

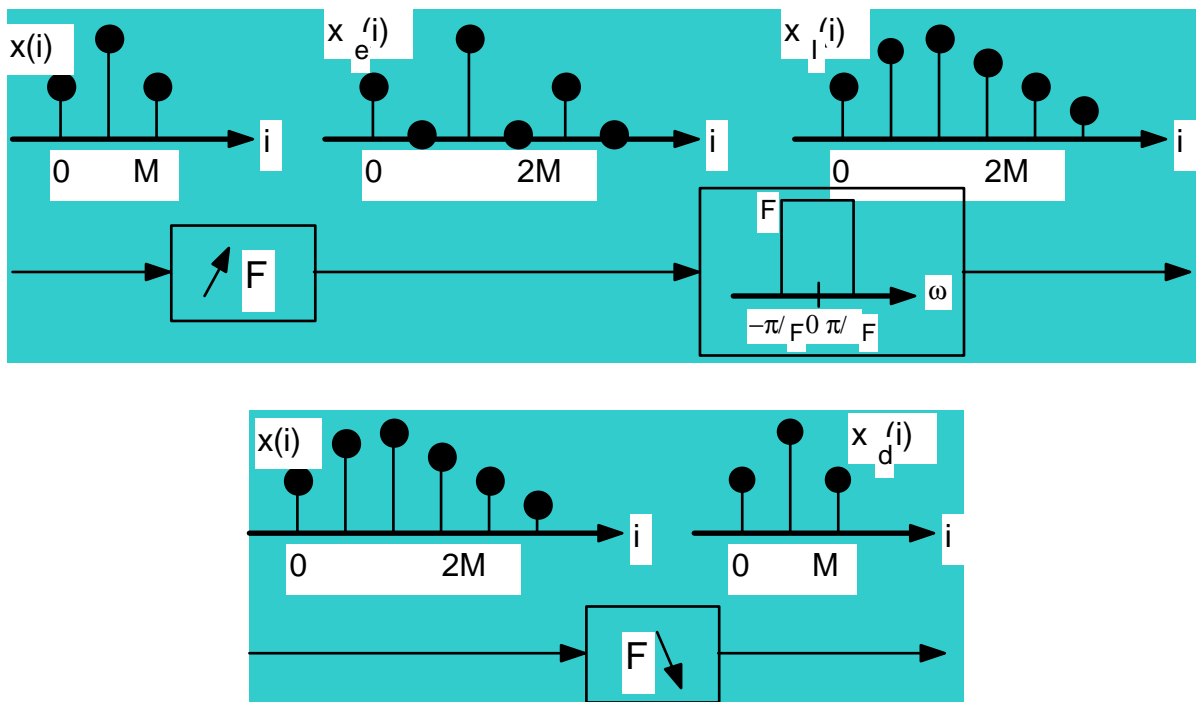
**Università' di Roma TRE**

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica**

Corso di laurea in **Ingegneria Informatica**

# **Lucidi** del corso di *Elaborazione Numerica dei Segnali* *(laurea specialistica)*

(docente: Prof. G. Giunta)



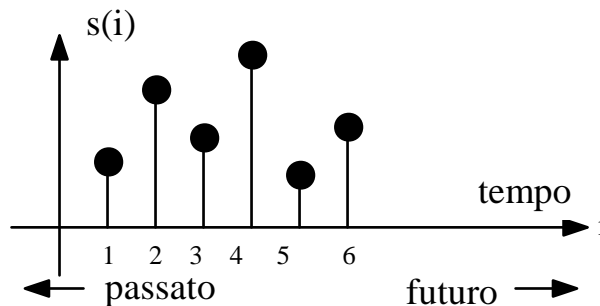
**4<sup>a</sup> edizione: aprile 2004**

(1<sup>a</sup> edizione: febbraio 1999; 2<sup>a</sup> edizione: aprile 2000; 3<sup>a</sup> edizione: aprile 2001)

*disponibile su sito WEB per download gratuito*

# SEQUENZE

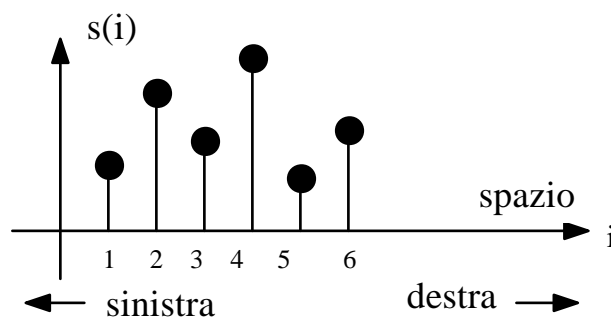
- *segnali tempo-discreti*



es.:

quotazioni mercati;  
ampiezza echi radar;  
vendite giornaliere;  
campioni di segnali tempo-continui.

