Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
IN3171-1 Modelamiento y Optimización

ALGORITMOS DE PPL Y GEOMETRÍA

Tarea 3

Integrantes: Adolfo Rojas Valenzuela
Diego E. Cristallini
Profesor: Fernando Ordoñez P.
Auxiliar: Agustín Hilcker M.
Camilo Escalante Leñam
Diego Riveros
Tomás González E.
Trinidad Ulloa P.

Fecha de entrega: 17 de mayo
Santiago de Chile

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

1. Pregunta 1

1. Fase I: Partimos agregando las variables artificiales x_7, x_8, x_9, x_{10} que usaremos de base inicial y cambiamos la función objetivo de costos a $[\vec{0}, \vec{\mathbb{1}}]$ para comenzar la fase I del algoritmo simplex donde la SBF en la que nos encontramos es $\mathbf{x}_1 = (\vec{0}, 20, 18, 13, 10)$, usando dicha base calculamos los costos reducidos $\hat{c}_1 = (7, 1, 5, -8, -8, -17, \vec{0}) \implies x_4$ entra a la base (por regla de Bland) y sale x_8, para ello se usa la dirección $\mathbf{d}_1 = (e_4, 2, -10, 3, -3)$ con paso $\theta_1 = 1.8$ y posición resultante $\mathbf{x}_2 = (0, 0, 0, 1.8, 0, 0, 23.6, 0, 18.4, 4.6)$. A continuación el resto de iteraciones bajo la misma lógica:
   Iteración Nº2:

   $\beta_2 = [x_4, x_7, x_9, x_{10}] \implies \mathbf{x}_2 = (0, 0, 0, 1.8, 0, 0, 23.6, 0, 18.4, 4.6)$
   $\hat{c}_2 = (3.8, -1.4, 8.2, 0, -3.2, -13, 0, 0.8, 0, 0) \implies$ entra x_2
   $\theta_2 = 0.93 \implies$ sale x_{10}
   $\mathbf{d}_2 = (0, 1, 0, 0.3, 0, 0, 5.6, 0, -2.1, -4.9)$

   Iteración Nº3:

   $\beta_3 = [x_2, x_4, x_7, x_9] \implies \mathbf{x}_3 = (0, 0.93, 0, 2.08, 0, 0, 28.85, 0, 16.42, 0)$
   $\hat{c}_3 = (4.14, 0, 5.28, 0, -3.42, -12.57, 0, 0.71, 0, 0.28) \implies$ entra x_5
   $\theta_3 = 3.77 \implies$ sale x_4
   $\mathbf{d}_3 = (0, 0.16, 0, -0.55, 1, 0, -6.28, 0, 2.85, 0)$

   Iteración Nº4:

   $\beta_4 = [x_2, x_5, x_7, x_9] \implies \mathbf{x}_4 = (0, 1.55, 0, 0, 3.77, 0, 5.11, 0, 27.22, 0)$
   $\hat{c}_4 = (2.11, 0, 3.88, 6.22, 0, -8.88, 0, 1.22, 0, 0.66) \implies$ entra x_6
   $\theta_4 = 1.95 \implies$ sale x_9
   $\mathbf{d}_4 = (0, -0.48, 0, 0, -1.07, 1, 5.03, 0, -13.92, 0)$

   Iteración Nº5:

   $\beta_5 = [x_2, x_5, x_6, x_7] \implies \mathbf{x}_5 = (0, 0.61, 0, 0, 1.68, 1.95, 14.96, 0, 0, 0)$
   $\hat{c}_5 = (-2.62, 0, -0.32, 9.53, 0, 0, 0, 1.77, 0.64, 0.60) \implies$ entra x_1
   $\theta_5 = 1,52 \implies$ sale x_2
   $\mathbf{d}_5 = (1, -0.40, 0, 0, 0.02, 0.53, -2.62, 0, 0, 0)$

   Iteración Nº6:

   $\beta_6 = [x_1, x_5, x_6, x_7] \implies \mathbf{x}_6 = (1.52, 0, 0, 0, 1.71, 2.76, 10.98, 0, 0, 0)$
   $\hat{c}_6 = (0, 6.47, -12.75, 10.29, 0, 0, 0, 1.34, 0.41, 2.06) \implies$ entra x_3
   $\theta_6 = 0.86 \implies$ sale x_7
   $\mathbf{d}_6 = (4.75, 0, 1, 0, 0, 3, -12.75, 0, 0, 0)$

   Iteración Nº7:

   $\beta_f = [x_1, x_3, x_5, x_6] \implies \mathbf{x}_f = (5.61, 0, 0.86, 0, 1.71, 5.34, 0, 0, 0, 0)$
   $\hat{c}_f = (\vec{0}, \vec{\mathbb{1}})$

   Finalmente concluimos que el PPL es factible y una base dada por resolver el problema de factibilidad está dada por β_f, la SBF asociada es $\mathbf{x}_f$

2. Fase II: Removemos las variables artificiales y usamos la f.o. original
   Iteración Nº1:

$c = (1, -8, -8, -13, 3, 5), B_1 = \beta_f \implies \vec{x}_1 = (5.61, 0, 0.86, 0, 1.71, 5.34)$
$\bar{c}_1 = (0, -11.24, 0, -10.7, 0, 0) \implies$ entra x_2
$\delta_1 = 32.50 \implies$ sale x_5
$\vec{d_1} = (-0.06, 1, 0.51, 0, -0.05, 0.21)$

Iteración Nº2:

$B_f = [x_1, x_2, x_3, x_6] \implies \vec{x}_f = (3.60, 32.50, 17.36, 0, 0, 12.09)$
$\bar{c}_f = (0, 0, 0, 292.90, 213.65, 0)$

2. Pregunta 2

1. Los puntos $\vec{0}$ y $e_i, \forall i \in \{1, 2, .., n\}$ son soluciones 'básicas' factibles definidas por las restricciones activas de cota inferior $x_i \geq 0$ y las de cota superior $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1, x_i \leq 1$ respectivamente. Sin embargo $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1$ también está activa en el punto e_i por lo que la familia de soluciones $e_i, \forall i \in \{1, 2, .., n\}$ es una familia degenerada

2. Bajo el supuesto extra de que $P \neq \emptyset$ y que por ende $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\mathbf{x}$ es una SBF de $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si cumple que tiene n restricciones activas, luego de las m restricciones linealmente independientes aportadas por A, estas por definición ya se encuentran activas con lo que para que $\mathbf{x}$ sea SBF deben encontrarse activas $n - m$ restricciones las cuales solo pueden provenir de las cotas superior o inferior de las componentes de $\mathbf{x}$. Por contradicción se asume que $\vec{x}$ es una SBF tal que tiene menos de $n - m$ de sus componentes en una de sus cotas lo cual implicaría que más de m restricciones provenientes de $Ax = b$ sean activas (por definición de P estas ya se encuentran activas) pero esto no es posible pues el rango de A es a lo más m gracias a que sus filas son linealmente independiente mas no cuenta con más de m filas, luego como una SBF del polítopo debe tener exactamente n restricciones activas se produce la contradicción y concluímos lo que se pide.

3. Dado el poliedro $P = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$ y la función $z = -x$ se tiene que el problema de minimización de z sujeto a P, es decir:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Tiene dos soluciones básicas factibles óptimas alcanzadas en el punto $(1, 0)$

3. Pregunta 3

1. Dada la naturaleza del poliedro $\subset \mathbb{R}^2$ es posible encontrar la solución de manera gráfica como se presenta en la figura 1 la cual está dada por el punto C dependiente del valor δ.
Para llegar a este vértice se necesitan activar las restricciones $b_2 : x_2 - x_1 = 2$, $b_3 : x = 1 + \delta$, luego resolviendo este sistema se tiene que el punto $C = (1 + \delta, 3 + \delta)$ es donde dada la función

$f(x_1,x_2) = -x_1 - x_2$ alcanza el óptimo $\min\limits_{x_1,x_2} f = -4-2\delta$

Observación: el análisis previo es cierto solo si $\delta \geq -2$ pues en caso contrario se tiene que el poliedro es $= \emptyset$ y por ende el problema $P3$ infactible, también notar la particularidad del caso $\delta = -2$ donde el poliedro es el singleton $\{(-1,1)\} \neq \emptyset$ y las tres restricciones que definen dicho poliedro se encuentran activas, es decir que el punto y única solución factible $x = (-1,1)$ es una solución degenerada.

