Lenguajes y Compiladores

Miguel Pagano

22 de marzo de 2023

Ȯtra vez sopa,
donde la Ȯ es por "Ȯtra vez sopa"

¿Qué función es?

```haskell
f :: Int -> Int
f n = if n == 0
  then 0
  else if n == 1
       then 1
       else f (n-2)
```

¿Qué función es?

```haskell
f :: Int -> Int
f n = if n == 0
  then 0
  else if n == 1
       then 1
       else f (n-2)
```

```
ghci> import Control.Arrow ((&&&))
ghci> map (id &&& f) [0..9]
[(0,0),(1,1),(2,0),(3,1),(4,0),(5,1),(6,0),(7,1),(8,0),(9,1)]
ghci> f 9
1
ghci> f (-1)
```

¿Definición o Ecuación?

Lo escribamos en matemática

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

¿Definición o Ecuación?

Lo escribamos en matemática

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Interrogantes

1. ¿Se corresponde esta “definición” con la de Haskell?
2. ¿Define esta ecuación una función? ¿Qué dominio y qué rango tiene?
3. ¿Define una única función?
4. ¿Por qué las ecuaciones $[\![\_]\!]$ no tenían problemas?

¿Definición o Ecuación?

Lo escribamos en matemática

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Encontrás dependendiendo de dónde buscás

1. ¿Qué sucede si asumimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
2. ¿Por qué sería distinto si quisiéramos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?
3. ¿Qué sucede si nos conformamos con $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$?
4. ¿Cómo podríamos elegir una u otra solución en cada uno de esos conjuntos?

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Esta ecuación ***recursiva*** la podemos ver como una especificación. Entonces dada una función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ podemos ver si g satisface la ecuación probando:

1. $g\,0 = 0$,
2. $g\,1 = 1$ y
3. para todo $n \notin \{0,1\}$, $g\,n = g\,(n-2)$.

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$
2. Es decir son incomparables.

Soluciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$g_0\,n = n \bmod 2$$

$$g_1\,n = \begin{cases} n \bmod 2 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 23 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1. $g_0(-1) = 1 \neq 23 = g_1(-1)$
2. Es decir son incomparables.
3. Elegir una u otra es arbitrario.

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?
2. ¿Cuál preferimos?

Soluciones en $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$

La ecuación

$$f\,n = \begin{cases} n0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\,(n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Soluciones

$$h_0\,n = n \bmod 2 \text{ si } n \geqslant 0$$

$$h_1\,n = n \bmod 2$$

1. ¿Cómo comparamos funciones parciales?
2. ¿Cuál preferimos?
3. ¿Cuál representa mejor a la f de Haskell?

¡El bottom[1] del orden!

[1] En inglés culo se dice bottom

Introduciendo parcialidad explícitamente

De $\mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\bot$
Lo que vamos a hacer es totalizar las funciones parciales agregando un nuevo elemento, $\bot$ que llamamos ***bottom***, al codominio.

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Ejemplos

1. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.
2. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.
3. $(X, =)$ es el poset ***discreto***.

Repaso de órdenes parciales
Un conjunto X junto con un orden parcial $\leqslant$ sobre X es un ***poset***. Un orden parcial es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Poset de Funciones Parciales
Como $X \rightharpoonup Y \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$, podemos ordenar las funciones parciales usando la contención de conjuntos.

Explicitamente tenemos que $f \leqslant g$ si para todo $x \in X$,
$f(\{x\}) \subseteq g(\{x\})$, que es equivalente a
si $f(x)$ está definido entonces $g(x)$ también lo está y $f(x) = g(x)$.

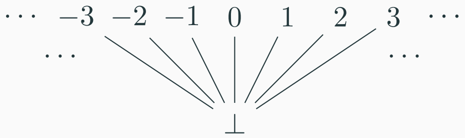
¿Cuál es el menor elemento de $X \rightharpoonup Y$?

Construcciones sobre Posets

Lifting

- Sea X un conjunto y $\perp \notin X$, entonces $X_\perp = X \cup \{\perp\}$.
- Si $(X, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X_\perp, \preccurlyeq_\perp)$ también lo es:

  $x \preccurlyeq_\perp x'$ si y sólo si $x = \perp$ o $x \preccurlyeq x'$.
- El poset $(X_\perp, =_\perp)$ se llama el poset ***llano***.



- Está claro que $\perp$ es el mínimo del poset $(X_\perp, \preccurlyeq_\perp)$.
- A partir de ahora usaremos $\preccurlyeq$ para referirnos a el poset que tenga sentido. Si hay posibilidad de confusión lo decoramos.
- Otras veces nos referimos al poset sólo mediante su conjunto.

