REDES NEURONALES 2024

Clase 10 parte 2

Jueves 12 de septiembre 2024

FAMAF, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

INSTITUTO DE FÍSICA ENRIQUE GAVIOLA (UNC-CONICET)

26/9/23 c10p2

$$det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$a = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} \qquad b = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*, y^*} \qquad c = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*, y^*} \qquad d = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x^*, y^*}$$

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= (a - \lambda)(d - \lambda) - cb \\ &= ad - cb - \lambda(a + d) + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - cb) \\ &= \lambda^2 - \lambda \tau + \Delta = 0 \end{aligned}$$

$$\tau = a + d$$

Traza de la matriz A

$$\Delta = \det(A) = ad - bc$$

Determinante de la matriz A

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Posibilidades
$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{reales} \quad \tau^2 > 4\Delta \\ \lambda_1 = \lambda_2 & \text{reales} \quad \tau^2 = 4\Delta \\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 & \text{complejos} \quad \tau^2 < 4\Delta \end{cases}$$

1) Encontramos los puntos fijos $\bar{x}^*$

2) Linealizamos alrededor del punto fijo $\bar{x}^*$

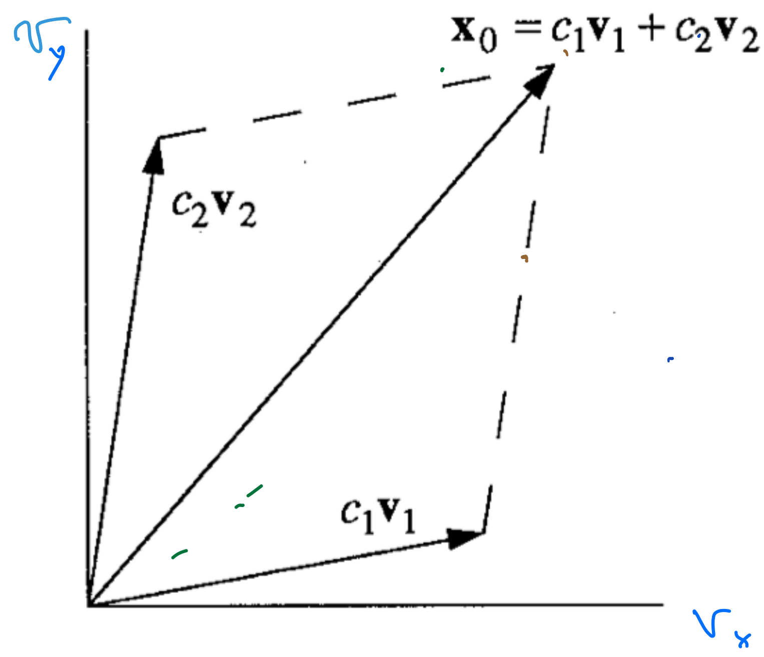
Para cada punto fijo hacemos:

3) Calculamos el jacobiano A evaluando las derivadas parciales.

4) Calculamos los autovalores de la matriz jacobiana A

5) Encontramos los correspondientes autovectores de A

$$A\,\bar{v}_1 = \lambda_1\,\bar{v}_1 \qquad A\,\bar{v}_2 = \lambda_2\,\bar{v}_2$$

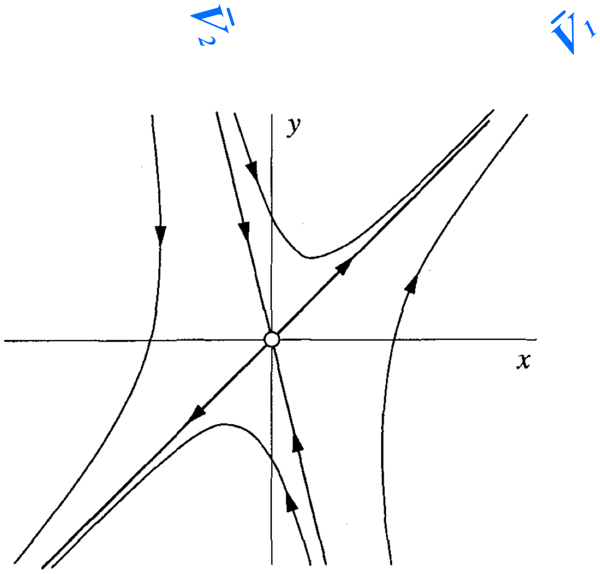


Como ahora tenemos una sistema de dos ecuaciones lineales acopladas, la suma de dos soluciones es también una solución.

