Exo 1 b) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \ln\left(\frac{1}{1+n}\right)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right), x \in [0, +\infty[$$

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{(1+x)^2} = \frac{-1}{1+x} < 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow f \searrow \Rightarrow (U_n) \searrow$$

c) $U_n = (-3)^n \longrightarrow$ non monotone

Pas de fonction num associée

car $(-3)^x$ n'existe que si x est entier.

d) $U_n = 2500 + 300n - 1500 \times 0{,}8^n$

$f(x) = 2500 + 300x - 1500 \times 0{,}8^x$
$= 2500 + 300x - 1500 \times e^{x \ln 0{,}8}$

$f'(x) = 300 - \underbrace{\underbrace{1500}_{>0} \times \underbrace{\ln 0{,}8}_{<0}\, \underbrace{e^{x \ln 0{,}8}}_{>0}}_{<0}$

$a^x = e^{x \ln a}$

$(e^u)' = u' e^u$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \Rightarrow (U_n) \nearrow$

<u>Exo 5</u>

c) $U_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$

$\lim U_n = \lim \dfrac{2n^2}{-n} = \lim(-2n) = -\infty$

d) $U_n = \sqrt{n^3 - 4n + 1}$

$\lim U_n = \lim \sqrt{n^3} = +\infty$

j) $U_n = \dfrac{n^2+1}{\ln n}$

$$\lim \frac{\ln n}{n^2} = 0$$

$$\lim U_n = \lim \left[\frac{n^2}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} \right] = +\infty$$

$\dfrac{n^2}{\ln n} \to +\infty$, $\dfrac{1}{\ln n} \to 0$

k) $U_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ $\quad \lim U_n = +\infty$

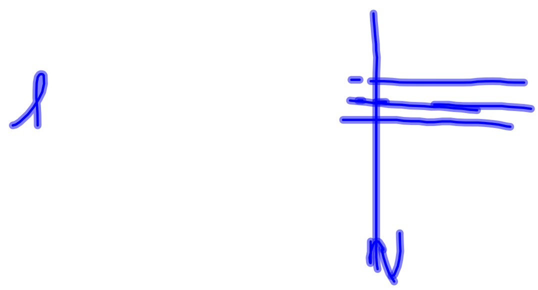
$$\lim \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

$a > 1$ $\alpha > 0$

l) $U_n = 3 \times (-2)^n$ n'a pas de limite

m) $U_n = 7 + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$\lim \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim U_n = 7$



a) $U_n = \dfrac{3^n + 2}{8^n - 1} = \dfrac{3^n\left(1 + \frac{2}{3^n}\right)}{8^n\left(1 - \frac{1}{8^n}\right)}$

$\lim \left(1 + \frac{2}{3^n}\right) = \lim \left(1 - \frac{1}{8^n}\right) = 1$

donc $\lim U_n = \lim \dfrac{3^n}{8^n} = \lim \left(\dfrac{3}{8}\right)^n = 0$

p) $U_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = \dfrac{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}$

donc $\lim U_n = -1$

q) $U_n = n - \sin n^2$

$-1 \leq \sin n^2 \leq 1$ donc $\lim U_n = +\infty$

5) $U_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1} = \dfrac{n\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{n^2+1}$

$\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ car $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc $\lim U_n = \lim \dfrac{n}{n^2} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

t) $U_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$

$(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$ sont bornés,

donc $\lim U_n = \lim \dfrac{2n}{3n} = \dfrac{2}{3}$

g) $U_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$

$$\cancel{\lim U_n = \lim \left(n - \sqrt{n^2}\right) = \lim (n - n) = 0}$$

$$U_n = n - \sqrt{n^2 + 3n + 2} = n - \sqrt{n^2\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= n\left[1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}\right]$$

