1. Sea $\Sigma = \{@, \%\}$. Sea

$$f : \{(x,\alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha| \text{ es impar}\} \rightarrow \omega$$
$$(x,\alpha) \rightarrow x + |\alpha|$$

(a) De el diagrama de una maquina de Turing M la cual compute a f.

(b) Para cada una de los siguientes pares (x,α) dar la sucecion de descripciones instantaneas que parte de $\lfloor q_0 B \mid^x B\alpha \rfloor$.

i. $(x,\alpha) = (0,\varepsilon)$
ii. $(x,\alpha) = (100,@)$
iii. $(x,\alpha) = (3,@@\%)$
iv. $(x,\alpha) = (100,@\%)$

(Note que dicha sucesion para ciertos casos debe ser infinita)

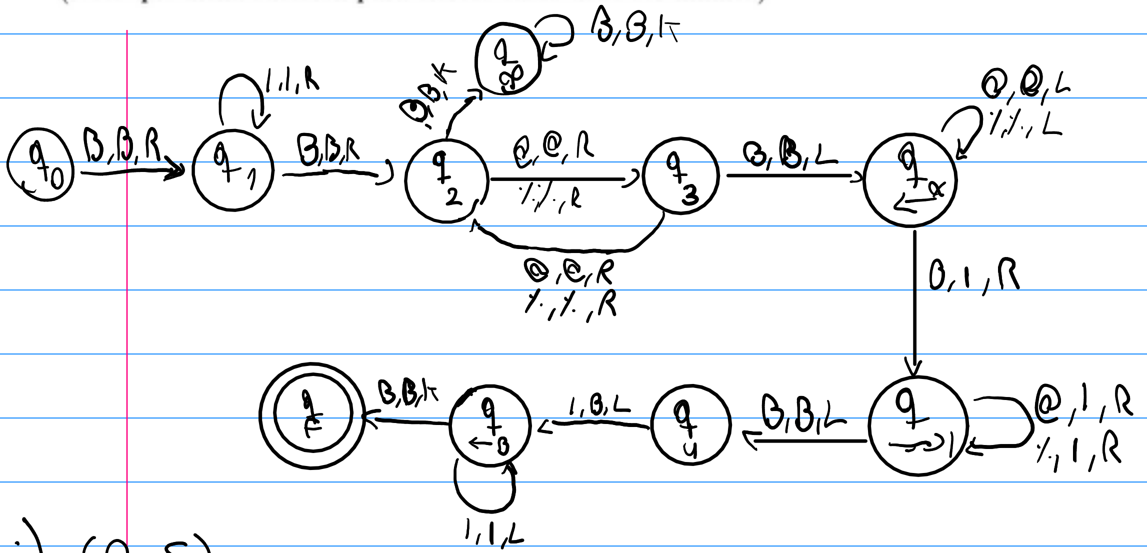
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, 1, F)$

$\Sigma = \{@, \%\}$

$\Gamma = \{B, 1\} \cup \Sigma$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_\infty, q_{\leftarrow\alpha}, q_{\rightarrow 1}, q_{\leftarrow B}, q$

$F = \{q_f\}$



i) $(0,\varepsilon) =$

$d_0 = q_0 BB\varepsilon \vdash Bq_1B\varepsilon \vdash BBq_2 \vdash BBq_\infty \vdash BBq_\infty \dots \vdash BBq_\infty$

ii) $(100,@) =$

$d_0 = q_0 B 1^{100} B@ \vdash q_1 1^{99} B@ \vdash 1 q_1 1^{98} \dots \vdash B1^{100} q_1 B@ \vdash B1^{100} B q_2 @ \vdash B1^{100} B@ q_3$

$\vdash B1^{100} B q_{\leftarrow\alpha} @ \vdash B1^{100} q_{\leftarrow\alpha} B@ \vdash B1^{100} 1 q_{\rightarrow 1} @ \vdash B1^{100} 11 q_{\rightarrow 1} \vdash B1^{100} 1 q_4 1$

