# REDES NEURONALES 2024

**Clase 12 parte 2**

**Lunes 23 de septiembre 2024**


**FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba**

**Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)**


J05/10/23 c13p1

## BIFURCACIONES REVISITADAS EN 2D

Es importante saber que todas las categorías de bifurcaciones que vimos para sistemas unidimensionales siguen existiendo cuando tenemos un sistema bidimensional de EDO. Recordemos que estos tipos eran

- Punto de ensilladura o saddle node.
- Transcríticas.
- Pitchfork

Lo que sucede ahora es que la bifurcación se dañen un espacio unidimensional que no necesariamente coincide con alguna de las coordenadas del problema.

Miremos ahora el caso bidimensional con todo lo ya aprendido.

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

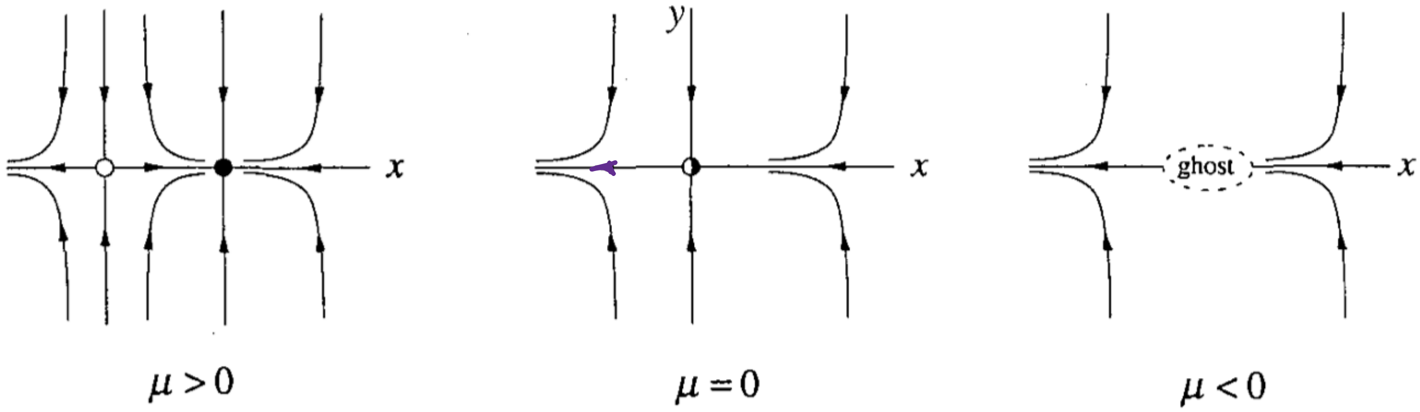
### Bifurcación punto de ensilladura o saddle node

Este es el mecanismo básico mediante el cual se crean y destruyen puntos fijos a medida que cambiamos los parámetros de nuestro sistema de dos EDO. Veamos el ejemplo prototípico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \longrightarrow \text{Forma Normal}$$

