Curso : Optimización
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Junio 2024

LISTADO DE EJERCICIOS N^o 2

Shickshi Castañeda, Adrian

Pseudo-Algoritmos

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ \text{S.A.} : x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

```
Ingresar:   f(x) ;  x0, error de aproximacion
Salida : Solucion excedida o Numero de intervalos excedido
```

- Método de gradiente conjugado.

```
PASO 0 :  Dado x0, hacer :
                g0 = grad(f)(x0)
                d0 = -g0
DETENER SI ||d0|| < Error entonces "x0 es solucion aproximada"

Caso contrario, CONTINUAR:

PASO 1 : Seleccionar t_k(tasa de aprendizaje) usando
cualquier tipo de estrategia.

                x_{k+1} = x_k+t_k d_{k}
                g_{k+1} == grad(f)(x_{k+1})

SI ||g_{k+1}|| < error, FINALIZAR -> "x_{k+1} solucion optima"

PASO 2 : CASO CONTRARIO :
                beta_k > 0
                d^{k+1} = -g_{k+1}+beta_k d_{k}
                k <-- k+1
    REGRESAR AL PASO 0
```

- Método del punto proximal para funciones diferenciables

```
    PASO 0 : Escoger x0 en R^n :
Una sucesion de puntos positivas : t_k > 0

    PASO 1 : Dado k
Si || grad(f)(x_k) || < error -> FINALIZAAR
```

```
Caso contrario, seguir :

    PASO 2 : Encontrar x^{k+1} en R^{n}
        x^{k+1} = argmin{ f(x)+ t_k / 2 ||x-x^k||^2 , x en R^n }

    PASO 3 : Hacer k <-- k+1 y volver al paso 1
```

- Método de Newton:

```
    PASO 0 : Dado x_k
SI ||grad(f)(x_k)||< error --> FINALIZAR
CASO CONTRARIO:

    PASO 1 : RESOLVER
            jacobiano(f)(x^{k}) d = - gradiente(f)(x^{k})
    Un sistema lineal:  d^{k}

    PASO 2:
            x^{k+1} = x^{k} + t_k d^{k}
Donde t_k > 0; usando cualquier tipo de estrategia
```

Observación : Si la solución está cerca del punto inicial, el método con $t_k = 1$, converge repidamente.

- Método de Cuasi - Newton
Dado un punto inicial x^o y una aproximación de la Hessiana de f, B_o y consideremos $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$
Actualización Rango 1:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s^k)(y_k - B_k s^k)^T}{(y^k - B_k s^k)^T s^k}$$

Actualización Rango 2:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{(B_k s^k)(B_k s^k)^T}{s^k B_k s^k} + \frac{y^k (y^k)^T}{(y^k)^T s^k}$$

```
    PARA k = 0, 1, 2, ...
    SI x^{k} es un punto critico, PARAR
    CASO CONTRARIO RESOLVER:
            B_{k} d = - graf(f)(x_{k})
    Un sistema lineal:  d^{k}

    REALIZAR UNA BUSQUEDA LINEAL PARA DETERMINAR :
            x^{k+1} = x^{k} + t_k d^{k}

    CALCULAR :
            s^{k} = x^{k+1} - x^{k}
            y^{k} = grad(f)(x^{k+1}) - grad(f)(x^{k})
            B_{k+1} = B_{k} + ALGO(S^{K},y^{k})
```

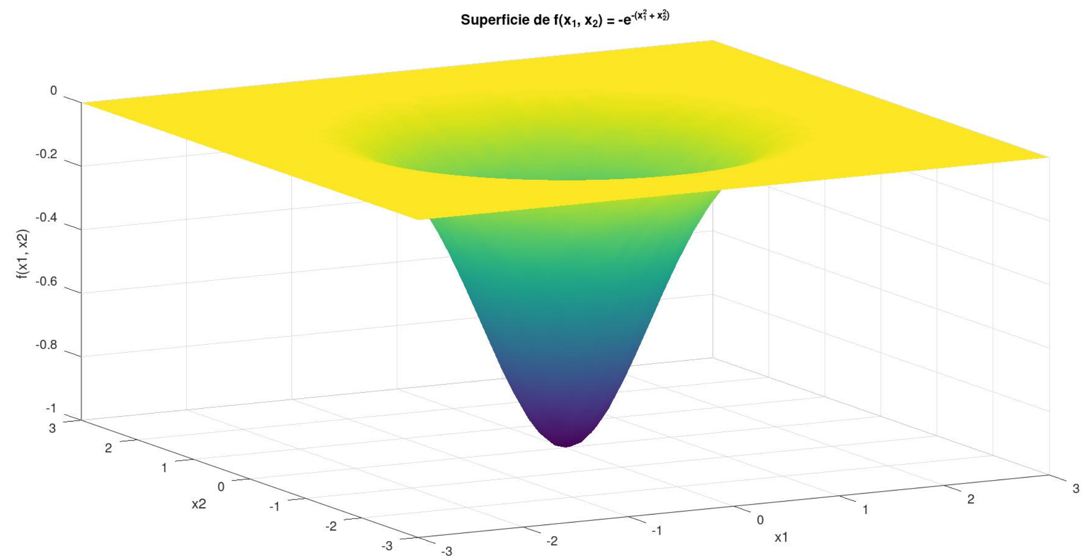
```

    REGRESAR AL INICIO :
```

Desarrollo :

$$\min\{\ f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Gráfico de curvas de nivel.



