Universidad de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

12. Ecuaciones Diofánticas

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 12

Ecuaciones Diofánticas

Contenido

12.1 Generalidades

Estas ecuaciones reciben este nombre en honor a Diofanto[1], matemático que trabajó en Alejandría a mediados del siglo III a.c. Fue uno de los primeros en introducir la notación simbólica en matemáticas y escribió seis libros sobre problemas en las que consideraba la representación de números anterior como suma de cuadrados.

12.1.1 Definición

Una ecuación diofántica es una ecuación lineal con coeficientes enteros y que exige soluciones también enteras.

12.2 Solución de una Ecuación Diofántica

Veremos un teorema que nos permite saber cuando una ecuación de este tipo tiene solución y aporta un método para calcular una solución particular de la misma.

[1]Matemático griego de la escuela de Alejandría (a.c. 325-a.c. 410). Dejó trece libros de aritmética, de los cuales sólo los seis primeros nos han llegado, y otro sobre los Números angulares. Aunque tomó como ejemplo para sus métodos los trabajos de Hiparco, su teoría completamente nueva de ecuaciones de primer grado y la resolución que dio a las de segundo hacen de él un innovador en este campo. Sus obras han constituido tema de meditación de sus contemporáneos griegos, y de los árabes, y, más tarde, de los geómetras del renacimiento. El mismo Viete en su obra capital, reproduce sus proposiciones, aunque sustituye los problemas abstractos por cuestiones de geometría resolubles por álgebra.

12.2.1 Solución Particular

Sean a, b y c tres números enteros. La ecuación lineal $ax + by = c$ tiene solución entera si, y sólo si el máximo común divisor de a y b divide a c.

Demostración

"Sólo si". En efecto, supongamos que los enteros x_0 e y_0 son solución de la ecuación $ax + by = c$, es decir, $ax_0 + by_0 = c$. Pues bien, si $d = \text{m.c.d.}(a, b)$, entonces

$$d = \text{m.c.d.}(a, b) \Longrightarrow d|a \text{ y } d|b \Longrightarrow d|ax_0 + by_0 \Longrightarrow d|c$$

"Si". Recíprocamente, supongamos que $d = \text{m.c.d.}(a, b)$ es divisor de c. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(a, b) = d \quad &\Longrightarrow \quad \text{m.c.d.}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists p, q \in \mathbb{Z} : \frac{a}{d}p + \frac{b}{d}q = 1 \\ &\Longrightarrow \quad a\frac{cp}{d} + b\frac{cq}{d} = c \end{aligned}$$

siendo c/d entero ya que, por hipótesis, d es divisor de c. Ahora bastaría tomar

$$x_0 = \frac{cp}{d} \text{ e } y_0 = \frac{cq}{d}$$

y tendríamos que

$$ax_0 + by_0 = c$$

es decir los enteros x_0 e y_0 son solución de la ecuación.

La solución encontrada se llamará *solución particular* del sistema.

Obsérvese que este teorema además de asegurar la existencia de solución para una ecuación de este tipo, ofrece un método para calcularla. El siguiente ejemplo aclarará estas cuestiones.

Ejemplo 12.1 Encontrar una solución para la ecuación diofántica $525x + 100y = 50$

Solución

◊ Veamos si existe solución entera para la ecuación.

Calculamos el máximo común divisor de 525 y 100 mediante el algoritmo de Euclides.

	5	4
525	100	25
25	0	

es decir,

$$\text{m.c.d.}\,(525, 100) = 25$$

y como 25 divide a 50, el teorema anterior asegura la existencia de solución entera para la ecuación.

◊ Calculamos una solución para la ecuación.