Tenemos dos puntos fijos $(x^*, y^*)_1 = (\sqrt{\mu}, 0)$

$$(x^*, y^*)_2 = (-\sqrt{\mu}, 0)$$



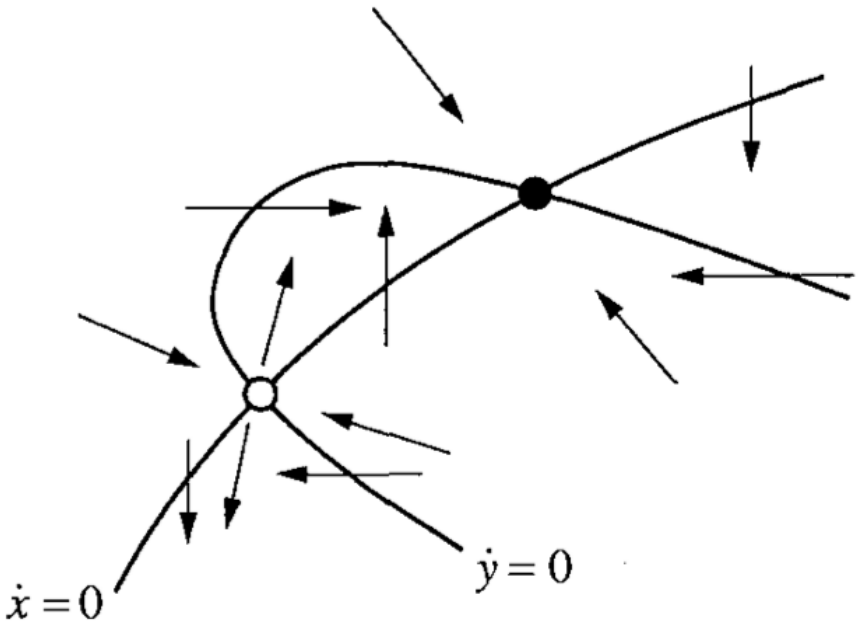

A medida que $\mu$ decrece, el punto de ensilladura y el nodo estable se acercan entre sí. Para. $\mu=0$ ambos colapsan, y finalmente para $\mu<0$, desaparecen.

$$\tau \propto \frac{1}{\sqrt{(\mu-\mu_c)}}$$

Aún después de desaparecer, los puntos fijos desaparecidos siguen alterando el flujo. Se dicen que queda en fantasma que atrae trayectorias hacia él pero que las deja ir antes de que lleguen. En particular estas trayectorias pasarán más tiempo en esta región, y en general este tiempo varía como

$\mu_c$ : valor crítico del parámetro

y n



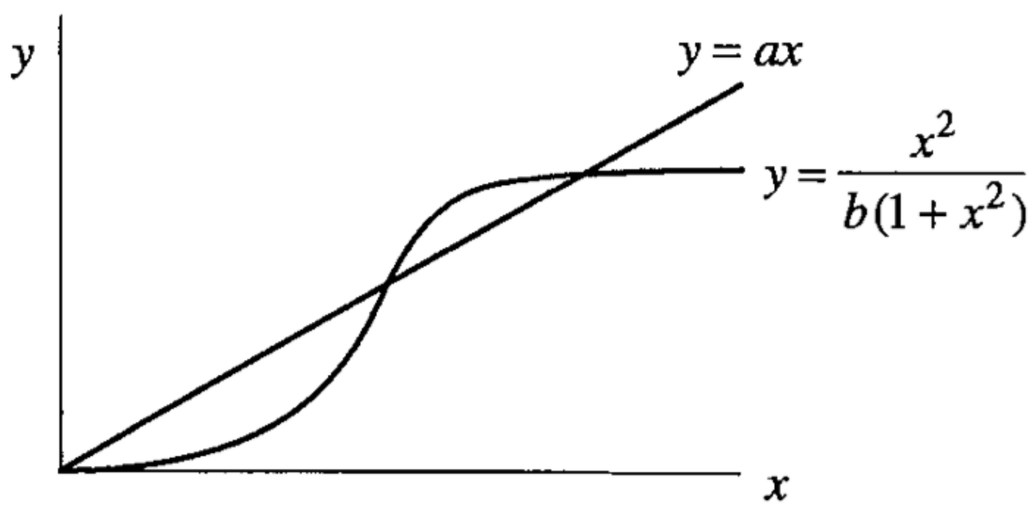
$\dot{x} = -ax + y$ $\quad x$ : concentración de proteínas

