Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
IN3171-1 Modelamiento y Optimización

MODELAMIENTO, DUALIDAD Y PPL ENTERA

Tarea 4

Integrantes: Adolfo Rojas Valenzuela
Diego E. Cristallini
Profesor: Fernando Ordoñez P.
Auxiliar: Agustín Hilcker M.
Camilo Escalante Leñam
Diego Riveros
Tomás González E.
Trinidad Ulloa P.

Fecha de entrega: 7 de Junio
Santiago de Chile

Índice de Contenidos

Índice de Tablas

1. Pregunta 1

1. • Variables de decisión:

$$x_{ij} = \text{Fracción de realización del mueble } j \text{ hecha por el carpintero } i$$

   • Naturaleza de las variables: $\forall i \in \{A, B, C\}, \forall j \in M := \{\text{mesas}, \text{sillas}\}, x_{ij} \in \mathbb{R}$

   Definamos la matriz $H^T = \begin{bmatrix} 50 & 42 & 30 \\ 60 & 48 & 35 \end{bmatrix}$ cuya componente H_{ij} indica las horas que necesita el carpintero i para completar la totalidad de $j \in M$, también definamos el vector de disponibilidad horaria que tiene cada carpintero $h^T = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 35 \end{pmatrix}$

   • Restricciones:

$$\sum_{i \in \{A,B,C\}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in M \qquad \text{(Se completan los pedidos de mesas y sillas)}$$
$$\sum_{j \in M} x_{ij} H_{ij} \leq h_i \qquad \forall i \in \{A, B, C\} \qquad \text{(Disponibilidad horaria de cada carpintero)}$$

   • Función objetivo: minimizar costos

$$\min \quad 3.6(50x_{A1} + 60x_{A2}) + 4.2(42x_{B1} + 48x_{B2}) + 5.5(30x_{C1} + 35x_{C2})$$

   Luego usando gurobi en este link de google colab se obtiene

Carpintero	**Fracción de Mesas (%)**	**Fracción de Sillas (%)**
A	27.083	0
B	0	62.5
C	72.917	37.5

Tabla 1: Distribución de las fracciones de trabajo entre los carpinteros

2. Debido a las 3 restricciones sobre disponibilidad horaria es necesario agregar una variable de holgura por cada una de estas con lo que el problema en forma estándar quedaría como sigue

$$\begin{array}{llllllllllll}
\min & 180x_{A1} & +216x_{A2} & +176.4x_{B1} & +201.6x_{B2} & +165x_{C1} & +192.5x_{C2} & & & & \\
\text{s.a.} & x_{A1} & & +x_{B1} & & +x_{C1} & & & & & = 1 \\
 & & x_{A2} & & +x_{B2} & & +x_{C2} & & & & = 1 \\
 & 50x_{A1} & +60x_{A2} & & & & & +s_1 & & & = 40 \\
 & & & 42x_{B1} & +48x_{B2} & & & & +s_2 & & = 30 \\
 & & & & & 30x_{C1} & +35x_{C2} & & & +s_3 & = 35 \\
 & & & & & & & & & & x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{C1}, x_{C2}, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}$$

Luego reemplazando en cada restricción con los valores obtenidos de 1.1 llegamos a que la base de la solución encontrada es $B = [x_{A1}, x_{B2}, x_{C1}, x_{C2}, s_1]$ con su punto y óptimo respectivamente $\mathbf{x} = (0.27083, 0, 0, 0.625, 0.72917, 0.375, 26.4585, 0, 0)$, $\min = 367.25$ (en miles)

3. Aplicando la traspuesta al problema, cambiando las desigualdades y haciendo un cambio de variable para las componentes asociadas a las restricciones de disponibilidad horaria se obtiene su dual

$$\begin{array}{llllllr}
\max & y_1 & +y_2 & +40y_A & +30y_B & +35y_C & \\
\text{s.a.} & y_1 & & +50y_A & & & \leq 180 \\
 & & y_2 & +60y_A & & & \leq 216 \\
 & y_1 & & & +42y_B & & \leq 176.4 \\
 & & y_2 & & +48y_B & & \leq 201.6 \\
 & y_1 & & & & +30y_C & \leq 165 \\
 & & y_2 & & & +35y_C & \leq 192.5 \\
 & & & & & & y_A, y_B, y_C \leq 0 \\
 & & & & & & y_1, y_2 \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Finalmente usando holgura complementaria encontramos el punto solución de este nuevo espacio, primero de la restricción 7 (la de positividad) dado que $(y_A - 0)s_1 \stackrel{!}{=} 0$ pero $s_1 \neq 0 \Rightarrow y_A = 0$, luego de la restricción 1 tenemos que $(y_1 - 180)x_{A1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_1 = 180$, siguiendo con la restricción 5 $(180 + 30y_C - 165)x_{C1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_C = -0.5$, de 6 $(y_2 - 35 \cdot 0.5 - 192.5)y_{C2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_2 = 210$ finalmente de la restricción 4 $(210 + 48y_B - 201.6)x_{B2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_B = -0.175$ por lo que $\mathbf{y} = (180, 210, 0, -0.175, -0.5)$