2. Probar que f es una función cuasi-convexa pero no convexa.

Definición de Cuasi-convexidad

Una función es cuasi-convexa si para todos x, y en su dominio y para todo $\lambda \in [0, 1]$, le cumple que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

Demostración

El conjunto de subnivel para un valor α es:

$$S_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) \leq \alpha\}$$

Sea:

$$f(x_1, x_2) = -e^{x_1^2 - x_2^2}$$

Considerando $\alpha \leq 0$ ($f(x_1, x_2) \leq 0$):

$$f(x_1, x_2) \leq \alpha \implies -e^{x_1^2 - x_2^2} \leq \alpha$$

Lo cual implica:

$$e^{-x_1^2+x_2^2} \geq -\alpha$$
$$-x_1^2 + x_2^2 \leq \ln(-\alpha)$$
$$-x_1^2 - x_2^2 \leq \ln(-\alpha)$$
$$x_2^2 + x_1^2 \leq \ln(-\frac{1}{\alpha})$$

Dado que los conjuntos de subnivel de f son convexos para cualquier $\alpha \leq 0$, la función f es cuasi-convexa.

Contraejemplo de Convexidad

Una función f es convexa si para todos x, y en su dominio y para todo $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Consideremos:

$$x = (1, 0),\ y = (-1, 0)$$
$$f(1, 0) = -e^{1^2-0^2} = -e^1 = -e$$
$$f(-1, 0) = -e^{-1^2-0^2} = -e^1 = -e$$

Para $\lambda = 0.5$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = 0.5(1, 0) + 0.5(-1, 0) = (0, 0)$$

Entonces:

$$f(0, 0) = -e^{0^2-0^2} = -e^0 = -1$$

Comparando:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(0, 0) = -1$$
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = 0.5(-e) + 0.5(-e) = -e$$

Como $-1 > -e$, se concluye que la función no es convexa.

3. Obtener la solución del problema Sea la función objetivo:

$$f(x_1, x_2) = -e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

Paso 1: Calcular las derivadas parciales

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} e^{-x_1^2-x_2^2}.$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{-x_1^2-x_2^2} = e^{-x_1^2-x_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_1^2 - x_2^2) = e^{-x_1^2-x_2^2} \cdot (-2x_1).$$

Por lo tanto,

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = -(-2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

Calculando f_{x_2}:

$$f_{x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} e^{-x_1^2-x_2^2} = -(-2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones $\nabla f = 0$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos las derivadas parciales a cero:

$$2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2} = 0,$$
$$2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2} = 0.$$

Dado que $e^{-x_1^2-x_2^2}$, debemos tener:

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 0.$$

El único punto crítico es $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Paso 3: Verificar la condición de segundo orden

Calculamos la matriz Hessiana de f:

$$H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Las segundas derivadas son:

$$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2e^{-x_1^2-x_2^2} + 2x_1(-2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2e^{-x_1^2-x_2^2}(1-2x_1^2).$$

$$f_{x_2x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2e^{-x_1^2-x_2^2} + 2x_2(-2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2e^{-x_1^2-x_2^2}(1-2x_2^2).$$

$$f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 e^{-x_1^2-x_2^2}) = 2x_1(-2x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}) = -4x_1x_2 e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

En $(x_1, x_2) = (0, 0)$, la matriz Hessiana es:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2e^0(1-0) & -4\cdot 0\cdot 0e^0 \\ -4\cdot 0\cdot 0e^0 & 2e^0(1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz Hessiana es positiva definida (ambos valores propios son positivos), lo que indica que $(0, 0)$ es un punto de mínimo local.

El mínimo de la función se alcanza en el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Evaluando la función en este punto:

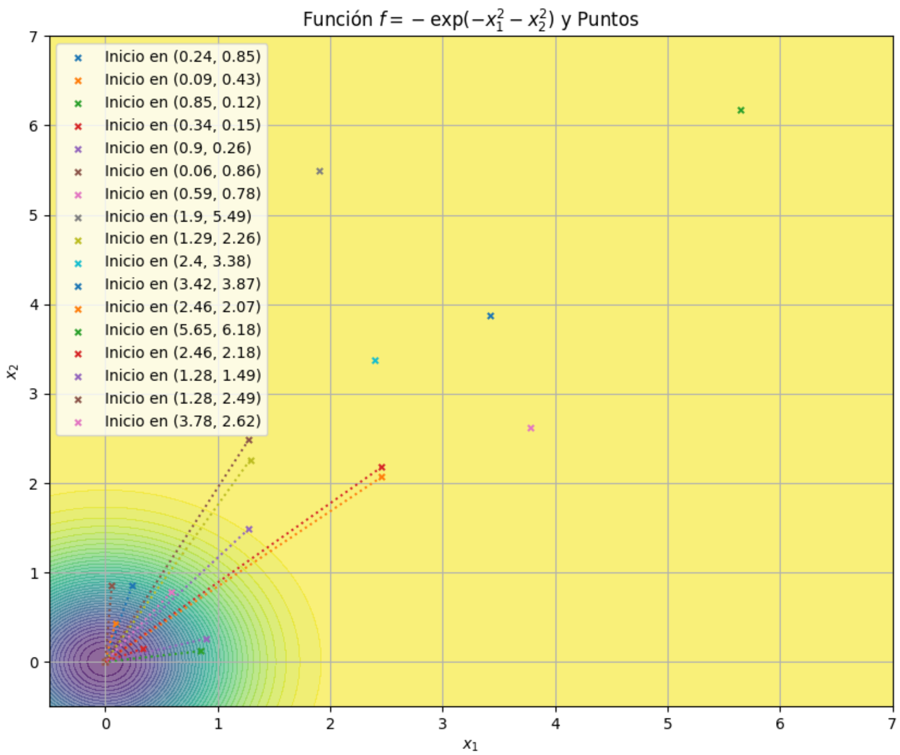
$$f(0,0) = -e^{-(0)^2-(0)^2} = -e^0 = -1.$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la función es -1 y ocurre en $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

