Lenguajes y Compiladores

Miguel Pagano

29 de marzo de 2023

Ȯtra vez sopa,
donde la Ȯ es por "Ȯtra vez sopa"

¿Qué función es?

```haskell
f :: Int -> Int
f n = if n == 0
  then 0
  else if n == 1
       then 1
       else f (n-2)
```

¿Qué función es?

```haskell
f :: Int -> Int
f n = if n == 0
  then 0
  else if n == 1
       then 1
       else f (n-2)
```

```
ghci> import Control.Arrow ((&&&))
ghci> map (id &&& f) [0..9]
[(0,0),(1,1),(2,0),(3,1),(4,0),(5,1),(6,0),(7,1),(8,0),(9,1)]
ghci> f 9
1
ghci> f (-1)
```

Lo escribamos en matemática

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

¿Definición o Ecuación?

Lo escribamos en matemática

$$f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Interrogantes

1. ¿Se corresponde esta "definición" con la de Haskell?
2. ¿Define esta ecuación una función? ¿Qué dominio y qué rango tiene?
3. ¿Define una única función?
4. ¿Por qué las ecuaciones $[\![\_]\!]$ no tenían problemas?

¿Definición o Ecuación?

Lo escribamos en matemática

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Encontrás dependendiendo de dónde buscás

1. ¿Qué sucede si asumimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
2. ¿Por qué sería distinto si quisiéramos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?
3. ¿Qué sucede si nos conformamos con $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$?
4. ¿Cómo podríamos elegir una u otra solución en cada uno de esos conjuntos?

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Esta ecuación ***recursiva*** la podemos ver como una especificación. Entonces dada una función $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ podemos ver si g satisface la ecuación probando:

1. $g\,0 = 0$,
2. $g\,1 = 1$ y
3. para todo $n \notin \{0,1\}$, $g\,n = g\,(n-2)$.

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$
2. Es decir son incomparables.

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$
2. Es decir son incomparables.
3. Elegir una u otra es arbitrario.

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?
2. ¿Cuál preferimos?

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?
2. ¿Cuál preferimos?
3. ¿Cuál representa mejor a la f de Haskell?

¡El bottom del orden!

Introduciendo parcialidad explícitamente

De $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$
Lo que vamos a hacer es totalizar las funciones parciales agregando un nuevo elemento, $\perp$ que llamamos ***bottom***, al codominio.

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Introduciendo parcialidad explícitamente

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Ejemplos

1. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.
2. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.
3. $(X, =)$ es el poset ***discreto***.

Introduciendo parcialidad explícitamente

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Poset de Funciones Parciales
Como $X \rightharpoonup Y \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$, podemos ordenar las funciones parciales usando la contención de conjuntos.

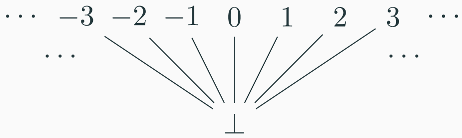
Explicitamente tenemos que $f \leqslant g$ si para todo $x \in X$,
$f(\{x\}) \subseteq g(\{x\})$, que es equivalente a
si $f(x)$ está definido entonces $g(x)$ también lo está y $f(x) = g(x)$.

¿Cuál es el menor elemento de $X \rightharpoonup Y$?

Lifting

- Sea X un conjunto y $\perp \notin X$, entonces $X_\perp = X \cup \{\perp\}$.
- Si $(X, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X_\perp, \preccurlyeq_\perp)$ también lo es:

  $x \preccurlyeq_\perp x'$ si y sólo si $x = \perp$ o $x \preccurlyeq x'$.
- El poset $(X_\perp, =_\perp)$ se llama el poset ***llano***.



- Está claro que $\perp$ es el mínimo del poset $(X_\perp, \preccurlyeq_\perp)$.
- A partir de ahora usaremos $\preccurlyeq$ para referirnos a <u>el</u> poset que tenga sentido. Si hay posibilidad de confusión lo decoramos.
- Otras veces nos referimos al poset sólo mediante su conjunto.

Topping

- Sea X un conjunto y $\top \notin X$, entonces $X^\top = X \cup \{\top\}$.
- Si $(X, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X^\top, \preccurlyeq^\top)$ también lo es:
  $x \preccurlyeq^\top x'$ si y sólo si $x' = \top$ o $x \preccurlyeq x'$.

- Ejemplo: $\mathbb{N}_\infty$ que deberíamos escribirlo como $\mathbb{N}^\infty$.

Producto de posets
Si $(X, \preccurlyeq_X)$ y $(Y, \preccurlyeq_Y)$ son posets, entonces $(X \times Y, \preccurlyeq_{X\times Y})$ también lo es:

$\langle x, y\rangle \preccurlyeq_{X\times Y} \langle x', y'\rangle$ si y sólo si $x \preccurlyeq_X x'$ e $y \preccurlyeq_Y y'$.

