

Guia 5 de Logica

August 29, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Reticulados acotados

Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, s, i, 0, 1)$, tal que (L, s, i) es un reticulado terna, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes identidades

$$(I8) \quad 0 \, s \, x = x, \text{ para cada } x \in L$$

$$(I9) \quad x \, s \, 1 = 1, \text{ para cada } x \in L$$

Por ejemplo $(\{4, 56, 449\}, \max, \min, 4, 449)$ es un reticulado acotado pero es facil ver que $(\{4, 56, 449\}, \max, \min, 449, 56)$ no lo es.

Reflexion Informatica

Por supuesto, en virtud de lo desarrollado en la Guia 3 se tiene que si (L, \leq) es reticulado par en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0, entonces si tomamos:

$$\begin{array}{ll} s : L^2 & \rightarrow L \\ (a, b) & \rightarrow \sup(\{a, b\}) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} i : L^2 & \rightarrow L \\ (a, b) & \rightarrow \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

tenemos que $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado. Ademas en virtud del Teorema de Dedekind todo reticulado acotado se obtiene de esta forma. O sea que a nivel de informacion, un reticulado par que tiene 0 y 1 es exactamente lo mismo que un reticulado acotado

Ejercicio 1: V o F o I, justifique

- (a) Por definicion: un reticulado acotado es un reticulado terna (L, s, i) el cual cumple que tiene un elemento minimo 0 y un elemento maximo 1

- (b) Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado, entonces $(L, s, i, 1, 0)$ es un reticulado acotado
- (c) Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado, entonces $Ti(0) = \text{NUMERO}$

Subreticulados acotados

Dados reticulados acotados $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, s, i, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado* de $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

- (1) $L \subseteq L'$
- (2) L es cerrado bajo las operaciones s' e i'
- (3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- (4) $s = s'|_{L \times L}$ y $i = i'|_{L \times L}$

Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, s, i, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademàs S es cerrado bajo las operaciones s e i . Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado acotado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de conceptos diferentes ya que los subreticulados acotados de $(L, s, i, 0, 1)$ son reticulados acotados, es decir 5-uplas y los subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$ son conjuntos, por lo cual no son 5-uplas.

Es facil de chequear que si S es un subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$, entonces $(S, s|_{S \times S}, i|_{S \times S}, 0, 1)$ es un subreticulado acotado de $(L, s, i, 0, 1)$ y que todo subreticulado acotado de $(L, s, i, 0, 1)$ se obtiene en esta forma. Es decir, hay una biyeccion entre el conjunto de los subreticulados acotados de $(L, s, i, 0, 1)$ y el conjunto de los subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$ (cual es?). Dicho de manera mas rapida: los subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$ son ni mas ni menos que los universos de los subreticulados acotados de $(L, s, i, 0, 1)$.

Ejercicio 2: Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y S_1, S_2 son subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$, entonces $S_1 \cap S_2$ es un subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$

Homomorfismos de reticulados acotados

Sean $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F : L \rightarrow L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{aligned} F(x \ s \ y) &= F(x) \ s' \ F(y) \\ F(x \ i \ y) &= F(x) \ i' \ F(y) \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

Un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea tambien un homomorfismo. Escribiremos $(L, s, i, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$. Escribiremos "Sea $F : (L, s, i, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ un homomorfismo" para expresar que F es un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$. No hay que confundirse al leer esta notacion y pensar que F es una funcion cuyo dominio es $(L, s, i, 0, 1)$, lo cual por otra parte no tiene sentido ya que el dominio de una funcion nunca puede ser una 5-upla!

Los lemas siguientes se prueban en la misma forma que sus analogos para reticulados terna de la Guia 3. Los aceptaremos sin demostracion

Lemma 1 Si $F : (L, s, i, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo

Lemma 2 Si $F : (L, s, i, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(I_F, s'|_{I_F \times I_F}, i'|_{I_F \times I_F}, 0', 1')$

Congruencias de reticulados acotados

Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, s, i, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sea una congruencia sobre (L, s, i) . Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias \tilde{s} e \tilde{i} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x s y)/\theta \\ x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x i y)/\theta \end{aligned}$$

La 5-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, s, i, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, s, i, 0, 1)/\theta$.