$\dot{y} = \dfrac{x^2}{(1+x^2)} - by$ $\quad y$ : concentración de RNA

Nullclines:

$$y = ax \qquad \dot{x} = 0$$

$$y = \frac{x^2}{b(1+x^2)} \qquad \dot{y} = 0$$



Estas curvas se intersectan en

$$a x = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$$

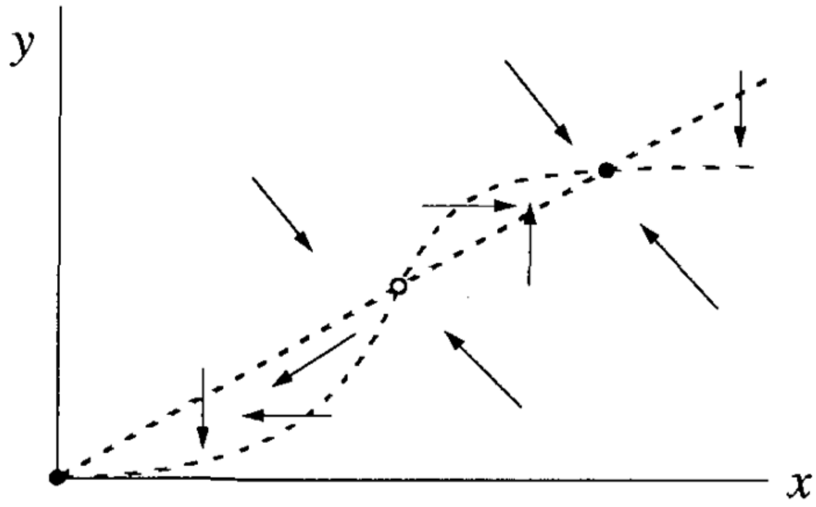
Solución 1 $\quad x_1^* = 0 \qquad y_1^* = 0$

Solución 2 $\quad ab(1+x^2) = x$

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2b^2}}{2ab}$$

Si $\quad 1-4a^2b^2 > 0 \,, \quad 2ab < 1 \qquad a_c = \frac{1}{2b}$

$x^* = 1 \qquad$ en la bifurcación




$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}$$

$$\tau = -(a+b) < 0$$

$$(x^*, y^*) = (0,0) \implies \Delta = ab > 0$$ Nodo estable

$$\tau^2 - 4\Delta = (a-b)^2 > 0$$

Para los otros dos puntos

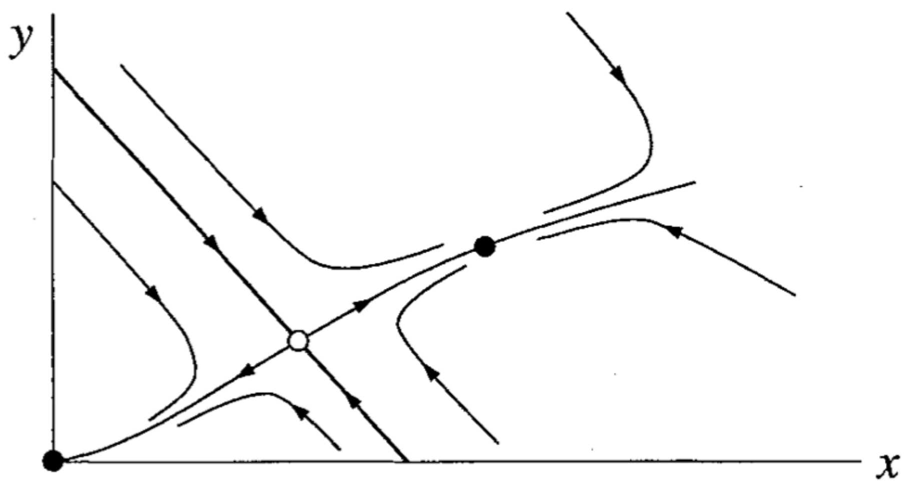
$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1+(x^*)^2)^2} = ab\left[\frac{(x^*)^2-1}{1+(x^*)^2}\right].$$

