Tablas de contrastes de hipótesis más usuales II: dos muestras.

En este documento recogemos los contrastes de hipótesis paramétricos más usuales para dos muestras que se pueden llevar a cabo "a mano." Para cada contraste damos: las condiciones, el estadístico de contraste, la región crítica, el intervalo de confianza y el p-valor.

En la definición de los el estadísticos hemos usado las notaciones siguientes:

- Z: Distribución normal estándard $N(0,1)$.
- t_n: Distribución t de Student con n grados de libertad.
- χ_n^2: Distribución khi-cuadrado con n grados de libertad.
- F_{n_1,n_2}: Distribución F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad.
- X_α: Indica el α-cuantil de la variable aleatoria X, es decir (si X es continua, que es siempre el caso en este documento), el valor donde la función de distribución de X vale α: $P(X \leq X_\alpha) = \alpha$.

  Recordemos las propiedades de simetría de Z, t y F:

  - Simetría de la normal: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.
  - Simetría de la t de Student: $t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$.
  - Permutación de los grados de libertad de la F de Fisher: $F_{n_1,n_2,\alpha} = \frac{1}{F_{n_2,n_1,1-\alpha}}$.

Tipo de contraste y condiciones				
Hip. nula	condiciones	Muestra	Hip. alt.	Caso
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Caso independiente	σ_1 y σ_2 conocidas. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	**I**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**II**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**III**
	σ_1 y σ_2 desconocidas y $\sigma_1 = \sigma_2$. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	**IV**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**V**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**VI**
	σ_1 y σ_2 desconocidas y $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Poblaciones normales o n_1 y n_2 grandes.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \mu \neq \mu_2$	**VII**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**VIII**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**IX**
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Caso dependiente	Dos Poblaciones normales dependientes o n grande. σ_d conocida.(1)	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	**X**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**XI**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**XII**
	Dos Poblaciones normales dependientes. σ_d desconocida.(1)	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	**XIII**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**XIV**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**XV**
	Dos Poblaciones dependientes, n grande. σ_d desconocida.(1)	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	**XVI**
			$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	**XVII**
			$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	**XVIII**
$H_0 : p_1 = p_2$ Caso independiente	Poblaciones Bernoulli, n_1 y n_2 grandes, muchos éxitos y fracasos.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : p_1 \neq p_2$	**XIX**
			$H_1 : p_1 < p_2$	**XX**
			$H_1 : p_1 > p_2$	**XXI**
$H_0 : p_a = p_d$ Casodependiente	Poblaciones Bernoulli, n_1 y n_2 grandes, muchos casos discordants.	Dos m.a.s. dependientes de tamaño n	$H_1 : p_a \neq p_b$	**XXII**
			$H_1 : p_a < p_b$	**XXIII**
			$H_1 : p_a > p_b$	**XXIV**
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ Caso independiente	Poblaciones normales.	Dos m.a.s. independientes de tamaños n_1 y n_2	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	**XXV**
			$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	**XXVI**
			$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	**XXVII**

(1) σ_d es la desviación típica de la variable $D = X_1 - X_2$.