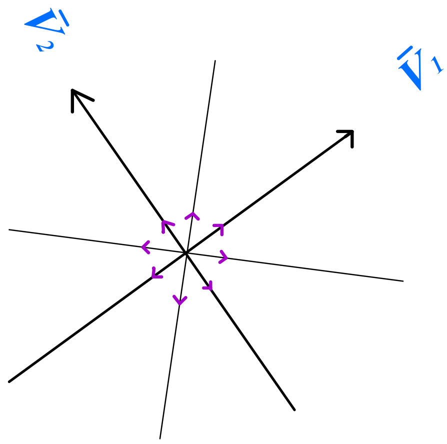
Podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix}$$

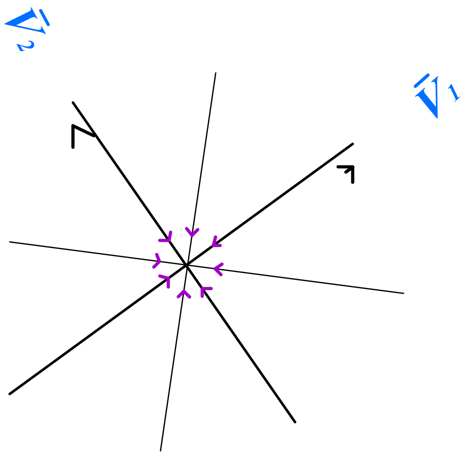
En definitiva, podemos describir el problema desde cada punto fijo en la base definida por los autovectores.



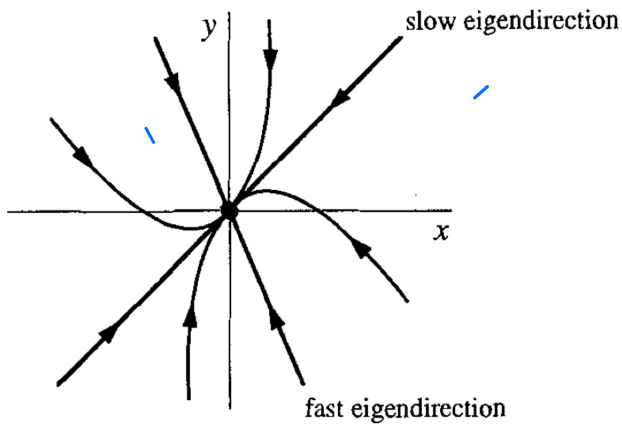
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



$0 < \lambda_1 = \lambda_2$



$0 > \lambda_1 = \lambda_2$



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Hasta aquí analizamos los casos en que los autovalores son números reales.

¿Qué sucede con las soluciones del problema lineal si los autovalores son complejos conjugados?

Recordemos en que condiciones se dan las soluciones complejas conjugadas

$$\lambda_{\substack{1\\2}} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \qquad \lambda_{\substack{1\\2}} = \frac{\tau \pm i\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$$

Si $\tau^2 - 4\Delta < 0$

$$\lambda_2 = \frac{\tau}{2} - \frac{i\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{2} + \frac{i\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$$

Sean $\alpha = \dfrac{\tau}{2}$ $\qquad \omega = \dfrac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega \qquad \lambda_2 = \alpha - i\omega$$

Si $\omega \neq 0$

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{v}_2$$

$$= c_1 e^{\alpha t + i\omega t} \bar{v}_1 + c_2 e^{\alpha t - i\omega t} \bar{v}_2$$

$$= e^{\alpha t} (c_1 e^{+i\omega t} \bar{v}_1 + c_2 e^{-i\omega t} \bar{v}_2)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

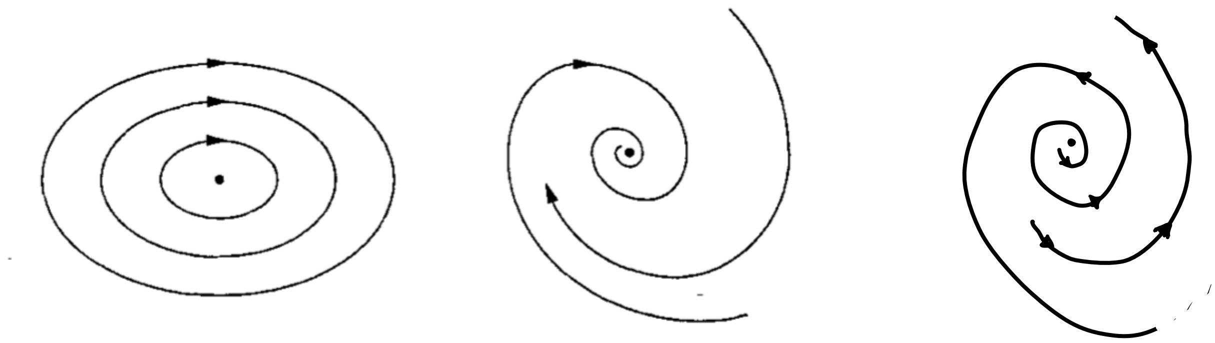
$$\operatorname{sen}(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t) = e^{i\omega t}$$

$$\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t) = e^{-i\omega t}$$

Si $\alpha = \frac{\zeta}{2} = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ espiral estable (decae al punto fijo)

Si $\alpha = \frac{\zeta}{2} = \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ espiral inestable (sale del punto fijo)



centros espiral estable espiral inestable

Si $\alpha = \frac{\zeta}{2} = \mathrm{Re}(\lambda) = 0$ oscilaciones puras