Lemma 3 Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$.

- (a) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado.
- (b) π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ .

Proof. (a). Es facil ver que $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ cumple (I1), (I2),..., (I9) dado que $(L, s, i, 0, 1)$ las cumple.

(b). Es directo de su analogo para reticulados terna. ■

Lemma 4 Si $F : (L, s, i, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$.

Proof. Directo de su analogo para reticulados terna. ■

Reticulados complementados

Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de a*) tal que:

$$a s b = 1$$

$$a i b = 0$$

Notese que dicho elemento b puede no ser unico, es decir a puede tener varios complementos. Notese que si consideramos el reticulado acotado $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbf{N})$ entonces todo elemento $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ es complementado y tiene un unico complemento, a saber $\mathbf{N} - A$.

Ejercicio 3: Dar un ejemplo de un reticulado acotado y un elemento que tenga mas de un complemento

Ejercicio 4: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si 1 es un complemento de a , entonces $a = 0$. Si a es un complemento de 0 , entonces $a = 1$

Recordemos que una operacion unaria sobre un conjunto L es por definicion una funcion de L en L . Muchas veces si s denota una operacion unaria, entonces escribiremos x^s en lugar de $s(x)$.

Por un *reticulado complementado* entenderemos una 6-upla $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ tal que $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y c es una operacion unaria sobre L tal que

$$(I10) \quad x s x^c = 1, \text{ para cada } x \in L$$

$$(I11) \quad x i x^c = 0, \text{ para cada } x \in L$$

Dado un reticulado acotado $(L, s, i, 0, 1)$ puede haber mas de una operacion unaria g tal que $(L, s, i, g, 0, 1)$ resulte un reticulado complementado.

Ejercicio 5: Consideremos el poset $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ (el diamante). Es facil ver que es un reticulado par por lo cual $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, s, i)$ es un reticulado terna, donde s e i son las operaciones binarias definidas usando supremos e infimos en $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$. Note que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, s, i, 1, 30)$ es un reticulado acotado. Encuentre todas las operaciones unarias g que hacen que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, s, i, g, 1, 30)$ resulte un reticulado complementado.

Reflexion Informatica

Notese que si tenemos un reticulado par (L, \leq) en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0 y ademas tenemos una funcion $g : L \rightarrow L$ tal que

$$\begin{aligned}\sup\{x, g(x)\} &= 1 \\ \inf\{x, g(x)\} &= 0\end{aligned}$$

para cada $x \in L$, entonces podemos definir

$$\begin{array}{ll} s : L^2 \rightarrow L & i : L^2 \rightarrow L \\ (a, b) \rightarrow \sup(\{a, b\}) & (a, b) \rightarrow \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

y se obtiene que $(L, s, i, g, 0, 1)$ es un reticulado complementado. Ademas en virtud del Teorema de Dedekind todo reticulado complementado se obtiene de esta forma. O sea que a nivel de informacion, tener un reticulado par con 0 y 1 junto con una operacion unaria que da complementos, es exactamente lo mismo que tener un reticulado complementado

Subreticulados complementados

Dados reticulados complementados $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado* de $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

- (1) $L \subseteq L'$
- (2) L es cerrado bajo las operaciones s', i' y $^{c'}$
- (3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- (4) $s = s'|_{L \times L}$, $i = i'|_{L \times L}$ y $^c = ^{c'}|_L$

Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones s, i y c . Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado complementado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de conceptos diferentes ya que los subreticulados complementados de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ son reticulados complementados, es decir 6-uplas y los subuniversos de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ son conjuntos, por lo cual no son 6-uplas.

Es facil de chequear que si S es un subuniverso de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$, entonces $(S, s|_{S \times S}, i|_{S \times S}, ^c|_S, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ y que todo subreticulado complementado de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ se obtiene en esta forma. Es decir, hay una biyeccion entre el conjunto de los subreticulados complementados de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ y el conjunto de los subuniversos de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ (cual es?). Dicho de manera mas rapida: los subuniversos de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ son ni mas ni menos que los universos de los subreticulados complementados de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$.