$\vdash B1^{100} q_{\leftarrow B} 1 \vdash \dots \vdash q_f B1^{100} 1$

iii) $(3,@@\%) =$

$q_0 B111B@@\% \vdash Bq_1 111B@@\% \vdash B1q_1 11B@@\% \vdash \dots \vdash B111q_1 B@@\% \vdash$

$B111Bq_2 @@\% \vdash B111B@q_3 @\% \vdash B111B@@q_2 \% \vdash B111B@@\%q_3 \vdash B111B@@q_{\leftarrow\alpha}\%$

$\vdash B111B@q_{\leftarrow\alpha}@\% \vdash B111Bq_{\leftarrow\alpha}@@\% \vdash B111q_{\leftarrow\alpha}B@@\% \vdash B1111q_{\rightarrow 1}@@\% \vdash B11111q_{\rightarrow 1}@\% \vdash B111111q_{\rightarrow 1}\%$

$\vdash B1111111q_{\rightarrow 1} \vdash B111111q_4 1 \vdash B11111q_{\leftarrow B}1 \vdash B1111q_{\leftarrow B}11 \vdash \dots \vdash Bq_{\leftarrow B}111111 \vdash q_{\leftarrow B}B111111$

$\vdash q_f B111111$

iv) $(100,@\%) =$

$q_0 B1^{100} B@\% \vdash Bq_1 1^{100} B@\% \vdash B1q_1 1^{99} B@\% \vdash \dots \vdash B1^{100} q_1 B@\% \vdash B1^{100} B q_2 @\%$

$\vdash B1^{100} B@q_3 \% \vdash B1^{100} B@\% q_2 \vdash B1^{100} B@\% q_\infty$

$\vdash B1^{100} B@\% q_\infty \vdash \dots \vdash B1^{100} B@\% q_\infty \dots$

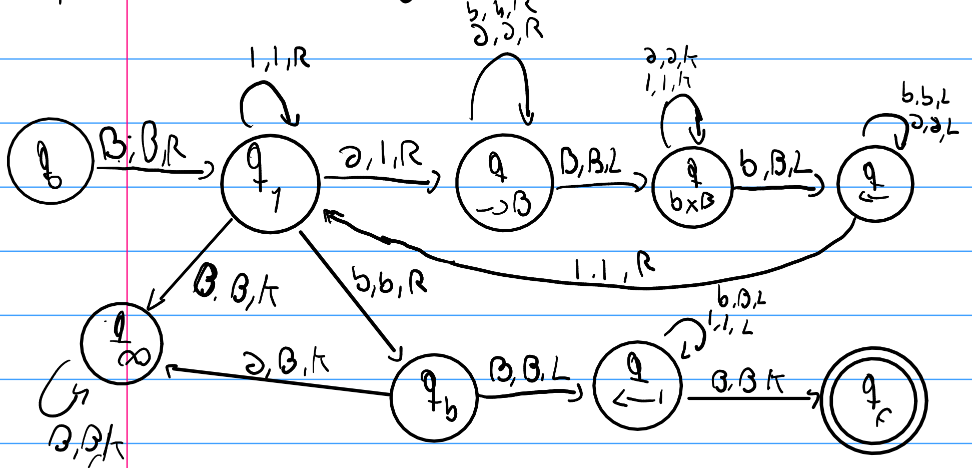
2. Sea $f : \{a^n b^{n+1} : n \geq 0\} \to \omega$ dada por $f(\alpha) = |\alpha|_a$.

(a) Dar una máquina de Turing M con alfabeto de terminales $\{a, b\}$ y de a lo sumo 12 estados que compute a f.

(b) Exhiba sucesiones de descripciones instantáneas que muestren que M funciona correctamente para los inputs en $\{ba, aabb, aabbb\}$.

