REDES NEURONALES 2024

Clase 13 parte 1

Jueves 26 de septiembre 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

J5/10/23 c13p2

SISTEMAS DINÁMICOS EN 3D

Supongamos que tenemos un sistema de tres EDOs acopladas:

$$\dot{x} = f(x, y, z)$$

$$\dot{y} = g(x, y, z)$$

$$\dot{z} = h(x, y, z)$$

La lógica es la de siempre: buscamos los puntos fijos (x^*, y^*, z^*) tales que

$$0 = f(x^*, y^*, z^*)$$

$$0 = g(x^*, y^*, z^*)$$

$$0 = h(x^*, y^*, z^*)$$

Linealizamos usando el teorema de Taylor en 3D y obtenemos un sistema lineal.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} f(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \\ h(\bar{x}) \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\bar{x}^*} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{\bar{x}^*} \\ \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{\bar{x}^*} \end{vmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}} \approx A\bar{x}$$

Calculando los autovalores de A y sus respectivos autovectores, podemos analizar la estabilidad. Para tener un atractor estable las parte reales de los 3 autovalores deben ser negativos.

Podemos tener 3 autovalores reales negativos (un nodo estable) o 1 autovalor real negativo y 2 autovalores complejos conjugados con parte real negativa.

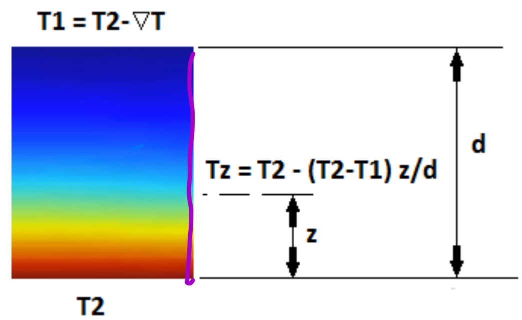
Todo lo visto en 2D sigue valiendo, aunque aparece un nuevo tipo de atractor, llamado ATRACTOR EXTRAÑO.

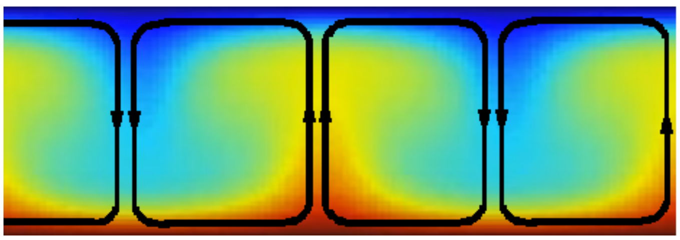
Un ejemplo

Edward Lorenz (1917 - 2008)

Meteorólogo y matemático

Creo un modelo simplificado para convencción atmosférica:


T1 = T2-∇T
d
Tz = T2 - (T2-T1) z/d
z
T2



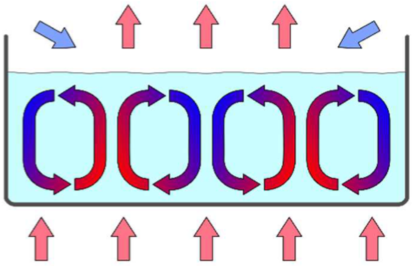
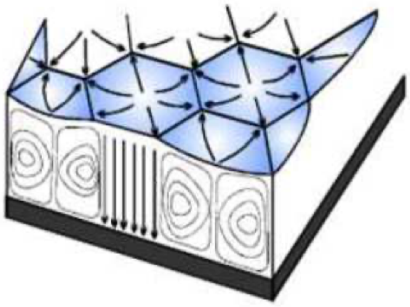
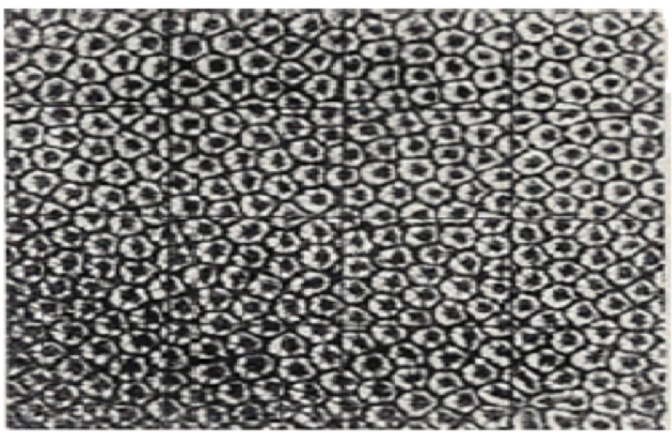
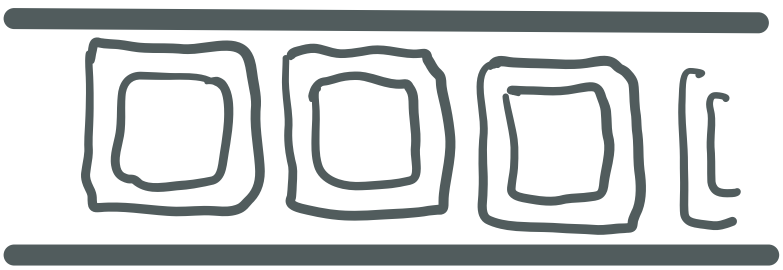