Siguiendo el método indicado en la demostración del teorema, hallamos los coeficientes de la combinación lineal del máximo común divisor de 525 y 100. Bastaría seguir el algoritmo de Euclides hacia atrás.

$$25 = 1 \cdot 525 + (-5) \cdot 100$$

por tanto, los coeficientes buscados son $p = 1$ y $q = -5$ y según el citado teorema una solución para la ecuación sería

$$x_0 = \frac{cp}{d} \text{ e } y_0 = \frac{cq}{d}$$

donde c es el término independiente de la ecuación y d el máximo común divisor de los coeficientes de x e y. Consecuentemente,

$$x_0 = \frac{50 \cdot 1}{25} = 2$$

e

$$y_0 = \frac{50 \cdot (-5)}{25} = -10$$

12.2.2 Solución General

Sean a, b y c tres números enteros no nulos tales que el máximo común divisor de a y b divide a c. Entonces la solución general de la ecuación $ax + by = c$ es

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{d}$$

$$y = y_0 - k \cdot \frac{a}{d}$$

donde x_0 e y_0 es una solución particular de la misma y k es cualquier número entero.

Demostración

Sea d el máximo común divisor de a y b. Por hipótesis d divide a c luego el teorema 12.2.1 asegura la existencia de una solución particular $x = x_0$ e $y = y_0$ para el sistema. Entonces,

$$ax_0 + by_0 = c$$

Dividiendo ahora ambos miembros de esta ecuación por el máximo común divisor de a y b, tendremos,

$$\frac{a}{d}x_0 + \frac{b}{d}y_0 = \frac{c}{d}$$

siendo $\frac{c}{d}$ entero y $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ números enteros primos entre sí, luego el máximo común divisor de ambos es 1 y como 1 divide a $\frac{c}{d}$, el teorema 12.2.1 asegura la existencia de una solución particular x_1, y_1 para esta ecuación, luego

$$\frac{a}{d}x_1 + \frac{b}{d}y_1 = \frac{c}{d}$$

Pues bien,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{d}x_1 + \dfrac{b}{d}y_1 = \dfrac{c}{d} \\ \dfrac{a}{d}x_0 + \dfrac{b}{d}y_0 = \dfrac{c}{d} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y_1)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b}{d} \,\Big|\, \frac{a}{d}(x_1 - x_0)$$

y al ser $\frac{b}{d}$ primo con $\frac{a}{d}$, dividirá a $x_1 - x_0$, luego

$$\frac{b}{d} \,|x_1 - x_0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x_1 - x_0 = k \cdot \frac{b}{d} \Longrightarrow x_1 = x_0 + k \cdot \frac{b}{d}.$$

Sustituimos el valor de $x_1 - x_0$ en $\dfrac{a}{d}(x_1 - x_0) + \dfrac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0$ y resulta

$$\frac{a}{d} \cdot k \cdot \frac{b}{d} + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{d} \cdot k + y_1 - y_0 = 0 \Longrightarrow y_1 = y_0 - k \cdot \frac{a}{d}.$$

Veamos, finalmente, que x_1 e y_1 es solución de la ecuación $ax + by = c$.

En efecto,

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= a\left(x_0 + k \cdot \frac{b}{d}\right) + b\left(y_0 + k \cdot \frac{a}{d}\right) \\ &= ax_0 + a \cdot k \cdot \frac{b}{d} + by_0 - b \cdot k \cdot \frac{a}{d} \\ &= ax_0 + by_0 \\ &= c \end{aligned}$$

luego,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + k \cdot \frac{b}{d} \\ y &= y_0 - k \cdot \frac{a}{d} \end{aligned}}$$

es solución de la ecuación $ax + by = c$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{Z}$. La llamaremos *solución general* de dicha ecuación.

Nota 12.1 En el ejemplo anterior, teníamos que

$$x_0 = 2 \text{ e } y_0 = -10$$

era una solución particular para la ecuación

$$525x + 100y = 50$$

luego una solución general de la misma, será:

$$\begin{aligned} x &= 2 + k \cdot \frac{100}{25} = 2 + 4k \\ y &= -10 - k \cdot \frac{525}{25} = -10 - 21k \end{aligned}$$

siendo k cualquier número entero.

Ejemplo 12.2 Calcular las soluciones enteras de la ecuación diofántica $66x + 550y = 88$

<u>Solución</u>

$$66x + 550y = 88$$

◇ Veamos si la ecuación admite solución entera.

Calculamos el máximo común divisor de 66 y 550 por el algoritmo de Euclides.

	8	3
550	66	22
22	0	

luego,

$$\text{m.c.d.}\,(66, 550) = 22$$

y como 22 divide a 88, término independiente de la ecuación, por el teorema 12.2.1 se sigue que la ecuación propuesta admite una solución particular $x = x_0$, $y = y_0$.

