Problemas variables aleatorias continuas

1. El tiempo X que utiliza un comercial para exponer un producto cuando LO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros $\mu = 3$ minutos 45 segundos y $\sigma = 10$ segundos.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga la venta en menos de 4 minutos?

   b. ¿Y en más de 3.5 minutos?

Solución

Tenemos que X es $N(\mu = 3, \sigma = 10)$ tenemos que $P(X < 4) = 1$

En segundo lugar nos piden $P(> 3.5) = 1 - P(\leq 3.5) = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(pnorm(4,mean=3,sd=10),4)# apartado a. P(X<4)
```

```
## [1] 0.5398
```

```
round(1-pnorm(3.5,mean=3,sd=10),4)# apartado b. P(X>3.5)
```

```
## [1] 0.4801
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Problema 1	mu	sigma		
4	X normal	3	10		
5	P(X<4)=	0.5398			
6	Función	NORMDIST(4,3,10,TRUE)			
7	P(X>3)=1-P(X<=3)	0.4801			
8	Función	1-NORMDIST(3.5,3,10,TRUE)			
9					

2. El tiempo X que utiliza un comercial para exponer un producto cuando NO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros $\mu = 2$ y $\sigma = 0.8$.
    a. ¿Cuál es el cuantil 0.95 de esta variable? Interpretarlo en el sentido de tiempo perdido por el comercial.
    b. ¿Cuál es el tiempo perdido en el 40% de las llamadas más cortas?

Solución

Tenemos que X es $N(\mu = 2, \sigma = 0.8)$ tenemos que buscar el cuantil 0.05 es decir el valor $x_{0.95}$ tal que $P(X < x_{0.95}) = 0.95$ que es $x_{0.95} = 2$

En segundo lugar nos piden el cuantil $x_{0.4}$ es decir el valor $x_{0.4}$ tal que $P(X < x_{0.4}) = 0.4$ que es $x_{0.4} = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```r
round(qnorm(0.95,mean=2,sd=0.8),4)# apartado a,  cuantil 0.95
```

```
## [1] 3.3159
```

```r
round(qnorm(0.4, mean=2,sd=0.8),4)# apartado b.  cuantil 0.4
```

```
## [1] 1.7973
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

10	Problema 2	mu	sigma		
11	X normal	1	0.8		
12	cuantil 0.95	3.3159			
13	Función	NORMINV(0.95,2,0.8)			
14	cuantil 0.4	1.7973			
15	Función	NORMINV(0.4,2,0.8)			
16					

3. Un centro de atención telefónica por voz (*call center*) recibe por termino medio 102 llamadas por hora. Suponed que el tiempo entre llamadas consecutivas es exponencial.
   a. Sea X el tiempo entre dos llamadas consecutivas ¿cuál es la distribución de X?
   b. Calcular la probabilidad que pasen al menos 2.5 minutos hasta recibir la primera llamada.
   c. Calcular la probabilidad que pasen menos de 3 minutos hasta recibir la siguiente llamada.
   d. Calcular la esperanza y la varianza de X.

Solución

a. En 60 minutos recibe 100 llamadas así que en un minuto recibe $\lambda = \frac{102}{60} = 1.7$. Luego $X =$ tiempo entre dos llamadas consecutivas en minutos sigue una ley $Exp(\lambda = 1.7)$

b. $P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) = 0.0143$.

c. $P(X < 3) = P(X \leq 3) = 0.9939$.

d. $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.7} = 0.5882$ y $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1.7^2} = 0.346$.

Cálculos con R

```r
round(1-pexp(2.5,rate=1.7),4)# apartado b.
```

```
## [1] 0.0143
```

```r
round(pexp(3,rate=1.7),4)# apartado c.
```

```
## [1] 0.9939
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

17				
18	Problema 3	lambda		
19	X exponencial	1.7		
20	P(X>2.5)=1-P(X<=2.	0.0143		
21	Función	1-EXPON.DIST(2.5,B19,TRUE)		
22	P(X<=3)=	0.9939		
23	Función	EXPON.DIST(3,B19,TRUE)		
24				

4. Sea X una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 1$. Calculad el valor de b tal que $P\left((X-1)^2 \leq b\right) = 0.1$.

Solución

La v.a. X es $N(\mu = 1, \sigma = 1)$ nos piden b tal que $P((X-1)^2 \leq b) = 0.1)$,. Notemos que $b >= 0$, además sabemos que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1}{1} = X - 1$ sigue una distribución $N(0,1)$.

Tenemos que $P((X-1)^2 \leq b) = P(-\sqrt(b) \leq (X-1) \leq \sqrt{b}) = P(-\sqrt(b) \leq Z \leq \sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - F_Z(-\sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - (1 - F_Z(\sqrt{b})) = 2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1$.

Entonces buscamos b tal que $2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1 = 0.1$ y de aquí tenemos que

$F_Z(\sqrt{b}) = \frac{1+0.1}{2} = 0.55$ luego $\sqrt{b} = z_{0.55}$ y $b = \sqrt{z_{0.55}}$ donde $z_{0.55} es el cuantil 0.55 de una normal estándar $P(Z \leq z_{0.55}) = 0.55$. En definitiva $b = \sqrt{z_{0.55}} = \sqrt{0.1257} = 0.3545$.

Para el cálculo del cuantil $z_{0.55}$ con R es

