VI 1. Déf.

(a_n) et (b_n) $\quad n \geq N \Rightarrow b_n \neq 0$

* $a_n \ll b_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

ex : $a_n = 3n^2$ et $b_n = 7n^3 - 4n$

$a_n = \ln n$ et $b_n = n^2$

* $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

ex : $a_n = 3n^2$ et $b_n = 3n^2 - 4n + 1$

2. Réflexivité : $a_n \sim a_n$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_n} = 1$

Symétrie : $a_n \sim b_n \Leftrightarrow b_n \sim a_n$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{b_n}{a_n} = 1$$

Transitivité : . $a_n \ll b_n$ et $b_n \ll c_n \Rightarrow a_n \ll c_n$

. $a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ et } \lim \frac{b_n}{c_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \times \frac{b_n}{c_n} \right)$$

$$= 0 \times 0 = 0$$

1 1 $1 \times 1 = 1$

Tricks: * $a_n \sim b_n$ & $c_n \ll b_n \Rightarrow c_n \ll a_n$

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \qquad \frac{c_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{c_n}{a_n} = \frac{c_n}{b_n} \times \frac{b_n}{a_n}$$

$$\underbrace{\underset{\downarrow}{0} \times \underset{\downarrow}{1}}_{\to 0}$$

* $a_n \ll b_n \Rightarrow a_n + b_n \sim b_n$

* $\underline{\times \text{cste} \neq 0}$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall \beta \in \mathbb{R}^*$

- $a_n \ll b_n \Leftrightarrow \alpha a_n \ll \beta b_n$

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\alpha a_n}{\beta b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$$

- $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \alpha a_n \sim \alpha b_n$

* Multiplication membre à membre :

$a_n \ll c_n$ et $b_n \ll d_n \Rightarrow a_n \times b_n \ll c_n \times d_n$

$a_n \sim c_n$ et $b_n \sim d_n \Rightarrow a_n \times b_n \sim c_n \times d_n$

$$\frac{a_n \times b_n}{c_n \times d_n} = \frac{a_n}{c_n} \times \frac{b_n}{d_n}$$

» Puissances :

$$\forall p \in \mathbb{R}^{*+}, \quad a_n \ll b_n \iff a_n^p \ll b_n^p$$

$$\frac{a_n^p}{b_n^p} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^p$$

$$\forall p \in \mathbb{R}^{*}, \quad a_n \sim b_n \iff a_n^p \sim b_n^p$$

* <u>Inverse</u> :

$$a_n \ll b_n \iff \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}$$

$$a_n \sim b_n \iff \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$$

→ <u>Division membre à membre</u>

- $a_n \ll c_n$ et $\underbrace{b_n \ll d_n}_{\Downarrow} \Rightarrow \frac{a_n}{d_n} \ll \frac{c_n}{b_n}$

$$\frac{1}{d_n} \ll \frac{1}{b_n}$$

- $a_n \sim c_n$ et $\underbrace{b_n \sim d_n}_{\downarrow} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{c_n}{d_n}$

$$\frac{1}{b_n} \sim \frac{1}{d_n}$$

* Valeur absolue : $a_n << b_n \iff |a_n| << |b_n|$

$$a_n \sim b_n \Rightarrow |a_n| \sim |b_n|$$

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$$

3. <u>Incompatibilités</u>

$+ \begin{cases} a_n \ll c_n \text{ et } b_n \ll d_n \not\Rightarrow a_n + b_n \ll c_n + d_n \\ \quad \sim \qquad\qquad\quad \sim \qquad\qquad\qquad \sim \end{cases}$

$$\begin{aligned} a_n &= n^3 + n^2 + 5n + 3 \\ b_n &= -n^3 + n^2 + 5n + 3 \\ c_n &= n^3 \\ d_n &= -n^3 + n^2 \end{aligned}$$

$a_n \sim c_n$

$b_n \sim d_n$

$\underline{a_n + b_n} = \underline{2n^2 + 10n + 6}$

$c_n + d_n = n^2$

$\hookrightarrow 2$

Composition avec fonction

$$\lim U_n = \ell \implies \lim f(U_n) = f(\ell)$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$$

$$a_n \ll b_n \not\Rightarrow f(a_n) \ll f(b_n)$$

$$a_n \sim b_n \not\Rightarrow f(a_n) \sim f(b_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} n+1 \sim n & e^{n+1} \not\sim e^n \\ \dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e^1 = e \not\to 1 & \end{array} \right.$$

