IN3171 - Modelamiento y Optimización

Tarea 4

Profesores: Fernando Ordoñez, Gonzalo Muñoz
Auxiliares: Camilo Escalante, Tomás González, Agustín Hilcker, Diego Riveros, Trinidad Ulloa

Pregunta 1

Debido a un grave error en su plataforma, la empresa de mesas y sillas "Muebles 3B" tomó muchos pedidos en el último Cyber Day. Para poder completar los pedidos, la empresa contratará a tres carpinteros de forma extraordinaria. Los carpinteros le dieron un estimado de cuánto tiempo les tomaría completar todas las mesas y todas las sillas, y sus honorarios por hora. Esto se detalla a continuación.

	Carpintero A	**Carpintero B**	**Carpintero C**
Horas para completar todas las mesas	50	42	30
Horas para completar todas las sillas	60	48	35
Horas disponibles	40	30	35
Salario por hora (miles)	\$3.6	\$4.2	\$5.5

Notar que en varios casos cada carpintero por si solo no sería capaz de completar todas las mesas o sillas. Por ejemplo, si el Carpintero A solo hiciera mesas, podría realizar solamente $40/50 = 80\%$ de las mesas requeridas.

1. Formule un problema lineal que determine qué fracción de mesas y qué fracción de sillas debería hacer cada carpintero, de manera de completar todos los pedidos a costo mínimo. Resuelva el problema con algún software de su preferencia.
   Nota: en este problema no es necesario saber el total de las mesas y sillas a completar.

2. Transforme su modelo a forma estándar (de ser necesario), y calcule una base óptima a partir de la solución de la parte anterior.

3. Calcule el dual de su problema y obtenga una solución óptima.

4. Suponga que el Carpintero A cambia su disponibilidad horaria a 30 horas. Sin volver a resolver el problema, estime cómo afecta ésto a los costos de la empresa.

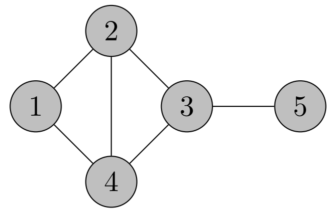
5. Estime cuánto le conviene a "Muebles 3B" pagar al Carpintero B para que tenga más disponibilidad horaria. Suponiendo que el Carpintero B accede a este pago por disponibilidad, ¿por cuánta disponibilidad extra le conviene a la empresa pagar?.
   Nota: en esta parte el pago por hora trabajada no cambia. Se puede pensar en el pago extra como un incentivo para que el Carpintero B libere su agenda.

6. Después de haber hecho el análisis de costos, "Muebles 3B" determina que no tiene capital para completar todos los pedidos. Sin volver a resolver el problema desde cero, determine cuánto se ahorraría la empresa por no completar un 5% de las mesas, y determine la nueva solución óptima en estas circunstancias. En esta parte considere las disponibilidades horarias originales.

Nota: en esta pregunta no olvide que los precios asociados a cambios en restricciones tienen ciertos rangos de validez. Siempre debe asegurarse que al usar un precio usted está dentro de dicho rango.
Además, estos rangos de validez deben ser determinados por usted manualmente. Puede verificarlos usando software, pero debe mostrar claramente cómo se calculan.

Pregunta 2

En esta pregunta estudiaremos formulaciones al problema del conjunto independiente máximo. Dado un grafo no-dirigido $G = (V, E)$, un *conjunto independiente* es un conjunto $S \subseteq V$ tal que no existe ninguna arista entre elementos de S. Por ejemplo, para el siguiente grafo:



el conjunto $\{1, 3\}$ es un conjunto independiente. Por otro lado, $\{1, 3, 5\}$ no es un conjunto independiente. Los conjuntos independientes tienen muchas aplicaciones: por ejemplo, cuando las aristas representan conflictos, los conjuntos independientes representan vértices que no tienen ningún conflicto entre ellos.

El problema del conjunto independiente máximo busca encontrar, para un grafo, un conjunto independiente lo más grande posible.

1. Argumente por qué la siguiente formulación es válida para el problema del conjunto independiente máximo:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{i \in V} x_i & \\ \text{sujeto a} & x_i + x_j \leq 1 & \forall (i, j) \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in V. \end{array}$$

2. Considere la formulación anterior, aplicada al ejemplo concreto entregado al comienzo del enunciado. Demuestre, usando conceptos de dualidad, que $x = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ es óptimo para la relajación lineal. Puede mostrarlo con cualquier técnica de dualidad que estime conveniente.