Fig.11.A




Empuje de Cordilleras
Litósfera
Manto
Tracción de Placas
Célula de Convección
Célula de Convección
Núcleo Externo
Núcleo Interno





Atmósfera : el 75% de la masa ocupa solo 11 km
10 000 km aproximadamente

nitrógeno	78%
oxígeno	21%
argón	0,9 %
dióxido de carbono	0.03%

0 - 11 km — 11 - 50km — 50 - 80km — 80 - 500 km — 500 - 10.000k

Topósfera — Estratósfera - Mesósfera - Ionósfera — Exósfera

↑

clima

$$\dot{x} = \sigma(y - z)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

σ : número de Prandtl.

ρ : número de Rayleigh.

β : razón entre largo y alto.

$x(t)$: velocidad y sentido de circulación del fluido

$x > 0$ movimiento horario

$x < 0$ movimiento anti-horario

$y(t)$: variación de temperatura vertical

$z(t)$: desviación del gradiente vertical de la variación lineal.

$\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = \frac{8}{3}$

NO LINEALIDAD

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

SIMETRÍA

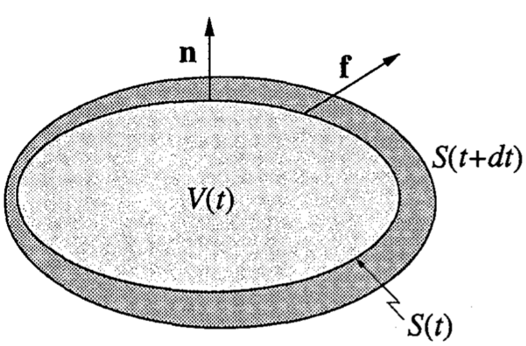
Si cambiamos $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$

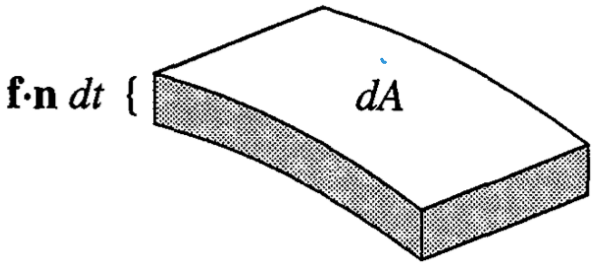
mantenemos las ecuaciones.

Si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución, el vector $(-x(t), -y(t), z(t))$ también es solución.

CONTRACCIÓN DE VOLUMEN

El sistema es disipativo





$$V(t+dt) = V(t) + \Delta V$$

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (\bar{f}.\bar{n}\, dt)\, dA$$

$$V(t+dt) - V(t) = dt \int_S \bar{f}.\bar{n}\; dA$$

$$\frac{V(t+dt)-V(t)}{dt} = \int_S (\bar{f}.\bar{n})\, dA$$

$$\dot{V} = \int_V \nabla.\bar{f}\; dV$$

Aquí usamos el Teorema de Gauss o de la Divergencia

$$\int_S \bar{F}.\bar{n}\; dA = \int_V \nabla.\bar{F}\; dV$$

$\bar{F}$: campo vectorial

$$\nabla.\bar{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Para Lorenz

$$\nabla \bar{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(y-x)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho x - y - xz\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy - \beta z\right)$$