4. Resultados de aplicar el método de gradiente.

- Utilizando búsqueda unidimensional.

$\mathbf{Iter}_{total}$	$\mathbf{x}_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
2	(0.24 , 0.85)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2568
2	(0.09 , 0.43)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1800
2	(0.85 , 0.12)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1790
2	(0.34 , 0.15)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2443
2	(0.9 , 0.26)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2903
2	(0.06 , 0.86)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2665
2	(0.59 , 0.78)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1710
1	(1.9 , 5.49)	(1.9000,5.4900)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(1.29 , 2.26)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1530
1	(2.4 , 3.38)	(2.4000,3.3800)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	(3.42 , 3.87)	(3.4200,3.8700)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(2.46 , 2.07)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1562
1	(5.65 , 6.18)	(5.6500,6.1800)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(2.46 , 2.18)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.1553
2	(1.28 , 1.49)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2673
2	(1.28 , 2.49)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.2898
1	(3.78 , 2.62)	(3.7800,2.6200)	0.00000001	-0.00000000	0.0000

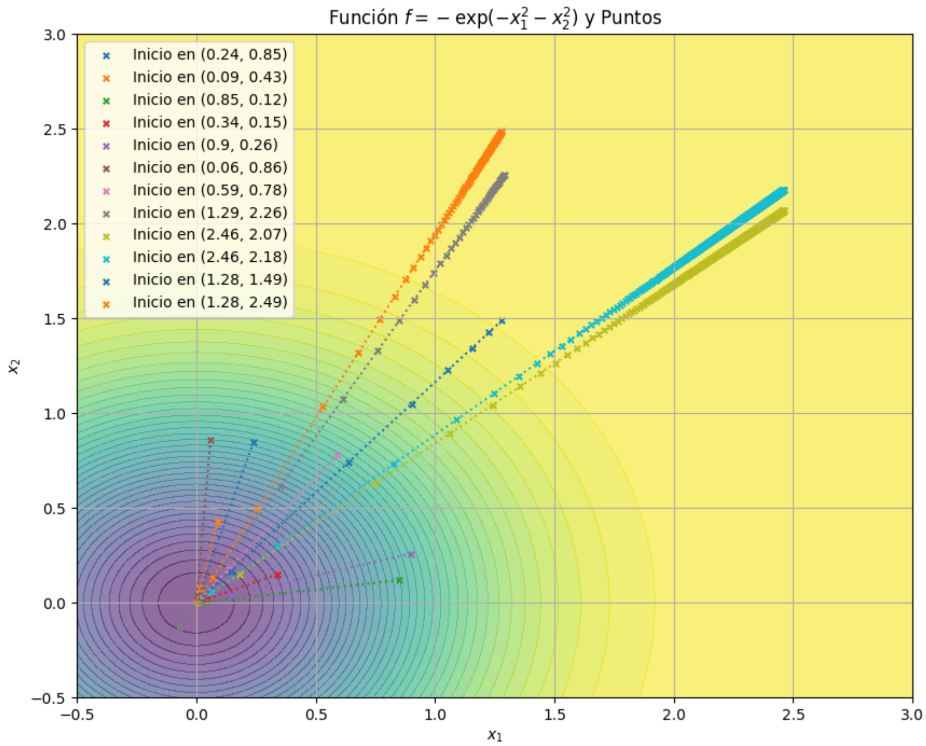


- Utilizando busqueda de Armijo.

$\mathbf{It}_{total}$	$\mathbf{Arm}_{total}$	$x_{inicial}$	$\mathbf{x^k}$	$\|\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) \|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
3	5	(0.24 , 0.85)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0530
3	6	(0.09 , 0.43)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0626
3	5	(0.85 , 0.12)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0360
3	6	(0.34 , 0.15)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0450
3	5	(0.9 , 0.26)	(0.0000,0.0000)	0.00000012	-1.00000000	0.0343
3	5	(0.06 , 0.86)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0320
5	10	(0.59 , 0.78)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0382
0	0	(1.9 , 5.49)	(1.9000,5.4900)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
45	47	(1.29 , 2.26)	(-0.0000,-0.0000)	0.00000007	-1.00000000	0.3310
0	0	(2.4 , 3.38)	(2.4000,3.3800)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
0	0	(3.42 , 3.87)	(3.4200,3.8700)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
847	850	(2.46 , 2.07)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	5.3212
0	0	(5.65 , 6.18)	(5.6500,6.1800)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1281	1284	(2.46 , 2.18)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	7.3310
9	12	(1.28 , 1.49)	(0.0000,0.0000)	0.00000000	-1.00000000	0.0969
102	105	(1.28 , 2.49)	(0.0000,0.0000)	0.00000007	-1.00000000	0.5136
0	0	(3.78 , 2.62)	(3.7800,2.6200)	0.00000001	-0.00000000	0.0000

