Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los examenes.

Notacion y conceptos basicos

Usaremos $\mathbf{R}$ para denotar el conjunto de los numeros reales, $\mathbf{Z}$ para denotar el conjunto de los numeros enteros, $\mathbf{N}$ para denotar el conjunto de los numeros naturales y ω para denotar al conjunto $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Dado un conjunto A, usaremos $\mathcal{P}(A)$ para denotar el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ denotara la cantidad de elementos de A.

Para $x, y \in \omega$, definamos

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dados $x, y \in \omega$ diremos que x *divide a* y cuando haya un $z \in \omega$ tal que $y = z.x$. Notar que 0 divide a 0, 3 divide a 0 y 0 no divide a 23. Escribiremos $x \mid y$ para expresar que x divide a y. Si bien no hay una definicion natural en matematica de cuanto vale 0^0 (0 elevado a la 0), por convencion para nosotros $0^0 = 1$

Producto carteciano

Dados conjuntos $A_1, ..., A_n$, con $n \geq 2$, usaremos $A_1 \times ... \times A_n$ para denotar el *producto Cartesiano* de $A_1, ..., A_n$, es decir el conjunto formado por todas las n-uplas $(a_1, ..., a_n)$ tales que $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$. Si $A_1 = ... = A_n = A$, con $n \geq 2$, entonces escribiremos A^n en lugar de $A_1 \times ... \times A_n$. Para $n = 1$, definimos $A^n = A$, es decir $A^1 = A$. Usaremos $\Diamond$ para denotar la unica 0-upla. Definimos entonces $A^0 = \{\Diamond\}$. Si A es un conjunto denotaremos con $A^{\mathbf{N}}$ al conjunto formado por todas las infinituplas $(a_1, a_2, ...)$ tales que $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbf{N}$. Por ejemplo

$$(1, 2, 3, 4, ...) \in \omega^{\mathbf{N}}$$

donde $(1, 2, 3, 4, ...)$ es una forma intuitiva de denotar la infinitupla cuyo i-esimo elemento es el numero natural i.

Si $(A_1, A_2, ...)$ es una infinitupla de conjuntos, entonces usaremos $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ o $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ para denotar al conjunto

$$\{a : a \in A_i, \text{ para algun } i \in \mathbf{N}\}$$

Conjuntos

Supondremos que el lector sabe las nociones basicas sobre conjuntos, aunque resaltaremos algunas de las mas importantes para que el lector las repase.

La propiedad de *extensionalidad* nos dice que, dados conjuntos A, B, se tiene que $A = B$ si y solo si para cada objeto x se da que

$$x \in A \text{ si y solo si } x \in B$$

Esta propiedad es importante metodologicamente ya que a la hora de probar que dos conjuntos A, B son iguales, extensionalidad nos asegura que basta con ver que se dan las dos inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Otro tema importante es manejar correctamente la notacion cuando definimos un conjunto usando llaves y mediante propiedades que caracterizan la pertenencia al mismo. Algunos ejercicios para entrenar esta notacion:

Ejercicio 1: Entender en forma precisa que conjunto se esta denotando en cada uno de los siguientes casos

(a) $\{x \in \mathbf{N} : x = 1 \text{ o } x \geq 5\}$

(b) $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ y } x^2 \geq 100\}$

(c) $\{x : x = 100\}$

(d) $\{x^2 + 1 : x \in \omega\}$

(e) $\{x + y + z : x, y, z \in \{1, 2\}\}$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.

(a) $\{x.y : x, y \in \omega\} = \omega$

(b) $|\{x.y : x, y \in \omega \text{ y } 1 \leq x, y \leq 5\}| = 25$

(c) Dados $A, B \subseteq \omega$, se tiene que $\{a \in A \text{ y } b \in B : a + b = 1000\} \subseteq A \times B$

(d) $\{a \in \mathbf{N}, a \geq 3\} \subseteq \omega$

(e) $\{x + 1 : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Alfabetos

Un *alfabeto* es un conjunto finito de simbolos. Notese que $\emptyset$ es un alfabeto. Si Σ es un alfabeto, entonces Σ^* denotara el conjunto de todas las palabras formadas con simbolos de Σ. La unica palabra de longitud 0 es denotada con ε. Ya que en ε no ocurren simbolos, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$, para cualquier alfabeto, mas aun notese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. Usaremos $|\alpha|$ para denotar la longitud de la palabra α. Usaremos Σ^+ para denotar al conjunto $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$. Notese que funciones, n-uplas y palabras son objetos de distinto tipo, por lo cual $\emptyset$, $\Diamond$ y ε son tres objetos matematicos diferentes.

Si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Sigma^*$, con $n \geq 0$, usaremos $\alpha_1...\alpha_n$ para denotar la *concatenacion* de las palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (notese que cuando $n = 0$, resulta que $\alpha_1...\alpha_n = \varepsilon$). Si $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha$, entonces escribiremos α^n en lugar de $\alpha_1...\alpha_n$. O sea que $\alpha^0 = \varepsilon$.

Diremos que α *es subpalabra (propia) de* β cuando ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$. Diremos que β es un *tramo inicial (propio)* de α si hay una palabra γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final (propio).*

Dados $i \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definamos

$$[\alpha]_i = \begin{cases} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1 \leq i \leq |\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|}[\gamma]_{|\gamma|-1}...[\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ.

