Ejemplos contrastes de hipótesis de dos muestras

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing

Ejemplo

Un jefe de marketing quiere evaluar la eficacia de dos estrategias de ventas M_1 y M_2. Se quiere averiguar si las ventas medias en euros de cada campaña son iguales.

Para ello se han realizado dos muestras seleccionando al azar un conjunto de clientes para la estrategia M_1 y otro para la M_2. Se muestre la variable $X=$ venta en euros para cada observación/cliente.

Desconocemos las dos desviaciones típicas poblacionales σ_1 y σ_2 de de las ventas para cada una de las campañas.

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing

Las dos muestras se han seleccionado de forma independiente y sus tamaños son $n_1 = 60$ y $n_2 = 50$ respectivamente.

Las medias y las desviaciones típicas muestrales de las ventas en euros son:

$$\overline{x}_1 = 101.78,\ \overline{x}_2 = 105.38,\ s_1 = 6.2,\ s_2 = 5.57.$$

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing

```
## [1] 6.2
```

```
## [1] 101.78
```

El contraste a realizar es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2, \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0, \end{array}\right.$$

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing $\sigma_1 = \sigma_2$

Donde μ_1 y μ_2 representan las ventas medias en euros para cada una de las dos campañas de marketing M_1 y M_2.

Consideremos los dos casos anteriores:

- Caso 1: Suponemos $\sigma_1 = \sigma_2$.

El **estadístico de contraste** es:

$$T = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{((n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2)}{(n_1+n_2-2)}}} \sim t_{60+50-2} = t_{108},$$

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing $\sigma_1 = \sigma_2$

Usando los valores correspondientes de las muestras, su valor es:

$$t_0 = \frac{101.78 - 105.38}{\sqrt{\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{50}\right)\frac{(59 \cdot 6.2^2 + 49 \cdot 5.57^2)}{108}}} = -3.174.$$

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing

El p-valor será, en este caso:

$P(t_{108} < -3.1744) \approx 0.001$, valor muy pequeño.

La decisión que tomamos, por tanto, es rechazar la hipótesis de que son iguales, en favor de que ventas medias de la estrategia M_1 son más menores que las de la estrategia M_2.

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing caso varianzas distintas

Consideremos ahora el otro caso:

- Caso 2: Suponemos $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

El **estadístico de contraste** será, en este caso: $T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_f$

donde

$$f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{6.2^2}{60} + \frac{5.57^2}{50}\right)^2}{\frac{1}{59}\left(\frac{6.2^2}{60}\right)^2 + \frac{1}{49}\left(\frac{5.57^2}{50}\right)^2} = 107.3646.$$

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing caso varianzas distintas

El valor que toma el estadístico anterior será:

$$t_0 = \frac{101.78 - 105.38}{\sqrt{\frac{6.2^2}{60} + \frac{5.57^2}{50}}} = -3.2057.$$

El *p*-**valor** del contraste será:
$P(t_{107.364576} \leq -3.2057) = 8.88 \times 10^{-4}$, valor muy pequeño.

Comparación de las medias de las ventas con dos estrategias de marketing caso varianzas distintas

La decisión que tomamos en este caso es la misma que en el caso anterior: rechazar la hipótesis de que las ganancias medias de ejecución son iguales, en favor de que las ventas bajo M_1 son menores que bajo M_2.

La decisión final, al haber decidido lo mismo en los dos casos, será concluir que la estrategia M_1 tiene ganancia media menor que la M_2.

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

Contraste de dos proporciones muestras independientes tamaños muestrales grandes

Se toman una muestra de 100 créditos al consumo en la Región A y otra muestra de 50 créditos de la Región B.

Se quiere saber si las proporciones de contratos de crédito con seguro de vida son iguales en ambas regiones.

En la muestra región A, 20 hipotecas tienen seguro, y en la región B son 12.

Queremos contrastar la hipótesis de igualdad de proporciones al nivel de significación 0.05, y calcular el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones para este α.

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

Fijémonos que los tamaños de las muestras (100 y 50) son bastante grandes.

El contraste pedido es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : p_1 = p_2, \\ H_1 : p_1 \neq p_2, \end{array}\right.$$

donde p_1 y p_2 representan las proporciones de créditos que tienen seguro vida las regiones A y B, respectivamente.

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

El **estadístico de contraste** es:

$$Z = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(1 - \frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Las proporciones muestrales son:

$$\widehat{p}_1 = \frac{20}{100} = 0.2, \quad \widehat{p}_2 = \frac{12}{50} = 0.24.$$

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

Si hallamos el valor que toma el **estadístico de contraste** para las proporciones muestrales anteriores, obtenemos:

$$z_0 = \frac{0.2 - 0.24}{\sqrt{\left(\frac{20+12}{100+50}\right)\left(1 - \frac{20+12}{100+50}\right)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{50}\right)}} = -0.564.$$

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

El p-**valor** será: $2 \cdot P(Z \geq |-0.564|) = 0.573.$

Decisión: como el p-valor es grande y mayor que $\alpha = 0.05$, aceptamos la hipótesis que las dos proporciones son la misma al no tener evidencias suficientes para rechazarla.

El intervalo de confianza para $p_1 - p_2$ al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\%$ en un contraste bilateral es

$$\left(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(1-\frac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},\right.$$
$$\left.\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(1-\frac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$$

Contrastes para dos proporciones p_1 y p_2: Seguros de vida en créditos al consumo.

en nuestro caso es:

$$(0.2-0.24-1.96\cdot 0.071, 0.2-0.24+1.96\cdot 0.071) = (-0.179, 0.099).$$

Observemos que contiene el 0. Por tanto no podemos rechazar que $p_1 - p_2 = 0$ llegando a la misma conclusión que con el *p*-**valor**.

