FORMULARIO DI ELETTROMAGNETISMO E DI OTTICA

NOTA:** le grandezze vettoriali sono indicate in **neretto.

ELETTROSTATICA

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = costante dielettrica assoluta ; ε_r = costante dielettrica relativa
Nel vuoto [e con buona approssimazione nell'aria] $\varepsilon_r = 1$.

Legge di Coulomb nel vuoto: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ diretta lungo la congiungente q_1 - q_2
attrattiva o repulsiva
la forza elettrostatica di Coulomb e' conservativa

Campo elettrostatico E: è il rapporto tra la forza elettrostatica cui è soggetta una carica q di prova e la carica stessa $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$ (da cui si ha $F = qE$) (nel S.I. N/C)

Energia potenziale della forza di Coulomb: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = U_{12}$ per 2 cariche
per un sistema formato da 3 cariche $U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$

Differenza di potenziale fra due punti: $V_B - V_A = \frac{L_{B\to A}}{q} = \frac{U(B) - U(A)}{q}$ (nel S.I. $J/C = Volt$)
(da cui $L_{1\to 2} = q(V_1 - V_2)$)

Potenziale elettrico di un punto P: $V_P = \frac{L_{P\to\infty}}{q} = \frac{U(P) - U(\infty)}{q}$

Relazione tra il campo elettrostatico e il potenziale:

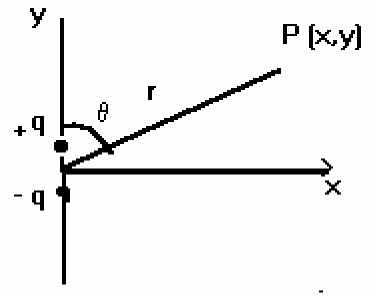
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$$

Campo elettrostatico e potenziale generati da:

- carica isolata puntiforme $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$ radiale $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$
- distribuzione discreta di carica: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

Il dipolo elettrico

Vettore momento di dipolo **p** = q **d** (nel S.I. $C \cdot m$) dove **d** è il vettore congiungente le due cariche (orientato dalla carica negativa alla positiva).



$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \qquad \cos\theta = \frac{y}{r}$$

A grande distanza dal dipolo (per r >> d):

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

In un campo esterno $\vec{\mathbf{E}}_{est}$ orientato di un angolo α rispetto a **p**:

- se il campo è uniforme il dipolo è soggetto a un momento meccanico di rotazione $\mathbf{M} = \mathbf{p} \wedge \vec{\mathbf{E}}_{est}$ di modulo $M = pE\,\mathrm{sen}\,\theta$, che tende ad allineare il dipolo con il campo est
- se il campo non è uniforme il dipolo è soggetto anche ad una forza risultante
- energia potenziale del dipolo $U = -\,\mathbf{p} \bullet \vec{\mathbf{E}}_{est} = -\,p\,E_{est}\cos\alpha$

Campo elettrostatico e potenziale generati da distribuzioni continue di carica:

$$\mathbf{E} = \int_{\text{distribuzione}} d\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad V = \int_{\text{distribuzione}} dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

- sbarretta (filo) indefinita con densità lineare λ (C/m) di carica:

  $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ radiale al filo $\qquad V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r \qquad$ d.d.p. $V_A - V_B = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{b}{a}$

- anello di raggio R, carica q in un punto P(z) sull'asse:

  $$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}} \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

- lamina isolante indefinita con distribuzione superficiale σ (C/m^2) di carica:

  $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ perpendicolare alla lamina

  $V = V_0 - \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)z$ dove V_0 = potenziale sulla sup. della lamina

- in prossimità di un conduttore: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\mathbf{n}$ dove **n** = versore della normale esterna alla superficie e σ = densità di carica superficiale (C/m^2)

- disco di raggio R con densità superficiale $\sigma = \dfrac{q}{\pi R^2}$ (C/m^2) in un punto P(z) sull'asse:

  $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \qquad V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$$

- sfera di raggio R con distribuzione volumetrica di carica $\rho = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ $\left(C/m^3 \right)$

  per $r \le R$ $\quad E = \dfrac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qr}{R^3}$ radiale $\qquad V = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3} \right) = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(3R^2 - r^2)}{R^3}$

  per $r > R$ $\quad E = \dfrac{rR^3}{3e_0 r^2} = \dfrac{1}{4pe_0}\dfrac{q}{r^2}$ radiale $\qquad V = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$

- superficie sferica di raggio R con carica totale Q o densità superficiale $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ $\left(C/m^2 \right)$

  per $r \le R$ $\quad E = 0$ $\qquad V = \dfrac{sR}{e_0} = \dfrac{1}{4pe_0}\dfrac{Q}{R}$

  per $r > R$ $\quad E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$ radiale $\qquad V = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$

Capacita' elettrica

(nel S.I. $\dfrac{Coulomb}{Volt} = Farad$)

- **di un conduttore** $\quad C = \dfrac{Q}{V}$ $\qquad$ capacita' di una sfera isolata $C = 4\pi\varepsilon_0 R$
- **di un condensatore** $\quad C = \dfrac{Q}{DV}$

  condensatore piano $\quad C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ $\qquad$ all'interno il campo e' costante $E = \dfrac{\Delta V}{d}$

  condensatore cilindrico $\quad C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln b/a}$

  condensatore sferico $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{a \cdot b}{b - a}$

Condensatori in parallelo $\quad C = C_1 + C_2$

Condensatori in serie $\quad \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}$ ....