Para el punto con $0 < x^* < 1$ intermedio $\Delta < 0$

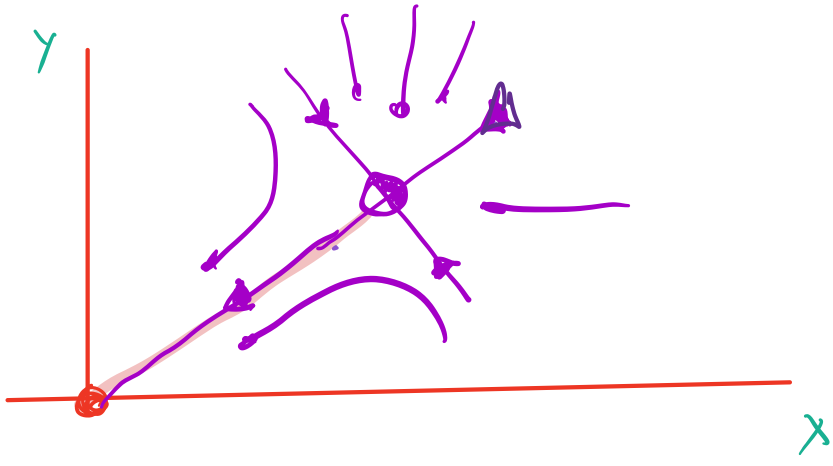
y el punto fijo es saddle node.

Para el punto derecho $x^* > 1$ $\Delta > 0$

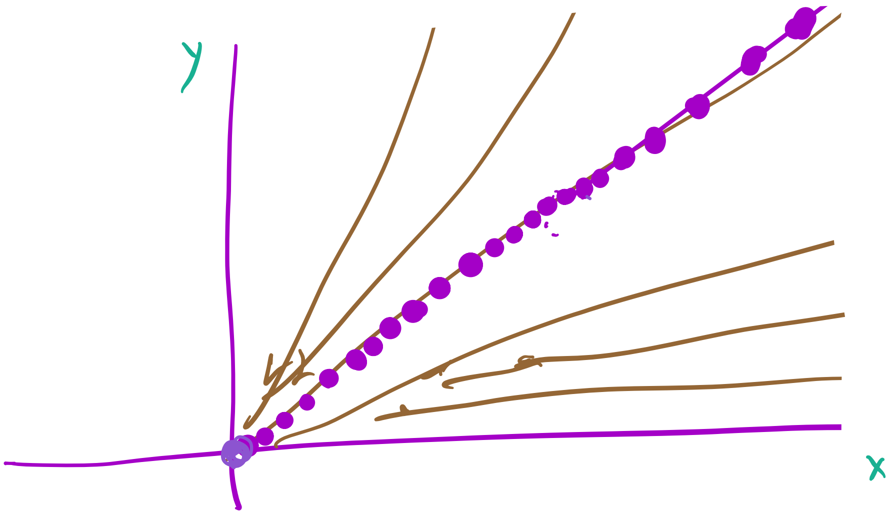
y el punto fijo es estable.




