

Ejemplos contrates de hipótesis de una media

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Prueba plan de organización cadena de producción

La empresa ALUMINIA CALIFORNIA SUR (ALCASU) por sugerencia del comité sindical ha modificado los puestos y tareas de su cadena de producción de un tipo específico de ventanas de aluminio con gran demanda.

En la actualizad se espera fabricar una media $\mu = 90$ unidades por hora con una desviación típica CONOCIDA de $\sigma = 9$. El jefe de producción no quiere aceptar definitivamente la modificación salvo que se tenga evidencia de que la media de producción es definitivamente superior a la de la organización anterior.

Prueba plan de organización cadena de producción

Para asegurarlo plantea el siguiente contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 90 \\ H_1 : \mu > 90 \end{cases}$$

Necesita una muestra aleatoria, y **controla durante n=25 horas la producción** obteniendo los siguientes resultados

96.80	82.06	78.61	100.80	75.39	78.90	85.06	87.57
103.05	90.77	90.66	82.06	89.75	106.27	85.92	98.72
94.03	93.27	82.50	98.95	91.73	99.34	81.52	89.38
99.85							

$$\bar{x} = \frac{2262.96}{25} = 90.5184.$$

Prueba plan de organización cadena de producción

La **media de la muestra es $\bar{x} = 90.5184$** . Si suponemos que X = número de unidades fabricadas por hora es aproximadamente normal y que $\sigma = 9$ es conocida.

Entonces el **estadístico de contraste es al nivel de significación $\alpha = 0.05$** es

Rechazar H_0 si

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 90}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{90.5184 - 90}{\frac{9}{\sqrt{25}}} = \frac{0.5184}{\frac{9}{5}} = 0.288 > z_{0.05} = 1.6449.$$

Como $z_0 = 1.6667 > 1.645$ no podemos aceptar que la producción no haya superado la media de 90 unidades.

Por lo tanto debemos concluir que la nueva organización puede que no mejore el proceso de producción. Si los trabajadores están más satisfechos producen un poco más, aunque notemos que la media a aumentado en 0.5 unidades esto puede deberse la aleatoriedad de toda prueba.

Nota: La medida del tamaño del efecto es algo que no se trata en este curso. Pero si que hay que destacar que en ocasiones se rechaza el valor de la media con muy poca diferencia. Si es así, en este caso, igual convendría facilitar el trabajo de los operarios si el perjuicio en producción es bajo, es decir, si el coste en euros es pequeño.

Como ya hemos dicho la forma más habitual de resolver un contraste de hipótesis es calcular su p -valor.

En este caso el p -valor mirando en las tablas de contrastes viene dado por

$$P(Z > z_0) = P(Z > 0.288) = 1 - P(Z \leq 0.288) = 0.3867.$$

```
z0
```

```
## [1] 0.288
```

```
round(1-pnorm(z0,0,1),4)
```

```
## [1] 0.3867
```

Con google sheets

6					
7	Z Normal estandar	mu	sigma		
8		0	1		
9	1-P(Z<=1.6667)=	0.0478			
10	Formula	1-NORM.DIST(1.6667,B8,C8,TRUE)			
11					

Prueba plan de organización cadena de producción intervalo de confianza al 95%.

Mirando en las tablas la fórmula del intervalo de confianza para la alternativa $H_1 : \mu > 90$ es al nivel $1 - \alpha = 0.95$ es decir $\alpha = 0.05$

$$\left(\bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Luego podemos decir que al menos el 95% de la veces que repetamos el experimento el intervalo captura al verdadero valor de μ .

$$\left(90.5184 + -1.6449 \cdot \frac{9}{\sqrt{25}}, +\infty \right) = (87.5576, +\infty).$$

Prueba plan de organización cadena de producción p valor e intervalos de confianza

Google sheets						
muestra						
96.8	n= 25	Fórmula				
82.06	media= 90.5144	AVERAGE(F4:F28)				
78.61	sigma= 9.0000	conocida dada por el problema				
100.8	desviación típica 8.4875	STDEV(F4:F28)				
75.39	Nivel de confianza 1-alpha 0.9500		cuantil	valor	Formula	
78.9	alpha 0.0500		z_alpha	-1.6449	NORMINV(H9,0,1)	
85.06	alpha/2 0.0250		z_(alpha/2)	-1.9600	NORMINV(H10,0,1)	
87.57	mu0 90.0000					
103.05	estadístico z0 0.2858					
90.77						
90.66	H0: mu=90					
82.06						
89.75	p-valor		Intervalo confianza nivel 1-alpha			
106.27	H1: mu>90 0.0478		ICL	ICR		
85.92	H1: mu<90 0.9522		87.5537	+ Infinito		
98.72	H1: mu distinto 90 0.2250		-Infinito	93.4751		
94.03			86.9865	94.0423		
93.27						
82.5						
98.85						
91.73						
99.34						
81.52						
89.38						
99.85						

Prueba plan de organización cadena de producción (sigma desconocidas)

Volvemos al caso anterior, pero algo más real, lo más habitual es consideremos σ desconocida. Así que reformulamos

La empresa ALUMINIA CALIFORNIA SUR (ALCASU) por sugerencia del comité sindical ha modificado los puestos y tareas de su cadena de producción de un tipo específico de ventanas de aluminio con gran demanda.