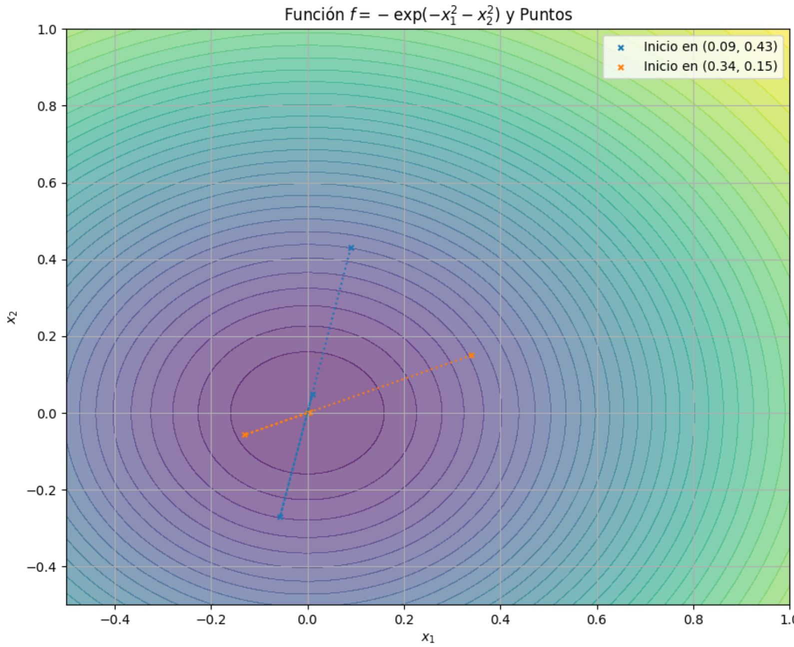
Para el gráfico se encuentra lo siguiente:

- La trayectoria 8 está vacía.
- La trayectoria 10 está vacía.
- La trayectoria 11 está vacía.
- La trayectoria 13 está vacía.
- La trayectoria 17 está vacía.



- Resultados de aplicar el método de Newton con $x_0 = [0.2, 0.2]$
  - Newton puro, con : $\lambda_k = 1$

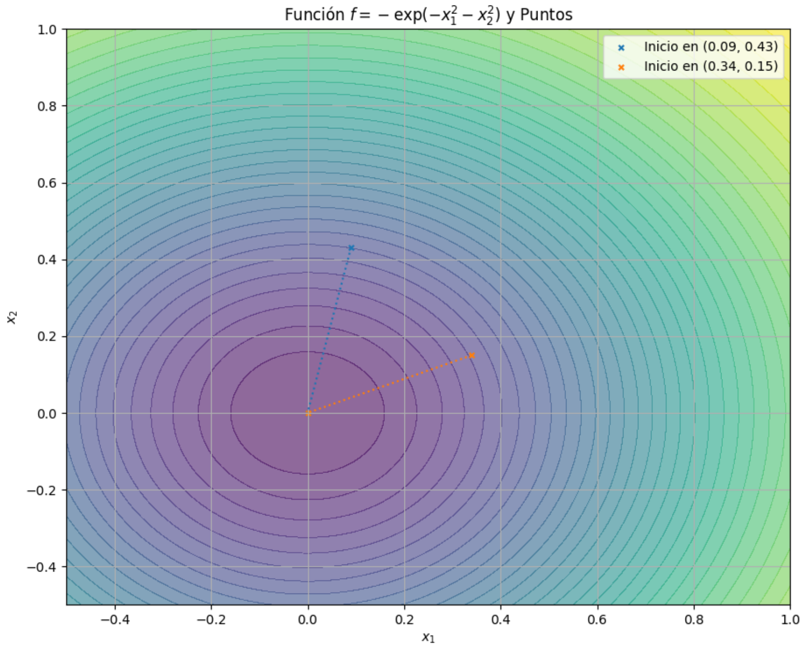
Iter	$x_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
5	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.0577
4	(0.34 , 0.15)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000084	-1.00000000	0.0449



- ∗ Hessiana definida no positiva : (0.24 ,0.85)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (0.85 ,0.12)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (0.9 ,0.26)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (0.06 ,0.86)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (0.59 ,0.78)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (1.9 ,5.49)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (1.29 ,2.26)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (2.4 ,3.38)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (3.42 ,3.87)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (2.46 ,2.07)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (5.65 ,6.18)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (2.46 ,2.18)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (1.28 ,1.49)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (1.28 ,2.49)
- ∗ Hessiana definida no positiva : (3.78 ,2.62)

