REDES NEURONALES 2024

Clase 4 parte 2

Jueves 22 de agosto 2024

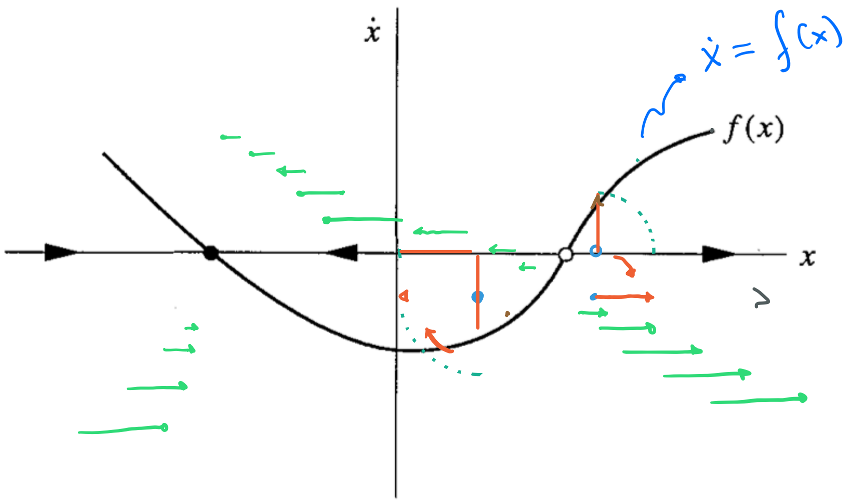
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

5/9/23 c5p1

Análisis de estabilidad lineal

En la clase pasada aprendimos que la parte derecha de nuestra ecuación diferencial ordinaria unidimensional guarda información valiosa sobre el comportamiento del sistema dinámico que describe para tiempos largos, o sea, en el limite en el cual el tiempo tiende a infinito.



A cada punto en el eje x le asignamos un vector que apunta hacia la derecha si la razón de cambio es positiva, a la izquierda si la razón de cambio es negativa y es nulo si la razón de cambio es nula. La magnitud del vector es igual al módulo de la razón de cambio $|f(x)|$.

Esto define un campo vectorial que asigna a cada elemento de $\mathbb{R}$ un elemento de $\mathbb{R}$ (asocia un vector unidimensional a cada vector unidimensional en $\mathbb{R}$).

El campo vectorial nos permite interpretar geométricamente la trayectoria del sistema a partir de una condición inicial dada, o sea, hacia dónde y hasta dónde evolucionará la variable x. No es una descripción cerrada, analítica, pero nos permite descubrir adónde podemos encontrar al sistema tiempos largos.

A tiempo infinito el sistema unidimensional solo puede encontrarse en:

- Uno de los puntos fijos.
- En $+\infty$.
- En $-\infty$.

Recordemos: Un PUNTO FIJO x^* es una raíz de $f(x)$, o sea, un valor de x para el cual la razón de cambio es nula.

$$f(x^*) = 0$$

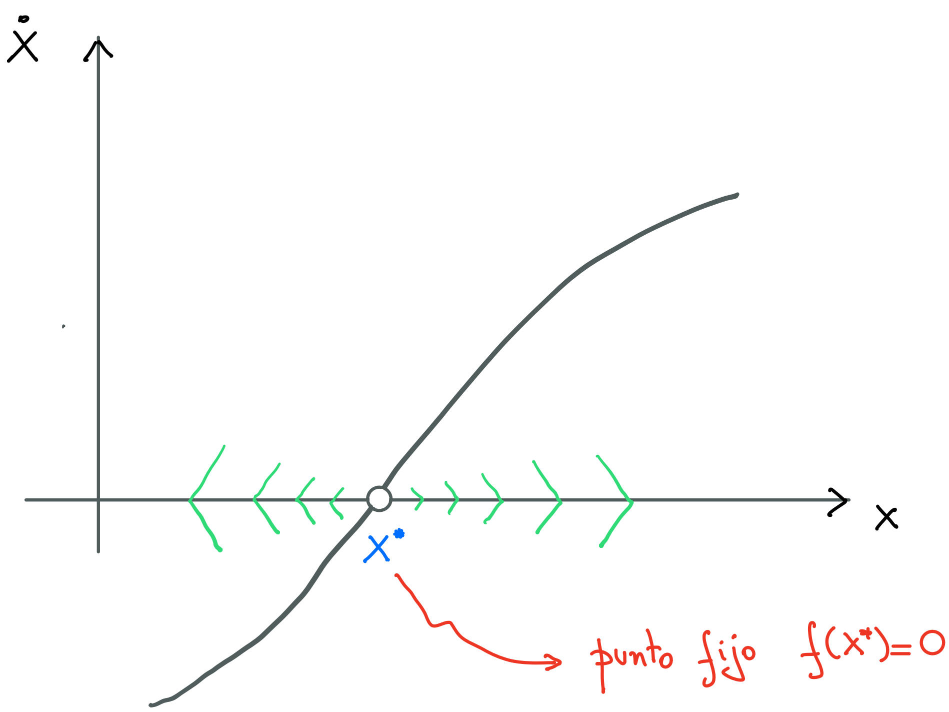
Si en cierto instante de tiempo t suce que