4. Del primal sabemos que un cambio en el vector de recursos h' solo repercute en la condición de factibilidad donde recalculamos el punto solución $\mathbf{x} = B^{-1}h'$ el cual es $(0.271, 0, 0, 0.625, 0.729, 0.375, 16.458, 0, 0, 0)$ en la que solo cambia el valor de s_1, además de afectar el valor del óptimo el cual es $\mathbf{y} \cdot h' = \mathbf{y} \cdot h$ pues del dual podemos ver como y_A la variable asociada a la restricción que se está perturbando es $= 0$ con lo que el valor óptimo no inmuta

5. Nuevamente modificamos el vector de recursos hasta encontrar el δ que no nos saque de la base actual pues en caso de infactibilidad y haga falta cambiar de base $B' = [x_{B2}, x_{C1}, x_{C2}, s_1, s_2]$ ocurrirá que $y_B = (c_B^T B'^{-1})_4 = 0$ con lo que igual que en el ítem anterior, independiente de cuanto se aumente su disponibilidad el óptimo no inmutará. Ahora para hayar el valor de δ sabemos que se debe cumplir que B sea óptimo, para ello lo primero es que sea invertible lo cual se mantiene pues no se modifica H, lo siguiente es que los costos reducidos sean positivos lo cual no inmuta con cambios en h y finalmente queda por revisar factibilidad, i.e $B^{-1}h \geq 0$, de aquí obtenemos $\left(\frac{-7*\delta+78}{288}, \quad \frac{\delta+30}{48}, \quad \frac{7*\delta+210}{288}, \quad \frac{-\delta+18}{48}, \quad \frac{175*\delta+3810}{144}\right)^T$ con lo que $\delta = \frac{78}{7} = 11 + \frac{1}{7}$ y la disponibilidad horaria del carpintero B tendría que ser $41 + \frac{1}{7}$ pues así el óptimo (en miles) pasaría de 367.25 a 365.3 con lo que pagando un bono (en miles) menor al beneficio neto $367.25 - 365.3 = 1.95$ sale ganando Muebles 3B

6. Modificamos la primera restricción de manera tal que solo el 95 % de las mesas se completen el cual al ser un cambio en el vector de recursos solo basta con chequear el criterio de factibilidad para determinar si la base sigue siendo óptima, por ello calculamos $\mathbf{x'} = B^{-1}\tilde{h} = (0.221, 0, 0, 0.625, 0.729, 0.375, 28.958, 0, 0)$ cuyo óptimo es 358.25, luego Muebles 3B se ahorra $367.25 - 358.25 = 9$

2. Pregunta 2

1. El objetivo de nuestro problema es maximizar la cantidad de nodos dentro del grafo cuya presencia en el mismo puede ser descrita por una variable dicotómica que se active en caso de pertenecer al conjunto deseado, es decir

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$
$$\forall i \in V, x_i \in \{0,1\}$$

   Ahora para asegurarnos que ningún elemento del conjunto tenga una conexión mediante arista con otro necesitamos una restricción de exclusión en el cual dadas las coordenadas de una arista en el grafo (o sea que dichas coordenadas sean un par ordenado perteneciente a $E \subset \mathbb{R}^2$) se asegure la presencia de a lo más uno de los dos integrantes de esta conexión, es decir $\forall (i,j) \in E, x_i + x_j \leq 1$