Ocurrencias

Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de* i *en* β cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$.

Notese que una palabra α puede ocurrir en β, a partir de i, y tambien a partir de j, con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de α en β. Por ejemplo hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

cccccccabaccccabaccccc

y tambien hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

ccccccccababaccccccccccc

En el primer caso diremos que dichas ocurrencias de *aba* son *disjuntas*, en cambio en el segundo caso puede apreciarse que las dos ocurrencias se superponen en una posicion. No definiremos en forma matematica precisa el concepto de ocurrencia pero el lector no tendra problemas en comprenderlo y manejarlo en forma correcta.

Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, usaremos $|\alpha|_\sigma$ para denotar la cantidad de ocurrencias del simbolo σ en α.

Matematica orientada a objetos

Nuestro estilo o enfoque matematico pondra enfasis en los objetos, es decir haremos matematica prestando atencion a los distintos objetos matematicos involucrados, los cuales siempre seran definidos en forma precisa en terminos de objetos mas primitivos. Hay ciertos objetos matematicos los cuales no definiremos y supondremos que el lector tiene una idea clara y precisa de los mismos. Por ejemplo un tipo de objeto matematico, quizas el mas famoso, son los *numeros*. No diremos que es un numero pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de este tipo de objetos y de sus propiedades basicas. Otro tipo de objeto que no definiremos y que sera clave para nuestro enfoque son los *conjuntos*. Nuevamente, no diremos que es un conjunto pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de estos objetos y sus propiedades basicas. Es importante que en nuestro enfoque, numeros y conjuntos son objetos de distinta naturaleza por lo cual nunca un numero es un conjunto ni un conjunto es un numero. En particular esto nos dice que el numero 0 y el conjunto $\emptyset$ son objetos distintos. Otro tipo de objeto matematico muy importante para la matematica discreta son los *simbolos*. No discutiremos que es un simbolo sino que aceptaremos este concepto en forma primitiva. Tambien constituyen un tipo de objeto matematico las *palabras*, las cuales intuitivamente hablando son juxtaposiciones de simbolos. Otro tipo de objeto matematico muy importante son los *pares ordenados* o 2-*uplas*, es decir los objetos de la forma (a, b), donde a y b son objetos matematicos cualesquiera. Tambien son objetos matematicos y de distinta naturaleza las 3-*uplas*, las 4-*uplas* y en general las n-*uplas* para n un numero natural mayor o igual a 2. Cabe destacar que en nuestro enfoque no habra 1-uplas. Sin envargo, si bien hay una sola 0-*upla*, ella constituye un tipo de objeto matematico distinto a los antes mencionados. El ultimo tipo de objeto matematico que consideraremos es aquel de las *infinituplas*.

Tenemos entonces dividido nuestro universo matematico en las distintas categorias de objetos:

$$\begin{array}{l} \text{NUMERO} \\ \text{CONJUNTO} \\ \text{PALABRA} \\ 0-\text{UPLA} \\ 2-\text{UPLA} \\ 3-\text{UPLA} \\ \qquad\vdots \\ \text{INFINITUPLA} \end{array}$$

(Notar que los simbolos quedan contenidos en la categoria de las palabras). Es importante entender que las anteriores categorias o tipos de objetos son disjuntas entre si, es decir nunca un numero sera una palabra o una palabra sera una 3-upla etc. Esto nos permite definir una funcion Ti la cual a un objeto matematico le asigna su tipo de objeto matematico segun la lista anterior. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
Ti(\pi) & = & \text{NUMERO} \\
Ti(\mathbf{N}) & = & \text{CONJUNTO} \\
Ti(\mathcal{P}(\mathbf{N})) & = & \text{CONJUNTO} \\
Ti((1,2,3)) & = & 3-\text{UPLA} \\
Ti(\emptyset) & = & \text{CONJUNTO} \\
Ti(\varepsilon) & = & \text{PALABRA} \\
Ti(\Diamond) & = & 0-\text{UPLA} \\
Ti(\alpha) & = & \text{PALABRA, si } \alpha \text{ es un simbolo} \\
Ti(f) & = & \text{CONJUNTO, si } f \text{ es una funcion}
\end{array}
$$

El concepto de funcion

Asumiremos que el lector tiene una idea intuitiva del concepto de funcion. Daremos aqui una definicion matematica de dicho concepto. Una *funcion* es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

(F) Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Por ejemplo, si tomamos $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se puede ver facilmente que f cumple la propiedad (F). Dada una funcion f, definamos

$$
\begin{array}{rcl}
D_f & = & \text{dominio de } f = \{x : (x,y) \in f \text{ para algun } y\} \\
I_f & = & \text{imagen de } f = \{y : (x,y) \in f \text{ para algun } x\}
\end{array}
$$

A veces escribiremos $\text{Dom}(f)$ y $\text{Im}(f)$ para denotar, respectivamente, el dominio y la imagen de una funcion f. Como es usual dado $x \in D_f$, usaremos $f(x)$ para denotar al unico $y \in I_f$ tal que $(x,y) \in f$. Notese que $\emptyset$ es una funcion y que $D_\emptyset = I_\emptyset = \emptyset$. Por ejemplo para $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se tiene que $D_f = \omega$ y $I_f = \{y : y = x^2 \text{ para algun } x \in \omega\}$. Ademas notese que $f(x) = x^2$, para cada $x \in D_f$.

