

# SUITES NUMERIQUES

## I. DEFINITION

Une suite numérique est une application de  $\mathbb{N}$  (ou d'une partie  $E$  de  $\mathbb{N}$ ) dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{array}{rcl} U : & E \ (\subseteq \mathbb{N}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ & n & \mapsto U_n \end{array}$$

Le réel  $U_n$  est appelé **terme général** de la suite  $U$ .

La suite  $U$  peut aussi être notée  $(U_n)$ .

**Principaux modes de génération d'une suite numérique :**

- **Mode explicite :**  $U_n = f(n)$

Exemple :  $(U_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3n - 4 \sin n$

La fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = 3x - 4 \sin x$   
est la **fonction numérique associée** à la suite  $(U_n)$ .

- **Mode récurrent :**

Exemple :  $(V_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_0 = 4$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3V_n - 4 \sin V_n$

## II. VARIATIONS

Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$ .

La suite  $(U_n)$  peut être :

- stationnaire : si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$
- croissante : si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$
- décroissante : si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$

Si la suite  $(U_n)$  possède une de ces trois qualités, on la qualifie de monotone.

Au contraire, si l'ordre dans lequel sont rangés  $U_n$  et  $U_{n+1}$  est changeant, la suite  $(U_n)$  n'est pas monotone.

La comparaison de deux nombres pouvant s'obtenir à partir du signe de leur différence, la connaissance des **variations de la suite**  $(U_n)$  peut donc être obtenue par l'**étude du signe de**  $U_{n+1} - U_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

D'autre part, si la relation  $U_n = f(n)$  est connue (mode explicite), les variations de  $(U_n)$  peuvent être obtenues à partir des variations de  $f$  :

- si  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ , alors  $(U_n)$  est croissante ;
- si  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ , alors  $(U_n)$  est décroissante ;
- si  $f$  n'est pas monotone sur  $[0, +\infty[$ , on ne peut rien en déduire quant aux variations de  $(U_n)$ .

### III. BORNAGE

Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$ .

La suite  $(U_n)$  peut être : - **majorée** : si et seulement si il existe une constante réelle  $M$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$$

- **minorée** : si et seulement si il existe une constante réelle  $m$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$$

Si la suite  $(U_n)$  est majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Exemple : Soient  $(U_n)$ ,  $(V_n)$ ,  $(W_n)$  les suites numériques définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, V_n = \sin n \text{ et } W_n = \cos n$$

Ces trois suites sont bornées, car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1, -1 \leq \sin n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos n \leq 1$$

Remarques : une suite croissante est minorée par son premier terme ;  
 une suite décroissante est majorée par son premier terme

### IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE ( $n \rightarrow +\infty$ )

#### 1. Notion de limite

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$   
 (la distance de tous les  $U_n$  à  $l$  est inférieure à n'importe quel nombre strictement positif à partir d'un rang  $N$ ).

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N \Rightarrow U_n > A$   
 (tous les  $U_n$  sont supérieurs à n'importe quel nombre à partir d'un rang  $N$ ).

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N \Rightarrow U_n < A$   
 (tous les  $U_n$  sont inférieurs à n'importe quel nombre à partir d'un rang  $N$ ).

**On dit que la suite  $(U_n)$  converge lorsque  $(U_n)$  possède une limite finie.**

Proposition : **si une suite converge, alors elle est bornée.**

(la réciproque de cette implication est fausse, comme le montre l'exemple ci-dessous).

**On dit que la suite  $(U_n)$  diverge lorsque  $(U_n)$  possède une limite infinie, ou lorsque  $(U_n)$  ne possède pas de limite.**

Exemple : Soient  $(U_n)$ ,  $(V_n)$ ,  $(W_n)$  les suites numériques définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-1)^n, V_n = \sin n \text{ et } W_n = \cos n$$

Aucune de ces trois suites ne possède de limite.

**Si la suite  $(U_n)$  possède une fonction numérique associée  $f$  qui admet une limite en  $+\infty$ , alors :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

## 2. Théorèmes de comparaison

- Si  $(U_n)$  et  $(V_n)$  admettent une limite, et si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $n > N \Rightarrow U_n \leq V_n$ ,  
 alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$   
 Dès lors : si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$   
 si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ , et si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $n > N \Rightarrow V_n \leq U_n \leq W_n$   
 alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  (Théorème des gendarmes)

## 3. Cas de suites monotones

Si  $(U_n)$  est une suite croissante :

- soit  $(U_n)$  n'est pas majorée, et on a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- soit  $(U_n)$  est majorée par  $M$ , et on a alors :  $(U_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq M$

