REDES NEURONALES 2024

Clase 8 parte 1

Jueves 5 de septiembre 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

14/9/23 c8p1

TEORÍA DE BIFURCACIONES: El rol de los parámetros.

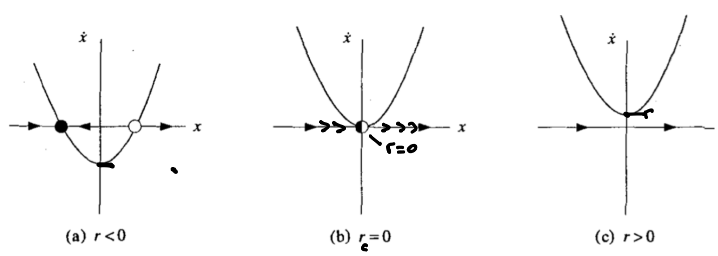
El caso unidimensional

La bifurcación saddle-node

Ahora analizaremos una familia particular de EDO en una dimensión. Veremos que es una familia peculiar. Veremos ahora el rol de los parámetros y no de las variables dependientes e independientes.

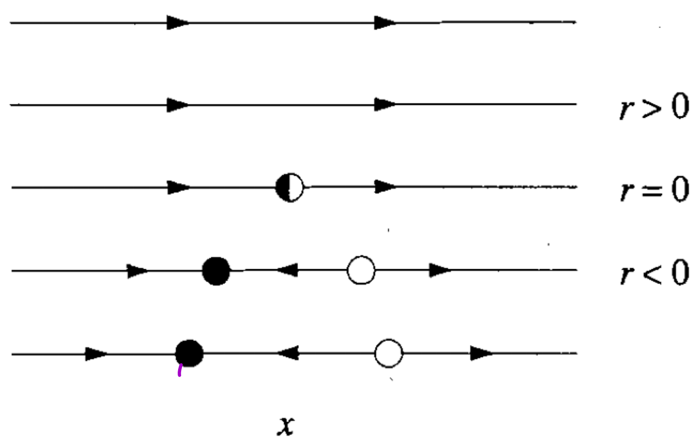
$$\dot{x} = r + x^2$$ r es un número real

Para cada valor de *r* tenemos un modelo.