Escribiremos $f : S \subseteq A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$. Tambien escribiremos $f : A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$. En tal contexto llamaremos a B *conjunto de llegada*. Por supuesto B no esta determinado por f ya que solo debe cumplir $I_f \subseteq B$.

Muchas veces para definir una funcion f, lo haremos dando su dominio y su regla de asignacion, es decir especificaremos en forma precisa que conjunto es el dominio de f y ademas especificaremos en forma presisa quien es $f(x)$ para cada x de dicho dominio. Obviamente esto determina por completo a la funcion f ya que $f = \{(x,f(x)) : x \in D_f\}$. Por ejemplo si decimos que f es la funcion dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
D_f & = & \omega \\
f(x) & = & 23x^2
\end{array}
$$

nos estaremos refiriendo a la funcion $\{(x, 23x^2) : x \in \omega\}$. Tambien escribiremos

$$\begin{array}{rcl} f:\omega & \to & \omega \\ x & \to & 23x^2 \end{array}$$

para describir a f. Es decir, a veces para hacer mas intuitiva aun la descripcion de la funcion, tambien incluiremos un conjunto de llegada de dicha funcion y a la regla de asignacion la escribiremos usando una flecha. Para dar otro ejemplo, si escribimos sea f dada por:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{array} \right. \end{array}$$

estaremos diciendo que f es la funcion

$$\{(x, x+1) : x \text{ es par y } x \in \mathbf{N}\} \cup \{(x, x^2) : x \text{ es impar y } x \in \mathbf{N}\}$$

Igualdad de funciones

Sean f y g dos funciones. Ya que las mismas son conjuntos, tendremos que f sera igual a g si y solo si para cada par (a, b), se tiene que $(a, b) \in f$ sii $(a, b) \in g$. Muchas veces sera util el siguiente criterio de igualdad de funciones:

Lemma 1 *Sean f y g funciones. Entonces $f = g$ sii $D_f = D_g$ y para cada $x \in D_f$ se tiene que $f(x) = g(x)$*

Ejercicio 3: (S) Pruebe el lema anterior

Ejercicio 4: V o F o I, justifique.

(a) Si

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & x^3 \end{array}$$

entonces $f = g$

(b) Si

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^4/x \end{array}$$

entonces $f = g$

(c) Si f es una funcion y $z \in D_f$, entonces $Ti(z) = \text{CONJUNTO}$

(d) $\text{Dom}((1, 2)) = \{1\}$

(e) $\text{Dom}(\{(1, 2)\}) + 1 = 2$

(f) Si f es una funcion, entonces $D_f = \{a : (a, b) \in f\}$

(g) Si $f : A \to B$, entonces $D_f \subseteq A$

(h) Si $f : A \to B$, entonces $I_f = B$

(i) Si f es una función y $g \subseteq f$, entonces g es una función

Funciones Σ-mixtas

Sea Σ un alfabeto finito. Dados $n,m\in\omega$, usaremos $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ para abreviar la expresion

$$\overbrace{\omega\times...\times\omega}^{n\text{ veces}}\times\overbrace{\Sigma^*\times...\times\Sigma^*}^{m\text{ veces}}$$

Por ejemplo, $\omega^3\times\Sigma^{*4}$ sera una forma abreviada de escribir $\omega\times\omega\times\omega\times\Sigma^*\times\Sigma^*\times\Sigma^*\times\Sigma^*$. Debe quedar claro que estamos haciendo cierto abuso notacional ya que en principio si no hacemos esta convencion notacional, $\omega^3\times\Sigma^{*4}$ denota un conjunto de pares y $\omega\times\omega\times\omega\times\Sigma^*\times\Sigma^*\times\Sigma^*\times\Sigma^*$ es un conjunto de 7-uplas.

Notese que:

- Cuando $n=m=0$, tenemos que $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ denota el conjunto $\{\Diamond\}$
- Si $m=0$, entonces $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ denota el conjunto ω^n
- Si $n=0$, entonces $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ denota el conjunto Σ^{*m}

Es decir que tenemos que tener cuidado cuando leemos esta notacion y no caer en la confucion de interpretarla mal. A manera de ultimo ejemplo, si vemos $\omega^1\times\Sigma^{*0}$, segun esta nueva convencion debemos pensar en ω y no leer en forma convencional lo cual nos haria pensar que $\omega^1\times\Sigma^{*0}$ denota el conjunto de pares $\omega\times\{\Diamond\}$

Con esta convencion notacional, un elemento generico de $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ es una $(n+m)$-upla de la forma $(x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m)$. Para abreviar, escribiremos $(\vec{x},\vec{\alpha})$ en lugar de $(x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m)$.

