REDES NEURONALES 2024

Clase 3 parte 2

Lunes 19 de agosto 2024

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

31/8/22 c4p1

SISTEMAS DINÁMICOS

No siempre conocemos la dependencia de la razón de cambio en función de *x* y *t* (donde ahora *x* puede ser un conjunto de n variables). Por ejemplo, podemos conocer la razón de cambio de la razón de cambio:

$$\frac{dx(t)}{dt^2} = f\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t\right)$$

La forma más general es:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, t\right)$$

En la física newtoniana en particular, las variables dinámicas de interés son las funciones posición de cada partícula. Si tenemos una única partícula en tres dimensiones, tenemos tres incógnitas: *x(t)*, *y(t)* y *z(t)*.

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), r(t))$$

$$m \frac{d^2 \bar{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d z(t)}{d^2 t^2} = F_z\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} \qquad \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{r} \in \mathbb{R}^3 \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} \in \mathbb{R}^3 \qquad \bar{F} \in \mathbb{R}^3 \qquad t \in \mathbb{R}$$

La masa *m* por la aceleración es igual a la fuerza que se ejerce sobre la partícula. Y esta fuerza en general depende de la posición de la partícula, de la velocidad de la partícula y del tiempo *t*.

Los sistemas no autónomos

Si tenemos un sistema no autónomo, o sea, en el cual el tiempo *t* aparece explícitamente en la razón de cambio *f*, siempre podemos definir una variable dinámica extra que represente el tiempo y de esta forma recuperar el carácter de sistema autónomo al costo de aumentar la dimensión del sistema en 1.

Consideremos, a modo de ejemplo, un sistema no autónomo unidimensional:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left(1 - x(t)\right) + F\cos(t)$$

Ahora hacemos

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = t$$

y así:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)\left(1 - x_1(t)\right) + F\cos(x_2(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 1$$

O sea, si tenemos una EDO no autónoma, agregamos una variable más, $x_2(t)$ y recuperamos un sistema autónomo de dos EDO.

Sistemas de orden superior

Supongamos que tenemos una EDO de segundo orden. A modo de ejemplo consideremos

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k\, x(t)$$

Hacemos

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{d x(t)}{dt}$$

con lo cual:

$$\frac{d x_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{d x_2(t)}{dt} = -\frac{k}{m} x_1(t)$$

Miremos el caso de una ecuación de tercer orden:

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} = -x(t) + \gamma \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) + \gamma x_2(t)$$

El orden de una EDO o de un sistema de EDOs es el orden de la derivada de mayor orden que aparece. En general, si tenemos una EDO de orden *n*, esta tiene la forma:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f\left(\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right)$$

y se puede convertir en un sistema de *(n+1)* ecuaciones de orden 1 y autónomos.

En definitiva, siempre podemos reducir un sistema de EDOs a un sistema de EDOs autónomo al costo de aumentar eventualmente la dimensionalidades.

CUESTIONES DE NOTACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Por simplicidad, no incluimos la notación de la dependencia temporal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \longrightarrow \dot{x} = f(x, t)$$

notación simplificada

$$\dot{x} = f(x)$$

SOBRE NUESTRO INTERÉS

- No pretendemos encontrar soluciones cerradas (analíticas) de los sistemas de EDOs.

- Nos interesa en cambio saber dónde estará el sistema cuando $t \longrightarrow \infty$ y conocer la naturaleza dinámica del atractores.

- Si tenemos un sistema de EDOs autónomo, queremos extraer información del análisis geométrico de las razones de cambio (de los lados derechos).

Consideremos el caso de una EDO autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

Si *f(x)* es una función lineal, podemos resolver exactamente el problema. Ustedes lo resolverán en el práctico 1 de regularidad. Lo mismo se puede extender a un sistema de EDOs lineal, para lo cual usamos toda la potencia del álgebra lineal.