$$x(t) = x^*$$

entonces x quedará en ese valor por siempre, hasta el final del universo.

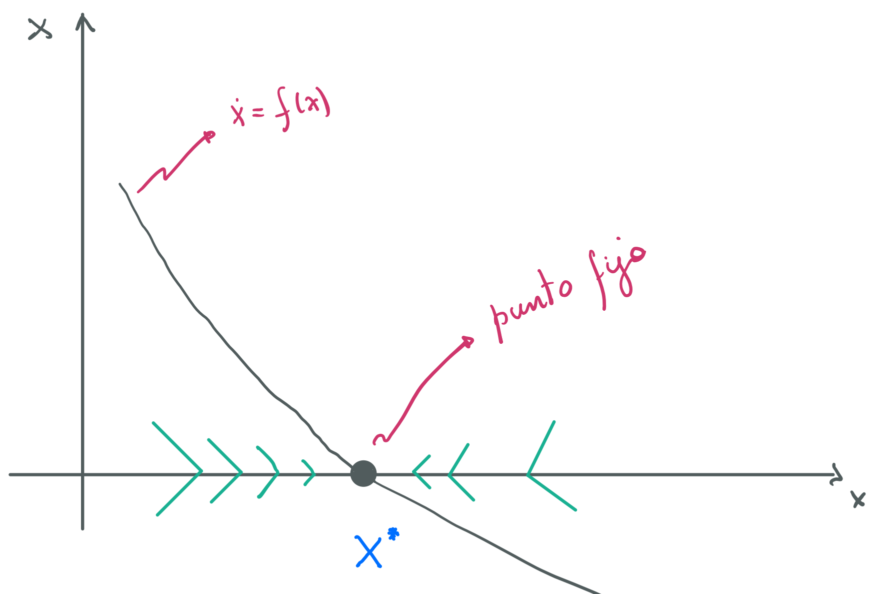
Miremos con más detalle los puntos fijos. Los hay de dos tipos.

En el siguiente gráfico tenemos un punto fijo para el cual los vectores del campo EMERGEN desde él. Si el sistema está infinitesimalmente cerca del punto fijo, ya sea por derecha o por izquierda, el valor de *x* será repelido, expulsado, apartado del punto fijo. Pero si el sistema está exactamente en el punto fijo, se quedará allí para siempre.

