REDES NEURONALES 2024

Clase 5 parte 1

Lunes 26 de agosto 2024

FAMAF, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

INSTITUTO DE FÍSICA ENRIQUE GAVIOLA (UNC-CONICET)

31/8/23 c5p2

EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Dada una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x,t)$$

vimos que existen infinitas soluciones. A partir de la condición inicial

$$x(t=t_0) = x_0 = \alpha$$

podemos determinar una única "trayectoria" de interés entre las infinitas posibles.

Ahora repasaremos rápidamente, pues ya lo vieron en los prácticos, como encontrar una aproximación numérica a una dada ecuación diferencial. Con la computadora podemos aproximar una única solución, una única trayectoria. Este enfoque es muy diferente del enfoque geométrico que estudiamos en esta materia. No obstante, usaremos siempre la aproximación numérica para conocer la forma de las soluciones.

El problema de encontrar una única trayectoria entre las infinitas se denomina PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

DEFINICIÓN: Problema de valor inicial

Un ***problema de valor inicial*** consiste de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad f : D \to R^n$$

donde D es un subconjunto abierto en $R \times R^n$ junto con un punto en D

$$(t_0, \alpha) \in D$$

llamado *condición inicial*. En otras palabras:

$$x(t_0) = \alpha \in R^n$$

Teorema: consideremos el problema de valor inicial

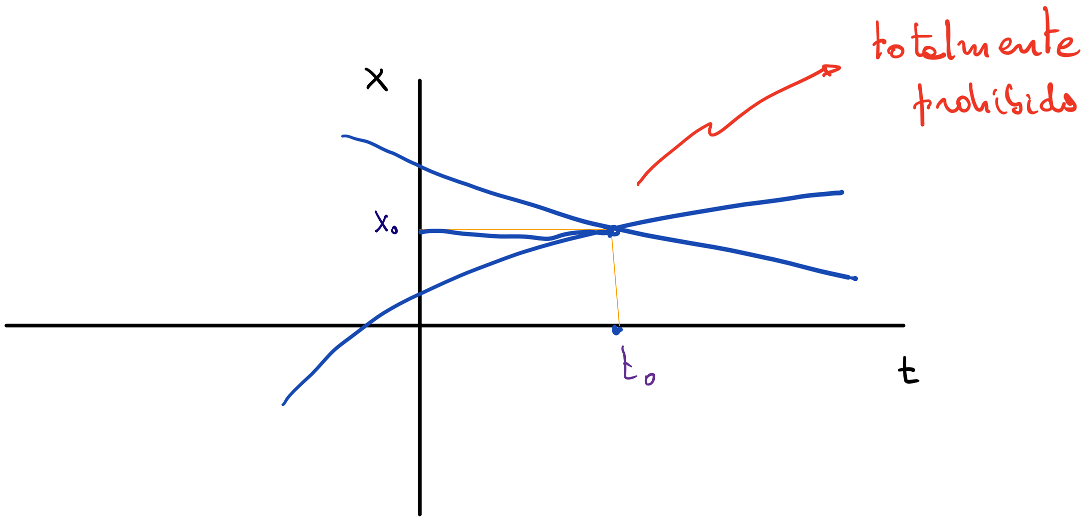
$$\dot{x} = f(x,t) \qquad x(0) = x_0$$

Supongamos que $f \in C^1$, o sea, que f y f' son continuas en un intervalo abierto I en el eje t y supongamos que $t \in I$. Entonces este problema tiene solución en cierto intervalo abierto

$$(-\tau, \tau)$$

y además la solución es única.

Resumiendo, alcanza con que la razón de cambio (el lado derecho de la EDO) sea una función *"un poco suave"*, para que la solución exista y sea única.



Si las trayectorias se cruzacen en un instante *t*, en ese tiempo *t* habría dos soluciones diferentes para el problema de valor inicial. Esto requiere que existan dos razones de cambio diferentes, y una función no puede asignar dos valores en la imagen para un único valor del dominio.

EL MÉTODO DE EULER

Consideremos el caso unidimensional:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

aunque se puede generalizar simplemente al caso de un sistema de n EDO acopladas (de dimensión n o, si es no autónomo, $n+1$).

Supongamos que $f(x, t)$ es suficientemente buena y que existe solución única de la ecuación diferencial para

$$t_0 \leq t \leq t_f$$

Además sabemos que:

$$x(t_0) = \alpha$$

En definitiva, tenemos un problema de valor inicial.

