

MATEMÀTIQUES II DELS GRAUS DE BIOLOGIA I BIOQUÍMICA.
TAULES DE CONTRASTOS D'HIPÒTESI MÉS USUALS II: DUES MOSTRES

En aquest document recollim els contrastos d'hipòtesis paramètrics més usuals per a dues mostres que es poden portar a terme “a mà.” Per a cada contrast donam: les condicions, l'estadístic de contrast, la regió crítica, l'interval de confiança i el p-valor.

En la definició dels estadístics hem emprat la notacions següents:

- Z : Distribució normal estàndard $N(0, 1)$.
- t_n : Distribució t de Student amb n graus de llibertat.
- χ_n^2 : Distribució khi-quadrat amb n graus de llibertat.
- F_{n_1, n_2} : Distribució F de Fisher amb n_1 i n_2 graus de llibertat.
- X_α : Indica l' α -quantil de la variable aleatòria X , és a dir (si X és contínua, que és sempre el cas en aquest document), el valor on la funció de distribució de X val α : $P(X \leq X_\alpha) = \alpha$.

Recordau la traducció als quantils de les propietats de simetria de Z , t i F :

- Simetria de la normal: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.
- Simetria de la t de Student: $t_{n, \alpha} = -t_{n, 1-\alpha}$.
- Permutació dels graus de llibertat de la F de Fisher: $F_{n_1, n_2, \alpha} = \frac{1}{F_{n_2, n_1, 1-\alpha}}$.

Els contrastos paramètrics amb R els estudiam a la lliçó 23 del manual.

Tipus de contrast i condicions				
Hip. nul·la	Condicions	Mostra	Hip. alt.	Cas
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Cas independent	σ_1 i σ_2 conegudes. Poblacions normals o n_1 i n_2 grans.	Dues m.a.s. independents de mides n_1 i n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	I
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	II
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	III
	σ_1 i σ_2 desconegudes i $\sigma_1 = \sigma_2$. Poblacions normals o n_1 i n_2 grans.	Dues m.a.s. independents de mides n_1 i n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	IV
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	V
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	VI
	σ_1 i σ_2 desconegudes i $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Poblacions normals o n_1 i n_2 grans.	Dues m.a.s. independents de mides n_1 i n_2	$H_1 : \mu \neq \mu_2$	VII
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	VIII
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	IX
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Cas dependent	Dues poblacions normals dependents o n gran. σ_d coneguda. ⁽¹⁾	Dues m.a.s. dependents de mida n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	X
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XI
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XII
	Dues poblacions normals dependents. σ_d desconeguda. ⁽¹⁾	Dues m.a.s. dependents de mida n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	XIII
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XIV
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XV
	Dues poblacions dependents, n gran. σ_d desconeguda. ⁽¹⁾	Dues m.a.s. dependents de mida n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	XVI
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XVII
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XVIII
$H_0 : p_1 = p_2$ Cas independent	Poblacions Bernoulli, n_1 i n_2 grans, molts èxits i fracassos.	Dues m.a.s. independents de mides n_1 i n_2	$H_1 : p_1 \neq p_2$	XIX
			$H_1 : p_1 < p_2$	XX
			$H_1 : p_1 > p_2$	XXI
$H_0 : p_a = p_d$ Cas dependent	Poblacions Bernoulli, n_1 i n_2 grans, molts casos discordants.	Dues m.a.s. dependents de mida n	$H_1 : p_a \neq p_b$	XXII
			$H_1 : p_a < p_b$	XXIII
			$H_1 : p_a > p_b$	XXIV
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ Cas independent	Poblacions normals.	Dues m.a.s. independents de mides n_1 i n_2	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	XXV
			$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	XXVI
			$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	XXVII

(1) σ_d és la desviació típica de la variable $D = X_1 - X_2$.