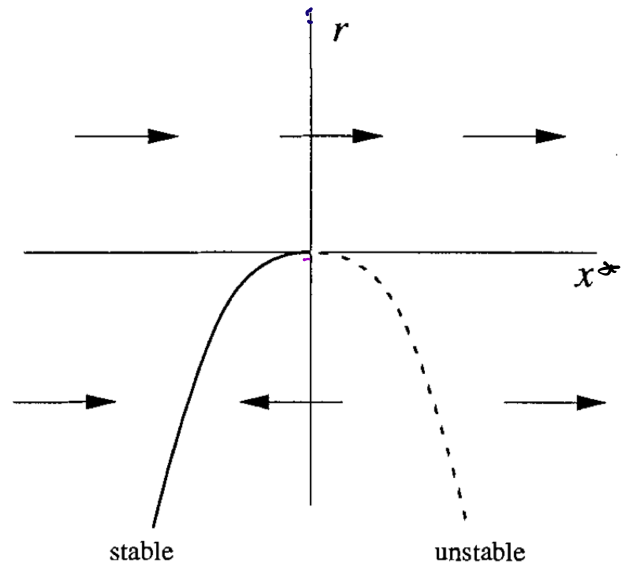


punto de bifurcación

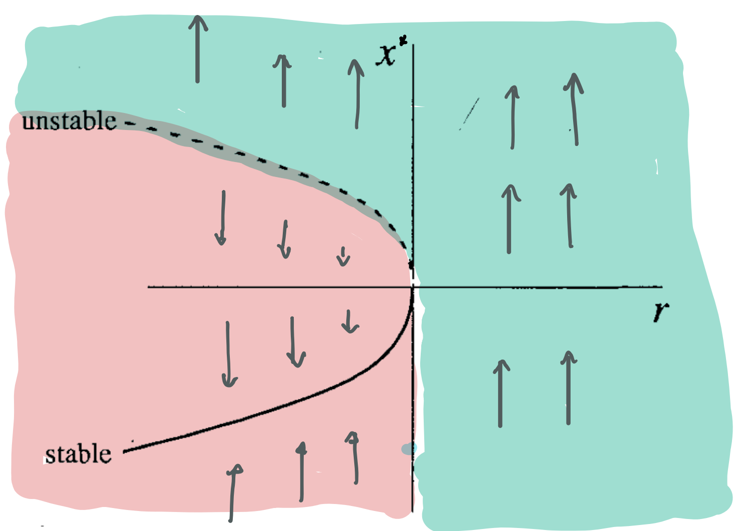
A medida que cambiamos el valor de *r* la estructura topológica de campo vectorial puede cambiar drásticamente y por ende, para tiempos grandes podemos tener diferentes comportamientos.



$r>0$
$r=0$
$r<0$
x



r
x^*
stable
unstable



x^*
unstable
r
stable

Si

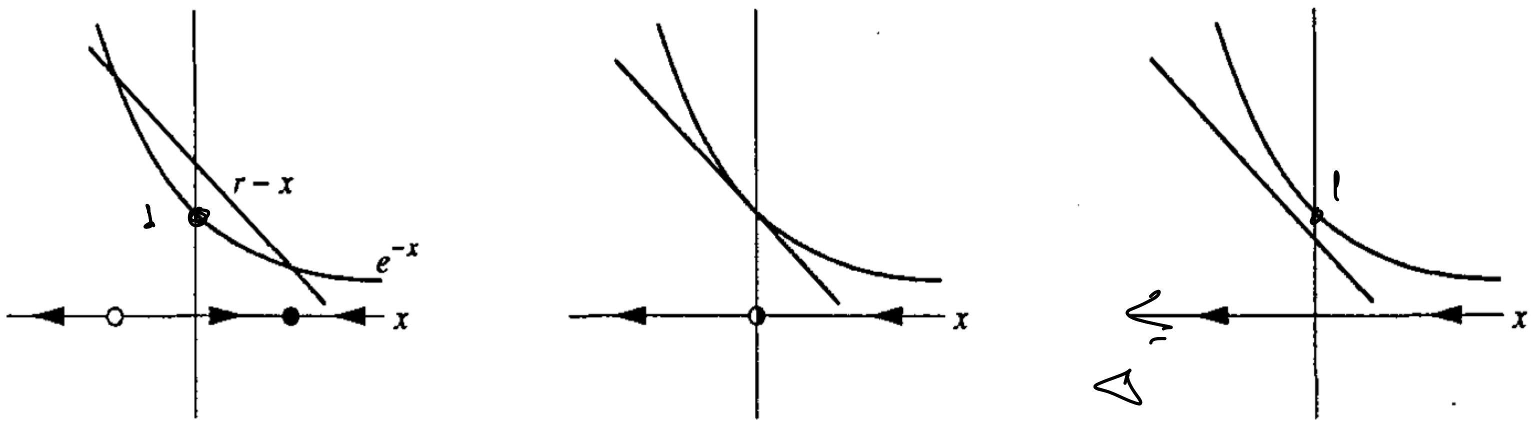
$$\dot{x} = r - x^2$$

$r < 0$ $\quad$ $r_c = 0$ $\quad$ $r > 0$

$$r - x = e^{-x}$$

Ejemplo

$$\dot{x} = (r - x) - e^{-x} = 0$$



$$f(x^*) = 0 \implies r - x = e^{-x}$$

$$\frac{d(r-x)}{dx} = -1 \qquad \frac{d\, e^{-x}}{dx} = -e^{-x}$$

FORMAS NORMALES

Miremos el ejemplo anterior. La idea es que todo lo que no sea polinomio lo se aproxime por polinomios.

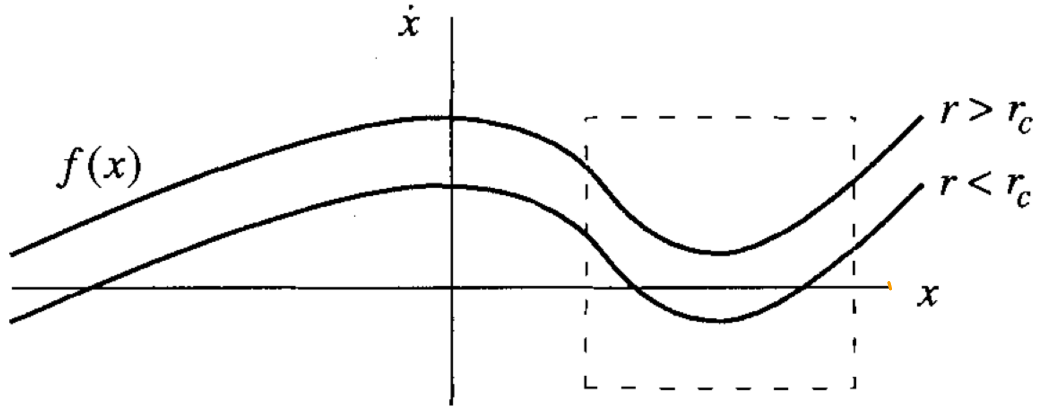
$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

$$= r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \right]$$

$$\dot{x} = (r - 1) - (x - x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \ldots\ldots$$

$$\dot{x} \approx (r - 1) - \frac{x^2}{2}$$

Miremos un caso bien general



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x;r)\\ &= f(x^*;r_c) + (x-x^*)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*,r_c)} + (r-r_c)\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(x^*,r_c)} + \tfrac{1}{2}(x-x^*)^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x^*,r_c)} + \cdots\end{aligned}$$

Desarrollaremos alrededor de r_c y x^* en dos dimensiones.

$$f(x^*, r_c) = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, r_c)} = 0$$

