

Ejercicio 34: (S) Explique con palabras por que no es obvio el resultado anterior

Ejercicio 35: (S) Que hubiera implicado acerca de la completitud del modelo Godeliano el hecho de que no fuera cierto (a) del teorema anterior?

7 Guia 7

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

El paradigma imperativo de Neumann: El lenguaje \mathcal{S}^Σ

En esta seccion daremos una modelizacion matematica del concepto de funcion Σ -efectivamente computable utilizando un lenguaje de programacion teorico el cual depende del alfabeto Σ . Lo llamaremos \mathcal{S}^Σ a dicho lenguaje. Dado que fue el matematico Von Neumann quien contribuyo al desarrollo de la primera computadora de proposito general (es decir a la cual se le pueden hacer correr programas tal como a las computadoras actuales), nos referiremos a este paradigma de computabilidad efectiva como el paradigma de Von Neumann.

Sintaxis de \mathcal{S}^Σ

Necesitaremos algunas funciones basicas para poder describir la sintaxis de \mathcal{S}^Σ en forma precisa. Recordemos que llamabamos *numerales* a los siguientes simbolos

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tambien recordemos que Num denotaba el conjunto de los numerales. Sea $Sig : Num^* \rightarrow Num^*$ definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Sig(\varepsilon) &= 1 \\ Sig(\alpha 0) &= \alpha 1 \\ Sig(\alpha 1) &= \alpha 2 \\ Sig(\alpha 2) &= \alpha 3 \\ Sig(\alpha 3) &= \alpha 4 \\ Sig(\alpha 4) &= \alpha 5 \\ Sig(\alpha 5) &= \alpha 6 \\ Sig(\alpha 6) &= \alpha 7 \\ Sig(\alpha 7) &= \alpha 8 \\ Sig(\alpha 8) &= \alpha 9 \\ Sig(\alpha 9) &= Sig(\alpha)0 \end{aligned}$$

Definamos $Dec : \omega \rightarrow Num^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Dec(0) &= \varepsilon \\ Dec(n+1) &= Sig(Dec(n)) \end{aligned}$$

Notese que para $n \in \mathbf{N}$, la palabra $Dec(n)$ es la notacion usual decimal de n . Para hacer mas agil la notacion escribiremos \bar{n} en lugar de $Dec(n)$. Notese que, en virtud de esta convencion notacional se tiene que $Dec = \lambda n[\bar{n}]$.

Ejercicio 1: Hacer

- (a) Pruebe que Sig y Dec son Num -p.r.
- (b) Sea Γ un alfabeto que contiene a Num . Pruebe sin usar el teorema de independecia del alfabeto que Sig y Dec son Γ -p.r.. Hint: extienda Sig a una \widehat{Sig} que sea Γ -total. Use \widehat{Sig} para definir una g que sea Γ -p.r. y tal que $Dec = R(C_\varepsilon^{0,0}, g)$ (respecto del alfabeto Γ)

La sintaxis de \mathcal{S}^Σ sera dada utilizando solo simbolos del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, donde

$$\Sigma_p = Num \cup \{ \leftarrow, +, \dot{-}, \cdot, \neq, \sim, \varepsilon, N, K, P, L, I, F, G, O, T, B, E, S \}.$$

Cabe aclarar que la palabra de longitud 0 no es un elemento de Σ_p sino que la letra griega ε que usualmente denota esta palabra, lo es. Tambien notese que en Σ_p hay simbolos que a veces representan operaciones como por ejemplo $+$ y $\dot{-}$, pero deberia quedar claro que en Σ_p estan los simbolos $+$ y $\dot{-}$ y no las operaciones que ellos denotan.

Las palabras de la forma $N\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *variables numericas de \mathcal{S}^Σ* . Las palabras de la forma $P\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *variables alfabeticas de \mathcal{S}^Σ* . Las palabras de la forma $L\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *labels de \mathcal{S}^Σ* . Una *instruccion basica de \mathcal{S}^Σ* es una palabra de $(\Sigma \cup \Sigma_p)^*$ la cual es de alguna de las siguientes formas

$$N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$$

$$N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} \dot{-} 1$$

$$N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$$

$$N\bar{k} \leftarrow 0$$

$$P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$$

$$P\bar{k} \leftarrow \sim P\bar{k}$$

$$P\bar{k} \leftarrow P\bar{n}$$

$$P\bar{k} \leftarrow \varepsilon$$

$$\text{IF } N\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{n}$$

$$\text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{n}$$

$$\text{GOTO } L\bar{n}$$

SKIP

donde $a \in \Sigma$ y $k, n \in \mathbf{N}$. Como puede observarse para que las instrucciones basicas sean mas leijbles usamos espacios entre ciertos simbolos. Por ejemplo, hemos escrito $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$ pero en realidad nos referimos a la palabra

$$N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$$

cuya longitud es $2|\bar{k}| + 5$. Otro ejemplo, hemos escrito IF $P\bar{k}$ BEGINS a GOTO $L\bar{n}$ pero en realidad nos referiamos a la palabra $IFP\bar{k}BEGINSaGOTOL\bar{n}$ cuya longitud es $|\bar{k}| + |\bar{n}| + 15$.

Una *instruccion de \mathcal{S}^Σ* es ya sea una instruccion basica de \mathcal{S}^Σ o una palabra de la forma αI , donde $\alpha \in \{L\bar{n} : n \in \mathbf{N}\}$ y I es una instruccion basica de \mathcal{S}^Σ . Usaremos Ins^Σ para denotar el conjunto de todas las instrucciones de \mathcal{S}^Σ . Cuando la instruccion I es de la forma $L\bar{n}J$ con J una instruccion basica, diremos que $L\bar{n}$ es el *label* de I .

Ejercicio 1,3: V o F o I, justificar

- (a) Para cada $n \in \mathbf{N}$, se tiene que $\bar{n} \in \omega$
- (b) Si $k \in \mathbf{N}$, entonces $P\bar{k} \leftarrow$ es una instruccion de \mathcal{S}^Σ
- (c) Sea Σ un alfabeto. Entonces Ins^Σ es un conjunto Σ -mixto
- (d) $Ti(\text{Ins}^\Sigma) = \text{PALABRA}$
- (e) Si $I \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $Ti(I) = \text{PALABRA}$
- (f) Si I es una instruccion de \mathcal{S}^Σ y $n \in \mathbf{N}$ es tal que $L\bar{n}$ es tramo inicial de I , entonces $L\bar{n}$ es el label de I .

Damos a continuacion, a modo de ejemplo, la interpretacion intuitiva asociada a ciertas instrucciones basicas de \mathcal{S}^Σ :

INSTRUCCION : $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} - 1$

INTERPRETACION : Si el contenido de $N\bar{k}$ es 0 dejarlo sin modificar; en caso contrario disminuya en 1 el contenido de $N\bar{k}$

INSTRUCCION : $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$

INTERPRETACION : Copiar en $N\bar{k}$ el contenido de $N\bar{n}$ sin modificar el contenido de $N\bar{n}$

INSTRUCCION : $P\bar{k} \leftarrow \circ P\bar{k}$

INTERPRETACION : Si el contenido de $P\bar{k}$ es ε dejarlo sin modificar; en caso contrario remueva el 1er simbolo del contenido de $P\bar{k}$

INSTRUCCION : $P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$

INTERPRETACION : Modificar el contenido de $P\bar{k}$ agregandole el simbolo a a la derecha

INSTRUCCION : IF $P\bar{k}$ BEGINS a GOTO $L\bar{m}$

INTERPRETACION : Si el contenido de $P\bar{k}$ comienza con a , ejecute la primer instruccion con label $L\bar{m}$; en caso contrario ejecute la siguiente instruccion

Ejercicio 1,6: Sea $\Sigma = \{ @, \uparrow \}$. Sea $L = \{ \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS}a\text{GOTOL}\bar{n} : a \in \Sigma \text{ y } k, n \in \mathbf{N} \}$. Note que $L \subseteq \text{Ins}^\Sigma$. Pruebe que L es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Un *programa de \mathcal{S}^Σ* es una palabra de la forma

$$I_1 I_2 \dots I_n$$

donde $n \geq 1$, $I_1, \dots, I_n \in \text{Ins}^\Sigma$ y ademas se cumple la siguiente propiedad, llamada *la ley de los GOTO*,

- (G) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, si $\text{GOTOL}\bar{m}$ es un tramo final de I_i , entonces existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que I_j tiene label $L\bar{m}$

Usaremos Pro^Σ para denotar el conjunto de todos los programas de \mathcal{S}^Σ . Como es usual cuando escribamos un programa lo haremos linea por linea, con la finalidad de que sea mas legible. Por ejemplo, escribiremos

L2 N12 \leftarrow N12-1
 P1 \leftarrow \neg P1
 IF N12 \neq 0 GOTO L2

en lugar de

L2N12 \leftarrow N12-1P1 \leftarrow \neg P1IFN12 \neq 0GOTOL2

Un importante resultado es el siguiente lema que garantiza que los programas pueden ser parseados en forma unica como concatenacion de instrucciones. Lo aceptaremos sin demostracion.

Lemma 50 Sea Σ un alfabeto finito. Se tiene que:

- (a) Si $I_1 \dots I_n = J_1 \dots J_m$, con $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$.
- (b) Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, entonces existe una unica sucesion de instrucciones I_1, \dots, I_n tal que $\mathcal{P} = I_1 \dots I_n$

(b) del lema anterior nos dice que dado un programa \mathcal{P} , tenemos univocamente determinados $n(\mathcal{P}) \in \mathbf{N}$ y $I_1^{\mathcal{P}}, \dots, I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}} \in \text{Ins}^{\Sigma}$ tales que $\mathcal{P} = I_1^{\mathcal{P}} \dots I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}$. Definamos tambien

$$I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$$

cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$. Notese que las expresiones $n(\alpha)$ y I_i^{α} estan definidas solo cuando α es un programa (y i es un elemento de ω), es decir, cierta palabra del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$. O sea que cuando usemos notacion lambda que involucre dichas expresiones, el alfabeto respecto del cual usaremos dicha notacion sera $\Sigma \cup \Sigma_p$. Esto nos dice entonces que $\lambda\alpha[n(\alpha)]$ tiene dominio igual a $\text{Pro}^{\Sigma} \subseteq (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$ y $\lambda i\alpha[I_i^{\alpha}]$ tiene dominio igual a $\omega \times \text{Pro}^{\Sigma}$. Para hacer mas sugestiva la notacion a veces escribiremos $\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i\mathcal{P}[I_i^{\mathcal{P}}]$ en lugar de $\lambda\alpha[n(\alpha)]$ y $\lambda i\alpha[I_i^{\alpha}]$

Ejercicio 2: V o F o I, justificar

- (a) $\text{Ins}^{\Sigma} \subseteq \text{Pro}^{\Sigma}$
- (b) $\text{Ins}^{\Sigma} \cap \text{Pro}^{\Sigma} = \emptyset$
- (c) $\lambda i\mathcal{P}[I_i^{\mathcal{P}}]$ tiene dominio igual a $\{(i, \mathcal{P}) \in \mathbf{N} \times \text{Pro}^{\Sigma} : i \leq n(\mathcal{P})\}$
- (d) Sea Σ un alfabeto. Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$, entonces $\mathcal{P} \in \overbrace{\text{Ins}^{\Sigma} \times \dots \times \text{Ins}^{\Sigma}}^{n(\mathcal{P}) \text{ veces}}$

Ejercicio 3: (S) Si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$, entonces $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$

Semantica de \mathcal{S}^{Σ}

Para definir la semantica nos sera util la funcion $\text{Bas} : \text{Ins}^{\Sigma} \rightarrow (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$, dada por

$$\text{Bas}(I) = \begin{cases} J & \text{si } I \text{ es de la forma } L\bar{k}J \text{ con } J \in \text{Ins}^{\Sigma} \\ I & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Recordemos que para una palabra α definiamos

$$\cap_{\alpha} = \begin{cases} [\alpha]_2 \dots [\alpha]_{|\alpha|} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si } |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \omega^{[\mathbf{N}]} &= \{(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{\mathbf{N}} : \text{hay } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } s_i = 0, \text{ para } i \geq n\} \\ \Sigma^{*[\mathbf{N}]} &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma^{*\mathbf{N}} : \text{hay } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } \sigma_i = \varepsilon, \text{ para } i \geq n\}. \end{aligned}$$

Asumiremos siempre que en una computacion via un programa de \mathcal{S}^{Σ} , todas excepto una cantidad finita de las variables numericas tienen el valor 0 y todas excepto una cantidad finita de las variables alfabeticas tienen el valor ε . Esto no

quita generalidad a nuestra modelizacion del funcionamiento de los programas ya que todo programa envuelve una cantidad finita de variables.

Un *estado* es un par

$$(\vec{s}, \vec{\sigma}) = ((s_1, s_2, \dots), (\sigma_1, \sigma_2, \dots)) \in \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}.$$

Si $i \geq 1$, entonces diremos que s_i es el *contenido* o *valor* de la variable $N\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y σ_i es el *contenido* o *valor* de la variable $P\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Es decir, intuitivamente hablando, un estado es un par de infinituplas que contiene la informacion de que valores tienen alojados las distintas variables.

