REDES NEURONALES 2024

Clase 9 parte 1

Lunes 9 de septiembre 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

19/9/23 c9p2

EDOs: EL CASO BIDIMENSIONAL

Supongamos que queremos analizar el caso de dos ecuaciones diferenciales acopladas y autónomas de la forma general:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

f_1 y f_2 son dos funciones

$$f_1 : R^2 \longrightarrow R$$

$$f_2 : R^2 \longrightarrow R$$

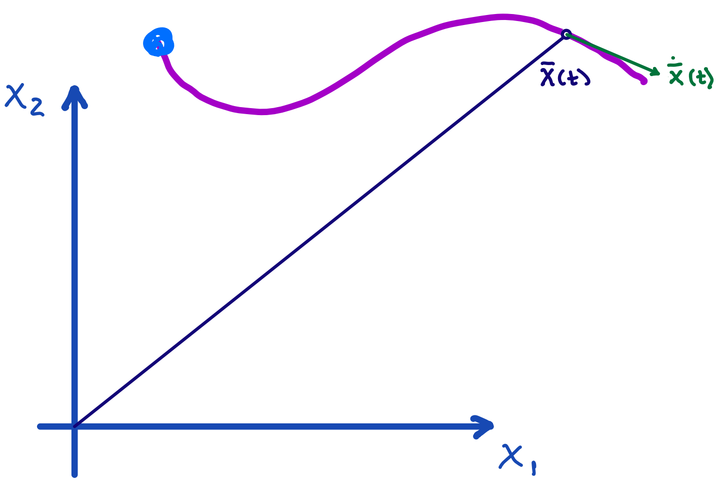
donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las funciones incógnitas.

Notación vectorial

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

E vector $\tilde{x}(t)^{t} = (x1(t), x2(t))$ representa un punto en el plano y $x(t)$ representa la velocidad de movimiento de ese punto



El tiempo t no aparece en el gráfico, pero está parametrizando la curva.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que consideramos asocia a cada punto de $\mathbb{R}^2$ un vector de dos componentes reales. Esto se denomina un campo de velocidades, pues a cada vector $\bar{x}$ se le asocia un vector $\bar{x}$

Al igual que en el caso de unidimensional, o sea, una única EDO autónoma, no tenemos ninguna pretensión de resolver analíticamente un sistema de dos EDOs acopladas y autónomas. Para la mayoría de los sistemas que nos interesan no hay solución analítica. Entonces nos limitaremos a estudiar el comportamiento para tiempos muy grandes (el límite en el cual el tiempo tiende a infinito).

Teorema de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad ; \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

Supongamos que f_i *(i=1,2,...,n)* son funciones continuas y que todas sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

existen y son continuas en cierto conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Entonces, el problema de valor inicial en consideración tiene una solución *x(t)* en cierto intervalo de tiempo $(-\tau, \tau)$ alrededor de $t=0$ y dicha solución es ÚNICA.

Recordemos lo que ya dijimos en el caso de sistemas dinámicos unidimensionales: es muy poco lo que deben cumplir las razones de cambio f_i para que el problema de valor inicial se encuadre dentro del teorema y cumpla que la solución exista y sea única.

La unicidad en particular nos asegura que dos soluciones de nuestro problema de valor inicial no pueden cruzarse.

Supongamos que $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$

es un punto fijo de nuestro sistema de dos EDOs.

Por comodidad vamos a cambiar la notación

$$\dot{x} = f(x, y)$$

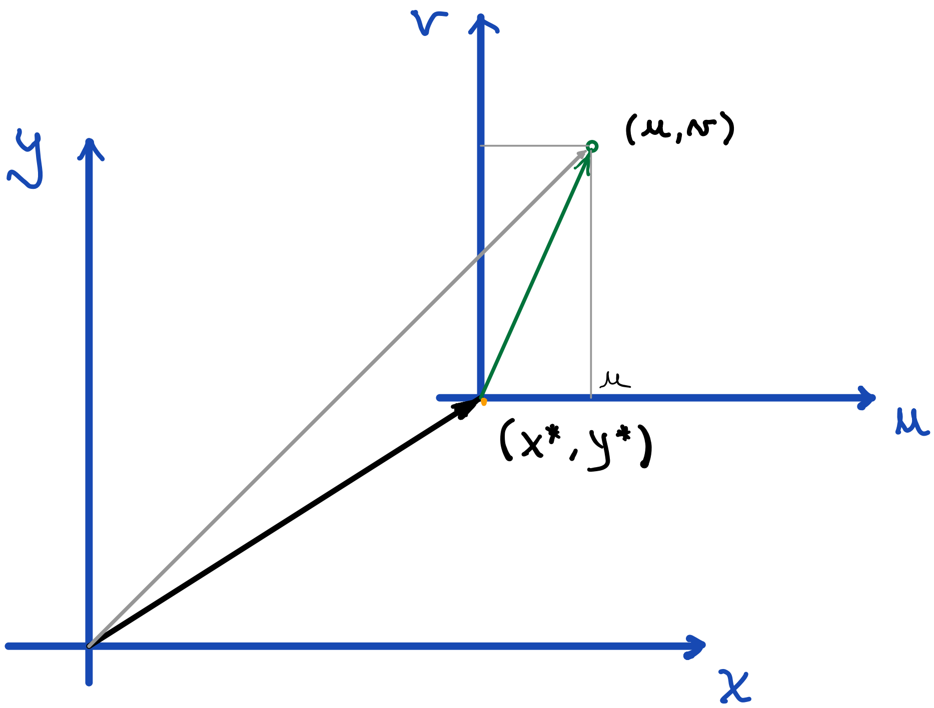
$$\dot{y} = g(x, y)$$

Sabemos que $f(x^*; y^*) = 0$ y $g(x^*; y^*) = 0$

Ahora pasamos a describir el problema desde el punto fijo:

$$x = x^* + u \qquad \dot{x}^* = \dot{u}$$

$$y = y^* + v \qquad \dot{y}^* = \dot{v}$$



$$\dot{x} = \dot{u} = f(x^* + u, y^* + v)$$

$$= \cancel{f(x^*, y^*)} + u \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} + v \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*, y^*} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{y} = \dot{v} = g(x^* + u, y^* + v)$$

$$= \cancel{g(x^*, y^*)} + u \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} + v \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*, y^*} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{u} \approx u \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} + v \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*, y^*}$$

$$\dot{v} \approx u \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} + v \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*, y^*}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*, y^*} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} & \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*, y^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Matriz jacobiano

$$A = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*;y^*} & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*;y^*} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*;y^*} & \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*;y^*} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x^*,y^*}$$

HEMOS LINEALIZADO ALREDEDOR DEL PUNTO FIJO