Si  $(U_n)$  est une suite décroissante :

- soit  $(U_n)$  n'est pas minorée, et on a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- soit  $(U_n)$  est minorée par  $m$ , et on a alors :  $(U_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \geq m$

## 4. Suites de référence

a)  $U_n = n^\alpha$  (puissance)

- si  $\alpha > 0$ , alors la suite  $(U_n)$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- si  $\alpha = 0$ , alors la suite  $(U_n)$  est stationnaire et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$
- si  $\alpha < 0$ , alors la suite  $(U_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

b)  $U_n = a^n$  (exponentielle)

- si  $a > 1$ , alors la suite  $(U_n)$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- si  $a = 1$ , alors la suite  $(U_n)$  est stationnaire et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$
- si  $0 < a < 1$ , alors la suite  $(U_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$
- si  $a = 0$ , alors la suite  $(U_n)$  est stationnaire et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$
- si  $a < 0$ , alors le signe de  $U_n$  change dès que  $n$  augmente de 1.

On dit alors que la suite  $(U_n)$  est alternée, et elle n'est bien sur pas monotone.

De plus, si  $-1 < a < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

si  $a \leq -1$ , alors la suite  $(U_n)$  n'a pas de limite.

## 5. Opérations sur les limites

**a) Addition. Comportement asymptotique de  $(U_n + V_n)$  :**

- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = l + l'$
- \*  $(U_n)$  est minorée et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = +\infty$
- \*  $(U_n)$  est majorée et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = -\infty$

**On obtient une forme indéterminée lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$**

**b) Multiplication. Comportement asymptotique de  $(U_n V_n)$  :**

- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n V_n = ll'$
- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n V_n = \pm\infty$  (voir remarque ci – dessous)
- \*  $(U_n)$  est bornée et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n V_n = 0$

**On obtient une forme indéterminée lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pm\infty$**

**c) Division. Comportement asymptotique de  $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$  :**

- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{l}{l'}$
- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \pm\infty$  (voir remarque ci – dessous)
- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  et  $(|V_n|)$  est minorée par un réel strictement positif  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$
- \*  $(U_n)$  est bornée et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$
- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \pm\infty$  (voir remarque ci – dessous)

**On obtient une forme indéterminée lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pm\infty$   
ainsi que lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$**

Remarque : lorsque la réponse est  $\pm\infty$ , la détermination du signe de cet infini s'opère grâce à la règle des signes de l'opération considérée (multiplication, division).

D'autre part, en présence d'une **forme indéterminée**, on peut généralement "lever l'indétermination" à l'aide de **factorisations**.

On peut éventuellement utiliser aussi les résultats suivants :

- **A l'infini, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.**
- $\forall a \in ]1, +\infty[ , \forall \alpha \in ]0, +\infty[ , \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

## V. SUITES NUMERIQUES PARTICULIERES

### 1. Suites arithmétiques

**Définition :** Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$ .

$(U_n)$  est une suite arithmétique si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - U_n = \text{constante}$$

La valeur de cette constante est alors appelée la "raison" de la suite arithmétique  $(U_n)$ .

**Propriété :** Si  $(A_n)$  est une suite arithmétique (définie sur  $\mathbb{N}$ ) de raison  $r$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A_n = A_p + (n - p)r$$

### 2. Suites géométriques

**Définition :** Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  dont aucun terme n'est nul.

$(U_n)$  est une suite géométrique si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$$

La valeur de cette constante est alors appelée la "raison" de la suite géométrique  $(U_n)$ .

**Propriété :** Si  $(G_n)$  est une suite géométrique (définie sur  $\mathbb{N}$ ) de raison  $q$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad G_n = G_p \times q^{n-p}$$

**Somme de termes consécutifs :**

Si  $(G_n)$  est une suite géométrique (définie sur  $\mathbb{N}$ ) de raison  $q$  (avec  $q \neq 1$ ), alors :

$$\sum_{i=0}^{i=n} G_i = G_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

## VI. COMPARAISON DE SUITES NUMERIQUES

### 1. Définitions

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites numériques, avec

$n > N \Rightarrow b_n \neq 0$  (la suite numérique  $(b_n)$  est non nulle à partir d'un certain rang).