- *segnali spazio-discreti*



es.:

misure di un campo acustico o elettromagnetico;  
misure da antenna a schiera;  
altezza piante in un filare;  
campioni di segnali spazio-continui.

In generale:

- *SEQUENZE: applicazioni algebriche da un dominio ad un codominio*

$$s(q) : Q \rightarrow S$$

*natura domini* {Q}: tempo, spazio, numero d'ordine, angolo, frequenza;

*natura codomini* {S}: tensione, corrente, tensione, campo EM, posizione, tempo di ritardo, frequenza;

$N = \dim\{Q\}$  e  $M = \dim\{S\}$  determinano le dimensioni del dominio e del codominio

dominio 1-D  $\rightarrow$  sequenze 1-D (es.: campioni di segn. QAM)

dominio N-D  $\rightarrow$  sequenze N-D (es.: immagini 2-D)

codominio 1-D  $\rightarrow$  sequenze semplici o scalari (es.: imm. b/n)

codominio M-D  $\rightarrow$  sequenze multiple o vettoriali (es.: colore)

- *domini usuali*

$Q \equiv K$  (interi)

$Q \equiv K \bmod N$  (interi mod.  $N \in [0, N-1]$ , es.: sequenze circolari)

$Q \equiv K \bmod N \times K \bmod M$  (matrici  $N \times M$  di indice intero mod.  $N$  ed  $M \in [0, N-1], [0, M-1]$ , es.: immagini rettangolari  $N \times M$  digitali)

- *codomini usuali*

$S \equiv K$  (sequenze digitali a valori discreti)

$S \equiv R$  (sequenze reali)

$S \equiv C$  (sequenze complesse)

$S \equiv R^3$  (sequenze vettoriali 3-D, es.: immagini a colori)

- *notazioni usuali*

$x(i)$  oppure  $x[i]_N$  ;  $x(i,j)$  oppure  $x[i,j]_{N,M}$

ove  $[i]_N$  e' la notazione compatta di  $(i \bmod N)$

- *estensione di una sequenza*

$\equiv$  il numero di elementi compreso tra il primo elemento non nullo e l'ultimo elemento non nullo, estremi inclusi (es. estensione = 6 nel segnale graficato sul lucido 1)

N.B.: se la sequenza e' multi-D, l'estensione e' calcolata per ciascuna direzione principale (es. un'immagine  $N \times M$ )

# OPERAZIONI SULLE SEQUENZE

(reali e complesse)

- *somma*

$$a(n) + b(n) = c(n)$$

- *moltiplicazione per uno scalare*

$$G \cdot a(n) = c(n)$$

- *prodotto scalare*

$$\langle a(n), b(n) \rangle = c = \sum_n a^*(n) \cdot b(n)$$

$$\langle a(n), b(n) \rangle \leq [\langle a(n), a(n) \rangle \cdot \langle b(n), b(n) \rangle]^{1/2}$$

(disuguaglianza di Schwartz)

- *prodotto scalare normalizzato*

$$c = \langle a(n), b(n) \rangle \cdot [\langle a(n), a(n) \rangle]^{-1/2} \cdot [\langle b(n), b(n) \rangle]^{-1/2} \leq 1$$

- *slittamento*

$$c(n) = a(n+k)$$

(es.: se  $k>0$  anticipo di  $k$  passi)

- *rotazione ciclica*

$$c[n]_N = a[n+k]_N$$

(es. se  $k>0$  rotazione ciclica verso sinistra)

