Metodo Monte Carlo.

procedimiento general para seleccionar muestras aleatorias de una población utilizando números aleatorios.

Se basa en 2 resultados fundamentales.

1. La **Ley Fuerte de los Grandes Números:** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con media μ, entonces:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1, \tag{4.1}$$

o equivalentemente con probabilidad 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu.$$

2. Si X es una variable aleatoria absolutamente continua, con función de densidad f, y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función, entonces $g \circ X$ es una variable aleatoria y su valor esperado está dado por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx.$$

Se usa para calcular algun θ tq sea de la forma que

$$\theta = E[g(X)] \quad X \text{ v.a con densidad } f.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Uno de los usos de monte carlo es calcular integrales.

ej: quiero calcular $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 e^{-\cos x^2} dx$ debo intentar verlo como un valor esperado.

$$\int_0^1 g(x)\cdot 1\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}_{\text{densidad de } U\sim\mathcal{U}(0,1)}\, dx = E[g(U)]$$

como calculo? uso ley fuerte g.N.

debo generar $U_1, \ldots, U_N$ y aplicamos g: $g(U_1), \ldots, g(U_N)$

y estimamos $E[g(U)] = \dfrac{g(U_1) + \cdots + g(U_N)}{N}$

Estimar integrales en $(0,1)$, siguiendo el ejemplo anterior, si tenemos

$\theta = \int_0^1 g(x)\,dx$ lo estimamos con un N suf grande y $U\sim\mathcal{U}(0,1)$ como

$$\theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(U_i)$$

dc U_i, sera un número aleatorio.

Estimar integrales en (a, b)

Para estimar el valor de una integral definida, sobre un intervalo (a,b), con a y b reales, se aplica un cambio de variables para transformarla en una integral entre 0 y 1. Esto es, si

$$\theta = \int_a^b g(x)\,dx,$$

con $a < b$, entonces definimos la variable y:

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \qquad dy = \frac{1}{b-a}\,dx$$

y así el valor de θ puede calcularse como:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_0^1 g(a+(b-a)y)(b-a)\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy.$$

donde

$$h(y) = g(a+(b-a)y)(b-a), \qquad y \in (0,1).$$

y estimamos $\int_0^1 h(y)\,dy$

Integrar sobre (0, inf)

En el caso de la estimación de una integral en el intervalo $(0,\infty)$:

$$\theta = \int_0^\infty g(x)\,dx,$$

también se aplica un cambio de variables, transformando biyectivamente el intervalo $(0,\infty)$ en $(0,1)$. Un cambio de variables posible es el siguiente:

$$y = \frac{1}{x+1}, \qquad dy = -\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -y^2\,dx.$$

Luego se tiene que:

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = -\int_1^0 \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}\,dy = \int_0^1 \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy,$$

con

$$h(y) = \frac{1}{y^2} g(\frac{1}{y}-1).$$

ej: $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ = llevo a 0 ∞ $= \int_0^\infty e^{-(x+1)^2}\,dx \xrightarrow{\text{cambio variable.}} =$

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2} \cdot e^{-\left(\frac{1}{y}-1+1\right)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} \cdot e^{-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\,dy$$