This is the title: it contains a colon

Author One

Author Two

Abstract

This is the abstract.

It consists of two paragraphs.

Table of Contents

# 卡尔曼滤波

  卡尔曼滤波参考教程：[【从放弃到精通！卡尔曼滤波从理论到实践~】](https://www.bilibili.com/video/BV1Rh41117MT/?p=3&share_source=copy_web&vd_source=6b55cb6788b1952e04c06b095d772810)。从该教程中提取公式并理解。

## 文件说明

1. [KalmanFiltering](./卡尔曼滤波Clang.pdf)：上文中提到的卡尔曼滤波视频教程的pdf文件。
2. ：。

## P3 进阶（基本滤波知识储备）

### 状态空间表达式

#### 状态方程

解释：当前时刻的状态等于上一时刻的状态乘以系数，加上输入值乘以系数，最后加上过程噪声。

  又称为状态转移矩阵，因为的大小决定了状态变化的快慢。又称为控制矩阵，因为的大小决定了输入对系统影响的程度。

  如何理解过程噪声？状态方程的含义是我们对系统的数学建模，构建了一个数学表达式，但是实际的系统往往是复杂的，在随时间变化的时候，会受到各种各样的因素的干扰，可以认为是一个总干扰，这种干扰是随机的，符合正太分布（高斯分布）。

#### 观测方程

是观测量，是状态量，是状态量的系数，又称观测矩阵因为我们假定观测量和状态量之间的关系是线性的，可以由这个线性矩阵表示。是观测噪声。

  可以这样理解：测量值和状态量存在一种线性关系，但是测量总是有误差的，所以要加上观测噪声，观测噪声同样符合正太分布。

  我们可以用一个方框图表示这个系统，但是没有找到一个合适的绘制方框图的绘图软件。

### 参数分析

  噪音服从均值为零的正态分布，可以记为：

他们的均值均为零，方差分别为和，方差为常数，与时间无关。和就是其中的一个取值，只是取得这个结果的概率服从正态分布。

### 超参数

  噪音的方差，具体是多少，我们是不知道的，是需要不断调节的参数，从而使系统达到稳定。和调节PID一样。

### 卡尔曼滤波直观图解

  通过卡尔曼滤波也不会得到真实值，而是每个时刻状态的最优估计值，是修正值，也叫后验估计值。总结来说是，上一时刻的最优估计值，根据物理理论再加上过程噪声（状态方程）得到的先验估计值，然后利用有噪音的观测值（观测方程），进行加权得到最优估计值。这样从先验到后验，也就实现了预测到更新，而最优估计值的不断变化，也就是迭代。因为观测值也是有噪声的，通过得到最优估计值，也就是实现了滤波，去除了部分噪音。

## P4 放弃（通俗公式理解）

### 预测模型

  考虑一个情景，一辆匀加速（加速度为）直线运动的小车行驶在公路上，我们研究小车的状态有位置和速度，根据物理规律构建状态方程：

其中表示当前时刻，表示上一时刻。是位置噪音，是速度噪音，均服从正太分布，噪音是随机的，与时间有关，每个时刻产生随机的噪音。去掉噪音就是高中物理学习的标准的位置和速度公式。写成矩阵形式：