◇ Calculamos esta solución particular.

Volviendo hacia atrás en el algoritmo de Euclides, tendremos

$$22 = (-8) \cdot 66 + 1 \cdot 550$$

luego,

$$x_0 = \frac{88 \cdot (-8)}{22} = -32$$

$$y_0 = \frac{88 \cdot 1}{22} = 4$$

es una *solución particular* de la ecuación.

◇ Calculemos ahora la *solución general*.

Según lo visto en el teorema 12.2.2 si una solución particular de la misma es $x_0 = -32$ e $y_0 = 4$, entonces la solución general es:

$$\begin{aligned} x &= -32 + k \cdot \frac{550}{22} = -32 + 25 \cdot k \\ y &= 4 - k \cdot \frac{66}{22} = 4 - 3k \end{aligned}$$

siendo k cualquier número entero.

Ejemplo 12.3 Una persona va a un supermercado y compra 12 litros de leche, unos de leche entera y otros de desnatada, por 1200 ptas. Si la leche entera vale 30 ptas. más por litro que la desnatada, y ha comprado el mínimo posible de leche desnatada, ¿Cuántos litros habrá comprado de cada una?

Solución

Si x el número de litros de leche entera, entonces $12 - x$ es el número de litros de leche desnatada y si y es el precio de la leche desnatada, entonces el precio de la leche entera será $y + 30$.

Como el precio total de la leche comprada es 1200, tendremos que

$$x(y + 30) + y(12 - x) = 1200$$

de aquí que

$$xy + 30x + 126 - xy = 1200$$

o sea,

$$30x + 12y = 1200$$

◇ Veamos si esta ecuación admite soluciones enteras. Hallamos el máximo común divisor de 30 y 12 por el algoritmo de Euclides.

	2	2
30	12	6
6	0	

luego,

$$\text{m.c.d.}\,(30, 12) = 6$$

y dado que 6 divide a 1200, la ecuación planteada admite soluciones enteras.

◊ Calculamos una *solución particular*.

Como m.c.d. $(30, 12) = 6$, existirán 2 números enteros p y q tales que 6 pueda expresarse como combinación lineal de 30 y 12 con coeficientes enteros. Los hallaremos volviendo hacia atrás en el algoritmo de Euclides.

$$6 = 1 \cdot 30 + (-2) \cdot 12$$

luego entonces los coeficientes buscados son 1 y -2 y la *solución particular* de la ecuación es

$$x_0 = \frac{1200 \cdot 1}{6} = 200$$
$$y_0 = \frac{1200 \cdot (-2)}{6} = -400$$

◊ La *solución general* será:

$$x = 200 + k \cdot \frac{12}{6} = 200 + 2k$$
$$y = -400 - k \cdot \frac{30}{6} = -400 - 5k$$

siendo k cualquier número entero.

◊ Veamos, finalmente, cuantos litros se han comprado de cada tipo de leche.

Según lo visto hasta ahora, la cantidad de leche entera es

$$C_e = 200 + 2k : k \in \mathbb{Z}$$

y la cantidad de leche desnatada será, por tanto,

$$C_d = 12 - C_e = 12 - 200 - 2k = -188 - 2k : k \in \mathbb{Z}$$

Pues bien, suponiendo que se compra alguna cantidad de leche desnatada, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 < C_e < 12 \quad &\iff \quad 0 < 200 + 2k < 12 \\ &\iff \quad -200 < 2k < -188 \\ &\iff \quad -100 < k < -94 \\ &\iff \quad k \in \{-99, -98, -97, -96, -95\} \end{aligned}$$

y la cantidad mínima de leche desnatada se corresponderá con la máxima de leche entera y esta se da para el valor máximo que pueda tener k, es decir para $k = -95$. Por tanto,

$$C_e = 200 + 2(-95) = 200 - 190 = 10$$
$$C_d = 12 - C_e = 2$$

o sea, se compraron 10 litros de leche entera y 2 litros de leche desnatada.

Ejemplo 12.4 Hallar los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, con $10 < c < 20$ para los cuales no tiene solución la ecuación diofántica $84x + 990y = c$. Determinar la solución para los restantes valores de c.

