REDES NEURONALES 2024

Clase 4 parte 1

Jueves 22 de agosto 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

31/8/22 c4p2

SISTEMAS DINÁMICOS UNIDIMENSIONALES: Flujo en la línea

Consideraremos a partir de ahora, y solo por ahora, un sistema unidimensional, o sea, descripto por una única variable real dependiente de *t*, *x(t)*. Supongamos también que se trata de un sistema autónomo, de modo tal que *t* no aparece explícitamente en la razón de cambio *f*. En otras palabras,

$$\dot{x} = f(x)$$

Analizaremos un caso particular supuestamente simple, a partir del cual, abordaremos el problemen forme geométrica.

$$\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$$

Notemos que sen(x) es una función muy bien comportada.

Intentemos resolverla.

A partir de ahora y durante varias clases vamos a analizar el caso más sencillo, el cual corresponde a tener una única ecuación diferencial ordinaria autónoma. Vamos a llamar *x* a la variable y *t* a la variable independiente.

$$\dot{x} = f(x)$$

Notemos que omitimos explicitar la dependencia temporal de *x* con *t*, pero tengan presenten que ella está, o sea, que nos referimos siempre a

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Miremos un ejemplo que podríamos suponer muy simple:

$$\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(x) \implies dt = \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\int_0^t dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\operatorname{sen}(x')} \qquad x(0) = x_0$$

$$t = \int_{x_0}^{x} \operatorname{cosec}(x')\,dx'$$

$$= -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x) + \operatorname{cotg}(x)\right|\right) + C$$

Si $x = x_0$ en $t = t_0 = 0$

$$t_0 = 0 = -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right) + C$$

$$C = \ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right)$$

Así

$$t = -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x) + \operatorname{cotg}(x)\right|\right) + \ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right)$$

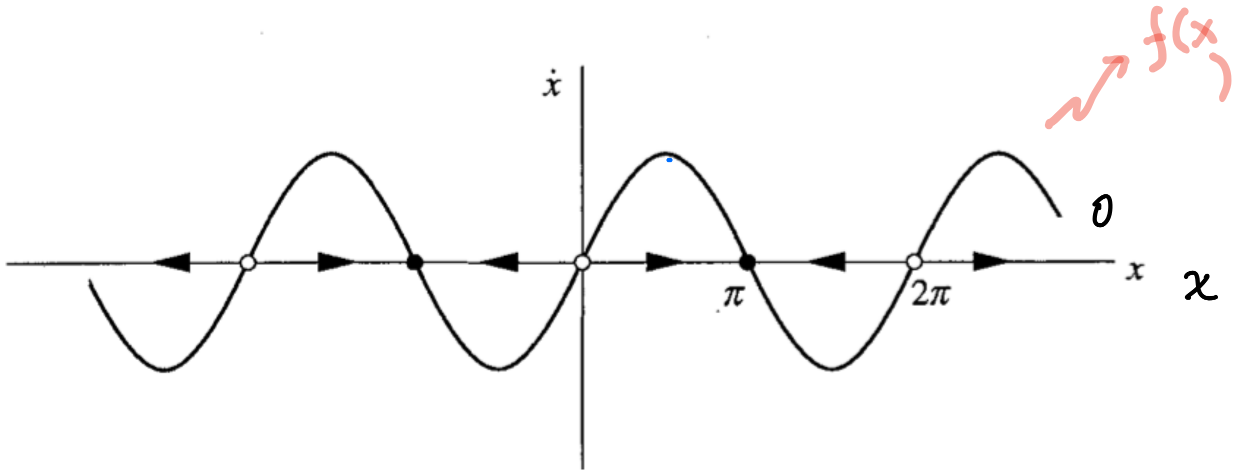
$$t = \ln\left(\left|\frac{\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)}{\operatorname{cosc}(x) + \operatorname{cotg}(x)}\right|\right)$$

Observemos que siendo $f(x) = sen(x)$ una función matemáticamente bien comportada, hemos llegado tan lejos como podemos en la búsqueda de la expresión analítica de la solución de nuestra ecuación.

No podemos invertir esta expresión para encontrar $x(t)$. A lo sumo podríamos resolver la inversión en forma numérica, pero no es una opción muy interesante.

Nos preguntemos: dada una condición inicial arbitraria $x(t=0) = x0$, ¿cuál será el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \longrightarrow \infty$?

Comenzaremos graficando el lado derecho de la ecuación, la razón de cambio, en función de x, o sea, $f(x)$.



Tengamos en cuenta que el tiempo no aparece en este gráfico. Hemos graficado la razón de cambio de x, o sea x, en función de x.

La curva representa la razón de cambio del sistema:

Si $f(x) > 0$, el punto x que modela al sistema, estará en un instante posterior a la derecha, pues su razón de cambio es positiva.

Si $f(x) < 0$, el punto x que modela al sistema estará en un instante posterior a la izquierda, pues su razón de cambio es negativa

Si $f(x) = 0$, el sistema estará para siempre en ese punto.