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \cdots$$

Sean $R = r - r_c$ y $X = x - x^*$

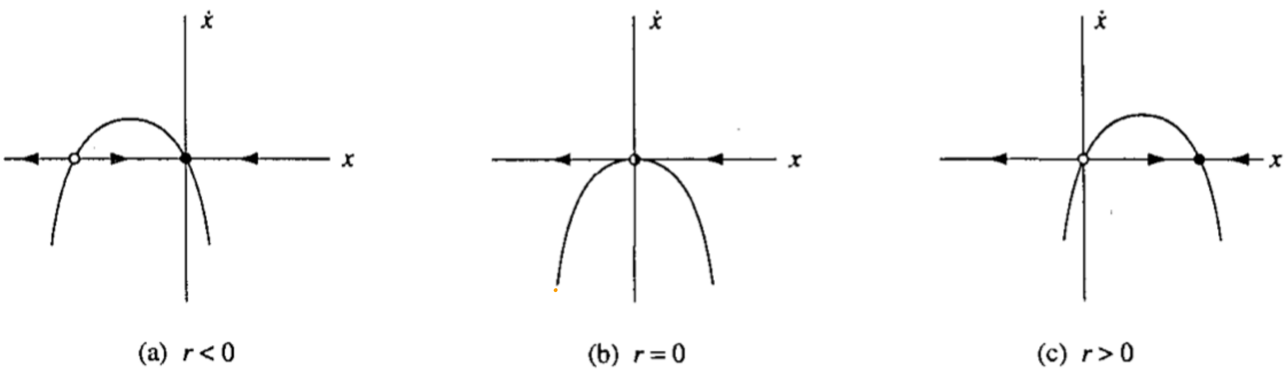
$$\dot{X} = \dot{x}$$

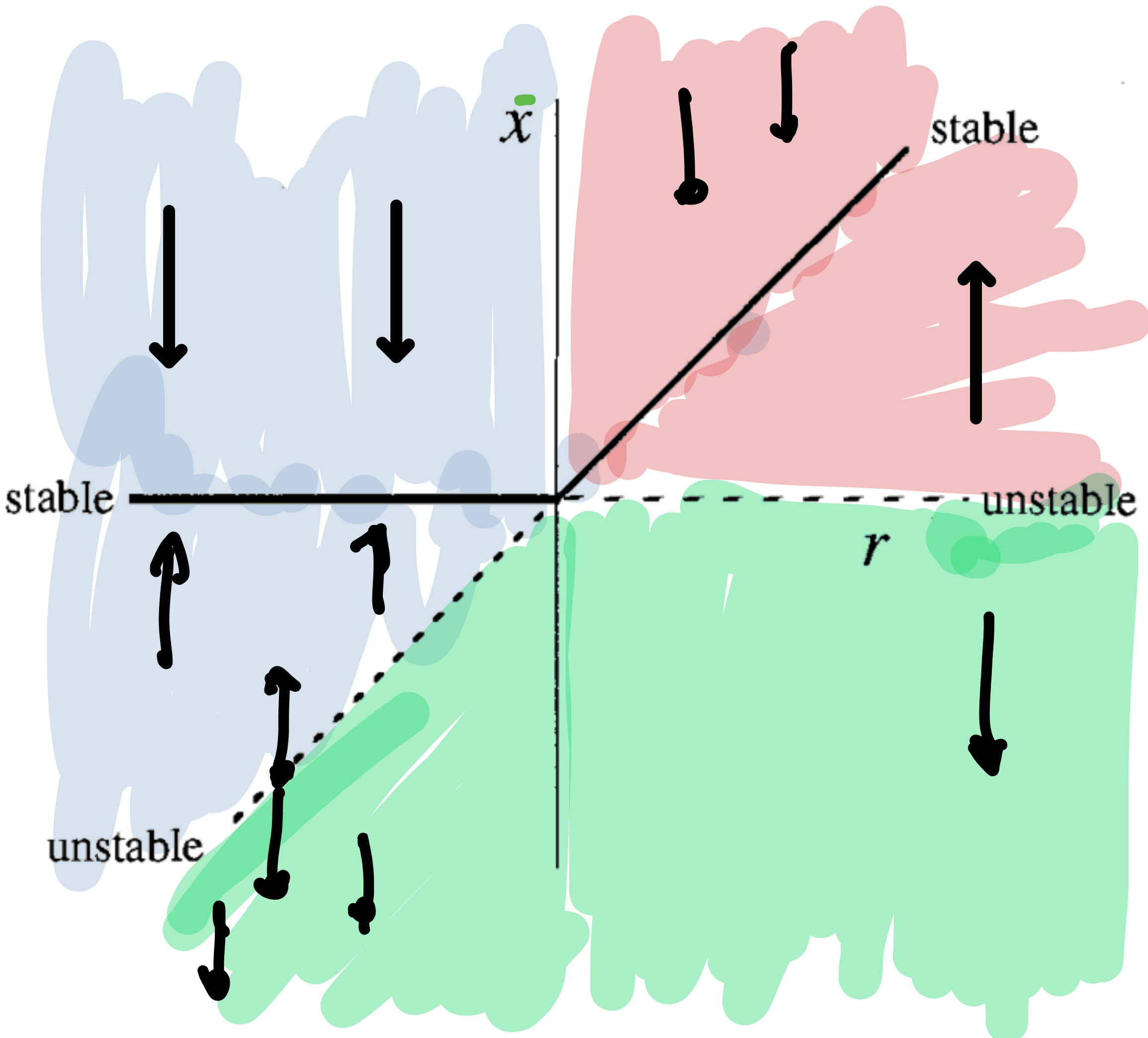
$$\dot{X} = aR + bX^2$$

similar a saddle-node

Bifurcación transcrítica

$$\dot{x} = rx - x^2 = x(r-x)$$





Ejemplo

$$\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$$

$$1 - e^{-bx} = 1 - \left\{1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3)\right\}$$

$$= bx - \frac{b^2x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\dot{x} = x - a\left(bx - \frac{b^2x^2}{2} + O(x^3)\right)$$

$$= (1-ab)x + \frac{1}{2}ab^2x^2 + O(x^3)$$

La bifurcación transcrita sucede cuando:

$$ab = 1$$

Ahora podemos deducir cuál es el punto fijo para a y b

$$(1 - ba) + \frac{1}{2} a b^2 x^* \approx 0 \implies x^* \approx \frac{2(ba-1)}{ab^2}$$

Esto vale si $x^* << 1$ para poder despreciar los términos $\mathcal{O}(x^3)$