Espacio de funciones
Si $(Y, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X \to Y, \preccurlyeq^{\to})$ también lo es

$$f \;\preccurlyeq^{\to}\; g \text{ sii para todo } x \in X,\, f\,x \preccurlyeq g\,x.$$

Observaciones

1. Notemos que acá tenemos un único poset $(Y, \preccurlyeq)$; X es sólo un conjunto.
2. Ejercicio: $(X \rightharpoonup Y, \subseteq)$ es isomorfo a $(X \to Y_{\perp}, \preccurlyeq^{\to})$.

Predominios y Dominios

Más repaso

Supremo
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ y $Q \subseteq X$, decimos que

- $b \in X$ es una ***cota superior para*** Q si $x \preccurlyeq b$ para todo $x \in Q$.
- $a \in X$ es el ***supremo de*** Q si es la menor de las cotas superiores.

Observaciones

1. El supremo de Q no necesariamente pertenece a Q.
2. Si tomamos $(\mathbb{N}, \leqslant)$ y Q como los números pares, tenemos que Q no tiene supremo.
3. ¿Cambia la respuesta si nos pasamos a $\mathbb{N}^{\infty}$?
4. Supongamos que X es finito, ¿todo subconjunto de X tiene supremo?

Cadena
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ decimos que una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ es una ***cadena*** si $x_i \preccurlyeq x_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Decimos que una cadena es ***interesante*** si tiene infinitos elementos distintos.

Ejemplos en $\mathbb{N}$

1. $23 \leqslant 23 \leqslant \ldots \leqslant 23 \leqslant 23 \leqslant \ldots$,
2. $i * 2$ para $i \in \mathbb{N}$ (los pares vistos como cadena),

Ejemplos en $\mathbb{N}_\perp$

1. $23 \leqslant 23 \leqslant \ldots \leqslant 23 \leqslant 23 \leqslant \ldots$,
2. En $\perp \preccurlyeq \perp \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \perp \preccurlyeq 4 \preccurlyeq x \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq y \preccurlyeq \ldots$,
   qué pueden ser x e y?

Predominio

Cadena
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ decimos que una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ es una ***cadena*** si $x_i \preccurlyeq x_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Decimos que una cadena es ***interesante*** si tiene infinitos elementos distintos.

Definición
Un poset $(P, \preccurlyeq)$ es un ***predominio*** si toda cadena tiene supremo.

Observaciones

1. Si P es finito, ¿toda cadena tiene supremo?
2. Más en general, una cadena no interesante tiene supremo?
3. En $X_\perp$, hay cadenas interesantes?

Predominio

Definición
Un poset $(P, \preccurlyeq)$ es un ***predominio*** si toda cadena tiene supremo.

Caracterización
P es un predominio si todas las cadenas interesantes de P tienen supremo.

Corolario: $X_\perp$ es un predominio siempre.

Ejemplo y contra-ejemplo

1. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ no es un predominio (de hecho $\mathbb{N}$ tampoco).
2. $(\mathbb{Z}^\infty, \preccurlyeq)$ es un predominio.
3. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un predominio, cuál es el supremo de Q_i?

Construcciones sobre predominios

1. Ya vimos que $X_\perp$ es un predominio.
2. También vimos que $\mathbb{N}^\infty$ es dominio;
3. más en general si P es un predominio, entonces $P^\top$ también lo es, pero
4. por ejemplo $(\mathbb{R} \setminus \{2\})^\infty$ no es un predominio porque $2 - (1/i)$ es una cadena interesante sin supremo.
5. ¿Qué pasa con $P \times Q$? Si ambos son predominios, lo es $P \times Q$?

Espacio de funciones
Sea Y es un predominio y X un conjunto. ¿Cómo es una cadena de funciones en $X \to Y$?

Sea f_i una cadena de funciones, entonces podemos definir $\bigsqcup_{X \to Y}(f_i)\, x = \bigsqcup_Y(\{f_i\, x | i \in \mathbb{N}\})$.

Ejercicio: probar que está bien esa definición.

Dominios

Un predominio P es un dominio si tiene mínimo. Vamos a empacar la definición en una tupla de cuatro cosas: $D = (D, \sqsubseteq, \sqcup, \bot)$

Lema
Si D es un dominio, entonces $X \to D$ también lo es:

1. $\bot_{X \to D}$ está definido como:

$$\begin{aligned} \bot_{X \to D} &\;:\; X \to D \\ \bot_{X \to D}\, x &\;=\; \bot_D \end{aligned}$$

2. El supremo de una cadena de funciones ya lo definimos.

Funciones entre posets, predominios, dominios

Definiciones

Funciones monótonas
Dados dos posets $(P, \leqslant)$, $(Q, \sqsubseteq)$ y una función $f : P \to Q$, decimos que f es ***monótona*** si $x \leqslant y$ implica $f\,x \sqsubseteq f\,y$.

