REDES NEURONALES 2023

Clase 8 parte 1

14 de septiembre de 2023

Francisco Tamarit, Juan Perotti y Benjamín Marcolongo

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Instituto de Física Enrique Gaviola (UNC-CONICET)

francisco.tamarit@unc.edu.ar   juan.perotti@unc.edu.ar   benjaminmarcolongo@gmail.com

13/9/22 c6 p2

TEORÍA DE BIFURCACIONES: El rol de los parámetros.

El caso unidimensional

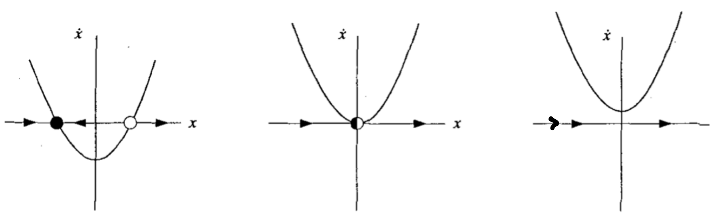
La bifurcación saddle-node

Ahora analizaremos una familia particular de EDO en una dimensión. Veremos que es una familia peculiar. Veremos ahora el rol de los parámetros y no de las variables dependientes e independientes.

$$\dot{x} = r + x^2$$

r es un número real

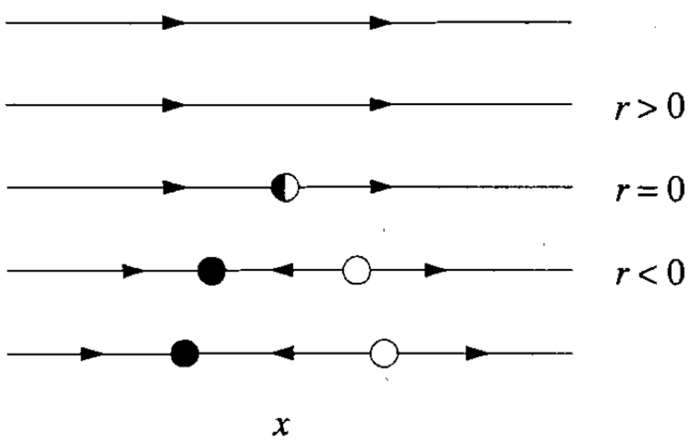
Para cada valor de *r* tenemos un modelo.

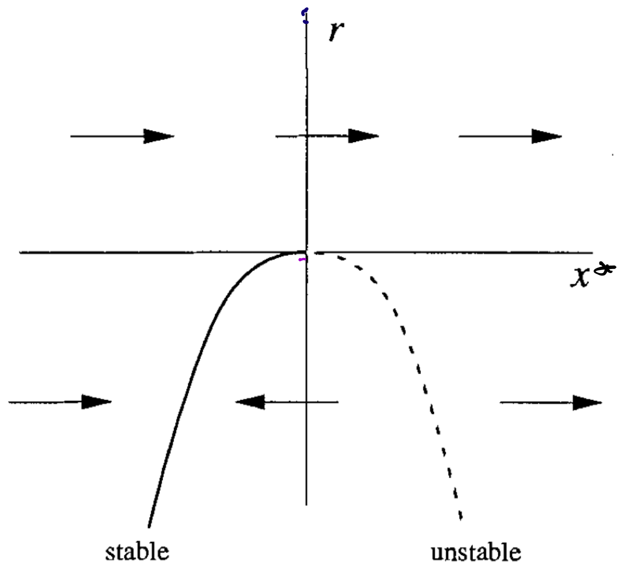


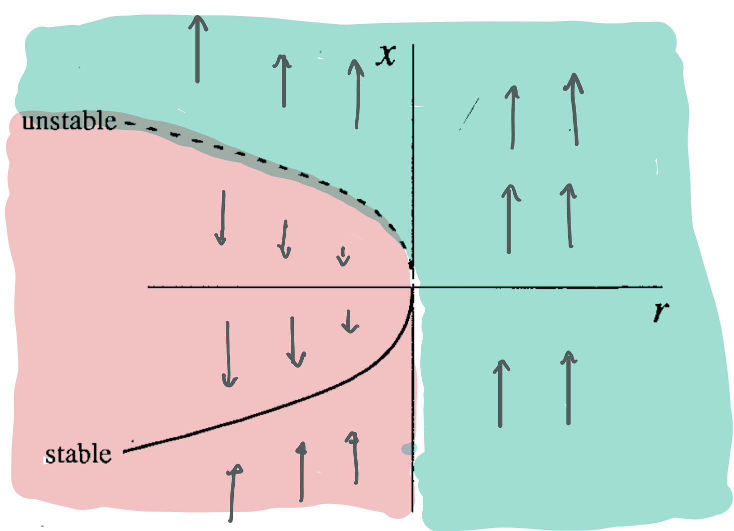
(a) $r<0$ (b) $r=0$ (c) $r>0$

punto de bifurcación

A medida que cambiamos el valor de *r* la estructura topológica de campo vectorial puede cambiar drásticamente y por ende, para tiempos grandes podemos tener diferentes comportamientos.