```
z0.55=round(qnorm(0.55,0,1),4)
z0.55
```

```
## [1] 0.1257
```

```
round(sqrt(z0.55),4)
```

```
## [1] 0.3545
```

5. Sea Z una variable aleatoria $N(0,1)$. Calcular $P\left(\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
P\left(\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right) &= 1-P\left(\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{16}\right) \\
&= 1-P\left(-\sqrt{\frac{1}{16}} \leq Z-\frac{1}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{16}}\right) \\
&= 1-P\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \\
&= 1-P(0 \leq Z \leq 0.5) = 1-(P(Z \leq 0.5)-P(Z \leq 0)) \\
&= 1-(0.6915-0.5) = 0.8085.
\end{aligned}
$$

6. Un contratista de viviendas unifamiliares de lujo considera que el coste en euros de una contrata habitual es una variables X que sigue una distribución $N(\mu = 600000, \sigma = 60000)$
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que el coste del edificio esté entre 560000 y 660000 euros?
   b. 0.2 es la probabilidad de que el coste de la vivienda supere ¿qué cantidad?
   c. ¿Cuál es el coste mínimo del 5% de las casa más caras?

Solución

a. $P(560000 \leq X \leq 660000) = P(X \leq 660000) - P(X \leq 560000) = 0.8413 - `round(pnorm(560000, mean = 600000, sd = 60000), 4)`$.

Con R

```
round(pnorm(660000,mean=600000,sd=60000)-pnorm(560000,mean=600000,sd=60000),4)
```

```
## [1] 0.5889
```

En el 58% de los casos (aproximadamente) el coste se tituará entre esas dos cantidades

b. Nos piden el valor x_0 tal que $P(X > x_0) = 0.2$, es decir el valor que supera el 20% de las viviendas más caras. Este valor será el que deje por debajo el coste del 89% de las casas por lo que es el cuantil 0.8 lo calculamos con R (ejercicio utiliza google sheets para obtener el mismo resultado)

```
qnorm(0.8,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 650497.3
```

El 20% de las casas más caras cuestan por encima de 650500 euros aproximadamente.

c. Ahora somos más ambiciosos y que remos gastar para estar entre el 5% de casas más caras. De manera similar al caso anterior queremos calcular el cuantil $x_{0.95}$, lo haremos con R

```
qnorm(0.95,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 698691.2
```

El 5% de viviendas más costosas supera los 699000 euros aproximadamente

Con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

25	Problema 7	mu	sigma			
26	X normal	600000	60000			
27	P(560000<X<660000)=	0.5889				
28	Función	NORMDIST(660000,B26,C26,TRUE)-NORMDIST(560000,B26,C26,TRUE)				
29	cuantil 0.8	650497.3				
30	Función	NORMINV(0.8,B26,C26)				
31	cuantil 0.95	698691.2				
32	Función	NORMINV(0.95,B26,C26)				
33						

7. Si X está distribuida uniformemente en $(0, 2)$ e Y es una variable exponencial con parámetro λ. Calcular el valor de λ tal que $P(X < 1) = P(Y < 1)$.

Solución

X sigue una ley $U(0, 2)$ luego $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ si $0 < x < 2$ y la variable Y es una $Exp(\lambda)$ luego $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$ si $x > 0$.

Luego $P(X < 1) = \frac{1}{2}$ y $P(Y \leq 1) = 1 - e^{\lambda \cdot 1}$. POr lo tanto nos piden el valor de *lambda* tal que $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda}$.

Así que $e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$ luego $-\lambda = \ln(0.5) = -0.6931472$. por lo tanto $\lambda = 0.6931472$.