- \* On dit que  **$a_n$  est négligeable devant  $b_n$** , ce qui se note  $a_n \ll b_n$ , lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

- \* On dit que  **$a_n$  est équivalent à  $b_n$** , ce qui se note  $a_n \sim b_n$ , lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

### 2. Propriétés

- \* **Réflexivité :**  $a_n \sim a_n$

- \* **Symétrie :**  $a_n \sim b_n \Leftrightarrow b_n \sim a_n$

- \* **Transitivité :**  $a_n \ll b_n$  et  $b_n \ll c_n \Rightarrow a_n \ll c_n$   
 $a_n \sim b_n$  et  $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

- \* **Relations mixtes :**  $a_n \sim b_n$  et  $c_n \ll b_n \Rightarrow c_n \ll a_n$   
 $a_n \ll b_n \Rightarrow a_n + b_n \sim b_n$

- \* **Produit par des constantes réelles non nulles :**  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall \beta \in \mathbb{R}^*,$

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \alpha a_n \ll \beta b_n$$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \alpha a_n \sim \alpha b_n$$

- \* **Multiplication :**  $a_n \ll c_n$  et  $b_n \ll d_n \Rightarrow a_n b_n \ll c_n d_n$   
 $a_n \sim c_n$  et  $b_n \sim d_n \Rightarrow a_n b_n \sim c_n d_n$

- \* **Puissance :**  $\forall p \in \mathbb{R}^{*+}, a_n \ll b_n \Leftrightarrow a_n^p \ll b_n^p$   
 $\forall p \in \mathbb{R}^*, a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n^p \sim b_n^p$

- \* **Inverse :** si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont non nulles à partir d'uncertain rang :

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}$$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$$

- \* **Division :** si  $(b_n)$  et  $(d_n)$  sont non nulles à partir d'uncertain rang :

$$a_n \ll c_n \text{ et } b_n \ll d_n \Rightarrow \frac{a_n}{d_n} \ll \frac{c_n}{b_n}$$

$$a_n \sim c_n \text{ et } b_n \sim d_n \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{c_n}{d_n}$$

- \* **Valeur absolue :**  $a_n \ll b_n \Leftrightarrow |a_n| \ll |b_n|$   
 $a_n \sim b_n \Rightarrow |a_n| \sim |b_n|$

### 3. Incompatibilités

- \* **Problème de l'addition :**

Si  $a_n \ll c_n$  et  $b_n \ll d_n$ , on n'a pas forcément  $a_n + b_n \ll c_n + d_n$

Si  $a_n \sim c_n$  et  $b_n \sim d_n$ , on n'a pas forcément  $a_n + b_n \sim c_n + d_n$

Exemple :  $a_n = n^3 + n^2 + 5n + 3$

$$b_n = -n^3 + n^2 + 5n + 3$$

$$c_n = n^3$$

$$d_n = -n^3 + n^2$$

$$\text{On a : } a_n \sim c_n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n^2 + 5n + 3}{n^3} = 1$$

$$\text{et } b_n \sim d_n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3 + n^2 + 5n + 3}{-n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-5n + 3}{-n^3 + n^2} \right) = 1$$

$$\text{Mais : } a_n + b_n \text{ n'est pas équivalent à } c_n + d_n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 10n + 6}{n^2} = 2$$

- \* **Problème de la composition avec une fonction :**

$f$  étant une fonction numérique :

Si  $a_n \ll b_n$ , on n'a pas forcément  $f(a_n) \ll f(b_n)$

Si  $a_n \sim b_n$ , on n'a pas forcément  $f(a_n) \sim f(b_n)$

$$\text{Exemple : } n + 1 \sim n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n} = 1$$

$$\text{Mais : } e^{n+1} \text{ n'est pas équivalent à } e^n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = e$$

### 4. Utilisation avec les limites

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \text{ et } l \neq 0 \Leftrightarrow a_n \sim l$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow a_n \ll 1$$

Remarque : hormis dans le cas très particulier où la suite numérique  $(a_n)$  est nulle à partir d'un certain rang, les écritures  $a_n \sim 0$  et  $a_n \ll 0$  sont erronées.

$$* \text{ Si } a_n \sim b_n \text{ et } (b_n) \text{ admet une limite, alors } (a_n) \text{ admet une limite et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$* \text{ Si } a_n \sim b_n \text{ et } (b_n) \text{ n'admet pas de limite, alors } (a_n) \text{ n'admet pas de limite.}$$

## 5. Références

a)  $\forall \alpha \in ]0, +\infty[ , \forall a \in ]1, +\infty[ ,$

$$\ln n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

b) Tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

$$\sum_{i=0}^{i=p} a_i n^i \sim a_p n^p$$

c) Autres équivalences

A partir de développements limités au voisinage de 0, on peut obtenir les équivalences suivantes :

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  ,

Alors :  $\ln(1 + U_n) \sim U_n$

$$e^{U_n} - 1 \sim U_n$$

$$(1 + U_n)^\alpha - 1 \sim \alpha U_n \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

$$\sin U_n \sim U_n$$

$$\tan U_n \sim U_n$$

$$\cos U_n - 1 \sim -\frac{1}{2} U_n^2$$

## VII. DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Lorsqu'on doit démontrer qu'une relation  $P(n)$ , dépendante d'un entier naturel  $n$ , est vraie pour tout entier naturel  $n$  (ou pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à un entier naturel  $n_0$  donné), on peut effectuer une démonstration par récurrence.