Importante: Si M no funciona correctamente para cada uno de los inputs del punto (c), recibirá 0 puntos por este problema.

palabra forma $B\alpha B$



$\cancel{a}\cancel{a}\cancel{b}\cancel{b} B$ ✓
$1\,1\,1\,B\,B$

$q_0 B b a \vdash B q_1 b a \vdash B b q_b a \vdash B b q_\infty B \vdash \dots \vdash b b q_\infty B$ ✓

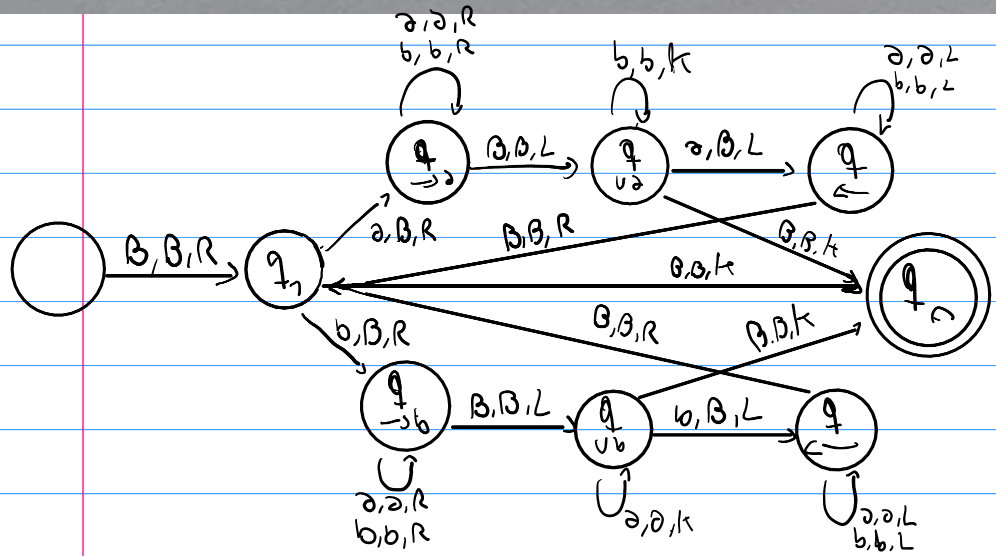
$q_0 B aabb \vdash B q_1 aabb \vdash B 1 q_{\to B} abb \vdash \dots \vdash B1abb\, q_{\to B} \vdash B1ab\, q_{b\times B}\, b$

$\vdash B1a\, q_{\leftarrow}\, bB \vdash B q_{\leftarrow} 1ab \vdash B1 q_1 ab \vdash B11 q_{\to B}\, b \vdash B11b\, q_{\to B} \vdash B11\, q_{b\times B}\, b$

$\vdash B1\, q_{\leftarrow}\, 1 \vdash B11 q_1 \vdash B11 q_\infty$ ✓

$\cancel{a}\cancel{a}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$ ✓ $1\,1\,BBB$ | $\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\cancel{b}\cancel{b}$ $1\,1\,1\,BB$ | $\cancel{b}\,a$ 1

1. Dar (por medio de un grafico) una máquina de Turing M tal que $H(M)$ sea el lenguaje $\{w \in \{a,b\}^* : w = w^R\}$ (palabras capicuas).



2. Sea $\Sigma = \{@, \%\}$ y sea $f : D_f \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ una funcion Σ-efectivamente computable. Supongamos que $@ \in D_f$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo que compute a f.

(a) Utilizando $\mathbb{P}$ diseñe un procedimiento efectivo $\mathbb{Q}$ que enumere a $L = \{(\alpha, \beta) \in D_f \times D_f : f(\alpha) = f(\beta)\}$.(note que $L \neq \emptyset$ ya que $(@, @) \in L$).

(b) Justifique por que $\mathbb{Q}$ que enumera a L

Como f e Σ-e.c, entonces por lema sabemos que el D_f e enumerable. Entonces sea $\mathbb{P}$ el proc que computa a f y $\mathbb{P}_{D_f}$ el proc que enumera a D_f entonces definimos $\mathbb{Q}$ como el proc que enumera a

Sea $<$ orden $\mathbb{D}_f$

E1: tomamos $x \in \omega$ como dato de entrada, si $x = 0$ devolver $(@, @)$ sino E2.