FI : $\infty \times 0$

$$U_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 - (n+1)(n+2)}{n + \sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{-3n - 2}{n + \sqrt{n^2 + 3n + 2}}$$

$$= \frac{\cancel{n}\left(-3 - \frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}\right]}$$

$$\frac{(A-B) \times (A+B)}{A+B} = \frac{A^2 - B^2}{A+B}$$

donc $\lim U_n = -\frac{3}{2}$

V 1. Suites arithmétiques

- (U_n) est arithmétique ssi $\underbrace{U_{n+1} - U_n = cst}_{r}$

- Si (A_n) est arithm. de raison r.

$$A_p \xrightarrow{+r} A_{p+1} \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} A_n$$

$$\boxed{A_n = A_p + (n-p)r}$$

2. Suites géométriques.

- (U_n) est <u>géom.</u> ssi $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \underbrace{cst}_{\to\, q}$

- Si (G_n) est géom de raison q.

$$G_p \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} G_n$$

$$\boxed{G_n = G_p \times q^{n-p}}$$

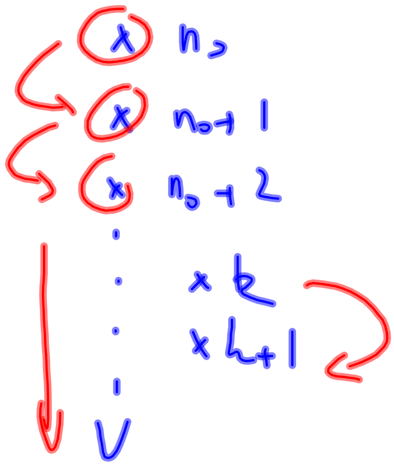
- $$\sum_{i=0}^{i=n} G_i = G_0 + G_1 + \cdots + G_n$$
$$= G_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

VII. Démonstration par récurrence

$P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$

* Initialisation : $P(n_0)$ vraie ?
* Hérédité : Si $P(k)$ vraie alors $P(k+1)$ est vraie ?

→ * $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$



Exo 8 : $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}}_{}$

$\star$ Init $(n=1)$: $\sum_{i=1}^{i=1} i = 1$

et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

* Hérédité : Supposons que $\sum_{i=1}^{i=k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

On doit montrer que, dès lors,

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} i = \sum_{i=1}^{i=k} i + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

* Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+\dots+1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$$

Exo 9 : $U_n = \underbrace{\sum_{i=0}^{i=n} a^i}$ $(a \neq 0)$

exos 3,4,7

$$\begin{cases} U_0 = a^0 = 1 \\ U_1 = a^0 + a^1 = 1 + a \\ U_2 = 1 + a + a^2 \end{cases}$$

a) $a \neq 1$. $U_n \overset{?}{=} \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

* Init $(n = 0)$: $U_0 = 1$

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = 1$$

Donc égalité vraie pour $n = 0$.

* Hérédité : Supposons que $U_k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$

Alors $U_{k+1} = \sum_{i=0}^{i=k+1} a^i = U_k + a^{k+1}$

$$= \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1}$$

$$= \frac{1-a^{k+1} + (1-a)\,a^{k+1}}{1-a}$$

$$= \frac{1-a^{k+1} + a^{k+1} - a^{k+2}}{1-a}$$

$$= \frac{1-a^{k+2}}{1-a}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$ $(a \neq 1)$

b) si $a=1$: $U_n = \sum_{i=0}^{i=n} 1^i = n+1$

c) * <u>si $a=1$</u>, $\lim U_n = \lim (n+1) = +\infty$

* <u>si $a \neq 1$</u> : $U_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

• si $-1 < a < 1$, $\lim a^{n+1} = 0$

donc $\lim U_n = \dfrac{1}{1-a}$

ex : $\sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \longrightarrow 2$

• <u>si $a > 1$</u>, $\lim a^{n+1} = +\infty$

$\Rightarrow \lim \dfrac{\overbrace{1-a^{n+1}}^{\to -\infty}}{\underbrace{1-a}_{\to <0}} = +\infty$

• <u>si $a \leq -1$</u> : (U_n) n'a pas de limite