Practico 1)

ej 1)

A = "caballo 1 esta entre los 3 primeros"
B = "caballo 2 llega segundo"
C = "caballo 3 llega tercero"

a) cuantos se estan contenidos en AB.

$A = \{\underbrace{(1,\_,\_,\_)}_{6}, \underbrace{(\_,1,\_,\_)}_{6}, \underbrace{(\_,\_,1,\_)}_{6}\}$ $\#A = 18$

$B = \{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(3,2,1,4),(3,2,4,1),(4,2,1,3),(4,2,3,1)\}$

$AB = \{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(3,2,1,4),(4,2,1,3)\}$

b) $\#A\cup B = \#A + \#B - \#AB = 24 - 4 = 20$

c)

$C = \{(\_,\_,3,\_)\}$ $\#C$

$ABC = \{(1,2,3,4)\}$

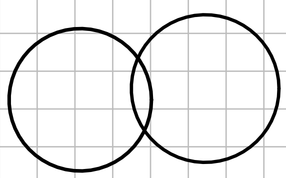
d) $\#A\cup(BC)$

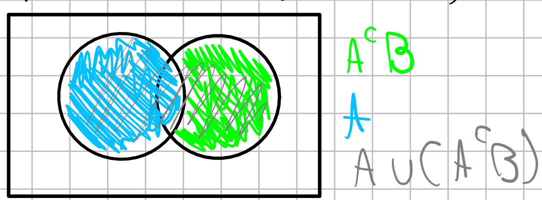
$BC = \{(1,2,3,4),(4,2,3,1)\}$

$= \#A + \#BC - \#ABC = 18 + 2 - 1 = 19$

ej 2) mostrar que

a) $A\cup B = A\cup(A^cB)$ y que $A = (AB)\cup(AB^c)$





ej 3) 9 bolas azules y 7 amarillas. se sacan 2 consecutivamente.

la probabilidad de que salga el vector (v_i,v_j) es

$P((v_i,v_j)) = \frac{1}{16\cdot 15}$

a) calcular que la 2da bola sea azul luego de que la primera sea azul.

$P(A|F) = \frac{P(AF)}{P(F)} = \frac{\frac{9\cdot 8}{16\cdot 15}}{\frac{9}{16}} = \frac{\cancel{9}\cdot 8}{\cancel{16}\cdot 15}\,\frac{\cancel{16}}{\cancel{9}} = \boxed{\frac{8}{15}}$

$P(AF) = \frac{9\cdot 8}{16\cdot 15}$

b) sacar primera azul y segunda amarillo.

$P(2^{da} \text{ amarillo} \mid 1^{ra} \text{ azul}) = \dfrac{\frac{27}{80}}{\frac{9}{16}} = \dfrac{27}{80} \cdot \dfrac{16}{9} = \dfrac{7}{15}$

$P(AF) = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{7}{15} = \dfrac{27}{80}$

ej 4)

a) $P(R_A) = \dfrac{6}{10}$ $\quad P(V_A) = \dfrac{4}{10}$

b)

$P(R_B \mid R_A) = \dfrac{8}{11}$ → B tiene una bola más y es roja.

$P(R_B \mid V_A) = \dfrac{7}{11}$ → B tiene una bola más pero es verde.

c) obtener roja de A y de B. $= R_A \cap R_B$

$$P(R_B \mid R_A) = \frac{P(R_A R_B)}{P(R_A)}$$

$P(R_A R_B) = P(R_B \mid R_A) \cdot P(R_A) = \dfrac{8}{11} \cdot \dfrac{6}{10} = \dfrac{24}{55}$

d) $P(R_B) = P(R_B \mid R_A) \cdot P(R_A) + P(R_B \mid V_A) \cdot P(V_A)$

$= \dfrac{24}{55} + \dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{24}{55} + \dfrac{14}{55}$

e) $P(R_A R_B \cup V_A V_B)$

$= \dfrac{24}{55} + \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{4}{11} = \dfrac{24}{55} + \dfrac{8}{55} = 32$

ej 5)

$P_i = P(X = i) = c\,i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

a) determinar c.

se que $P(S) = 1 \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4\}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{4} c\,i = c + 2c + 3c + 4c = 1$

$10c = 1$

$c = \dfrac{1}{10}$

b) calcular $P(2 \leq X \leq 3)$

$$\sum_{i=2}^{3} p_i = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

c) calcular $E[X]$

$$E[X] = \sum_{i=1} x_i \cdot P(X = x_i) = \frac{1}{10} + \frac{\overset{4}{\cancel{2 \cdot 2}}}{10} + \frac{\overset{9}{\cancel{3 \cdot 3}}}{10} + \frac{\overset{16}{\cancel{4 \cdot 4}}}{10}$$

$$= \frac{30}{10} = 3.$$

ej 6) ver que $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

$Var[X] = E[(X-\mu)^2]$

tomemos $X = aX+b$ luego $\Rightarrow Var[aX+b] = E[(aX+b - E(aX+b))^2]$

$= E[(aX \cancel{+b} - aE[X] \cancel{+b})^2] = E[(aX - aE[X])^2] = E[a^2 \cdot (X - E[X])^2]$

$= a^2 E[(X - E[X])^2] = \boxed{a^2 Var[X]}$

ej 7)

distribución de Poisson parametro λ = $p_i = P(X=i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, i \geq 0$

definir una relación de recurrencia $P_{n+1} = f(P_n)$

sea p_n prob para evento n

$$P_n(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

luego sea P_{n+1} la prob para evento $n+1$

$$P_{n+1} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n \cdot \lambda}{n! \cdot n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}}_{p_n}$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \cdot p_n$$

