Ejemplos contrates de hipótesis de una media

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Prueba plan de organización cadena de producción

La empresa ALUMINIA CALIFORNIA SUR (ALCASU) por sugerencia del comité sindical ha modificado los puestos y tareas de su cadena de producción de un tipo específico de ventanas de aluminio con gran demanda.

En la actualizad se espera fabricar una media $\mu = 90$ unidades por hora con una desviación típica CONOCIDA de $\sigma = 9$. El jefe de producción no quiere aceptar definitivamente la modificación salvo que se tenga evidencia de que la media de producción es definitivamente superior a la de la organización anterior.

Prueba plan de organización cadena de producción

Para asegurarlo plantea el siguiente contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 90 \\ H_1 : \mu > 90 \end{cases}$$

Necesita una muestra aleatoria, y controla durante n=25 horas la producción obteniendo los siguientes resultados

```
## [1] 0.288
```

```
96.80   82.06   78.61 100.80   75.39   78.90   85.06   87.57
103.05   90.77   90.66   82.06   89.75 106.27   85.92 98.72
94.03   93.27   82.50   98.95   91.73   99.34   81.52   89.38
99.85
```

$\overline{x} = \frac{2262.96}{25} = 90.5184.$

Prueba plan de organización cadena de producción

La media de la muestra es $\overline{x} = 90.5184$. Si suponemos que $X=$ número de unidades fabricadas por hora es aproximadamente normal y que $\sigma = 9$ es conocida.

Entonces el estadístico de contraste es al nivel de significación $\alpha = 0.05$ es

Rechazar H_0 si

$$z_0 = \frac{\overline{x} - 90}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{90.5184 - 90}{\frac{9}{\sqrt{25}}} = \frac{0.5184}{\frac{9}{5}} = 0.288 > z_{1-0.05} = 1.6449.$$

Como $z_0 = 0.288 \not> 1.645$ no podemos aceptar que la producción no haya superado la media de 90 unidades.

Prueba plan de organización cadena de producción

Por lo tanto debemos concluir que la nueva organización puede que no mejore el proceso de producción. Si los trabajadores están más satisfechos producen un poco más, aunque notemos que la media ha aumentado en 0.5 unidades esto puede deberse la aleatoriedad de toda prueba.

Nota: La medida del tamaño del efecto es algo que no se trata en este curso. Pero si que hay que destacar que en ocasiones se rechaza el valor de la media con muy poca diferencia. Si es así, en este caso, igual convendría facilitar el trabajo de los operarios si el perjuicio en producción es bajo, es decir, si el coste en euros es pequeño.

Como ya hemos dicho la forma más habitual de resolver un contrate de hipótesis es calcular su p-valor.

En este caso el p-valor mirando en las tablas de contrastes viene dado por

$P(Z > z_0) = P(Z > 0.288) = 1 - P(Z \leq 0.288) = 0.3867.$

```
z0
```

```
## [1] 0.288
```

```
round(1-pnorm(z0,0,1),4)
```

```
## [1] 0.3867
```

Prueba plan de organización cadena de producción p valor

Con google sheets

6				
7	**Z Normal estándar**	**mu**	**sigma**	
8		0	1	
9	**1-P(Z<=0.288)**	0.3867		
10	**Fórmula**	1-NORMDIST(0.288,B8,C8,TRUE)		
11				
12				

Prueba plan de organización cadena de producción intervalo de confianza al 95%.

Mirando en las tablas la fórmula del intervalo de confianza para la alternativa $H_1 : \mu > 90$ es al nivel $1 - \alpha = 0.95$ es decir $\alpha = 0.05$

$$\left(\overline{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

Luego podemos decir que al menos el 95% de la veces que repitamos el experimento el intervalo captura al verdadero valor de μ.

$$\left(90.5184 - 1.6449 \cdot \frac{9}{\sqrt{25}}, +\infty\right) = (87.5576, +\infty)\,.$$

Prueba plan de organización cadena de producción p valor e intervalos de confianza