Topping

- Sea X un conjunto y $\top \notin X$, entonces $X^\top = X \cup \{\top\}$.
- Si $(X, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X^\top, \preccurlyeq^\top)$ también lo es:
  $x \preccurlyeq^\top x'$ si y sólo si $x' = \top$ o $x \preccurlyeq x'$.
- Ejemplo: $\mathbb{N}_\infty$ que deberíamos escribirlo como $\mathbb{N}^\infty$.

Producto de posets
Si $(X, \preccurlyeq_X)$ y $(Y, \preccurlyeq_Y)$ son posets, entonces $(X \times Y, \preccurlyeq_{X\times Y})$ también lo es:

$\langle x, y\rangle \preccurlyeq_{X\times Y} \langle x', y'\rangle$ si y sólo si $x \preccurlyeq_X x'$ e $y \preccurlyeq_Y y'$.

Espacio de funciones
Si $(Y, \preccurlyeq)$ es un poset, entonces $(X \to Y, \preccurlyeq^{\to})$ también lo es

$f \ \preccurlyeq^{\to}\ g$ sii para todo $x \in X$, $f\,x \preccurlyeq g\,x$.

Observaciones

1. Notemos que acá tenemos un único poset $(Y, \preccurlyeq)$; X es sólo un conjunto.
2. Ejercicio: $(X \rightharpoonup Y, \subseteq)$ es isomorfo a $(X \to Y_{\perp}, \preccurlyeq^{\to})$.

Predominios y Dominios

Más repaso

Supremo
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ y $Q \subseteq X$, decimos que

- $b \in X$ es una ***cota superior para*** Q si $x \preccurlyeq b$ para todo $x \in Q$.
- $a \in X$ es el ***supremo de*** Q si es la menor de las cotas superiores.

Observaciones

1. El supremo de Q no necesariamente pertenece a Q.
2. Si tomamos $(\mathbb{N}, \leqslant)$ y Q como los números pares, tenemos que Q no tiene supremo.
3. ¿Cambia la respuesta si nos pasamos a $\mathbb{N}^{\infty}$?
4. Supongamos que X es finito, ¿todo subconjunto de X tiene supremo?

Cadena
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ decimos que una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ es una ***cadena*** si $x_i \preccurlyeq x_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Decimos que una cadena es ***interesante*** si tiene infinitos elementos distintos.

Ejemplos en $\mathbb{N}$

1. $23 \leqslant 23 \leqslant \ldots \leqslant 23 \leqslant 23$,
2. $i * 2$ para $i \in \mathbb{N}$ (los pares vistos como cadena),

Ejemplos en $\mathbb{N}_\perp$

1. $23 \leqslant 23 \leqslant \ldots \leqslant 23 \leqslant 23$,
2. En $\perp \preccurlyeq \perp \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \perp \preccurlyeq 4 \preccurlyeq x \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq y \preccurlyeq \ldots$,
   qué pueden ser x e y?

Predominio

Cadena
Dado un poset $(X, \preccurlyeq)$ decimos que una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ es una ***cadena*** si $x_i \preccurlyeq x_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Decimos que una cadena es ***interesante*** si tiene infinitos elementos distintos.

Definición
Un poset $(P, \preccurlyeq)$ es un ***predominio*** si toda cadena tiene supremo.

Observaciones

1. Si P es finito, ¿toda cadena tiene supremo?
2. Más en general, una cadena no interesante tiene supremo?
3. En $X_\perp$, hay cadenas interesantes?

Predominio

Definición
Un poset $(P, \preccurlyeq)$ es un ***predominio*** si toda cadena tiene supremo.

Caracterización
P es un predominio si todas las cadenas interesantes de P tienen supremo.

Corolario: $X_\perp$ es un predominio siempre.

Ejemplo y contra-ejemplo

1. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ no es un predominio (de hecho $\mathbb{N}$ tampoco).
2. $(\mathbb{Z}^\infty, \preccurlyeq)$ es un predominio.
3. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un predominio, cuál es el supremo de Q_i?

Construcciones sobre predominios

1. Ya vimos que $X_\perp$ es un predominio.
2. También vimos que $\mathbb{N}^\infty$ es dominio;
3. más en general si P es un predominio, entonces $P^\top$ también lo es, pero
4. por ejemplo $(\mathbb{R} \setminus \{2\})^\infty$ no es un predominio porque $2 - (1/i)$ es una cadena interesante sin supremo.
5. ¿Qué pasa con $P \times Q$? Si ambos son predominios, lo es $P \times Q$?

Espacio de funciones
Sea Y es un predominio y X un conjunto. ¿Cómo es una cadena de funciones en $X \to Y$?

Sea f_i una cadena de funciones, entonces podemos definir $\sup_{X \to Y}(f_i)\, x = \sup_Y(\{f_i\, x | i \in \mathbb{N}\})$.

Ejercicio: probar que está bien esa definición.

Dominios

Un predominio P es un dominio si tiene mínimo.[2]

[2]Volviendo al chiste del principio, un dominio es un predominio con culo.