Solución

$\diamondsuit$ La ecuación $84x + 990y = c$ admitirá solución entera si, y sólo si el máximo común divisor de 84 y 990 divide a c.

Hallamos dicho máximo común divisor por el algoritmo de Euclides.

	11	1	3	1	2
990	84	66	18	12	6
66	18	12	6	0	

luego

$$\text{m.c.d.}\,(84, 990) = 6$$

entonces,

$$84x + 990y = c \text{ tiene solución entera} \Longleftrightarrow 6\,|c \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : c = 6 \cdot q$$

y como $10 < c < 20$, tendremos que las opciones posibles para las que la ecuación tiene solución son

$$c = 12 \text{ y } c = 18$$

por tanto los valores de c para los que la ecuación no admite solución entera serán:

$$11, 13, 14, 15, 16, 17 \text{ y } 19$$

$\diamondsuit$ Calculamos una *solución particular* para la ecuación propuesta.

Volviendo hacia atrás el cálculo hecho en el algoritmo de Euclides, tendremos

$$\left.\begin{array}{r} 6 = 18 - 1 \cdot 12 \\ 12 = 66 - 3 \cdot 18 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 6 & = & 18 - 1(66 - 3 \cdot 18) \\ & = & -1 \cdot 66 + 4 \cdot 18 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = -1 \cdot 66 + 4 \cdot 18 \\ 18 = 84 - 1 \cdot 66 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 6 & = & -1 \cdot 66 + 4(84 - 1 \cdot 66) \\ & = & 4 \cdot 84 - 5 \cdot 66 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6 = 4 \cdot 84 - 5 \cdot 66 \\ 66 = 990 - 11 \cdot 84 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 6 & = & 4 \cdot 84 - 5(990 - 11 \cdot 84) \\ & = & -5 \cdot 990 + 59 \cdot 84 \end{array}$$

luego,

$$6 = 59 \cdot 84 + (-5) \cdot 990$$

$\diamondsuit$ Solución para $c = 12$.

– Una *solución particular* es

$$x_0 = \frac{12 \cdot 59}{6} = 118$$

$$y_0 = \frac{12 \cdot (-5)}{6} = -10$$

– La *solución general* es

$$x = 118 + k \cdot \frac{990}{6} = 118 + 165k$$

$$y = -10 - k \cdot \frac{84}{6} = -10 - 14k$$

siendo k cualquier número entero.

◇ Solución para $c = 18$.

– Una *solución particular* es

$$x_0 = \frac{18 \cdot 59}{6} = 177$$

$$y_0 = \frac{18 \cdot (-5)}{6} = -15$$

– La *solución general* es

$$x = 177 + k \cdot \frac{990}{6} = 177 + 165k$$

$$y = -15 - k \cdot \frac{84}{6} = -15 - 14k$$

siendo k cualquier número entero. ■

Ejemplo 12.5 Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$\sqrt{(x+y)(x-y) + (2x+2y-3)y - 2(x-7)} = x + y + 3$$

Solución

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2 - y^2 + 2xy + 2y^2 - 3y - 2x + 14 = x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9$$

y simplificando, resulta

$$8x + 9y = 5$$

◇ Veamos si tiene soluciones enteras.

8 y 9 son primos entre sí, luego

$$\text{m.c.d.}\,(8, 9) = 1$$

y como 1 divide a 5, término independiente de la ecuación, esta tendrá soluciones enteras.

◇ Calculamos una *solución particular*

El máximo común divisor de 8 y 9 escrito en combinación lineal de ambos, es

$$1 = (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 9$$

luego una solución particular es:

$$x_0 = \frac{5 \cdot (-1)}{1} = -5$$

$$y_0 = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5$$

◇ La *solución general*, por tanto, será

$$x = -5 + 9k$$

$$y = 5 - 8k$$

siendo k cualquier número entero. ■

Ejemplo 12.6 Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3 sobran 2 y haciendo grupos de 4 sobran 3. Hallar el número de manzanas que contiene el cesto sabiendo que están entre 100 y 110.