Dividimos el intervalo de tiempo en *N* intervalos iguales

$$t_i = t_0 + i h \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$h = \frac{(t_f - t_0)}{N} \longleftarrow \text{paso de integración temporal}$$

Usemos el Teorema de Taylor

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\,\dot{x}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_i)$$

$$t_i < \xi_i < t_f$$

$$\boxed{x(t_{i+1}) = x(t_i) + h\, f(x(t_i), t_i) + \frac{h^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_i)}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + h\, f(x(t_0), t_0) + \frac{h^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_0)$$

$$t_0 < \xi_0 < t_1$$

conozco ambos

$$x(t_1) \approx x(t_0) + h\, f(x(t_0), t_0)$$

$$w_0 = f(x(t_0), t_0)$$

$$w_1 = f(w_0, t_1)$$

$$\vdots$$

$$w_i = f(w_{i-1}, t_i)$$

$$x(t_1) \approx w_1 = w_0 + h\, f(w_0, t_0)$$

$$x(t_2) \approx w_2 = w_1 + h\, f(w_1, t_1)$$

$$\vdots$$

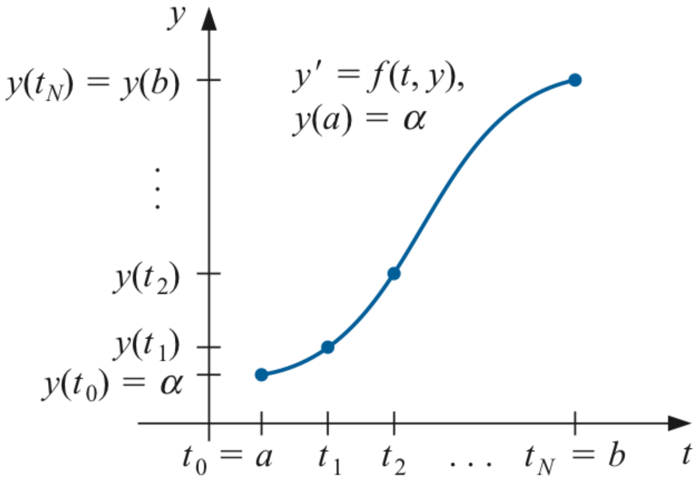
$$x(t_i) \approx w_i = w_{i-1} + h\, f(w_{i-1}, t_{i-1})$$

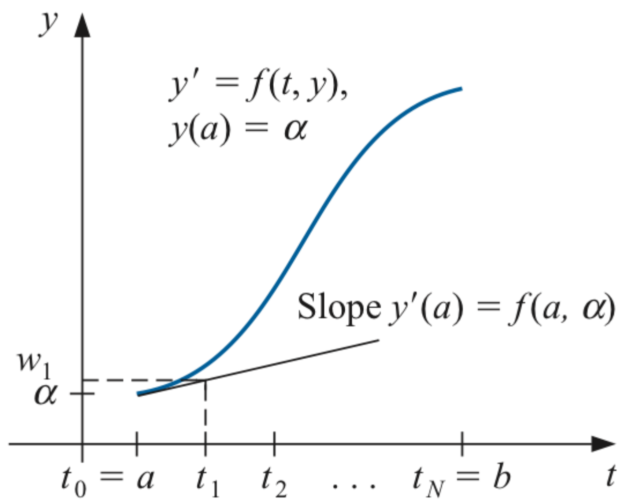
$$i = 1, 2, \ldots N$$

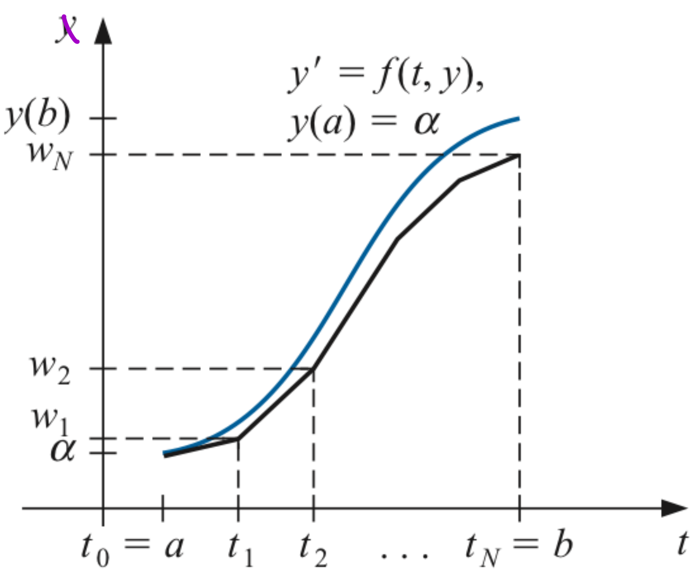
Solo para *$i=0$* el resultado es exacto. Así construimos una secuencia:

$$(t_0, \quad w_0)$$
$$(t_1, \quad w_1)$$
$$(t_2, \quad w_2)$$
$$\vdots$$
$$(t_i, \quad w_i)$$
$$\vdots$$
$$(t_N, \quad w_N)$$

los w_i aproximan los $X(t_i)$.