Ejercicio 6: Refute con un ejemplo el siguiente enunciado: Sea $(L, s, i, f, 0, 1)$ un reticulado complementado y supongamos $S \subseteq L$ es un subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$ el cual cumple que para cada $x \in S$, existe un $y \in S$ tal que $x s y = 1$ y $x i y = 0$. Entonces S es un subuniverso de $(L, s, i, f, 0, 1)$

Homomorfismos de reticulados complementados

Sean $(L, s, i^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', c', 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F : L \rightarrow L'$ sera llamada un *homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', c', 0', 1')$* si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x s y) = F(x) s' F(y)$$

$$F(x i y) = F(x) i' F(y)$$

$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', c', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea un homomorfismo. Como es usual usaremos el simbolo \cong para denotar la relacion de isomorfismo. Escribiremos "Sea $F : (L, s, i^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', c', 0', 1')$ un homomorfismo" para expresar que F es un homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', c', 0', 1')$. No hay que confundirse al leer esta notacion y pensar que F es una funcion cuyo dominio es $(L, s, i^c, 0, 1)$, lo cual por otra parte no tiene sentido ya que el dominio de una funcion nunca puede ser una 6-upla!

Los lemas siguientes se prueban en la misma forma que sus analogos para reticulados acotados y los aceptaremos sin demostracion

Lemma 5 Si $F : (L, s, i^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', c', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo

Lemma 6 Si $F : (L, s, i^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', c', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', c', 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(I_F, s'|_{I_F \times I_F}, i'|_{I_F \times I_F}, c', 0', 1')$

Congruencias de reticulados complementados

Sea $(L, s, i^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre $(L, s, i^c, 0, 1)$* sera una relacion de equivalencia sobre L la cual cumpla:

- (1) θ es una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$
- (2) $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias \tilde{s} e \tilde{i} , y una operacion unaria \tilde{c} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \\(x/\theta)^{\tilde{c}} &= x^c/\theta\end{aligned}$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, s, i, c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, s, i, c, 0, 1)/\theta$. Tal como era de esperar tenemos entonces

Lemma 7 *Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un reticulado complementado y sea θ una congruencia sobre $(L, s, i, c, 0, 1)$.*

- (a) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado complementado.
- (b) π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, c, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ .

Proof. (a) Por un lema anterior ya sabemos que $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado. Es decir que solo nos falta ver que $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface las identidades (I10) y (I11). Veamos por ejemplo que satisface la (I10). Sea x/θ un elemento cualquiera de L/θ . Ya que $(L, s, i, c, 0, 1)$ satisface la (I10), tenemos que $x \text{ s } x^c = 1$. O sea que $(x \text{ s } x^c)/\theta = 1/\theta$ y por lo tanto $x/\theta \tilde{s} x^c/\theta = 1/\theta$. Pero por definicion de \tilde{c} tenemos que $(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$, lo cual nos dice que $x/\theta \tilde{s} (x/\theta)^{\tilde{c}} = 1/\theta$. Dejamos al lector ver que $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface la identidad (I11)

(b) Por el resultado analogo para reticulados acotados tenemos que π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ . Notese que por definicion de \tilde{c} tenemos que $x^c/\theta = (x/\theta)^{\tilde{c}}$, es decir $\pi_\theta(x^c) = (\pi_\theta(x))^{\tilde{c}}$, cualquiera sea $x \in L$ ■

El lema siguiente se prueba en la misma forma que sus analogos y lo aceptaremos sin demostracion

Lemma 8 *Si $F : (L, s, i, c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', c', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, s, i, c, 0, 1)$*

Ejercicio 7: Encontrar dos reticulados complementados $(L, s, i, c, 0, 1)$, $(L', s', i', c', 0', 1')$ y $F : L \rightarrow L'$ tal que F sea homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$, pero no sea homomorfismo de $(L, s, i, c, 0, 1)$ en $(L', s', i', c', 0', 1')$