En la actualizad se espera fabricar una media $\mu = 90$ unidades por hora con una desviación típica de σ . es desconocida y la estimaremos por la desviación típica de la muestra s_x . El jefe de producción no quiere aceptar definitivamente la modificación salvo que se tenga evidencia de que la media de producción es definitivamente superior a la de la organización anterior.

Prueba plan de organización cadena de producción

T-student

Para asegurarlo plantea el siguiente contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 90 \\ H_1 : \mu > 90 \end{cases}$$

Necesita una muestra aleatoria, y **controla durante n=25 horas la producción** obteniendo los siguientes resultados

96.80	82.06	78.61	100.80	75.39	78.90	85.06	87.57
103.05	90.77	90.66	82.06	89.75	106.27	85.92	98.72
94.03	93.27	82.50	98.95	91.73	99.34	81.52	89.38
99.85							

Prueba plan de organización cadena de producción

T-student

Los estadísticos son

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2262.96}{25} = 90.5184.$$

$$\begin{aligned} s_x &= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{206570.0932}{25} - 90.5184^2} \\ &= \sqrt{69.2229894} = 69.223. \end{aligned}$$

Prueba plan de organización cadena de producción

T -student

La media de la muestra es $\bar{x} = 90.5184$. Si suponemos que $X =$ número de unidades fabricadas por hora es aproximadamente normal y σ desconocida entonces

$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - 90}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$. sigue una ley de T de student con $n - 1$ grados de libertad.

El estadístico de contraste es al nivel de significación $\alpha = 0.05$ e:
Rechazar H_0 si

$$t_0 = \frac{\bar{x} - 90}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{90.5184 - 90}{\frac{8.4916}{\sqrt{25}}} = \frac{0.5184}{\frac{8.4916}{5}} = 0.3052 > t_{0.05, n-1} = 1.7109.$$

Como $t_0 = 0.3052 > -1.7109$ no podemos aceptar que la producción no haya superado la media de 90 unidades.

Prueba plan de organización cadena de producción

T-student

Por lo tanto debemos concluir que la nueva organización **puede que no mejore el proceso de producción**. Si los trabajadores están más satisfechos producen un poco más, aunque notemos que la media **aumentado en 0.5 unidades esto puede deberse la aleatoriedad de toda prueba**.

Nota: La medida del tamaño del efecto es algo que no se trata en este curso. Pero si que hay que destacar que en ocasiones se rechaza el valor de la media con muy poca diferencia. Si es así, en este caso, igual convendría facilitar el trabajo de los operarios si el perjuicio en producción es bajo, es decir, si el coste en euros es pequeño.

Prueba plan de organización cadena de producción p valor T -student

Como ya hemos dicho la forma más habitual de resolver un contraste de hipótesis es calcular su p -valor.

En este caso el p -valor mirando en las tablas de contrastes viene dado por

$$P(t_{n-1} > t_0) = P(t_{24} > 0.3052) = 1 - P(t_{n-1} \leq 0.3052) = 0.3814.$$

```
t0
```

```
## [1] 0.3052
```

```
round(1-pt(t0,df=25-1),4)
```

```
## [1] 0.3814
```

Prueba plan de organización cadena de producción p valor T -student

Con google sheets

6					
7	Z Normal estandar	mu	sigma		
8		0	1		
9	1-P(Z<=1.6667)=	0.0478			
10	Formula	1-NORM.DIST(1.6667,B8,C8,TRUE)			
11					

Prueba plan de organización cadena de producción intervalo de confianza al 95%. T -student

Mirando en las tablas la fórmula del intervalo de confianza para la alternativa $H_1 : \mu > 90$ es al nivel $1 - \alpha = 0.95$ es decir $\alpha = 0.05$.

$$\left(\bar{x} + t_{\alpha, n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Luego podemos decir que al menos el 95% de la veces que repetamos el experimento el intervalo captura al verdadero valor de μ .

$$\left(90.5184 + -1.7109 \cdot \frac{8.4916}{\sqrt{25}}, +\infty \right) = (87.6127, +\infty).$$

Prueba plan de organización cadena de producción p valor e intervalos de confianza T -student

Google sheets sigma desconocida población normal o muestra grande						
muestra						
96.8	n=	25	Fórmula			
82.06	media=	90.5144	AVERAGE(F4:F28)			
78.61	sigma	desconocida				
100.8	desviación típica	8.4875	STDEV(F4:F28)			
75.39	Nivel de confianza 1-alpha	0.9500		cuantil	valor	Formula
78.9	alpha	0.0500		$t_{\{\alpha, n-1\}}$	-1.7109	TINV(C9,C4-1)
85.06	alpha/2	0.0250		$t_{\{\alpha/2, n-1\}}$	-2.0639	TINV(C10,C4-1)
87.57	mu0	90.0000				
103.05	estadístico t con n-1 g.l.=24	0.3030				
90.77						
90.66	H0: mu=90					
82.06						
89.75						
106.27	H1: mu>90	#REF!				
85.92	H1: mu<90	#REF!				
98.72	H1: mu distinto 90	0.2381				
94.03						
93.27						
82.5						
98.85						
91.73						
99.34						
81.52						
89.38						
99.85						