Imaginemos que corremos un programa \mathcal{P} partiendo de un estado inicial $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Por supuesto la primera instruccion a realizar sera $I_1^{\mathcal{P}}$ pero, dado que $I_1^{\mathcal{P}}$ puede ser de tipo GOTO, la segunda instruccion que realizaremos puede no ser $I_2^{\mathcal{P}}$. Es decir en cada paso iremos decidiendo en funcion de la instruccion ejecutada cual es la siguiente instruccion a realizar. O sea que mientras corremos \mathcal{P} , en cada paso la informacion importante a tener en cuenta es, por una parte, cuales son los valores que tienen cada una de las variables y, por otra parte, cual es la instruccion que nos tocara realizar a continuacion. Esto da lugar al concepto de descripcion instantanea, a saber, un objeto matematico que describe en un instante dado de la computacion cuales son los valores de las variables y cual es la instruccion que se debe realizar en el instante siguiente. Mas formalmente una *descripcion instantanea* es una terna $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ tal que $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es un estado e $i \in \omega$. Es decir que $\omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}$ es el conjunto formado por todas las descripciones instantaneas. Intuitivamente hablando, cuando $i \in \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$, la descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ nos dice que las variables estan en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y que la instruccion que *debemos realizar* es $I_i^{\mathcal{P}}$. Dado que sera conveniente para simplificar el tratamiento formal, nos abstraeremos un poco y cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$ pensaremos tambien que la descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ nos dice que las variables estan en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y que debemos realizar $I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ (aunque por supuesto no podremos realizarla ya que no es una instruccion).

Dado un programa \mathcal{P} definiremos a continuacion una funcion

$$S_{\mathcal{P}} : \omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]} \rightarrow \omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}$$

la cual le asignara a una descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ la *descripcion instantanea sucesora* de $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ con respecto a \mathcal{P} . Cuando $i \in \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$, intuitivamente hablando, $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ sera la descripcion instantanea que resulta luego de realizar $I_i^{\mathcal{P}}$ estando en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$ definiremos $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, lo cual es bastante intuitivo ya que si estamos en estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y debemos realizar $I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$, dado que ε no es una instruccion y por lo tanto no la podremos realizar, seguiremos en el mismo estado y teniendo que realizar $I_i^{\mathcal{P}}$.

Para darle una semantica mas unificada al concepto de descripcion instantanea sucesora debemos crear un nuevo verbo. El verbo "realizarp". Dada una actividad A, diremos que un individuo P *realizap* la actividad A, si P realiza A, en caso de que pueda hacerlo. O sea realizarp una actividad es realizarla si se puede.

Para dar otro ejemplo de este tipo de verbos, consideremos el verbo "comprarp", es decir "comprar si se puede". Un hijo le pide a su padre que le compre un determinado juguete y el padre le dice "si, hijo mio, te lo voy a comprarp". Luego el padre es despedido de su empleo y su citucion economica hace que no le sea posible comprar dicho juguete. Sin envargo el padre no mintio ya que si bien no compro dicho juguete, él si lo comprop.

Con este verbo podemos describir intuitivamente $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$:

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = \text{descripcion instantanea que resulta} \\ \text{luego de realizarp } I_i^{\mathcal{P}}, \text{ estando en estado } (\vec{s}, \vec{\sigma})$$

Ahora si, daremos la definicion matematica de $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, segun se den distintos casos posibles.

Caso $i \notin \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} - 1$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_n, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{k} \leftarrow 0$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } N\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m}$. Entonces tenemos dos subcasos.

Subcaso a. El valor de $N\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es 0. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Subcaso b. El valor de $N\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es no nulo. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{k} \leftarrow \wedge P\bar{k}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \wedge \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k a, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{k} \leftarrow P\bar{n}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_n, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{k} \leftarrow \varepsilon$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \varepsilon, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{m}$. Entonces tenemos dos sub-casos.

Subcaso a. El valor de $P\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ comienza con a . Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Subcaso b. El valor de $P\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ no comienza con a . Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{GOTO } L\bar{m}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{SKIP}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

La computacion partiendo de un estado Dado un programa \mathcal{P} y un estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ a la infinitupla

$$((1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))), \dots)$$

la llamaremos la *computacion de \mathcal{P} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* . Diremos que

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})))}^{t \text{ veces}} \dots)$$

es la *descripcion instantanea obtenida luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* . Si

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})))}^{t \text{ veces}} \dots) = (j, \vec{u}, \vec{\eta})$$

diremos que $(\vec{u}, \vec{\eta})$ es el *estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* .

Es claro que en la infinitupla de mas arriba esta toda la informacion de la "corrida" del programa \mathcal{P} cuando partimos del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Veamos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \#\}$ y sea \mathcal{P} el siguiente programa

```
L3  N4 ← N4 + 1
    P1 ←  $\neg$ P1
    IF P1 BEGINS  $\blacktriangle$  GOTO L3
    P3 ← P3.#
```

Supongamos que tomamos $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ igual al estado

$$((2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\#\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$$

Tendremos entonces que la computacion de \mathcal{P} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es la siguiente sucesion (de arriba hacia abajo) de descripciones instantaneas:

$(1, (2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = P1 \leftarrow \neg P1$ obtenemos
 $(3, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_3^{\mathcal{P}} = \text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = P1 \leftarrow \neg P1$ obtenemos
 $(3, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_3^{\mathcal{P}} = \text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$ obtenemos
 $(4, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_4^{\mathcal{P}} = P3 \leftarrow P3 \#$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 \vdots

Notese que en este caso es natural decir que el programa \mathcal{P} se detiene, partiendo del estado inicial dado ya que llega a un punto en el que queda intentando realizar $I_{n(\mathcal{P})+1}^{\mathcal{P}}$ lo cual no es una instruccion. Veamos un ejemplo de no detencion. Sea \mathcal{Q} el siguiente programa

$L3 \quad N4 \leftarrow N4 + 1$
 $\text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$

Supongamos que tomamos $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ igual al estado

$((2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$

Tendremos entonces que la computacion de \mathcal{Q} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es la

siguiente sucesion (de arriba hacia abajo) de descripciones instantaneas:

$(1, (2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 8, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 8, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 9, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 9, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 \vdots

Notese que en este caso, es claro que el programa \mathcal{Q} no se detiene partiendo del estado inicial dado ya que sigue indefinidamente realizando instrucciones.

Ejercicio 4: V o F o I, justificar

- (a) Si $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, entonces $i \notin \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$
- (b) Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y sea d una descripcion instantanea cuya primer coordenada es i . Si $I_i^{\mathcal{P}} = N2 \leftarrow N2 + 1$, entonces $S_{\mathcal{P}}(d) = (i + 1, (N1, \text{Suc}(N2), N3, N4, \dots), (P1, P2, P3, P4, \dots))$
- (c) Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y sea d una descripcion instantanea cuya primer coordenada es i . Si $I_i^{\mathcal{P}} = N2 \leftarrow 0$, entonces $S_{\mathcal{P}}(d) = (i+1, (N1, 0, N3, N4, \dots), (P1, P2, P3, P4, \dots))$
- (d) Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma_p}$ y sea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ una descripcion instantanea. Supongamos $\sigma_3 = \text{GOTO}$. Si $I_i^{\mathcal{P}} = \text{L6 IF P3 BEGINS GOTO L6}$, entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$
- (e) Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$, sea $a \in \Sigma$ y sea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ una descripcion instantanea. Si $\text{Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF P3 BEGINS } a \text{ GOTO L6}$ y $[P3]_1 = a$, entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (j, \vec{s}, \vec{\sigma})$, donde j es el menor numero l tal que $I_l^{\mathcal{P}}$ tiene label L6

Definición matemática de detención Ahora definiremos matemáticamente el concepto de detención. Cuando la primera coordenada de

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))\dots)}^{t \text{ veces}}$$

sea igual a $n(\mathcal{P})+1$, diremos que \mathcal{P} *se detiene (luego de t pasos), partiendo desde el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* . Si ninguna de las primeras coordenadas en la computación

$$((1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))), \dots)$$

es igual a $n(\mathcal{P}) + 1$, diremos que \mathcal{P} *no se detiene partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* .

Cabe destacar que en los conceptos antes definidos por "1 paso" entendemos "realizar una instrucción", donde tal como se lo explico antes "realizar" significa "realizar si se puede". Otra observación importante es que los programas de \mathcal{S}^{Σ} tienen una sola manera de detenerse, i.e. siempre que se detienen lo hacen habiendo realizado la última de sus instrucciones e intentando realizar la instrucción siguiente a su última instrucción

Funciones Σ -computables

Ahora que hemos definido matemáticamente la semántica de \mathcal{S}^{Σ} estamos en condiciones de definir el concepto de función Σ -computable, el cual será una modelización matemática del concepto de función Σ -efectivamente computable. Intuitivamente hablando una función será Σ -computable cuando haya un programa que la compute. Para precisar este concepto nos será útil la siguiente notación. Dados $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$, con $n, m \in \omega$, usaremos

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

para denotar el estado

$$((x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots))$$

Esta notación requiere aclarar un poco como debe interpretarse en los casos límite, es decir cuando alguno de los números n, m es igual a 0. Notese que por ejemplo

$$\|x\| = ((x, 0, \dots), (\varepsilon, \dots))$$

(es el caso $n = 1$ y $m = 0$). También

$$\|\alpha\| = ((0, \dots), (\alpha, \varepsilon, \dots))$$

(es el caso $n = 0$ y $m = 1$). En el caso $n = m = 0$ pensaremos que $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ se transforma en \diamond por lo que se obtiene

$$\|\diamond\| = ((0, \dots), (\varepsilon, \dots))$$

Ademas es claro que

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\| = \left\| x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^i, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^j \right\|$$

cualesquiera sean $i, j \in \omega$.

Dado $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, definamos para cada par $n, m \geq 0$, la funcion $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$ de la siguiente manera:

$$D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : \mathcal{P} \text{ termina, partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{valor de N1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina, partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

Analogamente definamos la funcion $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$ de la siguiente manera:

$$D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : \mathcal{P} \text{ termina, partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{valor de P1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina, partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

Ahora si daremos la definicion precisa de funcion Σ -computable. Una funcion Σ -mixta $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ sera llamada Σ -computable si hay un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$. En tal caso diremos que la funcion f es *computada* por \mathcal{P} . Analogamente una funcion Σ -mixta $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ sera llamada Σ -computable si hay un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$. En tal caso diremos que la funcion f es *computada* por \mathcal{P} .

Algunos ejemplos:

E₁ El programa

```
L2  IF N1 ≠ 0 GOTO L1
      GOTO L2
L1  N1 ← N1 - 1
```

computa la funcion $Pred$. Note que este programa tambien computa las funciones $Pred \circ p_1^{n,m}$, para $n \geq 1$ y $m \geq 0$.

E₂ Sea $\Sigma = \{\clubsuit, \triangle\}$. El programa

```
L3  IF P2 BEGINS ♣ GOTO L1
      IF P2 BEGINS △ GOTO L2
      GOTO L4
L1  P2 ← ¬P2
      P1 ← P1 ♣
      GOTO L3
L2  P2 ← ¬P2
      P1 ← P1 △
      GOTO L3
L4  SKIP
```

computa la funcion $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta]$.

Por supuesto para que el concepto de funcion Σ -computable tenga chance de ser una modelizacion adecuada del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, tiene que ser cierto el siguiente resultado.

Proposition 51 *Si f es Σ -computable, entonces f es Σ -efectivamente computable.*

Ejercicio 5: Pruebe la proposicion anterior

Sin envargo nuestro modelo imperativo de funcion Σ -efectivamente computable todavia podria no ser correcto ya que podria pasar que haya una funcion Σ -mixta que sea computada por un procedimiento efectivo pero que no exista un programa de \mathcal{S}^Σ que la compute. En otras palabras el modelo imperativo o Neumanniano podria ser incompleto. Por supuesto este no es el caso y los desarrollos que veremos mas adelante nos convenceran de que el paradigma imperativo es completo.

Ejercicio 6: Sea $\Sigma = \{\#, @\}$. Para cada una de las siguientes funciones haga un programa que la compute

- (a) $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \omega$, dada por $f(0) = f(1) = 0$ y $f(2) = 5$
- (b) $\lambda xy[x + y]$
- (c) $C_0^{1,1}|_{\{0,1\} \times \Sigma^*}$
- (d) $p_4^{2,3}$
- (e) $\lambda i\alpha[[\alpha]_i]$
- (f) $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$
- (g) $f : \omega^2 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \omega$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_{x_3}$

Ejercicio 7: Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. De un programa que compute la funcion s^\leq , donde \leq esta dado por $@ < \&$

Ejercicio 8: V o F o I, justificar

- (a) Dado $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ y $n, m \geq 0$, se tiene que $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#} : \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]} \rightarrow \omega$
- (b) $\Psi_{\text{L1IFN1} \neq \text{GOTOL1}}^{1,0,\#} = \{(0, 0)\}$
- (c) Sea Σ un alfabeto y sean $n, m \in \omega$. Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$. Entonces el dominio de $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$ es el conjunto formado por todos los estados a partir de los cuales \mathcal{P} termina

- (d) Sea Σ un alfabeto y sean $n, m \in \omega$. Entonces cualesquiera sean $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$ se tiene que

$$\Psi_{\text{SKIP}}^{n,m,\#}((x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \dots)) = x_1$$

- (e) El programa

$$N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1$$

computa la funcion $\lambda x_2 x_1[x_2 \dot{-} 1]$

- (f) *Suc* se detiene para todo $x \in \omega$

- (g) Si \mathcal{P} computa una función $f : D_f \subseteq \omega^2 \rightarrow \omega$, entonces \mathcal{P} computa la función $f \circ [p_1^{1,0}, C_0^{1,0}]$.