Solución

Sean x e y los números de grupos de tres y cuatro manzanas, respectivamente. Si N es el número total de manzanas que contiene el cesto, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2=N \\ 4y+3=N \end{array}\right\}$$

y restando miembro a miembro, resulta

$$3x-4y=1$$

◊ Veamos si esta ecuación tiene soluciones enteras.

Como m.c.d. $(3,4)=1$ y 1 divide a 1, término independiente de la ecuación, resulta que la misma admite soluciones enteras.

◊◊ *Solución particular*

$$1=(-1)\cdot 3+(-1)(-4)$$

luego,

$$x_0=\frac{1\cdot(-1)}{1}=-1$$

$$y_0=\frac{1(-1)}{1}=-1$$

es una *solución particular* de la ecuación.

◊◊ *Solución general*

$$x=-1+\frac{-4}{1}\cdot k=-1-4k$$

$$y=1-\frac{3}{1}\cdot k=-1-3k$$

siendo k cualquier número entero.

◊ Calculemos, finalmente, cuantas manzanas hay en el cesto.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2=N \\ x=-1-4k \end{array}\right\} \Longrightarrow 3(-1-4k)+2=N \Longrightarrow N=-12k-1$$

y como

$$100 \leqslant N \leqslant 110$$

tendremos

$$\begin{aligned} 100 \leqslant -12k-1 \leqslant 110 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{101}{12} \leqslant -k \leqslant \frac{111}{12} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{-111}{12} \leqslant k \leqslant \frac{-101}{12} \\ &\Longrightarrow \quad -9.25 \leqslant k \leqslant -8.42 \end{aligned}$$

y como k es un número entero, tendremos que

$$k=-9$$

Consecuentemente,

$$N = -12(-9) - 1 = 108 - 1 = 107$$

es decir el cesto contiene 107 manzanas. ■

Ejemplo 12.7 Hallar el menor número de cuatro cifras que dividido por 4, 7 y 11 da resto 3, y que dividido por 13 da resto 1.

Solución

Sea n el número buscado, entonces por el algoritmo de la división existen q_1, q_2 y q_3 tales que

$$\left.\begin{array}{l} n = 4 \cdot q_1 + 3 \Longrightarrow n - 3 = 4 \cdot q_1 \\ n = 7 \cdot q_2 + 3 \Longrightarrow n - 3 = 7 \cdot q_2 \\ n = 11 \cdot q_3 + 3 \Longrightarrow n - 3 = 11 \cdot q_3 \end{array}\right\}$$

luego

$$4 \,|n - 3\ ,\ 7 \,|n - 3 \ \text{ y } 11 \,|n - 3$$

es decir, $n - 3$ es un múltiplo común a 4,7 y 11, por tanto ha de ser múltiplo de su mínimo común múltiplo y al ser

$$\text{m.c.m.}(4, 7, 11) = 4 \cdot 7 \cdot 11 = 308$$

será

$$308 \,|n - 3$$

luego existirá un entero x tal que

$$n - 3 = 308x$$

es decir,

$$n = 308x + 3$$

Por otro lado y también por el algoritmo de la división, existirá un entero y tal que

$$n = 13y + 1$$

por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} n = 308x + 3 \\ n = 13y + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 308x - 13y = -2$$

◊ Veamos si esta ecuación admite soluciones enteras.

Calculamos el máximo común divisor de 308 y 13 por el algoritmo de Euclides.

	23	1	2	4
308	13	9	4	1
9	4	1	0	

luego

$$\text{m.c.d.}\,(308, 13) = 1$$

y 1 divide a -2, término independiente de la ecuación, luego tiene soluciones enteras.

◊◊ *Solución particular*

Buscamos los coeficientes enteros de 1 expresado como combinación lineal de 308 y -13.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 9 - 2 \cdot 4 \\ 4 = 13 - 1 \cdot 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 9 - 2(13 - 1 \cdot 9) \\ & = & 2(-13) + 3 \cdot 9 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2(-13) + 3 \cdot 9 \\ 9 = 308 - 23 \cdot 13 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 2(-13) + 3 \cdot [308 + 23 \cdot (-13)] \\ & = & 3 \cdot 308 + 71 \cdot (-13) \end{array}$$

luego

$$1 = 3 \cdot 308 + 71 \cdot (-13)$$

y una *solución particular* es:

$$x_0 = \frac{(-2) \cdot 3}{1} - 6$$

$$y_0 = \frac{(-2) \cdot 71}{1} - 142$$

$\diamondsuit\diamondsuit$ *Solución general*

$$x = -6 + k \cdot \frac{-13}{1} = -6 - 13k$$

$$y = -142 - k \cdot \frac{308}{1} = -142 - 308k$$

donde k es cualquier número entero.