- *ribaltamento*

$$c(n) = a(-n)$$

- *differenziazione causale (all'indietro)*

$$b(n) = a(n) - a(n-1)$$

- *differenziazione anti-causale (in avanti)*

$$b(n) = a(n+1) - a(n)$$

- *prodotto (modulazione)*

$$c(n) = a(n) \cdot b(n)$$

- *accumulazione*

$$c(n) = \sum_{i=0}^n a(i) \quad \text{si noti che: } c(n) - c(n-1) = a(n)$$

- *correlazione (lineare)*

$$c(k) = \langle a(n), b(n+k) \rangle = \sum_n a^*(n) \cdot b(n+k)$$

si noti che:  $\langle a(n), b(n+k) \rangle = [\langle b(n), a(n-k) \rangle]^*$

- *convoluzione (lineare)*

$$c(k) = a(n) \otimes b(n) = \langle a^*(n), b(k-n) \rangle = \sum_n a(n) \cdot b(k-n)$$

si noti che:  $\langle a(n), b(n+k) \rangle = a^*(-n) \otimes b(n)$

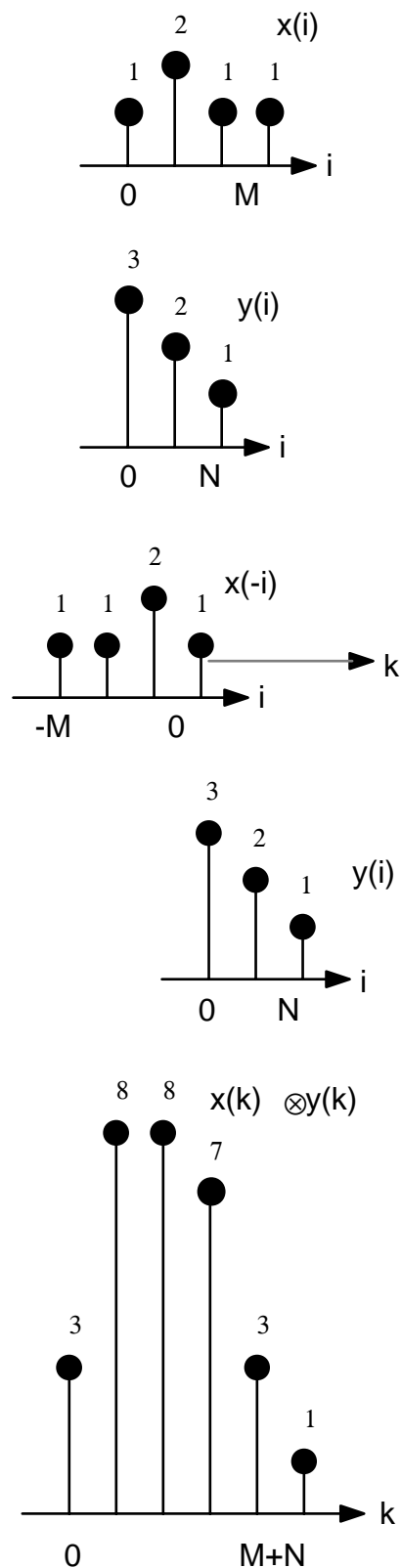
e che (proprietà commutativa):  $a(n) \otimes b(n) = b(n) \otimes a(n)$

- *correlazione circolare*

$$c[k]_N = \sum_n a^*[n]_N \cdot b[n+k]_N$$

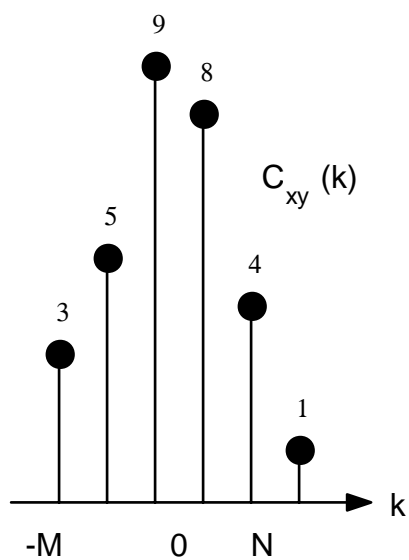
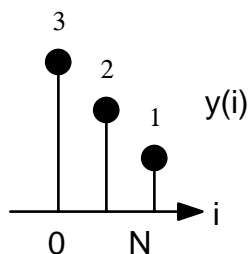
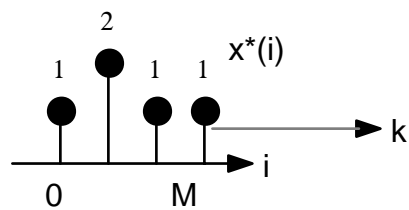
- *convoluzione circolare*

