Ejercicios Tema 4 - Contraste hipótesis. Taller 1

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

Contenidos

1 Contraste hipótesis taller 1.

Los siguientes ejercicios son de puro cálculo. Seguid la teoría y utilizar R para el cálculo de los estadísticos y de los cuantiles de los p-valores.

1.1 Ejercicio 1

En muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ extraída de una población normal con $\sigma^2 = 12^2$ hemos obtenido la siguiente media muestral $\overline{x} = 62.5$, Contrastar al nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula $\mu = 61$ contra la alternativa $\mu < 60$. Resolver calculando el p-valor del contraste.

1.1.1 Solución

Tenemos que contrastar

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 60 \\ H_1 : \mu < 60 \end{array}\right.$$

```
sigma2=12^2
sigma2
```

```
## [1] 144
```

```
n=36
n
```

```
## [1] 36
```

```
media_muestral=62.5
media_muestral
```

```
## [1] 62.5
```

```
alpha=0.05
alpha
```

```
## [1] 0.05
```

```
mu0=60
mu0
```

```
## [1] 60
```

```
z0 = (media_muestral-mu0)/sqrt(sigma2/n)
z0
```

```
## [1] 1.25
```

```
#valor crítico para mu< 60
valor_critico= qnorm(alpha)
valor_critico
```

```
## [1] -1.644854
```

Bajo estas condiciones, normalidad muestra aleatoria simple y con los datos de la muestra el estadístico de contraste es:

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{62.5 - 60}{\frac{12}{\sqrt{36}}} = 1.25$$

La región de rechazo contra $H_1 : \mu < 60$ es rechazar H_0 si

$$z_0 = 1.25 \leq z_\alpha = z_{0.05} = -1.6448536,$$

como NO se cumple la condición concluimos que NO podemos rechazar H_0 contra H_1; la muestra no da evidencias suficientes para considerar que $\mu < 60$ al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Por último el p-valor para esta alternativa es

```
p_valor=pnorm(z0) # 2 P(>>|z0|)
p_valor
```

```
## [1] 0.8943502
```

Como el nivel del significación $\alpha = 0.05$ es menor que el p-valor=0.8943502 no podemos rechazar la hipótesis nula.

1.2 Ejercicio 2

Hemos obtenido una media muestral de $\overline{x} = 72.5$ de una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$ extraída de una población normal con $\sigma^2 = 30^2$. Contrastar al nivel de significación $\alpha = 0.10$, la hipótesis nula $\mu = 77$ contra las siguientes tres alternativas $\mu \neq 70$, $\mu > 70$, $\mu < 70$. Calcular el p-valor en cada caso.

1.2.1 Solución

Tenemos que contrastar $\mu = 70$ con cada una (por separado) de las tres alternativas, la población es normal los contrastes son:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 70 \\ H_1 : \mu \neq 70, \mu > 70, \mu < 70 \end{array} \right.$$

Cargamos los datos del enunciado

```r
sigma2=30^2
sigma2
```

```
## [1] 900
```

```r
sigma=sqrt(sigma2)
sigma
```

```
## [1] 30
```

```r
n=100
n
```

```
## [1] 100
```

```r
media_muestral=72.5
media_muestral
```

```
## [1] 72.5
```

```r
alpha=0.1
alpha
```

```
## [1] 0.1
```

```r
mu0=70
mu0
```

```
## [1] 70
```

```r
z0 = (media_muestral-mu0)/sqrt(sigma2/n)
z0
```

```
## [1] 0.8333333
```

Bajo estas condiciones, normalidad muestra aleatoria simple y esto datos el estadístico de contraste es

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72.5 - 70}{\frac{30}{\sqrt{100}}} = 0.8333333$$

Ahora para cada opción alternativa los valores críticos son

```r
#valores crítico para mu  distinto de 70
valor_critico_bilateral= c(-qnorm(1-alpha/2), qnorm(1-alpha/2))
valor_critico_bilateral
```

```
## [1] -1.644854  1.644854
```

```r
#valores crítico para mu   menor  70
valor_critico_unilateral_menor= qnorm(alpha)
valor_critico_unilateral_menor
```

```
## [1] -1.281552
```

```r
#valores crítico para mu  distinto de 70
valor_critico_unilateral_mayor= qnorm(1-alpha)
valor_critico_unilateral_mayor
```

```
## [1] 1.281552
```

Ahora tenemos tres casos según H_1:

- $H_1: \mu \neq 70$ como $z_0 = 0.8333333 \not< -1.6448536$ y $z_0 = 0.8333333 \not> 1.6448536$ **NO se cumple la condición de rechazo** así que NO podemos rechazar H_0 contra H_1; la muestra no da evidencias suficientes para considerar que $\mu \neq 70$ al nivel de significación $\alpha = 0.1$.
- $H_1: \mu < 70$ como $z_0 = 0.8333333 \not< -1.2815516$ **NO se cumple la condición de rechazo** así que NO podemos rechazar $H_0: \mu = 70$ contra $H_1: \mu < 70$; la muestra no da evidencias suficientes para considerar que $\mu < 70$ al nivel de significación $\alpha = 0.1$.
- $H_1: \mu > 70$ como $z_0 = 0.8333333 \not> 1.2815516$ **NO se cumple la condición de rechazo** así que no podemos rechazar $H_0: \mu = 70$ en favor de que $H_1: \mu > 70$; la muestra no da algunas evidencias suficientes para considerar que $\mu > 70$ al nivel de significación $\alpha = 0.1$.