$$= -\sigma - 1 - \beta$$

$$= -(\sigma + 1 + \beta) < 0$$

O sea :

$$\mathring{V}(t) = \int_V \nabla \cdot \bar{f} \, dV = \int_V -(\sigma + 1 + \beta) \, dV = -(\sigma+1+\beta) \int_V dV$$

$$= -(\sigma + 1 + \beta) \, V(t) < 0$$

LINEALIZACIÓN

Si se linealiza

$$A = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (\rho - z) & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{vmatrix}$$

PUNTOS FIJOS

Notamos que $\bar{x}^* = (0,0,0)$ es punto fijo siempre.

$$A_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{I})_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} (-\sigma - \lambda) & \sigma & 0 \\ \rho & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\beta$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1+\sigma) \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2}$$

En el origen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \rho & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

traza $\quad \tau = -\sigma - 1$

$$\Delta = \sigma(1-\rho)$$

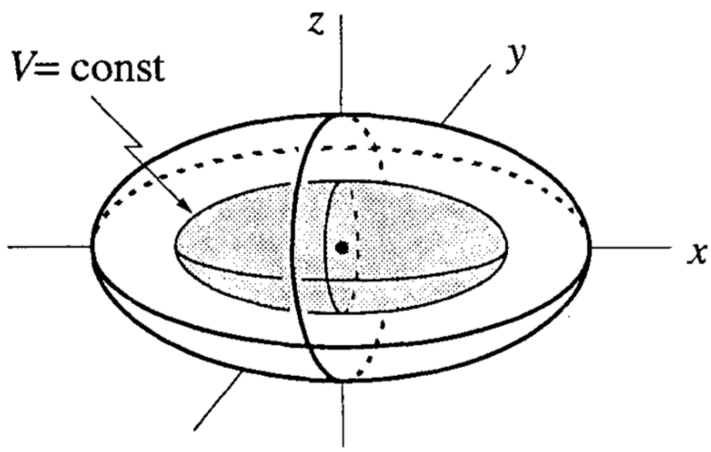
Si $\rho < 1$ el origen es un nodo estable

Si $\rho > 1$ el origen se vuelve inestable

Cuando $\rho = 1$ surgen nuevos puntos fijos

Podemos definir una función de Liapunov

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2$$



$$\frac{1}{2}\dot{V} = \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

$$= (yx - x^2) + (\rho yx - y^2 - xyz) + (zxy - \beta z^2)$$

$$= (\rho+1)xy - x^2 - y^2 - \beta z^2$$

$$= -\left(x - \frac{(\rho+1)}{2}y\right)^2 - \left(1 - \frac{(\rho+1)}{2}\right)y^2 - bz^2$$

$$< 0$$

La solución $\bar{x}^* = (0,0,0)$ es globalmente estable si $\rho < 1$

Las soluciones C^+ y C^-

En $\rho = 1$ el origen se torna estable y surgen dos nuevos puntos fijos

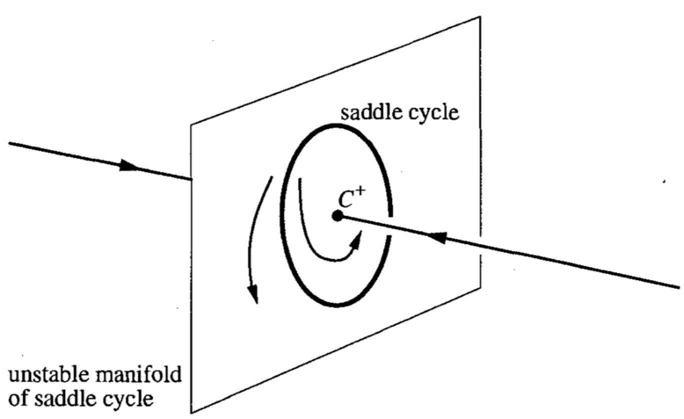
$$C^+ : \quad x^* = y^* = \sqrt{b(\rho-1)} \qquad z^* = \rho - 1$$