Ejercicio 9: Sea $\Sigma = \Sigma_p \cup \{a, b, c, d, e, f, g, \dots, x, y, z\}$. De una funcion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ la cual sea Σ -p.r. y tal que $\Psi_{f(\mathcal{P})}^{1,1,\#} = \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#} \circ [\lambda x \alpha[x+2], C_{bb}^{1,1}]$, cualesquiera sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$

Macros

Supongamos que estamos escribiendo un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ con el objeto de que realice cierta tarea. Supongamos ademas que nos vendria muy bien para nuestros propositos poder usar una instruccion

$$N5 \leftarrow N16 + N3$$

la cual por supuesto al correr el programa, deberia producir el efecto de dejar en la variable N5 la suma de los contenidos de las variables N16 y N3, sin modificar el contenido de las variables distintas a N5. Lamentablemente no tenemos en \mathcal{S}^Σ este tipo de instruccion pero podriamos reemplazarla por el siguiente programa

```

N1111  $\leftarrow$  N16
N2222  $\leftarrow$  N3
N5  $\leftarrow$  N1111
L1000 IF N2222  $\neq$  0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000 N2222  $\leftarrow$  N2222  $\dot{-}$  1
      N5  $\leftarrow$  N5 + 1
      GOTO L1000
L3000 SKIP
```

donde las variables N1111, N2222 y los labels L1000, L2000, L3000 solo seran usados aqui, es decir no aparecern en el resto de nuestro programa \mathcal{P} . Notese que este programa cuando es corrido termina dejando en la variable N5 la suma de los contenidos de las variables N16 y N3 y modifica el contenido de las variables N1111 y N2222, lo cual no traera problemas ya que N1111 y N2222 no

se usan en el resto de \mathcal{P} . Las variables N1111 y N2222 son auxiliares y se usan justamente para preservar el valor de las variables N16 y N3 ya que ellas son variables protagonistas de nuestro programa \mathcal{P} y en esta instancia no queremos alterar su contenido sino solo realizar la asignación $N5 \leftarrow N16 + N3$. Dejamos al lector explicar por qué es necesario para que la simulación sea correcta que los labels L1000, L2000 y L3000 no sean usados en el resto de \mathcal{P} .

Es decir el programa anterior simula la instrucción $N5 \leftarrow N16 + N3$ que no podíamos usar por no ser una instrucción de \mathcal{S}^Σ , con un costo bastante bajo, es decir el costo de convenir en no usar en el resto de \mathcal{P} las variables N1111 y N2222 ni los labels L1000, L2000 y L3000.

Ahora supongamos que seguimos escribiendo el programa \mathcal{P} y nos hace falta simular la instrucción $N20 \leftarrow N1 + N14$. Entonces es claro que podríamos modificar el programa que simulaba $N5 \leftarrow N16 + N3$ haciéndole reemplazos adecuados a sus variables y labels. Por ejemplo podríamos escribir

```

N9999  $\leftarrow$  N1
N8888  $\leftarrow$  N14
N20  $\leftarrow$  N9999
L1001 IF N8888  $\neq$  0 GOTO L2002
      GOTO L3003
L2002 N8888  $\leftarrow$  N8888 - 1
      N20  $\leftarrow$  N20 + 1
      GOTO L1001
L3003 SKIP

```

donde N9999, N8888, L1001, L2002 y L3003 solo serán usados aquí, es decir no aparecerán en el resto de nuestro programa \mathcal{P} .

Consideremos el siguiente "molde" que llamaremos M

```

V4  $\leftarrow$  V2
V5  $\leftarrow$  V3
V1  $\leftarrow$  V4
A1 IF V5  $\neq$  0 GOTO A2
   GOTO A3
A2 V5  $\leftarrow$  V5 - 1
   V1  $\leftarrow$  V1 + 1
   GOTO A1
A3 SKIP

```

Como puede notarse, cuando reemplazamos en M

- cada ocurrencia de V1 por N5
- cada ocurrencia de V2 por N16
- cada ocurrencia de V3 por N3
- cada ocurrencia de V4 por N1111

- cada ocurrencia de V5 por N2222
- cada ocurrencia de A1 por L1000
- cada ocurrencia de A2 por L2000
- cada ocurrencia de A3 por L3000

obtenemos el programa que simulaba la instruccion $N5 \leftarrow N16 + N3$ dentro de \mathcal{P} . Similarmente, cuando reemplazamos en M

- cada ocurrencia de V1 por N20
- cada ocurrencia de V2 por N1
- cada ocurrencia de V3 por N14
- cada ocurrencia de V4 por N9999
- cada ocurrencia de V5 por N8888
- cada ocurrencia de A1 por L1001
- cada ocurrencia de A2 por L2002
- cada ocurrencia de A3 por L3003

obtenemos el programa que simulaba la instruccion $N20 \leftarrow N1 + N14$ dentro de \mathcal{P} . La practicidad de tener el molde M cae de maduro. Ahora en caso de necesitar una instruccion del tipo $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$ solo tenemos que reemplazar en M

- cada ocurrencia de V1 por $N\bar{k}$
- cada ocurrencia de V2 por $N\bar{n}$
- cada ocurrencia de V3 por $N\bar{m}$

y reemplazar las "variables" V4 y V5 y los "labels" A1, A2 y A3, por dos variables concretas y tres labels concretos que no se usen en el programa que estamos realizando. El programa asi obtenido simulara a la instruccion $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$.

En la gerga computacional el molde M suele llamarse *macro* y los programas obtenidos luego de realizar los reemplazos son llamados *expansiones de M*. Notese que $Ti(M) = \text{PALABRA}$ ya que, como en el caso de los programas, escribimos a M linea por linea para facilitar su manejo pero en realidad es una sola palabra, a saber:

V1←V2V4←V3A1IFV4≠0GOTOA2GOTOA3A2V4←V4-1V1←V1+1GOTOA1A3SKIP

Es decir, como objeto matematico, M es simplemente una palabra. A las palabras de la forma $V\bar{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, las llamaremos *variables numericas de macro*.

A las palabras de la forma $W\bar{n}$, con $n \in \mathbf{N}$, las llamaremos *variables alfabeticas de macro* y a las palabras de la forma $A\bar{n}$, con $n \in \mathbf{N}$, las llamaremos *labels de macro*. Nuestro macro M no tiene variables alfabeticas de macro pero otros macros por supuesto pueden tener este tipo de variables.

Las variables $V1$, $V2$ y $V3$ son llamadas *variables oficiales* de M ya que son las variables que seran reemplazadas por variables que son protagonistas dentro del programa \mathcal{P} que usara la expansion de M . Las palabras $V4$ y $V5$ son llamadas *variables auxiliares* de M ya que seran reemplazadas por variables que se usaran solo dentro de la expansion y no intervienen en la "trama" del programa \mathcal{P} . Tambien $A1$, $A2$ y $A3$ son llamados *labels auxiliares* de M ya que son usados solo para su funcionamiento interno y no tienen vinculacion con los labels del programa \mathcal{P} .

En el siguiente ejemplo veremos un macro que tiene un label que no es auxiliar sino oficial. Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Supongamos que estamos escribiendo un programa \mathcal{P}' y nos hace falta simular instrucciones de la forma

$$\text{IF } |P\bar{n}| \leq N\bar{m} \text{ GOTO } L\bar{k}$$

(por supuesto estas instrucciones no pertenecen al lenguaje \mathcal{S}^Σ pero deberia quedar claro como funcionan). Entonces podemos tomar el macro M' :

```

W2 ← W1
V2 ← V1
A4  IF W2 BEGINS @ GOTO A2
    IF W2 BEGINS ! GOTO A2
    GOTO A1
A2  IF V2 ≠ 0 GOTO A3
    GOTO A5
A3  W2 ←  $\frown$  W2
    V2 ← V2  $\dot{-}$  1
    GOTO A4
A5  SKIP

```

el cual tiene

- variables oficiales $W1$ y $V1$ (correspondientes a $P\bar{n}$ y $N\bar{m}$)
- variable auxiliares $W2$ y $V2$
- labels auxiliares $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$
- un label oficial $A1$ (correspondiente a $L\bar{k}$)

Una descripcion intuitiva del macro M' seria

$$\text{IF } |W1| \leq V1 \text{ GOTO } A1$$

Notese que en las primeras dos lineas el macro M' guarda los valores de las variables oficiales $W1$ y $V1$ en las variables auxiliares $W2$ y $V2$, y sigue trabajando

con las auxiliares. Esto es para preservar el valor de las variables oficiales. Dado que $\Sigma = \{ @, ! \}$, las dos siguientes líneas sirven para decidir si el contenido de W2 es ε o no. Dejamos al lector entender el resto del funcionamiento de M' .

Para dar un ejemplo de como usariamos a M' , supongamos que para seguir escribiendo nuestro programa \mathcal{P}' nos hace falta simular la instruccion

IF $|P5| \leq N14$ GOTO L1

y supongamos que las variables P1000 y N1000 y los labels L6666, L7777, L8888 y L9999 no se usaron hasta el momento en \mathcal{P}' . Entonces podemos reemplazar en M'

- cada ocurrencia de W1 por P5
- cada ocurrencia de V1 por N14
- cada ocurrencia de W2 por P1000
- cada ocurrencia de V2 por N1000
- cada ocurrencia de A1 por L1
- cada ocurrencia de A2 por L6666
- cada ocurrencia de A3 por L7777
- cada ocurrencia de A4 por L8888
- cada ocurrencia de A5 por L9999

y la expansion de M' asi obtenida simulara la instruccion IF $|P5| \leq N14$ GOTO L1. Cabe destacar que para asegurarnos que la simulacion funcione, tambien deberemos no usar en el resto de \mathcal{P}' las variables P1000 y N1000 y los labels L6666, L7777, L8888 y L9999.

Es decir M' funciona como un molde con el cual haciendo reemplazos adecuados podemos simular cualquier instruccion del tipo IF $|P\bar{n}| \leq N\bar{m}$ GOTO $L\bar{k}$, con $n, m, k \in \mathbf{N}$.

Deberia quedar claro el caracter oficial del label A1 en M' ya que el label por el que se lo reemplaza para hacer la expansion es uno de los labels protagonistas del programa que se esta escribiendo.

Cabe destacar que las expansiones de M' no son programas ya que si bien son concatenaciones de instrucciones, no cumplen la ley de los GOTO (llamada (G) en la definicion de programa) respecto del label que reemplazo a A1.

Nota: Siempre supondremos que la primera instruccion de los macros no es labelada. Esto es porque muchas veces cuando expandamos un macro nos interesara labelar la primera instruccion de dicha expansion. Por supuesto, esto es facil de conseguir ya que si M es un macro, entonces $SKIPM$ es tambien un macro que posee las mismas propiedades.

Ejercicio 10: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$. De explicitamente macros que simulen las instrucciones de cada uno de los siguientes formatos

- (a) $N\bar{n} \leftarrow N\bar{n} + 20$, con $n \in \mathbf{N}$
- (b) $P\bar{n} \leftarrow \#\#\$\#\$, con $n \in \mathbf{N}$$
- (c) IF $P\bar{n} \neq \varepsilon$ GOTO $L\bar{k}$, con $n, k \in \mathbf{N}$
- (d) $N\bar{n} \leftarrow |P\bar{m}|$, con $n, m \in \mathbf{N}$
- (e) IF $P\bar{n} = P\bar{m}$ GOTO $L\bar{k}$, con $n, m, k \in \mathbf{N}$

Como hemos visto recién hay dos tipos de macros:

- los de asignacion que cuando son expandidos nos dan un programa que simula la asignacion a una variable dada del resultado de aplicar una funcion a los contenidos de ciertas otras variables; y
- los de tipo IF que cuando son expandidos nos dan un programa salvo por la ley (G), el cual direcciona al label que fue a reemplazar a A1 cuando se cumple cierta propiedad (predicado) relativa a los contenidos de las variables que fueron a reemplazar a las variables oficiales.

