Soluciones para Ecuaciones Recursivas

Miguel Pagano

13 de abril de 2023

La idea del uso del teorema de menor punto fijo es encontrar una solución para una ecuación recursiva. Por ejemplo, consideremos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \{0,1\} \\ f(x-2) & \text{si } x \notin \{0,1\} \end{cases} \tag{ECU-REC}$$

Una solución para esta ecuación es una función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfaga:

1. $g(0) = 0$
2. $g(1) = 1$
3. $g(n) = g(n-2)$ si n no es ni 0 ni 1.

Una receta para encontrar soluciones es definir un funcional $F\colon (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$ de la manera obvia:

$$F(h)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \{0,1\} \\ h(x-2) & \text{si } x \notin \{0,1\} \end{cases} \tag{DEF-F}$$

Entonces todo punto fijo de F es una solución para la ecuación recursiva.

Lema 1. *Si $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un punto fijo de F, entonces g satisface (ECU-REC).*

Demostración. Como g es punto fijo de F tenemos $g(n) = F(g)(n)$. Probemos ahora los tres puntos que debe satisfacer una función para ser solución.

1. $g(0) = F(g)(0) = 0$, la segunda igualdad es por definición de $F(g)$.
2. $g(1) = F(g)(1) = 1$.
3. Si $n \notin \{0,1\}$, entonces $g(n) = F(g)(n) = g(n-2)$.

□

Ejemplo 1. *Podemos probar fácilmente que la siguiente $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es punto fijo de F*

$$h(n) = \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 5 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Para ver que es punto fijo debemos ver que $h(n) = F(h)(n)$ para todo n. Para $n \geqslant 2$ sale fácil porque en ese caso $h(n) = n \mod 2 = (n-2) \mod 2 = F(h)(n)$. Si $n \in \{0,1\}$, entonces es trivial. Finalmente, si $n < 0$, entonces $h(n) = 5 = h(n-2) = F(h)(n)$.

Está claro que el 5 no tiene nada de especial y cualquier valor constante para los negativos daría lo mismo. Es decir, hay una infinidad de puntos fijos para F. Entonces podemos preguntarnos si hay algún motivo para quedarnos entre alguno de ellos como *la* solución de (ECU-REC). La forma de responder esta pregunta es cambiando el dominio de las posibles soluciones: en vez de pensar en funciones totales pensamos en funciones parciales, entonces elegiremos la función menos definida que satisfaga la ecuación.

Para pasar a funciones parciales de una manera cómoda elegimos trabajar con soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$; recordemos que $\mathbb{Z}_\perp$ es el dominio llano donde $\perp < n$ para $n \in \mathbb{Z}$ y cualesquiera dos enteros son incomparables entre sí. Debería ser claro que podemos ver a la F definida en (DEF-F) como un funcional de tipo $F\colon (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp)$.

Recordemos el orden de las funciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$; sean $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, decimos que $f \leqslant g$ si para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \leqslant g(n)$. No es difícil ver que la siguiente función $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ es el menor punto fijo de F:

$$k(n) = \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Como k es un punto fijo de F, entonces k es solución para (ECU-REC). Además es la que elegimos porque es la menos arbitraria de todas las soluciones: sólo está definida en los puntos donde la ecuación lo exige, en todos los otros valores está indefinida.

Cálculo de menor punto fijo

En vez de proponer una función y probar que es el menor punto fijo (como lo hicimos con k), podemos recurrir al teorema del menor punto fijo para calcularlo. Para ello primero debemos probar que el funcional $F\colon (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp)$ es continuo. Es decir, debemos probar que dada una cadena de funciones $f_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ vale la igualdad

$$F(\sqcup_i f_i) = \sqcup_i(F(f_i))$$

Ejercicio 1. *Probar la continuidad de F.*

El teorema dice que el menor punto fijo de una función continua $F\colon D \to D$ está dado por $\sqcup_i(F^i(\perp))$. En nuestro caso $\perp\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ es la función $\perp(x) = \perp$. Aclaremos de paso que $F^i(f)$ está definido por recursión en i:

$$F^0(f) = f$$
$$F^{k+1}(f) = F^k(F(f))$$

Volviendo al ejemplo, ahora nos toca calcular el menor punto fijo. Para ello calculamos $F(\perp)$, $F^2(\perp)$, $F^3(\perp)$ hasta encontrar un patrón y proponer una expresión general para $F^i(\perp)$.

$$
\begin{aligned}
F(\perp)(n) &= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

En el cálculo de $F^2(\perp)$ usaremos esta expresión

$$
\begin{aligned}
F^2(\perp)(n) &= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F(\perp)(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \text{ y } n-2 \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \text{ y } n-2 \notin \{0,1\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \in \{2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Notemos que buscamos una expresión sencilla para $F^2(\perp)$. Sigamos con $F^3(\perp)$.

$$
\begin{aligned}
F^3(\perp)(n) &= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F^2(\perp)(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 \mod 2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \text{ y } n-2 \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \text{ y } n-2 \notin \{0,1,2,3\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

En este punto podemos proponer una expresión general para $F^i(\perp)$; en $F^2(\perp)(n) \neq \perp$ si $0 \leqslant n < 4$, mientras que para $F^3(\perp)(n) \neq \perp$ si $0 \leqslant n < 6$. Entonces proponemos:

$$
F^i(\perp)(n) = \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } 0 \leqslant n < 2 * i \\ \perp & \text{si } n < 0 \text{ ó } n \geqslant 2 * i \end{cases} \tag{Fib}
$$

Una vez que proponemos esta expresión general debemos probar que es correcta.

Lema 2. *Para todo $i \in \mathbb{N}$, vale la ecuación (Fib).*

Ejercicio 2. *Probar el lema anterior por inducción en i.*

Recordemos que nuestro interés es encontrar el menor punto fijo de F. Hasta ahora tenemos una expresión general para $F^i(\perp)$. Si analizamos la cadena $F^i(\perp)(n)$ podemos ver que para cualquier $n \geqslant 0$, existe un j tal que $F^j(\perp)(n)$ está definido. Por ejemplo, para $n = 20$, tenemos que $F^{11}(\perp)(20) = 0$; mientras que para cualquier $m < 0$ la cadena $F^i(\perp)(m) = \perp$. Por lo tanto, el menor punto fijo está dado por:

$$(\sqcup_i(F^i(\perp))(n) = \begin{cases} n \mod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases} \tag{MPF}$$