# REDES NEURONALES 2024

**Clase 12 parte 1**

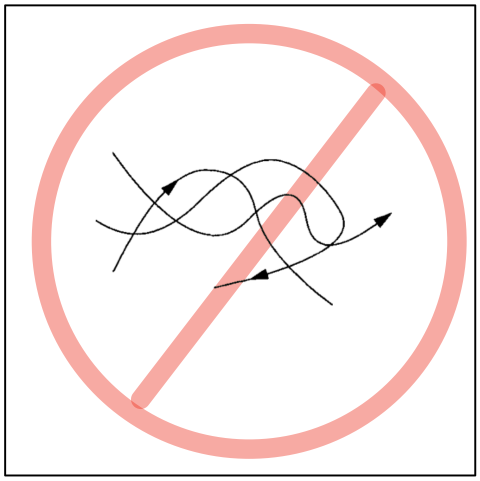
**Jueves 19 de septiembre 2024**

**FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba**

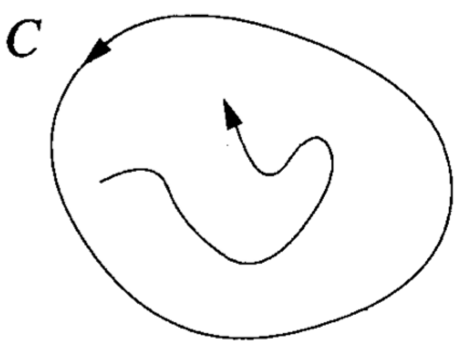
**Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)**

M3/10/23 c12p1

Si recordamos el teorema de existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial, deducimos geométricamente que dos soluciones diferentes (diferentes trayectorias) nunca se cruzan, aunque pueden converger asimptóticamente a un punto fijo.



Si tenemos una órbita cerrada, nos delimita el interior del exterior



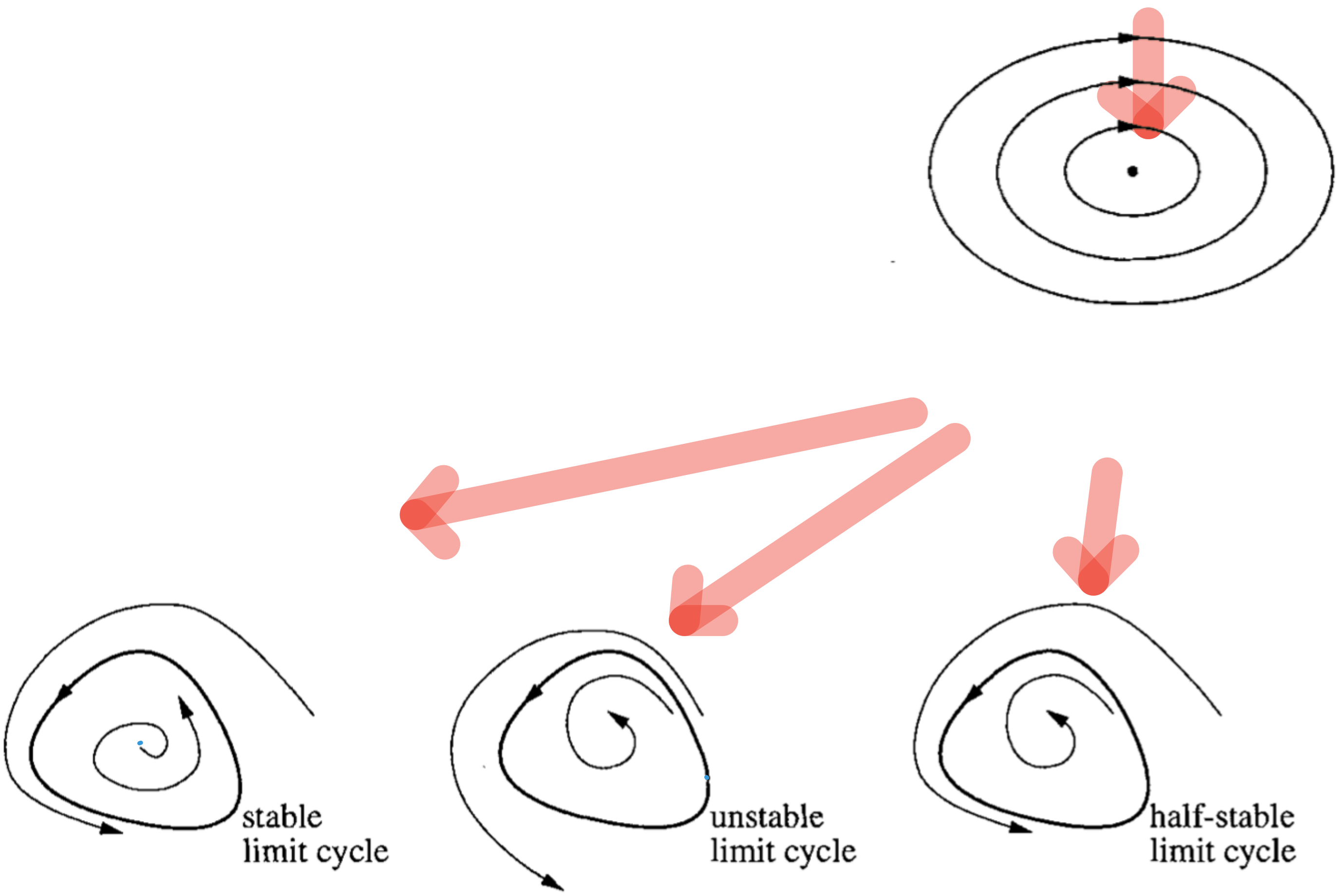
¿Qué pasa con un centro, o sea, un punto fijo cuyo jacobino tiene dos autovalores imaginarios conjugados?

Los centros se transforman al incluir la parte no lineal que despreciamos en el analisis lineal de la estabilidad

**CASOS ROBUSTOS** versus **CASOS NO ROBUSTOS**

$\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$

$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$




Los centros se convierten (no siempre) en órbitas cerradas

## El efecto de pequeños términos no lineales

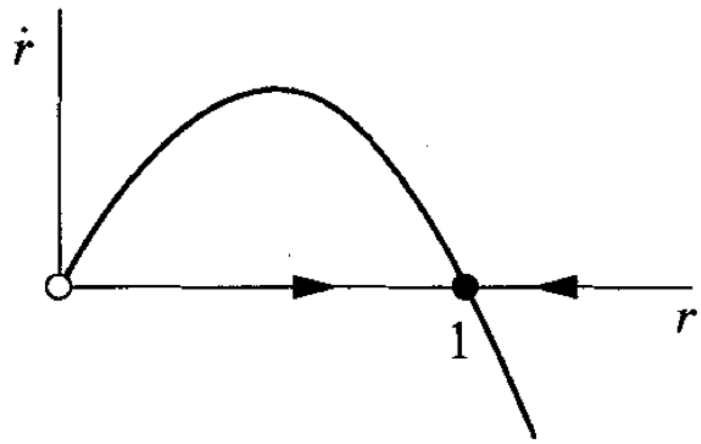
¿Es seguro despreciar los términos no lineales para el estudio de la estabilidad? En realidad sí, pero solo para casos robustos, o sea cuando la parte real de los autovalores es no nula. Si el análisis lineal predice puntos fijos atractores, repulsiones, puntos de ensilladura o espirales estables o inestables, si es seguro. Si la parte real de autovalores complejos conjugados es nula, entonces debemos ser mucho más cuidadosos.

