Cadenas de Markov

Un proceso de Markov con un conjunto discreto de estados S es una **cadena de Markov**. Y la propiedad de Markov se escribe como:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = x_n)$$

Dada una cadena de Markowv con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ las probabilidades de transición son los numeros:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \text{para } i, j \in S$$

p_{ij} es la probabilidad de transición de i a j en un paso. Para representar todas las probabilidades de transición de una cadena de Markov, se utiliza una matriz de probabilidades de transición Q.

$$Q = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Donde $p_{ij} \geq 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$ (Cada fila suma 1).

La **distribución incial** de la cadena es la funcion:

$$\pi(j) = P(X_0 = j) \quad \text{para } j \in S$$

Donde $\pi(j) \geq 0$ y $\sum_j \pi(j) = 1$. Por lo que teniendo la distribución inicial y la matriz de probabilidades. Podemos calcular la distribucion conjunta de $X_0, \cdots, X_n$:

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \pi(x_0) p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1} x_n}$$

Ecuaciones de Chapman Kolmogorov. Sea $Q = (p_{ij})$ la matriz de transición, entonces la matriz Q^n contiene las probabilidades de transición en n etapas.

$$(Q^n)_{ij} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

Dos estados i y j se **comnican** si j es accesible desde i e i es accesible desde j.

Una **clase comunicante** es un subconjunto de estados donde todos los estados se comunican entre si.

Un subconjunto C no vacío de estados se dice **cerrado** sii para todo $i \in C$ y $j \notin C$ se tiene que j no es alcanzable desde i.

Un subconjunto C se dice **irreducible** si y solo si no contiene ningun subconjunto propio cerrado. Una cadena se dice irreducible si su espacio de estados es irreducible (no tiene subconjuntos cerrados).

Clasificación de estados

v_{ij} es la probabilidad de que la cadena que comienza en i llegue al estado j en un tiempo positivo.

$$v_{ij} = P(X_n = j, n \geq 1 | X_0 = i)$$

- j es **recurrente** si $v_{jj} = 1$. Es decir, que siempre que parta de j todos los caminos posibles llevan a j.
- j es **transitorio** si no es recurrente.
- j es **absorbente** si $p_{jj} = 1$.

Proposición: si i es recurrente y existe un camino de i a j entonces j es recurrente.

Si la cadena de Markov es finita, no pueden ser todos los estados transitorios, al menos hay uno recurrente.

Si la cadena es finita e irreducible, todos sus estados son recurrentes. Y a cadena se dice recurrente.

Estados periodicos:

Si un estado i es recurrente, entonces hay algun n positivo tal que la probabilidad de llegar a i en el paso n partiendo desde i es mayor que 0. En particular el **periodo** del estado i es:

$$k = MCD\{n > 0 : P(X_n = i|X_0 = i) > 0\}$$

Si $k = 1$ el estado es **aperiódico**. Si $k > 1$ el estado es **periódico** con periodo k.

Si la cadena es irreducible, entonces todos tienen el mismo período o todos son aperiódicos. Se dice que la cadena es **periodica** o **aperiódica**.

Tiempos de alcance

El tiempo minimo de alcance de un subconjunto de A de S es H^A:

$$H^A = \inf \{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

Donde la **probabilidad de alcance** a A desde el estado i es:

$$h_i^A = P(H^A < \infty|X_0 = i)$$

Luego si A = $\{j\}$, entonces es la suma de las probabilidades de que en el n-esimo paso alcance j.

$$h_i^{\{j\}} = \sum_{n\geq 0} P(H^A = n|X_0 = i)$$

O también, la solución mínima no negativa del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{si } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in S} p_{ij} h_j^A & \text{si } i \notin A \end{cases}$$

El **tiempo medio de alcance** del conjunto A desde el estado i es la esperanza condicional $k_i^A = E[H^A|X_0 = i]$. Y se calcula como

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{si } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij} k_j^A & \text{si } i \notin A \end{cases}$$

El **tiempo medio de retorno** se define como el valor esperado del tiempo de alcance del estado j sobre todos los caminos de almenos un paso. Tambien puede determinarse a partir de las probabilidades de alcance desde cada uno de los estados. El tiempo medio de retorno al estado j es:

$$r_j = 1 + \sum_{i\in S} p_{ji} k_i^{(j)}$$