Las raíces (los ceros) de la función *f(x)* se denominan **puntos fijos** del sistema, pues si en $t=0$ la variable x que modela al sistema está en ese valor, se quedará allí para siempre. Recordemos que nuestro sistema es determinista.

Si $f(x^*) = 0$, decimos que x^* es un punto fijo del sistema descripto por la variable x.

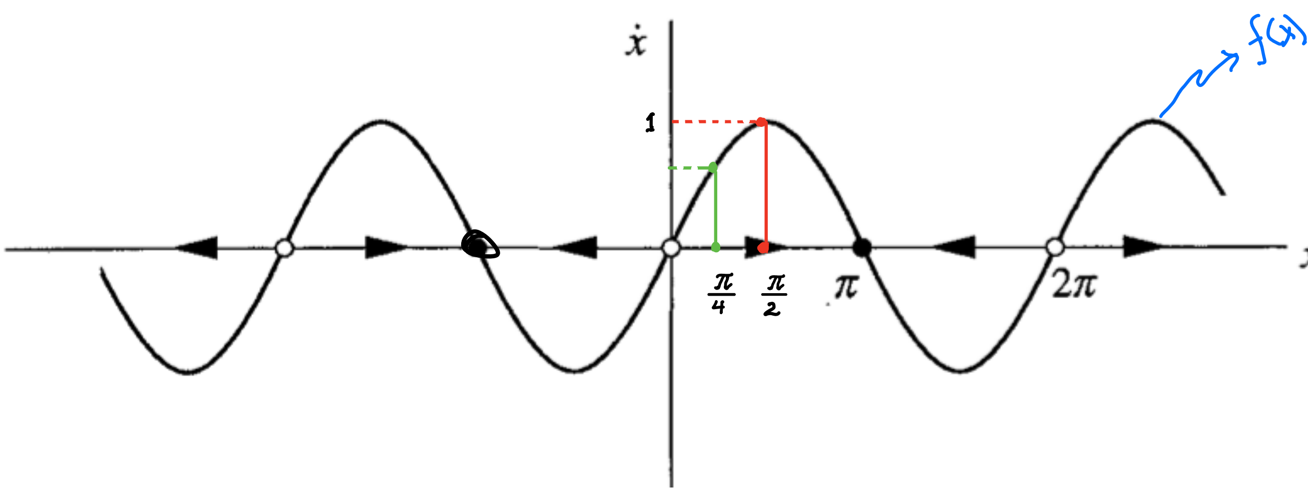
En el gráfico vemos qué hay puntos que atraen a ciertas posiciones del dominio de f, y son puntos fijos ATRACTORES o ESTABLES. En el gráfico los vamos a representar como círculos rellenos.

También hay puntos que repelen trayectorias y son puntos fijos REPULSORES o INESTABLES. En el gráfico los vamos a representar con círculos vacíos.

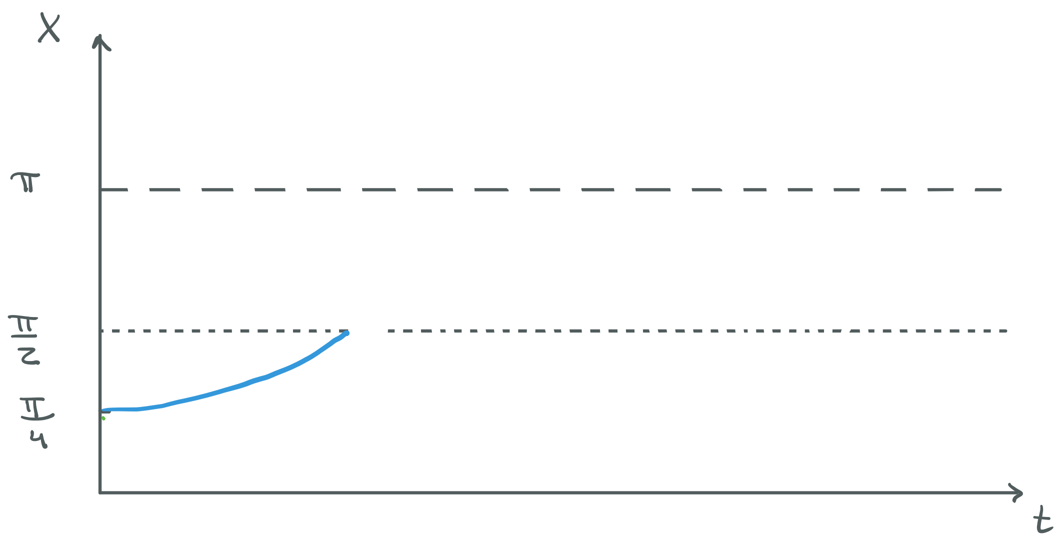
Si por ejemplo comenzamos con $x_0 = \pi/4$ en $t_0=0$, el punto se desplaza hacia la derecha hacia $x = \pi$.