Detalls del test				
Cas	Estadístic	Regió crítica	Interval confiança	p-valor
I	$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}}$ és $N(0, 1)$ (vegeu (a))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}[$	$2P(Z \geq z)$
II		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$]-\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_\alpha \tilde{S}[$	$P(Z \leq z)$
III		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\alpha} \tilde{S}, +\infty[$	$P(Z \geq z)$
IV	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$ és t_m (vegeu (b,c))	$\{T \leq -t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}[$	$2P(t_m > T)$
V		$\{T \leq t_{m,\alpha}\}$	$]-\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,\alpha} \tilde{S}_{1,2}[$	$P(t_m \leq T)$
VI		$\{T \geq t_{m,1-\alpha}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,1-\alpha} \tilde{S}_{1,2}, +\infty[$	$P(t_m \geq T)$
VII	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$ és t_f (vegeu (d,e))	$\{T \leq -t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}[$	$2P(t_f > T)$
VIII		$\{T \leq t_{f,\alpha}\}$	$]-\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,\alpha} \tilde{S}_{1,2}[$	$P(t_f \leq T)$
IX		$\{T \geq t_{f,1-\alpha}\}$	$]\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,1-\alpha} \tilde{S}_{1,2}, +\infty[$	$P(t_f \geq T)$
X	$Z = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ és $N(0, 1)$ (vegeu (f))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{D} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$2P(Z \geq z)$
XI		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$]-\infty, \bar{D} - z_\alpha \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$P(Z \leq z)$
XII		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$]\bar{D} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty[$	$P(Z \geq z)$
XIII	$T = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ és t_{n-1} (vegeu (f))	$\{T \leq -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{D} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$2P(t_{n-1} > T)$
XIV		$\{T \leq t_{n-1,\alpha}\}$	$]-\infty, \bar{D} - t_{n-1,\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$P(t_{n-1} \leq T)$
XV		$\{T \geq t_{n-1,1-\alpha}\}$	$]\bar{D} - t_{n-1,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty[$	$P(t_{n-1} \geq T)$
XVI	$Z = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ és $N(0, 1)$ (vegeu (f))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\bar{D} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$2P(Z \geq z)$
XVII		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$]-\infty, \bar{D} - z_\alpha \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}[$	$p(Z \leq z)$
XVIII		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$]\bar{D} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty[$	$P(Z \geq z)$
XIX	$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ és $N(0, 1)$ (vegeu (g,h))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}[$	$2P(Z \geq z)$
XX		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$]-\infty, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_\alpha \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}[$	$P(Z \leq z)$
XXI		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$]\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\alpha} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, +\infty[$	$P(Z \geq z)$
XXII	$Z = \frac{\hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$ és $N(0, 1)$ (vegeu (i))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}, \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}[$	$2P(Z \geq z)$
XXIII		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$]-\infty, \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_\alpha \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}[$	$P(Z \leq z)$
XXIV		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$]\hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}, +\infty[$	$P(Z \geq z)$
XXV	$F = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}$ és F_{n_1-1, n_2-1}	$\{F \leq F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}\} \cup \{F \geq F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$]\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}, \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}}[$	$2 \min\{P(F_{n_1-1, n_2-1} \leq F), P(F_{n_1-1, n_2-1} \geq F)\}$
XXVI		$\{F \leq F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}\}$	$]\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}, +\infty[$	$P(F_{n_1-1, n_2-1} \leq F)$
XXVII		$\{F \geq F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha}\}$	$]\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha}, +\infty[$	$P(F_{n_1-1, n_2-1} \geq F)$

(a) $\tilde{S} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

(b) $\tilde{S}_{1,2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\tilde{S}_1^2 + (n_2 - 1)\tilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$

(c) $m = n_1 + n_2 - 2$

(d) $\tilde{S}_{1,2} = \sqrt{\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}}$

(e) $f = \left[\frac{\left(\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2} \right] - 2$

(f) \bar{D} i \tilde{S}_D són la mitjana i la desviació típica mostrals de $D = X_1 - X_2$

(g) $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

(h) $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

(i) Per fer el contrast, hem de construir la taula següent:

		Mostra després			
		Èxit	Fracàs	Freqüència	Proporció
Mostra abans	Èxit	a	b	$a + b$	$\hat{p}_{1\bullet} = \frac{a+b}{n}$
	Fracàs	d	c	$c + d$	$\hat{p}_{2\bullet} = \frac{c+d}{n}$
	Freqüència	$a + d$	$b + c$	n	
	Proporció	$\hat{p}_{\bullet 1} = \frac{a+d}{n}$	$\hat{p}_{\bullet 2} = \frac{b+c}{n}$		1

Aleshores, l'estadístic de contrast també es pot escriure

$$Z = \frac{\frac{b}{n} - \frac{d}{n}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$$