Algebras de Boole

Como ya vimos en la Guia 3, un reticulado terna (L, s, i) se llama *distributivo* cuando cumpla

$$\text{Dis}_1 \quad x \text{ i } (y \text{ s } z) = (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z), \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado $(L, s, i, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, s, i, c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando (L, s, i) lo sea. Consideremos la distributividad dual a Dis_1 , es decir

$$\text{Dis}_2 \quad x \text{ s } (y \text{ i } z) = (x \text{ s } y) \text{ i } (x \text{ s } z), \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Lemma 9 Sea (L, s, i) un reticulado terna. Entonces (L, s, i) satisface Dis_1 sii (L, s, i) satisface Dis_2

Proof. Supongamos (L, s, i) satisface Dis_1 . Sean $a, b, c \in L$ elementos fijos. Por Dis_1 tenemos que

$$(a \text{ s } b) \text{ i } (a \text{ s } c) = ((a \text{ s } b) \text{ i } a) \text{ s } ((a \text{ s } b) \text{ i } c)$$

Pero por conmutatividad tenemos que

$$((a \text{ s } b) \text{ i } a) \text{ s } ((a \text{ s } b) \text{ i } c) = (a \text{ i } (a \text{ s } b)) \text{ s } (c \text{ i } (a \text{ s } b))$$

Por (I7) tenemos que $a \text{ i } (a \text{ s } b) = a$ y por Dis_1 tenemos que $c \text{ i } (a \text{ s } b) = (c \text{ i } a) \text{ s } (c \text{ i } b)$ por lo cual

$$(a \text{ i } (a \text{ s } b)) \text{ s } (c \text{ i } (a \text{ s } b)) = a \text{ s } ((c \text{ i } a) \text{ s } (c \text{ i } b))$$

Por asociatividad tenemos que

$$a \text{ s } ((c \text{ i } a) \text{ s } (c \text{ i } b)) = (a \text{ s } (c \text{ i } a)) \text{ s } (c \text{ i } b)$$

Pero por conmutatividad tenemos que

$$(a \text{ s } (c \text{ i } a)) \text{ s } (c \text{ i } b) = (a \text{ s } (a \text{ i } c)) \text{ s } (b \text{ i } c)$$

Lo cual por (I6) nos dice que

$$(a \text{ s } (a \text{ i } c)) \text{ s } (b \text{ i } c) = a \text{ s } (b \text{ i } c)$$

Por transitividad de la igualdad, las igualdades anteriores nos dicen que

$$a \text{ s } (b \text{ i } c) = (a \text{ s } b) \text{ i } (a \text{ s } c)$$

Pero a, b, c eran elementos arbitrarios por lo que hemos probado que vale Dis_2 .

■

Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado que es distributivo. Algunos ejemplos:

- E1 Dado un conjunto no vacío X , la 6-upla $(X, \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$ es un álgebra de Boole
- E2 $(\{1\}, \max, \min, \{(1, 1)\}, 1, 1)$ es un álgebra de Boole
- E3 $(\{0, 1\}, \max, \min, \{(0, 1), (1, 0)\}, 0, 1)$ es un álgebra de Boole
- E4 $(\{1, 2, 5, 10\}, mcm, mcd, c, 0, 1)$ es un álgebra de Boole, donde $c(x) = 10/x$, para cada $x \in \{1, 2, 5, 10\}$.

Para probar algunas propiedades fundamentales de un álgebra de Boole necesitaremos el siguiente

Lemma 10 Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si $x s u = x s v = 1$ y $x i u = x i v = 0$, entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

Proof. Sean $a, b, c \in L$ elementos fijos. Supongamos que

$$\begin{aligned} a s b &= a s c = 1 \\ a i b &= a i c = 0 \end{aligned}$$

(es decir b y c son ambos complementos de a). Veremos que entonces $b = c$. Notese que

$$b = b i 1 = b i (a s c) = \dots$$

■

Ejercicio 7,5: Complete la prueba anterior

Una propiedad muy importante que se da en las álgebras de Boole es

Lemma 11 Sea $(B, s, i, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Cualesquiera sean $x, y \in B$, se tiene que $y = (y i x) s (y i x^c)$.