3. Para un grafo general, se define un *clique* como un conjunto $C \subseteq V$ donde todos los pares de vértices de C tienen una arista entre sí. Por ejemplo, en el grafo del ejemplo, $C = \{1, 2, 4\}$ es un clique. Dado cualquier clique C, argumente por qué todo conjunto independiente debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1.$$

   Además, muestre que la solución de la relajación lineal de la parte anterior **no** cumple una restricción de este tipo.

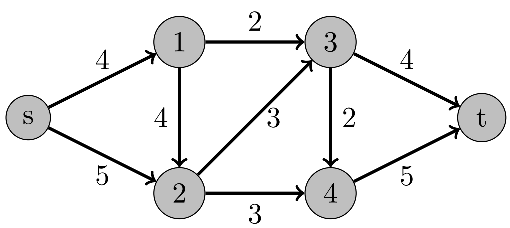
4. Por inspección, encuentre todos los cliques de tamaño 3 del grafo del ejemplo. Agregue las restricciones discutidas en la parte anterior, y resuelva la relajación lineal del modelo resultante. Puede resolver la relajación con el software que estime conveniente. Comente las diferencias entre las relajaciones.

Pregunta 3

Considere un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y $A \subseteq N \times N$ es el conjunto de arcos dirigidos, donde cada arco $(i, j) \in A$ tiene una capacidad u_{ij}. El problema de flujo máximo busca determinar la máxima cantidad de flujo v que se puede enviar desde un nodo $s \in N$ a un nodo $t \in N$. Una de las formulaciones de este problema es la siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\max_{x,v} & v & \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j|(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{k|(k,s)\in A} x_{ks} - v = 0 & \\
& \displaystyle\sum_{j|(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{k|(k,t)\in A} x_{kt} + v = 0 & \\
& \displaystyle\sum_{j|(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k|(k,i)\in A} x_{ki} = 0 & \forall i \in N \setminus \{s,t\} \\
& x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in A\ .
\end{array}
$$

Considere el siguiente grafo para el problema de flujo máximo



1. Para el problema del grafo dado, escriba el modelo de flujo máximo descrito arriba y su dual. Denote por $y_i,\ i \in N$ las variables duales asociadas a las restricciones de balance de flujo y por $z_{ij},\ (i,j) \in A$ las variable duales asociadas a las restricciones de capacidad.

2. Muestre que la solución $y_s = 0$, $y_i = 1$ para todo $i \in N \setminus \{s\}$ y $z_{s1} = z_{s2} = 1$ y $z_{ij} = 0$ para todo $(i,j) \in A \setminus \{(s,1),\ (s,2)\}$ es dual factible. ¿Qué cota entrega esta solución para el flujo máximo?.

3. Generalizaremos lo realizado anteriormente. Se define un *corte* $s - t$ como un conjunto $C \subset N$ tal que $s \in C$ y $t \notin C$. Muestre que, dado C un corte $s - t$, lo siguiente define una solución dual factible:

$$
y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in C \\ 1 & \text{si } i \notin C \end{cases} \qquad z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in C, j \notin C \\ 0 & \text{si no} \end{cases}
$$

   ¿Qué cotas en el flujo máximo obtenemos con los dos siguientes cortes $s - t$: $\{s, 1, 4\}$, $\{s, 3\}$?

4. Se define la capacidad de C, un corte $s - t$, como $g(C) = \displaystyle\sum_{i \in C, j \notin C} u_{ij}$. Es decir, las capacidades de los arcos que "cruzan" desde C hacia afuera de C. Demuestre para un grafo $G = (N, A)$ general que el valor del flujo máximo es menor o igual que la capacidad del corte mínimo.

Reglas de la Tarea

- Debe presentar un informe con sus respuestas de no más de 10 páginas.
- Se corregirá ortografía, redacción y contenido del informe.

- La tarea se puede desarrollar individualmente o en grupos de 2 estudiantes.
- **Fecha de entrega**: Viernes, 7 de junio 2024, 23.59 horas a través de U-Cursos.
- Se descontará 1.5 puntos por día de atraso si se entrega la tarea después del plazo. El plazo máximo para entregar la tarea con atraso es el 9 de junio 2024 a las 23.59 horas.