Ejemplo concreto de uso de macros Ya vimos recién que la palabra

```

V4 ← V2
V5 ← V3
V1 ← V4
A1  IF V5 ≠ 0 GOTO A2
    GOTO A3
A2  V5 ← V5 - 1
    V1 ← V1 + 1
    GOTO A1
A3  SKIP

```

es un macro que sirve para simular instrucciones de la forma $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$. Notemos que este macro es de asignacion ya que cuando es expandido nos da un programa que simula la asignacion a una variable dada del resultado de aplicar una funcion a los contenidos de ciertas otras variables. En este caso la funcion es $SUMA = \lambda xy[x+y]$ por lo cual usaremos $[V1 \leftarrow SUMA(V2, V3)]$ para denotar a dicho macro. Usaremos este macro para dar un programa \mathcal{P} que compute a la funcion $\lambda xy[x.y]$. Notese que podemos tomar \mathcal{P} igual al siguiente programa

```

L1  IF N2 ≠ 0 GOTO L2
    GOTO L3
L2  [N3 ← SUMA(N3, N1)]
    N2 ← N2 - 1
    GOTO L1
L3  N1 ← N3

```

donde $[N3 \leftarrow SUMA(N3, N1)]$ es una expansion del macro $[V1 \leftarrow SUMA(V2, V3)]$ hecha haciendo el reemplazo de las variables oficiales V1, V2 y V3 por N3, N3 y N1, respectivamente, y haciendo reemplazos adecuados de sus variables y labels auxiliares. Hay muchas formas de hacer los reemplazos de variables y labels auxiliares pero en general no lo especificaremos explicitamente cuando expandamos un macro ya que es facil imaginar como hacerlo en funcion del programa que estemos realizando. Por ejemplo en el caso de \mathcal{P} podriamos hacer los siguientes reemplazos:

- cada ocurrencia de V4 por N1111
- cada ocurrencia de V5 por N2222
- cada ocurrencia de A1 por L1000
- cada ocurrencia de A2 por L2000
- cada ocurrencia de A3 por L3000

y claramente esto no afectara la "logica" o "idea" de nuestro programa \mathcal{P} . De esta forma la expansion $[N3 \leftarrow SUMA(N3, N1)]$ es el siguiente programa:

```

N1111  $\leftarrow$  N3
N2222  $\leftarrow$  N1
N3  $\leftarrow$  N1111
L1000 IF N2222  $\neq$  0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000 N2222  $\leftarrow$  N2222-1
      N3  $\leftarrow$  N3 + 1
      GOTO L1000
L3000 SKIP

```

el cual por supuesto esta escrito con espacios y en forma vertical pero es una mera palabra. Tenemos entonces que \mathcal{P} es el programa:

```

L1     IF N2  $\neq$  0 GOTO L2
      GOTO L3
L2     N1111  $\leftarrow$  N1
      N2222  $\leftarrow$  N3
      N3  $\leftarrow$  N1111
L1000 IF N2222  $\neq$  0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000 N2222  $\leftarrow$  N2222-1
      N3  $\leftarrow$  N3 + 1
      GOTO L1000
L3000 SKIP
      N2  $\leftarrow$  N2-1
      GOTO L1
L3     N1  $\leftarrow$  N3

```

el cual por supuesto esta escrito con espacios y en forma vertical pero es una mera palabra.

Macros asociados a funciones Σ -computables

Dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, usaremos

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

para denotar un macro M el cual cumpla las siguientes propiedades. Cabe destacar que no siempre existira dicho macro, es decir solo para ciertas funciones $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ habra un tal macro.

- (1) Las variables oficiales de M son $V1, \dots, V\bar{n}, \overline{Vn+1}, W1, \dots, W\bar{m}$
- (2) M no tiene labels oficiales
- (3) Si reemplazamos:
 - (a) las variables oficiales de M (i.e. $V1, \dots, V\bar{n}, \overline{Vn+1}, W1, \dots, W\bar{m}$) por variables concretas

$$\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Nk_{n+1}}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$$

(elegidas libremente, es decir los numeros $k_1, \dots, k_{n+1}, j_1, \dots, j_m$ son cualesquiera)

- (b) las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y NO pertenecientes a la lista $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Nk_{n+1}}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$
- (c) los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos)

Entonces la palabra asi obtenida es un programa de \mathcal{S}^Σ que denotaremos con

$$[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

- Si hacemos correr $[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$ partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ valores $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, entonces independientemente de los valores que les asigne e al resto de las variables (incluidas las que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M) se dara que
 - i. si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \notin D_f$, entonces $[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$ no se detiene
 - ii. si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in D_f$, entonces $[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$ se detiene (i.e. intenta realizar la siguiente a su ultima instruccion) y llega a un estado e' el cual cumple:
 - A. e' le asigna a $\overline{Nk_{n+1}}$ el valor $f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$

B. e' solo puede diferir de e en los valores que le asigna a $\overline{Nk_{n+1}}$ o a las variables que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, incluidas $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ no las modifica (salvo en el caso de que alguna $\overline{Nk_i}$ sea la variable $\overline{Nk_{n+1}}$, situacion en la cual el valor final de la variable $\overline{Nk_i}$ sera $f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$)

El programa $[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$ es comunmente llamado la expansion del macro $[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$ con respecto a la eleccion de variables y labels realizada.

Tambien, dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$, con

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

denotaremos un macro el cual cumpla condiciones analogas a las descriptas recien. Dejamos al lector escribirlas en detalle para este caso.

Aceptaremos sin demostracion el siguiente resultado fundamental.

Proposition 52 *Sea Σ un alfabeto finito.*

(a) *Sea $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ una funcion Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro*

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

(b) *Sea $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro*

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

Ejercicio 11: Sea $SUMA = \lambda xy[x + y]$. Explique por que la palabra

```

V1 ← V2
V4 ← V3
A1  IF V4 ≠ 0 GOTO A2
    GOTO A3
A2  V4 ← V4 - 1
    V1 ← V1 + 1
    GOTO A1
A3  SKIP

```

no puede ser tomada como el macro $[\overline{V3} \leftarrow SUMA(V1, V2)]$

Ejercicio 12: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $f : D_f \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ una funcion Σ -computable. Sea $L = \{\alpha \in D_f : f(\alpha) = 1\}$. De (usando el macro $[\overline{V1} \leftarrow f(W1)]$) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}) = L$.

Ejercicio 13: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $f : \omega \rightarrow \Sigma^*$ una función Σ -computable. De (usando el macro $[W1 \leftarrow f(V1)]$) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}) = \text{Im } f$.

Ejercicio 14: Pruebe la recíproca de la proposición anterior, es decir pruebe que si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es tal que en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

entonces f es Σ -computable.

Macros asociados a predicados Σ -computables

Dado un predicado $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, usaremos

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

para denotar un macro M el cual cumpla las siguientes propiedades. Cabe destacar que no siempre existirá dicho macro, es decir solo para ciertos predicados $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ habrá un tal macro.

- (1) Las variables oficiales de M son $V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}$
- (2) $A1$ es el único label oficial de M
- (3) Si reemplazamos:
 - (a) las variables oficiales de M (i.e. $V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}$) por variables concretas
$$\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$$
(elejidas libremente, es decir los números $k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_m$ son cualesquiera)
 - (b) el label oficial $A1$ por el label concreto \overline{Lk} (elejido libremente, es decir k es cualquier elemento de \mathbf{N})
 - (c) las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y NO pertenecientes a la lista $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$
 - (d) los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos) y ninguno igual a \overline{Lk}

Entonces la palabra así obtenida es un programa de \mathcal{S}^Σ , salvo por la ley de los GOTO respecto de \overline{Lk} , que denotaremos con

$$[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

- Si hacemos correr $[IF P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ valores $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, entonces independientemente de los valores que le asigne e al resto de las variables (incluidas las que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M) se dara que
 - i. si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \notin D_P$, entonces $[IF P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ no se detiene
 - ii. si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in D_P$ y $P(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1$, entonces luego de una cantidad finita de pasos, $[IF P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ direcciona al label \overline{Lk} quedando en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, incluidas $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ no las modifica
 - iii. si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in D_P$ y $P(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$, entonces luego de una cantidad finita de pasos, $[IF P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ se detiene (i.e. intenta realizar la siguiente a su ultima instruccion) quedando en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, incluidas $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ no las modifica

La palabra $[IF P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ es llamada la expansion del macro con respecto a la eleccion de variables y labels realizada

Proposition 53 Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[IF P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

Proof. Por (a) de la proposicion anterior tenemos un macro $[\overline{Vn+1} \leftarrow P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$. Notese que la palabra

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})] IF \overline{Vn+1} \neq 0 \text{ GOTO } A1$$

es el macro buscado. ■

Ejercicio 15: Pruebe la resiproca de la proposicion anterior, es decir pruebe que si $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es tal que en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[IF P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

entonces P es Σ -computable.

Ejercicio 16: Sea Σ un alfabeto finito. Pruebe usando macros (de tipo IF) que si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -computables, entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

Conjuntos Σ -enumerables

Ya que la noción de función Σ -computable es el modelo matemático Neumanniano o imperativo del concepto de función Σ -efectivamente computable, nos podríamos preguntar entonces cuál es el modelo matemático Neumanniano del concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable. Si prestamos atención a la definición de conjunto Σ -efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ -efectivamente computables por lo cual la siguiente definición cae de maduro:

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado Σ -enumerable cuando sea vacío o haya una función $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -computable, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.

Debería entonces quedar claro que si el concepto de función Σ -computable modeliza correctamente al concepto de función Σ -efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ -enumerable recién definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable.

Notese que según la definición que acabamos de escribir, un conjunto no vacío $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -enumerable si y solo si hay programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ tales que

- $Dom(\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}) = \dots = Dom(\Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#}) = \omega$
- $Dom(\Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*}) = \dots = Dom(\Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}) = \omega$
- $S = Im[\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}, \dots, \Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*}, \dots, \Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}]$

Como puede notarse los programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ puestos en paralelo a funcionar desde el estado $\|x\|$ producen en forma natural un procedimiento efectivo (con dato de entrada $x \in \omega$) que enumera a S . Por supuesto podemos decir que en tal caso los programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ enumeran a S . La siguiente proposición muestra que también las cosas se pueden hacer con un solo programa

Proposition 54 Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

- (1) S es Σ -enumerable
- (2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:
 - (a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$, donde $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$.
 - (b) Para cada $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$

Proof. (1) \Rightarrow (2). Ya que S es no vacio, por definicion tenemos que hay una $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ -computable, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$. Por la Proposicion 52 tenemos que existen macros:

$$\begin{aligned} &[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \\ &\quad \vdots \\ &[V2 \leftarrow F_{(n)}(V1)] \\ &[W1 \leftarrow F_{(n+1)}(V1)] \\ &\quad \vdots \\ &[W1 \leftarrow F_{(n+m)}(V1)] \end{aligned}$$

Sea \mathcal{P} el siguiente programa:

$$\begin{aligned} &[P\bar{m} \leftarrow F_{(n+m)}(N1)] \\ &\quad \vdots \\ &[P1 \leftarrow F_{(n+1)}(N1)] \\ &[N\bar{n} \leftarrow F_{(n)}(N1)] \\ &\quad \vdots \\ &[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)] \end{aligned}$$

donde se supone que las expansiones de los macros usados son hechas usando variables auxiliares no pertenecientes a la lista $N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}$ (por supuesto, dada la fortaleza de nuestros macros se puede usar una misma variable auxiliar para dos distintas expansiones), y tambien se supone que los labels auxiliares usados en dichas expansiones son todos distintos, es decir no usamos el mismo label auxiliar en dos expansiones distintas (por que?).

Dejamos al lector corroborar que el programa \mathcal{P} cumple las propiedades a y b

(2) \Rightarrow (1). Supongamos $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ cumple a y b de (2). Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N1 \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N2 \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{P}_n &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N\bar{n} \\ \mathcal{P}_{n+1} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P1 \\ \mathcal{P}_{n+2} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P2 \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{P}_{n+m} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P\bar{m} \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
F_1 &= \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#} \\
F_2 &= \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#} \\
&\vdots \\
F_n &= \Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#} \\
F_{n+1} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*} \\
F_{n+2} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+2}}^{1,0,*} \\
&\vdots \\
F_{n+m} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}
\end{aligned}$$

Notese que cada F_i es Σ -computable y tiene dominio igual a ω . Sea $F = [F_1, \dots, F_{n+m}]$. Tenemos por definicion que $D_F = \omega$ y ya que $F_{(i)} = F_i$, para cada $i = 1, \dots, n+m$ tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ -computable. Dejamos al lector verificar que $I_F = S$ ■

Cuando un programa \mathcal{P} cumpla las propiedades dadas en (2) de la proposicion anterior respecto de un conjunto S , diremos que \mathcal{P} *enumera* a S .

Cabe destacar que (2) \Rightarrow (1) de la proposicion anterior es muy util a la hora de probar que un conjunto dado es Σ -enumerable ya que nos permite trabajar dentro de un solo programa.

Ejercicio 17: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros ni la proposicion anterior que $S = \{(2, \% \%), (3, !!!), (0, \epsilon)\}$ es Σ -enumerable

Ejercicio 18: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros ni la proposicion anterior que $S = \{(i, 5, \%^i) : i \in \omega\}$ es Σ -enumerable

Ejercicio 19: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un conjunto no vacio y Σ -enumerable. De (usando macros) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}$ enumera al conjunto

$$\{\alpha \%! : \alpha \in L\}$$

es decir $\text{Dom} \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*} = \omega$ y $\text{Im} \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*} = \{\alpha \%! : \alpha \in L\}$

Ejercicio 20: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Sea

$$S = \{(x, x+1, x+2, \% \% !!) : x \in \omega\}$$

De sin usar macros un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ el cual enumere a S (i.e. que cumpla (2) de la proposicion anterior).