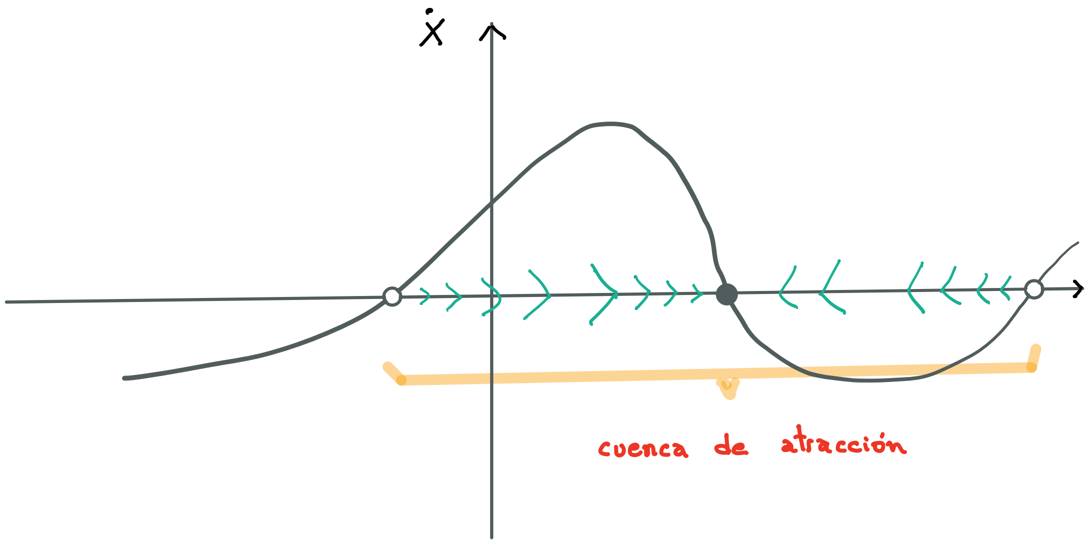


Si la función *f(x)* atraviesa el eje *x* de los negativos a los positivos, o sea, con pendiente positiva, como en la figura, los vectores del campo EMERGEN del punto fijo.

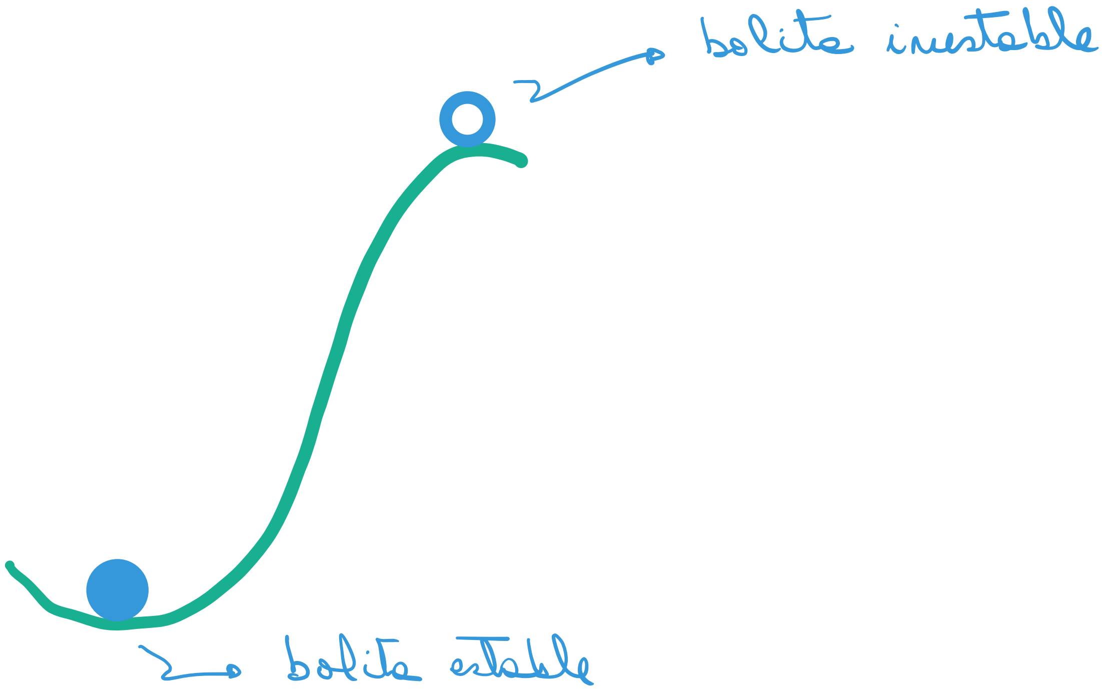
Miremos el siguiente caso en el cual otra vez tenemos un único punto fijo. Ahora los vectores del campo CONVERGEN hacia el punto fijo *x* . Decimos que el punto fijo es un sumidero de vectores. Si el sistema está próximo de x (y hasta sus puntos fijos vecinos), entonces atraerá a todos los sistemas que en *t=0* se preparen en esta cuenca.



En la figura siguiente vemos que dos puntos fijos inestables definen la cuenca de atracción del punto fijo entre ellos.