Para cada hipótesis alternativa los p-valores son :

```r
2*(1-pnorm(abs(z0))) # Para H_1: mu != 70
```

```
## [1] 0.4046568
```

```r
pnorm(z0) # para H_1: mu<70
```

```
## [1] 0.7976716
```

```r
1-pnorm(z0) # para H_1: mu>70
```

```
## [1] 0.2023284
```

Como el nivel del significación es $\alpha = 0.05$ es menor que el p-valor en cualquiera de los tres casos no podemos rechazar la hipótesis nula.

1.3 Ejercicio 3

En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para qué valores de $\overline{X}$ rechazaríamos la hipótesis nula $H_0: \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 64$ extraída de una población normal con $\sigma^2 = 16^2$?

1.3.1 Solución

Cargamos los datos, la población es normal

```r
sigma2=16^2
sigma2
```

```
## [1] 256
```

```r
n=64
n
```

```
## [1] 64
```

```r
alpha=0.01
alpha
```

```
## [1] 0.01
```

```r
mu0=70
mu0
```

```
## [1] 70
```

```r
z0 = (media_muestral-mu0)/sqrt(sigma2/n)
z0
```

```
## [1] 1.25
```

Bajo estas condiciones, normalidad muestra aleatoria simple y esto datos el estadístico de contraste es

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72.5 - 70}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = 1.25$$

```
#valores crítico para \mu  distinto de 70
valor_critico_bilateral= c(qnorm(alpha/2), qnorm(1-alpha/2))
valor_critico_bilateral
```

```
## [1] -2.575829  2.575829
```

Por lo tanto rechazaremos la hipótesis nula si $z_0 = \frac{\overline{x}-70}{\frac{16}{\sqrt{64}}} < -2.5758293$ o $z_0 = \frac{\overline{x}-70}{\frac{16}{\sqrt{64}}} > 2.5758293$

Despejando $\overline{x}$ de las inecuaciones anteriores obtenemos que rechazaremos H_0 si

$\overline{x} < 70 + -2.5758293 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}}$ o $\overline{x} > 70 + 2.5758293 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}}$.

Es decir si $\overline{x} < 64.8483414$ o $\overline{x} > 75.1516586$ rechazaremos la hipótesis nula al nivel de confianza del 1% ($\alpha = 0.1$).

1.4 Ejercicio 4

El salario anual medio de una muestra de tamaño $n = 1600$ personas, elegidas aleatoria e independientemente de cierta población de profesionales de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) ha sido de de 45000 euros, supongamos que nos dicen que la desviación típica es $\sigma = 2000$ euros

1. ¿Es compatible con este resultado la hipótesis nula, $H_0 : \mu = 43500$ contra la alternativa bilateral, al nivel de significación $\alpha = 0.01$?
2. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ?
3. Calcular el p-valor del contraste.

1.4.1 Solución

Cargamos datos

```
n=1600
n
```

```
## [1] 1600
```

```
sigma=4000
sigma
```

```
## [1] 4000
```

```
sigma2=sigma^2
sigma2
```

```
## [1] 16000000
```

```
media_muestral=45000
media_muestral
```

```
## [1] 45000
```

```
alpha=0.01
alpha
```

```
## [1] 0.01
```

```
mu0=44900
mu0
```

```
## [1] 44900
```

```r
z0 = (media_muestral-mu0)/sqrt(sigma2/n)
z0
```

```
## [1] 1
```

Para la primera y la tercera cuestión calculo el p-valor

```r
2*(1-pnorm(abs(z0)))
```

```
## [1] 0.3173105
```

Es un p-valor alto así que no podemos rechazar la hipótesis nula.

En la cuestión 2 nos piden intervalo de confianza para μ al nivel del $\alpha = 0.01$ es

```r
IC=c(media_muestral-qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n),
     media_muestral+qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n))
IC
```

```
## [1] 44742.42 45257.58
```

Con un nivel de confianza del 99% la media poblacional del sueldo mensual en euros de un empleo TIC está en el intervalo $(44742.4170696, 45257.5829304)$.

1.5 Ejercicio 5 EXTRA VOLUNTARIO

Con los datos del ejercicio anterior, ¿hay evidencia sobre para oponerse la hipótesis nula en los siguientes casos

1. $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 44000 \\ H_1 : \mu > 44000 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 46250 \\ H_1 : \mu > 46250 \end{array}\right.$

1.5.1 Solución

Es similar a los ejercicios anteriores

1.6 Ejercicio 6 EXTRA VOLUNTARIO

El peso medio de los paquetes de mate puestos a la venta por la casa comercial MATEASA es supuestamente de 1 Kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0.978 Kg. y su desviación típica $s = 0.10$ kg. Siendo $\alpha = 0.05$ ¿es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ frente a $H_1 : \mu \neq 1$? ¿Lo es frente a $H_1 : \mu > 1$? Calcular el p-valor.

1.6.1 Solución

Es similar a los ejercicios anteriores