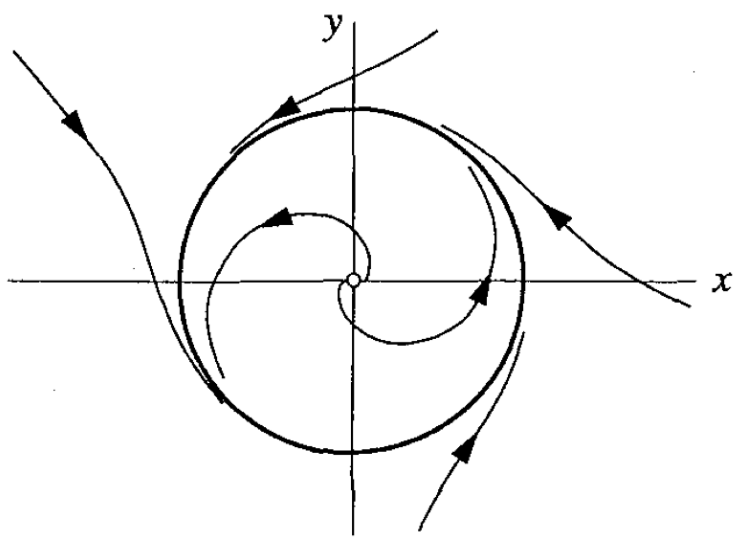
Si $Re(\lambda) \neq 0$ para ambos autovalores, el punto fijo se llama ***hiperbólico***. Los puntos *no-hiperbólicos* son los frágiles frente a la no-linealidad.

