SUITES NUMERIQUES

I. DEFINITION

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie E de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} U : \quad E \ (\subseteq \mathbb{N}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & U_n \end{array}$$

Le réel U_n est appelé **terme général** de la suite U.
La suite U peut aussi être notée (U_n).

Principaux modes de génération d'une suite numérique :

- **Mode explicite : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$**

  Exemple : (U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3n - 4\sin n$

  La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 3x - 4\sin x$

  est la **fonction numérique associée** à la suite (U_n).

- **Mode récurrent :**

  Exemple : (V_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_0 = 4$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3V_n - 4\sin V_n$

II. VARIATIONS

Soit (U_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

La suite (U_n) peut être :
- stationnaire : si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n$
- croissante : si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \geq U_n$
- décroissante : si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \leq U_n$

Si la suite (U_n) possède une de ces trois qualités, on la qualifie de monotone.
Au contraire, si l'ordre dans lequel sont rangés U_n et U_{n+1} est changeant, la suite (U_n) n'est pas monotone.

La comparaison de deux nombres pouvant s'obtenir à partir du signe de leur différence, la connaissance des **variations de la suite $(\boldsymbol{U_n})$** peut donc être obtenue par l'**étude du signe de $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n}$** $(\forall n \in \mathbb{N})$.

D'autre part, si la relation $U_n = f(n)$ est connue (mode explicite), les variations de (U_n) peuvent être obtenues à partir des variations de f :
- si f est croissante sur $[0, +\infty[$, alors (U_n) est croissante ;
- si f est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors (U_n) est décroissante ;
- si f n'est pas monotone sur $[0, +\infty[$, on ne peut rien en déduire quant aux variations de (U_n).

III. BORNAGE

Soit (U_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

La suite (U_n) peut être :
- **majorée** : si et seulement si il existe une <u>constante</u> réelle M telle que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$$
- **minorée** : si et seulement si il existe une <u>constante</u> réelle m telle que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geq m$$

Si la suite (U_n) est majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Exemple : Soient (U_n), (V_n), (W_n) les suites numériques définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ , \ \ V_n = \sin n \ \text{ et } \ W_n = \cos n$$
Ces trois suites sont bornées, car :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1\ , \ \ -1 \leq \sin n \leq 1 \quad \text{et} \ -1 \leq \cos n \leq 1$$

Remarques : une suite croissante est minorée par son premier terme ;
une suite décroissante est majorée par son premier terme

IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE $(n \longrightarrow +\infty)$

1. Notion de limite

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n > N \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$
(la distance de tous les U_n à l est inférieure à n'importe quel nombre strictement positif à partir d'un rang N).

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n > N \Longrightarrow U_n > A$$
(tous les U_n sont supérieurs à n'importe quel nombre à partir d'un rang N).

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n > N \Longrightarrow U_n < A$$
(tous les U_n sont inférieurs à n'importe quel nombre à partir d'un rang N).

On dit que la suite (U_n) converge lorsque (U_n) possède une limite finie.

Proposition : **si une suite converge, alors elle est bornée**.
(la réciproque de cette implication est fausse, comme le montre l'exemple ci-dessous).

On dit que la suite (U_n) diverge lorsque (U_n) possède une limite infinie, ou lorsque (U_n) ne possède pas de limite.

Exemple : Soient (U_n), (V_n), (W_n) les suites numériques définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad U_n = (-1)^n\ , \ \ V_n = \sin n \ \text{ et } \ W_n = \cos n$$
Aucune de ces trois suites ne possède de limite.

Si la suite (U_n) possède une fonction numérique associée f qui admet une limite en $+\infty$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

2. Théorèmes de comparaison

- Si (U_n) et (V_n) admettent une limite, et si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Longrightarrow U_n \leq V_n$,

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

  Dès lors : si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

  si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$, et si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Longrightarrow V_n \leq U_n \leq W_n$

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ (Théorème des gendarmes)

3. Cas de suites monotones

Si (U_n) est une suite croissante :

- soit (U_n) n'est pas majorée, et on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- soit (U_n) est majorée par M, et on a alors : (U_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq M$

Si (U_n) est une suite décroissante :

- soit (U_n) n'est pas minorée, et on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
- soit (U_n) est minorée par m, et on a alors : (U_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq m$

4. Suites de référence

a) $\boldsymbol{U_n = n^\alpha}$ (puissance)

si $\alpha > 0$, alors la suite (U_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
si $\alpha = 0$, alors la suite (U_n) est stationnaire et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$
si $\alpha < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

b) $\boldsymbol{U_n = a^n}$ (exponentielle)

si $a > 1$, alors la suite (U_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
si $a = 1$, alors la suite (U_n) est stationnaire et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$
si $0 < a < 1$, alors la suite (U_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
si $a = 0$, alors la suite (U_n) est stationnaire et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

si $a < 0$, alors le signe de U_n change dès que n augmente de 1.

