Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
IN3171-1 Modelamiento y Optimización

ASIGNACIÓN, PRODUCCIÓN Y TRANSPORTE

Tarea Nº1

Integrantes: Adolfo Rojas Valenzuela
Diego E. Cristallini
Profesor: Fernando Ordoñez P.
Auxiliar: Agustín Hilcker M.
Camilo Escalante Leñam
Diego Riveros
Tomás González E.
Trinidad Ulloa P.

Fecha de entrega: 01 de abril de 2024
Santiago de Chile

Índice de Contenidos

1. Introducción

La optimización lineal es un campo crucial en la ciencia de la computación y la ingeniería, con aplicaciones en una amplia gama de sectores, desde la logística hasta la planificación financiera. En este informe, abordamos la resolución de un problema de optimización lineal utilizando Gurobi, una de las herramientas líderes en el campo de la optimización matemática.

El objetivo principal de este informe es presentar un caso de estudio específico en el que se enfrenta un desafío de optimización lineal de transporte con subproblemas de asignación y producción donde se debe modelar el mismo y emplea Gurobi para encontrar la solución óptima. Se examinará detalladamente el problema planteado, se discutirá el enfoque utilizado para formularlo como un problema de optimización lineal y se presentarán los resultados obtenidos tras la aplicación de Gurobi.

2. Ítem a)

2.1. Datos de entrada

- Conjunto de trabajadores: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Conjunto de estaciones: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Conjunto de clientes: $\{1, 2, 3\}$
- Demanda de los clientes: $d = [250, 150, 120]$
- Matriz de productividad S, donde s_{ij} representa la producción del trabajador i en la estación j:

$$S = \begin{pmatrix} 100 & 180 & 150 & 90 \\ 80 & 120 & 90 & 100 \\ 130 & 80 & 90 & 85 \\ 200 & 80 & 120 & 150 \\ 70 & 130 & 80 & 130 \end{pmatrix}$$

- Matriz de costos C, donde c_{jk} es el costo de enviar una unidad de producto desde la estación j al cliente k:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 10 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2. Modelo de optimización

- Variables de decisión:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajador } i \text{ es contratado en la estación } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{jk} = \text{Cantidad de producto enviado desde la estación } j \text{ al cliente } k$$

- Naturaleza de las variables:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, 5\}, \forall k \in \{1, 2, 3\}, w_{ij} \in \{0, 1\} \land x_{jk} \in \mathbb{N}_0$$

Es importante destacar que la matriz de productividad S, con coordenadas s_{ij} que representan lo que se puede producir en cada estación sujeto al trabajador contratado, requiere de una 5ta estación (con productividad 0) para ajustarse al problema de asignación. Por cuestiones de dimensiones, se debe realizar un procedimiento similar para la matriz de costos, añadiendo una estación adicional con un costo de transporte arbitrario (en este caso, 0) tal que no afecte la toma de decisiones.

- Restricciones:

$$\sum_{i=1}^{5} w_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{(Asignación de trabajadores)}$$

$$\sum_{j=1}^{5} w_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{(Asignación de trabajadores)}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{jk} \geq d_k \qquad \forall k \in \{1, 2, 3\} \qquad \text{(Satisfacción de demanda)}$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_{jk} \leq \sum_{i=1}^{5} w_{ij} s_{ij} \qquad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{(Relación producción-envío)}$$

Destacar que hay libertad a la hora de imponer las desigualdades (pues muchas de estas podrían ser igualdades) al no afectar la resolución del problema (gracias a que siempre vamos a asignar el $=$ en cada variable de decisión pues es lo más óptimo) excepto con el retraso del procedimiento algorítmico con más iteraciones de acotamiento en el branch and bound del gurobi.

- Función objetivo: minimizar los costos totales de envío

$$\min \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{3} x_{jk} c_{jk}$$

Destacar que este problema tiene más de una solución óptima como se verá en la parte b la cual dependiendo de si se trabaja con una estación extra o no el vector de $i \cdot j + j \cdot k$ variables de decisión será distinto pero seguirá formando parte del conjunto factible (y en particular será óptimo)

3. Ítem b)

Se implementa un modelo llamado "Optitalia v1" de programación lineal entera mixta en Python utilizando la librería Gurobi para resolver el problema de asignación de trabajadores a estaciones y distribución de productos a clientes de manera óptima.

3.1. Resultados Optitalia v1

La solución óptima obtenida al ejecutar el código en Python con Gurobi es:

```
Solución óptima encontrada:

Trabajador 1 fue asignado a la estación 3
Trabajador 2 no fue contratado
Trabajador 3 fue asignado a la estación 1
Trabajador 4 fue asignado a la estación 4
Trabajador 5 fue asignado a la estación 2

Cantidad enviada desde estación 2 al cliente 1: 100.0
Cantidad enviada desde estación 3 al cliente 1: 150.0
Cantidad enviada desde estación 4 al cliente 2: 150.0
Cantidad enviada desde estación 1 al cliente 3: 120.0

Costo total de la solución óptima: 3050.0

Tiempo de ejecución: 0.05057024955749512 segundos.
```

3.2. Análisis de resultados

Según la solución óptima obtenida, el Trabajador 2 no quedó asignado a ninguna estación, mientras que los Trabajadores 1, 3, 4 y 5 fueron asignados a las estaciones 3, 1, 4 y 2, respectivamente, donde son más productivos. En particular, los Trabajadores 3 y 5 quedaron asignados a la estación donde su productividad es la máxima posible.