$$c[k]_N = a[n]_N \otimes_N b[n]_N = \sum_n a[n]_N \cdot b[k-n]_N$$



*Esempio di calcolo della convoluzione fra sequenze*





*Esempio di calcolo della correlazione temporale fra sequenze*

## SEQUENZE TIPICHE

- *impulso unitario*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{per } n = 0 \\ 0 & \text{per } n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{simbolo di Kronecker})$$

proprietà:  $a(n) \otimes \delta(n) = a(n)$

N.B.:  $\delta(n)$  e' una *sequenza* di significato differente dalla *funzione* impulso ideale  $\delta(t)$  (che in zero tende all'infinito) perche' e' diverso il loro dominio (*discreto* anziche' *continuo*).

- *gradino unitario (causale)*

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{per } n \geq 0 \\ 0 & \text{per } n < 0 \end{cases}$$

proprietà:  $u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i)$

- *sequenza armonica*

$$c(n) = e^{j\omega n}$$

proprietà' 1: se  $\omega N = 2\pi L$  con  $L$  intero  $\Rightarrow e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$

proprietà' 2:  $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$

## RAPPRESENTAZIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$x(n) = e^{j\omega n}$$

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_k h(k) \cdot e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_n h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

definiamo la ***risposta in frequenza*** normalizzata ( $\omega$ ):

$$H(\omega) = \sum_n h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$y(n) = H(\omega) e^{j\omega n}$$

N.B.: la variabile normalizzata  $\omega$  e' un ***angolo*** (in radianti), NON una pulsazione (in radianti per sec).

- Per evidenziare il fatto che  $H(\omega)$  e' ***per definizione***

**PERIODICA di  $2\pi$** , viene talvolta definita (come *funzione di funzione*) con il simbolo  $H(e^{j\omega})$ .

- $H(\omega)$  e' una funzione **complessa** della variabile reale  $\omega$ :

$$H(\omega) = H_r(\omega) + j H_i(\omega) = |H(\omega)| e^{j \arg\{H(\omega)\}}$$

- $H(\omega)$  e' detta ***trasformata continua di Fourier*** di  $h(n)$ :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \langle e^{-j\omega n}, x(n) \rangle$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

- *Convergenza della serie  $H(\omega)$ :*

Le sequenze assolutamente sommabili sono Fourier-trasformabili.

Le sequenze finite sono Fourier-trasformabili.

In senso limite, anche altre sequenze sono Fourier-trasformabili

(es. la sequenza armonica  $e^{j\omega n}$ ).

- *Convergenza dell'integrale  $h(n)$ :*

In realta', per i nostri scopi, ci interessa assai piu' la ***anti-trasformabilita'*** delle funzioni della frequenza normalizzata  $\omega$  (**periodiche di  $2\pi$** ).

Pertanto, valgono tutte le proprieta' della Analisi Matematica sulla convergenza degli integrali.

- *esempio: media mobile*

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N \frac{x(n+k)}{2N+1}$$

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{per } |n| > N \\ 1/(2N+1) & \text{per } |n| \leq N \end{cases}$$

$$H(\omega) = \sum_{k=-N}^N \frac{e^{-j\omega k}}{2N+1} = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left[\frac{\omega}{2}(2N+1)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