y
$y(t_N) = y(b)$
$y' = f(t, y)$,
$y(a) = \alpha$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0) = \alpha$
$t_0 = a$ t_1 t_2 . . . $t_N = b$ t


y
$y' = f(t, y)$,
$y(a) = \alpha$
Slope $y'(a) = f(a, \alpha)$
w_1
α
$t_0 = a$ t_1 t_2 . . . $t_N = b$ t


y
$y' = f(t, y)$,
$y(a) = \alpha$
$y(b)$
w_N
w_2
w_1
α
$t_0 = a$ t_1 t_2 . . . $t_N = b$ t

$$t_0 = a, \quad t_n = t_0 + n\Delta t, \quad t_N = b$$

Método de Euler

$$w_0 = x(t_0) = x_0$$

$$w_{n+1} = w_n + h f(w_n)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Método de Euler mejorado

$$w_0 = x(t_0) = x_0$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}\left[f(w_n) + f(w_{n+1})\right]$$

Método Runge Kutta de cuarto orden

$$w_0 = x(t_0) = x_0 = \alpha$$

$$k_1 = h f(w_n)$$

$$k_2 = h f\left(w_n + \tfrac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(w_n + \tfrac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(w_n + k_3)$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Recordemos que

$$x(t_0) = w_0$$

$$x(t_n) \approx w_n \quad \forall n > 0$$

EJEMPLO

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\dot{x} = 1 + x^2 \qquad x(0) = x_0$$

Analicemos la existencia de la solución.

$$f(x) = 1 + x^2$$ sistema autónomo

$$f'(x) = 2x$$

Tanto *f(x)* como *f'(x)* son continuas y diferenciales. Entonces existe solución y es única para cualquier valor x_0.

Sea $x(0)=0$.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \implies dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

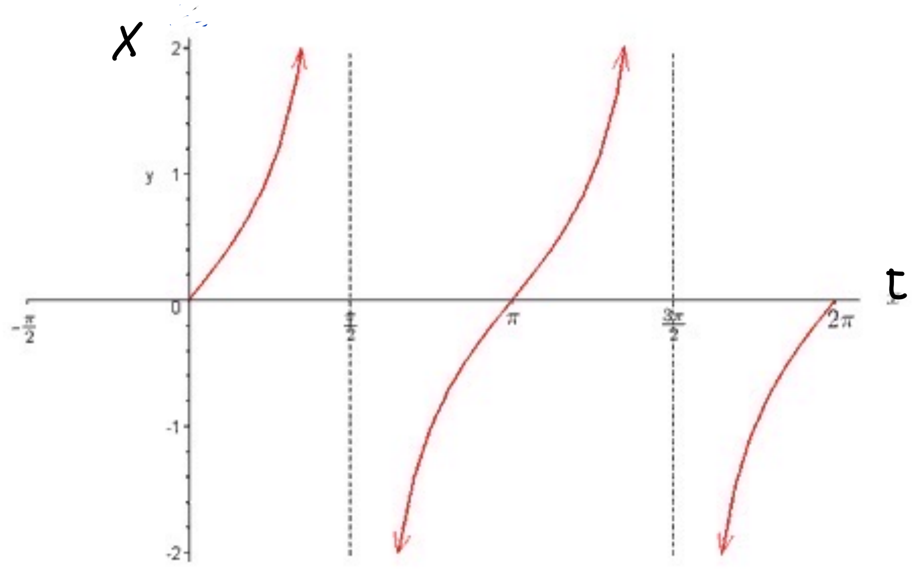
$$\int_0^t dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{(1+x'^2)}$$

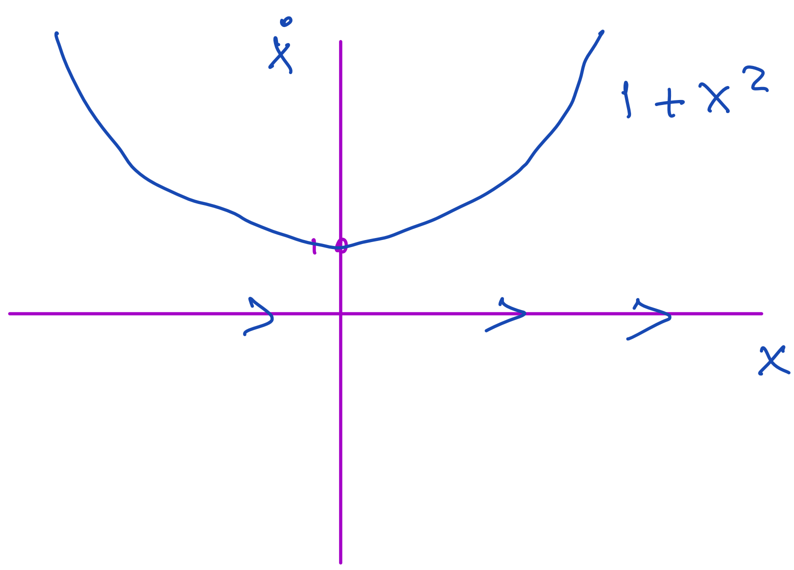
$$t = \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(x_0)$$