Se desea comparar el consumo de datos en Gigas con dos tipos de tarifas de datos móviles BigA y BigB. Se toma una muestra de 25 usuarios de la tarifa BigA y 36 de la BigB. Se midió el consumo mensual en Gigas de los usuarios de cada una de las muestras. El resumen de los resultados se muestra en la siguiente tabla.

	n	$\overline{x}$	s
1. BigA	25	869.8	106.7
2. BigB	36	665	133.7

¿Se observan diferencias significativas entre BigA y BigB?

Supondremos que los datos anteriores provienen de poblaciones aproximadamente normales.

Uso de datos móviles con dos tipos de tarifas:BigA y BigB

El contraste a realizar es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2, \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2, \end{cases}$$

donde μ_1 y μ_2 representan los valores medios de consumo de las tarifas BigA y BigB, respectivamente.

Antes de nada, tenemos que averiguar si las varianzas de los dos grupos son iguales o no ya que es un parámetro a usar en el contraste a realizar.

Por tanto, en primer lugar, realizaremos el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

donde σ_1 y σ_2 representan las desviaciones típicas de las tarifas BigA y BigB, respectivamente..

El **Estadístico de contraste** para el contraste anterior es:
$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{24,35}$.

El valor que toma es el siguiente: $f_0 = \frac{106.7^2}{133.7^2} = 0.637$.

El p-**valor** para el contraste anterior vale:

$$\min\{2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq f_0), 2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \geq f_0)\} =$$
$$\min\{2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \leq 0.637), 2 \cdot P(F_{n_1-1,n_2-1} \geq 0.637)\} =$$
$$\min\{0.251, 1.749\} = 0.251.$$

El p-**valor** es un valor grande, por tanto, concluimos que no podemos rechazar la hipótesis nula y decidimos que las varianzas del consumo de daos de ambas tarifas son iguales.

Realicemos a continuación el contraste pedido:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

El **estadístico de contraste** al suponer que $\sigma_1 = \sigma_2$, será:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{59}.$$

El valor que toma dicho estadístico en los valores muestrales vale:

$$t_0 = \frac{869.8 - 665}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) \cdot \frac{24 \cdot 106.7^2 + 35 \cdot 133.7^2}{25+36-2}}} = 6.373.$$

Ejemplo

El p-**valor** del contraste será: $p = 2 \cdot P(t_{59} \geq 6.373) \approx 0.$

Decisión:como el **p-valor** es prácticamente nulo, concluimos que tenemos evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula y por tanto hay diferencias en el consumo medio entre la tarifa BigA y la BigB.

Ejemplo contraste de medias emparejadas, comparación de dos algoritmos de fidelización.

Ejemplo de medias emparejadas

Disponemos de dos algoritmos de fidelización de clientes de un juego para móviles mediante el regalo de tiempo sin anuncios o vidas en el juego. Los dos producen resultados de la misma calidad.

Estamos interesados en saber cuál de los dos algoritmos es *más eficiente*, en el sentido de consumir menos en nuestros servidores al dar un tiempo de ejecución más corto. Suponemos que dichos tiempos de ejecución siguen leyes normales.

Tomamos una muestra de jugadores y les aplicamos los dos algoritmos, anotando los tiempos de ejecución sobre cada jugador.

Ejemplo contraste de medias emparejadas, comparación de dos algoritmos de fidelización.

Los resultados obtenidos son:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
algoritmo 1	8.1	11.9	11.4	12.9	9.0	7.2	12.4	6.9	8.9	8.3
algoritmo 2	6.9	6.7	8.3	8.6	18.9	7.9	7.4	8.7	7.9	12.4
diferencias	1.2	5.2	3.1	4.3	-9.9	-0.7	5.0	-1.8	1.0	-4.1

Ejemplo contraste de medias emparejadas, comparación de dos algoritmos de fidelización.

La media y la desviación típica muestrales de las diferencias son $\overline{d} = 0.33$, $ s_d = 4.715.$

Queremos contrastar la igualdad de medias con el test que corresponda. Y si son diferentes, decidir cuál tiene mayor tiempo de ejecución.

Queremos realizar el contraste siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2, \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2, \end{array}\right.$$

donde μ_1 y μ_2 son los tiempos de ejecución de los algoritmos 1 y 2, respectivamente.

Ejemplo contraste de medias emparejadas, comparación de dos algoritmos de fidelización.

Escribimos el contraste anterior en función de μ_d, la media de las diferencias de los tiempos de ejecución entre los dos algoritmos:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_d = 0, \\ H_1 : \mu_d \neq 0. \end{array}\right.$$

Ejemplo contraste de medias emparejadas, comparación de dos algoritmos de fidelización.

El **estadístico de contraste** para el contraste anterior es $T = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}}$, que tiene distribución $t_{n-1} = t_9$.

Dicho estadístico toma el siguiente valor usando los valores muestrales: $t_0 = \frac{0.33}{4.715/\sqrt{10}} = 0.221$.

El p-**valor** del contraste anterior será: $p = 2 \cdot p(t_9 > |0.221|) = 0.83$.

Es un valor grande. Por tanto, no tenemos evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula y concluimos que los tiempos de ejecución de los dos algoritmos es el mismo.