可以看到该[式 (1.6)](#eq:带噪音的匀加速直线运动2)，满足状态方程[式 (1.1)](#eq:状态方程)。

### 预测方程

#### 状态预测

  去除噪音项，就能求出先验估计值：

符号和的含义在前文[卡尔曼滤波直观图解](#卡尔曼滤波直观图解)中已经提到，引入符号 和是为了表示估计和先验。

#### 状态误差预测

  上[式 (1.7)](#eq:先验估计)对比状态方程[式 (1.1)](#eq:状态方程)，可以求出先验误差：

先验误差表示真实值和预测值的差值。其中为后验误差，即：

后验误差表示真实值和估计值的差值。所以上[式 (1.8)](#eq:先验误差)先验误差可以进一步表示为：

  接下来求先验误差的协方差矩阵：

记先验误差的协方差矩阵，则上[#eq:先验误差的协方差矩阵1]可以写作：

其中是上一时刻的后验误差的协方差矩阵。不同状态之间的噪音很可能不是独立的，他们具有一定的相关性。

### 更新模型

  对于这个小车，我们有卫星测量，卫星只能测量小车的位置，测量值和实际值之间存在观测噪音。卫星无法测量速度，所以观测方程为：

写成矩阵的形式：

其中引入了速度观测噪音，但是速度是没有测量的，可以去掉这个测量量。同样的有其他传感器的话可以增加测量量。所以观测方程的维度可以和状态方程的维度不同。可以看到该[式 (1.14)](#eq:位置和速度观测方程的矩阵形式)，满足观测方程[式 (1.2)](#eq:观测方程)。

### 更新方程

#### 修正估计

  先验估计值是理想状态下，没有噪音，是根据物理理论规律推导出来的当前时刻的预测的状态值。如果我们把状态方程也去除噪音值，当作一个理想的公式，并把这个先验估计值带入去除噪音的观测方程中，那么实际的观测值和理论上理想的观测值之间存在一个差值，这个值就叫测量残差，也叫残差。

  我们永远无法得到状态的真实值，只能尽量得到一个最优的估计值，但是这个值无法直接用先验估计值和残差直接表示，因为残差是理想状态计算的观测值和实际的观测值之间的差值，但是这个值并不能直接表示后验估计值和先验估计值之间的差值，但是可以用一个系数使他们相等：

其中又称为卡尔曼滤波系数，上[式 (1.16)](#eq:最优估计偏差和残差的关系)我们习惯写成：

这样，最优估计值等于当前时刻的预测值，加上权重乘以观测误差。

#### 更新卡尔曼增益

  那么这个权重给多少呢？怎么给呢？是随便给吗？有什么依据吗？

  答：当然是有依据的。依据当然是真实值和最优估计值之间的差值最小，即后验误差最小，后验误差见上[式 (1.9)](#eq:后验误差)。将上[式 (1.17)](#eq:最优估计值计算公式)最优估计值带入上[式 (1.9)](#eq:后验误差)中：

继续化简，将观测方程[式 (1.2)](#eq:观测方程)带入上[式 (1.18)](#eq:后验误差变换1)中：

继续化简，将上[式 (1.8)](#eq:先验误差)的先验误差带入上[式 (1.19)](#eq:后验误差变换2)中：

  接下来求后验误差的协方差矩阵：

记后验误差的协方差矩阵，则上[#eq:后验误差的协方差矩阵1]可以写作：

其中之所以能化简，是由于误差的协方差矩阵和均是自相关矩阵，即以对角线为分界线，矩阵是对称的，这是协方差矩阵的性质。我们想要后验误差的协方差矩阵最小，只要让该矩阵对角线上的和最小就行了，即矩阵的迹最小。为什么呢？因为对角线上是每个误差本身的协方差，也就是方差，他们的和最小，协方差矩阵就最小；矩阵的其他位置是两两误差的相关性，与整体误差无关，对整体误差大小没有影响。因此：

其中代表矩阵的迹。把上[式 (1.23)](#eq:后验误差的协方差矩阵的迹)看作是关于的函数：

显然，这个函数是一个开口向上的一元二次函数，有极小值。它是一个凸函数，导数为0的点就是最小值。上[式 (1.23)](#eq:后验误差的协方差矩阵的迹)求导为：

这里是对矩阵的迹的求导，求导公式从函数求导理解，想弄清楚，那么具体矩阵迹的求导需要单独学习。使得上式为零，则可计算出卡尔曼滤波系数：

#### 更新后验误差的协方差

  将计算得到的卡尔曼滤波系数带入上[式 (1.22)](#eq:后验误差的协方差矩阵2)，计算得到后验误差协方差矩阵：

至此，卡尔曼滤波的五个重要的公式已经全部推导完成。分别是：[式 (1.7)](#eq:先验估计)、[式 (1.12)](#eq:先验误差的协方差矩阵2)、[式 (1.26)](#eq:卡尔曼滤波系数)、[式 (1.17)](#eq:最优估计值计算公式)、[式 (1.27)](#eq:后验误差的协方差矩阵3)。综上，我们把这五个重要的公式写在一起：

预测公式：

更新公式：