E2: corro - $\mathbb{P}_{D_f}$ con entrada $(x)_1$ y guardo en A $\quad A \leftarrow *^{<}((x)_1)$

- $\mathbb{P}_{D_f}$ con entrada $(x)_2$ y guardo en B $\quad B \leftarrow *^{<}((x)_2)$

$K \longleftarrow \mathbb{P}$ desde A

$Z \longleftarrow \mathbb{P}$ desde B

E3: si $K = Z$ devuelvo (A, B), sino $(@, @)$. termina.

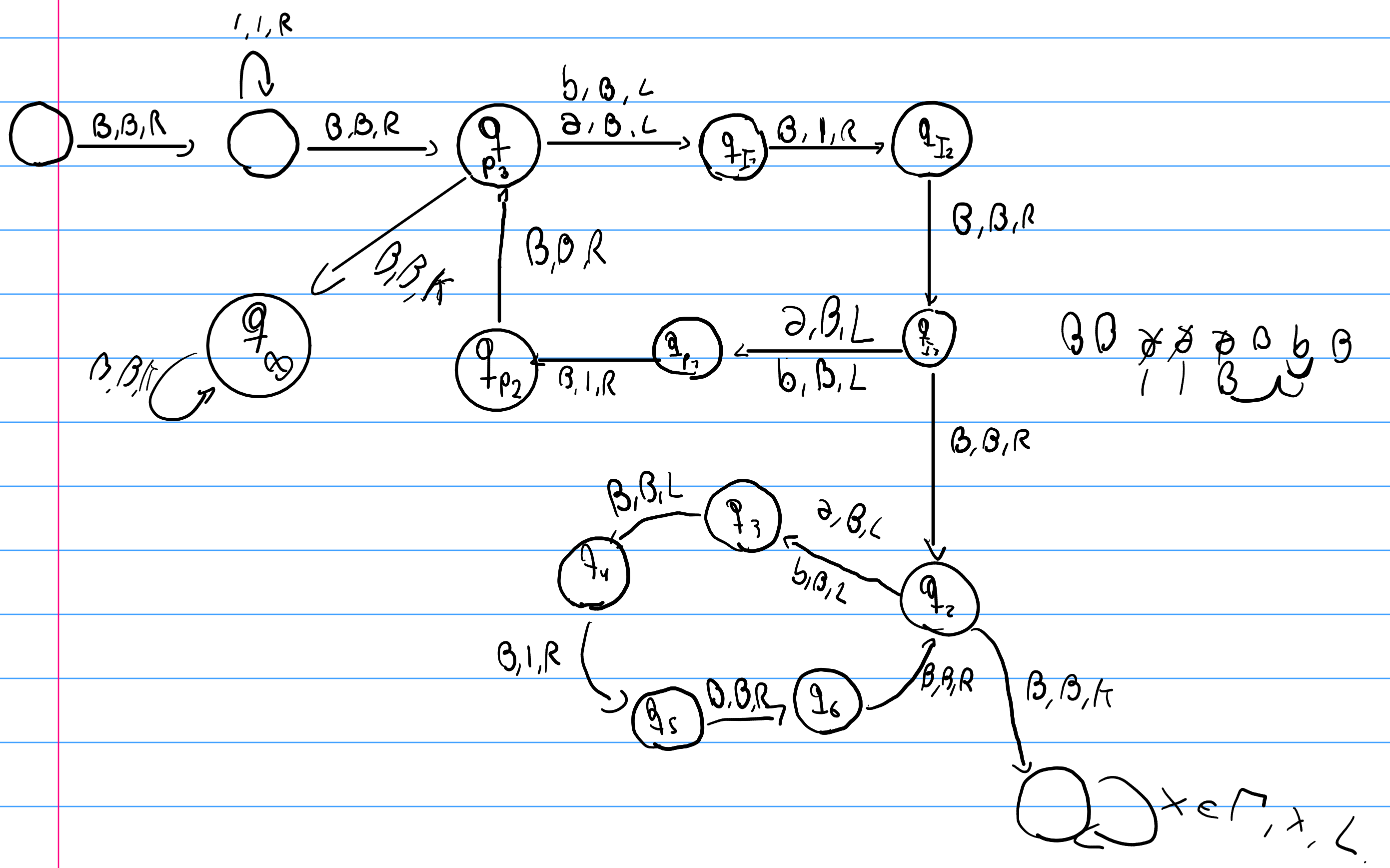
Para cada $(\alpha, \beta) \in L$ hay un $x \in \omega$ tq $\mathbb{Q}$ desde x, devuelve a (α, β) $\quad x = 2^{\#^{<}(\alpha)} \cdot 3^{\#^{<}(\beta)}$ (justificación de •)