Definicion de funcion Σ-mixta Sea Σ un alfabeto finito. Dada una funcion f, diremos que f es Σ-*mixta* si cumple las siguientes propiedades

(M1) Existen $n,m\geq 0$, tales que $D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$

(M2) Ya sea $I_f\subseteq\omega$ o $I_f\subseteq\Sigma^*$

Algunos ejemplos:

E$_1$ Sea $\Sigma=\{\square,\%,\blacktriangle\}$. La funcion

$$\begin{array}{rcl} f:\omega\times\{\square,\%,\blacktriangle\}^* & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & x+|\alpha| \end{array}$$

es Σ-mixta ya que se cumple (M1) con $n=m=1$ y (M2). Notese que f no es $\{\square,\%\}$-mixta ya que no cumple (M1) respecto del alfabeto $\{\square,\%\}$. Sin envargo note que f es $\{\square,\%,\blacktriangle,@\}$-mixta

E_2 La funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^4 & \rightarrow & \omega \\ (x,y,z,w) & \rightarrow & x+y \end{array}$$

es Σ-mixta cualesquiera sea el alfabeto Σ

E_3 Sea $\Sigma = \{\square, @\}$. La funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\square\square\square, @@\} & \rightarrow & \omega \\ \alpha & \rightarrow & |\alpha| \end{array}$$

es Σ-mixta ya que se cumple (M1) (con $n = 0$ y $m = 1$) y (M2)

E_4 Supongamos $\Sigma = \emptyset$. Tenemos entonces que $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \omega \\ (x,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

donde $D = \{(x,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) : x \text{ es impar}\}$, es Σ-mixta (con $n = 1$ y $m = 3$ en (M1)). Tambien notese que

$$\begin{array}{rcl} \{(\varepsilon,\varepsilon)\} & \rightarrow & \{\varepsilon\} \\ (\varepsilon,\varepsilon) & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

es Σ-mixta (con $n = 0$ y $m = 2$ en (M1)).

Dejamos al lector la facil prueba del siguiente resultado basico.

Lemma 2 *Supongamos $\Sigma \subseteq \Gamma$ son alfabetos finitos. Entonces si f es una funcion Σ-mixta, f es Γ-mixta*

Una funcion Σ-mixta f es Σ-*total* cuando haya $n, m \in \omega$ tales que $D_f = \omega^n \times \Sigma^{*m}$. El lema anterior nos dice que si $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces toda funcion Σ-mixta es Γ-mixta. Sin envargo una funcion puede ser Σ-total y no ser Γ-total, cuando $\Sigma \subseteq \Gamma$. Por ejemplo tomemos $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$ y $\Gamma = \{\square, \%, \blacktriangle, !\}$, y consideremos la funcion

$$\begin{array}{rcl} f : \omega \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & x + |\alpha| \end{array}$$

Es claro que f es Σ-mixta y Σ-total. Tambien es Γ-mixta ya que $D_f \subseteq \omega \times \Gamma^*$ y $I_f \subseteq \omega$, por lo cual cumple (M1) y (M2). Sin envargo f no es Γ-total ya que D_f no es igual a $\omega^n \times \Gamma^{*m}$, cualesquiera sean n y m.

Como hemos visto recien, una funcion f puede ser Σ-mixta y Γ-mixta para dos alfabetos distintos Σ y Γ e incluso es facil construir un ejemplo en el cual Σ y Γ sean incomparables como conjuntos, es decir que ninguno incluya al otro. Dejamos al lector convencerse de que si f es una funcion que es Σ-mixta para algun alfabeto Σ, entonces hay un alfabeto Σ_0 el cual es el menor de todos los alfabetos respecto de los cuales f es mixta, es decir Σ_0 cumple que f es Σ_0-mixta y si Γ es tal que f es Γ-mixta, entonces $\Sigma_0 \subseteq \Gamma$.

A continuacion daremos algunas funciones Σ-mixtas basicas las cuales seran frecuentemente usadas.

Funciones Suc **y** $Pred$ La *funcion sucesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Suc:\omega & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n+1 \end{array}$$

La *funcion predecesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Pred:\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n-1 \end{array}$$

Las funciones d_a Sea Σ un alfabeto no vacio. Para cada $a \in \Sigma$, definamos

$$\begin{array}{rcl} d_a:\Sigma^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ \alpha & \rightarrow & \alpha a \end{array}$$

La funcion d_a es llamada la funcion *derecha sub* a, respecto del alfabeto Σ.

Las funciones $p_i^{n,m}$ Sea Σ un alfabeto. Para $n, m \in \omega$ e i tal que $1 \leq i \leq n$, definamos

$$\begin{array}{rcl} p_i^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & x_i \end{array}$$

Para $n, m \in \omega$ e i tal que $n+1 \leq i \leq n+m$, definamos

$$\begin{array}{rcl} p_i^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \alpha_{i-n} \end{array}$$

Las funciones $p_i^{n,m}$ son llamadas *proyecciones*. La funcion $p_i^{n,m}$ es llamada la *proyeccion* n, m, i, respecto del alfabeto Σ. Notese que esta definicion requiere que $n + m \geq 1$ ya que i debe cumplir $1 \leq i \leq n + m$.

Las funciones $C_k^{n,m}$ **y** $C_\alpha^{n,m}$ Sea Σ un alfabeto. Para $n, m, k \in \omega$, y $\alpha \in \Sigma^*$, definamos

$$\begin{array}{rcl} C_k^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & k \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} C_\alpha^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \alpha \end{array}$$

Notese que $C_k^{0,0} : \{\Diamond\} \rightarrow \{k\}$ y que $C_\alpha^{0,0} : \{\Diamond\} \rightarrow \{\alpha\}$.