Energia immagazzinata in un condensatore carico $\quad W = \dfrac{1}{2} C V^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2} Q V$

Forza tra le armature di un condensatore piano $\quad F = \dfrac{Q^2}{2\,\varepsilon\, A}$

Densità di energia del campo elettrostatico $\quad u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

CORRENTI ELETTRICHE

Intensità di corrente $i = \frac{dq}{dt}$ (nel S.I. $\frac{Coulomb}{\sec} = Ampere$)

Legge di Ohm V = Ri (nel S.I. la resistenza $R = \frac{V}{i}$ si misura in $\frac{Volt}{Ampere} = Ohm.[\Omega]$)

Resistenza di un conduttore ohmico $R = \rho \frac{L}{S}$

dipendenza della resistivita' dalla temperatura $\rho = \rho_0 (1 + \alpha(T - T_0))$

Resistenze in serie $R = R_1 + R_2$

Resistenze in parallelo $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} ....$

Leggi di Kirchhoff: legge dei nodi $\sum i_k = 0$

legge delle maglie $\sum i_k R_k = \sum V_k$

Effetto Joule $P = i \cdot \Delta V$ per conduttori ohmici $P = i^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}$

dove P = potenza media (Watt) e' definita come $P = \frac{Energia}{\Delta t}$ (da cui $En = P \cdot \Delta t$)

MAGNETISMO

(nel S.I. ***B*** si misura in *Tesla* nel CGS in *Gauss* 1T = 10^4 gauss)

- **Campi B generati da circuiti percorsi da una corrente i**:

  - campo generato da un filo rettilineo indefinito di raggio R:

    per r ≥ R $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ per r <R $B = \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$

  - campo sull'asse di una spira circolare di raggio R: $B = \dfrac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt{(R^2 + z^2)^3}}$

  - campo all'interno di un solenoide indefinito B = μ_0 i n dove $n = \dfrac{N_{spire}}{l}$

- **Forza magnetica agente su una carica in moto in un campo B**

  (**Forza di Lorentz**) **F** = q **v** ∧ **B** modulo $F = qvB \operatorname{sen} \theta$

  Moto di una carica q in un campo B con velocità **v** ^ **B** :

  imponendo $F_{Lorentz} = F_{centripeta}$ si ottiene raggio $R = \dfrac{mv}{qB}$ frequenza di ciclotrone $f = \dfrac{qB}{2\pi m}$

- **Forza magnetica agente su un filo lungo l percorso da una corrente i costante**

  F = i **l** ∧ **B** modulo *F = i l B sen a*

- **Forza magnetica tra due fili paralleli percorsi da corrente**: $F_{12} = \dfrac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi d}$

- **Momento meccanico di rotazione agente su una bobina formata da N spire di area A percorse da una corrente i costante** **M =** m Ù $\mathbf{B}_{est}$ con μ = N i A

Legge di induzione di Faraday-Neumann-Lenz: (il flusso di B attraverso una superficie chiusa S e' definito come Φ (B) = B·S cosθ e nel S.I. si misura in *Weber*)

$$\varepsilon_{ind/media} = -N\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} \qquad i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} \qquad q_{ind} = i_{ind}\,\Delta t = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}$$

Spira di resistenza R, lati a e b estratta con v = cost (lato *a*½®) da un campo B:

$e_{ind} = Bav$ Forza necessaria $F = iaB = \dfrac{B^2 a^2 v}{R}$

Induttanza: definizione $L = \dfrac{N\Phi(B)}{i}$ (nel S.I. si misura in *Henry*) ==> $\varepsilon_{ind/media} = -L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$

per un solenoide nel vuoto: $L = m_0 n^2 l S$

Energia immagazzinata in una induttanza $W = \dfrac{1}{2} L i^2$

Densità di energia di un campo magnetico $u = \dfrac{1}{2\mu_0} B^2$

ONDE ELETTROMAGNETICHE E OTTICA

Onda e.m. piana - sinusoidale - polarizzata linearmente che si propaga nella direzione z

$E = E_x = E_0 \, sen \, k \, (z - vt) \qquad B = B_y = B_0 \, sen \, k \, (z - vt)$

- relazioni tra i parametri dell'onda sinusoidale: $k = \frac{2p}{l}$; $l \, f = v$; $w = 2 \, p \, f$
- nelle precedenti equazioni i campi elettrici e magnetici sono legati dalle relazioni

