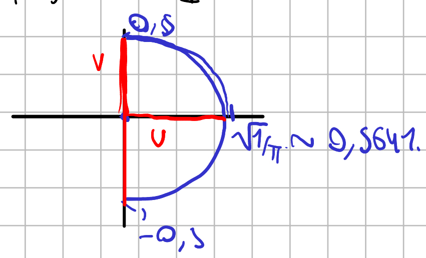
Ejercicio 11. Una variable aleatoria X tiene distribución de Cauchy con parámetro $\lambda > 0$ si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\pi\left(1+(x/\lambda)^2\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Implemente el método de razón entre uniformes para simular X con parámetro $\lambda = 1$. Para esto:

1. Pruebe que el conjunto $C_f = \{(u,v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$ es el semicírculo derecho centrado en $(0,0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.
2. Desarrolle un algoritmo CAUCHY( ) que genere pares (U,V) con distribución uniforme en C_f, y devuelva $X = V/U$. Entonces X tiene la distribución deseada. ¿Es necesario utilizar el valor de π?

tengo que encontrar el cuadrado $(0,c)\times(a,b)$ tq:



$u < \frac{1}{\sqrt{\pi\cdot(1+(\frac{v}{u})^2)}}$ $\qquad \frac{1}{u} > \sqrt{\pi\cdot(1+(\frac{v}{u})^2)}$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot u} > \sqrt{1+(\frac{v}{u})^2}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}\,u} > \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}$ multiplico por u

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} > \sqrt{u^2+v^2}$ → distancia de un punto al centro del circulo de radio 1.

quiero (u,v) tales que esten dentro del circulo de radio $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

el cuadrado que contiene a C_f es $(0,\sqrt{\frac{1}{\pi}})\times(-\sqrt{\frac{1}{\pi}},\sqrt{\frac{1}{\pi}})$

Si $X \sim C(\lambda=1) \Rightarrow$

$P(\lambda X \le x) = P(X \le \frac{x}{\lambda}) = \int_{-\infty}^{x/\lambda} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$, $\qquad$ cambio de var. $g(y) = \lambda x$ $\quad g'(y) = \lambda$ $\quad \frac{y}{\lambda} = x$ $\quad dx = dy\,\lambda$ $\quad \frac{dx}{\lambda} = dy$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+(\frac{x}{\lambda})^2\cdot\lambda} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\lambda\pi(1+(\frac{x}{\lambda})^2}\,dx \sim C(\lambda)$

rehaciendo los calculos para un nuevo C_f.

$u < \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda(1+(\frac{v}{u/\lambda})^2}} \Rightarrow u < \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi(1+(\frac{v\lambda}{u})^2)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}\cdot u} > \sqrt{1+(\frac{v\lambda}{u})^2}$

⊛ $1 + \frac{(\lambda v)^2}{u^2} = \frac{u^2+(\lambda v)^2}{u^2} = \sqrt{\frac{u^2+(\lambda v)^2}{u^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}\cdot u} > \frac{\sqrt{u^2+(\lambda v)^2}}{u}$ $\qquad$ mult. por u

$\frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} > \sqrt{u^2+(\lambda v)^2}$ $\qquad$ el punto $(u,\lambda v)$ debe estar en el circulo de radio $\sqrt{\frac{1}{\lambda\pi}}$.

$$U^2 < \frac{1}{\lambda\pi\left(1+\left(\frac{v\lambda}{U}\right)^2\right)} \qquad U^2 \cdot \lambda\pi < \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda v}{U}\right)^2} \qquad U^2\lambda\pi < \frac{1}{\frac{U^2}{U^2}+\frac{(\lambda v)^2}{U^2}}$$

$$U^2\cdot\lambda\pi < \frac{1}{\frac{U^2+(\lambda v)^2}{U^2}} \Rightarrow U^2\cdot\lambda\pi < \frac{U^2}{U^2+(\lambda v)^2} \qquad \lambda\pi < \frac{1}{U^2+(\lambda v)^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda\pi} > U^2+(\lambda v)^2$$

Ejercicio 12. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy de parámetro λ.

a) Calcule la función de distribución acumulada F_X.

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda\pi\left(1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right)} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\lambda\left(1+\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2\right)}\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2}\,dt \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{\pi\lambda}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+u^2}\,\lambda\,du = \frac{1}{\cancel{\lambda}\cdot\pi}\cdot\cancel{\lambda}\,\operatorname{arctg}(u)\Big|_{-\infty}^{x}$$

$$u = \frac{t}{\lambda}$$

$$du = \frac{1}{\lambda}\,dt \Rightarrow du\,\lambda = dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(t/\lambda)\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{-\pi}{2} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\pi}+\frac{1}{2}}$$

$$F_X(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}$$

calculo la $F^{-1}(y)$ $\longrightarrow$

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}$$

$$\pi\left(y-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\tan\left(\pi\left(y-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{x}{\lambda}$$

$$\lambda\tan\left(\pi y-\frac{\pi}{2}\right) = x$$

$$\boxed{F_X^{-1}(y) = \lambda\tan\left(\pi y-\frac{\pi}{2}\right)}$$