Ejercicio 5: V o F o I, justifique.

(a) La funcion $x + 1$ es $\emptyset$-mixta

(b) La función

$$\begin{array}{rcl} \left\{(x,\alpha) \in \omega \times \{\#,\&,@\}^* : |\alpha|_\# = 0\right\} & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & |\alpha|.x \end{array}$$

es $\{\&, @\}$-mixta

(c) f es Σ-mixta si existen $n, m \geq 0$, tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y $I_f \subseteq \omega \cup \Sigma^*$

(d) Sea $\begin{array}{rcl} f : \omega & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & C_2^{1,0} \end{array}$. Entonces $f(5) = 2$

El tipo de una funcion mixta Dada una funcion Σ-mixta f, si $n, m \in \omega$ son tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y ademas $I_f \subseteq \omega$, entonces diremos que f *es una funcion de tipo* $(n, m, \#)$. Similarmente si $n, m \in \omega$ son tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y ademas $I_f \subseteq \Sigma^*$, entonces diremos que f *es una funcion de tipo* $(n, m, *)$. Notese que si $f \neq \emptyset$, entonces hay unicos $n, m \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que f es una funcion de tipo (n, m, s). Sin envargo $\emptyset$ es una funcion de tipo (n, m, s) cualesquiera sean $n, m \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$. De esta forma, cuando $f \neq \emptyset$ hablaremos de "el tipo de f" para refererirnos a esta unica terna (n, m, s). Notese que Suc es de tipo $(1, 0, \#)$ y d_a es de tipo $(0, *, *)$.

Ejercicio 6: Hacer

(a) De que tipo es cada una de las siguientes funciones

i. $C_\varepsilon^{1,2}$

ii. $\begin{array}{rcl} \left\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_\# = 0\right\} & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & |\alpha| .x \end{array}$

iii. id_ω

iv. id_{Σ^*}

v. $\begin{array}{rcl} \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ \alpha & \rightarrow & |\alpha| \end{array}$

vi. $\begin{array}{rcl} \{(\varepsilon, \varepsilon)\} & \rightarrow & \{\varepsilon\} \\ (\varepsilon, \varepsilon) & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$

vii. $\begin{array}{rcl} \{\Diamond\} & \rightarrow & \omega \\ \Diamond & \rightarrow & 0 \end{array}$

(b) (S) Que significa la frase

- la relacion "f es una funcion de tipo (n, m, s)" no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Predicados Σ-mixtos Un *predicado Σ-mixto* es una funcion f la cual es Σ-mixta y ademas cumple que $I_f \subseteq \{0, 1\}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \omega & \rightarrow & \omega \\ (x, y) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{array} \right. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = |\alpha| \\ 0 \text{ si } x \neq |\alpha| \end{array} \right. \end{array}$$

Operaciones logicas entre predicados Dados predicados $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \{0,1\}$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \{0,1\}$, con el mismo dominio, definamos nuevos predicados $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} (P \vee Q) : S & \to & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ o } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (P \wedge Q) : S & \to & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ y } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg P : S & \to & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Funcion identidad

Dado un conjunto A, a la funcion

$$\begin{array}{rcl} A & \to & A \\ a & \to & a \end{array}$$

La denotaremos con Id_A y la llamaremos la funcion *identidad sobre* A. Notese que $Id_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

Composicion de funciones

Dadas funciones f y g definamos la funcion $f \circ g$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} D_{f \circ g} & = & \{e \in D_g : g(e) \in D_f\} \\ f \circ g(e) & = & f(g(e)) \end{array}$$

Notar que $f \circ g = \{(u,v) : \text{existe } z \text{ tal que } (u,z) \in g \text{ y } (z,v) \in f\}$.

Ejercicio 7: Pruebe que $f \circ g \neq \emptyset$ si y solo si $I_g \cap D_f \neq \emptyset$ (esto nos dice que que muchas veces sucedera que $f \circ g = \emptyset$)

Ejercicio 8: V o F o I, justifique

(a) $Pred = Pred \circ (Pred \circ Suc)$

(b) $Pred \circ (Suc \circ Pred) = Pred$

(c) $Pred \circ (Suc \circ \{(x,x) : x \in \mathbf{N}\}) = Pred \circ Suc$

(d) $\emptyset \circ f = f \circ \emptyset = \emptyset$ cualquiera sea la funcion f

(e) Sea Σ un alfabeto finito. Si $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \omega$ se tiene que $(Suc \circ p_2^{5,0})(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3$

(f) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $Suc \circ Pred = p_1^{1,0}$

(g) $Suc \circ x = Suc$

(h) $Suc \circ 4 = 5$

(i) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $\emptyset = Pred \circ C_0^{0,0}$

(j) Si $f : D_f \subseteq \omega \rightarrow \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \rightarrow \omega$, entonces $D_{f\circ g} = \{x \in \omega : x \in D_g \text{ y } I_g \subseteq D_f\}$

Funciones de la forma $[f_1, ..., f_n]$

Dadas funciones $f_1, ..., f_n$, con $n \geq 2$, definamos la funcion $[f_1, ..., f_n]$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} D_{[f_1,...,f_n]} & = & D_{f_1} \cap ... \cap D_{f_n} \\ [f_1, ..., f_n](e) & = & (f_1(e), ..., f_n(e)) \end{array}$$

Notese que $I_{[f_1,...,f_n]} \subseteq I_{f_1} \times \cdots \times I_{f_n}$. Por conveniencia notacional (que el lector entendera mas adelante) definiremos $[f_1] = f_1$. Es decir que hemos definido para cada sucecion de funciones $f_1, ..., f_n$, con $n \geq 1$, una nueva funcion la cual denotamos con $[f_1, ..., f_n]$.