Conjuntos Σ -computables

La version imperativa o Neumanniana del concepto de conjunto Σ -efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -computable cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -computable. O sea que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -computable sii hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, es decir:

- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, entonces \mathcal{P} se detiene partiendo desde $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$ y la variable N1 queda con contenido igual a 1
- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$, entonces \mathcal{P} se detiene partiendo desde $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$ y la variable N1 queda con contenido igual a 0

Si \mathcal{P} es un programa el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, diremos que \mathcal{P} decide la pertenencia a S , con respecto al conjunto $\omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Ejercicio 21: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros que $S = \{(2, \% \%), (3, !)\}$ es Σ -computable

Ejercicio 22: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros que $S = \{(i, \%^i) : i \in \omega\}$ es Σ -computable

Ejercicio 23: Sea Σ un alfabeto finito. Pruebe usando macros que

- (a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -computables, entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.
- (b) Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -computables, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -computables

Macros asociados a conjuntos Σ -computables La Proposicion 53 nos dice que si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es un conjunto Σ -computable, entonces, ya que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -computable, hay un macro

$$\left[\text{IF } \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1 \right]$$

Escribiremos el nombre de este macro de la siguiente manera mas intuitiva:

$$[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO } A1]$$

Notese que las expansiones de este macro, dado que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -total, ya sea terminan por la ultima instruccion de la expansion o direccionan a la primera instruccion que tenga label igual al label que reemplazo a A1 en la expansion. Es importante notar que para asegurar la existencia de este macro utilizamos que S es Σ -computable lo cual no siempre sucedera para un conjunto S . Por ejemplo, puede pasar que S sea el dominio de una funcion Σ -computable pero

que S no sea Σ -computable (esto se vera mas adelante) y en tal caso no existira un macro

$$[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO A1}]$$

ya que si tal macro existiera seria facil hacer un programa que compute a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo cual nos diria que S es Σ -computable (ver el ejercicio posterior a la Proposicion 53). Es muy comun el error de suponer que existe un macro $[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO A1}]$ cuando S es el dominio de una funcion Σ -computable.

8 Guia 8

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Batallas entre paradigmas

En esta guia compararemos los tres paradigmas de computabilidad efectiva que hemos desarrollado anteriormente. Para esto probaremos que cada uno de dichos paradigmas "vence" al otro en el sentido que incluye por lo menos todas las funciones que incluye el otro en su modelizacion del concepto de funcion Σ -efectivamente computable. Por supuesto, esto dice que los tres son equivalentes.

Neumann vence a Godel

Usando macros podemos ahora probar que el paradigma imperativo de Neumann es por lo menos tan abarcativo como el funcional de Godel. Mas concretamente:

Theorem 55 *Si h es Σ -recursiva, entonces h es Σ -computable.*

Proof. Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h \in R_k^\Sigma$, entonces h es Σ -computable.

El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (*) vale para k , veremos que vale para $k + 1$. Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, un predicado perteneciente a R_k^Σ . Por hipotesis inductiva, P es Σ -computable y por lo tanto tenemos un macro

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\overline{n+1}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO A1}]$$

lo cual nos permite realizar el siguiente programa

```

L2  [IF  $\overline{P(N\bar{n} + 1, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})}$  GOTO L1]
     $\overline{N\bar{n} + 1} \leftarrow \overline{N\bar{n} + 1} + 1$ 
    GOTO L2
L1   $N1 \leftarrow \overline{N\bar{n} + 1}$ 

```

Es facil chequear que este programa computa h .

Caso 2. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$$

$$\mathcal{G}_a : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, a \in \Sigma$$

elementos de R_k^Σ . Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones $f, \mathcal{G}_a, a \in \Sigma$, son Σ -computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

```

 $\overline{Lr + 1}$   [ $\overline{Pm + 3} \leftarrow f(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})$ ]
          IF  $\overline{Pm + 1}$  BEGINS  $a_1$  GOTO L1
           $\vdots$ 
          IF  $\overline{Pm + 1}$  BEGINS  $a_r$  GOTO  $\overline{Lr}$ 
          GOTO  $\overline{Lr + 2}$ 
L1   $\overline{Pm + 1} \leftarrow \neg \overline{Pm + 1}$ 
    [ $\overline{Pm + 3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm + 2}, \overline{Pm + 3})$ ]
     $\overline{Pm + 2} \leftarrow \overline{Pm + 2}.a_1$ 
    GOTO  $\overline{Lr + 1}$ 
     $\vdots$ 
 $\overline{Lr}$    $\overline{Pm + 1} \leftarrow \neg \overline{Pm + 1}$ 
    [ $\overline{Pm + 3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{Pm + 2}, \overline{Pm + 3})$ ]
     $\overline{Pm + 2} \leftarrow \overline{Pm + 2}.a_r$ 
    GOTO  $\overline{Lr + 1}$ 
 $\overline{Lr + 2}$    $P1 \leftarrow \overline{Pm + 3}$ 

```

Es facil chequear que este programa computa h .

El resto de los casos son dejados al lector. ■

Corollary 56 S_i

$$f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

$$g : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$$

$$P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$$

son Σ -recursivas, entonces hay macros

```

 $\overline{[Vn + 1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$ 
 $\overline{[Wm + 1} \leftarrow g(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$ 
 $\overline{[IF P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) GOTO A1]}$ 

```

Ejercicio 1: Pruebe el corolario anterior.

Se lleno de macros

Cabe destacar que el corolario anterior nos dice que hay macros

$$\begin{aligned} &[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})] \\ &[\overline{Wm+1} \leftarrow g(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})] \\ &[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1] \end{aligned}$$

para todas las funciones Σ -mixtas y predicados Σ -mixtos que hemos trabajado hasta el momento en la materia ya que todas eran Σ -p.r.. Esto transforma al lenguaje \mathcal{S}^Σ en un potente y relativamente comodo lenguaje de programacion ya que ahora tenemos macros para todas las funciones y predicados cotidianos en la matematica. Por ejemplo a continuacion usaremos la existencia de los macros $[\text{IF } V1 \text{ es par GOTO } A1]$ y $[V2 \leftarrow \lfloor V1/2 \rfloor]$ para probar el siguiente resultado cuya prueba esta inspirada en su analogo del paradigma de computabilidad efectiva.

Lemma 57 *Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -enumerables. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ -enumerable.*

Proof. Podemos suponer que ni S_1 ni S_2 son vacios ya que de lo contrario los resultados son triviales. Ademas supondremos que $n = 2$ y $m = 1$.

La idea de la prueba es la misma que la que usamos para probar que la union de conjuntos Σ -efectivamente enumerables es Σ -efectivamente enumerable. Daremos usando macros un programa que enumera a $S_1 \cup S_2$ y luego aplicaremos la proposicion del final de la Guia 7. Por hipotesis hay funciones $F : \omega \rightarrow \omega \times \omega \times \Sigma^*$ y $G : \omega \rightarrow \omega \times \omega \times \Sigma^*$ tales que $F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}, G_{(1)}, G_{(2)}$ y $G_{(3)}$ son Σ -computables, $\text{Im}(F) = S_1$ y $\text{Im}(G) = S_2$. O sea que hay macros

$$\begin{aligned} &[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \\ &[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)] \\ &[W1 \leftarrow F_{(3)}(V1)] \\ &[V2 \leftarrow G_{(1)}(V1)] \\ &[V2 \leftarrow G_{(2)}(V1)] \\ &[W1 \leftarrow G_{(3)}(V1)] \end{aligned}$$

Ya que el predicado $Par = \lambda x[x \text{ es par}]$ es Σ -p.r., el Corolario 56 nos dice que hay un macro:

$$[\text{IF } Par(V1) \text{ GOTO } A1]$$

el cual escribiremos de la siguiente manera mas intuitiva

[IF V1 es par GOTO A1]

Ya que la funcion $D = \lambda x[[x/2]]$ es Σ -p.r., el Corolario 56 nos dice que hay un macro:

[V2 \leftarrow D(V1)]

el cual escribiremos de la siguiente manera mas intuitiva

[V2 \leftarrow [V1/2]]

Sea \mathcal{P} el siguiente programa:

```

[IF N1 es par GOTO L1
N1  $\leftarrow$  N1-1
[N1111  $\leftarrow$  [N1/2]]
[N1  $\leftarrow$   $G_{(1)}$ (N1111)]
[N2  $\leftarrow$   $G_{(2)}$ (N1111)]
[P1  $\leftarrow$   $G_{(3)}$ (N1111)]
GOTO L2
L1 [N1111  $\leftarrow$  [N1/2]]
[N1  $\leftarrow$   $F_{(1)}$ (N1111)]
[N2  $\leftarrow$   $F_{(2)}$ (N1111)]
[P1  $\leftarrow$   $F_{(3)}$ (N1111)]
L2 SKIP
```

Es facil ver que \mathcal{P} cumple a y b de (2) de la proposicion del final de la Guia 7 por lo cual $S_1 \cup S_2$ es Σ -enumerable. ■

Tal como se vio en este ejemplo, el Corolario 56 junto con nuestra gran coleccion de funciones ya probadamente Σ -recursivas, nos permite simular con programas muchos de los procedimientos efectivos realizados anteriormente. A continuacion algunos ejercicios para afianzar mas esta idea.

Ejercicio 2: Pruebe que $\omega \times \omega \times \Sigma^*$ es Σ -enumerable (Hint: usando macros (asociados a las "bajadas" y a $*$) haga un programa que enumere a $\omega \times \omega \times \Sigma^*$, es decir que cumpla a y b de (2) de la proposicion del final de la Guia 7)

Ejercicio 3: Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -enumerables. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -enumerable. (Hacer el caso $n = 2, m = 1$ e inspirese en el paradigma efectivo)

En la Guia 3 probamos que si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente computable entonces S es Σ -efectivamente enumerable. Via el uso de macros adecuados podemos copiar la idea de la prueba de dicho resultado para probar el siguiente

Lemma 58 Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Si S es Σ -computable, entonces S es Σ -enumerable

Ejercicio 4: Pruebe el lema anterior (haga el caso $n = 2, m = 1$)

Ejercicio 5: Si $S \subseteq \Sigma^*$ es Σ -enumerable, entonces

$$T = \{\alpha \in \Sigma^* : \text{existe } \beta \in S \text{ tal que } \alpha \text{ es subpalabra de } \beta\}$$

también es Σ -enumerable.

Mas capacidad de simulacion obtendremos luego de ver que Godel vence a Neumann ya que la equivalencia de estos dos paradigmas nos asegura la existencia de macros que permitiran dentro de un programa hablar acerca del funcionamiento de otro programa. Esto sera clave a la hora de simular con programas a procedimientos efectivos que en su funcionamiento involucran el funcionamiento de otros procedimientos.

Godel vence a Neumann

Primero definiremos tres funciones las cuales contienen toda la informacion acerca del funcionamiento del lenguaje \mathcal{S}^Σ . Sean $n, m \in \omega$, fijos. Definamos

$$\begin{aligned} i^{n,m} &: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^\Sigma \rightarrow \omega \\ E_{\#}^{n,m} &: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^\Sigma \rightarrow \omega^{[\mathbb{N}]} \\ E_*^{n,m} &: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^\Sigma \rightarrow \Sigma^{*[\mathbb{N}]} \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (i^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_*^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) &= (1, (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots)) \\ (i^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_*^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) &= \\ S_{\mathcal{P}}(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_*^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) &= \end{aligned}$$

Notese que

$$(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_*^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}))$$

es la descripcion instantanea que se obtiene luego de correr \mathcal{P} una cantidad t de pasos partiendo del estado

$$((x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots))$$

Es importante notar que si bien $i^{n,m}$ es una funcion $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixta, ni $E_{\#}^{n,m}$ ni $E_{*}^{n,m}$ lo son.

Definamos para cada $j \in \mathbf{N}$, funciones

$$\begin{aligned} E_{\#j}^{n,m} &: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \omega \\ E_{*j}^{n,m} &: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E_{\#j}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= j\text{-esima coordenada de } E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \\ E_{*j}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= j\text{-esima coordenada de } E_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

(es claro que estas funciones son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixtas). Notese que

$$\begin{aligned} E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= (E_{\#1}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#2}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), \dots) \\ E_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= (E_{*1}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{*2}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), \dots) \end{aligned}$$

Aceptaremos sin prueba la siguiente proposicion.

Proposition 59 Sean $n, m \geq 0$. Las funciones $i^{n,m}$, $E_{\#j}^{n,m}$, $E_{*j}^{n,m}$, $j = 1, 2, \dots$, son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

Las funciones $Halt^{n,m}$ y $T^{n,m}$ Dados $n, m \in \omega$, definamos:

$$Halt^{n,m} = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1]$$

Notese que $D_{Halt^{n,m}} = \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma}$ (ojo que aqui la notacion lambda es respecto del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$). Ademas notese que usamos la variable \mathcal{P} en la notacion lambda por un tema de comodidad psicologica dado que $i^{n,m}$ esta definida solo cuando la ultima coordenada es un programa pero podriamos haber escrito $\lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \alpha [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = n(\alpha) + 1]$ y sigue siendo la misma funcion.

