Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
IN3171-1 Modelamiento y Optimización

MODELAMIENTO Y GEOMETRÍA

Tarea 2

Integrantes: Adolfo Rojas Valenzuela
Diego E. Cristallini
Profesor: Fernando Ordoñez P.
Auxiliar: Agustín Hilcker M.
Camilo Escalante Leñam
Diego Riveros
Tomás González E.
Trinidad Ulloa P.

Fecha de entrega: 15 de abril
Santiago de Chile

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

1. Introducción

2. Pregunta 1

- Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el productor atiende al cliente } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el productor toma la ruta del cliente } i \text{ al cliente } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\tau_i = \text{tiempo en el que el productor llega a atender al cliente } i$$

$$r_i = \text{tiempo de atraso del productor al atender al cliente } i$$

- Naturaleza de las variables: $\forall i, j \in \mathbb{Z}^+, x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \tau_i, r_i \in \mathbb{Z}^+$
  Consideraciones: $\Omega \to \infty$ pues debe ser lo suficientemente grande para desincentivar los sub-tours, e incluso si no se da uso de, definiremos $x_0 = 1, B_0 = M_0 = \tau_0 = r_0 = T_0 = 0$

- Restricciones (obviando positividad de cada una de las variables):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_{0j} = \sum_{i=1}^{n} y_{i0} = 1 & \quad & \text{(Se entra y sale de la fábrica)} \\
\sum_{i=1}^{n} y_{ij} - y_{ji} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} & & \text{(Conservación de flujo)} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \leq V & & \text{(Capacidad no excedida)} \\
\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^+, i \neq j} y_{ij} t_{ij} \leq T & & \text{(El viaje no exceda el tiempo T)} \\
\tau_i + t_{ij} - (1 - y_{ij})\Omega \leq \tau_j \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}^+, i \neq j & & \text{(Se asigna prioridad de cliente y elimina rutas imposibles)} \\
x_i(\tau_i - T_i) \leq r_i \quad \forall i \in \mathbb{N} & & \text{(Tiempo de atraso)} \\
y_{ij} \leq x_i \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}^+, i \neq j & & \text{(Se realiza la ruta (o no) si se atiende a los clientes)}
\end{aligned}$$

- Función objetivo: maximizar la utilidad del productor

$$\max \sum_{i=1}^{n} B_i x_i - M_i(1 - x_i) - dr_i - \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^+, i \neq j} c_{ij} y_{ij}$$

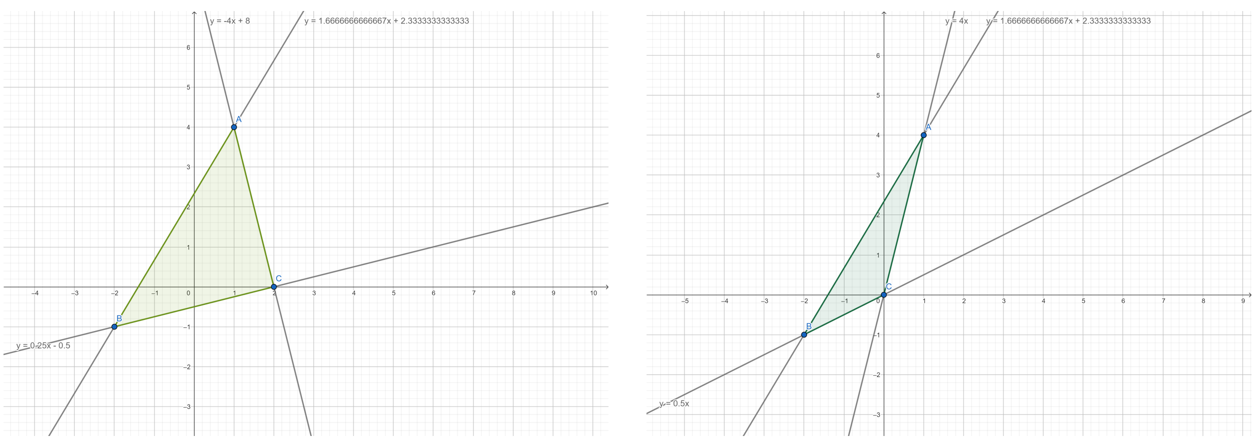
3. Pregunta 2

3.1. Ítem 1

Propongamos los poliedros $P_1 = conv(\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\})$ y $P_2 = conv(\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\})$, dado que estamos en $\mathbb{R}^2$ es fácil verificar que estos poliedros cumplen con minimizar las funciones objetivos tal que sus óptimos sean los vértices pedidos, ahora expresando estos poliedros con la notación general se tiene que

$$P_1 = \begin{cases} 4x & +y \leq 8 \\ 0,25x & -y \leq 0,5 \\ -1,\bar{6}x & +y \leq 2,\bar{3} \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} 0,5x & -y \leq 0 \\ 4x & -y \leq 0 \\ -1,\bar{6}x & +y \leq 2,\bar{3} \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$