Detalles del test				
Caso	Estadístico	Región crítica	Intervalo confianza	p-valor
I	$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\widetilde{S}}$	$\{Z\leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S},\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S}\right[$	$2P(Z\geq \|z\|)$
II	es $N(0,1)$	$\{Z\leq z_\alpha\}$	$\left]-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2-z_\alpha\widetilde{S}\right[$	$P(Z\leq z)$
III	(vegeu (a))	$\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-z_{1-\alpha}\widetilde{S},+\infty\right[$	$P(Z\geq z)$
IV	$T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\widetilde{S}_{1,2}}$	$\{T\leq -t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\geq t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S}_{1,2},\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S}_{1,2}\right[$	$2P(t_m>\|T\|)$
V	es t_m	$\{T\leq t_{m,\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{m,\alpha}\widetilde{S}_{1,2}\right[$	$P(t_m\leq T)$
VI	(vegeu (b,c))	$\{T\geq t_{m,1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{m,1-\alpha}\widetilde{S}_{1,2},+\infty\right[$	$P(t_m\geq T)$
VII	$T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\widetilde{S}_{1,2}}$	$\{T\leq -t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\geq t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S}_{1,2},\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}\widetilde{S}_{1,2}\right[$	$2P(t_f>\|T\|)$
VIII	es t_f	$\{T\leq t_{f,\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{f,\alpha}\widetilde{S}_{1,2}\right[$	$P(t_f\leq T)$
IX	(vegeu (d,e))	$\{T\geq t_{f,1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}_1-\overline{X}_2-t_{f,1-\alpha}\widetilde{S}_{1,2},+\infty\right[$	$P(t_f\geq T)$
X	$Z=\frac{\overline{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$	$\{Z\leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{D}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},\overline{D}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(Z\geq \|z\|)$
XI	es $N(0,1)$	$\{Z\leq z_\alpha\}$	$\left]-\infty,\overline{D}-z_\alpha\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right[$	$P(Z\leq z)$
XII	(vegeu (f))	$\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$	$\left]\overline{D}-z_{1-\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},+\infty\right[$	$P(Z\geq z)$
XIII	$T=\frac{\overline{D}}{\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}}$	$\{T\leq -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{D}-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}},\overline{D}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(t_{n-1}>\|T\|)$
XIV	es t_{n-1}	$\{T\leq t_{n-1,\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{D}-t_{n-1,\alpha}\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}\right[$	$P(t_{n-1}\leq T)$
XV	(vegeu (f))	$\{T\geq t_{n-1,1-\alpha}\}$	$\left]\overline{D}-t_{n-1,1-\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},+\infty\right[$	$P(t_{n-1}\geq T)$
XVI	$Z=\frac{\overline{D}}{\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}}$	$\{Z\leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{D}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}},\overline{D}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(Z\geq \|z\|)$
XVII	es $N(0,1)$	$\{Z\leq z_\alpha\}$	$\left]-\infty,\overline{D}-z_\alpha\frac{\widetilde{S}_D}{\sqrt{n}}\right[$	$p(Z\leq z)$
XVIII	(vegeu (f))	$\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$	$\left]\overline{D}-z_{1-\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},+\infty\right[$	$P(Z\geq z)$
XIX	$Z=\frac{\widehat{p}_1-\widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$\{Z\leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\widehat{p}_1-\widehat{p_2}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},\right.$ $\left.\widehat{p}_1-\widehat{p_2}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right[$	$2P(Z\geq \|z\|)$
XX	es $N(0,1)$ (vegeu (g,h))	$\{Z\leq z_\alpha\}$	$\left]-\infty,\widehat{p}_1-\widehat{p_2}-z_\alpha\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right[$	$P(Z\leq z)$
XXI		$\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$	$\left]\widehat{p}_1-\widehat{p_2}-z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},+\infty\right[$	$P(Z\geq z)$
XXII	$Z=\frac{\widehat{p}_{1\bullet}-\widehat{p}_{\bullet 1}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$	$\{Z\leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\widehat{p}_{1\bullet}-\widehat{p}_{\bullet 1}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}},\right.$ $\left.\widehat{p}_{1\bullet}-\widehat{p}_{\bullet 1}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}\right[$	$2P(Z\geq \|z\|)$
XXIII	es $N(0,1)$	$\{Z\leq z_\alpha\}$	$\left]-\infty,\widehat{p}_{1\bullet}-\widehat{p}_{\bullet 1}-z_\alpha\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}\right[$	$P(Z\leq z)$
XXIV	(vegeu (i))	$\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$	$\left]\widehat{p}_{1\bullet}-\widehat{p}_{\bullet 1}-z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}},+\infty\right[$	$P(Z\geq z)$
XXV	$F=\frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}$	$\{F\leq F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}}\}\cup$ $\{F\geq F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}},\right.$ $\left.\frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right[$	$2\min\{P(F_{n_1-1,n_2-1}\leq F),$ $P(F_{n_1-1,n_2-1}\geq F)\}$
XXVI	es F_{n_1-1,n_2-1}	$\{F\leq F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}\}$	$\left]0,\frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}\right[$	$P(F_{n_1-1,n_2-1}\leq F)$
XXVII		$\{F\geq F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}\}$	$\left]\frac{\widetilde{S}_1^2}{\widetilde{S}_2^2}F_{n_1-1,n_2-1,\alpha},+\infty\right[$	$P(F_{n_1-1,n_2-1}\geq F)$

(a) $\widetilde{S}=\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

(b) $\widetilde{S}_{1,2}=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)\widetilde{S}_1^2+(n_2-1)\widetilde{S}_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$

(c) $m=n_1+n_2-2$

(d) $\widetilde{S}_{1,2}=\sqrt{\dfrac{\widetilde{S}_1^2}{n_1}+\dfrac{\widetilde{S}_2^2}{n_2}}$

(e) $f=\left\lfloor\dfrac{\left(\frac{\widetilde{S}_1^2}{n_1}+\frac{\widetilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{\widetilde{S}_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\left(\frac{\widetilde{S}_2^2}{n_2}\right)^2}\right\rfloor-2$

(f) $\overline{D}$ y $\widetilde{S}_D$ son la media y la desviación típica muestrales de $D=X_1-X_2$

(g) $\widehat{p}=\dfrac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}$

(h) $\widehat{q}=1-\widehat{p}$

(i) Para hacer el contraste, hemos de construir la tabla siguiente:

		Muestra después			
		éxito	Fracaso	Frecuencia	Proporción
Muestra antes	éxito	a	b	$a+b$	$\widehat{p}_{1\bullet}=\frac{a+b}{n}$
	Fracaso	d	c	$c+d$	$\widehat{p}_{2\bullet}=\frac{c+d}{n}$
	Frecuencia	$a+d$	$b+c$	n	
	Proporción	$\widehat{p}_{\bullet 1}=\frac{a+d}{n}$	$\widehat{p}_{\bullet 2}=\frac{b+c}{n}$		1

Entonces, el estadístico de contraste se puede escribir como:

$$Z=\frac{\frac{b}{n}-\frac{d}{n}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$$