$\mu < \mu_c$




$\mu = \mu_c$




$\mu > \mu_c$

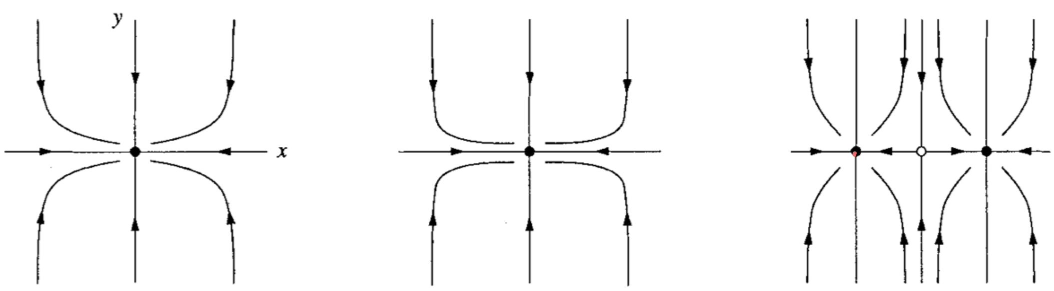
## Bifurcación transcrítica

$$\dot{x} = \mu x - x^2 , \qquad \dot{y} = -y$$

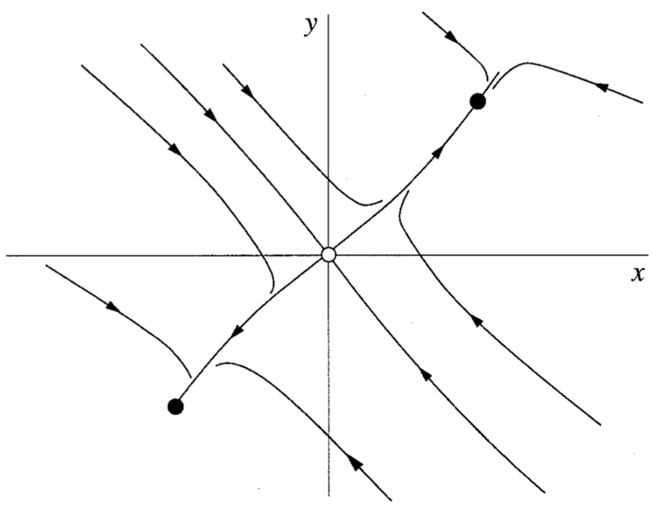
## Bifurcación Pitchfork supercrítica

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \qquad \dot{y} = -y$$

A




$\mu < 0$ $\qquad$ $\mu = 0$ $\qquad$ $\mu > 0$




Ejemplo

$$\dot{x} = \mu x + y + \operatorname{sen}(x)$$

$$\dot{y} = x - y$$

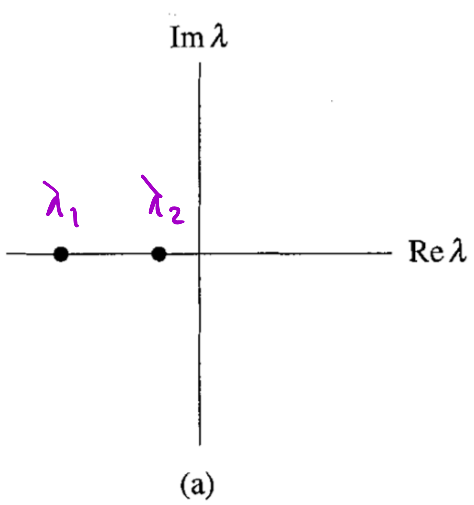
Bifurcación Pitchfork subcrítica

$$\dot{x} = \mu x + x^3 \qquad \dot{y} = -y$$

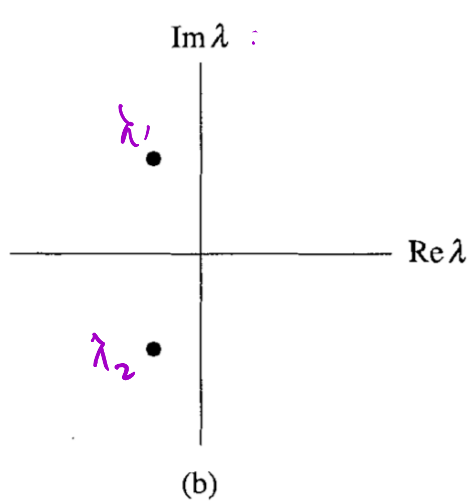
Lo nuevo en 2D: la bifurcación de Hopf

Supongamos que tenemos un punto fijo estable, entonces

$$Re(\lambda_1) \leq Re(\lambda_2) < 0$$



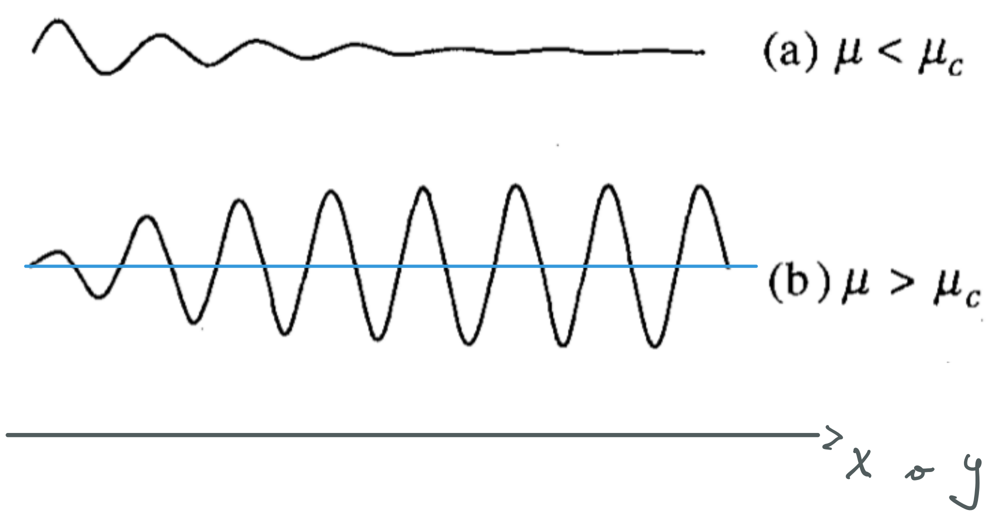

nodos estables

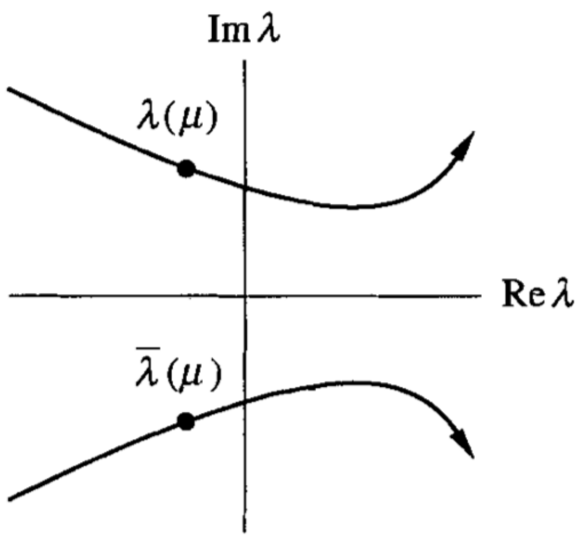