Notemos que asignamos a cada punto del dominio de f un vector cuya magnitud es $|f(x)|$ y sentido es hacia la derecha si $f(x) > 0$ o hacia la,izquierda si $f(x) < 0$.

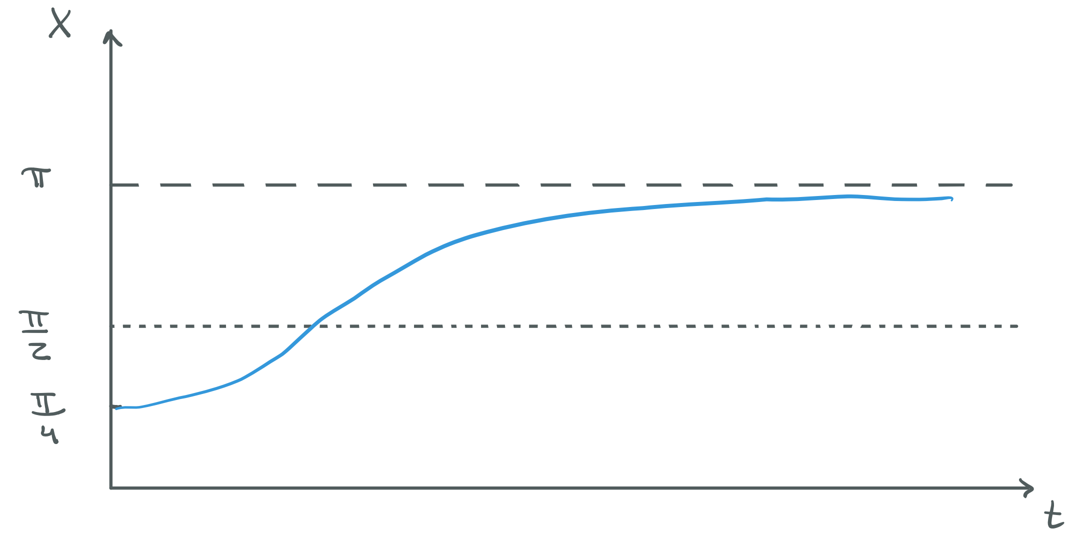
Esto define un campo vectorial que representa el flujo en la recta real.



Miremos qué pasa si comenzamos con $\pi/4$. El sistema comienza a crecer (va hacia la derecha), y como la razón de cambio, además de ser positiva crece más, la derivada segunda de $x(t)$ es positiva.

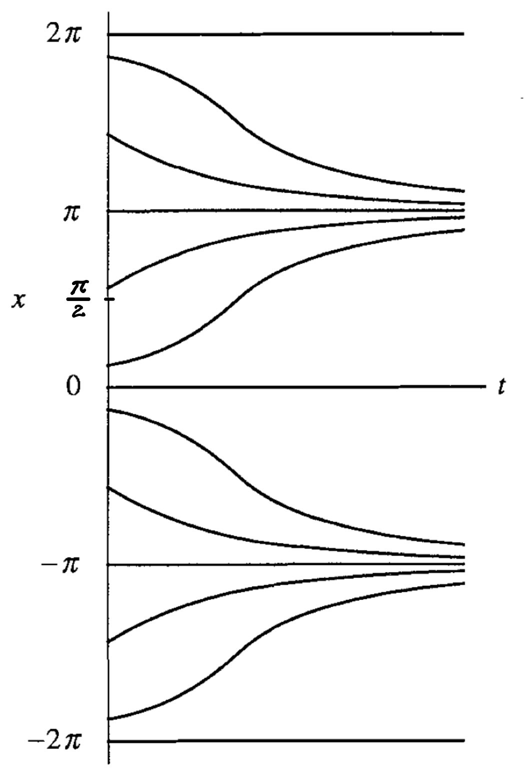


Cuando alcanza $x = \pi/2$, vale 1. A partir de ahora la razón de cambio sigue siendo positiva, pero cada vez es menos importante, y entonces la derivada primera es positiva pero la segunda es negativa.



El sistema se aproxima a π asimptoticamente, pero nunca llega, pues a medida que se aproxima, la velocidad tiende a cero *0*.

Con esto podemos hacernos una idea cualitativa de las trayectorias posibles, y precisas sobre dónde estará el sistema cuando el tiempo *t* tiende a infinito.



Las ATRACTORES son los múltiples de π .

$$X_k = k \qquad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Los atractores con *k* par o cero, los puntos fijos repelen trayectorias, o sea, son inestables. El sistema puede estar en ellos, pero para estar en uno de estos puntos en tiempo infinito, debió estar allí todo el tiempo medido.

Los atractores con *k* impar son estables. Estos atractores atraen flujo de infinitas trayectorias.

abierto

$X^*_{2k+1} = (2k+1)\pi$ *atrae las trayectorias que están en* $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$

Cuando $t \longrightarrow \infty$, el sistema puede:

- ir hacia infinito $\quad X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$
- ir hacia menos infinito $\quad X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty$
- ir hacia o permanecer en un punto fijo estable.
- permanecer en un punto fijo inestable.