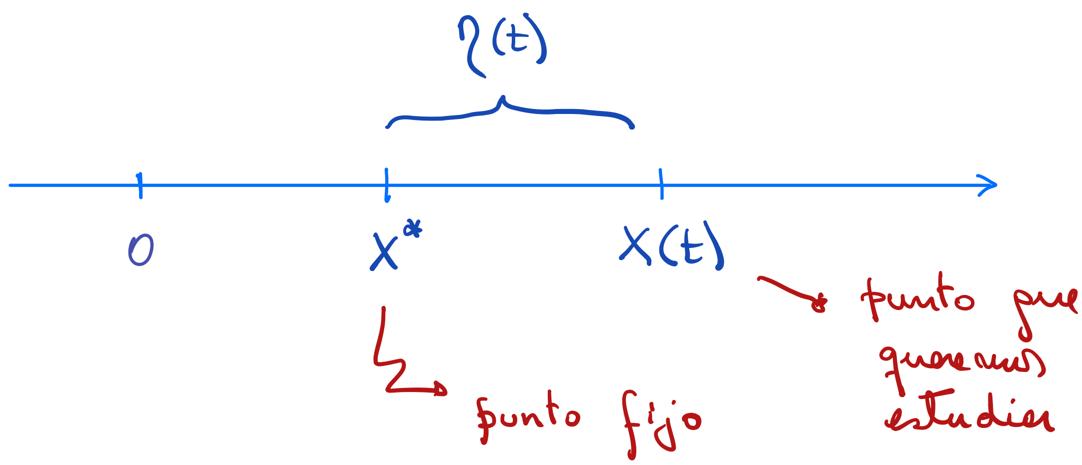
ANALOGÍA



Repitamos este análisis usando buen cálculo. Esto será especialmente útil en dimensiones mayores, donde no podremos apelar a la intuición que nos brinda la geometría.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

$$x(t) = x^* + \eta(t)$$



$$\dot{x} = f(x)$$

$$\dot{\overline{(x^* + \eta(t))}} = f(x^* + \eta(t))$$

$$\underbrace{\cancel{\dot{x}^*}}_{=0} + \dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

x^* es una constante

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

Si asumimos $\eta(t) << 1$ (pequeño) podemos usar el teorema de Taylor y aproximar la función por una recta, para lo cual exigimos que $f(x)$ sea continua y dos veces diferenciable, y que sean continuas su derivada y su derivada segunda.

$$f(x^*+\eta(t)) = f(x^*) + \eta(t)\, f'(x^*) + \frac{1}{2}\eta(t)^2 f''(\xi)$$

con $\xi \in (x^*, x^*+\eta(t))$.

Suponiendo que (t) es pequeño, podemos despreciar el error y llegar a la siguiente aproximación:

$$f(x^*+\eta(t)) \approx \underbrace{\cancel{f(x^*)}^{=0}}_{\text{por ser un punto fijo}} + \eta(t)\, \underbrace{f'(x^*)}_{\text{número real}}$$

Reemplazando en la ecuación

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

$$\boxed{\dot{\eta}(t) = \eta(t) f(x^*)}$$

↑

ECUACIÓN PARA LA PERTURBACIÓN

Ahora tenemos una ecuación para la perturbación fácil de resolver:

$$\eta(t) = A e^{f'(x^*) t}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A f'(x^*) e^{f(x^*) t}$$