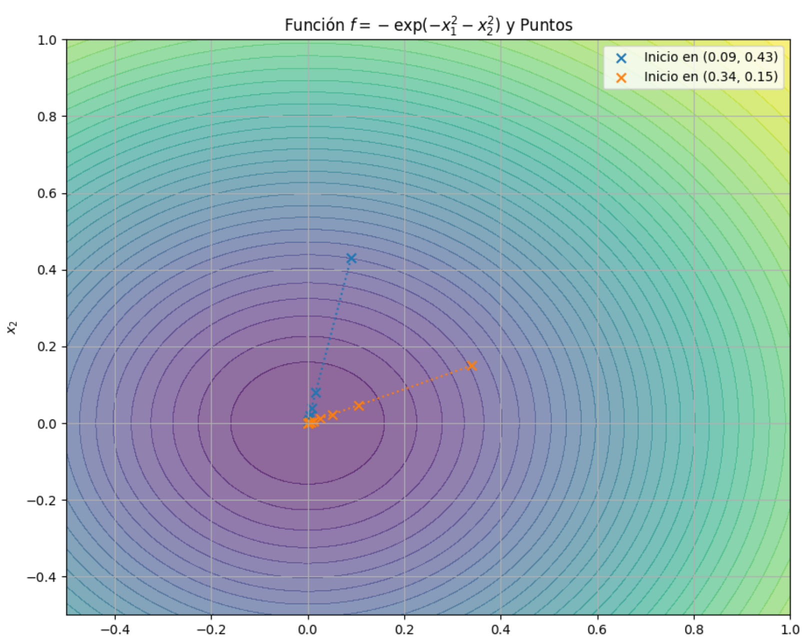
– Utilizando busqueda exacta.

Iter	$x_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
2	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2613
2	(0.34 , 0.15)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2652



– Utilizando busqueda de Armijo

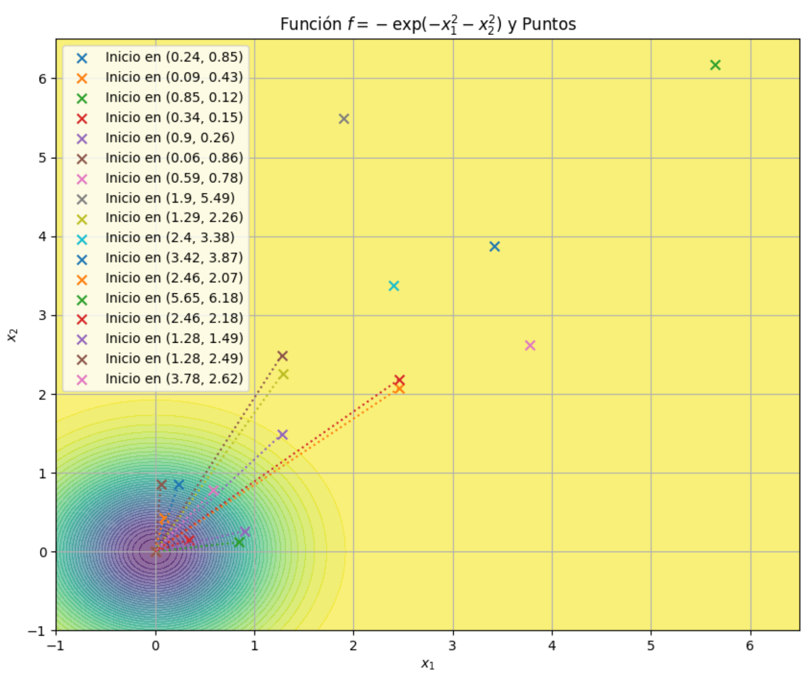
$\mathbf{It}_{total}$	$\mathbf{Arm}_{total}$	$\mathbf{x}_{incial}$	$\mathbf{x^k}$	$\|\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) \|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
14	25	(0.09 , 0.43)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.5776
15	27	(0.34 , 0.15)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.5651



- Resultados de aplicar el método Cuasi-Newton con actualización de rango 1 y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

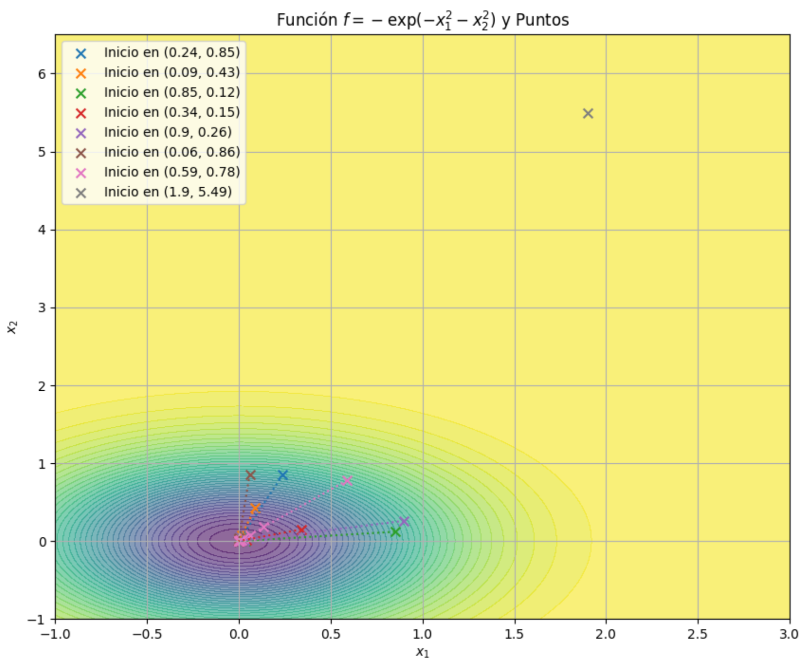
– Utilizando busqueda exacta

Iter	$\mathbf{x}_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	tiempo
2	(0.24 , 0.85)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1553
2	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1578
2	(0.85 , 0.12)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1487
2	(0.34 , 0.15)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2452
2	(0.9 , 0.26)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1658
2	(0.06 , 0.86)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2009
2	(0.59 , 0.78)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1500
1	(1.9 , 5.49)	(1.90000,5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(1.29 , 2.26)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1339
1	(2.4 , 3.38)	(2.40000,3.38000)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	(3.42 , 3.87)	(3.42000,3.87000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(2.46 , 2.07)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1129
1	(5.65 , 6.18)	(5.65000,6.18000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
2	(2.46 , 2.18)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1028
2	(1.28 , 1.49)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2391
2	(1.28 , 2.49)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2502
1	(3.78 , 2.62)	(3.78000,2.62000)	0.00000001	-0.00000000	0.0010



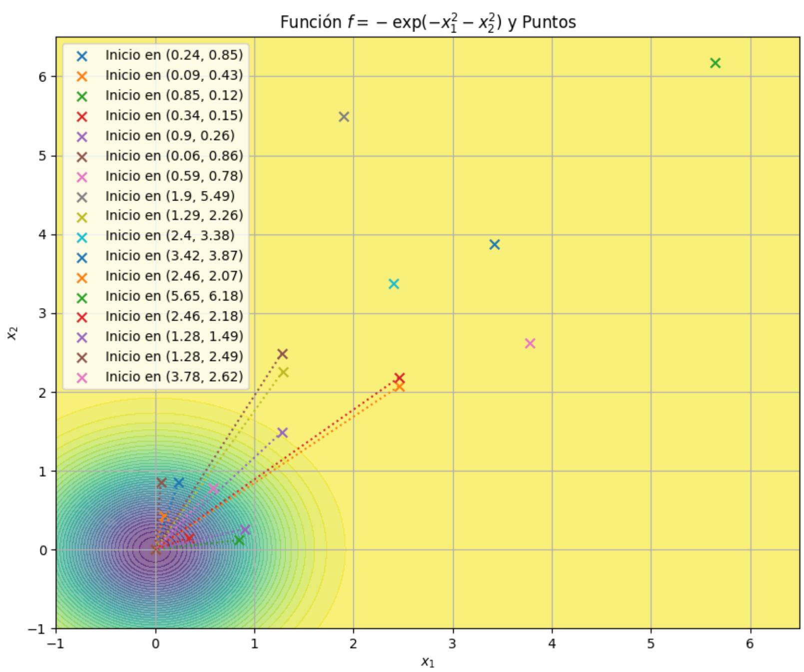
– Utilizando busqueda de Armijo

$\mathbf{Iter}_{total}$	$\mathbf{Arm}_{total}$	$\mathbf{x}_{inicial}$	$\mathbf{x^k}$	$\|\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) \|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
16	29	(0.24 , 0.85)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1175
13	23	(0.09 , 0.43)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1534
12	21	(0.85 , 0.12)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1336
13	23	(0.34 , 0.15)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1534
16	29	(0.9 , 0.26)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2129
15	27	(0.06 , 0.86)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2155
16	30	(0.59 , 0.78)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2456
1	0	(1.9 , 5.49)	(1.90000,5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000



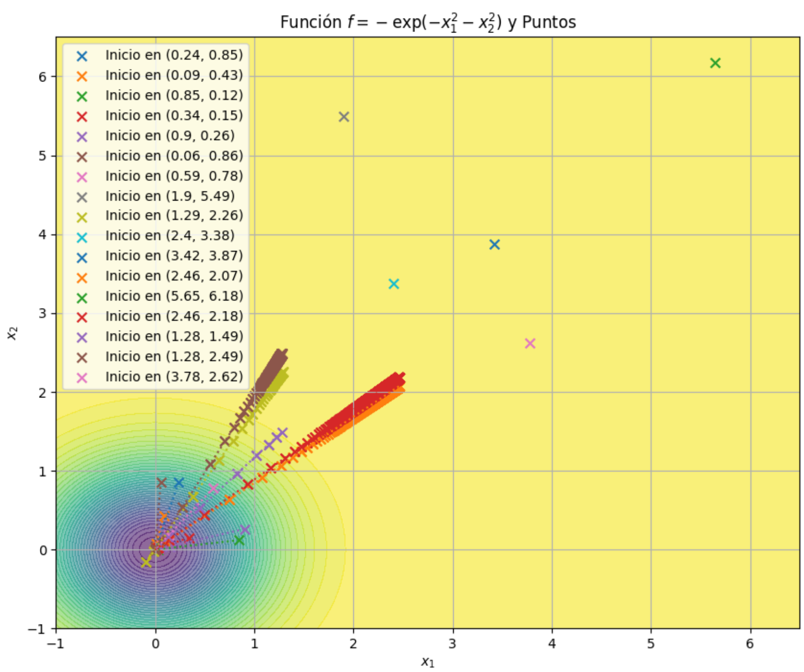
- Resultados de aplicar el método de gradiente conjugado, considerando: $\beta_k = 0.2$
  - Utilizando busqueda exacta

Iter	$\mathbf{x}_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
1	(0.24 , 0.85)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2270
1	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1866
1	(0.85 , 0.12)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2022
1	(0.34 , 0.15)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2721
1	(0.9 , 0.26)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2483
1	(0.06 , 0.86)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.2233
1	(0.59 , 0.78)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1480
1	(1.9 , 5.49)	(1.90000,5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1	(1.29 , 2.26)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1238
1	(2.4 , 3.38)	(2.40000,3.38000)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	(3.42 , 3.87)	(3.42000,3.87000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1	(2.46 , 2.07)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1105
1	(5.65 , 6.18)	(5.65000,6.18000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1	(2.46 , 2.18)	(0.00000,0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1035
1	(1.28 , 1.49)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1800
1	(1.28 , 2.49)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000000	-1.00000000	0.1685
1	(3.78 , 2.62)	(3.78000,2.62000)	0.00000001	-0.00000000	0.0000



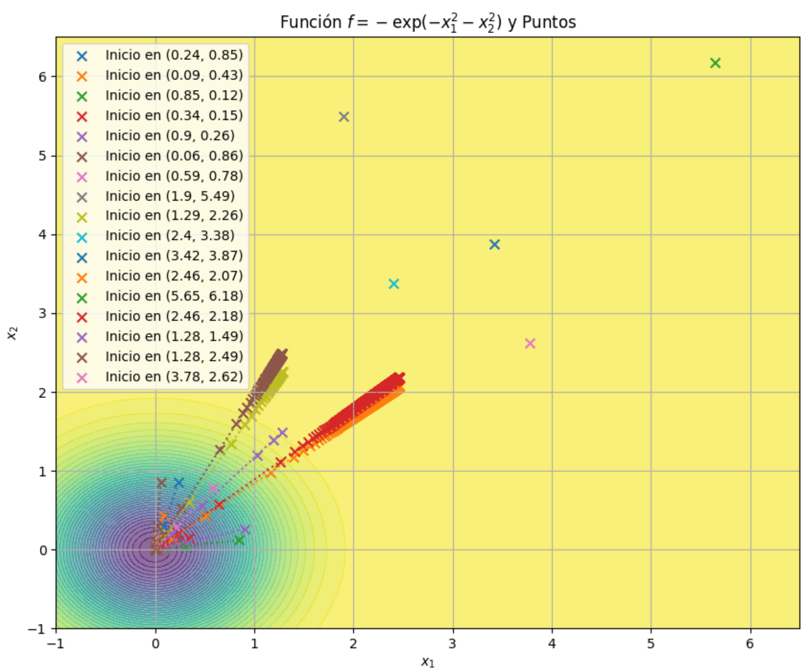
– Utilizando busqueda de Armijo

$\mathbf{It}_{total}$	$\mathbf{Arm}_{total}$	$\mathbf{x}_{inicial}$	$\mathbf{x^k}$	$\|\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) \|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
7	37	(0.24 , 0.85)	(0.00000,0.00000)	0.00000024	-1.00000000	0.1608
7	40	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000076	-1.00000000	0.1892
10	39	(0.85 , 0.12)	(0.00000,0.00000)	0.00000024	-1.00000000	0.1975
9	40	(0.34 , 0.15)	(0.00000,0.00000)	0.00000073	-1.00000000	0.2099
8	40	(0.9 , 0.26)	(0.00000,0.00000)	0.00000026	-1.00000000	0.1669
10	40	(0.06 , 0.86)	(0.00000,0.00000)	0.00000008	-1.00000000	0.1989
10	42	(0.59 , 0.78)	(0.00000,0.00000)	0.00000042	-1.00000000	0.1721
1	0	(1.9 , 5.49)	(1.90000,5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
43	74	(1.29 , 2.26)	(-0.00000,-0.00000)	0.00000024	-1.00000000	0.4141
1	0	(2.4 , 3.38)	(2.40000,3.38000)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	0	(3.42 , 3.87)	(3.42000,3.87000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
685	711	(2.46 , 2.07)	(0.00000,0.00000)	0.00000058	-1.00000000	5.5139
1	0	(5.65 , 6.18)	(5.65000,6.18000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1033	1064	(2.46 , 2.18)	(0.00000,0.00000)	0.00000007	-1.00000000	7.3213
15	61	(1.28 , 1.49)	(0.00000,0.00000)	0.00000080	-1.00000000	0.2207
89	127	(1.28 , 2.49)	(0.00000,0.00000)	0.00000066	-1.00000000	0.7162
1	0	(3.78 , 2.62)	(3.78000,2.62000)	0.00000001	-0.00000000	0.0000



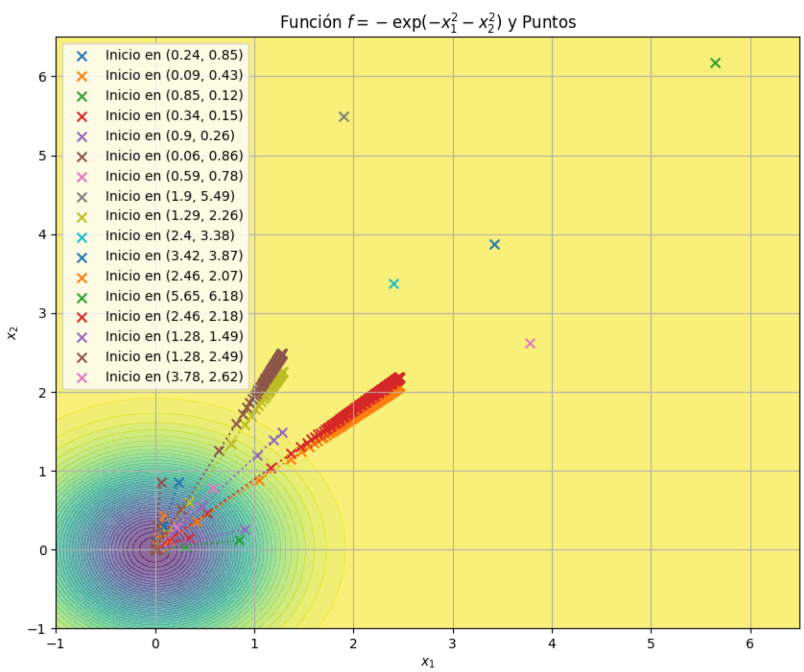
- Resultados de aplicar el método del punto proximal.
  - Utilizando $\lambda_k = \frac{1}{15}$

Iter	$\mathbf{x}_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
16	(0.2400 , 0.8500)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	0.4619
16	(0.0900 , 0.4300)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	0.4217
16	(0.8500 , 0.1200)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	0.3320
16	(0.3400 , 0.1500)	(0.00000, 0.00000)	0.00000092	-1.00000000	0.3299
17	(0.9000 , 0.2600)	(0.00000, 0.00000)	0.00000089	-1.00000000	0.3590
16	(0.0600 , 0.8600)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	0.3548
17	(0.5900 , 0.7800)	(0.00000, 0.00000)	0.00000087	-1.00000000	0.3452
1	(1.9000 , 5.4900)	(1.90000, 5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
54	(1.2900 , 2.2600)	(0.00000, 0.00000)	0.00000094	-1.00000000	1.8309
1	(2.4000 , 3.3800)	(2.40000, 3.38000)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	(3.4200 , 3.8700)	(3.42000, 3.87000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
854	(2.4600 , 2.0700)	(0.00000, 0.00000)	0.00000090	-1.00000000	37.8122
1	(5.6500 , 6.1800)	(5.65000, 6.18000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1289	(2.4600 , 2.1800)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	53.7023
19	(1.2800 , 1.4900)	(0.00000, 0.00000)	0.00000096	-1.00000000	0.5334
109	(1.2800 , 2.4900)	(0.00000, 0.00000)	0.00000094	-1.00000000	4.2652
1	(3.7800 , 2.6200)	(3.78000, 2.62000)	0.00000001	-0.00000000	0.0000



– Utilizando el método de descenso de gradiente con busqueda de Armijo

Iter$_{total}$	**Des**$_{total}$	**Arm**$_{total}$	$\mathbf{x}_{inicial}$	x^k	$\|\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x^k})\|\|$	$\mathbf{f}(\mathbf{x^k})$	**tiempo**
15	88	260	(0.24 , 0.85)	(0.00000,0.00000)	0.00000079	-1.00000000	4.7337
15	77	228	(0.09 , 0.43)	(0.00000,0.00000)	0.00000055	-1.00000000	4.7221
15	88	260	(0.85 , 0.12)	(0.00000,0.00000)	0.00000076	-1.00000000	5.8824
14	75	222	(0.34 , 0.15)	(0.00000,0.00000)	0.00000093	-1.00000000	4.0884
15	82	241	(0.9 , 0.26)	(0.00000,0.00000)	0.00000084	-1.00000000	5.1413
15	88	260	(0.06 , 0.86)	(0.00000,0.00000)	0.00000077	-1.00000000	4.2686
15	90	265	(0.59 , 0.78)	(0.00000,0.00000)	0.00000089	-1.00000000	4.9996
1	1	0	(1.9 , 5.49)	(1.90000,5.49000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
52	283	453	(1.29 , 2.26)	(0.00000,0.00000)	0.00000080	-1.00000000	18.3300
1	1	0	(2.4 , 3.38)	(2.40000,3.38000)	0.00000029	-0.00000003	0.0000
1	1	0	(3.42 , 3.87)	(3.42000,3.87000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
851	1537	1702	(2.46 , 2.07)	(0.00000,0.00000)	0.00000065	-1.00000000	180.5773
1	1	0	(5.65 , 6.18)	(5.65000,6.18000)	0.00000000	-0.00000000	0.0000
1285	1942	2111	(2.46 , 2.18)	(0.00000,0.00000)	0.00000081	-1.00000000	251.5819
18	129	287	(1.28 , 1.49)	(0.00000,0.00000)	0.00000084	-1.00000000	5.9728
108	436	598	(1.28 , 2.49)	(0.00000,0.00000)	0.00000068	-1.00000000	29.0050
1	1	0	(3.78 , 2.62)	(3.78000,2.62000)	0.00000001	-0.00000000	0.0000



* **Observaciones del algoritmo :**
En este algoritmo el arreglo de hacer un cambio de la forma

$$x_{k+1} = \quad argmin \quad \{f(X) + (1/2) * ||X - x^k||^2\}$$

hace posible probar con un punto más lejano a $(0,0)$, para poder encontrar el mínimo $(0,0)$

- Conclusiones
  - Los métodos y puntos probados con búsqueda de Armijo necesitan más tiempo de ejecución
  - Se obtiene menores cantidad de iteracioens con busqueda exacta, pero a la ves puede ser de alto costo computacional el resolver la ecuación que plantee este algoritmo:

    $$\lambda_k \in argmin\{f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))\}$$

    así como tambien el hecho de no encontrar raices reales como resultado de resolver dicha ecuación, lo que haría que se detenga el algoritmo.