Cabe destacar que $Halt^{n,m}$ tiene una descripcion muy intuitiva, ya que dado $(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma}$, tenemos que $Halt^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = 1$ si y solo si el programa \mathcal{P} se detiene luego de t pasos partiendo desde el estado $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$.

Aceptaremos sin demostracion el siguiente lema (ver el apunte por una prueba).

Lemma 60 (a) Pro^{Σ} es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

(b) $\lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i \mathcal{P} [I_i^{\mathcal{P}}]$ son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Ejercicio 5,5: De una funcion $f : \omega \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \text{Pro}^{\Sigma}$ la cual sea $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. y cumpla que

- (a) $D_{\Psi_{f(x,\mathcal{P})}^{0,1,\#}} = D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}}$, para cada $x \in \omega$ y $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$
- (b) $\Psi_{f(x,\mathcal{P})}^{0,1,\#}(\alpha) = \Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}(\alpha) + x$, para cada $x \in \omega$, $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ y $\alpha \in D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}}$
- Pruebe que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

Ahora podemos probar el siguiente importante resultado.

Lemma 61 $\text{Halt}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

Proof. Notar que $\text{Halt}^{n,m} = \lambda xy[x = y] \circ [i^{n,m}, \lambda \mathcal{P}[n(\mathcal{P}) + 1] \circ p_{1+n+m+1}^{1+n,m+1}]$. ■

Ahora definamos $T^{n,m} = M(\text{Halt}^{n,m})$. Notese que

$$D_{T^{n,m}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ se detiene partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$$

y para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{T^{n,m}}$ tenemos que $T^{n,m}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) =$ cantidad de pasos necesarios para que \mathcal{P} se detenga partiendo de $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$. En algun sentido, la funcion $T^{n,m}$ mide el "tiempo" que tarda en detenerse \mathcal{P} y de ahi su nombre

Proposition 62 $T^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva

Proof. Es directo del lema de minimizacion ya que $\text{Halt}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. ■

Ahora nos sera facil probar que el paradigma de Godel es por lo menos tan abarcativo como el imperativo de Von Neumann. Mas concretamente:

Theorem 63 Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -computable, entonces f es Σ -recursiva.

Proof. Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Sea \mathcal{P}_0 un programa que compute a f . Primero veremos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Note que

$$f = E_{*1}^{n,m} \circ [T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}], p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}]$$

donde cabe destacar que $p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Esto nos dice que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. O sea que el Teorema de Independencia del Alfabeto nos dice que f es Σ -recursiva. ■

Aceptaremos sin prueba la siguiente proposicion.

Proposition 64 La funcion $T^{n,m}$ no es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

Corollary 65 La minimizacion de un predicado Σ -p.r. no necesariamente es Σ -p.r.

Proof. Por definicion $T^{n,m} = M(\text{Halt}^{n,m})$. ■

Uso de macros asociados a las funciones $Halt^{n,m}$, $E_{\#}^{n,m}$ y $E_{*}^{n,m}$

Aqui veremos, con ejemplos, como ciertos macros nos permitiran dentro de un programa hablar acerca del funcionamiento de otro programa. Esto junto con el hecho que cada funcion Σ -recursiva y cada predicado Σ -recursivo tienen su macro asociado (Corolario 56), sera muy util a la hora del diseño de programas y nos permitira simular dentro del paradigma imperativo muchas ideas usadas para el diseño de procedimientos efectivos. En este sentido la conbinacion de los dos paradigmas (recursivo e imperativo) nos permite fortalecer notablemente al paradigma imperativo en su roll modelizador (o simulador) de los procedimientos efectivos. Esto es importante ya que el paradigma mas comodo, amplio e intuitivo, a la hora de decidir si algo es o no computable, es sin duda el filosofico o efectivo.

Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$ y sea $\mathcal{P}_0 \in \text{Pro}^{\Sigma}$ tal que $0 \in \text{Dom} \Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,0,\#}$ y $\Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,0,\#}(0) = 2$. Probaremos que

$$S = \{ x \in \text{Dom} \Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,0,\#} : \Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,0,\#}(x) \neq 0 \}$$

es Σ -enumerable. Notese que $0 \in S$. Por definicion de conjunto Σ -enumerable, deberemos encontrar un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ tal que $\text{Dom} \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#} = \omega$ y $\text{Im} \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#} = S$. Dicho en palabras, el programa \mathcal{P} debera cumplir:

- siempre que lo corramos desde un estado de la forma $\|x\|$, con $x \in \omega$, debe detenerse y el contenido de la variable N1 bajo detencion debera ser un elemento de S
- para cada $s \in S$ debera haber un $x \in \omega$ tal que s es el valor de la variable N1 bajo detencion cuando corremos \mathcal{P} desde $\|x\|$

A continuacion daremos una descripcion intuitiva del funcionamiento de \mathcal{P} (pseudocodigo) para luego escribirlo correctamente usando macros. El programa \mathcal{P} comenzara del estado $\|x\|$ y hara las siguientes tareas

Etapas 1: si $x = 0$ ir a Etapa 6, en caso contrario ir a Etapa 2.

Etapas 2: calcular $(x)_1$ y $(x)_2$ e ir a Etapa 3.

Etapas 3: si \mathcal{P}_0 termina desde $\|(x)_1\|$ en $(x)_2$ pasos ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 6

Etapas 4: si el valor que queda en N1 luego de correr \mathcal{P}_0 una cantidad $(x)_2$ de pasos, partiendo de $\|(x)_1\|$, es distinto de 0, entonces ir a Etapa 5. En caso contrario ir a Etapa 6.

Etapas 5: asignar a N1 el valor $(x)_1$ y terminar

Etapas 6: asignar a N1 el valor 0 y terminar

Notese que la descripcion anterior no es ni mas ni menos que un procedimiento efectivo que enumera a S , y nuestra mision es simularlo dentro del lenguaje \mathcal{S}^Σ . Para esto usaremos varios macros. Ya que la funcion $f = \lambda x[(x)_1]$ es Σ -p.r., el Corolario 56 nos dice que hay un macro:

$$[V2 \leftarrow f(V1)]$$

el cual escribiremos de la siguiente manera mas intuitiva:

$$[V2 \leftarrow (V1)_1]$$

Similarmente hay un macro:

$$[V2 \leftarrow (V1)_2]$$

Tambien, ya que el predicado $P = \lambda x[x = 0]$ es Σ -recursivo, hay un macro:

$$[IF\ P(V1)\ GOTO\ A1]$$

el cual escribiremos de la siguiente manera:

$$[IF\ V1 = 0\ GOTO\ A1]$$

Definamos

$$H = \lambda tx [Halt^{1,0}(t, x, \mathcal{P}_0)]$$

Notar que $D_H = \omega^2$ y que H es Σ -mixta. Ademas sabemos que la funcion $Halt^{1,0}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. por lo cual resulta facilmente que H es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Por la Proposicion de Independencia del Alfabeto tenemos que H es Σ -p.r.. O sea que el Corolario 56 nos dice que hay un macro:

$$[IF\ H(V1, V2)\ GOTO\ A1]$$

Para hacer mas intuitivo el uso de este macro lo escribiremos de la siguiente manera

$$[IF\ Halt^{1,0}(V1, V2, \mathcal{P}_0)\ GOTO\ A1]$$

Sea

$$g = \lambda tx [E_{\#1}^{1,0}(t, x, \mathcal{P}_0)]$$

Ya que g es Σ -recursiva (por que?), hay un macro:

$$[V3 \leftarrow g(V1, V2)]$$

Para hacer mas intuitivo el uso de este macro lo escribiremos de la siguiente manera

$$[V3 \leftarrow E_{\#1}^{1,0}(V1, V2, \mathcal{P}_0)]$$

Ahora si podemos dar nuestro programa \mathcal{P} que enumera a S :

```

IF N1 ≠ 0 GOTO L1
GOTO L2
L1  [N3 ← (N1)1]
    [N4 ← (N1)2]
    [IF Halt1,0(N4, N3,  $\mathcal{P}_0$ ) GOTO L3]
    GOTO L2
L3  [N5 ← E#11,0(N4, N3,  $\mathcal{P}_0$ )]
    [IF N5 = 0 GOTO L2]
    N1 ← N3
    GOTO L4
L2  N1 ← 0
L4  SKIP

```

Ejercicio 6: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $f : D_f \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ una función Σ -computable tal que $f(\varepsilon) = 1$. Sea $L = \{\alpha \in D_f : f(\alpha) = 1\}$. De un programa $\mathcal{Q} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{1,0,*}) = L$ (explicado en video en granlogico.com).

Ejercicio 7: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $\mathcal{P}_0 \in \text{Pro}^\Sigma$. Pruebe que

$$S = \{(x, \alpha) : \Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,0,\#}(x) = \Psi_{\mathcal{P}_0}^{0,1,\#}(\alpha)\}$$

es Σ -enumerable.

Ejercicio 8: Si $S \subseteq \omega$ y $f : S \rightarrow \omega$ es Σ -computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x \text{ es par } x/2 \in S \text{ y } f(x) = f(x/2)\}$$

es Σ -enumerable

Ejercicio 9: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $\mathcal{P}_0 \in \text{Pro}^\Sigma$. Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : \mathcal{P}_0 \text{ termina partiendo de } \|x, \alpha, \beta\|\}$ es Σ -enumerable.

Ejercicio 10: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$ y sea $\mathcal{P}_0 \in \text{Pro}^\Sigma$. Sea

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* : (\exists x \in \mathbf{N}) \Psi_{\mathcal{P}_0}^{1,1,\#}(x^2, \alpha) = \Psi_{\mathcal{P}_0}^{0,2,\#}(\alpha, \alpha)\}$$

De un programa \mathcal{P} tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = L$.

Enumeracion de conjuntos de programas Ya que los programas de \mathcal{S}^Σ son palabras del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, nos podemos preguntar cuando un conjunto L de programas es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -enumerable. Daremos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$ y sea

$$L = \{ \mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#}(10) = 10 \}$$

Veremos que L es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -enumerable, dando un programa $\mathcal{Q} \in \text{Pro}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ que enumere a L , es decir tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{1,0,*}) = L$. Cabe destacar que aqui hay en juego dos versiones de nuestro lenguaje imperativo, es decir enumeraremos un conjunto de programas de \mathcal{S}^Σ usando un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$. Sea \leq un orden total sobre el conjunto $\Sigma \cup \Sigma_p$.

A continuacion daremos una descripcion intuitiva del funcionamiento de \mathcal{Q} (pseudocodigo) para luego escribirlo correctamente usando macros. Notese que $\text{SKIP} \in L$. El programa \mathcal{Q} comenzara del estado $\|x\|$ y hara las siguientes tareas

Eta 1: si $x = 0$ ir a Eta 6, en caso contrario ir a Eta 2.

Eta 2: calcular $(x)_1$, $(x)_2$ y $*^\leq((x)_1)$ e ir a Eta 3.

Eta 3: si $*^\leq((x)_1) \in \text{Pro}^\Sigma$ y termina partiendo desde $\|10\|$ en $(x)_2$ pasos ir a Eta 4, en caso contrario ir a Eta 6

Eta 4: si el valor que queda en N1 luego de correr $*^\leq((x)_1)$ una cantidad $(x)_2$ de pasos, partiendo de $\|10\|$ es igual a 10, entonces ir a Eta 5. En caso contrario ir a Eta 6.

Eta 5: asignar a P1 la palabra $*^\leq((x)_1)$ y terminar

Eta 6: asignar a P1 la palabra SKIP y terminar

Notese que la descripcion anterior no es ni mas ni menos que un procedimiento efectivo que enumera a L , y nuestra mision es simularlo dentro del lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$. Para esto usaremos varios macros. Es importante notar que los macros que usaremos corresponden al lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ ya que los usaremos en \mathcal{Q} el cual sera un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$.