2. Del grafo presentado sabemos que $V = \{1, 2, .., 5\}$ y $E = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5)\}$, luego el problema de optimización relajado ignorando $x_i \leq 1$ con $i \in V$ por redundancia queda:

$$\begin{array}{lcccccr}
\max & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \\
\text{s.a.} & x_1 & +x_2 & & & & \leq 1 \\
& x_1 & & & +x_4 & & \leq 1 \\
& & x_2 & +x_3 & & & \leq 1 \\
& & x_2 & & +x_4 & & \leq 1 \\
& & & x_3 & +x_4 & & \leq 1 \\
& & & x_3 & & +x_5 & \leq 1 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccccr}
\min & y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & +y_6 & \\
\text{s.a.} & y_1 & +y_2 & & & & & \geq 1 \\
& y_1 & & +y_3 & +y_4 & & & \geq 1 \\
& & & y_3 & & +y_5 & +y_6 & \geq 1 \\
& & y_2 & & +y_4 & +y_5 & & \geq 1 \\
& & & & & & y_6 & \geq 1 \\
& & & & & & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 & \geq 0
\end{array}$$

   Ahora para mostrar que $\mathbf{x} = \vec{0.5} \in \mathbb{R}^5$ alcanza el óptimo utilizamos el teorema de holgura complementaria para construir una solución dual $\mathbf{y}$ que certifique la optimalidad de $\mathbf{x}$. Para el problema en mano notamos que hay varios candidatos con lo que proponiendo $\mathbf{y} = (0.5, 0.5, 0, 0.5, 0, 1)$ es fácil probar que ambos óptimos son iguales, $\max \sum_{i=1}^{5} x_i = \min \sum_{i=1}^{6} y_i = 2.5$, ahora por holgura complementaria podemos notar que $\begin{aligned} y_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \forall i \in \{1,..,6\}, \\ x_j(c_j - A_j^T y) &= 0, \quad \forall j \in \{1,..,5\}. \end{aligned}$, la primera (y con la cual validamos que $\mathbf{x}$ sea óptimo) es directa pues las restricciones del primal dan $x_i + x_j - 1 = 0.5 + 0.5 - 1 = 0 \ \forall (i,j) \in E$, ahora la otra es necesario corroborar a mano

$$0.5 + 0.5 - 1 = 0 \tag{1}$$
$$0.5 + 0 + 0.5 - 1 = 0 \tag{2}$$
$$0 + 0 + 1 - 1 = 0 \tag{3}$$
$$0.5 + 0.5 - 1 = 0 \tag{4}$$
$$1 - 1 = 0 \tag{5}$$

   Y con esto se concluye que tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{y}$ son óptimos

3. Por contradicción dados el grafo $G = (V, E)$ y el conjunto independiente $I \subseteq V$, supongamos

que para cualquier *Clique* C del grafo el conjunto I debe complir $\sum_{i\in C} x_i > 1$ es decir que los nodos a, b que viven en C (pues tienen una arista que los conecta, o sea, el par $(a,b) \in E$) se encuentran activos $x_a = x_b = 1$ y también deben vivir en I pero de la restricción de exclusión vista en el ítem 1 esto no es posible pues $(a,b) \in E, x_a + x_b = 2$ lo cual no es menor que 1 lo que produce la contradicción, en conclusión todo I necesariamente debe cumplir que $\sum_{i\in C} x_i \leq 1$

Tomando el *clique* $C = \{1,2,4\}$ del enunciado y la solución del ítem 2 se tiene que $\sum_{i\in C} x_i = 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5$ lo cual no es menor/igual que 1 y por lo tanto no cumple la restricción

4. Los dos *cliques* de tamaño 3 son $C_1 = \{1,2,4\}, C_2 = \{2,3,4\}$, ahora usando el mismo link de gurobi python obtuvimos la solución $\mathbf{x} = (0,0,0,1,1)$, destacar que para este grafo en particular hay varias otras soluciones óptimas.
La diferencia es que el primer método al resolver la versión relaja del problema entero nos entrega variables mixtas y un óptimo no entero $(= 2.5)$ en cambio una vez se agregan las dos restricciones de cliques de tamaño 3 la solución y óptimo entregados son netamente enteros

3. Pregunta 3

1. Primero describimos los conjuntos de nodos $N = \{s,1,2,3,4,t\}$ y aristas
$A = \{(s,1),(s,2),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(3,t),(4,t)\}$, ahora dado el par $(i,j) \in A$ defi-
nimos $u_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } (i,j) \in \{(1,3),(3,4)\} \\ 3 & \text{si } (i,j) \in \{(2,3),(2,4)\} \\ 4 & \text{si } (i,j) \in \{(s,1),(1,2),(3,t)\} \\ 5 & \text{si } (i,j) \in \{(s,2),(4,t)\} \\ 0 & \sim \end{cases}$
luego el problema de flujo máximo y su dual para el grafo propuesto es

