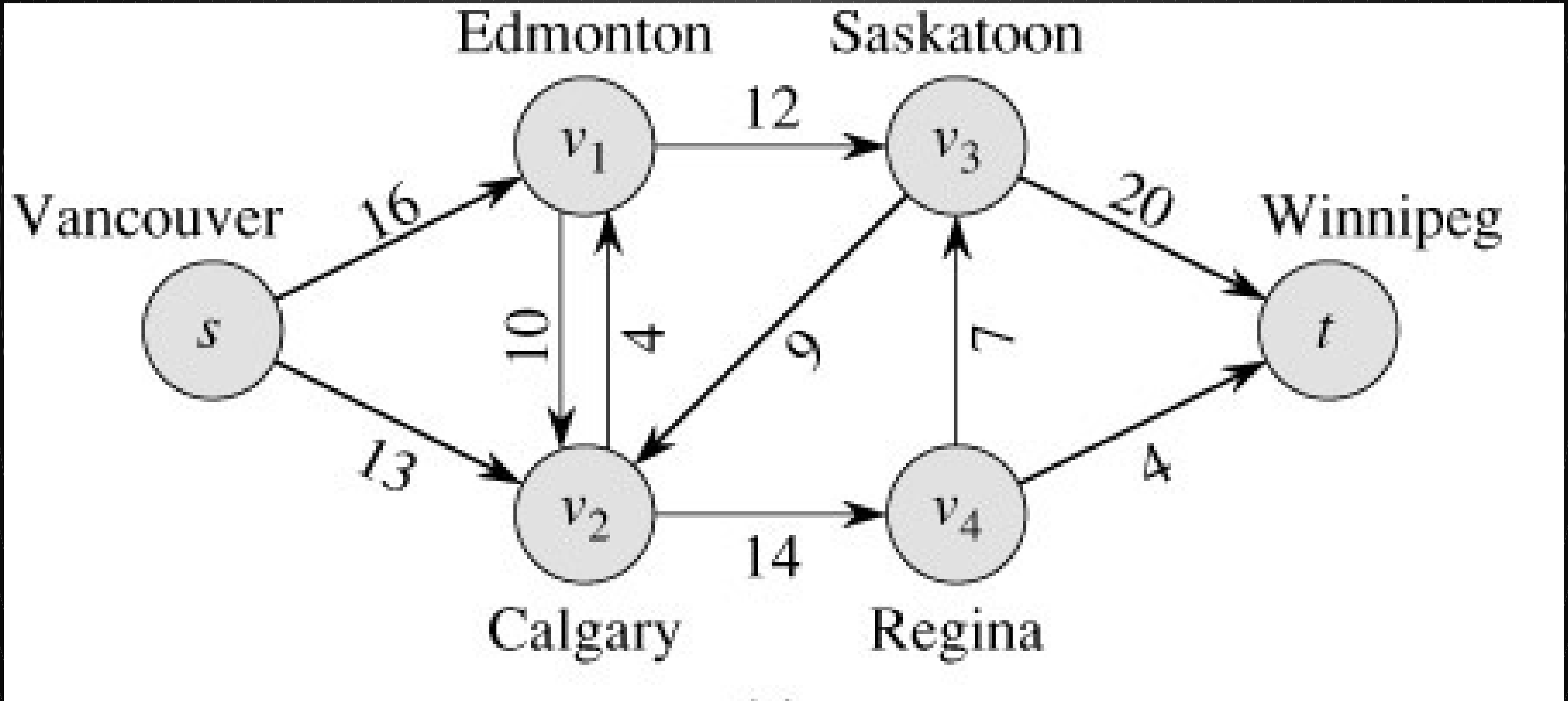
Algoritmo de Flujo y problemas relacionados

11th Caribbean Camp

Universidad de las Ciencias Informáticas

Pablo Zimmermann ~~(Nicolás Álvarez)~~
Universidad Nacional de Rosario, Argentina

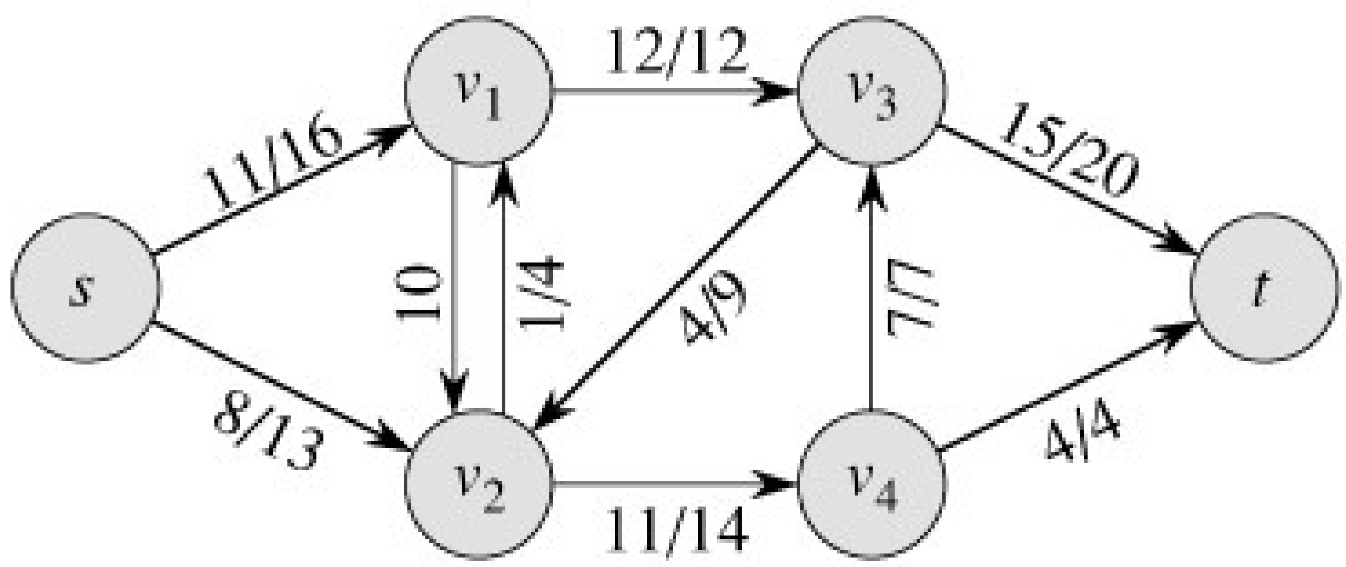
Idea



Edmonton
Saskatoon
Vancouver
Winnipeg
Calgary
Regina
16
12
20
10
4
9
7
13
14
4

(a)

Idea



(b)

Idea

- Un *source* s
- Un *sink* t
- Nodos intermedios
- Arcos dirigidos con una capacidad dada
- Objetivo: Enviar el máximo flujo posible de s a t, cumpliendo las restricciones de capacidad.

Definición: Red de Flujo

- Una red de flujo es un grafo dirigido G = <N,A> donde cada arco (u,v) ∈ A tiene asociado una capacidad c(u,v) >= 0.
- Se distinguen dos nodos s y t llamados fuente y destino, tal que ningún arco llega a la fuente o sale del destino.
- Además, por conveniencia, si (u,v)∉A entonces se supone c(u,v) = 0
- También que para todo u, existe un camino

  S ---> u ---> T

Definición: Flujo

Un flujo en G es una función f : N x N -> R que satisface:

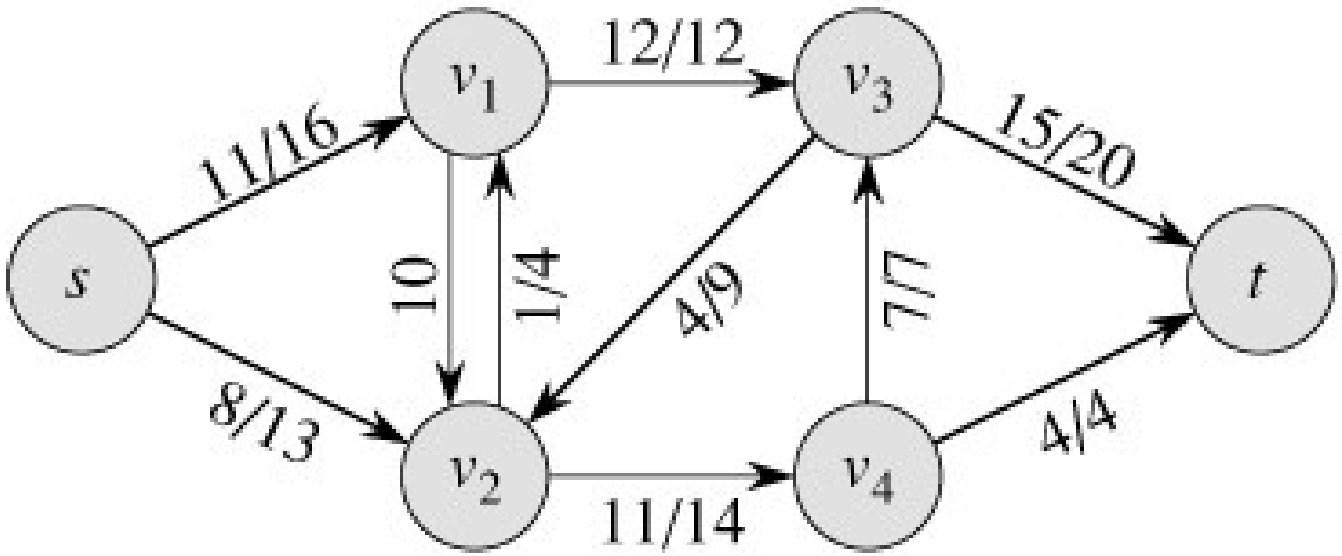
- *restricción de capacidad*:
  - f(u,v) <= c(u,v) para todo u,v ∈ N.
- simetría oblicua:
  - f(u,v) = -f(v,u) para todo u,v ∈ N
- conservación de flujo:
  - Para todo u ∈ N - {s,t}

    $\Sigma_{v \in N}\ f(u,v) = 0$

Definición: Problema Flujo Máximo

- El valor de un flujo $| f |$ se define como $| f | = \Sigma_{v \in N} f(s,v) = \Sigma_{v \in N} f(v,t)$
- Dada una red de flujo G, el Problema de Flujo Máximo consiste en encontrar el flujo de máximo valor que admite G

Repaso



(b)

Método de Ford-Fulkerson

Es un método general, no un algoritmo específico.

Se basa en 3 conceptos claves:

- redes residuales
- caminos de aumento
- cortes

Método de Ford-Fulkerson

El método comienza con una red de flujo vacía.

En cada iteración se busca un camino de aumento en la red residual para incrementar el valor del flujo.

Se puede demostrar mediante el teorema de max-flow min-cut que, cuando termina, el flujo obtenido es máximo

Redes residuales

Intuitivamente, la red residual es una nueva red de flujo que representa cómo podemos cambiar el flujo.

Formalmente, la red residual de $G = \langle N,A \rangle$ es $G_f = \langle N,A_f \rangle$, donde las capacidades de los arcos están dadas por:

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

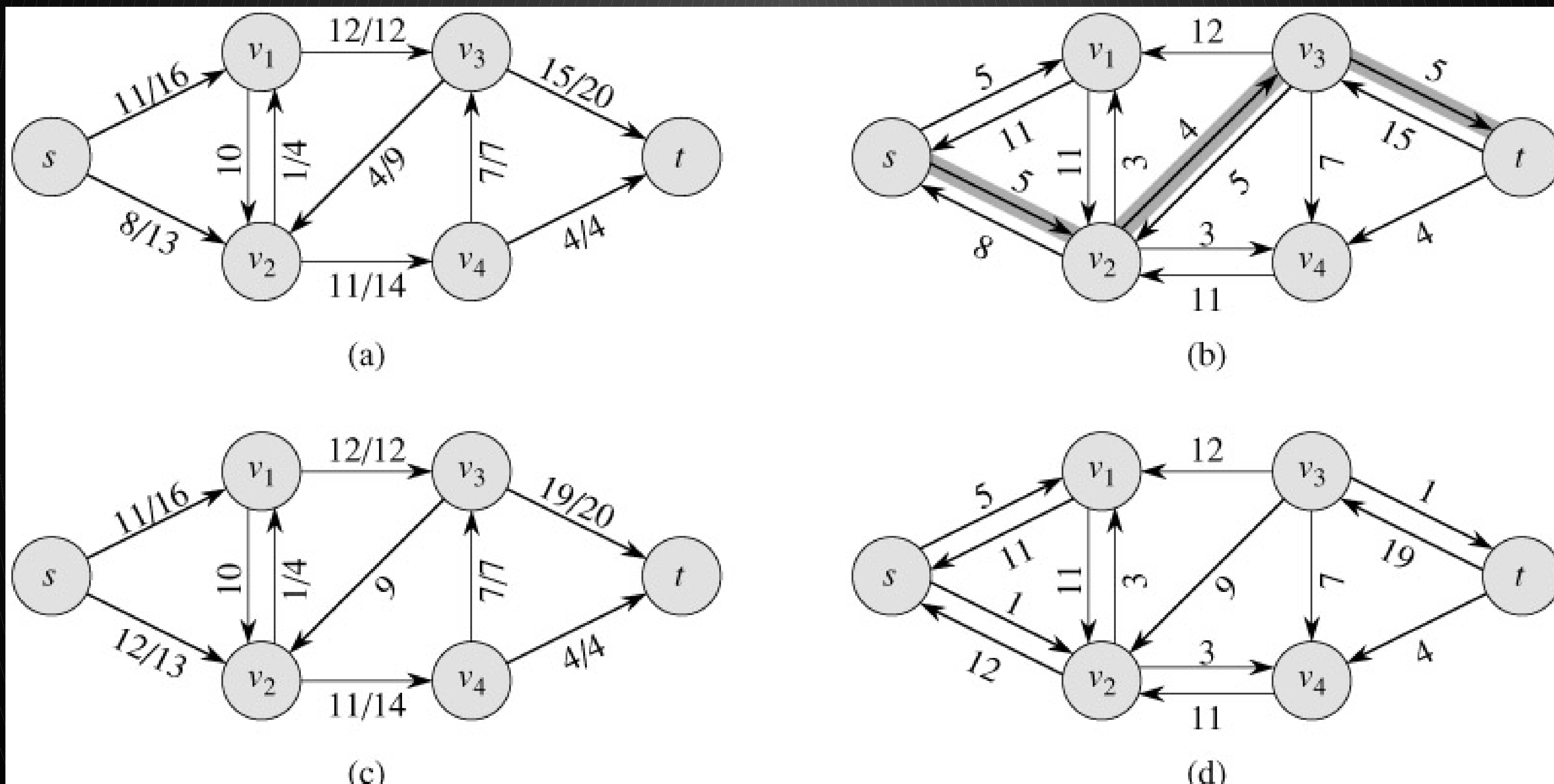
Caminos de aumento

Como vimos, dada una red de flujo G = <N,A> y un flujo f, podemos obtener una red residual G_f

Un camino de aumento es, sencillamente, un camino simple de s a t en la red residual.

Si existe un camino de aumento en la red residual, el flujo puede aumentarse a lo largo de dicho camino con un valor igual a la menor capacidad de los arcos del camino.

Aumento de flujo



Cortes

Dada una red de flujo G = <N,A>. Un corte es una partición de N en S y T = N-S tal que $s \in S$ y $t \in T$.

Dado un corte (S,T).

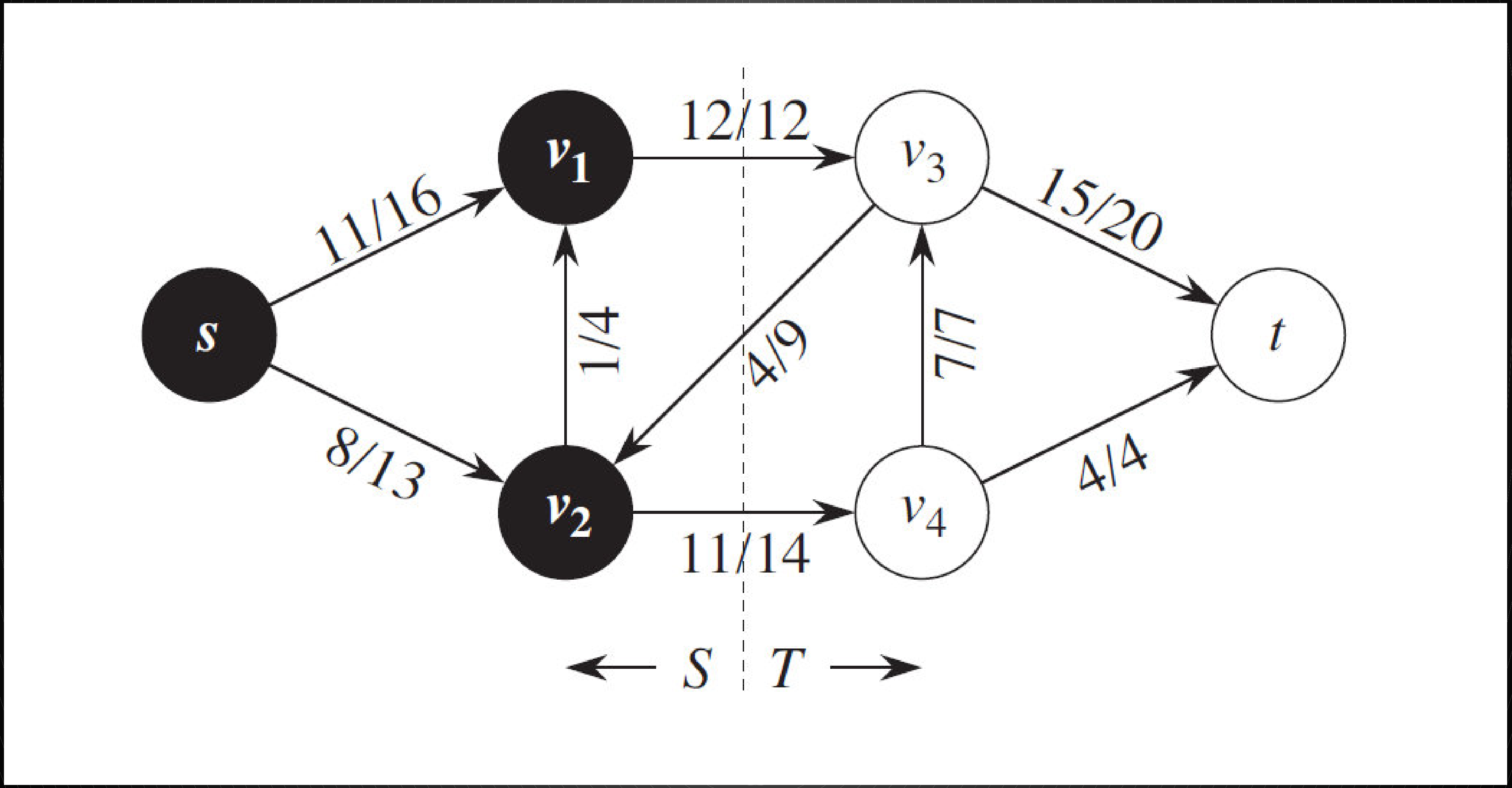
El flujo neto a través del corte es:

$$f(S,T) = \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} f(u,v) - \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} f(v,u)$$

Y la capacidad del corte es:

$$c(S,T) = \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} c(u,v)$$

Cortes



Teorema max-flow min-cut

Los 3 siguientes condiciones son equivalentes:

1. *f* es un flujo máximo
2. La red residual G_f no contiene caminos de aumentos
3. $|f| = c(S,T)$ para algún corte (S,T) de G

Este teorema prueba que el método de Ford-Fulkerson es correcto.

Max-flow min-cut: Demostración

1 => 2

Si el flujo es máximo entonces no pueden existir caminos de aumento. De otro modo, sería posible aumentar el valor del flujo

2 => 3

Si no existen caminos de aumento en la red residual, s y t están desconectados. Por lo tanto si S es el conjunto de los nodos alcanzables desde s y T = N - S. El corte (S,T) está saturado

Max-flow min-cut: Demostración

3 => 1

Se puede observar que todo flujo tiene un valor menor o igual que la capacidad de cualquier corte. Es decir, todo corte implica una cota superior al valor de un flujo válido.

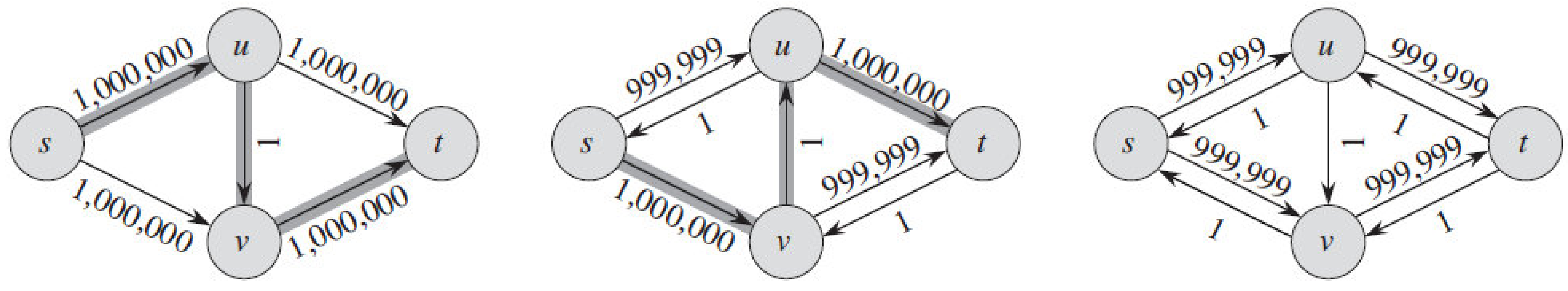
Si el flujo satura algún corte (S,T), esto quiere decir que el flujo tiene el máximo valor posible. Además, el corte (S,T) es el corte de capacidad mínima (o *min-cut*) de la red de flujo.

Ford-Fulkerson: Pseudo-código

```
FORD-FULKERSON(G, s, t):
   para cada arco (u,v) ∈ G.E:
      (u,v).f = 0

   mientras exista camino de aumento p en G_f:
      c_f(p) = min {c_f(u,v) : (u,v) ∈ P}
      para cada arco (u,v) ∈ p:
         (u,v).f += c_f(p)
         (v,u).f -= c_f(p)
```

Algoritmo de Edmonds-Karp



(a) (b) (c)

Algoritmo de Edmonds-Karp

Como se vió en la figura anterior, si no elegimos los caminos de aumento de manera inteligente el tiempo de ejecución puede no estar acotado polinomialmente sobre el tamaño de la entrada.

Afortunadamente, si buscamos el camino de aumento más corto con un BFS, se puede demostrar una cota polinomial: $O(m^2n)$

Esta implementación de Ford-Fulkerson recibe el nombre de algoritmo de Edmonds-Karp

Problemas

Kill the werewolf - Regional Latam 2016
https://goo.gl/thMXxw

N <= 50 personas juegan al Mafia modificado.

En la primera ronda todos eligen dos candidatos. Luego, el hombre lobo se revela.

En la segunda ronda, todos votan por alguno de los candidatos elegido y el hombre lobo vota último. El hombre lobo sólo pierde si tiene MÁS votos que todos los demás. Puede asegurarse ganar?

Problemas

Optimal Marks - SPOJ

goo.gl/X4fX5Q

Dado un grafo no dirigido donde algunos nodos tienen asignado un número de 31 bits. La tarea es asignar números al resto de los nodos de manera que la suma de los xor de nodos adyacentes sea mínima. O sea, para todo $(u,v) \in G$, minimizar $\sum_{(u,v)}$ marca(u) ^ marca(v)

Bipartite Matching

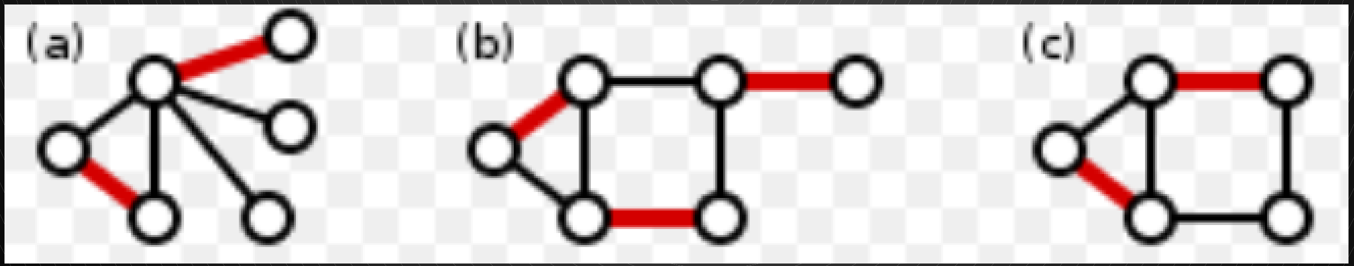
Existen problemas combinatorios que, en principio, parecen no guardar relación con el problema de Flujo Máximo pero que pueden ser reducidos a éste.

Uno de los ejemplos más conocidos es el problema del matching bipartito.

Bipartite Matching

Dado un grafo G = <N,A>, un *matching* es un subconjunto $M \subseteq A$ tal que para todo vértice $v \in M$ existe a lo sumo un arco de M incidente a v.

Se puede pensar como un "apareamiento" de los nodos, en los que cada nodo se aparea con a lo sumo un nodo, y la relación es simétrica.



Bipartite Matching

El problema de *Maximum Matching* consiste en encontrar un *matching* válido de máxima cardinalidad en un grafo.

Este problema resulta más sencillo para una clase restringida de grafos llamados grafos bipartitos.

Bipartite Matching

El problema de *Maximum Matching* consiste en encontrar un *matching* válido de máxima cardinalidad en un grafo.

Este problema resulta más sencillo para una clase restringida de grafos llamados grafos bipartitos.

Grafo bipartito

Un grafo bipartito es un grafo G = <N,A> donde el conjunto de nodos N puede ser particionado en 2 conjuntos N = L ∪ R donde L y R son disjuntos y los arcos unen nodos entre L y R.

El problema de hallar un matching máximo en un grafo bipartito se conoce como *maximum bipartite matching*.

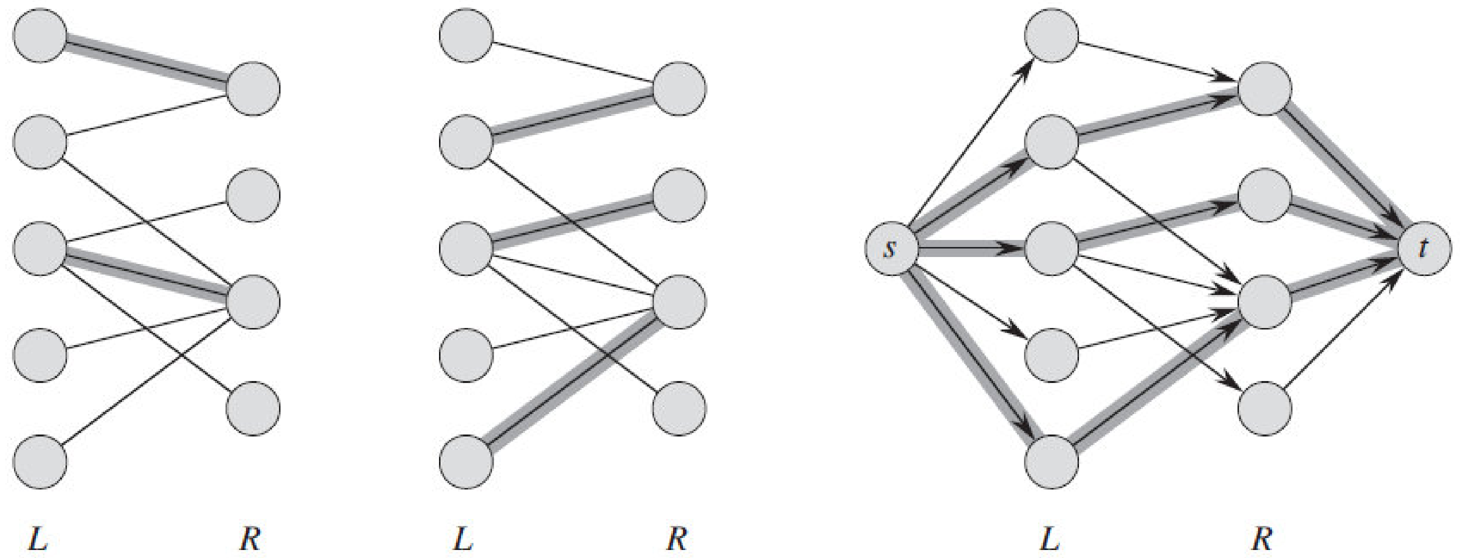
Maximum bipartite matching

Este problema puede reducirse a un problema de flujo máximo.

Para ello, construimos una red de flujo donde se agregan 2 nodos: un source s y un sink t.

Se agrega un arco de capacidad 1 entre el *source* y cada nodo de L y se agrega un arco de capacidad 1 entre cada nodo de R y el *sink*.

Maximum bipartite matching



(a) (b) (c)

Problemas

Attacking Rooks - Regional Latam 2013
http://goo.gl/oph4Q8

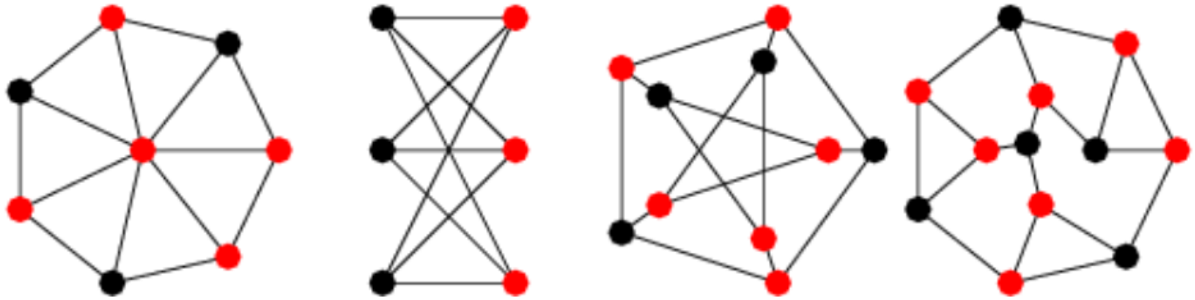
Dado un tablero de ajedrez de m x n (1 <= m,n <= 100) donde algunas casillas fueron bloqueadas. Determinar cuál es la máxima cantidad de torres que se pueden colocar de manera que no existan 2 que se amenacen.

Teorema de König

El teorema de König dice que en un grafo bipartito, la cardinalidad de un vertex cover es igual a la de un matching máximo.

Es fácil ver que |VC| >= |M|

La demostración del teorema da una construcción de un vertex cover a partir de un matching donde se cumple la igualdad.



Problema: Kamehameha

Kamehameha - Codechef OCT13

https://www.codechef.com/problems/KMHAMH

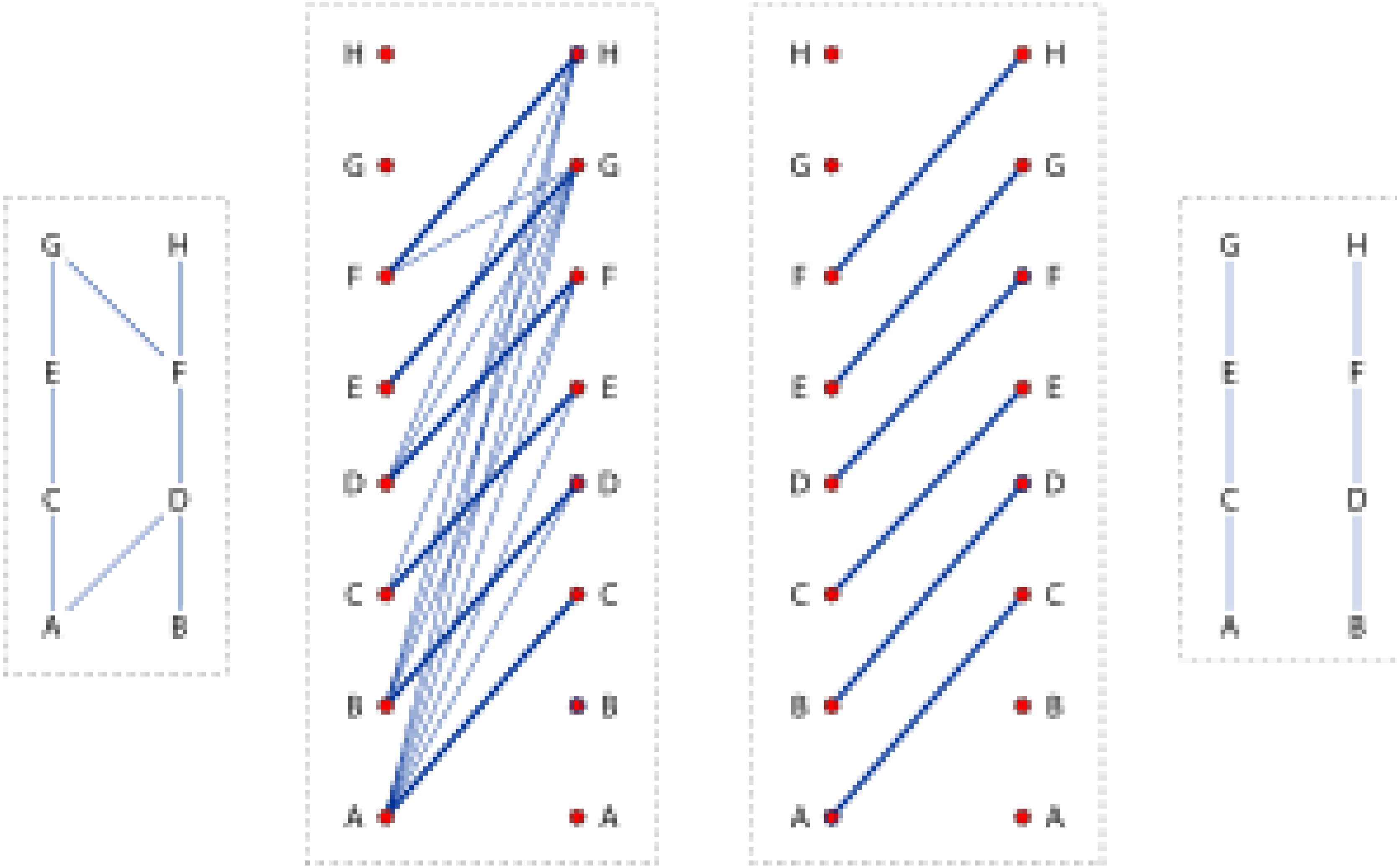
Dada una grilla de NxN (N <= 1000) donde algunas casillas tienen demonios. Goku con un kamehameha puede matar a todos los demonios de una fila o de una columna.

Para no cansarlo, hay que encontrar la mínima cantidad de kamehamehas para matar a todos los demonios

Teorema de Dilworth

- Caracteriza el ancho de un POS (Partially Ordered Set) u Orden Parcial.
- El tamaño de la mayor anticadena es igual al de la partición del *POS* en la mínima cantidad de cadenas posibles
- Se puede ver relativamente fácil construyendo un bipartite matching

Teorema de Dilworth



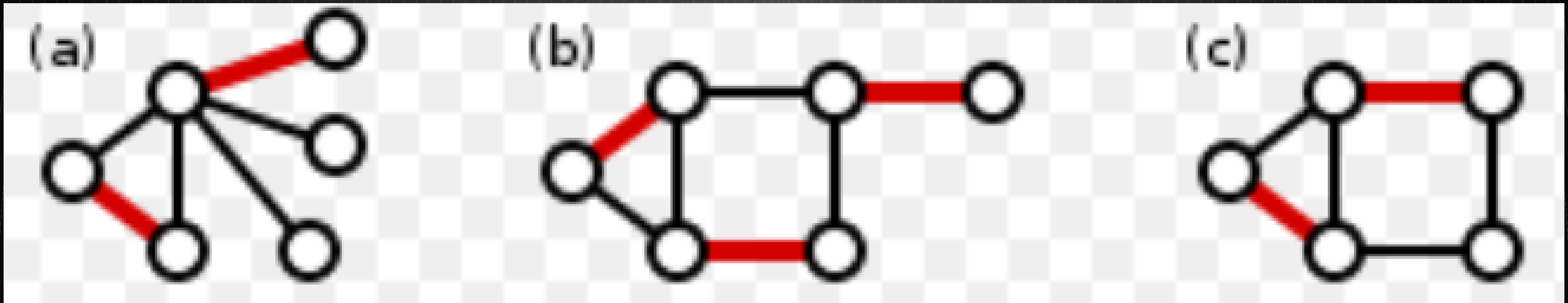
Problemas

Stock Charts - Google Code Jam R2 (2009)
goo.gl/lpVuZN

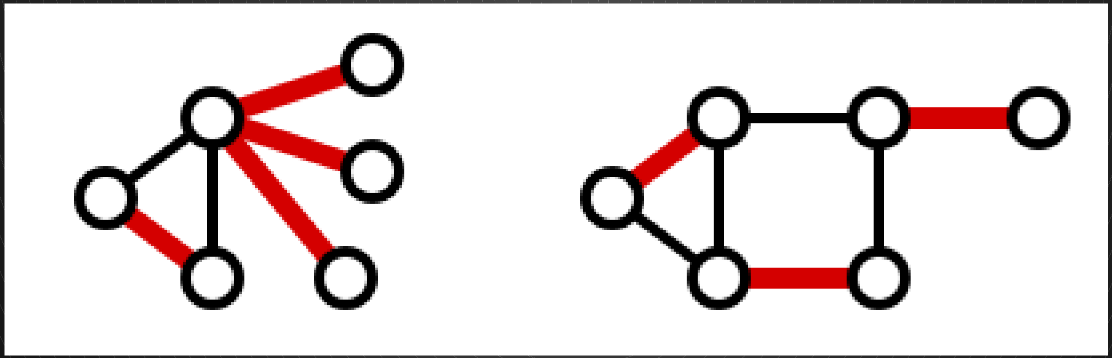
Dados varios charts, representados como polilíneas. Dos charts se pueden combinar en una sola hoja si no se intersectan. Determinar la mínima cantidad de hojas necesarias para dibujar todos los charts.

Extras

Matching Máximo

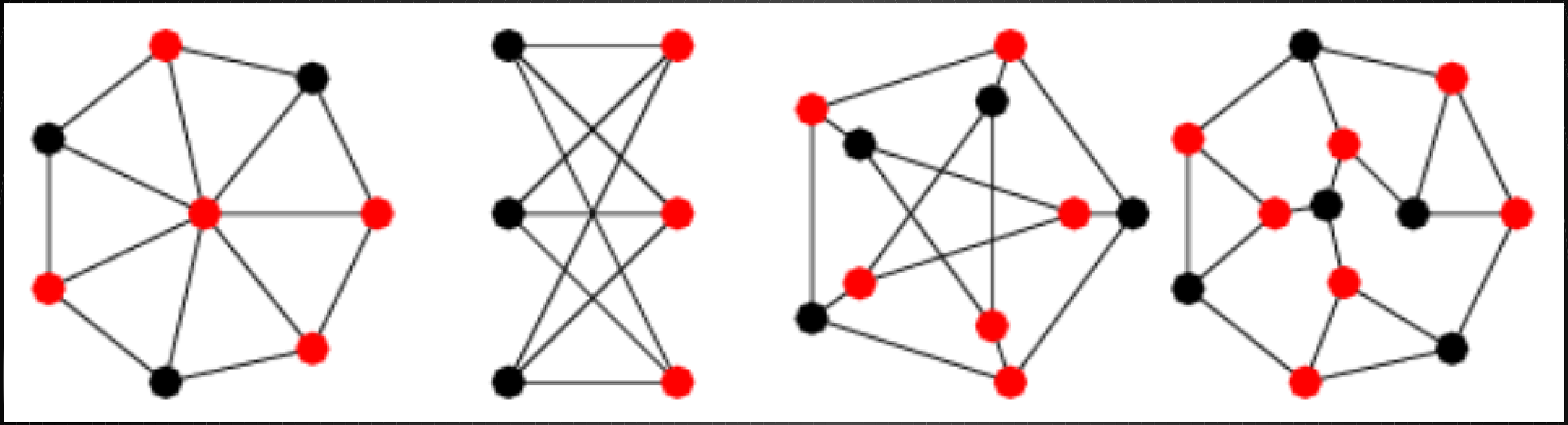


Mínimo Cubrimiento por Aristas

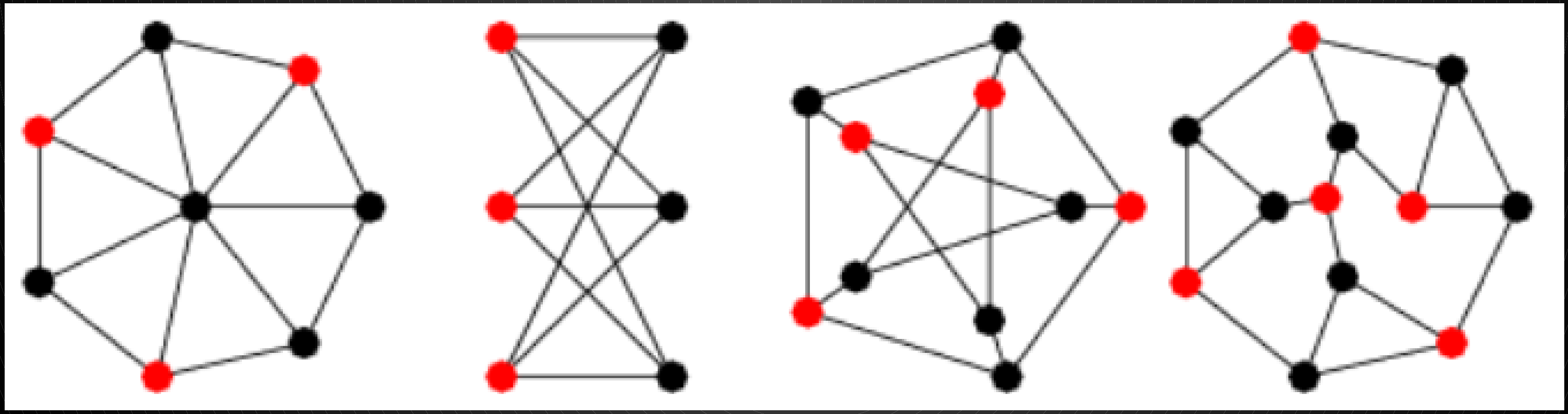


Extras

Mínimo Cubrimiento por Vértices

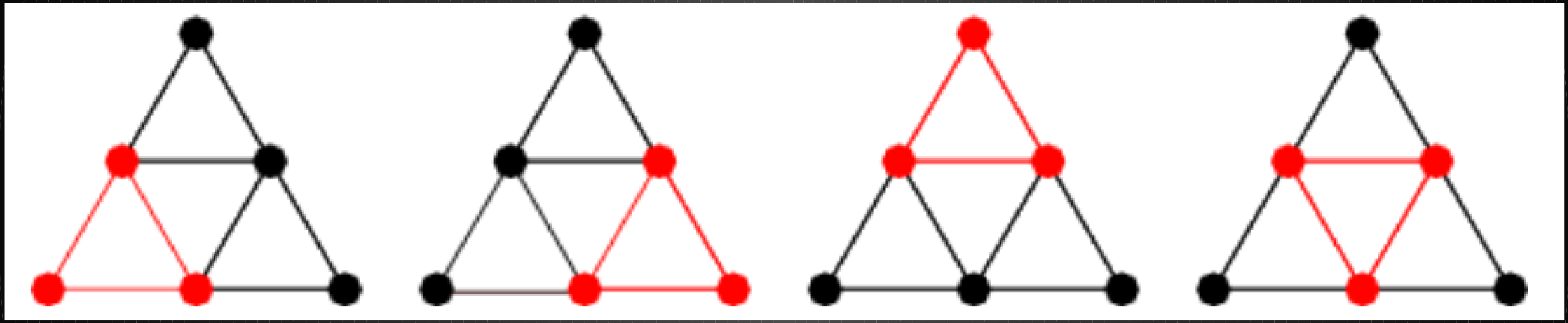


Máximo Conjunto Independiente



Extras

Cliqué Máxima



Más problemas!

- Inspection: goo.gl/iYho0F
- Super Watch: goo.gl/Y1h5zY
- Oil Company: goo.gl/XW3jSp
- Shogui Tournament: goo.gl/KRz3Yi
- Graduation: goo.gl/hnCwOU
- Parking: goo.gl/21ZJqC
- "Shortest" pair of paths: goo.gl/ardYaY
- Angels and Devils: goo.gl/sCkd30

Código fuente

https://github.com/mvpossum/eldiego/tree/master/flow

Hay implementaciones de:

- Edmonds Karp
- Dinic
- Hungarian (Matching Perfecto en n^3)
- Konig
- Max Flow – Min Cost

Bibliografía

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms 3ed. Capítulo 26*
- Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*
- Topcoder Tutorials:
  - Max flow: goo.gl/luDODH
  - Min-cost max-flow: goo.gl/XfRWjS

Preguntas?