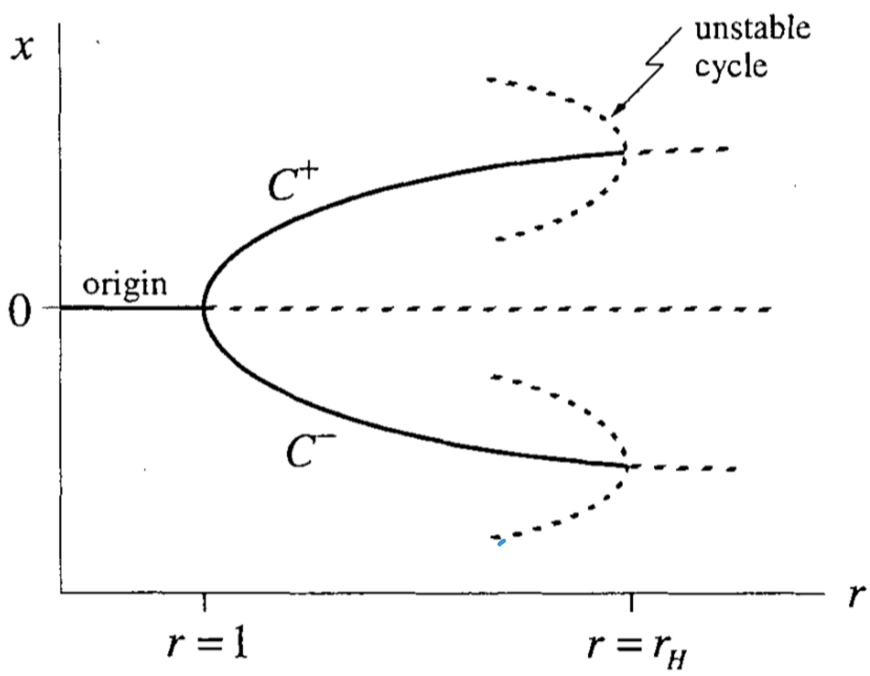
$$C^- : \quad x^* = y^* = -\sqrt{b(\rho-1)} \qquad z^* = \rho - 1$$

Estas soluciones, se puede ver, son estables en tanto

$$1 < \rho < \rho_H = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}$$

asumiendo $\sigma - \beta - 1 > 0$. En $\rho = \rho_H$ el sistema sufre una bifurcación de Hopf subcrítica.

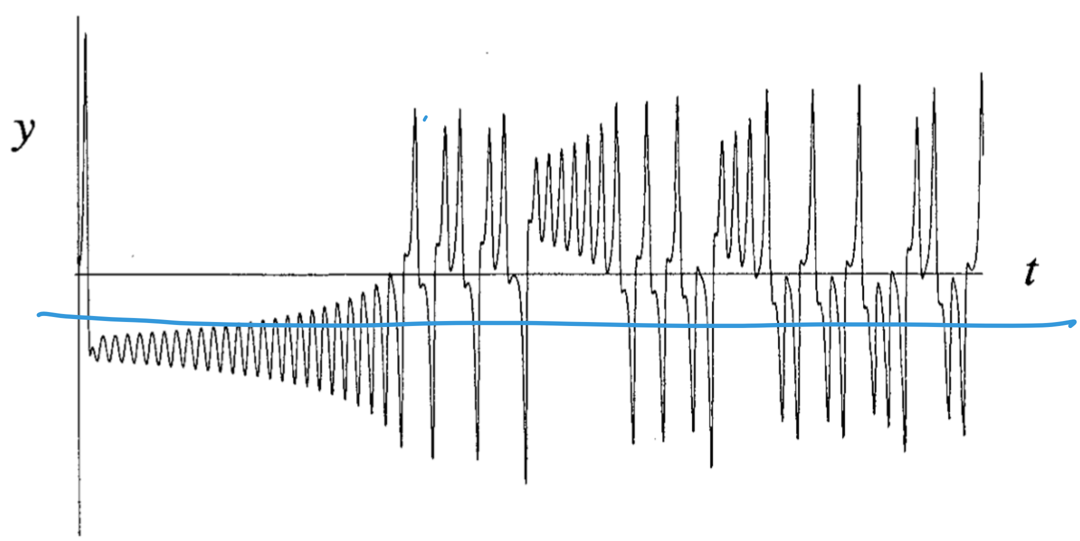




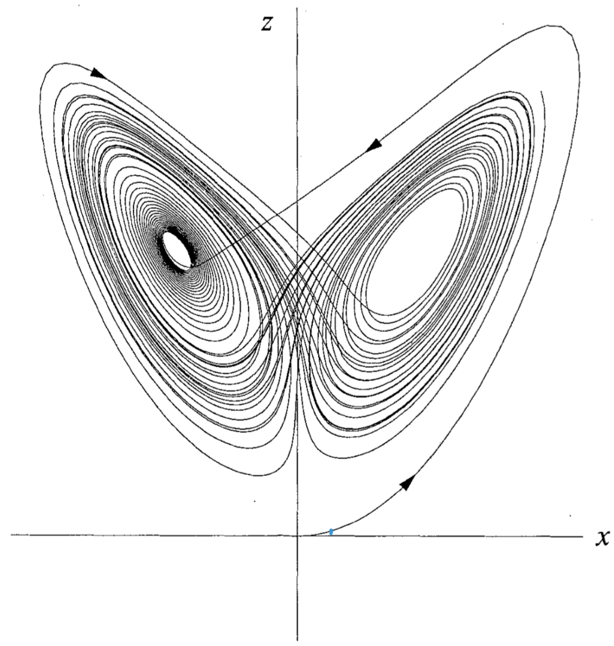
Para $\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = \frac{8}{3}$

$$\rho_H = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{(\sigma-\beta-1)} \approx 24.74$$