Sea $(\alpha, \beta) \in L$ y $p, q \in \omega$ tal que $\mathbb{P}_{D_f}$ devuelve α desde p
y $\mathbb{P}_{D_f}$ " β " q

entonces sea $x = 2^p \cdot 3^q$ entonces $\mathbb{Q}$ devuelve (α, β) partiendo de x.

ej 13d) guia 4. $F: D_F \to \omega$ $D_F: \{(x,\alpha,\beta) \in \omega \times \Sigma^{*2} : |\alpha| \text{ es impar}\}$

$(x,\alpha,\beta) = x + |\alpha| + |b|$



1. Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{@, \uparrow\}^*$ conjuntos $\{@, \uparrow\}$-efectivamente enumerables tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Dar un procedimiento efectivo que enumere a $S \times L$. Explique por qué su procedimiento efectivo funciona correctamente.

Sean $\mathbb{P}_S$ y $\mathbb{P}_L$ los proc que enumeran a S y L, entonces defino $\mathbb{P}$ proc que enumera a $S \times L$.

E1: sea $x \in \omega$ dato de entrada, si $x=0$, devuelvo $(0,\varepsilon)$ y termino.

E2: corro $-\mathbb{P}_S$ desde $(x)_1$ y lo guardo en A

$-\mathbb{P}_L$ desde $(x)_2$ y lo guardo en B

E3: devuelvo (A,B).

enumera a $S \times L$, porque:

- conj de datos de entrada es ω
- termina para todo $x \in \omega$ y da como resultado $(x,\alpha) \in S \times L$
- sea $(x,\alpha) \in S \times L$, existe un $z = 2^p \cdot 3^k$ tq $\mathbb{P}$ partiendo de z devuelve x, α, donde:
  - $\mathbb{P}_S$ partiendo de p devuelve x.
  - $\mathbb{P}_L$ " " k " α.

2. Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ es Σ-efectivamente computable. Suponga ademas que $(1, @@) \in S$ y $f(1, @@) = @!!$. Pruebe que el conjunto

$$L = \{(x, \alpha) \in S : f(x, \alpha) = @!!\}$$

es Σ-efectivamente enumerable.

Como f es computable $\Rightarrow$ S es enumerable. $\mathbb{P}_S$ enumera S y $\mathbb{P}_f$ computa f.
Sea $\mathbb{P}$ el proc que enumera a L: Sea $<$ orden en Σ

e1: tomo $x \in \omega$ como dato de entrada, si $x = 0$, devuelvo $(1, @@)$. sino e2.
e2: corro $\mathbb{P}_S$ desde x y guardo lo en A.
e3: corro $\mathbb{P}_f$ desde A y si el resultado es @!! devuelvo A. sino $(1, @@)$

1. [3.5pts, booleano] Sea $\Sigma = \{a, b\}$, y sea $f : \{w \in \Sigma^* : |w|_b \geq 2\} \to \Sigma^*$ dada por $f(w) = aw$. Dar el diagrama de una máquina de Turing que compute a f.

palabras $B\alpha B$