Ejercicio 8: Pruebe el lema anterior

Theorem 12 Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in L$. Se tiene que:

$$(1) (a i b)^c = a^c s b^c$$

$$(2) (a s b)^c = a^c i b^c$$

$$(3) \quad a^{cc} = a$$

$$(4) \quad a \dot{\vee} b = 0 \text{ si y solo si } b \leq a^c$$

$$(5) \quad a \leq b \text{ si y solo si } b^c \leq a^c$$

Proof. (1) Es facil ver que $a^c \dot{\wedge} b^c$ es un complemento de $a \dot{\vee} b$ (hacer!). Pero ya que $(L, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, 1)$ es un reticulado complementado, tenemos que $(a \dot{\vee} b)^c$ es un complemento de $a \dot{\vee} b$. El Lema 10 nos dice que $(a \dot{\vee} b)^c$ y $a^c \dot{\wedge} b^c$ deben ser iguales.

(2) y (3) se prueban en forma similar (hacer!)

(4) Supongamos $a \dot{\vee} b = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (b \dot{\vee} a) \dot{\wedge} (b \dot{\vee} a^c) \\ &= (a \dot{\vee} b) \dot{\wedge} (b \dot{\vee} a^c) \\ &= 0 \dot{\wedge} (b \dot{\vee} a^c) \\ &= (b \dot{\vee} a^c) \end{aligned}$$

lo cual dice que $b \leq a^c$. Supongamos $b \leq a^c$. Entonces $a \dot{\vee} b \leq a \dot{\vee} a^c = 0$ por lo cual $a \dot{\vee} b = 0$.

(5) Supongamos $a \leq b$. Entonces $a \dot{\vee} b = b$, lo cual por (1) nos dice que $a^c \dot{\wedge} b^c = a^c$ obteniendo que $b^c \leq a^c$. La reciproca es dejada al lector (hint: use (3)) ■

Ejercicio 9: Complete la prueba del lema anterior

Ejercicio 10: Se cumplen las propiedades del teorema anterior en un reticulado complementado cualquiera?

Convencion notacional: Notese que hemos definido distintos tipos de estructuras (i.e. posets, reticulados terna, etc) y en todas ellas su primera coordenada es llamada el *universo* de dicha estructura. En general usaremos letras mayusculas en bold para denotar una estructura dada y en tal caso usaremos la convension de que su correspondiente mayuscula en italica denotara el universo de dicha estructura. Por ejemplo si decimos "sea \mathbf{L} un reticulado acotado", entonces ya queda implicita la informacion de que denotaremos con L al universo de \mathbf{L} . Ademas deberia quedar claro que en tal caso \mathbf{L} es una 5-upla.

Tambien si \mathbf{L}' denota una estructura, L' denotara su universo. Similarmente si $\tilde{\mathbf{L}}$ denota una estructura, \tilde{L} denotara su universo, etc.

Notese que entonces, si escribimos "Sea $F : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ es un homomorfismo de reticulados complementados", estaremos suponiendo que \mathbf{L} y \mathbf{L}' son reticulados complementados (i.e. ciertas 6-uplas) y que F es una funcion de L en L' la cual es un homomorfismo de \mathbf{L} en \mathbf{L}' . Aqui hay que tener

cuidado ya que D_F es L y no \mathbf{L} lo cual seria imposible ya que \mathbf{L} no es un conjunto!

Tambien notese que si \mathbf{L} denota un reticulado acotado y θ es una congruencia de \mathbf{L} , entonces \mathbf{L}/θ denotara el cociente de \mathbf{L} sobre θ , a saber cierto reticulado acotado cuyo universo es L/θ . Es decir que $Ti(\mathbf{L}/\theta) = 5\text{-UPLA}$ y $Ti(L/\theta) = \text{CONJUNTO}$