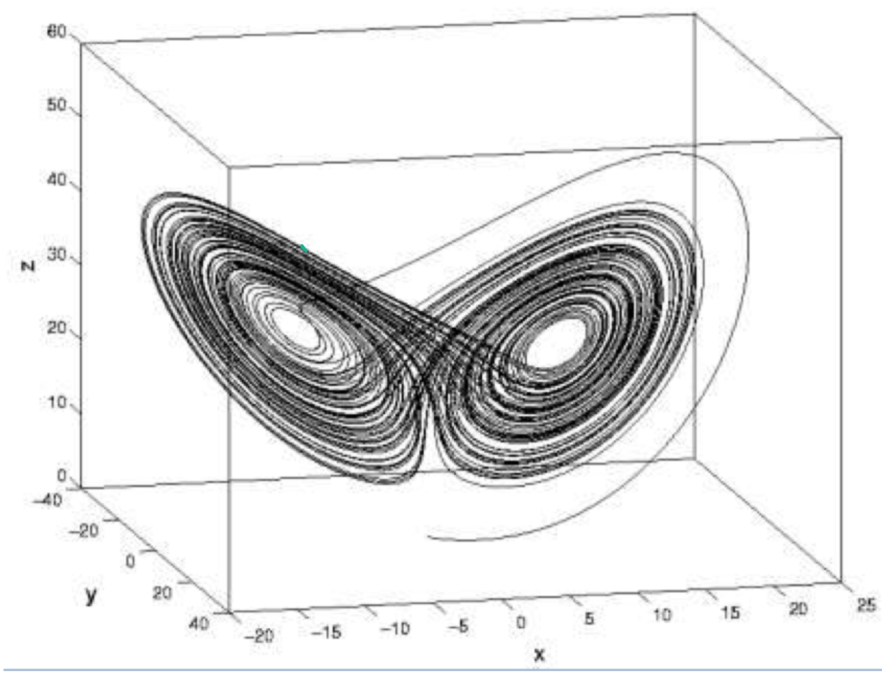
Si $\bar{x}(0) = (0,1,0)$



TRAYECTORIA APERIÓDICA ACOTADA

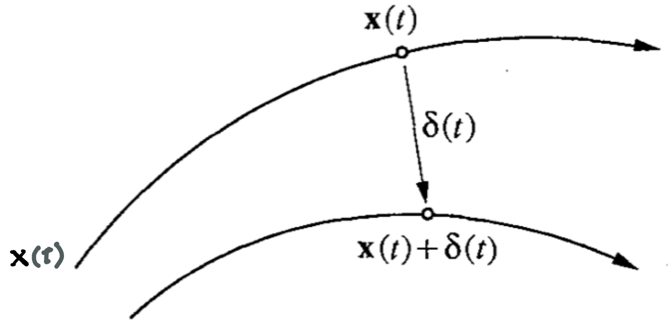


z
x



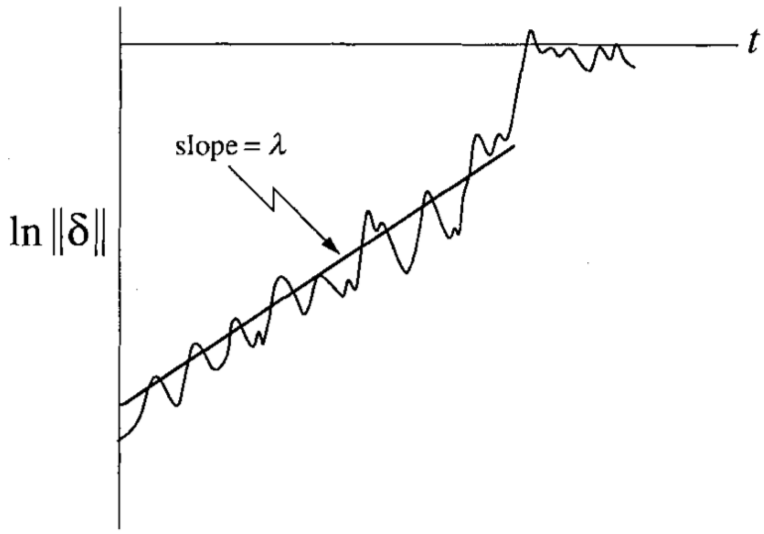
60
50
40
30
20
10
0
z
-40
-20
0
20
40
y
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
x

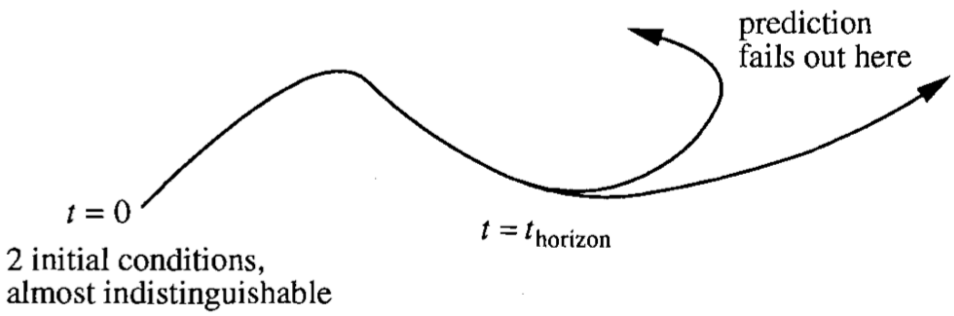
SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES



$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| \, e^{\lambda t}$$

λ: exponente de Liapunov





$$t_{horizon} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{\|\delta_0\|}\right)\right)$$

- La divergencia exponencial es temporaria, pues a largo plazo $\dot{V}(t) < 0$

- Hay 3 exponentes de Liapunov. En general para sistemas de dimensión N hay N exponentes

- Si tenemos una esfera pequeña de condiciones iniciales, esta se deformará en un elipsoide

¿Qué es CAOS?

CAOS es un comportamiento para tiempos largos APERIÓDICO en un sistema dinámico DETERMINISTA con SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES.

¿Qué es un atractor?

Es un conjunto al cual todas las trayectorias cercanas convergen. Además:

1. A es invariante: cualquier trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en A permanece por siempre en A.

2. A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe un conjunto abierto U que contiene a A tal que si $\bar{x}(0) \in U$, la distancia desde $\bar{x}(t)$ hasta A tiende a cero cuando $t \longrightarrow \infty$.
   U es la cuenca de atracción.

3. A es mínimo (no hay ningún subconjunto de A que cumpla las condiciones 1 y 2.

Un **ATRACTOR EXTRAÑO** es un atractor que exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales.

Originalmente se pedía que el atractor sea fractal. Hoy se considera menos importante.