$$= f'(x^*) A e^{f'(x^*) t}$$

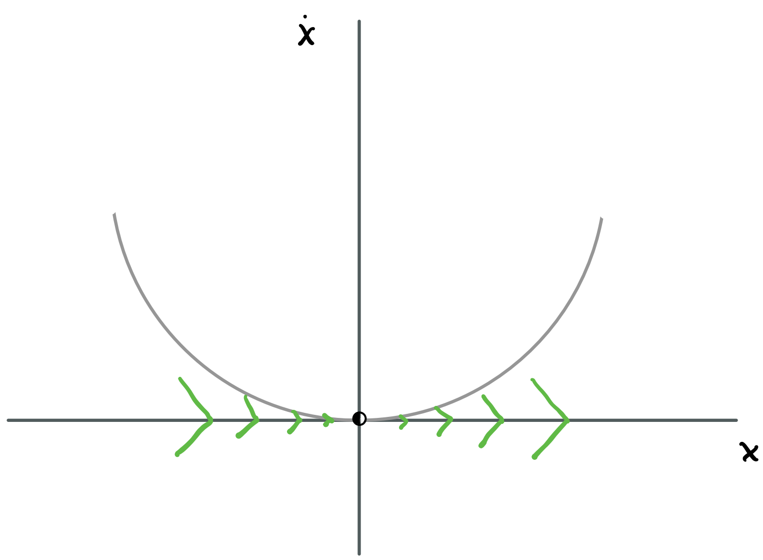
$$= f'(x^*) \eta(t)$$

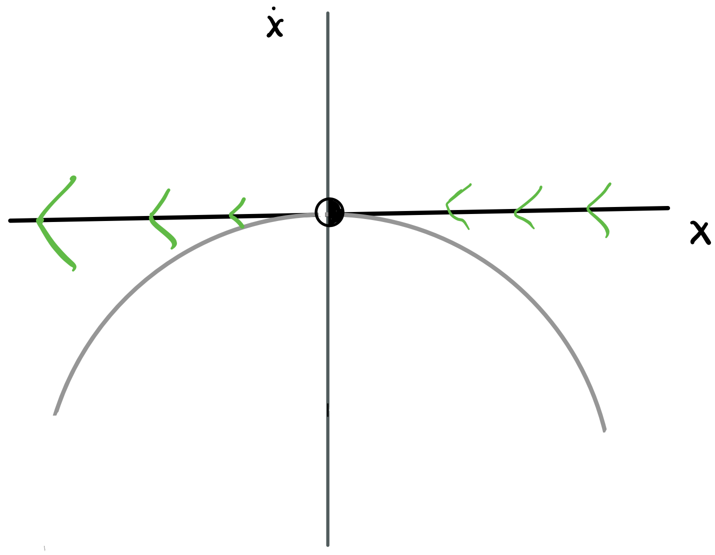
Si $f'(x^*) > 0$ la perturbación crece exponencialmente

Si $f'(x^*) < 0$ la perturbación decrece exponencialmente

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$: tiempo característico

Puntos fijos semi estables

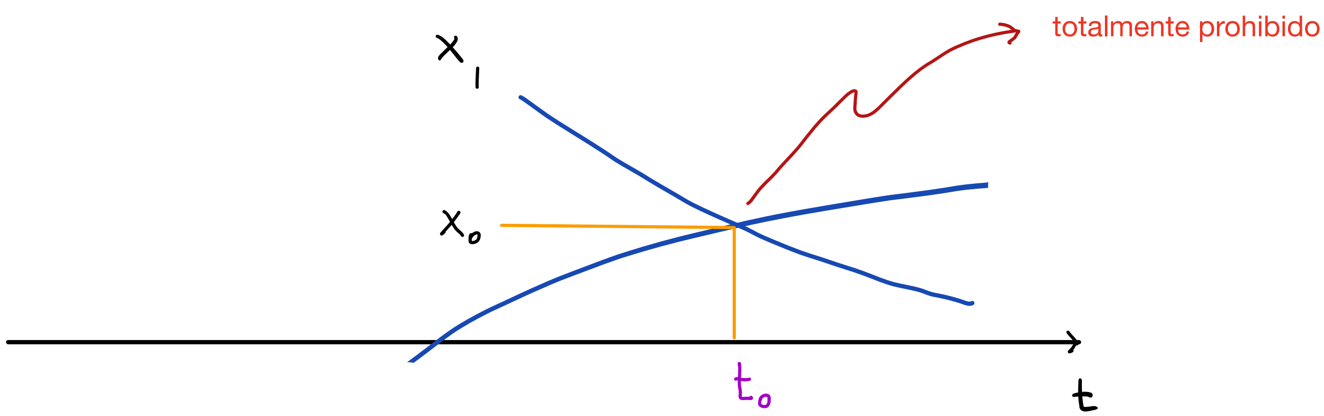




Este punto fijo es estable por izquierda e inestable por derecha.

Veremos que para que la solución exista y sea única alcanza exigir que *f(x)* sea suficientemente suave.

Volvamos a la trayectoria *x(t)*.



Si las trayectorias se cruzan, en ese instante de tiempo *t* habría dos soluciones diferentes para el problema de valor inicial.