REDES NEURONALES 2024

Clase 11 parte 1

Lunes 16 de septiembre 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

J28/9/23 c11p2

En esta clase veremos algunos ejemplos instructivos

Modelo predador-presa

A finales del siglo XVIII Thomas Malthus publica “A essay on the principle of population” y propone la idea de que la población humana se duplica cada cierto número fijo de años. O sea, propone un crecimiento exponencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP \qquad r > 0$$

En 1838 el matemático belga Pierre-François Verhulst introdujo la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

A principios del siglo XX *Alfred Lokta* (EE.UU) y *Vittorio Volterra* (Italia), desarrollaron en forma independiente un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias conocidas como ecuación prestador presa o ecuación Lotka-Volterra

Supongamos que queremos modelar la evolución temporal de la población de dos especies, siendo que una se alimenta de vegetales y la otra se alimenta de la primera especie.

R(t) : población de conejos al tiempo *t*

F(t) : población de zorros al tiempo *t*

Las dos ecuaciones son:

$$\dot{R}(t) = aR(t) - bF(t)R(t)$$
$$\dot{F}(t) = -cF(t) + dR(t)F(t)$$

Suponemos que

- El ecosistema está aislado. No hay migraciones, ni plagas ni otras especies.
- La población de conejos crece exponencialmente en ausencia de zorros.
- La población de zorros decae exponencialmente en ausencia de conejos.
- El encuentro de zorros y conejos es beneficioso para los zorros y perjudicial para los conejos.

$$a = 0{,}1 \qquad b = 0{,}02 \qquad c = 0.3 \qquad d = 0.01$$

$$0 = \dot{R}(t) = 0.1 \cdot R(t) - 0.02 \cdot R(t)\, F(t)$$

$$0 = \dot{F}(t) = -0.3 \cdot F(t) + 0.01 \cdot R(t)\, F(t)$$

Los puntos críticos son dos y cumplen

$$0 = R\,(0{,}1 - 0{,}02\,F)$$

$$0 = F\,(-0{,}3 + 0{,}01\,R)$$

$$R_1^* = \frac{0.3}{0.01} = 30 \qquad F_1^* = \frac{0.1}{0.02} = 5$$

$$R_2^* = 0 \qquad F_2^* = 0$$

$$\bar{X}_1^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora linealizamos:

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial R} = 0.1 - 0.02\,F \qquad \frac{\partial \dot{R}}{\partial F} = \underbrace{-0.02\,R}$$

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial R} = -0.3\,F \qquad \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} = -0.3 + 0.01\,R$$

Construimos el jacobino

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1 - 0.02\,F^{*} & -0.02\,R^{*} \\ 0.01\,F^{*} & -0.3 + 0.01\,R^{*} \end{vmatrix}$$

1) Evaluamos en $\tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.1 \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0.3 \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B) Evaluamos en $\bar{X}^*_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -0.6 \\ 0.05 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -0.6 \\ 0.05 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0.6 \times 0.05 = 0$$

$$\lambda^2 = -0.03$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{0.03}$$