Ejercicio 9: V o F o I, justifique

(a) Sea Σ un alfabeto y supongamos $\# \in \Sigma$. Entonces $p_4^{2,3} \circ [p_1^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1}, C_{\#\#}^{1,1}, p_2^{1,1}] = C_{\#\#}^{1,1}$

(b) Si $f : \omega^2 \rightarrow \omega$, entonces $f = f \circ [x, y]$

(c) $[p_2^{2,3}, Suc] = \emptyset$

(d) Supongamos $f_i : \omega \rightarrow \omega$, para $i \in \{1, ..., n\}$, con $n \geq 2$. Entonces $I_{[f_1,...,f_n]} = I_{f_1} \times \cdots \times I_{f_n}$

Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Una funcion f es *inyectiva* cuando no se da que $f(a) = f(b)$ para algun par de lementos distintos $a, b \in D_f$. Dada una funcion $f : A \rightarrow B$ diremos que f es *suryectiva* cuando $I_f = B$. Debe notarse que el concepto de suryectividad depende de un conjunto de llegada previamente fijado, es decir que no tiene sentido hablar de la suryectividad de una funcion f si no decimos respecto de que conjunto de llegada lo es. Muchas veces diremos que una funcion f es *sobre* para expresar que es suryectiva.

Dada una funcion $f : A \to B$ diremos que f es *biyectiva* cuando f sea inyectiva y suryectiva. Notese que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces podemos definir una nueva funcion $f^{-1} : B \to A$, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(b) = \text{ unico } a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

La funcion f^{-1} sera llamada la *inversa de f*. Notese que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Ejercicio 10: V o F o I, justifique.

(a) Una función f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ cada vez que $x = y$

(b) $F : A \to B$ es suryectiva sii para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $b = F(a)$

Ejercicio 11: Hacer:

(a) Dar una biyeccion entre $\mathbf{N}$ y ω. Idem entre ω y $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$

(b) Dar una funcion inyectiva de ω^2 en ω

(c) Dar una funcion sobreyectiva de ω en ω^5

Lemma 3 *Supongamos $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son tales que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$. Entonces f y g son biyectivas, $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$.*

Ejercicio 12: (S) Haga una prueba del lema anterior

Conjuntos Σ-mixtos

Un conjunto S es llamado Σ-*mixto* si existen $n, m \in \omega$ tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Por ejemplo,

$$\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\blacktriangle, !\}^* : |\alpha| = x\}$$

$$\{(0, \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle, \varepsilon), (1, \%\blacktriangle\%, \blacktriangle\blacktriangle)\}$$

son conjuntos $\{\blacktriangle, \%, !\}$-mixtos. Tambien notese que $\emptyset$ y $\{\lozenge\}$ son conjuntos Σ-mixtos, cualesquiera sea el alfabeto Σ.

Ejercicio 13: V o F o I, justifique.

(a) Un conjunto S es Σ-mixto sii $S = D_f$ para alguna función Σ-mixta f

(b) $\{(1, 2, \varepsilon), (1, 2)\}$ es un conjunto Σ-mixto, cualesquiera sea el alfabeto finito Σ

El tipo de un conjunto mixto

Dado un conjunto Σ-mixto S, si $n, m \in \omega$ son tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces diremos que S *es un conjunto de tipo* (n, m). Notese que si $S \neq \emptyset$, entonces hay unicos $n, m \in \omega$ tales que S es un conjunto de tipo (n, m). Sin envargo $\emptyset$ es un conjunto de tipo (n, m) cualesquiera sean $n, m \in \omega$. De esta forma, cuando $S \neq \emptyset$ hablaremos de "el tipo de S" para refererirnos a este unico par (n, m). Notese que ω es de tipo $(1, 0)$ y Σ^* es de tipo $(0, 1)$.