Ejercicio 8. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demuestre que la variable $Z = X + Y$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Como son indep y discretas Z esta dado por,

$$P(X+Y=a) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(a-x)$$

$$= \sum_x \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{a-x}}{(a-x)!} = e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \sum_x \frac{\lambda_1^x \cdot \lambda_2^{a-x}}{x! \cdot (a-x)!}$$

mult y divido por $a!$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_x^a \frac{\lambda_1^x \cdot \lambda_2^{a-x}}{x!\,(a-x)!} \frac{a!}{a!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{a!} \sum_x^a \frac{a!\, \lambda_1^x \cdot \lambda_2^{a-x}}{x!\,(a-x)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{a!} \sum_x^a \binom{a}{x} \lambda_1^x \cdot \lambda_2^{a-x} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{a!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^a$$

El desarrollo de $(x+y)^n$ es $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Ejercicio 9. Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 12 de granito. Si instruye a un asistente de laboratorio para que seleccione al azar 15 de los especímenes para analizarlos, ¿cuál es la función de densidad del número de especímenes de basalto seleccionados para ser analizados?

Hipergeométrica.

Distribución Hipergeométrica $H(n, N, M)$

Esta distribución se corresponde con la variable aleatoria que mide el número de éxitos en una muestra de tamaño n extraída de un conjunto de $N + M$ elementos, donde un éxito equivale a extraer un elemento del subconjunto de cardinal N.

El rango de esta distribución es $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. La función de probabilidad de masa está dada por:

$$p(i) = P(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}.$$

$n = 15$, $N = 10$ $M = 12$

Ejercicio 10. Pruebe que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces

$$E[X] = \lambda \quad y \quad Var[X] = \lambda$$

Ayuda: $E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X]$

$E[X] = \sum_i x_i \, P(X = x_i)$ como $X \sim P(\lambda)$

$= \sum_i x_i \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda} \sum_i \frac{\cancel{x_i} \, \lambda^{x_i}}{\cancel{x_i} \cdot (x-1)!} = e^{-\lambda} \sum_i \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i-1)!\cancel{\lambda}} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum \frac{\lambda^{x_i-1}}{(x_i-1)!}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$

$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

$Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - \lambda^2 = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \boxed{\lambda}$

$E[X^2] = E[X(X-1)] + \lambda$

a) Si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, entonces $g(X)$ es una variable aleatoria y

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, p(x_i), \qquad \text{(si } X \text{ es discreta)},$$

$g(y) = y(y-1)$

$E[X(X-1)] = \sum_i x_i(x_i-1) \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda} \sum_i \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i-2)!}$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \sum \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2.$

Ejercicio 13. La vida útil de cierto refrigerador está distribuida de manera aproximadamente normal con media 4.8 años y desvío 1.4 años.

a) Si el aparato tiene garantía por dos años. ¿Cuál es la probabilidad de que un refrigerador del tipo especificado elegido al azar, deba reemplazarse dentro del período de garantía?

b) Si el fabricante está dispuesto a reponer sólo el 0.5 % de los refrigeradores. ¿Cuál es el período de garantía que debe ofrecer?

$X \sim N(4{,}8,\ 1{,}4^2)$

a) $P(X \le 2)$, sea $Z \sim N(0,1) \Rightarrow P(Z \le x) = \Phi(x)$

estandarizo $X \Rightarrow \dfrac{X-4{,}8}{1{,}4} \sim N(0,1)$

$P\left(\dfrac{X-4{,}8}{1{,}4} \le \dfrac{2-4{,}8}{1{,}4}\right) = \Phi(-2)$ luego

$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}228$

b) busco el k tq $P(Z \le k) = 0{,}005$

$0{,}005 = P(Z \le k) = P(Z \ge -k) = 1 - P(Z \le -k)$

$0{,}005 = 1 - P(Z \le -k) \Rightarrow P(Z \le \underbrace{-k}_{c}) = 0{,}995$

$\Phi(\underbrace{2{,}575}_{c}) = 0{,}995 \Rightarrow 2{,}575 = -k \qquad k = -2{,}575$

ahora para X estandarizo.

$P(Z \le -2{,}575) = P\left(\dfrac{X-4{,}8}{1{,}4} \le \dfrac{x-4{,}8}{1{,}4}\right)$

despejo: $-2{,}575 = \dfrac{x-4{,}8}{1{,}4} = 1{,}195$ años de garantía.

Ejercicio 12. Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma exponencial. Calcule la densidad de probabilidad condicional de X dado que $X+Y=t$.

X, Y ind $\simeq \mathcal{E}(\lambda)$, $Z = X+Y$ porque son indep.

$$f_Z(t) = f_X * f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, f_Y(t-x)\, dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-x)}\, dx$$

$$= \int_0^t \lambda^2 \cdot e^{-\lambda(x+(t-x))} = \lambda^2 e^{-\lambda t} \cdot (t-0) \to f_Z(t)$$

ahora quiero ver $f_{X|Z}(x \mid Z=t) = \dfrac{f_{X,Z}(x,t)}{f_Z(t)}$ (*)

$$f_{X,Z}(x,t) = f_{\underbrace{X,Y}_{\text{son indep}}}(x, t-x) = f_X(x) \cdot f_Y(t-x)$$

(*) $$= \frac{\cancel{\lambda} e^{-\lambda x} \cdot \cancel{\lambda} e^{-\lambda(t-x)}}{\cancel{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda t} \cdot t} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \cdot t} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{distr. Uniforme.}}$$ para $t - x > 0$, $t > x$

luego $\boxed{X \mid (Z=t) \sim \mathcal{U}(0,t)}$