$$A \bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1}) \bar{v}_1 = 0$$

$$-\lambda v_x - 0.6 v_y = 0$$

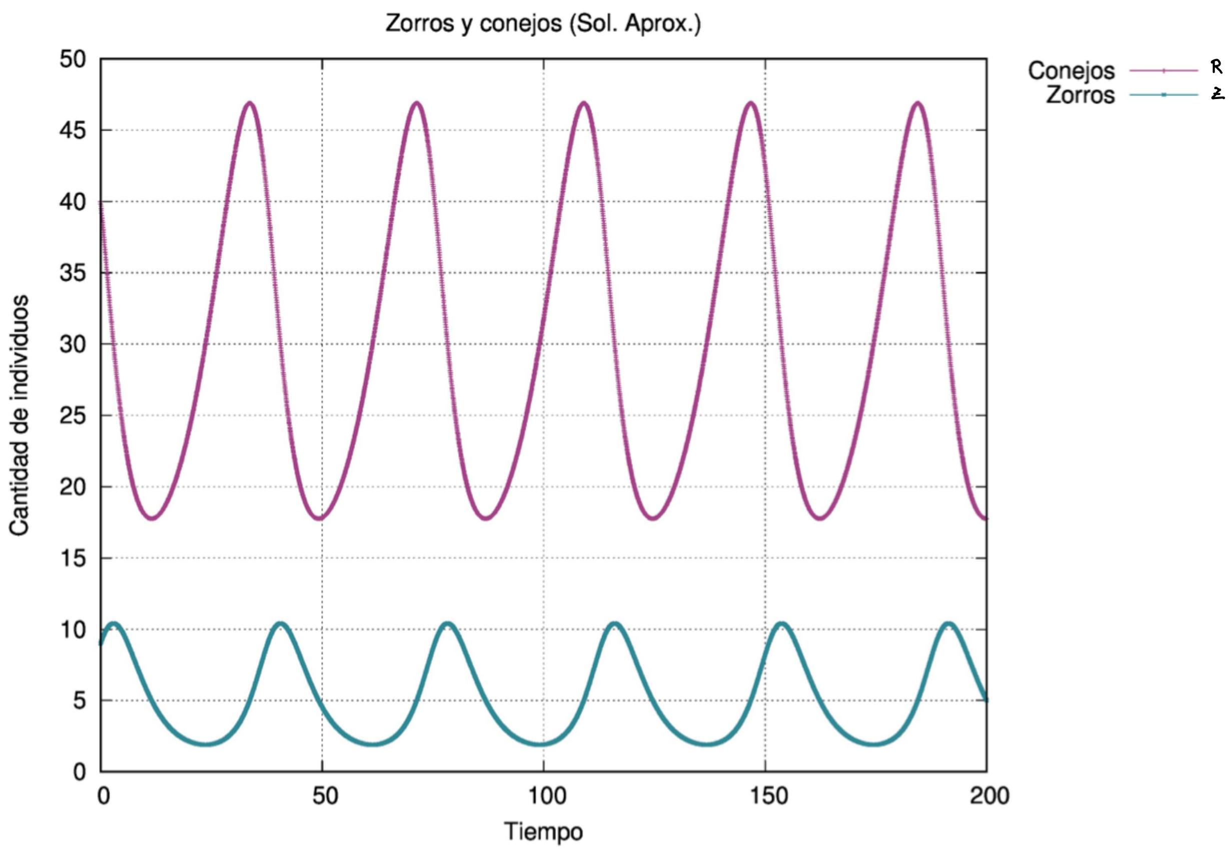
$$v_x = -i \cdot \frac{\sqrt{0.03}}{0.6} v_y$$

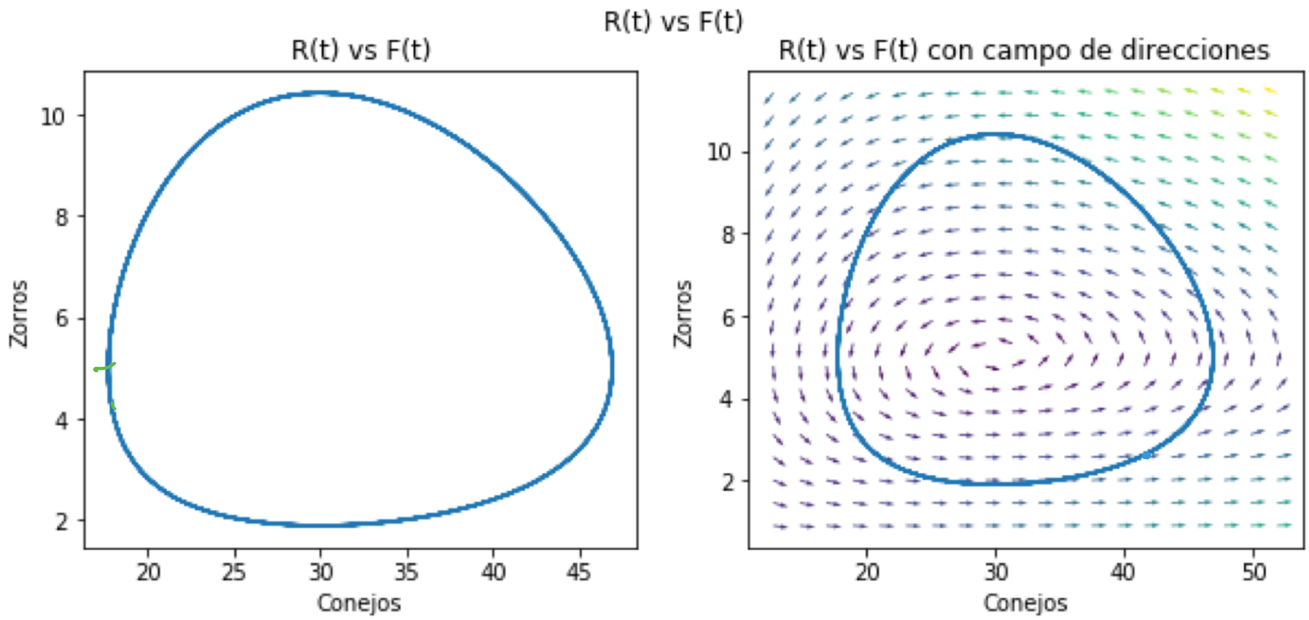
Si $\quad v_y = 1$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -i\,\dfrac{\sqrt{0.03}}{0.6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la misma forma