On dit alors que la suite (U_n) est alternée, et elle n'est bien sur pas monotone.

De plus, si $-1 < a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
si $a \leq -1$, alors la suite (U_n) n'a pas de limite.

5. Opérations sur les limites

a) Addition. Comportement asymptotique de $(U_n + V_n)$:

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = l + l'$

$*$ (U_n) est minorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = +\infty$

$*$ (U_n) est majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = -\infty$

On obtient une forme indéterminée lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = -\infty$

b) Multiplication. Comportement asymptotique de $(U_n V_n)$:

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = ll'$

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \pm\infty$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = \pm\infty$ (voir remarque ci − dessous)

$*$ (U_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 0$

On obtient une forme indéterminée lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{0}$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = \pm\infty$

c) Division. Comportement asymptotique de $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$:

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{l}{l'}$

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \pm\infty$ (voir remarque ci − dessous)

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $(|V_n|)$ est minorée par un réel strictement positif $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 0$

$*$ (U_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \pm\infty$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 0$

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \pm\infty$ (voir remarque ci − dessous)

On obtient une forme indéterminée lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \pm\infty$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = \pm\infty$
ainsi que lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{0}$

Remarque : lorsque la réponse est $\pm\infty$, la détermination du signe de cet infini s'opère grâce à la règle des signes de l'opération considérée (multiplication, division).

D'autre part, en présence d'une **forme indéterminée**, on peut généralement "lever l'indétermination" à l'aide de **factorisations**.

On peut éventuellement utiliser aussi les résultats suivants :

- **A l'infini, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré**.
- $\forall\, \boldsymbol{a} \in]\boldsymbol{1}, +\infty[$, $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in]\boldsymbol{0}, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\boldsymbol{a^n}}{\boldsymbol{n^\alpha}} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n^\alpha}} = \boldsymbol{0}$

V. SUITES NUMERIQUES PARTICULIERES

1. Suites arithmétiques

Définition : Soit (U_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

(U_n) est une suite arithmétique si et seulement si :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{U_{n+1} - U_n = constante}$$

La valeur de cette constante est alors appelée la "raison" de la suite arithmétique (U_n).

Propriété : Si (A_n) est une suite arithmétique (définie sur $\mathbb{N}$) de raison r , alors :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{A_n = A_p + (n-p)r}$$

2. Suites géométriques

Définition : Soit (U_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

(U_n) est une suite géométrique si et seulement si :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n} = constante}$$

La valeur de cette constante est alors appelée la "raison" de la suite géométrique (U_n).

Propriété : Si (G_n) est une suite géométrique (définie sur $\mathbb{N}$) de raison q , alors :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{G_n = G_p \times q^{n-p}}$$

Somme de termes consécutifs :

Si (G_n) est une suite géométrique (définie sur $\mathbb{N}$) de raison q (avec $q \neq 1$), alors :

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{i=n} G_i = G_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

VI. COMPARAISON DE SUITES NUMERIQUES

1. Définitions

Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques, avec

$n > N \Longrightarrow\ b_n \neq 0$ (la suite numérique (b_n) est non nulle à partir d'un certain rang).

* On dit que $\boldsymbol{a_n}$ **est négligeable devant** $\boldsymbol{b_n}$, ce qui se note $a_n \ll b_n$, lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$$\boldsymbol{a_n \ll b_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0}$$

* On dit que $\boldsymbol{a_n}$ **est équivalent** à $\boldsymbol{b_n}$, ce qui se note $a_n \sim b_n$, lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$\boldsymbol{a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1}$$

2. Propriétés

* **Réflexivité** : $a_n \sim a_n$

* **Symétrie** : $a_n \sim b_n \iff b_n \sim a_n$

* **Transitivité** : $a_n \ll b_n$ et $b_n \ll c_n \implies a_n \ll c_n$

$a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n \implies a_n \sim c_n$

* **Relations mixtes** : $a_n \sim b_n$ et $c_n \ll b_n \implies c_n \ll a_n$

$a_n \ll b_n \implies a_n + b_n \sim b_n$

* **Produit par des constantes réelles non nulles** : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall\, \beta \in \mathbb{R}^*$,