Ejercicio 14: Hacer

(a) De que tipo es cada uno de los siguientes conjuntos

i. $\left\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_\# = 0\right\}$

ii. $\{1, 2, 3\}$

iii. $\{\varepsilon\}$

iv. $\{\Diamond\}$

v. $\{(1, \varepsilon)\}$

vi. $\{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

(b) (S) Que significa la frase

- la relacion "S es un conjunto de tipo (n, m)" no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Notacion lambda

Usaremos la notacion lambda de Church en la forma que se explica a continuacion. Esta notacion siempre depende de un alfabeto finito previamente fijado. En general en nuestro lenguaje matematico utilizamos diversas expresiones las cuales involucran variables que una vez fijadas en sus valores hacen que la expresion tambien represente un determinado valor

En el contexto de la notacion lambda solo se podran utilizar expresiones con caracteristicas muy especiales por lo cual a continuacion iremos describiendo que condiciones tienen que cumplir las expresiones para que puedan ser usadas en la notacion lambda

(1) Solo utilizaremos expresiones que involucran variables numericas, las cuales se valuaran en numeros de ω, y variables alfabeticas, las cuales se valuaran en palabras del alfabeto previamente fijado. Las variables numericas seran seleccionadas de la lista

$$x, y, z, w, n, m, k, ...$$
$$x_1, x_2, ...$$
$$y_1, y_2, ...$$
$$etc$$

Las variables alfabeticas seran seleccionadas de la lista

$$\begin{aligned}&\alpha, \beta, \gamma, \eta, ...\\&\alpha_1, \alpha_2, ...\\&\beta_1, \beta_2, ...\\&etc\end{aligned}$$

(2) Por ejemplo la expresion:

$$x + y + 1$$

tiene dos variables numericas x e y (y ninguna alfabetica). Si le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 45, entonces la expresion $x + y + 1$ produce o representa el valor $48 = 2 + 45 + 1$.

(3) Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$|\alpha\beta| + |\alpha|^x$$

la cual tiene una variable numerica x y dos variables alfabeticas α y β. Supongamos ademas que el alfabeto previamente fijado es $\{@, \%\}$. Si le asignamos a x el valor 2, a α el valor @@ y a β el valor %%%, entonces la expresion $|\alpha\beta|+|\alpha|^x$ produce o representa el valor $|@@\%\%\%|+|@@|^2 = 9$.

(4) Para ciertas valuaciones de sus variables la expresion puede no estar definida. Por ejemplo la expresion

$$Pred(|\alpha|)$$

no asume valor o no esta definida cuando el valor asignado a α es ε. Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$x/(y - |\alpha|)^2$$

Esta expresion no esta definida o no asume valor para aquellas asignaciones de valores a sus variables en las cuales el valor asignado a y sea igual a la longitud del valor asignado a α.

(5) En los ejemplos anteriores las expresiones producen valores numericos pero tambien trabajaremos con expresiones que producen valores alfabeticos. Por ejemplo la expresion

$$\beta^y$$

tiene una variable numerica, y, una variable alfabetica, β, y una vez valuadas estas variables produce un valor alfabetico, a saber el resultado de elevar el valor asignado a la variable β, a el valor asignado a y.

(6) Una expresion E para poder ser utilizada en la notacion lambda relativa a un alfabeto Σ debera cumplir alguna de las dos siguientes propiedades

(a) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas de manera que E este definida para esos valores, deberan ser siempre elementos de ω

(b) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas de manera que E este definida para esos valores, deberan ser siempre elementos de Σ^*.

(7) Por ejemplo la expresion

$$x/2$$

no cumple la propiedad dada en (6) ya que para ciertos valores de ω asignados a la variable x, la expresion da valores que se salen de ω por lo cual no puede cumpir ni a. ni b.

(8) Otro ejemplo, si el alfabeto fijado es $\Sigma = \{@, \%\}$, entonces la expresion

$$@^x\$^y$$

no cumple la propiedad dada en (6) ya que por ejemplo cuando le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 6, la expresion nos da la palabra @@\$\$\$\$\$\$ la cual no pertenece a Σ^* por lo cual no puede cumpir ni a. ni b.

(9) No necesariamente las expresiones que usaremos en la notacion lambda deben ser hechas como combinacion de operaciones matematicas conocidas. Muchas veces usaremos expresiones que involucran incluso lenguaje coloquial castellano. Por ejemplo la expresion

el menor numero primo que es mayor que x

Es claro que esta expresion para cada valor de ω asignado a la variable x produce o representa un valor concreto de ω. Otro ejemplo:

el tercer simbolo de α

notese que esta expresion, una ves fijado un alfabeto Σ, estara definida o producira un valor solo cuando le asignamos a α una palabra de Σ^* de longitud mayor o igual a 3.

(10) **Expresiones Booleanas.** A las expresiones Booleanas tales como

$$x = y + 1 \text{ y } |\alpha| \leq 22$$

las pensaremos que asumen valores del conjunto $\{0, 1\} \subseteq \omega$. Por ejemplo la expresion anterior asume o produce el valor 1 cuando le asignamos a x el valor 11, a y el valor 10 y a α la palabra ε. Las expresiones Booleanas pensadas de esta forma podran ser utilizadas en la notacion lambda si es que tambien cumplen con las anteriores condiciones.

Definicion de $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$

Supongamos ya hemos fijado un alfabeto finito Σ y supongamos E es una expresion la cual tiene las caracteristicas descriptas anteriormente. Sea $x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m$ una lista de variables todas distintas tal que las variables numericas que ocurren en E estan todas contenidas en la lista $x_1,...,x_n$ y las variables alfabeticas que ocurren en E estan en la lista $\alpha_1,...,\alpha_m$ (puede suceder que haya variables de la lista $x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m$ las cuales no ocurran en E). Entonces

$$\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$$

denotara la funcion definida por:

(L1) El dominio de $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ es el conjunto de las $(n+m)$-uplas $(k_1,...,k_n,\beta_1,...,\beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que E esta definida cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i.