$E_0 = v \, B_0$ (nel vuoto $E = cB$)

con v = velocità di propagazione dell'onda in un mezzo = $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$

c = velocità di propagazione nel vuoto = $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, m/sec$

Vettore di Poynting: $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ = energia trasportata nell'unita' di tempo per unita' di area

Intensità media di un'onda e.m. sinusoidale = potenza per unità di superficie $\left(\frac{Watt}{m^2}\right)$

$$< I > = \mathbf{S}_{medio} = \frac{1}{2}\mathbf{S}_{MAX} = c\varepsilon_0 (E_{medio})^2 = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

Polarizzazione

Legge di Malus $I = I_0 \cos^2 q$ Legge di Brewster $tg \, q_B = n_{12}$

Ottica geometrica

Relazione tra indice di rifrazione e costante dielettrica $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

Velocità della luce e lunghezza d'onda in un mezzo: $v = \frac{c}{n}$ $\lambda_n = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_{vuoto}}{n}$

Leggi di Snell $\theta_{inc} = \theta_{riflessione}$; $\frac{sen \, \vartheta_{1 \, inc}}{sen \, \vartheta_{2 \, rifraz}} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1}$

Angolo limite $\varphi_0 = arcsen \, \frac{n_2}{n_1}$ [$n_2 < n_1$]

Legge dei punti coniugati $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ Ingrandimento $G = \frac{h_{immag}}{h_{oggetto}} = \left|\frac{q}{p}\right|$

- per uno specchio $f = \frac{r}{2}$
- per una lente sottile $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

potere diottrico di una lente $= \frac{1}{f\,(metri)}$ in *diottrie*

Interferenza

Date due onde che si propagano nella stessa direzione e i cui vettori elettrici vibrano nello stesso piano

$$E_1 = A_1\, sen\,[k(z - vt) + f_1] \quad e \quad E_2 = A_2\, sen\,[k(z - vt) + f_2]$$

se ϕ_1-ϕ_2 è costante nel tempo (onde coerenti) ==> l'onda risultante dalla loro sovrapposizione ha intensità $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\phi_1 - \phi_2)$

Esperimento di Young della doppia fenditura

(d = distanza tra le fenditure, D = distanza fenditure-schermo)

- interferenza distruttiva $d\ sen\ \vartheta = (n + ½)\ \lambda$
- interferenza costruttiva (bande chiare) $d\ sen\ \vartheta = n\ \lambda$
- posizione della n - ma frangia luminosa $y_n = n\frac{D\lambda}{d}$
- intensita' risultante $I = I_0 \cos^2 b$ con $\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\ sen\ \vartheta$

Diffrazione da fenditura circolare:

Posizione del primo minimo nella diffrazione da un foro circolare di diametro d:

$$sen\ \vartheta = 1.22\ \frac{\lambda}{d}$$

PRINCIPALI COSTANTI DI INTERESSE PER L'ELETTROMAGNETISMO

Costante dielettrica del vuoto	ε_0	=	$8.86 \cdot 10^{-12}$ F/m
Costante di Coulomb	k	=	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \cdot 10^{9}$ m/F
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	=	$4\,\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Carica dell'elettrone/protone	e	=	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C
Massa dell'elettrone	m_e	=	$9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
Rapporto e/m per l'elettrone	e/m	=	$1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg
Massa del protone	m_p	=	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Velocità delle onde e.m. nel vuoto	c	=	$3.0 \cdot 10^{8}$ m/s
Costante di Planck	h	=	$6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s

Spettro elettromagnetico:

l **(Å)**	***f* (Hz)**	**tipo**
$< 10^{-1}$	$> 10^{19}$	*raggi* γ
$10^{-1} \div 10^{2}$	$10^{19} \div 10^{16}$	*raggi X*
$10^{2} \div 10^{3}$	$10^{16} \div 10^{15}$	*ultravioletto*
$(4 \div 8)\ 10^{3}$	$8\ 10^{14} \div 4\ 10^{14}$	*visibile*
$10^{4} \div 10^{6}$	$10^{14} \div 10^{12}$	*infrarosso*
$10^{6} \div 10^{8}$	$10^{12} \div 10^{10}$	*microonde*
$> 10^{8}$	$< 10^{10}$	*radioonde*

===== >>>

onde e.m. rivelate dall'occhio umano:

400 - 450 *nm*	violetto
450 - 500 *nm*	blu
500 - 550 *nm*	verde
550 - 600 *nm*	giallo
600 - 650 *nm*	arancio
650 - 700 *nm*	rosso

FATTORI DI CONVERSIONE

1 eV (elettron-Volt)	=	$1.6 \cdot 10^{-19}$ J
1 μ = 1 μm	=	10^{-6} m
1 *nm*	=	10^{-9} m
1 Å	=	10^{-10} m