$a_n \ll b_n \iff \alpha\, a_n \ll \beta\, b_n$

$a_n \sim b_n \iff \alpha\, a_n \sim \alpha\, b_n$

* **Multiplication** : $a_n \ll c_n$ et $b_n \ll d_n \implies a_n b_n \ll c_n d_n$

$a_n \sim c_n$ et $b_n \sim d_n \implies a_n b_n \sim c_n d_n$

* **Puissance** : $\forall\, p \in \mathbb{R}^{*+}$, $a_n \ll b_n \iff {a_n}^p \ll {b_n}^p$

$\forall\, p \in \mathbb{R}^*$, $a_n \sim b_n \iff {a_n}^p \sim {b_n}^p$

* **Inverse** : si (a_n) et (b_n) sont non nulles à partir d'uncertain rang :

$$a_n \ll b_n \iff \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}$$

$$a_n \sim b_n \iff \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$$

* **Division** : si (b_n) et (d_n) sont non nulles à partir d'uncertain rang :

$$a_n \ll c_n \text{ et } b_n \ll d_n \implies \frac{a_n}{d_n} \ll \frac{c_n}{b_n}$$

$$a_n \sim c_n \text{ et } b_n \sim d_n \implies \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{c_n}{d_n}$$

* **Valeur absolue :** $a_n \ll b_n \iff |a_n| \ll |b_n|$

  $a_n \sim b_n \implies |a_n| \sim |b_n|$

3. Incompatibilités

* **Problème de l'addition :**

  Si $a_n \ll c_n$ et $b_n \ll d_n$, on n'a pas forcément $a_n + b_n \ll c_n + d_n$

  Si $a_n \sim c_n$ et $b_n \sim d_n$, on n'a pas forcément $a_n + b_n \sim c_n + d_n$

  Exemple : $a_n = n^3 + n^2 + 5n + 3$

  $b_n = -n^3 + n^2 + 5n + 3$

  $c_n = n^3$

  $d_n = -n^3 + n^2$

  On a : $a_n \sim c_n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 + n^2 + 5n + 3}{n^3} = 1$

  et $b_n \sim d_n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^3 + n^2 + 5n + 3}{-n^3 + n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{-5n + 3}{-n^3 + n^2}\right) = 1$

  Mais : $a_n + b_n$ n'est pas équivalent à $c_n + d_n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 + 10n + 6}{n^2} = 2$

* **Problème de la composition avec une fonction :**

  f étant une fonction numérique :

  Si $a_n \ll b_n$, on n'a pas forcément $f(a_n) \ll f(b_n)$

  Si $a_n \sim b_n$, on n'a pas forcément $f(a_n) \sim f(b_n)$

  Exemple : $n + 1 \sim n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

  Mais : e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$

4. Utilisation avec les limites

* $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l}$ **et** $\boldsymbol{l \neq 0 \iff a_n \sim l}$
* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff a_n \ll 1$

Remarque : hormis dans le cas très particulier où la suite numérique (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, les écritures $a_n \sim 0$ et $a_n \ll 0$ sont erronées.

* **Si** $\boldsymbol{a_n \sim b_n}$ **et** $\boldsymbol{(b_n)}$ **admet une limite, alors** $\boldsymbol{(a_n)}$ **admet une limite et** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$
* **Si** $\boldsymbol{a_n \sim b_n}$ **et** $\boldsymbol{(b_n)}$ **n'admet pas de limite, alors** $\boldsymbol{(a_n)}$ **n'admet pas de limite.**

5. Références

a) $\forall\, \alpha \in \,]0, +\infty[\;,\;\; \forall\, a \in \,]1, +\infty[\;,$

$$\boldsymbol{\ln n \ll n^{\alpha} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}}$$

b) Tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

$$\sum_{i=0}^{i=p} a_i n^i \sim a_p n^p$$

c) Autres équivalences

A partir de développements limités au voisinage de 0, on peut obtenir les équivalences suivantes :

Si $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$,

Alors : $\boldsymbol{\ln(1 + U_n) \sim U_n}$

$\boldsymbol{e^{U_n} - 1 \sim U_n}$

$\boldsymbol{(1 + U_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha U_n}$ où α est une constante réelle quelconque.