(L2) $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E] (k_1,...,k_n,\beta_1,...,\beta_m) =$ valor que asume o representa E cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i.

Notese que por tener E la propiedad (6) de mas arriba, la funcion $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ es Σ-mixta de tipo (n,m,s) para algun $s \in \{\#,*\}$. Algunos ejemplos:

(a) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@,?,¡\}$. Entonces $\lambda x\alpha \left[\alpha^{2x}\right]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \{@,?,¡\}^* & \rightarrow & \{@,?,¡\}^* \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \alpha^{2x} \end{array}$$

Aqui el lector puede notar la dependencia de la notacion lambda respecto del alfabeto fijado. Si en lugar de fijar $\Sigma = \{@,?,¡\}$ hubieramos fijado $\Sigma = \{\%\}$, entonces $\lambda x\alpha \left[\alpha^{2x}\right]$ denotaria otra funcion, a saber

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \{\%\}^* & \rightarrow & \{\%\}^* \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \alpha^{2x} \end{array}$$

(b) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@,?,¡\}$. Entonces $\lambda xyz\alpha \left[\alpha^{2x}\right]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^3 \times \{@,?,¡\}^* & \rightarrow & \{@,?,¡\}^* \\ (x,y,z,\alpha) & \rightarrow & \alpha^{2x} \end{array}$$

(c) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{\%,!\}$. Entonces $\lambda\alpha\beta [\alpha\beta]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\%,!\}^* \times \{\%,!\}^* & \rightarrow & \{\%,!\}^* \\ (\alpha,\beta) & \rightarrow & \alpha\beta \end{array}$$

Tambien tenemos que $\lambda\beta\alpha [\alpha\beta]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\%,!\}^* \times \{\%,!\}^* & \rightarrow & \{\%,!\}^* \\ (\beta,\alpha) & \rightarrow & \alpha\beta \end{array}$$

Notese que estas funciones son distintas. Por ejemplo $\lambda\alpha\beta [\alpha\beta] (\%,!) = \%!$ y $\lambda\beta\alpha [\alpha\beta] (\%,!) = !\%$

(d) Independientemente de quien sea Σ el alfabeto previamente fijado, tenemos que $\lambda xy[x+y]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^2 & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & x+y \end{array}$$

Tambien $\lambda xyzw[x+w]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^4 & \rightarrow & \omega \\ (x,y,z,w) & \rightarrow & x+w \end{array}$$

(e) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, ¡\}$. Entonces por la clausula (L1) tenemos que el dominio de la funcion $\lambda xy\alpha\beta\,[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es

$$D = \left\{(x,y,\alpha,\beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : |\alpha| \geq 1 \text{ y } y \geq 1\right\}$$

Es decir que $\lambda xy\alpha\beta\,[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \omega \\ (x,y,\alpha,\beta) & \rightarrow & Pred(|\alpha|) + Pred(y) \end{array}$$

(f) Atentos a (10) de mas arriba, la funcion $\lambda xy\,[x=y]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \omega & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x=y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{array}\right. \end{array}$$

y $\lambda x\alpha\,[Pred(x) = |\alpha|]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{N} \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } Pred(x) = |\alpha| \\ 0 \text{ si } Pred(x) \neq |\alpha| \end{array}\right. \end{array}$$

Tambien $\lambda\alpha\beta\,[\alpha=\beta]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^* \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (\alpha,\beta) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \alpha=\beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{array}\right. \end{array}$$

(g) Notar que para $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m\,[(\vec{x},\vec{\alpha}) \in S]$

(h) Como dijimos, la notacion lambda depende del alfabeto previamnete fijado, aunque para el caso en que la lista de variables que sigue a la letra λ no tenga variables alfabeticas, la funcion representada no depende del alfabeto

Ejercicio 15: V o F o I, justifique

(a) $\lambda xy[x+y] = \lambda yx[x+y]$

(b) Si $f : \Sigma^{*2} \to \omega$, entonces $\lambda\alpha\beta[f(\alpha,\beta)] = \lambda\beta\alpha[f(\beta,\alpha)]$

(c) $\lambda xy\alpha\beta\,[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es la función

$$\begin{array}{rcl} \left\{(x,y,\alpha,\beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : |\alpha|\,.y \neq 0\right\} & \to & \omega \\ (x,y,\alpha,\beta) & \to & (|\alpha| + y) - 2 \end{array}$$

(d) $D_{\lambda xy[x^2]} = \omega$

(e) $\lambda x[Pred(x).0] = C_0^{1,0}$

(f) $Suc = \lambda x[Suc]$

(g) $\lambda xy[x.y] \circ [\lambda xy[x.y], C_1^{2,0}] = \lambda xy[x.y]$

(h) Sea $\Sigma = \{\bigtriangledown, \Box\}$. Entonces $\lambda\alpha\beta[\alpha = \Box\beta] = \lambda\alpha\beta[\alpha = \beta] \circ \left[p_1^{0,2}, \lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \circ \left[d_\Box \circ C_\varepsilon^{0,0}, p_2^{0,2}\right]\right]$