$$
\begin{array}{lrl}
\max & v & \\
\text{s.a.} & v & = x_{s1} + x_{s2} \\
& x_{s1} & = x_{12} + x_{13} \\
& x_{s2} + x_{12} & = x_{23} + x_{24} \\
& x_{13} + x_{23} & = x_{34} + x_{3t} \\
& x_{24} + x_{34} & = x_{4t} \\
& x_{3t} + x_{4t} & = v \\
& \forall (i,j) \in A, x_{ij} & \leq u_{ij} \\
& \forall (i,j) \in A, x_{ij} & \geq 0 \\
& v & \in \mathbb{R}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\min & \sum\limits_{(i,j)\in A} u_{ij} z_{ij} & \\
\text{s.a.} & y_t - y_s & = 1 \\
& y_s - y_1 + z_{s1} & \geq 0 \\
& y_s - y_2 + z_{s2} & \geq 0 \\
& y_1 - y_2 + z_{12} & \geq 0 \\
& y_1 - y_3 + z_{13} & \geq 0 \\
& y_2 - y_3 + z_{23} & \geq 0 \\
& y_2 - y_4 + z_{24} & \geq 0 \\
& y_3 - y_4 + z_{34} & \geq 0 \\
& y_3 - y_t + z_{3t} & \geq 0 \\
& y_4 - y_t + z_{4t} & \geq 0 \\
& \forall (i,j) \in A, z_{ij} & \geq 0 \\
& \forall i \in N, y_i & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

2. En efecto la solución $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0, & 1, \cdots & 1_{s2}, 0, \cdots & 0 \end{pmatrix}$ es dual factible pues la condición de positividad para z_{ij} se cumple para todo $(i,j) \in A$ y de las primeras tres restricciones se tiene

$1-0=1$, $0-1+1\geq 0$, $0-1+1\geq 0$, luego para la 4ta restricción en adelante se tiene $1-1+0\geq 0$ con lo que $\mathbf{y}$ vive en la región factible, ahora evaluando en la función objetivo obtenemos $u_{s1}\cdot 1+u_{s2}\cdot 1=9$, luego como nuestro problema dual es de minimización se tiene por dualidad débil que el valor obtenido es cota superior del primal, o sea $v\leq 9$

3. En efecto, para un grafo $G=(N,A)$ cualquiera, dado un corte $s-t$ C arbitrario, el punto dado por $y_i\begin{cases}0 & \text{si } i\in C\\ 1 & \text{si } i\notin C\end{cases}$, $z_{ij}\begin{cases}1 & \text{si } i\in C, j\notin C\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$ es dual-factible pues las restricciones de variable real en y_i y positividad en z_{ij} se cumplen, luego para las restricciones internas también se cumplen dando lugar a las siguientes posibilidades. $\begin{cases}0-0+0\geq 0 & \text{si } i\in C, j\in C\\ 1-0+0\geq 0 & \text{si } i\notin C, j\in C\\ 0-1+1\geq 0 & \text{si } i\in C, j\notin C\\ 1-1+0\geq 0 & \text{si } i\notin C, j\notin C\end{cases}$ Finalmente para la restricción asociada al suministro s usando la definición de corte sabemos que $s\in C, t\notin C$ por lo que $y_t-y_s=1-0=1$ con lo que se concluye la factibilidad

   Del corte $C_1=\{s,1,4\}$ tenemos que las únicas variables asociadas a las restricciones de capacidad que se encuentran activas son $z_{s2},z_{12},z_{13},z_{4t}$ por ende y evaluando obtenemos $v\leq 5+4+2+5=16$, de misma forma para $C_2=\{s,3\}$ se encuentran activas $z_{s1},z_{s2},z_{34},z_{3t}\Rightarrow v\leq 4+5+2+4=15$

4. Ignorando la demostración rigurosa del teorema de flujo máximo - corte mínimo usamos los ítems anteriores notando que el dual del problema de flujo máximo que habíamos escrito en el ítem 1 puede ser generalizado para cualquier grafo $G=(N,A)$, luego del ítem 3 podemos ver que el poliedro generado por estas restricciones son equivalentes al poliedro visto en 1, finalmente notando que $\min\limits_{y_i,u_{ij}} g(C)=\min\limits_{y_i,z_{ij}}\sum\limits_{(i,j)\in A} u_{ij}z_{ij}$ se tiene que son problemas equivalente, luego por el resultado de dualidad débil se tiene el resultado pedido