La asignación de trabajadores a estaciones y los envíos de productos desde las estaciones a los clientes satisfacen la demanda de los clientes al menor costo posible, que es 3050.

4. Ítem c)

En esta parte, se contrasta la solución óptima obtenida en la parte (b) con la solución generada por el siguiente método propuesto:

1. Procesar los trabajadores según su ID: 1, 2, 3, 4, 5.
2. Al procesar al trabajador i, asignar a su estación más productiva que todavía esté disponible.
3. Cuando todas las estaciones estén ocupadas, determinar cómo satisfacer la demanda con un modelo con capacidades fijas.

4.1. Resultados Optitalia Capacidades Fijas

Al ejecutar el código del método propuesto, se obtiene la siguiente solución óptima:

```
Solución óptima encontrada:

La cantidad enviada desde estación 1 al cliente 2: 10
La cantidad enviada desde estación 1 al cliente 3: 120
La cantidad enviada desde estación 2 al cliente 1: 130
La cantidad enviada desde estación 2 al cliente 2: 40
La cantidad enviada desde estación 3 al cliente 1: 120
La cantidad enviada desde estación 4 al cliente 2: 100

Costo total de la solución óptima: 3150.0
Diferencia de costo Optitalia Capacidades Fijas y Optitalia v1: 100.0

Tiempo de ejecución: 0.001965761184692383 segundos.
```

4.2. Análisis de resultados

Comparando esta solución con la obtenida en la parte (b), se pueden observar las siguientes diferencias:

Diferencia 1: La asignación de trabajadores a estaciones es diferente, ya que en este método se asignan según su ID y productividad máxima disponible.

Diferencia 2: Los envíos de productos desde las estaciones a los clientes varían, lo que puede resultar en una distribución menos óptima para satisfacer la demanda.

Diferencia 3: El costo total de la solución obtenida mediante el método propuesto es de 3150, que es mayor que el costo óptimo encontrado en la parte (b).

En resumen, el método propuesto genera una solución factible pero subóptima en comparación con la solución óptima obtenida en la parte (b), ya que no considera la asignación óptima de trabajadores a estaciones y la distribución óptima de productos a clientes de manera simultánea.
También comentar que si bien es una solución subóptima, el procedimiento de "saturación"nos aportaría una base para trabajar el problema a mano

5. Ítem d)

En esta parte, se modifica el modelo para considerar que cuando los trabajadores 1 y 4 son asignados simultáneamente, las productividades de todos los trabajadores se reducen en 10 unidades.

5.1. Resultados Optitalia v2

Al ejecutar el código del modelo modificado, se obtiene la siguiente solución óptima:

```
Solución óptima encontrada:

Trabajador 1 fue asignado a la estación 3
Trabajador 2 no fue contratado
Trabajador 3 fue asignado a la estación 1
Trabajador 4 fue asignado a la estación 4
Trabajador 5 fue asignado a la estación 2

Cantidad enviada desde estación 2 al cliente 1: 110.0
Cantidad enviada desde estación 3 al cliente 1: 140.0
Cantidad enviada desde estación 2 al cliente 2: 10.0
Cantidad enviada desde estación 4 al cliente 2: 140.0
Cantidad enviada desde estación 1 al cliente 3: 120.0

Costo total de la solución óptima: 3070.0

Tiempo de ejecución: 0.004060029983520508 segundos
```

5.2. Análisis de resultados

Comparando esta solución con la obtenida en la parte (b), se pueden observar las siguientes diferencias:

Diferencia 1: La asignación de trabajadores a estaciones es la misma, ya que los trabajadores 1 y 4 fueron asignados a las estaciones 3 y 4, respectivamente, donde son más productivos.

Diferencia 2: Los envíos de productos desde las estaciones a los clientes no presentan cambios.

Diferencia 3 El costo total de la solución obtenida con el modelo modificado es de 3070, que es mayor que el costo óptimo encontrado en la parte (b), que era 3050, debido a la reducción de productividad cuando los trabajadores 1 y 4 son asignados simultáneamente.

En resumen, conviene tener a los trabajadores 1 y 4 asignados a las estaciones donde son más productivos, a pesar de que el costo total de la solución óptima es mayor que en la parte (b). Esto se debe a que la reducción de productividad al tener a ambos trabajadores asignados simultáneamente es compensada por la mayor productividad individual de estos trabajadores en sus estaciones óptimas. Sin embargo, esta asignación implica un costo ligeramente mayor en comparación con la solución óptima original.