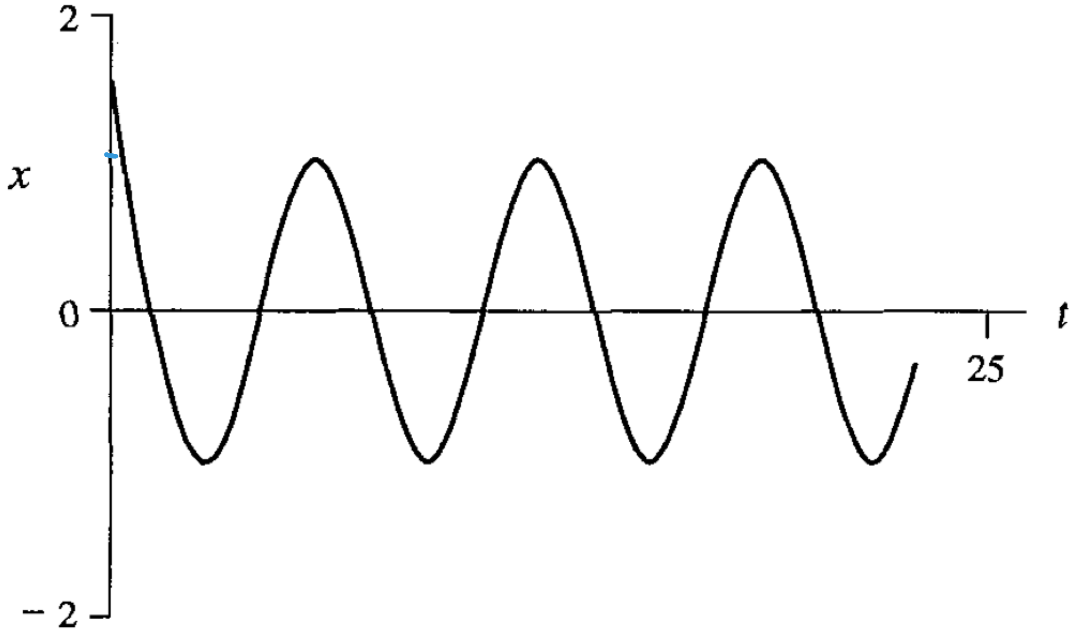
Ejemplo

$$\dot{r} = r(1-r)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

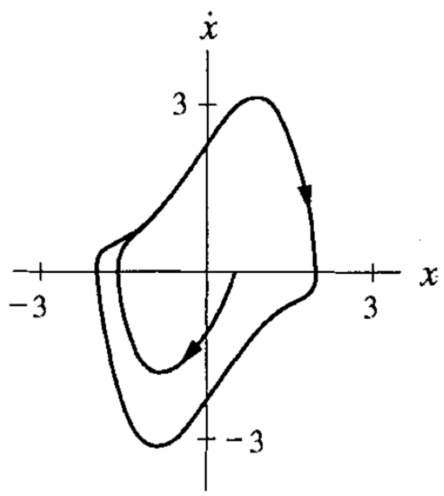


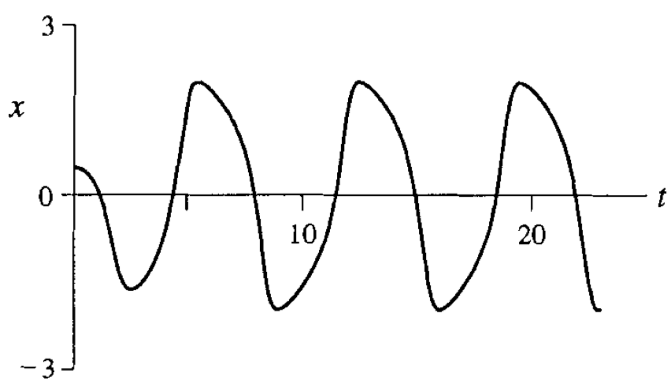






# VAN DER POL OSCILLATOR

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$



# SISTEMAS CONSERVATIVOS

Consideremos la ecuación de Newton

$$m\ddot{x} = F(x)$$ (no aparece ni $t$ ni $\dot{x}$)

y supongamos que la fuerza se obtiene como el gradiente de una función potencial

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

Con esta información reescribamos la ecuación de Newton en términos del potencial y no de la fuerza:

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

Hagamos unas simples cuentas:

$$\dot{x}\left[m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right] = 0\,\dot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{dV}{dt} = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = 0$$

Pero:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\,2\,\dot{x}\ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}\,\dot{x}$$

De esta forma

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}V(x)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{E_c} + \underbrace{V(x)}_{E_p}\right]$$

$$= 0$$

Esto nos dice que la cantidad

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

no cambia en el tiempo (es conservada)

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Un sistema físico de este tipo se denomina

SISTEMA CONSERVATIVO

Generalizando:

Dado un sistema $\ddot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$, una CANTIDAD CONSERVADA es una función real que es constante a lo largo de las trayectorias.

$$f(x) = -\nabla V(x)$$

Un sistema conservativo no admite puntos fijos atractivos

Ejemplo

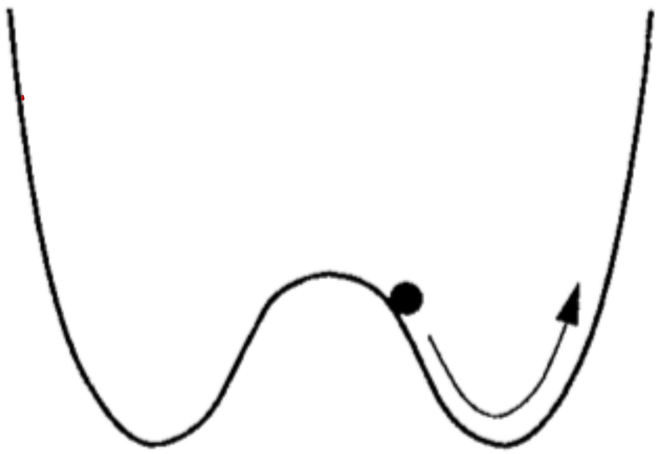
$$\ddot{x} = x - x^3 \qquad m = 1$$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 = F(x)$$

