

TABLAS DE CONTRASTES DE HIPÓTESIS MÁS USUALES II: DOS MUESTRAS.

En este documento recogemos los contrastes de hipótesis paramétricos más usuales para dos muestras que se pueden llevar a cabo “a mano.” Para cada contraste damos: las condiciones, el estadístico de contraste, la región crítica, el intervalo de confianza y el p-valor.

En la definición de los estadísticos hemos usado las notaciones siguientes:

- Z : Distribución normal estándar $N(0, 1)$.
- t_n : Distribución t de Student con n grados de libertad.
- χ_n^2 : Distribución khi-cuadrado con n grados de libertad.
- F_{n_1, n_2} : Distribución F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad.
- X_α : Indica el α -cuantil de la variable aleatoria X , es decir (si X es continua, que es siempre el caso en este documento), el valor donde la función de distribución de X vale α : $P(X \leq X_\alpha) = \alpha$.

Recordemos las propiedades de simetría de Z , t y F :

- Simetría de la normal: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.
- Simetría de la t de Student: $t_{n, \alpha} = -t_{n, 1-\alpha}$.
- Permutación de los grados de libertad de la F de Fisher: $F_{n_1, n_2, \alpha} = \frac{1}{F_{n_2, n_1, 1-\alpha}}$.

Tipo de contraste y condiciones				
Hip. nula	condiciones	Muestra	Hip. alt.	Caso
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Caso independiente	σ_1 y σ_2 conocidas. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	I
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	II
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	III
	σ_1 y σ_2 desconocidas y $\sigma_1 = \sigma_2$. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	IV
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	V
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	VI
	σ_1 y σ_2 desconocidas y $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu \neq \mu_2$	VII
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	VIII
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	IX
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Caso dependiente	Dos Poblaciones normales dependientes o n grande. σ_d conocida. ⁽¹⁾	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	X
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XI
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XII
	Dos Poblaciones normales dependientes. σ_d desconocida. ⁽¹⁾	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	XIII
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XIV
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XV
	Dos Poblaciones dependientes, n grande. σ_d desconocida. ⁽¹⁾	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	XVI
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	XVII
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	XVIII
$H_0 : p_1 = p_2$ Caso independiente	Poblaciones Bernoulli, n_1 y n_2 grandes, muchos éxitos y fracasos.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : p_1 \neq p_2$	XIX
			$H_1 : p_1 < p_2$	XX
			$H_1 : p_1 > p_2$	XXI
$H_0 : p_a = p_d$ Casodependiente	Poblaciones Bernoulli, n_1 y n_2 grandes, muchos casos discordants.	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : p_a \neq p_b$	XXII
			$H_1 : p_a < p_b$	XXIII
			$H_1 : p_a > p_b$	XXIV
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ Caso independiente	Poblaciones normales.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	XXV
			$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	XXVI
			$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	XXVII

(1) σ_d es la desviación típica de la variable $D = X_1 - X_2$.