Une démonstration par récurrence comporte trois phases :

- 1) Initialisation : cette phase consiste à vérifier que  $P(n_0)$  est vraie (autrement dit : la relation  $P(n)$  est vraie pour le plus petit entier  $n$  envisagé).
- 2) Hérédité : cette phase consiste à vérifier que : si  $P(k)$  est vraie, alors  $P(k + 1)$  est vraie.
- 3) Conclusion : si la phase d'initialisation et la phase d'hérédité sont satisfaites, on conclut en affirmant que la relation  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$  .



# EXERCICES

**EXERCICE 1 :** Déterminer les variations de la suite  $(U_n)$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^{n^2+1}$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \ln\left(\frac{1}{1+n}\right)$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-3)^n$

d)  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2500 + 300n - 1500 \times 0,8^n$

(rappel :  $0,8^x = e^{x \ln 0,8}$ )

**EXERCICE 2 :** Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \frac{4n+20}{n+4}$

Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq U_n \leq 5$

(On pourra pour cela étudier le signe de  $U_n - 4$  et de  $U_n - 5$ ).

**EXERCICE 3 :**  $(U_n)$  est une suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$  telle que  $U_1 = 16$  et  $U_4 = 2$ .

Déterminer sa raison et l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 4 :** On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$   
et la suite  $(V_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 3$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$ , en fonction de  $n$ .

c) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

**EXERCICE 5 :** Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(U_n)$  dans chacun des cas suivants :

a)  $U_n = \frac{1}{n+3}$

b)  $U_n = \frac{2n}{n+1}$

c)  $U_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$

d)  $U_n = \sqrt{n^3 - 4n + 1}$

e)  $U_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

f)  $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

g)  $U_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$

h)  $U_n = \ln\left(\frac{1}{1+n}\right)$

i)  $U_n = \frac{n+e^n}{2n+e^n}$

j)  $U_n = \frac{n^2+1}{\ln n}$

k)  $U_n = \frac{2^n}{n^2}$

l)  $U_n = 3 \times (-2)^n$

m)  $U_n = 7 + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

n)  $U_n = 5^n - 4^n$

o)  $U_n = \frac{3^n + 2}{8^n - 1}$

p)  $U_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

q)  $U_n = n - \sin n^2$

r)  $U_n = \frac{n + \cos n}{n - \sin n}$

s)  $U_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$

t)  $U_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$

**EXERCICE 6 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent de  $U_n$  le plus simple possible, et en déduire la limite éventuelle de la suite  $(U_n)$  :

- a)  $U_n = n^2 + n$                       b)  $U_n = e^n + n^2$                       c)  $U_n = \frac{n^2 + \sin(e^n)}{n^{1000} - e^{n+1}}$   
 d)  $U_n = \frac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$                       e)  $U_n = \frac{n^2 + n! + 1000^n}{(n+2)! + 1002^n}$                       f)  $U_n = \frac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n}$   
 g)  $U_n = \sqrt{n} + (\ln n)^{12} + \sin n$                       h)  $U_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$                       i)  $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$   
 j)  $U_n = \frac{n(-1)^n + 1}{n + \sqrt{n}}$                       k)  $U_n = \frac{\tan \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$                       l)  $U_n = \sin \frac{n+1}{n^2 + 1}$   
 m)  $U_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^4 - 1$                       n)  $U_n = \sin \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$                       o)  $U_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$   
 p)  $U_n = \ln \frac{n^2 + 2}{n^2}$                       q)  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   
 ( indication : utiliser  $a^n = e^{n \ln a}$  )

**EXERCICE 7 :** On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 3}{4}$   
 Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $4 \leq U_n \leq 5$

**EXERCICE 8 :** Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

En déduire la valeur de la somme :  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

**EXERCICE 9 :** On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$U_n = \sum_{i=0}^{i=n} a^i$$

a) On suppose  $a \neq 1$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

b) Déterminer  $U_n$  lorsque  $a = 1$ .

c) Etudier la limite de  $(U_n)$  selon la valeur de  $a$ .