$\boldsymbol{\sin U_n \sim U_n}$

$\boldsymbol{\tan U_n \sim U_n}$

$\boldsymbol{\cos U_n - 1 \sim -\frac{1}{2} {U_n}^2}$

VII. DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Lorsqu'on doit démonter qu'une relation $P(n)$, dépendante d'un entier naturel *n*, est vraie pour tout entier naturel *n* (ou pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné),
on peut effectuer une démonstration par récurrence.

Une démonstration par récurrence comporte trois phases :

1) Initialisation : cette phase consiste à vérifier que $P(n_0)$ est vraie (autrement dit : la relation $P(n)$ est vraie pour le plus petit entier *n* envisagé).

2) Hérédité : cette phase consiste à vérifier que : si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie.

3) Conclusion : si la phase d'initialisation et la phase d'hérédité sont satisfaites, on conclut en affirmant que la relation $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_0 .

EXERCICES

EXERCICE 1 : Déterminer les variations de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = e^{n^2+1}$ b) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \ln\left(\frac{1}{1+n}\right)$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (-3)^n$ d) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 2500 + 300n - 1500 \times 0{,}8^n$

$\left(\text{rappel : } 0{,}8^x = e^{x\ln 0{,}8}\right)$

EXERCICE 2 : Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \dfrac{4n+20}{n+4}$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 \leq U_n \leq 5$

(On pourra pour cela étudier le signe de $U_n - 4$ et de $U_n - 5$).

EXERCICE 3 : (U_n) est une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $U_1 = 16$ et $U_4 = 2$.

Déterminer sa raison et l'expression de U_n en fonction de *n*.

EXERCICE 4 : On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 2$

et la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 3$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Exprimer V_n , puis U_n , en fonction de *n*.
c) En déduire la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 5 : Déterminer la limite éventuelle de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

$a)\ U_n = \dfrac{1}{n+3}$ $b)\ U_n = \dfrac{2n}{n+1}$ $c)\ U_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$

$d)\ U_n = \sqrt{n^3-4n+1}$ $e)\ U_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ $f)\ U_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$g)\ U_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$ $h)\ U_n = \ln\left(\dfrac{1}{1+n}\right)$ $i)\ U_n = \dfrac{n+e^n}{2n+e^n}$

$j)\ U_n = \dfrac{n^2+1}{\ln n}$ $k)\ U_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ $l)\ U_n = 3 \times (-2)^n$

$m)\ U_n = 7 + \dfrac{5}{3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ $n)\ U_n = 5^n - 4^n$ $o)\ U_n = \dfrac{3^n+2}{8^n-1}$

$p)\ U_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ $q)\ U_n = n - \sin n^2$ $r)\ U_n = \dfrac{n+\cos n}{n-\sin n}$

$s)\ U_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ $t)\ U_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$

EXERCICE 6 : Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent de U_n le plus simple possible, et en déduire la limite éventuelle de la suite (U_n) :

$a)\ U_n = n^2 + n$ $\quad b)\ U_n = e^n + n^2$ $\quad c)\ U_n = \dfrac{n^2 + \sin(e^n)}{n^{1000} - e^{n+1}}$

$d)\ U_n = \dfrac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$ $\quad e)\ U_n = \dfrac{n^2 + n! + 1000^n}{(n+2)! + 1002^n}$ $\quad f)\ U_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n}$

$g)\ U_n = \sqrt{n} + (\ln n)^{12} + \sin n$ $\quad h)\ U_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ $\quad i)\ U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$j)\ U_n = \dfrac{n(-1)^n + 1}{n + \sqrt{n}}$ $\quad k)\ U_n = \dfrac{\tan\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$ $\quad l)\ U_n = \sin\dfrac{n+1}{n^2+1}$

$m)\ U_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^4 - 1$ $\quad n)\ U_n = \sin\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$ $\quad o)\ U_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

$p)\ U_n = \ln\dfrac{n^2+2}{n^2}$ $\quad q)\ U_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(*indication : utiliser* $a^n = e^{n \ln a}$)

EXERCICE 7 : On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{{U_n}^2 + 3}{4}$

Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq 2$

EXERCICE 8 : Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

En déduire la valeur de la somme : $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$

EXERCICE 9 : On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_n = \sum_{i=0}^{i=n} a^i \qquad \text{(où } a \text{ désigne un réel non nul)}$$

a) On suppose $a \neq 1$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

b) Déterminer U_n lorsque $a = 1$.

c) Etudier la limite de (U_n) selon la valeur de a.