Detalles del test				
Caso	Estadístico	Región crítica	Intervalo confianza	p-valor
I	$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}}$ es $N(0, 1)$ (vegeu (a))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S} \right[$	$2P(Z \geq z)$
II		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$\left] -\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_\alpha \tilde{S} \right[$	$P(Z \leq z)$
III		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\alpha} \tilde{S}, +\infty \right[$	$P(Z \geq z)$
IV	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$ es t_m (vegeu (b,c))	$\{T \leq -t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2} \right[$	$2P(t_m > T)$
V		$\{T \leq t_{m,\alpha}\}$	$\left] -\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,\alpha} \tilde{S}_{1,2} \right[$	$P(t_m \leq T)$
VI		$\{T \geq t_{m,1-\alpha}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{m,1-\alpha} \tilde{S}_{1,2}, +\infty \right[$	$P(t_m \geq T)$
VII	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$ es t_f (vegeu (d,e))	$\{T \leq -t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \tilde{S}_{1,2} \right[$	$2P(t_f > T)$
VIII		$\{T \leq t_{f,\alpha}\}$	$\left] -\infty, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,\alpha} \tilde{S}_{1,2} \right[$	$P(t_f \leq T)$
IX		$\{T \geq t_{f,1-\alpha}\}$	$\left] \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{f,1-\alpha} \tilde{S}_{1,2}, +\infty \right[$	$P(t_f \geq T)$
X	$Z = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ es $N(0, 1)$ (vegeu (f))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{D} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \right[$	$2P(Z \geq z)$
XI		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$\left] -\infty, \bar{D} - z_\alpha \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \right[$	$P(Z \leq z)$
XII		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$\left] \bar{D} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$	$P(Z \geq z)$
XIII	$T = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ es t_{n-1} (vegeu (f))	$\{T \leq -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{D} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}} \right[$	$2P(t_{n-1} > T)$
XIV		$\{T \leq t_{n-1,\alpha}\}$	$\left] -\infty, \bar{D} - t_{n-1,\alpha} \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}} \right[$	$P(t_{n-1} \leq T)$
XV		$\{T \geq t_{n-1,1-\alpha}\}$	$\left] \bar{D} - t_{n-1,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$	$P(t_{n-1} \geq T)$
XVI	$Z = \frac{\bar{D}}{\frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}}}$ es $N(0, 1)$ (vegeu (f))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \bar{D} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}} \right[$	$2P(Z \geq z)$
XVII		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$\left] -\infty, \bar{D} - z_\alpha \frac{\tilde{\sigma}_D}{\sqrt{n}} \right[$	$p(Z \leq z)$
XVIII		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$\left] \bar{D} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$	$P(Z \geq z)$
XIX	$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ es $N(0, 1)$ (vegeu (g,h))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \right[$	$2P(Z \geq z)$
XX		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$\left] -\infty, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_\alpha \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \right[$	$P(Z \leq z)$
XXI		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$\left] \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\alpha} \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, +\infty \right[$	$P(Z \geq z)$
XXII	$Z = \frac{\hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$ es $N(0, 1)$ (vegeu (i))	$\{Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}, \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}} \right[$	$2P(Z \geq z)$
XXIII		$\{Z \leq z_\alpha\}$	$\left] -\infty, \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_\alpha \sqrt{\frac{b+d}{n^2}} \right[$	$P(Z \leq z)$
XXIV		$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$	$\left] \hat{p}_{1\bullet} - \hat{p}_{\bullet 1} - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{b+d}{n^2}}, +\infty \right[$	$P(Z \geq z)$
XXV	$F = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}$ es F_{n_1-1, n_2-1}	$\{F \leq F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}\} \cup \{F \geq F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left] \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}}, \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right[$	$2 \min\{P(F_{n_1-1, n_2-1} \leq F), P(F_{n_1-1, n_2-1} \geq F)\}$
XXVI		$\{F \leq F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}\}$	$\left] 0, \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha} \right[$	$P(F_{n_1-1, n_2-1} \leq F)$
XXVII		$\{F \geq F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha}\}$	$\left] \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}, +\infty \right[$	$P(F_{n_1-1, n_2-1} \geq F)$

$$(a) \quad \tilde{S} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$(b) \quad \tilde{S}_{1,2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\tilde{S}_1^2 + (n_2 - 1)\tilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$(c) \quad m = n_1 + n_2 - 2$$

$$(d) \quad \tilde{S}_{1,2} = \sqrt{\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}}$$

$$(e) \quad f = \frac{\left(\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left(\frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2}$$

$$(f) \quad \bar{D} \text{ y } \tilde{S}_D \text{ son la media y la desviación típica muestrales de } D = X_1 - X_2$$

$$(g) \quad \hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

$$(h) \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

(i) Para hacer el contraste, hemos de construir la tabla siguiente:

		Muestra después			
		éxito	Fracaso	Frecuencia	Proporción
Muestra antes	éxito	a	b	$a + b$	$\hat{p}_{1\bullet} = \frac{a+b}{n}$
	Fracaso	d	c	$c + d$	$\hat{p}_{2\bullet} = \frac{c+d}{n}$
	Frecuencia	$a + d$	$b + c$	n	
	Proporción	$\hat{p}_{\bullet 1} = \frac{a+d}{n}$	$\hat{p}_{\bullet 2} = \frac{b+c}{n}$		1

Entonces, el estadístico de contraste se puede escribir como:

$$Z = \frac{\frac{b}{n} - \frac{d}{n}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$$