$r > 0$
$r = 0$
$r < 0$
x


r
x^*
stable
unstable


x
unstable
r
stable

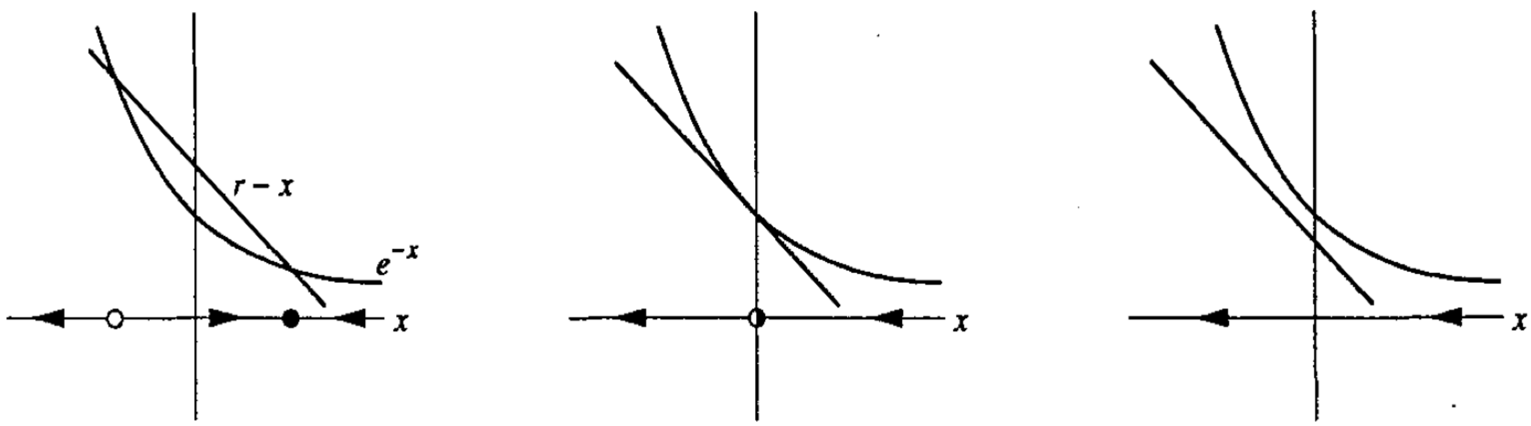
Si

$$\dot{x} = r - x^2$$

$r<0$ $r=0$ $r>0$

Ejemplo

$$\dot{x} = (r - x) - e^{-x}$$



$$f(x^*) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r - x = e^{-x}$$

$$\frac{d(r-x)}{dx} = -1 \qquad\qquad \frac{d\,e^{-x}}{dx} = -e^{-x}$$

FORMAS NORMALES

Miremos el ejemplo anterior. La idea es que todo lo que no sea polinomio lo se aproxime por polinomios.

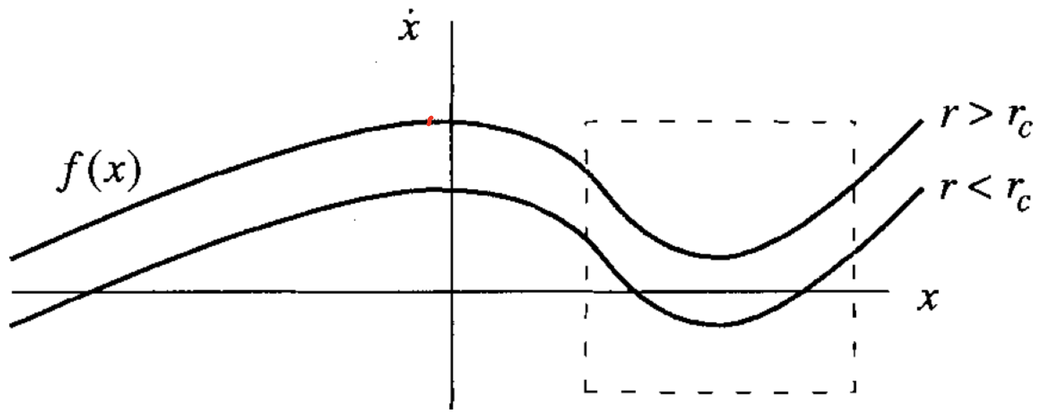
$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

$$= r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \right]$$

$$\dot{x} = (r-1) - (x - x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \cdots\cdots$$

$$\dot{x} \approx (r-1) - \frac{x^2}{2}$$

Miremos un caso bien general



$$\dot{x} = f(x;r)$$

$$= f(x^*;r_c) + (x - x^*)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*,r_c)} + (r - r_c)\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(x^*,r_c)} + \tfrac{1}{2}(x - x^*)^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x^*,r_c)} + \cdots$$

Desarrollaremos alrededor de r_c y x^* en dos dimensiones.

$$f(x^*, r_c) = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, r_c)} = 0$$

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \cdots$$

Sean $\quad R = r - r_c \quad$ y $\quad X = x - x^*$

$$\dot{X} = \dot{x}$$

$$\dot{X} = aR + bX^2$$

similar a saddle-node