Ya que las funciones $\lambda x[(x)_1]$ y $\lambda x[(x)_2]$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursivas el Corolario 56 nos dice que hay macros asociados a estas funciones los cuales escribiremos de la siguiente manera mas intuitiva:

$$\begin{aligned} &[\text{V2} \leftarrow (\text{V1})_1] \\ &[\text{V2} \leftarrow (\text{V1})_2] \end{aligned}$$

Ya que el predicado $P = \lambda x[x = 10]$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursivo tenemos su macro asociado el cual escribiremos de la siguiente manera:

$$[\text{IF V1} = 10 \text{ GOTO A1}]$$

Por un lema anterior sabemos que Pro^Σ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. y por lo cual $\chi_{\text{Pro}^\Sigma}^{(\Sigma \cup \Sigma_p)^*}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r., por lo cual hay un macro

$$\left[\text{IF } \chi_{\text{Pro}^\Sigma}^{(\Sigma \cup \Sigma_p)^*} (\text{W1}) \text{ GOTO A1} \right]$$

el cual escribiremos de la siguiente manera

$$\left[\text{IF } \text{W1} \in \text{Pro}^\Sigma \text{ GOTO A1} \right]$$

Ya que el predicado $\text{Halt}^{1,0}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursivo tenemos un macro asociado a el, el cual escribiremos de la siguiente forma

$$\left[\text{IF } \text{Halt}^{1,0}(\text{V1}, \text{V2}, \text{W1}) \text{ GOTO A1} \right]$$

Ya que $E_{\#1}^{1,0}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursivo tenemos un macro asociado a ella, el cual escribiremos de la siguiente forma

$$\left[\text{V3} \leftarrow E_{\#1}^{1,0}(\text{V1}, \text{V2}, \text{W1}) \right]$$

Tambien usaremos macros

$$\begin{aligned} &[\text{V1} \leftarrow 10] \\ &[\text{W1} \leftarrow \text{SKIP}] \end{aligned}$$

(dejamos al lector hacerlos a mano o tambien se puede justificar su existencia via la proposicion de existencia de macros aplicada a las funciones $C_{10}^{0,0}$ y $C_{\text{SKIP}}^{0,0}$).

Ahora si podemos hacer el programa \mathcal{Q} que enumera a L :

```

IF N1 ≠ 0 GOTO L1
GOTO L2
L1  [N2 ← (N1)1]
    [N3 ← (N1)2]
    [P1 ← *≤(N2)]
    [IF P1 ∈ ProΣ GOTO L3]
    GOTO L2
L3  [N4 ← 10]
    [IF Halt1,0(N3, N4, P1) GOTO L4]
    GOTO L2
L4  [N5 ← E#11,0(N3, N4, P1)]
    [IF N5 = 10 GOTO L4]
L2  [P1 ← SKIP]
L4  SKIP

```

Ejercicio 11: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$ y sea

$$L = \{ \mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \exists \alpha \text{ tal que } \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,*}(11, \alpha) = \alpha!@ \}$$

- (a) Dar un programa $\mathcal{Q} \in \text{Pro}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{0,1,\#}) = L$
- (b) Dar un programa $\mathcal{Q}' \in \text{Pro}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}'}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{Q}'}^{1,0,*}) = L$

Ejercicio 12: (Explicado en video en granlogico.com.) Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea

$$L = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma} : \exists n, \alpha \text{ tales que } \Psi_{\mathcal{P}}^{2,1,*}(|\mathcal{P}|, n, \alpha) = \$\}$$

- (a) Dar un programa $\mathcal{Q} \in \text{Pro}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}}^{0,1,\#}) = L$
- (b) Dar un programa $\mathcal{Q}' \in \text{Pro}^{\Sigma \cup \Sigma_p}$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{Q}'}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{Q}'}^{1,0,*}) = L$

Cuando $\Sigma \supseteq \Sigma_p$ podemos correr un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ partiendo de un estado que asigne a sus variables alfabeticas programas (ya que los programas son meras palabras de Σ^*). En particular podriamos correr un programa \mathcal{P} desde el estado $\|\mathcal{P}\|$. Llamaremos A al conjunto formado por aquellos programas \mathcal{P} tales que \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $\|\mathcal{P}\|$. Es decir

$$A = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma} : \exists t \in \omega \text{ tal que } \text{Halt}^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = 1\}$$

Por ejemplo $\text{SKIP} \in A$. Dicho rapida y sugestivamente A es el conjunto formado por aquellos programas que se detienen partiendo de si mismos.

Ejercicio 13: Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. De un programa de \mathcal{S}^{Σ} que enumere a A .

Ejercicio 14: Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Sea

$$L = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma} : \Psi_{\mathcal{P}}^{2,1,*}(1, 1, \mathcal{P}) = \mathcal{P}\mathcal{P}\}$$

- (a) Encuentre un elemento concreto de L
- (b) De un programa de \mathcal{S}^{Σ} que enumere a L

Dos batallas mas

Aceptaremos sin prueba el siguiente teorema.

Theorem 66 (Godel vence a Turing) *Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -Turing computable. Entonces f es Σ -recursiva.*

Ejercicio 15: (S) Haga un esquema a nivel de ideas (sin demostraciones y sin demaciada precision) de la prueba del teorema anterior (la prueba completa esta en el apunte)

Aceptaremos sin prueba el siguiente teorema.

Theorem 67 (Turing vence a Neumann) Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -computable, entonces f es Σ -Turing computable.

Ejercicio 16: (S) Haga un esquema a nivel de ideas (sin demostraciones y sin demasiada precision) de la prueba del teorema anterior (la prueba completa esta en el apunte y en granlogico.com hay un video con la prueba del teorema)

La tesis de Church

En virtud de los teoremas ya probados tenemos el siguiente teorema que asegura que los tres paradigmas son equivalentes.

Theorem 68 Sea Σ un alfabeto finito. Dada una funcion f , las siguientes son equivalentes:

- (1) f es Σ -Turing computable
- (2) f es Σ -recursiva
- (3) f es Σ -computable.

Tambien los tres paradigmas son equivalentes con respecto a los dos tipos de conjuntos estudiados, es decir:

Theorem 69 Sea Σ un alfabeto finito y sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Las siguientes son equivalentes:

- (1) S es Σ -Turing enumerable
- (2) S es Σ -recursivamente enumerable
- (3) S es Σ -enumerable

Theorem 70 Sea Σ un alfabeto finito y sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Las siguientes son equivalentes:

- (1) S es Σ -Turing computable
- (2) S es Σ -recursivo
- (3) S es Σ -computable

Ejercicio 17: Pruebe los dos teoremas anteriores

Otro modelo matematico de computabilidad efectiva es el llamado lambda calculus, introducido por Church, el cual tambien resulta equivalente a los estudiados por nosotros. El hecho de que tan distintos paradigmas computacionales hayan resultado equivalentes hace pensar que en realidad los mismos han tenido exito en capturar la totalidad de las funciones Σ -efectivamente computables. Esta aceveracion es conocida como la

Tesis de Church: *Toda funcion Σ -efectivamente computable es Σ -recursiva.*

Si bien no se ha podido dar una prueba estrictamente matematica de la Tesis de Church, es un sentimiento comun de los investigadores del area que la misma es verdadera.

9 Guia 9

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Algunos resultados basicos presentados en paradigma recursivo

En esta guia presentaremos varios resultados basicos de computabilidad, expresados en el paradigma recursivo, ya que es el mas habitual y comodo. Varios de estos resultados pueden ser establecidos y probados en forma natural dentro del paradigma de la computabilidad efectiva (ver apunte). A ellos los enunciaremos dentro del paradigma de Godel y los probaremos rigurosamente usando la teoria desarrollada hasta ahora. Sin envargo, veremos que hay otros resultados que son dependientes del desarrollo matematico hecho y aportan nueva informacion al paradigma filosofico (la indecidibilidad del halting problem, por ejemplo).

Como veremos muchas de las pruebas seran de naturaleza imperativa basadas en la equivalencia del paradigma de Godel con el imperativo de Neumann.

Lema de division por casos para funciones Σ -recursivas

Usando los resultados probados en las dos anteriores batallas entre los paradigmas de Godel y Neumann podemos probar el siguiente resultado el cual a priori no parese facil de probar si nos quedamos solo en el contexto del paradigma Godeliano.

Lemma 71 *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, $i = 1, \dots, k$, son funciones Σ -recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -recursiva.*

Proof. Probaremos el caso $k = 2$ y $O = \Sigma^*$. Ademàs supondremos que $n = m = 1$. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 programas que computen las funciones f_1 y f_2 , respectivamente. Para $i = 1, 2$, definamos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [Halt^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

Notar que $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ y que H_i es Σ -mixta. Ademàs sabemos que la funcion $Halt^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. por lo cual resulta facilmente que H_i es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Por el Teorema de Independencia del Alfabeto tenemos que H_i es Σ -p.r.. Entonces H_i es Σ -computable por lo cual tenemos que hay un macro:

$$[IF H_i(V1, V2, W1) GOTO A1]$$

Para hacer mas intuitivo el uso de este macro lo escribiremos de la siguiente manera

$$[IF Halt^{1,1}(V1, V2, W1, \mathcal{P}_i) GOTO A1]$$

Ya que cada f_i es Σ -recursiva, hay macros

$$[W2 \leftarrow f_1(V1, W1)]$$

$$[W2 \leftarrow f_2(V1, W1)]$$

Sea \mathcal{P} el siguiente programa:

```

L1 N20  $\leftarrow$  N20 + 1
  [IF  $Halt^{1,1}(N20, N1, P1, \mathcal{P}_1)$  GOTO L2]
  [IF  $Halt^{1,1}(N20, N1, P1, \mathcal{P}_2)$  GOTO L3]
  GOTO L1
L2 [P1  $\leftarrow$   $f_1(N1, P1)$ ]
  GOTO L4
L3 [P1  $\leftarrow$   $f_2(N1, P1)$ ]
L4 SKIP

```

Notese que \mathcal{P} computa la funcion $f_1 \cup f_2$ ■

Ejercicio 1: Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -recursivo y D_P es Σ -recursivo, entonces la funcion $M(P)$ es Σ -recursiva.

Lema de restriccion de funciones Σ -recursivas

Nos sera util tambien el siguiente resultado.

Lemma 72 *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ -r.e., entonces $f|_S$ es Σ -recursiva.*

Proof. Si $S = \emptyset$, entonces $f|_S = \emptyset$ y por lo tanto $f|_S$ es Σ -recursiva. Supongamos $S \neq \emptyset$. Haremos el caso $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$. Tenemos que hay una $F : \omega \rightarrow \omega \times \Sigma^*$ tal que $\text{Im } F = S$ y $F_{(1)}, F_{(2)}$ son Σ -recursivas. Ya que $f, F_{(1)}$ y $F_{(2)}$ son Σ -computables, hay macros

$$\begin{aligned} [W2 \leftarrow f(V1, W1)] \\ [V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \\ [W1 \leftarrow F_{(2)}(V1)] \end{aligned}$$

Ya que los predicados $D = \lambda xy[x \neq y]$ y $D' = \lambda \alpha \beta[\alpha \neq \beta]$ son Σ -p.r., tenemos que son Σ -computables, por lo cual hay macros

$$\begin{aligned} [\text{IF } D(V1, V2) \text{ GOTO A1}] \\ [\text{IF } D'(W1, W2) \text{ GOTO A1}] \end{aligned}$$

Para para hacer mas amigable la lectura los escribiremos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\text{IF } V1 \neq V2 \text{ GOTO A1}] \\ [\text{IF } W1 \neq W2 \text{ GOTO A1}] \end{aligned}$$

Sea \mathcal{P} el siguiente programa

$$\begin{aligned} \text{L2} \quad & [N2 \leftarrow F_{(1)}(N20)] \\ & [P2 \leftarrow F_{(2)}(N20)] \\ & [\text{IF } N1 \neq N2 \text{ GOTO L1}] \\ & [\text{IF } P1 \neq P2 \text{ GOTO L1}] \\ & [P1 \leftarrow f(N1, P1)] \\ & \text{GOTO L3} \\ \text{L1} \quad & N20 \leftarrow N20 + 1 \\ & \text{GOTO L2} \\ \text{L3} \quad & \text{SKIP} \end{aligned}$$

Es facil ver que \mathcal{P} computa a $f|_S$ ■

Conjuntos Σ -r.e. y Σ -r.

Daremos primero algunas propiedades basicas de los conjuntos Σ -r.e. y Σ -r. El siguiente resultado puede probarse facilmente dentro del paradigma Godeliano y lo dejamos como ejercicio.

Ejercicio 1,5: Sea Σ un alfabeto finito. Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -recursivos. Entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -recursivos

Lemma 73 Sea Σ un alfabeto finito. Se tiene que

- (1) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -r.e.. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ -r.e.
- (2) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -r.e.. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -r.e.
- (3) Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Si S es Σ -recursivo, entonces S es Σ -recursivamente enumerable

Proof. Los tres resultados en su version imperativa fueron probados o dejados como ejercicio en la Guia 8, por lo que podemos aplicar los teoremas que nos dicen que los paradigmas recursivo e imperativo son equivalentes. ■

Tal como veremos mas adelante hay conjuntos Σ -recursivamente enumerables los cuales no son Σ -recursivos. Sin envargo tenemos el siguiente interesante resultado.

Lemma 74 Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Si S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -recursivamente enumerables, entonces S es Σ -recursivo

Proof. (Prueba cheta) Por definicion, para probar que S es Σ -recursivo deberemos probar que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -recursiva. Notese que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S}$. O sea que por el lema de division por casos, solo nos resta probar que $C_1^{n,m}|_S$ y $C_0^{n,m}|_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S}$ son Σ -recursivas. Pero esto se desprende directamente del Lema 72 ya que $C_1^{n,m}$ y $C_0^{n,m}$ son Σ -recursivas y por hipotesis S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -recursivamente enumerables. ■

Ejercicio 2: (Prueba intuitiva) Dar una prueba imperativa del lema anterior. Hint: inspirese en su analogo dentro del paradigma de la computabilidad efectiva, dado al final de la Guia 3.