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} +i\,\dfrac{\sqrt{0.03}}{0.6} \\ 1 \end{pmatrix}$$




R(t) vs F(t)
R(t) vs F(t)
Zorros
Conejos
10
8
6
4
2
20
25
30
35
40
45
R(t) vs F(t) con campo de direcciones
Zorros
Conejos
10
8
6
4
2
20
30
40
50

Modelo conejos y ovejas

$x(t)$: población de conejos al tiempo t

$y(t)$: población de ovejas al tiempo t

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

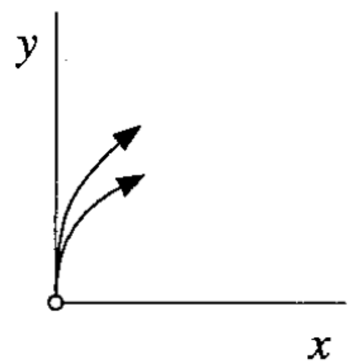
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Puntos fijos : $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$.

$(0,0):$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$



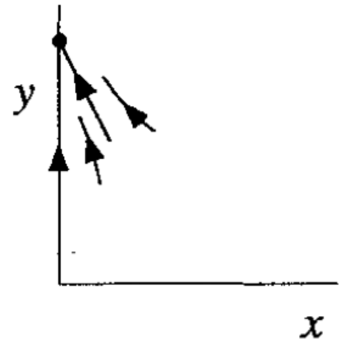
$(0,2):$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1, -2$