(a) Gráfico del poliedro 1

(b) Gráfico del poliedro 2

Figura 1: Región de factibilidad según los poliedros

3.2. Ítem 2

a) Para encontrar los vectores de costos $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$ solicitados aprovechamos el hecho de que la región factible es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y por ende graficable, con lo que encontrando los coeficientes tales que la función objetivo sea paralela a las aristas del poliedro se tendrá un continuo de soluciones óptimas siempre y cuando la dirección de crecimiento de la misma lo permita, finalmente de los 4 posibles vectores (sin contar escalonamientos positivos) propusimos $\vec{C_1} = (1,0)$ y $\vec{C_2} = (-1,0)$

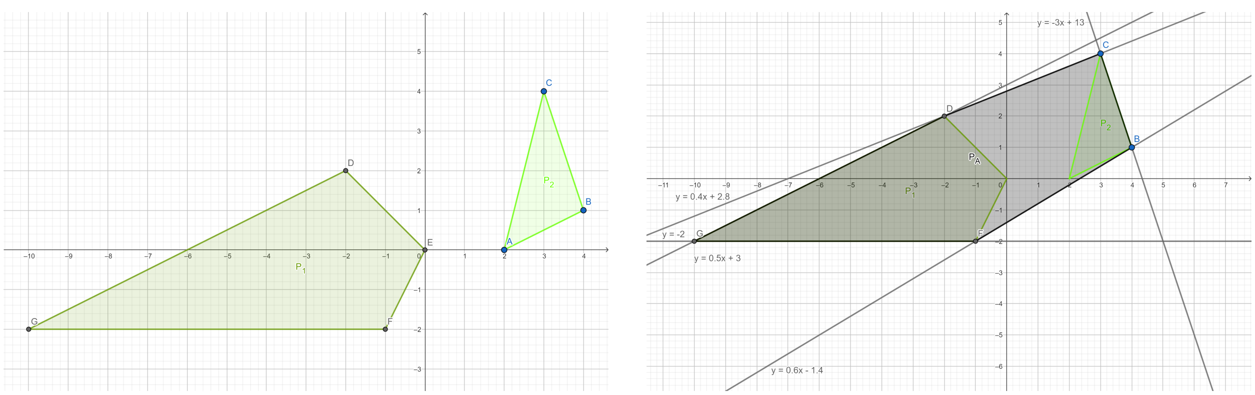
b)

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2(x_2^+ - x_2^-) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Pregunta 3

4.1. Ítem 1

Para este apartado dibujamos las rectas y generamos los polígonos cuyos vértices vienen dados por las intersecciones entre cada recta tal que se cumplan simultáneamente las desigualdades (sea factible y no solo un punto básico), de paso también graficamos el politopo compuesto por la combinación convexa de las 2 regiones ya discutidas



(a) Gráfico de los politopos P_1 y P_2

(b) Gráfico de $P_A := conv(P_1 \cup P_2)$

Figura 2: Región de factibilidad según los poliedros

4.2. Ítem 2

Para deducir las desigualdades que describen dicha región basta con usar la ecuación de la recta para cada punto extremo/vértice del politopo resultante, finalmente todo vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertenecerá a la región P_A si y sólo si cumple que

$$
\begin{aligned}
&y \leq \frac{x}{2} + 3 \\
&y \leq 0.4x + 2.8 \\
&y \geq -2 \\
&y \geq 0.6x - 1.4 \\
&y \leq -3x + 13
\end{aligned}
$$

4.3. Ítem 3

Usando de referencia el 2do gráfico de la ilustración 2 sabemos que los puntos B, C son puntos extremos de P_2 mientras que el resto de puntos que generan P_A es decir D, F, G también son puntos extremos, en este caso de P_1, luego para mostrar que no se tiene el recíproco basta con ponernos en el punto extremo $E = (0, 0)$ del poliedro P_1 visto en la figura y notar que este punto tiene un continuo de combinaciones convexas de otros dos puntos distintos pertenecientes a P_A

4.4. Ítem 4

Demostremos por contradicción que dados los politopos $P_1, P_2, .., P_K$ de $\mathbb{R}^n$, x punto extremo de $conv(\bigcup_{k=1}^K P_k) \implies x$ es punto extremo para algún $P_k \iff \neg(p \wedge \overline{q})$.
Primero supongamos que $x \in A := \{\sum_{k=1}^K \lambda_k \vec{x}_k \quad | \vec{x}_k \in P_k, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0\}$ tal que $\nexists u, v \in A \backslash \{x\}, \lambda \in [0, 1], x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ **pero** no es punto extremo de ningún P_k, es decir que existen dos puntos u, v en politopos $P_u, P_v \subseteq A$ tal que $\lambda u + (1 - \lambda)v = x$ lo que es una contradicción pues x es punto extremo de A con lo que no debería existir combinación convexa posible que genere dicho punto, por lo tanto se debe cumplir que si x es un punto extremo de A, este debe ser punto extremo de al menos uno de los politopos P_k.