Sin embargo, en la gran mayoría de las disciplinas que utilizan ecuaciones diferenciales como modelo cuantitativo, para tratar fenómenos interesantes se requiere llevar en cuenta fenómenos no lineales.

Decimos que un fenómeno es lineal si las funciones que describen las razones de cambio (los lados derechos) son polinomios de a lo sumo grado 1.

Ejemplos

$$\dot{x} = -kx$$

$$\dot{x} = \pi$$

La dimensión del sistema dinámico no refiere a la dimensión del espacio en el cual uno describe el fenómeno, usualmente 1, 2, 3 o 4, sino a la dimensión del espacio vectorial en el cual debemos representar el problema, o sea, el número de variables dinámicas.

ACLARACIÓN

Muchas veces la función incógnita depende del tiempo y de otras variables independientes, como por ejemplo puede ser la posición

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Aquí las variables *x*, *y* y *z* no dependen de *t*, sino que tienen el mismo status. En estos casos la función incógnita es función de cuatro variables independientes.

Ejemplo

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

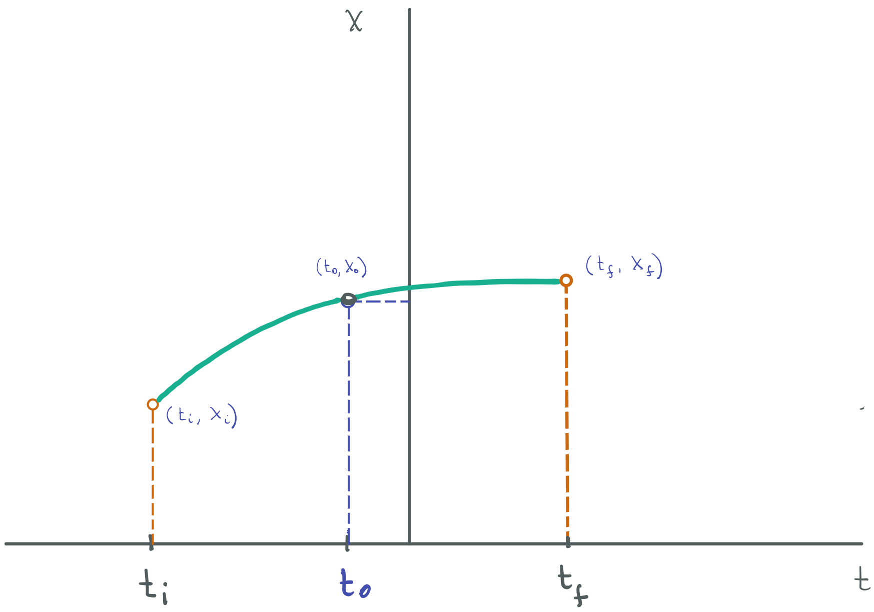
Estos sistemas en general son descriptos por ECUACIONES A DERIVADAS PARCIALES (no son ecuaciones ordinarias).

EN ESTE CURSO NO VEREMOS ECUACIONES A DERIVADAS PARCIALES

NOS INTERESA MUCHÍSIMO ENTENDER CÓMO LA NO LINEALIDAD Y LA DIMENSIÓN DEL PROBLEMA AFECTAN LA NATURALEZA DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA DINÁMICO PARA TIEMPOS MUY LARGOS

Resumiendo, cuando usamos sistemas dinámicos nos limitamos a conocer la naturaleza de la evolución temporal del sistema en tiempos muy largos. Si en cambio deseamos conocer en detalle la trayectoria de esta evolución temporal, deberemos apelar a métodos numéricos, como por ejemplo Euler o Runge Kutta, para resolver un problema de valor inicial.

Dada una Ecuación Diferencial Ordinaria $\dot{x} = f(x)$, el problema de valor inicial consiste en encontrar o aproximar la trayectoria que pase por x_0 en t_0 para cierto intervalo de tiempo que incluye a t_0.



UN POCO DE HISTORIA

Dynamics - A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flowering of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle & Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfree	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications