Combinatoria, Probabilidad y Teoría de Juegos

Pablo Zimmermann

Universidad Nacional de Rosario

11th Caribbean Camp

Contenidos

Contenidos

Definición

Combinatoria

La combinatoria es la rama que estudia métodos para contar combinaciones de objetos. Generalmente, el objetivo es encontrar una manera de contar las combinaciones de manera eficiente sin tener que generar cada combinación por separado.

Como un ejemplo tenemos que contar la cantidad de formas de representar N como suma de naturales. Para $N = 4$ sería:

- 1 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 2
- 1 + 2 + 1
- 1 + 3
- 2 + 1 + 1
- 2 + 2
- 3 + 1
- 4

Ejemplo

Para este ejemplo se puede ver que si la respuesta la llamamos $f(n)$ podemos calcularla como:

- $f(0) = 1$

Ejemplo

Para este ejemplo se puede ver que si la respuesta la llamamos $f(n)$ podemos calcularla como:

- $f(0) = 1$
- $N > 0 \implies f(N) = f(0) + f(1) + \cdots + f(N-1)$

Ejemplo

Para este ejemplo se puede ver que si la respuesta la llamamos $f(n)$ podemos calcularla como:

- $f(0) = 1$
- $N > 0 \implies f(N) = f(0) + f(1) + \cdots + f(N-1)$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1 + 1 = 2$
- $f(3) = 1 + 1 + 2 = 4$
- $f(4) = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$

Ejemplo

Para este ejemplo se puede ver que si la respuesta la llamamos $f(n)$ podemos calcularla como:

- $f(0) = 1$
- $N > 0 \implies f(N) = f(0) + f(1) + \cdots + f(N-1)$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1 + 1 = 2$
- $f(3) = 1 + 1 + 2 = 4$
- $f(4) = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$
- Luego, por inducción podemos demostrar que $N > 0 \implies f(N) = 2^{N-1}$

Números Combinatorios

Números Combinatorios

Se define $\binom{N}{k}$ como el número de formas que podemos elegir de un subconjunto de N elementos, exactamente k.

- Si tenemos el conjunto del 1 al 5: {1, 2, 3, 4, 5} y queremos elegir subconjuntos de tamaño 3, tenemos:
  - 1, 2, 3
  - 1, 2, 4
  - 1, 2, 5
  - 1, 3, 4
  - 1, 3, 5
  - 1, 4, 5
  - 2, 3, 4
  - 2, 3, 5
  - 2, 4, 5
  - 3, 4, 5
- Por lo tanto $\binom{5}{3} = 10$

Números Combinatorios

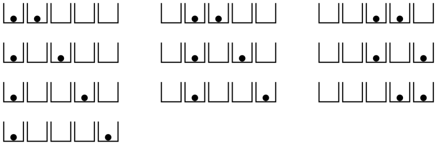
- Se puede demostrar que $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! * (N-k)!}$
- Por ejemplo $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{120}{12} = 10$
- Como en general son muy grandes, en general nos los piden modulo un primo p
- Vamos a ver que se pueden calcular de tres formas:
  - En $O(1)$ con un precálculo $O(n^2)$
  - En $O(n * lg(p))$, que se puede bajar a $O(k * lg(p))$
  - En $O(lg(p))$ con un precálculo de $O(n)$

Pero antes, para que los necesitamos?

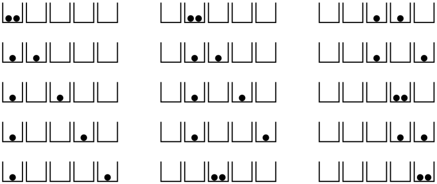
Motivación

Veamos ejemplos de problemas:

- Formas de poner k bolitas en N cajas sin repetir.



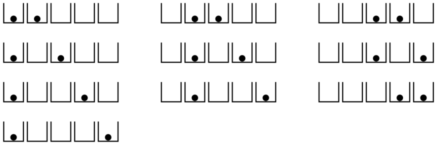
- Formas de poner k bolitas en N cajas pudiendo repetir.



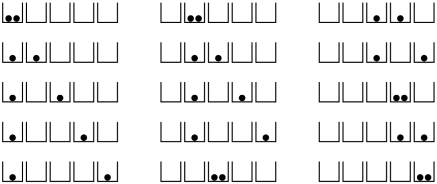
Motivación

Veamos ejemplos de problemas:

- Formas de poner k bolitas en N cajas sin repetir.



- Formas de poner k bolitas en N cajas pudiendo repetir.

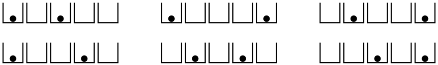


- $ej1(N,k) = \binom{N}{k} \implies ej1(5,2) = \binom{5}{2} = 10$
- $ej2(N,k) = \binom{N+(k-1)}{k} \implies ej1(5,2) = \binom{6}{2} = 15$

Motivación (2)

Veamos ejemplos de problemas:

- Formas de poner k bolitas en N cajas sin repetir ni tener bolitas en cajas adyacentes.

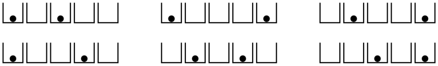


- Cuántas permutaciones existen de la palabra “ABRACADABRA”?

Motivación (2)

Veamos ejemplos de problemas:

- Formas de poner k bolitas en N cajas sin repetir ni tener bolitas en cajas adyacentes.



- Cuántas permutaciones existen de la palabra “ABRACADABRA”?
- $ej3(N,k) = \binom{N-k+1}{k} \implies ej1(5,2) = \binom{4}{2} = 6$
- $ej4(N,k_1,k_2,\ldots,k_n) = \binom{N}{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{N!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \implies$
- $\implies ej4(11,5,2,1,1,2) = \binom{N}{5,2,1,1,2} = \frac{11!}{5!2!1!1!2!} = 83160$

Propiedades

Los Números combinatorios son muy útiles, analizemos algunas propiedades:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  Podemos elegir calcular el que requiera menos operaciones.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
  Nos va a servir para calcularlo recursivamente
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$
  Ambos lados cuentan la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos.
- $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$
  Ambos lados cuentan la suma de la cantidad de elementos de todos los subconjuntos de un conjunto de n elementos.

Triángulo de Pascal

Veamos 3 formas para calcular los números combinatorios:

- Este es el triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

El k-ésimo número de la fila n representa el número $\binom{n}{k}$.

Con esto podemos precalcular todos los combinatorios en tiempo lineal.

Triángulo de Pascal

```
const int MOD = 1000000007;
forn(i, MAXN+1){ //comb[i][k]=i tomados de a k
  comb[i][0]=comb[i][i]=1;
  forr(k, 1, i) comb[i][k]=(comb[i-1][k]+comb[i-1][k-1]) %MOD;
}
```

Combinatorios

- $O(n^2)$ en memoria de precálculo y $O(1)$ por número pedido

Cálculo bruto

- Método 2: Cálculo Bruto
  - Recordamos: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Calculamos $n!$, $k!$, $(n-k)!$ modulo p
  - Calculamos los inversos de $k!^{-1}$ y $(n-k)!^{-1}$ con aritmética modular.
  - Calculamos finalmente $n!$, $k!^{-1}$, $(n-k)!^{-1}$
  - Devolvemos $n! * k!^{-1} * (n-k)!^{-1}$

Cálculo bruto

- Método 2: Cálculo Bruto
  - Recordamos: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Calculamos $n!$, $k!$, $(n-k)!$ modulo p
  - Calculamos los inversos de $k!^{-1}$ y $(n-k)!^{-1}$ con aritmética modular.
  - Calculamos finalmente $n!$, $k!^{-1}$, $(n-k)!^{-1}$
  - Devolvemos $n! * k!^{-1} * (n-k)!^{-1}$
- Costo $O(n * lg(p))$, optimizable a $O(k * lg(p))$, como?

Cálculo bruto

- Método 2: Cálculo Bruto
  - Recordamos: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Calculamos $n!$, $k!$, $(n-k)!$ modulo p
  - Calculamos los inversos de $k!^{-1}$ y $(n-k)!^{-1}$ con aritmética modular.
  - Calculamos finalmente $n!$, $k!^{-1}$, $(n-k)!^{-1}$
  - Devolvemos $n! * k!^{-1} * (n-k)!^{-1}$
- Costo $O(n * lg(p))$, optimizable a $O(k * lg(p))$, como?
  - $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} * \frac{1}{k!}$
  - $\frac{n!}{(n-k)!}$ son k multiplicaciones
  - $k!^{-1}$ lo calculo en $O(k * lg(p))$

Cálculo bruto

- Método 3: Optimizando el Bruto
  - Recordamos: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Podemos precalcular los factoriales en un arreglo

```
fact[0] = 1;
forr (i, 1, MAXN) fact[i] = (fact[i-1] * i) %p;
```

Factoriales

  - Calculamos $n!$, $k!$, $(n-k)!$ modulo p usando el precálculo
  - Calculamos los inversos de $k!^{-1}$ y $(n-k)!^{-1}$ con aritmética modular.
  - Calculamos finalmente $n!$, $k!^{-1}$, $(n-k)!^{-1}$
  - Devolvemos $n! * k!^{-1} * (n-k)!^{-1}$

Cálculo bruto

- Método 3: Optimizando el Bruto
  - Recordamos: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Podemos precalcular los factoriales en un arreglo

```
fact[0] = 1;
forr (i, 1, MAXN) fact[i] = (fact[i-1] * i) %p;
```

Factoriales

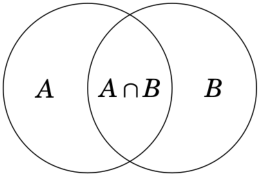
  - Calculamos $n!$, $k!$, $(n-k)!$ modulo p usando el precálculo
  - Calculamos los inversos de $k!^{-1}$ y $(n-k)!^{-1}$ con aritmética modular.
  - Calculamos finalmente $n!$, $k!^{-1}$, $(n-k)!^{-1}$
  - Devolvemos $n! * k!^{-1} * (n-k)!^{-1}$
- Costo $O(n)$ de precálculo, cada combinatorio lo calculamos en $O(lg(p))$

Inclusión - Exclusión

Inclusión - Exclusión

En combinatoria, el principio de inclusión-exclusión permite calcular el cardinal de la unión de varios conjuntos, mediante los cardinales de cada uno de ellos y todas sus posibles intersecciones.

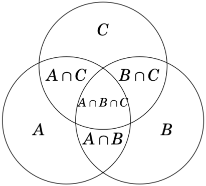
Por ejemplo para dos conjuntos A y B:



- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

Inclusión - Exclusión

Por ejemplo para tres conjuntos A, B y C:



- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$

Esto se puede generalizar para N conjuntos iterando para los subconjuntos

- Si tienen cantidad impar sumamos
- Si tienen cantidad par restamos

https://www.spoj.com/problems/NGM2/

Contenidos

Probabilidad

Probabilidad

La probabilidad es una medida de la certidumbre asociada a un suceso o evento futuro y suele expresarse como un número entre 0 y 1 (o entre 0 % y 100 %).

En los casos discretos se suele calcular contando la cantidad de veces que el evento ocurre dividido el total de eventos posibles. Por ejemplo al tirar un dado:

- La probabilidad que salga un 4 es $\frac{1}{6}$
- La probabilidad de que no salga un 4 es $\frac{5}{6}$
- La probabilidad de que el número sea par es $\frac{1}{2}$

Ejemplo

- Veamos un problema de ejemplo. Tenemos las 52 cartas de una baraja francesa. Cual es la probabilidad de sacar 3 cartas y que sean iguales?

Ejemplo

- Veamos un problema de ejemplo. Tenemos las 52 cartas de una baraja francesa. Cual es la probabilidad de sacar 3 cartas y que sean iguales?
- Método 1: Contar la cantidad de maneras y dividir por el total $\frac{13 * \binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{425}$

Ejemplo

- Veamos un problema de ejemplo. Tenemos las 52 cartas de una baraja francesa. Cual es la probabilidad de sacar 3 cartas y que sean iguales?
- Método 1: Contar la cantidad de maneras y dividir por el total
  $\frac{13*\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{425}$
- Método 2: Contar la probabilidad de cada evento por separado
  $1 * \frac{3}{51} * \frac{2}{50} = \frac{6}{2550} = \frac{1}{425}$

Ejemplo

- Veamos un problema de ejemplo. Tenemos las 52 cartas de una baraja francesa. Cual es la probabilidad de sacar 3 cartas y que sean iguales?
- Método 1: Contar la cantidad de maneras y dividir por el total
  $\frac{13 * \binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{425}$
- Método 2: Contar la probabilidad de cada evento por separado
  $1 * \frac{3}{51} * \frac{2}{50} = \frac{6}{2550} = \frac{1}{425}$
- No siempre ambas son posibles de calcular

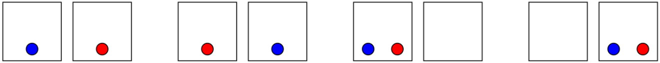
Propiedades

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ Esta puede ser útil por ejemplo para calcular la probabilidad de "sacar al menos un 4"
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- La probabilidad condicional $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- La esperanza matemática $E[X]$ nos dice el valor promedio de una variable X.
  - Si tiramos un dado, la esperanza del número que caerá es 3.5, pues: $\frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 2 + \frac{1}{6} * 3 + \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{6} * 5 + \frac{1}{6} * 6 = 3{,}5$
- La linealidad nos dice que $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$
  - La suma de dos dados nos da una esperanza de $E[D_1 + D_2] = E[D_1] + E[D_2] = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$

Problemita

Problemita

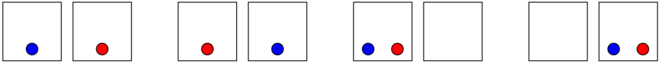
Tenemos n cajas y k bolitas se colocan aleatoriamente en las cajas. Cual es la esperanza matemática de la cantidad de cajas que estarán vacías?



Problemita

Problemita

Tenemos n cajas y k bolitas se colocan aleatoriamente en las cajas. Cual es la esperanza matemática de la cantidad de cajas que estarán vacías?

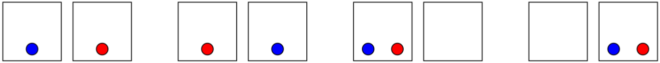


- La esperanza matemática de que cada caja individualmente quede vacía es $(\frac{n-1}{n})^k$

Problemita

Problemita

Tenemos n cajas y k bolitas se colocan aleatoriamente en las cajas. Cual es la esperanza matemática de la cantidad de cajas que estarán vacías?

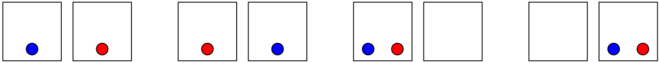


- La esperanza matemática de que cada caja individualmente quede vacía es $(\frac{n-1}{n})^k$
- Por linealidad, el número esperado de cajas vacías será $n * (\frac{n-1}{n})^k$

Problemita

Problemita

Tenemos n cajas y k bolitas se colocan aleatoriamente en las cajas. Cual es la esperanza matemática de la cantidad de cajas que estarán vacías?



- La esperanza matemática de que cada caja individualmente quede vacía es $(\frac{n-1}{n})^k$
- Por linealidad, el número esperado de cajas vacías será $n * (\frac{n-1}{n})^k$
- Para n = 2, k = 2, nos queda $2 * (\frac{1}{2})^2 = 2 * \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Otro Problemita

Otro Problemita

Tenemos un dado que tiene N caras y lo tiramos K veces. Cual es la esperanza matemática del máximo obtenido?

Examples

input	Copy
6 1	
output	Copy
3.500000000000	

input	Copy
6 3	
output	Copy
4.958333333333	

input	Copy
2 2	
output	Copy
1.750000000000	

Contenidos

Disclaimer:
Esta parte está completamente basada en las diapos que dio Agustín Gutiérrez en 2013 en el Training Camp de La Plata.

"Si tu signo es jugar, juégalo todo. Tu camisa, tu patio, tu salud. Si tu debes jugar de cualquier modo, juega bien, con virtud."

- *Verbos en Juego, Silvio Rodriguez*

Qué es un juego

- “Un juego es eso que hace un conjunto de jugadores cuando “juega” a algo.”

Qué es un juego

- "Un juego es eso que hace un conjunto de jugadores cuando "juega" a algo."
- Go, Ajedrez, Solitario, Póker, Batalla Naval, Teg, 1914, Veo Veo

Qué es un juego

- "Un juego es eso que hace un conjunto de jugadores cuando "juega" a algo."
- Go, Ajedrez, Solitario, Póker, Batalla Naval, Teg, 1914, Veo Veo
- Fútbol, Escondida, Chinchón, Mafia.

Qué es un juego

- "Un juego es eso que hace un conjunto de jugadores cuando "juega" a algo."
- Go, Ajedrez, Solitario, Póker, Batalla Naval, Teg, 1914, Veo Veo
- Fútbol, Escondida, Chinchón, Mafia.
- Partículas subatómicas jugando a seguir ciertas reglas de física cuántica

Qué es un juego

- "Un juego es eso que hace un conjunto de jugadores cuando "juega" a algo."
- Go, Ajedrez, Solitario, Póker, Batalla Naval, Teg, 1914, Veo Veo
- Fútbol, Escondida, Chinchón, Mafia.
- Partículas subatómicas jugando a seguir ciertas reglas de física cuántica
- El universo jugando a seguir las leyes de la física...

Qué es un juego para nos

Juego combinatorio imparcial

Un juego combinatorio imparcial será para nosotros un juego de dos jugadores por turnos, de información perfecta y sin azar, que siempre termina, y cuyo único resultado posible es que un jugador gane y el otro pierda.

- La parte de *imparcial* hace referencia a que no hay ninguna diferencia entre las opciones disponibles a ambos jugadores a lo largo del juego, ni en su función de pagos en una posición terminal. Es decir, ambos jugadores son idénticos.
- Los juegos combinatorios en general permiten juegos *partisanos*, donde los jugadores no son iguales (como en Ajedrez).

Qué es un juego para nos (2)

- Muchos de nuestros resultados e ideas se pueden usar igual en juegos que no sean exactamente combinatorios imparciales (veremos algunos ejemplos)
- En general, podemos pensar estos juegos de manera abstracta como un grafo de posiciones, con los ejes indicando jugadas válidas de una posición a otra, y una posición especial actual o inicial. Las posiciones terminales estarán marcadas como perdedoras / ganadoras según las reglas del juego.

Qué es un juego para nos (3)

- En la teoría no es necesario pedir que estos grafos sean finitos y hay juegos combinatorios infinitos bien estudiados. Sin embargo nosotros nos dedicaremos casi exclusivamente a trabajar con juegos con grafos finitos.
- Notar que un juego combinatorio genera un grafo que no contiene ciclos (DAG), ya que una de las hipótesis es que el juego siempre termina y no existen cadenas de jugadas infinitas.

Posiciones perdedoras y ganadoras

- Intuitivamente decimos que una posición es **ganadora** si el jugador al que le toca jugar tiene una estrategia ganadora. Es decir, una estrategia que le asegura terminar el juego y además terminarlo ganando, sin importar lo que haga el rival.
- De manera análoga una posición es **perdedora** si el jugador al que no le toca jugar en esa posición tiene una estrategia ganadora.

Teorema (Determinación)

En un juego combinatorio imparcial, toda posición es perdedora o ganadora.

Demostración (O “cómo resolver un juego con DP”)

Basta notar que inductivamente se puede ir asignando un estatus de ganadora o perdedora a cada posición.

- En las posiciones terminales no hay ninguna elección posible: Son ganadoras o perdedoras inmediatamente según las reglas del juego.
- Luego podemos ir calculando en orden (recordar que es un DAG): Si de una posición solo se puede mover a ganadoras, entonces es perdedora. Si se puede mover a al menos una perdedora, entonces es ganadora.
- Esto último es claro pensando en términos de estrategias.

Propiedad universal de las posiciones ganadoras-perdedoras

Se llama así a la siguiente propiedad:

Teorema (Propiedad universal)

Si $\{W, L\}$ es una partición del conjunto de posiciones en dos conjuntos W y L, que cumple la siguiente propiedad universal:

- Si p es posicion terminal, $p \in W$ si es ganadora y $p \in L$ si es perdedora.
- Si $p \in W$ no terminal, entonces existe una jugada de p a q y tal que $q \in L$
- Si $p \in L$ no terminal, entonces para cada jugada de p a q resulta que $q \in W$

Entonces W es el conjunto de posiciones ganadoras y L el de perdedoras.

Ejemplo de las piedritas

- Un ejemplo típico es un juego de sustracción como el siguiente:
- Juegan dos jugadores por turnos, con una pilita de n piedras. En cada turno, un jugador puede retirar $1, 3$ o 4 piedritas de la pila.
- Dado un n, ¿Quién gana si el primer jugador que no puede jugar es el perdedor?
- ¿Y si quien no puede jugar ahora es quien gana?

Wythoff's Game (la idea de la criba)

- Una variación interesante del juego de sustracción anterior sería el siguiente:
- Juegan dos jugadores por turnos, pero ahora con dos pilitas de piedras, de n y m piedras.
- En cada turno, un jugador puede retirar cualquier cantidad positiva de piedras de una de las pilas. O bien, puede retirar una misma cantidad $k > 0$ de ambas pilas. El jugador que no puede jugar pierde.

Strategy Stealing Argument

- Un recurso principalmente teórico, aunque podría servir en competencia.
- Es un argumento muy elegante, no constructivo, para demostrar que un jugador tiene estrategia ganadora.
- La idea consiste en suponer que un jugador tiene estrategia ganadora, y mostrar un absurdo haciendo que el otro jugador se aproveche de esa estrategia para ganar (le roba la estrategia).

Aclaración previa

- Para toda esta parte, es fundamental suponer que tomamos en nuestros juegos la regla *normal* de que el jugador que no puede jugar pierde (o sea, todas las posiciones terminales son perdedoras).
- La suma de juegos se puede plantear también suponiendo que el que no puede jugar gana, pero la teoría resultante en el caso general es **mucho** más complicada en comparación. En muchos ejemplos de juegos particulares la estrategia es parecida al caso normal, con alguna modificación ad-hoc.

Suma de juegos

- Dados dos juegos combinatorios imparciales A y B (como aclaramos, con la regla normal para terminaciones), podemos definir un nuevo juego combinatorio imparcial $A + B$, que consiste en jugar ambos juegos a la vez.
- Es decir: Se ponen los dos tableros sobre la mesa, y cada jugador en su turno elige uno de los dos juegos y hace una jugada válida en él. El primero que no puede jugar (porque no quedan jugadas válidas en ninguno de los dos juegos) pierde.

Suma de juegos (2)

- Notación: Diremos que $res(A) = 1$ si la posición inicial del juego A es ganadora, y $res(A) = 0$ sino.
- **Argumento muy importante:** $res(A + A) = 0$ para cualquier A.
- Notación: Llamaremos $*n$ al juego consistente en empezar con una pilita de n piedras, y en cada jugada sacar una cantidad positiva arbitraria. Llamaremos $* = *1$, y notemos que $res(*0) = 0$
- Notar que la suma de juegos es asociativa y conmutativa (los juegos resultantes tienen grafos isomorfos), y el $*0$ viene a ser elemento neutro.

Equivalencia de juegos

- Dados dos juegos combinatorios imparciales A y B, decimos que son equivalentes y notamos $A \equiv B$ si para todo juego C vale: $res(A + C) = res(B + C)$
- Es decir, los juegos son intercambiables entre sí (equivalentes): si en una suma reemplazamos uno por otro, no afecta al resultado del juego.
- La equivalencia es más fuerte que tener el mismo resultado ($res(*2) = res(*) = 1$ pero no son equivalentes, como se ve poniendo $C = *$).

Propiedades de la Equivalencia de juegos

- Es inmediato de la definición que la equivalencia de juegos es reflexiva, simétrica y transitiva, o sea relación de equivalencia.
- Propiedad: $A + 0 \equiv A$
- Propiedad: $A \equiv 0 \Leftrightarrow res(A) = 0$ (**argumento estratégico**: agregar a una suma un juego perdedor no afecta)
- Propiedad: $A \equiv B \Rightarrow A + C \equiv B + C$ (inmediato de la definición y propiedades vistas de la suma)
- Propiedad: $A \equiv B \Leftrightarrow A + B \equiv 0$ (de las anteriores y $res(B + B) = 0$)
- Surge ahora la pregunta natural de encontrar las clases de equivalencia de juegos, y entender cómo se comportan respecto a la suma de juegos.

El nim

- Se llama nim a un juego donde la posición inicial es suma de varios $*n$.
- Es decir, en el juego hay pilitas de piedras. Y la jugada válida en cada paso es elegir una pila y quitarle piedras.
- El Nim resulta ser un juego muy importante por ser representativo de muchos otros juegos combinatorios.
- Como precalentamiento, estudiemos por ejemplo el Nim cuando todas las pilitas son $*$ o $*2$

Juego ad-hoc y su relación con el Nim...

- Consideremos un juego donde hay muchos tableros de 3x3. Cada tablero puede tener casillas rotas y sanas. La jugada válida consiste en poner un triminó con forma de L en un tablero, llenando casillas sanas libres no ocupadas anteriormente.
- Como siempre el primer jugador que no puede jugar pierde.
- ¿Cuál es la relación de este juego con el Nim?

Sprague-Grundy Theorem

Resulta que esta traducción al Nim que hemos realizado en el ejemplo de recién es un caso particular del siguiente

Teorema (Sprague-Grundy)

Si G es un juego combinatorio imparcial cualquiera, entonces existe un n tal que $G \equiv *n$

Si G es un juego con grafo finito, como todos los que estudiamos, el n es un natural común y corriente. Sino, el resultado sigue valiendo pero n podrá ser un número ordinal. Al n tal que $G \equiv *n$ se lo llama el *Grundy Number* de G y lo notaremos $g(G)$ (¿por qué podemos afirmar que tal n es único?)

Demostración (algoritmo para calcular Grundy Numbers)

- A partir del grafo del juego, vamos a ir marcando los Grundy Numbers de sus posiciones.
- Es claro que las posiciones p terminales tienen $g(p) = 0$, pues justamente son perdedoras.
- A partir de ahora, definimos para cada posición p, $g(p) = mex\{g(h) | h \text{ es hijo de } p\}$
- Se puede ver por inducción que cada posición resulta equivalente con su Grundy Number asignado de esta manera.

Teorema de la suma (solución al Nim)

- Sabemos ahora que a cada juego G le podemos asignar un número $g(G)$, que sabemos en principio calcular.
- Y es claro que en G gana el primer jugador si y solo si $g(G) \neq 0$ (pues $res(*n) = 0$ solo cuando $n = 0$)
- Lo que nos faltaría para que nuestra teoría resulte ser una herramienta poderosa para estudiar la suma de juegos es cuánto vale $g(A+B)$, sabiendo $g(A)$ y $g(B)$

Teorema

Si A, B son juegos combinatorios imparciales, entonces vale $g(A+B) = g(A) \text{ xor } g(B)$

Demostración

- Podemos probarlo inductivamente sobre el grafo del juego $A + B$
- Desde $A + B$ podemos mover a juegos de la forma $A' + B$ o $A + B'$, siendo A', B' ejemplos de opciones posibles en A y B.
- Inductivamente sabemos que $g(A' + B) = g(A')$ xor $g(B)$ y lo mismo con A, B'
- Por lo tanto lo que queremos ver es que el *mex* de todos estos números es justamente $g(A)$ xor $g(B)$
- Como no hay un A' tal que $g(A) = g(A')$ y lo mismo con B, es fácil ver que $g(A)$ xor $g(B)$ no aparece entre los números.
- Para ver que todos los anteriores aparecen (y por lo tanto ese es el *mex*), hay que notar que para cada $x < g(A)$ hay un A' con $g(A') = x$, y lo mismo con B, y observar que con estas opciones se forman entre los números todos los $y < g(A)$ xor $g(B)$

¡El Nim está resuelto!

- De nuestros resultados es inmediato ahora que una posición en el Nim es perdedora si y solo si el xor de todas las cantidades de piedritas es 0. O sea que jugar bien consiste en jugar siempre a una posición con xor nulo para dejarle a nuestro rival una posición perdedora en todo momento y asegurarnos ganar.
- Lo mismo vale para cualquier otra suma de juegos, siempre que seamos capaces de calcular primero los Grundy Numbers correspondientes.

Misère Nim

- Se llama así a la variante del Nim (y de cualquier juego en general) en la cual el jugador que se queda sin movimientos *gana*, en lugar de perder.
- Con esta regla ya no hay una teoría tan feliz basada en Grundy Numbers sencillos y nada más. Pero al menos para el caso del Nim, la modificación necesaria es menor.
- Usando la propiedad universal es fácil ver que una posición es ganadora en el mismo caso que antes, salvo el caso en que son todas pilitas de 1, en cuyo caso es al revés que antes.

Variantes alternativas de la suma de juegos

- Variante 1: Puedo mover con varios tableros que quiera (al menos uno). Una posición resulta perdedora exactamente cuando todos los grundy numbers de los tableros son nulos.
- Variante 2: Puedo mover con varios tableros que quiera (al menos uno y no todos). Una posición resulta perdedora exactamente cuando todos los grundy numbers de los tableros son iguales.
- Ambas son muy fáciles de chequear utilizando la propiedad universal.

El Nim puede esconderse en un Loopy-Game partisano

Considerar el siguiente juego: En un tablero de ajedrez se ponen en cada columna una torre blanca y una negra. Cada jugador controla un color y juegan por turnos. En cada turno cada jugador mueve libremente una de sus torres dentro de la columna correspondiente, pero sin comer ni saltar la otra torre. Si alguien no puede jugar, pierde. ¿Alguien tiene estrategia ganadora? ¿Quién? ¿Cómo debe jugar?

Enunciado de Tic-Tac-Toe

- Tic-tac-toe 1-D se juega en un tablero de 1xD. Cada jugador juega una X en algún lugar del tablero. El primero en escribir 3 “X” consecutivas gana. Dado un estado inicial decidir quien tiene estrategia ganadora.

Sample Input

```
5
.....
5
..X..
6
X.X.X.
12
............
0
```

Sample Output

```
S
N
S
N
```

¡¡Problemas!!

http://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=6856
http://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=2987&rd=5862
http://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=7424

http://www.spoj.com/problems/MMMGAME/
http://www.spoj.com/problems/QCJ3/
http://www.spoj.com/problems/TRIOMINO/
http://www.spoj.com/problems/BNWNIM/
http://www.spoj.com/problems/CLK/
http://www.spoj.com/problems/POLYGAME/

Los siguientes 3 son el mismo problema en 1D, 2D y 3D (dificultad creciente)
http://www.spoj.com/problems/QWERTY04/
http://www.spoj.com/problems/TWOKINGS/
http://www.spoj.com/KOPC13/problems/CONQUER/

http://ipsc.ksp.sk/2010/real/problems/k.html (con soluciones en http://ipsc.ksp.sk/archive)

Bibliografía

http://community.topcoder.com/tc?module=Static&d1=tutorials&d2=algorithmGames

Winning ways for your mathematical plays, Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy

On numbers and games, John Horton Conway

Cosas que faltaron (avanzadas)

- Burnside Lemma
- Números de Catalán
- Cadenas de Markov