espirales estables

## Bifurcación supercritical de Hopf

Tenemos originalmente un espiral estable




El parámetro $\mu$ controla el pasaje de espiral estable a espiral inestable.

## Bifurcación subcritica de Hopf

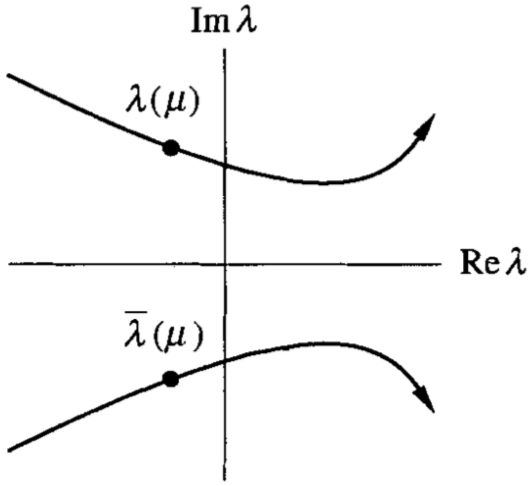
$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2. \end{cases}$$

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta.$$

$$\begin{cases} \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ &= (\mu r - r^3)\cos\theta - r(\omega + br^2)\sin\theta \\ &= \left(\mu - [x^2 + y^2]\right)x \; - \; \left(\omega + b[x^2 + y^2]\right)y \\ &= \mu x - \omega y + \text{cubic terms} \end{aligned} \\ \dot{y} = \omega x + \mu y + \text{cubic terms.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \mu \pm i\omega.$$




$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$
$$\dot{\theta} = \omega + br^2.$$