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Google sheets contraste una media sigma conocida					
3	muestra						
4	96.8	n=	25	Fórmula			
5	82.06	media=	90.5184	AVERAGE(A4:A28)			
6	78.61	sigma=	9.0000	conocida dada por el problema			
7	100.8	desviación típica	8.4916	STDEV(A4:A28)			
8	75.39	Nivel de confianza 1-alpha	0.9500		cuantil	valor	Formula
9	78.9	alpha	0.0500		z_alpha	-1.6449	NORMINV(C9,0,1)
10	85.06	alpha/2	0.0250		z_(alpha/2)	-1.9600	NORMINV(C10,0,1)
11	87.57	mu0	90.0000				
12	103.05	estadístico z0	0.2880				
13	90.77						
14	90.66	H0: mu=90					
15	82.06				Intevalo confianza nivel 1-alpha		
16	89.75		p-valor		ICL	ICR	
17	106.27	H1: mu>90	0.3867	1-NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	87.5577	+ Infinito	
18	85.92	H1: mu<90	0.6133	NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	-Infinito	93.4791	
19	98.72	H1: mu distinto 90	0.2267	2*NORMDIST(C12,0,1,TRUE)-1	86.9905	94.0463	
20	94.03						
21	93.27						
22	82.5						
23	98.95						
24	91.73						
25	99.34						
26	81.52						
27	89.38						
28	99.85						
29							

Prueba plan de organización cadena de producción (sigma desconocidas)

Volvemos al caso anterior, pero algo más real, lo más habitual es consideremos σ desconocida. Así que reformulamos

La empresa ALUMINIA CALIFORNIA SUR (ALCASU) por sugerencia del comité sindical ha modificado los puestos y tareas de su cadena de producción de un tipo específico de ventanas de aluminio con gran demanda.

En la actualizad se espera fabricar una media $\mu = 90$ unidades por hora con una desviación típica de σ. es desconocida y la estimaremos por la desviación típica de la muestra s_x. El jefe de producción no quiere aceptar definitivamente la modificación salvo que se tenga evidencia de que la media de producción es definitivamente superior a la de la organización anterior.

Prueba plan de organización cadena de producción T-student

Para asegurarlo plantea el siguiente contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 90 \\ H_1 : \mu > 90 \end{cases}$$

Necesita una muestra aleatoria, y controla durante n=25 horas la producción obteniendo los siguientes resultados

```
96.80   82.06   78.61 100.80   75.39   78.90   85.06   87.57
103.05   90.77   90.66   82.06   89.75 106.27   85.92 98.72
94.03   93.27   82.50   98.95   91.73   99.34   81.52   89.38
99.85
```

Los estadísticos son

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2262.96}{25} = 90.5184.$$

$$\begin{aligned} s_X &= \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum x^2}{n} - \overline{x}^2\right)} = \sqrt{\frac{25}{24}\left(\frac{206570.0932}{25} - 90.5184^2\right)} \\ &= \sqrt{72.1072807} = 8.4916. \end{aligned}$$

Prueba plan de organización cadena de producción T-student

La media de la muestra es $\overline{x} = 90.5184$. Si suponemos que $X=$ número de unidades fabricadas por hora es aproximadamente normal y σ desconocida entonces

$t_{n-1} = \frac{\overline{x}-90}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$. sigue una ley de T de student con $n-1$ grados de libertad.

La región de rechazo al nivel de significación $\alpha = 0.05$ es: Rechazar H_0 si

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 90}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}} = \frac{90.5184 - 90}{\frac{8.4916}{\sqrt{25}}} = \frac{0.5184}{\frac{8.4916}{5}} = 0.3052 > t_{1-0.05,n-1} = 1.7109.$$

Como $t_0 = 0.3052 \not> -1.7109$ no podemos aceptar que la producción no haya superado la media de 90 unidades.

Prueba plan de organización cadena de producción T-student

Por lo tanto debemos concluir que la nueva organización puede que no mejore el proceso de producción. Si los trabajadores están más satisfechos producen un poco más, aunque notemos que la media a aumentado en 0.5 unidades esto puede deberse la aleatoriedad de toda prueba.

Nota: La medida del tamaño del efecto es algo que no se trata en este curso. Pero si que hay que destacar que en ocasiones se rechaza el valor de la media con muy poca diferencia. Si es así, en este caso, igual convendría facilitar el trabajo de los operarios si el perjuicio en producción es bajo, es decir, si el coste en euros es pequeño.