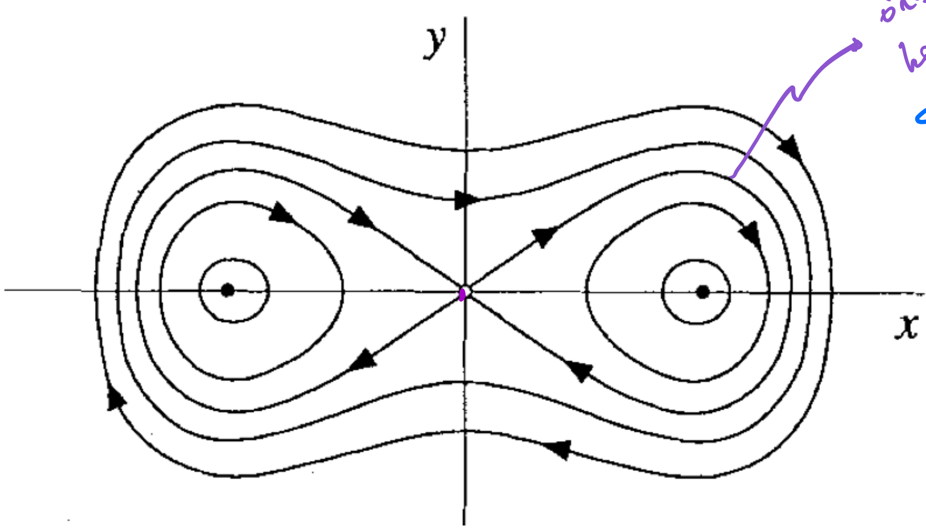
$$(0,0) \qquad (1,0) \qquad (-1,0)$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4\right) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4$$

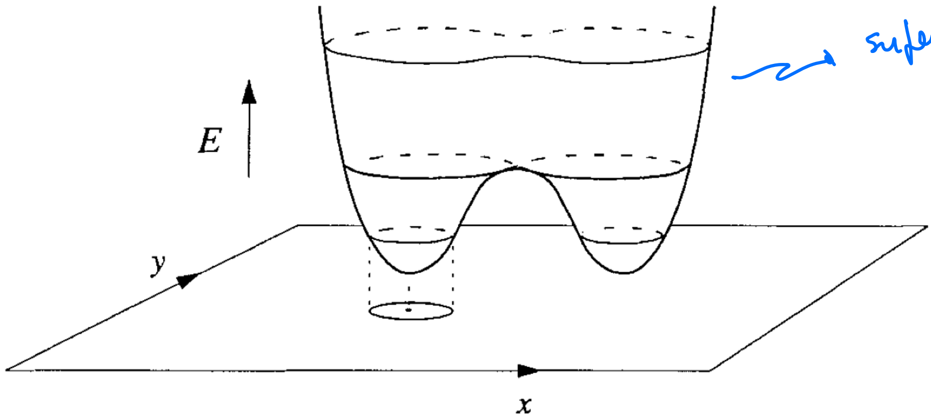


oscilación no amortiguada




órbita homoclínica

demora infinito tiempo




superficie de energía

Teorema: Consideremos un sistema $\ddot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ con $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Si $\bar{f}$ es continua y diferenciable y existe una cantidad conservada $E(x)$, y existe un punto fijo $\bar{x}^*$ aislado, y es mínimo de $E(x)$, entonces alrededor de $\bar{x}^*$ hay trayectorias cerradas.

# Centros no lineales

Ya entendimos porque las trayectorias espirales, tanto estables como inestables, son robustas, y porque los centros son FRÁGILES. Cuando linealizamos, evaluamos en el punto fijo y sacamos los autovalores, si hay oscilaciones, los autovalores son complejos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}$$

Para que tengamos un centro $\tau$ debe ser nulo

centro: $\frac{\tau}{2} = 0$ $\qquad \lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\Delta} = \pm i\sqrt{\Delta}$

Pero $\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ (recuerde que la traza no cambia cuando cambio de sistema de coordenadas), y $a$ y $d$ se determinan fenomenológicamente, por lo tanto HAY ERROR.

Y con eso nos sacó del caso lineal y nos tenemos que preguntar: ¿qué pasa con estas órbitas tan frágiles cuando el análisis lineal deja de valer? Por suerte la matemática nos auxilia

Teorema

CENTROS NO LINEALES PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS

Consideramos un sistema

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)$ pertenece a $\mathbb{R}^2$ y $f_1$ y $f_2$ son continuamente diferenciables.

Supongo que existe una cantidad $E(\bar{x})$ y supongamos que $\bar{x}^*$ es un punto fijo AISLADO.

Entonces, si $\vec{x}^*$ es un mínimo local de E, entonces todas las trayectorias suficientemente cerca de $\vec{x}^*$ serán CERRADAS.

NOTA: lo mismo vale si $\bar{x}^*$ es máximo de E