4. Utilisation avec les limites

* Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ et $\ell \neq 0 \Longleftrightarrow \underbrace{a_n \sim \ell}_{\ell \neq 0}$

$$\underbrace{a_n \sim \ell} \Longleftrightarrow \lim \frac{a_n}{\ell} = 1 \qquad \ell \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\lim a_n = \ell}$$

$\cancel{a_n \sim 0}$

* Si $\lim a_n = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{a_n \ll 1}$

$$a_n \ll 1 \Longleftrightarrow \lim \frac{a_n}{1} = 0 \Longleftrightarrow \lim a_n = 0$$

$$a_n \ll k \Longleftrightarrow \lim a_n = 0$$

$(k \neq 0)$ $\qquad$ $\cancel{a_n \ll 0}$

* Si $a_n \sim b_n$ et (b_n) admet une limite

$\Rightarrow (a_n)$ admet une limite

et $\lim a_n = \lim b_n$

5. Références : $\alpha > 0$ $a > 1$

a) $\ln n \ll n^{\alpha} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}$

$$\lim \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$$

$$n^{-2} = \frac{1}{n^2} \to 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

$$\sum_{i=0}^{i=p} a_i n^i \sim a_p n^p$$

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdot \quad + a_p n^p$$

Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

- $\ln(1+U_n) \sim U_n$
- $e^{U_n} - 1 \sim U_n$
- $\sin U_n \sim U_n$
- $\tan U_n \sim U_n$
- $(1+U_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha U_n$

- $\cos U_n - 1 \sim -\frac{1}{2} U_n^2$

exo 6 b) $U_n = e^n + n^2$

$n^2 << e^n$ donc $e^n + n^2 \sim e^n$

Donc $\boxed{U_n \sim e^n}$ et $\lim U_n = +\infty$

c) $U_n = \dfrac{n^2 + \sin(e^n)}{n^{1000} - e^{n+1}}$ $\begin{array}{l} \sim n^2 \\ \sim -e^{n+1} \end{array}$

$-1 \leq \sin(e^n) \leq 1$ et $\lim n^2 = +\infty$

donc $\lim \dfrac{\sin(e^n)}{n^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin(e^n) << n^2$

Donc $n^2 + \sin(e^n) \sim n^2$

$n^{1000} << e^{n+1} \Leftrightarrow n^{1000} << -e^{n+1}$ $(\times -1)$

Donc $n^{1000} - e^{n+1} = n^{1000} + (-e^{n+1}) \sim -e^{n+1}$

Donc $U_n \sim \dfrac{n^2}{-e^{n+1}}$ $\boxed{U_n \sim -\dfrac{n^2}{e^{n+1}}}$

et $\lim U_n = 0$

e) $$U_n = \frac{n^2 + n! + 1000^n}{(n+2)! + 1002^n}$$

- $n^2 << 1000^n << n!$

  donc $n^2 + n! + 1000^n \sim n!$

- $1002^n << (n+2)!$

  donc $(n+2)! + 1002^n \sim (n+2)!$

Donc $U_n \sim \frac{n!}{(n+2)!}$

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sim \frac{1}{n^2}$$

$\boxed{U_n \sim \frac{1}{n^2}}$ et $\lim U_n = 0$

(Rq : $n! << (n+2)!$)

l) m) n) q)

l) $U_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$

$\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ donc $\lim \frac{n+1}{n^2+1} = 0$

Donc $U_n \sim \frac{n+1}{n^2+1}$ Donc $\boxed{U_n \sim \frac{1}{n}}$

et $\lim U_n = 0$

or $\lim \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$

Donc $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{4} - 1 \sim 4 \times \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-4}{n^2}$

$$\boxed{U_n \sim \frac{-4}{n^2}}$$ et $\lim U_n = 0$

si $\lim U_n = 0$, alors $(1 + U_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha U_n$

<u>exo 6</u> tous sauf (i) et n)