Prueba plan de organización cadena de producción p valor T-student

Como ya hemos dicho la forma más habitual de resolver un contrate de hipótesis es calcular su p-valor.

En este caso el p-valor mirando en las tablas de contrastes viene dado por
$P(t_{n-1} > t_0) = P(t_{24} > 0.3052) = 1 - P(t_{n-1} \leq 0.3052) = 0.3814.$

```
t0
```

```
## [1] 0.3052
```

```
round(1-pt(t0,df=25-1),4)
```

```
## [1] 0.3814
```

Prueba plan de organización cadena de producción p valor T-student

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Google sheets sigma desconocida población normal o muestra grande					
3	muestra						
4	96.8	n=	25	Fórmula			
5	82.06	media=	90.5184	AVERAGE(A4:A28)			
6	78.61	sigma	desconocida				
7	100.8	desviación típica	8.4916	STDEV(A4:A28)			
8	75.39	Nivel de confianza 1-alpha	0.9500		cuantil	valor	Formula
9	78.9	alpha	0.0500		t_{alpha,n-1}	-1.7109	TINV(C9,C4-1)
10	85.06	alpha/2	0.0250		t_{alpha/2.n-1}	-2.0639	TINV(C10,C4-1)
11	87.57	mu0	90.0000				
12	103.05	estadístico t con n-1 g.l.=24	0.3052				
13	90.77						
14	90.66	H0: mu=90					
15	82.06				Intervalo confianza nivel 1-alpha		
16	89.75		p-valor		ICL	ICR	
17	106.27	H1: mu>90	0.3801	1-NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	87.6128	+ Infinito	
18	85.92	H1: mu<90	0.6199	NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	-Infinito	93.4240	
19	98.72	H1: mu distinto 90	0.2398	2*NORMDIST(C12,0,1,TRUE)-1	87.0132	94.0236	
20	94.03						
21	93.27						
22	82.5						
23	98.95						
24	91.73						
25	99.34						
26	81.52						
27	89.38						
28	99.85						

Prueba plan de organización cadena de producción intervalo de confianza al 95%. T-student

Mirando en las tablas la fórmula del intervalo de confianza para la alternativa $H_1 : \mu > 90$ es al nivel $1 - \alpha = 0.95$ es decir $\alpha = 0.05$.

$$\left(\overline{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{\tilde{s}_x}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

Luego podemos decir que al menos el 95% de la veces que repitamos el experimento el intervalo captura al verdadero valor de μ.

$$\left(90.5184 - 1.7109 \cdot \frac{8.4916}{\sqrt{25}}, +\infty\right) = (87.6127, +\infty)\,.$$

Prueba plan de organización cadena de producción p valor e intervalos de confianza T-student

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Google sheets sigma desconocida población normal o muestra grande					
3	muestra						
4	96.8	n=	25	Fórmula			
5	82.06	media=	90.5184	AVERAGE(A4:A28)			
6	78.61	sigma	desconocida				
7	100.8	desviación típica	8.4916	STDEV(A4:A28)			
8	75.39	Nivel de confianza 1-alpha	0.9500		cuantil	valor	Formula
9	78.9	alpha	0.0500		t_{alpha,n-1}	-1.7109	TINV(C9,C4-1)
10	85.06	alpha/2	0.0250		t_{alpha/2.n-1}	-2.0639	TINV(C10,C4-1)
11	87.57	mu0	90.0000				
12	103.05	estadístico t con n-1 g.l.=24	0.3052				
13	90.77						
14	90.66	H0: mu=90					
15	82.06				Intervalo confianza nivel 1-alpha		
16	89.75		p-valor		ICL	ICR	
17	106.27	H1: mu>90	0.3801	1-NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	87.6128	+ Infinito	
18	85.92	H1: mu<90	0.6199	NORM.DIST(C12,0,1,TRUE)	-Infinito	93.4240	
19	98.72	H1: mu distinto 90	0.2398	2*NORMDIST(C12,0,1,TRUE)-1	87.0132	94.0236	
20	94.03						
21	93.27						
22	82.5						
23	98.95						
24	91.73						
25	99.34						
26	81.52						
27	89.38						
28	99.85						