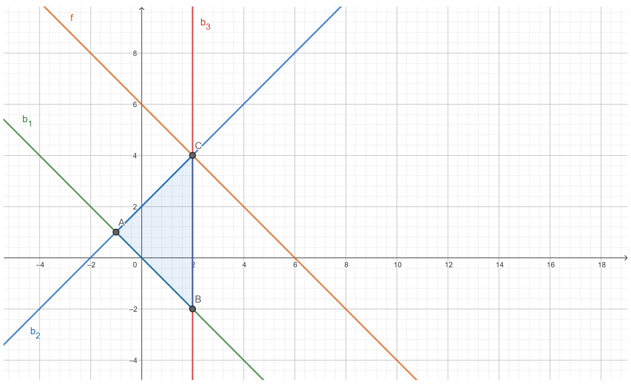

Figura 1: Poliedro del problema $P3$

2. Recordando que para el problema $P3$ la matríz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y para los vectores de costo $c^T = (-1,-1)$, recursos $b^T = (0,2,1+\delta)$ y f.o. $g = 2y_2 + (1+\delta)y_3$ se tiene que el dual de $P3$ es

$$\begin{aligned} \max\ & g \\ \text{s.a. } & y_1 - y_2 + y_3 = -1 \\ & y_1 + y_2 = -1 \\ & y_2, y_3 \leq 0 \\ & y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Tomando la solución $\mathbf{x} = (1+\delta, 3+\delta)$ del problema primal tenemos que

$$(1+\delta+3+\delta)y_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$
$$(-1-\delta+3+\delta-2)y_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$
$$(1+\delta-1-\delta)y_3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$
$$(y_1 - y_2 + y_3 + 1)(1+\delta) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4}$$
$$(y_1 + y_2 + 1)(3+\delta) \stackrel{!}{=} 0 \tag{5}$$

luego de (1) se debe cumplir que $\delta = -2 \vee y_1 = 0 \implies$ para (5) $\delta = -3 \vee y_2 = -1$ donde la condición para $\delta = -3$ no es posible pues del primal vimos que $P3$ no es factible para $\delta < -2$, finalmente de (4) sacamos que $\delta = -1 \vee y_3 = -2$ donde para el caso en que $\delta = -1, y_3$ queda libre y no se puede concluir nada, caso contrario el óptimo se alcanza en el punto $\mathbf{y} = (0,-1,-2)$.

4. Siguiendo con el análisis de los δ críticos se tiene que para el caso en que $\delta = -2$ no es posible

encontrar el óptimo ya que y_2, y_3 van en función de y_1, valor del cual no se puede concluir que $= 0$ por lo que debemos recurrir al corolario de dualidad fuerte $\max\limits_{y_1,y_2,y_3} g = \min\limits_{x_1,x_2} f = -4 - 2\delta \Rightarrow 2y_2 + (1-2)y_3 = -4 - 2 \cdot -2 \implies y_3 = 2y_2$, luego reemplazando en (4) y (5) nos percatamos que no es posible encontrar el óptimo ya que dichas ecuaciones son redundantes y no aportan mayor información, esto pues del problema primal se había concluido que para $\delta = -2$ dicho problema era un PL de caso especial pues cuenta con una única solución la cual es degenerada.

Ahora escribiendo el problema primal en forma estándar

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min -x_1^+ & +x_1^- & -x_2^+ & +x_2^- & & & & \\
x_1^+ & -x_1^- & +x_2^+ & -x_2^- & -x_3 & & & = \; 0 \\
\text{s.a.} -x_1^+ & +x_1^- & +x_2^+ & -x_2^- & & +x_4 & & = \; 2 \\
x_1^+ & -x_1^- & & & & & +x_5 & = 1+\delta \\
& & & & \multicolumn{4}{l}{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Partiendo con el punto $\mathbf{x} = (1+\delta, 0, 3+\delta, 0, 4+2\delta, 0, 0)$ el cual sabemos por subítem 2 es óptimo y cuya base asociada haciendo uso de las restricciones cuando $\delta \geq -1$ es $B = [x_1^+, x_2^+, x_3]$, base la cual es invertible y por ende pasa los criterios de optimalidad además de que calculando el vector de costos reducidos se cumple que cada componente es ≥ 0. Ahora calculamos $\mathbf{y} = c_B^T B^{-1} = (0, -1, -2)$ el cual mostramos que es óptimo mediante holgura complementaria

$$0(1 + \delta + 3 + \delta - 4 - 2\delta) = 0 \tag{6}$$
$$-1(-1 - \delta + 3 + \delta - 2) = 0 \tag{7}$$
$$-2(1 + \delta - 1 - \delta) = 0 \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

Por lo que en efecto es óptimo

Para el caso en que $-2 < \delta < -1$ la base cambia a $B = x_1^-, x_2^+, x_3$ y para $\delta = -2$ debido a la degeneración existen 3 bases óptimas

5. Como el coeficiente que acompaña a y_3 es negativo y dicha variable es a lo más $= 0$, en combinación con el resto de restricciones se tiene que el problema es no acotado, de esto concluir que el primal es infactible por corolario