REDES NEURONALES 2024

Clase 9 parte 2

Lunes 9 de septiembre 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

26/9/23 c10p1

Continuamos analizando un sistema bidimensional linealizado

$$\dot{x} = a\,x + b\,y$$

$$\dot{y} = c\,x + d\,y$$

$$a = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,y^*} \qquad b = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*,y^*} \qquad c = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*,y^*} \qquad d = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*,y^*}$$

con

$$\dot{\bar{x}} = A\,\bar{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notemos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones $\bar{x}(t)$ pueden visualizarse como trayectorias que no se cortan en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos el caso particular:

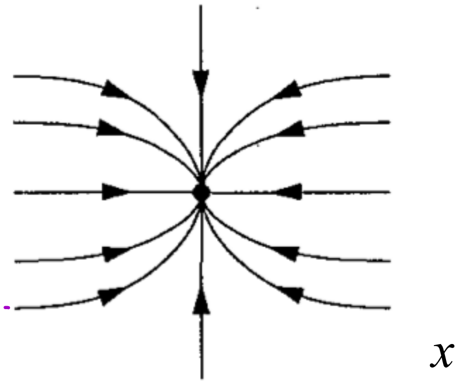
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x \\ d\,y \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = a\,x \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_0\, e^{at}$$

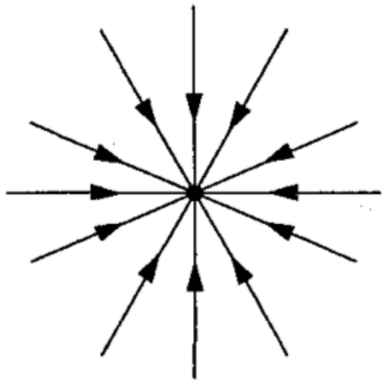
$$\dot{y} = d\,y \quad \Longrightarrow \quad y(t) = y_0\, e^{dt}$$

Consideremos el caso particular en el cual $d = -1$, o sea, el sistema es estable en la dirección y.

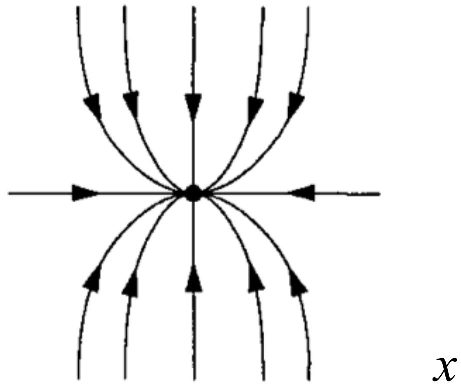
Miremos ahora como la dinámica depende del valor de a.



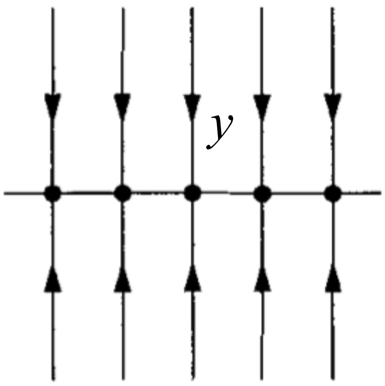
(a) $a < -1$



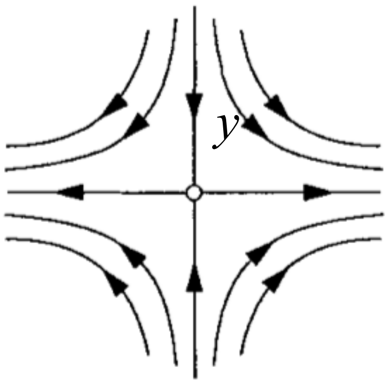
(b) $a = -1$



(c) $-1 < a < 0$



(d) $a = 0$



(e) $a > 0$

x

Ahora volvemos al,caso más general:

$$\dot{\bar{v}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{\bar{x}^*} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\,\bar{v}$$

Vamos a buscar un sistema de referencia más cómodo. Primero corrernos el origen de coordenadas al punto fijo, como ya hicimos, y luego vamos a rotar el sistema de coordenadas con la esperanza de que encontrar un sistema de coordenadas que nos facilite la descripción matemática del problema.

Debemos encontrar dos vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, y dos números reales λ_1 y λ_2, que satisfacen la ecuación:

$$A\,\bar{v} = \lambda\,\bar{v} = \lambda\,\mathbb{I}\,\bar{v}$$

$$(A\,\bar{v} - \lambda\,\bar{v}) = (A\,\bar{v} - \lambda\,\mathbb{I}\,\bar{v}) = (A - \lambda\mathbb{I})\,\bar{v} = 0$$

$$(A - \lambda I)\,\bar{v} = 0$$

$$det\,(A - \lambda I) = 0$$