$$t = \tan^{-1}(x)$$

Invirtiendo la función

$$x(t) = \tan(t)$$





IMPOSIBILIDAD DE SOLUCIONES OSCILATORIAS

Un sistema unidimensional no puede crecer un tiempo y decrecer por otro tiempo, o viceversa. Para eso el sistema debería pasar sobre el punto fijo, pero al pasar por dicho punto fijo se detendría para siempre.

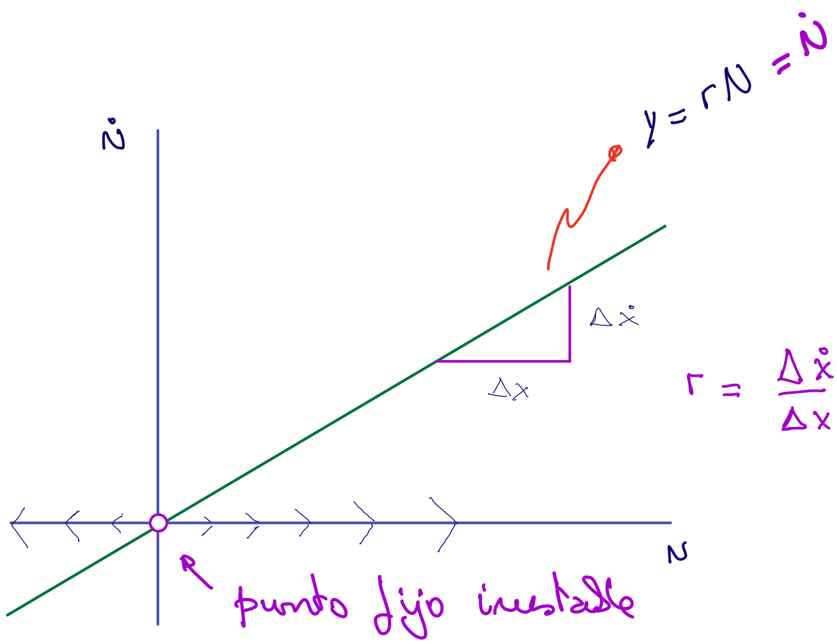
Ejemplo:

Miremos el caso de una población de bacterias:

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) = rN(t)$$

solución: $$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$N_0 = N(t=0)$$

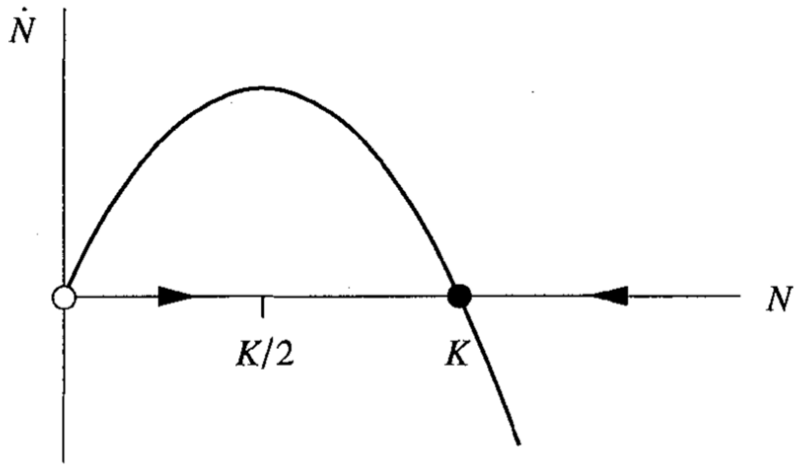


$$r = \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$N(t) = rN(t) - \frac{r}{k}N^2(t)$$ ← **ecuación logística**

$$N^* = 0 \Rightarrow \frac{dN^*}{dN} = r - \frac{2r\overset{=0}{N}}{k} = r > 0$$ *inestable*

$$N^* = k \Rightarrow \frac{dN^*}{dN} = r - \frac{2r\cancel{k}}{\cancel{k}} = -r < 0$$ *estable*



$$N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} k \quad \text{si } N_0 > 0$$

k = capacidad de carga