Observaciones

1. Es una función que respeta la estructura de los posets.
2. Si $f : P \to P'$ es una función entre predominios, tenemos $\bigsqcup' (f\,x_i) \sqsubseteq' f\,(\bigsqcup x_i)$ para cualquier cadena $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$ de P.
3. (Recordatorio) $x \sqsubseteq y$ define una cadena: $x \sqsubseteq y \sqsubseteq y \sqsubseteq \ldots$.
4. (Recordatorio') $x \sqsubseteq y$ si y sólo si $x \sqcup y = y$.

Definiciones

Funciones continuas
Dados dos predominios $(P, \sqsubseteq, \sqcup)$, $(P', \sqsubseteq', \sqcup')$ y $f \colon P \to P'$, decimos que f es ***continua*** si, para toda cadena $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$, se da $f\,(\bigsqcup x_i) = \bigsqcup' (f\,x_i)$.

Observaciones

1. Es una función que respeta la estructura de los predominios (supremos).
2. Por los dos recordatorios, continua implica monótona.
3. Por la segunda propiedad, es equivalente a pedir que sea monótona y $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$, se da $f\,(\bigsqcup x_i) \sqsubseteq \bigsqcup' (f\,x_i)$.
4. Para romper continuidad de una función monótona $f \colon P \to P'$ debemos proponer una cadena concreta de P tal que $\bigsqcup' (f\,x_i) \sqsubset f\,(\bigsqcup x_i)$.

Funciones estrictas
Dados dos dominios $(D, \sqsubseteq, \sqcup, \perp)$, $(P', \sqsubseteq', \sqcup')\perp'$ y $f\colon P \to P'$, decimos que f es ***estricta*** si se da $f\perp = \perp'$.

Observaciones

1. Es una función que respeta parte de la estructura de los dominios (supremos).
2. Para respetar todo, además tiene que ser continua.

Espacio de funciones

La clase pasada vimos que podíamos definir varias construcciones sobre Posets, Predominios y Dominios.

En general cuando trabajamos con estructuras queremos que el espacio de funciones sea el conjunto de las funciones que respetan la estructura. Es decir,

- En Posets, $P \to Q = \{f\colon P \to Q \mid f \text{ es monótona }\}$.
- En Predominios, $P \to P' = \{f\colon P \to P' \mid f \text{ es continua }\}$.
- En Dominios, $D \to D = \{f\colon D \to D' \mid f \text{ es continua y estricta}\}$.
- En Dominios también, $D \to D' = \{f\colon D \to D' \mid f \text{ es continua }\}$.

Entonces deberíamos probar que $\bigsqcup f_i\colon P \to P'$ es continua.

Categorías (no es importante)

En cada una de esas ***categorías***, posets con funciones monótonas, predominios con funciones continuas, dominios con funciones continuas (y estrictas), tenemos:

1. $id_P \colon P \to P$ es monótona, continua, continua y estricta.
2. Si $f \colon P \to P'$ y $g \colon P' \to P''$, entonces $g \circ f \colon P \to P''$.

Esto nos dice que tenemos un categoría de Posets y funciones monótonas, de Predominios y funciones continuas, de dominios y funciones continuas y estrictas. También una de dominios y funciones continuas (pero no necesariamente estrictas).

Las clausuras por productos y espacio de funciones nos hablan de categorías cartesianas cerradas.

Teorema del menor punto fijo

Sea $f : A \to A$, decimos que $a \in A$ es un ***punto fijo de*** f si $f\ a = a$.

Teorema del menor punto fijo

Sea $f\colon A \to A$, decimos que $a \in A$ es un ***punto fijo de*** f si $f\ a = a$.

Sea $F\colon D \to D$ una función continua. Entonces existe el menor punto fijo de F.

Teorema del menor punto fijo

Sea $f \colon A \to A$, decimos que $a \in A$ es un ***punto fijo de*** f si $f\ a = a$.

Sea $F \colon D \to D$ una función continua. Entonces existe el menor punto fijo de F.

Consideremos la cadena $\bot \sqsubseteq F \bot \sqsubseteq F^2 \bot \sqsubseteq F^3 \bot \sqsubseteq \ldots$.

Una posible demostración

1. Lema: Si x_i es una ω-cadena, entonces x_{i+1} también lo es.
2. Lema: Las cadenas x_i y x_{i+1} tienen el mismo supremo.
3. Lema: Si $x_i \sqsubseteq y$, para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} x_i \sqsubseteq y$.