El siguiente teorema es muy importante ya que caracteriza a los conjuntos Σ -r.e. Solo se tomara la prueba de la implicacion (2) \Rightarrow (3) aunque dejamos su prueba completa para el lector interesado.

Theorem 75 Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes

- (1) S es Σ -recursivamente enumerable
- (2) $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ -recursiva.

(3) $S = D_f$, para alguna funcion Σ -recursiva f

(4) $S = \emptyset$ o $S = I_F$, para alguna $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ -p.r.

Proof. El caso $n = m = 0$ es facil y es dejado al lector. Supongamos entonces que $n + m \geq 1$.

(2) \Rightarrow (3). Haremos el caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$. El caso general es completamente analogo. Notese que entonces tenemos que $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^{*2}$ y $F : D_F \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega^2 \times \Sigma^{*2}$ es tal que $\text{Im } F = S$ y $F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}, F_{(4)}$ son Σ -recursivas. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea \mathcal{P}_i un programa el cual computa a $F_{(i)}$. Sea \leq un orden total sobre Σ . Definamos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [\neg \text{Halt}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

Notar que $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ y que H_i es Σ -mixta. Ademas sabemos que la funcion $\text{Halt}^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. por lo cual resulta facilmente que H_i es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Por la Proposicion de Independencia del Alfabeto tenemos que H_i es Σ -p.r.. Entonces H_i es Σ -computable por lo cual tenemos que hay un macro:

$$[\text{IF } H_i(\text{V2}, \text{V1}, \text{W1}) \text{ GOTO A1}]$$

Para hacer mas intuitivo el uso de este macro lo escribiremos de la siguiente manera

$$[\text{IF } \neg \text{Halt}^{1,1}(\text{V2}, \text{V1}, \text{W1}, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO A1}]$$

Para $i = 1, 2$, definamos

$$E_i = \lambda x t x_1 \alpha_1 [x \neq E_{\#1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

Para $i = 3, 4$, definamos

$$E_i = \lambda t x_1 \alpha_1 \alpha [\alpha \neq E_{*1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

Dejamos al lector probar que las funciones E_i son Σ -p.r.. O sea que son Σ -computables por lo cual para cada $i \in \{1, 2\}$ hay un macro

$$[\text{IF } E_i(\text{V2}, \text{V3}, \text{V1}, \text{W1}) \text{ GOTO A1}]$$

y para cada $i \in \{3, 4\}$ hay un macro

$$[\text{IF } E_i(\text{V2}, \text{V1}, \text{W1}, \text{W2}) \text{ GOTO A1}]$$

Haremos mas intuitiva la forma de escribir estos macros, por ejemplo para $i = 1$, lo escribiremos de la siguiente manera

$$[\text{IF } \text{V2} \neq E_{\#1}^{1,1}(\text{V3}, \text{V1}, \text{W1}, \mathcal{P}_1) \text{ GOTO A1}]$$

Ya que la funcion $f = \lambda x [(x)_1]$ es Σ -p.r., ella es Σ -computable por lo cual hay un macro

$$[\text{V2} \leftarrow f(\text{V1})]$$

el cual escribiremos de la siguiente manera:

$$[V2 \leftarrow (V1)_1]$$

Similarmente hay macros:

$$[W1 \leftarrow *^{\leq}(V1)_3]$$

$$[V2 \leftarrow (V1)_2]$$

(dejamos al lector entender bien el funcionamiento de estos macros). Sea \mathcal{P} el siguiente programa de \mathcal{S}^Σ :

$$\begin{aligned} &L1 \ N20 \leftarrow N20 + 1 \\ &[N10 \leftarrow (N20)_1] \\ &[N3 \leftarrow (N20)_2] \\ &[P3 \leftarrow *^{\leq}(N20)_3] \\ &[IF \neg Halt^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_1) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF \neg Halt^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_2) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF \neg Halt^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_3) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF \neg Halt^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_4) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF N1 \neq E_{\#1}^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_1) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF N2 \neq E_{\#1}^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_2) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF P1 \neq E_{*1}^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_3) \text{ GOTO } L1] \\ &[IF P2 \neq E_{*1}^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_4) \text{ GOTO } L1] \end{aligned}$$

Dejamos al lector la tarea de comprender el funcionamiento de este programa y convenserse de que computa la funcion $p_1^{2,2}|_S$. Pero entonces $p_1^{2,2}|_S$ es Σ -computable por lo cual es Σ -recursiva, lo cual prueba (3) ya que $Dom(p_1^{2,2}|_S) = S$.

(3) \Rightarrow (4). Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(z_1, \dots, z_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m) \in S$ fijo. Sea \mathcal{P} un programa el cual compute a f y Sea \leq un orden total sobre Σ . Sea $P : \mathbf{N} \rightarrow \omega$ dado por $P(x) = 1$ sii

$$Halt^{n,m}((x)_{n+m+1}, (x)_1, \dots, (x)_n, *^{\leq}((x)_{n+1}), \dots, *^{\leq}((x)_{n+m}), \mathcal{P}) = 1$$

Es facil ver que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. por lo cual es Σ -p.r.. Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{1,0}|_{\{0\}}$. Para $i = 1, \dots, n$, definamos $F_i : \omega \rightarrow \omega$ de la siguiente manera

$$F_i(x) = \begin{cases} (x)_i & \text{si } \bar{P}(x) = 1 \\ z_i & \text{si } \bar{P}(x) \neq 1 \end{cases}$$

Para $i = n+1, \dots, n+m$, definamos $F_i : \omega \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$F_i(x) = \begin{cases} *^{\leq}((x)_i) & \text{si } \bar{P}(x) = 1 \\ \gamma_{i-n} & \text{si } \bar{P}(x) \neq 1 \end{cases}$$

Por el lema de division por casos (para funciones Σ -p.r.), cada F_i es Σ -p.r.. Es facil ver que $F = [F_1, \dots, F_{n+m}]$ cumple (4). ■

El halting problem y los conjuntos A y N

Cuando $\Sigma \supseteq \Sigma_p$, podemos definir

$$AutoHalt^\Sigma = \lambda \mathcal{P} [(\exists t \in \omega) Halt^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})].$$

Notar que el dominio de $AutoHalt^\Sigma$ es Pro^Σ y que para cada $\mathcal{P} \in Pro^\Sigma$ tenemos que

(*) $AutoHalt(\mathcal{P}) = 1$ sii \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $\|\mathcal{P}\|$.

Lemma 76 *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es Σ -recursivo.*

Proof. Supongamos $AutoHalt^\Sigma$ es Σ -recursivo y por lo tanto Σ -computable. Por la proposición de existencia de macros tenemos que hay un macro

$$[IF AutoHalt^\Sigma(W1) GOTO A1]$$

Sea \mathcal{P}_0 el siguiente programa de \mathcal{S}^Σ

$$L1 [IF AutoHalt^\Sigma(P1) GOTO L1]$$

Note que

- \mathcal{P}_0 termina partiendo desde $\|\mathcal{P}_0\|$ sii $AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 0$,

lo cual produce una contradicción si tomamos en (*) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. ■

Usando el lema anterior y la Tesis de Church podemos probar el siguiente impactante resultado.

Theorem 77 *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es Σ -efectivamente computable. Es decir no hay ningún procedimiento efectivo que decida si un programa de \mathcal{S}^Σ termina partiendo de sí mismo.*

Proof. Si $AutoHalt^\Sigma$ fuera Σ -efectivamente computable, la Tesis de Church nos diría que es Σ -recursivo, contradiciendo el lema anterior. ■

Notese que $AutoHalt^\Sigma$ provee de un ejemplo natural en el cual la cuantificación (no acotada) de un predicado Σ -p.r. con dominio rectangular no es Σ -efectivamente computable

Ahora estamos en condiciones de dar un ejemplo natural de un conjunto A que es Σ -recursivamente enumerable pero el cual no es Σ -recursivo.

Lemma 78 *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces*

$$A = \{\mathcal{P} \in Pro^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\}$$

es Σ -r.e. y no es Σ -recursivo. Mas aun el conjunto

$$N = \{\mathcal{P} \in Pro^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\}$$

no es Σ -r.e.

Proof. Para ver que A es Σ -r.e. se lo puede hacer imperativamente dando un programa (usando macros) que enumere a A . De esta forma probaríamos que A es Σ -enumerable y por lo tanto es Σ -r.e.. Daremos ahora una prueba no imperativa de este hecho, es decir mas propia del paradigma funcional. Sea $P = \lambda t \mathcal{P} [Halt^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})]$. Note que P es Σ -p.r. por lo que $M(P)$ es Σ -r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que A es Σ -r.e..

Supongamos ahora que N es Σ -r.e.. Entonces la funcion $C_0^{0,1}|_N$ es Σ -recursiva ya que $C_0^{0,1}$ lo es. Ademas ya que A es Σ -r.e. tenemos que $C_1^{0,1}|_A$ es Σ -recursiva. Ya que

$$AutoHalt^\Sigma = C_1^{0,1}|_A \cup C_0^{0,1}|_N$$

el lema de division por casos nos dice que $AutoHalt^\Sigma$ es Σ -recursivo, contradiciendo el Lema 76. Esto prueba que N no es Σ -r.e..

Finalmente supongamos A es Σ -recursivo. Entonces el conjunto

$$N = (\Sigma^* - A) \cap Pro^\Sigma$$

deberia serlo, lo cual es absurdo. Hemos probado entonces que A no es Σ -recursivo. ■

Usando la Tesis de Church obtenemos el siguiente resultado.

Proposition 79 *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces A es Σ -efectivamente enumerable y no es Σ -efectivamente computable. El conjunto N no es Σ -efectivamente enumerable. Es decir, A puede ser enumerado por un procedimiento efectivo pero no hay ningun procedimiento efectivo que decida la pertenencia a A y no hay ningun procedimiento efectivo que enumere a N . Mas aun, si un procedimiento efectivo da como salida siempre elementos de N , entonces hay una cantidad infinita de elementos de N los cuales nunca da como salida*

Ejercicio 3: (S) Justifique la ultima aseveracion en la proposicion anterior

Cabe destacar aqui que el dominio de una funcion Σ -recursiva no siempre sera un conjunto Σ -recursivo. Por ejemplo si tomamos Σ tal que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$, entonces $C_1^{0,1}|_A$ es una funcion Σ -recursiva ya que es la restriccion de la funcion Σ -recursiva $C_1^{0,1}$ al conjunto Σ -r.e. A , pero $Dom(C_1^{0,1}|_A) = A$ no es Σ -recursivo.

Ejercicio 4: Pruebe que no es cierta la siguiente (hermosa y tentadora) propiedad

- Si $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es una funcion Σ -computable, entonces hay un macro

$$\left[\text{IF } \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}(V1, ..., V\bar{n}, W1, ..., W\bar{m}) \text{ GOTO } A1 \right]$$

Ejercicio 5: V o F o I. justifique.

- (a) Sea Σ un alfabeto y sean $n, m \in \omega$. Entonces el dominio de $T^{n,m}$ es rectangular
- (b) Para cada $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ hay un $\mathcal{P}' \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}'}^{1,0,\#}) = \omega - \text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#})$.
- (c) Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ y supongamos que para cada $x \in \omega$, \mathcal{P} termina partiendo de $((x, 0, 0\dots), (\varepsilon, \varepsilon, \dots))$ en a lo sumo $n(\mathcal{P})^2 + x$ pasos. Entonces $\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}$ es Σ -p.r.
- (d) Hay $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $0 \in D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#}}$ y

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#}(0) = 1 + \min_t (i^{1,0}_t(t, 0, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1)$$

Ejercicio 6: (Opcional) (S) Pruebe que la reciproca del Ejercicio 1 no es cierta, es decir de un predicado Σ -recursivo $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ el cual cumpla que $M(P)$ es Σ -recursiva y que D_P no es Σ -recursivo (Hint: tome $P = C_1^{1,1}|_{\omega \times A}$)

Con los resultados anteriores estamos en condiciones de dar un ejemplo de un predicado Σ -recursivo, cuya minimizacion no es Σ -efectivamente computable (y por lo tanto no es Σ -recursiva). Aceptaremos el resultado sin demostracion.

Proposition 80 *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Sea $P = C_1^{0,1}|_A \circ \lambda t \alpha \left[\alpha^{1 \dot{-} t} \text{SKIP}^t \right] |_{\omega \times \text{Pro}^\Sigma}$. El predicado P es Σ -recursivo pero la funcion $M(P)$ no es Σ -efectivamente computable (y por lo tanto no es Σ -recursiva)*

Ejercicio 7: (Opcional) (S) Daremos aqui una guia para probar la proposicion anterior.

- (a) Pruebe que P es Σ -recursivo
- (b) Pruebe que $D_{M(P)} = \text{Pro}^\Sigma$
- (c) Para cada $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ se tiene que

$$M(P)(\mathcal{P}) = 0 \text{ sii } \mathcal{P} \in A$$

- (d) Pruebe que $\text{AutoHalt}^\Sigma = \lambda x [x = 0] \circ M(P)$ por lo cual $M(P)$ no es Σ -recursiva
- (e) $M(P)$ no es Σ -efectivamente computable