IN3171 - Modelamiento y Optimización

Tarea 3

Profesores: Fernando Ordoñez, Gonzalo Muñoz
Auxiliares: Camilo Escalante, Tomás González, Agustín Hilcker, Diego Riveros, Trinidad Ulloa

Pregunta 1

Considere el problema de optimización lineal:

$$
(P1) \qquad \begin{array}{lrrrrrrl}
\min & x_1 & -8x_2 & -8x_3 & -13x_4 & +3x_5 & +5x_6 & \\
\text{s.a} & x_1 & -5x_2 & +11x_3 & -2x_4 & +6x_5 & -x_6 & = 20 \\
 & -4x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +10x_4 & +6x_5 & +5x_6 & = 18 \\
 & -4x_1 & +3x_2 & -11x_3 & -3x_4 & -5x_5 & +10x_6 & = 13 \\
 & & +4x_2 & -9x_3 & +3x_4 & +x_5 & +3x_6 & = 10 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Encuentre una solución básica factible inicial resolviendo un problema de fase 1 con el método Simplex.
2. Encuentre la solución básica factible óptima para el problema $(P1)$ con el método Simplex, partiendo de la solucón básica factible encontrada en la parte anterior.

Las respuestas de esta pregunta, debe mostrar el trabajo que realiza el método Simplex. Utilize la regla de pivoteo de Bland. Para cada iteración, indique la base inicial, la solución básica factible (SBF) inicial, su función objetivo, la variable que entra, su costo reducido, la dirección a la SBF adyacente, el tamaño del paso, y la variable que sale.

Puede utilizar cualquier sistema para realizar las iteraciones del método Simplex, por ejemplo usar la planilla vista en clase, que se puede copiar desde `https://docs.google.com/spreadsheets/d/19rUNu7zMw1b7RrfSnTVi_hn8oZIzDhJ5r7Ca2AqULcY/edit#gid=1820350907`

Pregunta 2

1. Considere el siguiente poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\}$. Describa todos sus puntos extremos. ¿Cuáles de ellos son degenerados?
2. Se dice que un polítopo P está en forma *quasi-estándar* si está descrito de la siguiente forma:
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ \ell_i \leq x_i \leq u_i, i = 1 \ldots, n\}$$
donde A tiene todas sus filas linealmente independientes, y $\ell, u \in \mathbb{R}^n$ son tales que $\ell_i \leq u_i$. Muestre que toda solución básica factible $\hat{x}$ de un polítopo en forma quasi-estándar tiene al menos $n - m$ de sus componentes en una de sus cotas, es decir, existen $n - m$ entradas $\hat{x}_i$ tales que $\hat{x}_i = \ell_i$ o $\hat{x}_i = u_i$.
3. Invente un ejemplo de un problema lineal que tenga dos soluciones básicas factibles óptimas, con una de ellas degenerada.

Pregunta 3

Considere el problema lineal:

$$(P3) \qquad \begin{array}{lrrl} \min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 & +x_2 & \geq 0 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & & \leq 1+\delta \end{array}$$

1. Encuentre la solución óptima para $(P3)$ como función de $\delta \in \mathbb{R}$. ¿Qué ocurre cuando $\delta = -2$?
2. Escriba el problema dual de $(P3)$, que llamaremos (D)
3. Cuando $\delta > -2$ use holgura complementaria para encontrar la solución óptima para (D) como función de $\delta \in \mathbb{R}$
4. Para el caso $\delta = -2$, ¿Qué dificultad enfrenta al utilizar holgura complementaria? Escriba $(P3)$ en forma estándar y encuentre B una base de la solución óptima. Muestre que $c_B^\top B^{-1}$ es una solución óptima de (D). ¿Cuántas bases óptimas B hay?
5. Explique que ocurre en (D) cuando $\delta < -2$.

Reglas de la Tarea

- Debe presentar un informe con sus respuestas de no más de 10 páginas.
- Se corregirá ortografía, redacción y contenido del informe.
- La tarea se puede desarrollar individualmente o en grupos de 2 estudiantes.
- **Fecha de entrega**: Viernes, 17 de mayo 2024, 23.59 horas a través de U-Cursos.
- Se descontará 1.5 puntos por día de atraso si se entrega la tarea después del plazo. El plazo máximo para entregar la tarea con atraso es el 19 de mayo 2024 a las 23.59 horas.