$\bar{v}_1 = (1, -2)$

$\bar{v}_2 = (0, 1)$

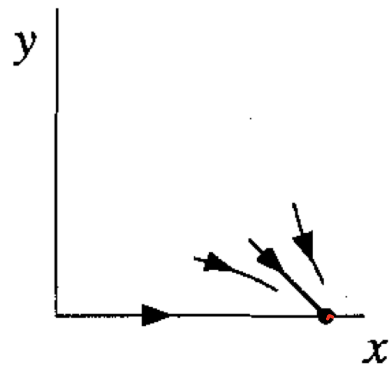


$(3,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda = -3, -1$$

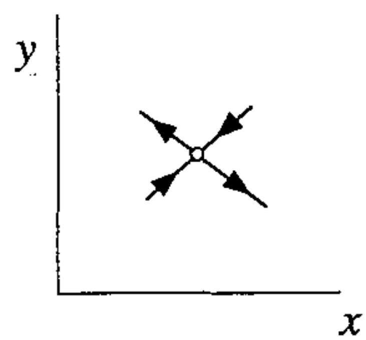
$\bar{v}_1 = (3,-1)$

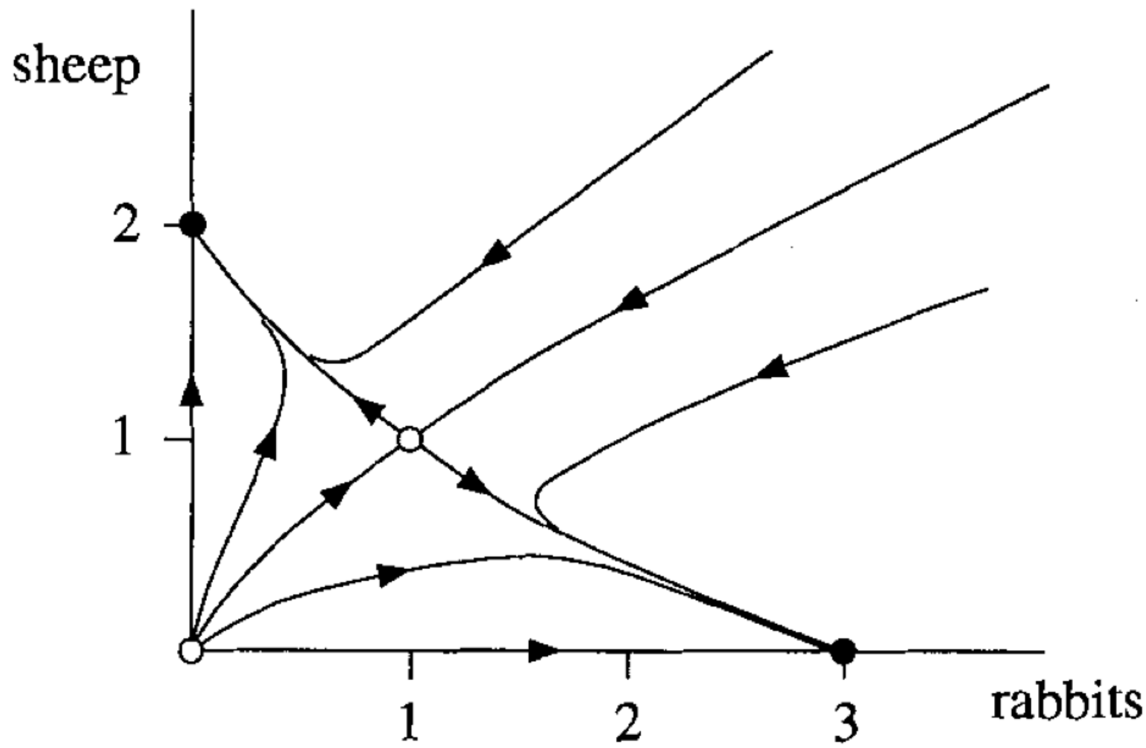
$\bar{v}_2 = (1,0)$

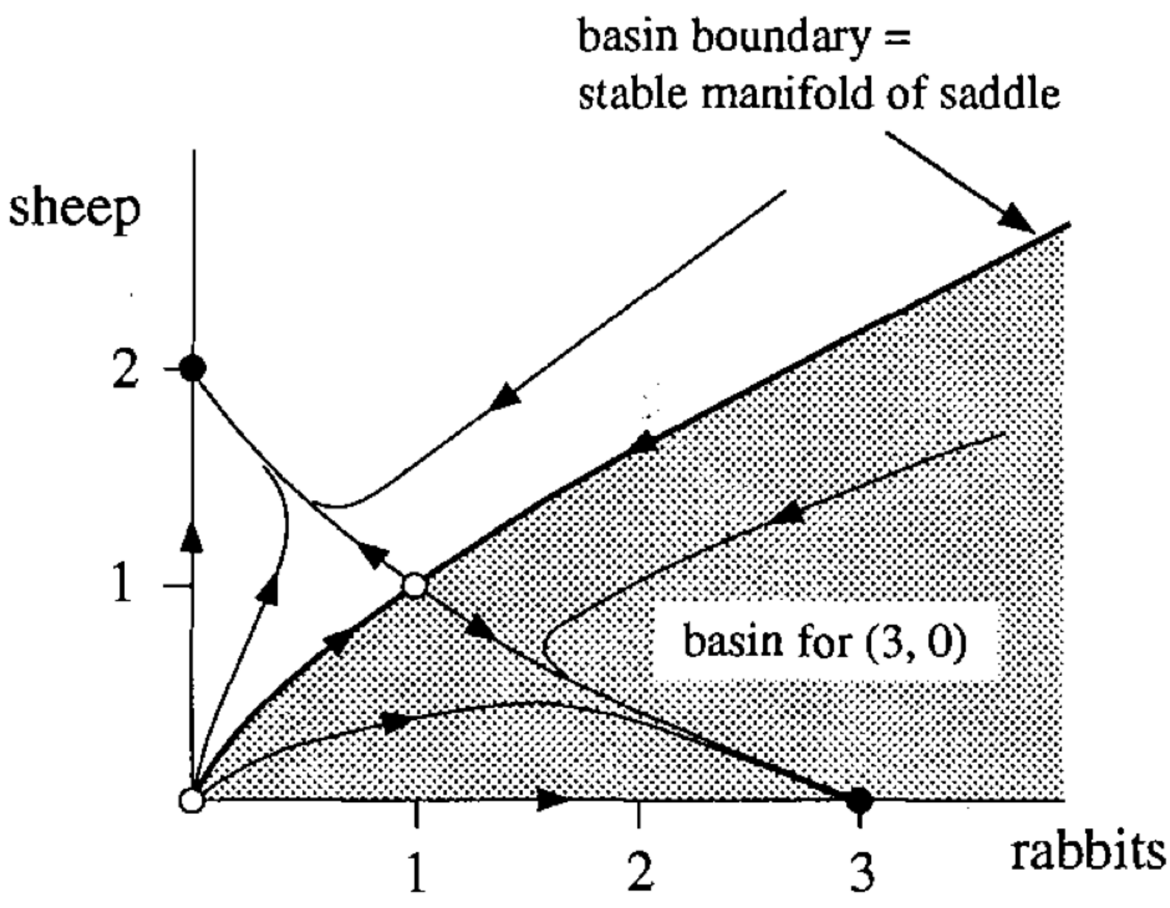


$(1,1)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$




sheep
2
1
1
2
3
rabbits


basin boundary =
stable manifold of saddle
sheep
2
1
basin for (3, 0)
1
2
3
rabbits