$\diamondsuit$ Calculemos, finalmente, el número pedido.

$$\left.\begin{array}{l} n = 308x + 3 \\ x = -6 - 13k \end{array}\right\} \Longrightarrow n = 308(-6 - 13k) + 3 = -1845 - 4004k$$

y al ser $n > 0$, tendremos

$$-1845 - 4004k > 0 \Longrightarrow k < -\frac{1845}{4004} \Longrightarrow k < -0.46 \Longrightarrow k \leqslant -1$$

y el número más pequeño se producirá para el valor más alto de k.

Para $k = -1$,

$$n = -1845 - 4004(-1) = 2159$$

y es el menor número de cuatro cifras que cumple las condiciones del enunciado. $\square$

Ejemplo 12.8 Un granjero gastó 100.000 pts. en 100 animales entre pollos, conejos y terneros. Si los pollos los compró a 50 pts, a 1000 pts. los conejos y a 5000 pts. los terneros y adquirió animales de las tres clases, ¿Cuántos animales compró de cada clase?

Solución

Sean x, y y z el número de pollos, conejos y terneros, respectivamente. De acuerdo con el enunciado tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 50x + 1000y + 5000z = 100000 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x + 20y + 100z = 2000 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x + y + z + 19y + 99z = 2000 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 100 + 19y + 99z = 2000$$

$\diamondsuit$ Veamos si la ecuación propuesta tiene soluciones enteras.

Calculamos el máximo común divisor de 19 y 99 por el algoritmo de Euclides.

	5	4	1	3
99	19	4	3	1
4	3	1	0	

luego,

$$\text{m.c.d.}\,(19, 99) = 1$$

y como 1 divide a 1990, término independiente de la ecuación, esta tiene soluciones enteras.

◊◊ Calculamos una *solución particular*

Expresamos 1 como combinación lineal de 19 y 99 volviendo hacia atrás los cálculos en el algoritmo de Euclides.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 4 - 1 \cdot 3 \\ 3 = 19 - 4 \cdot 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 4 - 1(19 - 4 \cdot 4) \\ & = & -1 \cdot 99 + 5 \cdot 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -1 \cdot 19 + 5 \cdot 4 \\ 4 = 99 - 5 \cdot 19 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & -1 \cdot 19 + 5(99 - 5 \cdot 19) \\ & = & 5 \cdot 99 - 26 \cdot 19 \end{array}$$

luego,

$$1 = (-26) \cdot 19 + 5 \cdot 99$$

por tanto, una

$$y_0 = \frac{1900 \cdot (-26)}{1} = -49400$$

$$z_0 = \frac{1900 \cdot 5}{1} = 9500$$

◊◊ La *solución general* será,

$$y = -49400 + k \cdot \frac{99}{1} = -49400 + 99k$$

$$z = 9500 - k \cdot \frac{19}{1} = 9500 - 19k$$

siendo k cualquier número entero.

◊ Veamos, finalmente, cuantos animales de cada clase compró.

Teniendo en cuenta que adquirió animales de las tres clases, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} y > 0 \Longrightarrow -49400 + 99k > 0 \Longrightarrow 99k > 49400 \Longrightarrow k > 498.9 \\ z > 0 \Longrightarrow 9500 - 19k > 0 \Longrightarrow 19k < 9500 \Longrightarrow k < 500 \end{array}\right\} \Longrightarrow 498.9 < k < 500$$

y como k es un número entero, se sigue que $k = 499$.

Así pues,

$$y = -49400 + 99 \cdot 499 = 1$$

$$z = 9500 - 19 \cdot 499 = 19$$

y al ser

$$x + y + z = 100$$

será

$$x = 100 - 1 - 19 = 80$$

por tanto compró 80 pollos, 1 conejo y 19 terneros.