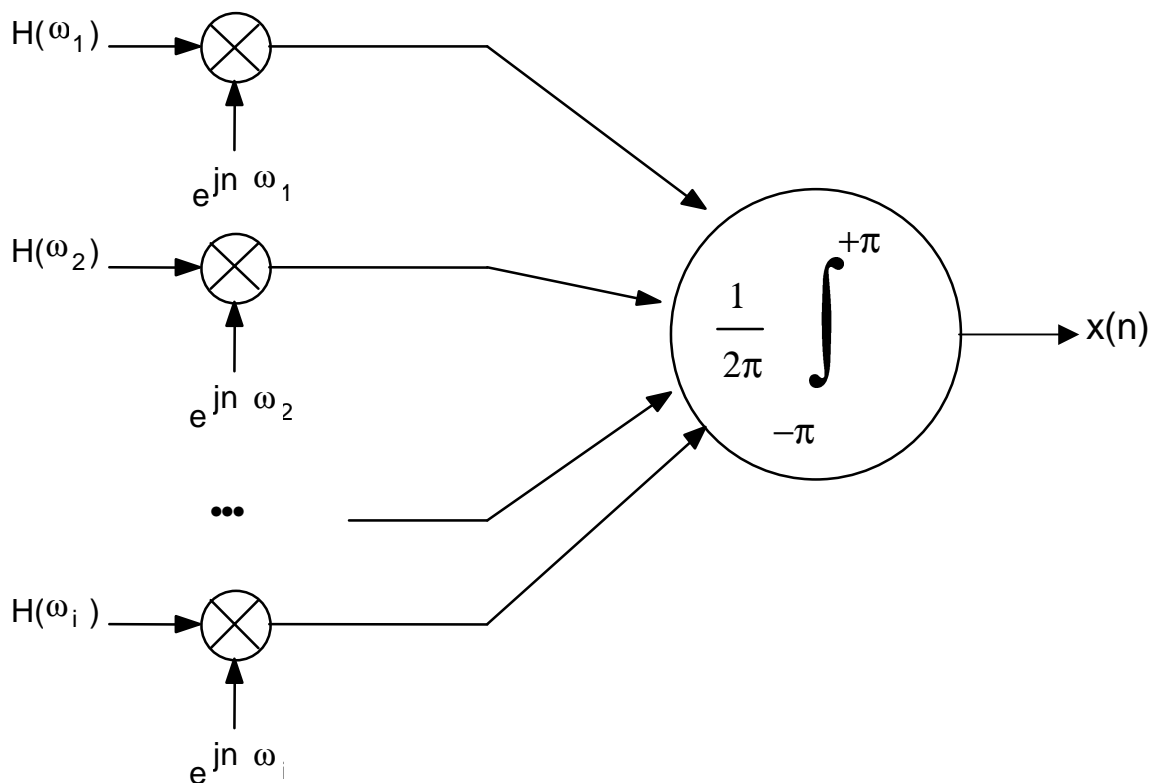
# Continuous Fourier Transform:

*interpretazione come decomposizione/sintesi armonica*

Ricordiamo:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Sia  $\{\omega_i\}$  un insieme di frequenze normalizzate (angoli) che ricopre il dominio  $[-\pi, \pi]$  in modo "sufficientemente" fitto, da poter approssimare l'integrale con la somma della serie ( $\sum_i$ ).



- *problema*: quante sono le  $\{\omega_i\}$  necessarie ?

- in generale *infinite* in  $[-\pi, \pi]$ , ma si riducono se...

- *osservazione 1*: se  $x(n)$  e' periodica, la decomposizione si riduce ad un numero *finito* di armoniche.

Infatti e' noto che la trasformata di Fourier di un segnale continuo (analogico) PERIODICO e' fatta da impulsi ideali (delte di Dirac) in frequenza posti a multipli interi dell'inverso del periodo.

Pertanto in  $[-\pi, \pi]$ , corrispondente analogicamente a  $[-f_c/2, f_c/2]$ , saranno in numero finito.

Esempio: un segnale discreto con periodicit  di 3 campioni e' esprimibile come somma di 3 sole armoniche.

- *osservazione 2*: se  $x(n)$  e' di lunghezza finita (cioe', con un periodo di estensione limitato), la decomposizione si puo' ridurre ad un numero *finito* di armoniche.

Basta infatti che  $H(\omega)$  rappresenti la trasformata della sequenza arbitrariamente costruita  **$x(n)$  periodata** (cioe'  $x(n)$  replicata infinite volte) perche' valga la proprieta' prima enunciata.

La vera sequenza  $x(n)$  si ottiene banalmente estraendo un periodo dalla sequenza antitrasformata (che e' periodica).

Esempio: un segnale discreto di lunghezza finita composto da 8 campioni e' esprimibile come somma di 8 sole armoniche.

## PROPRIETA' DELLA TRASFORMATTA CONTINUA DI FOURIER DI SEQUENZE

$$x(n) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$a x(n) + b y(n) \leftrightarrow a X(\omega) + b Y(\omega)$$

$$x(n+K) \leftrightarrow e^{j\omega K} X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

$$x(-n) \leftrightarrow X(-\omega)$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-\omega)$$

$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(\omega)$$

$$n x(n) \leftrightarrow j \, dX(\omega)/d\omega$$

$$x(n) \otimes y(n) \leftrightarrow X(\omega) Y(\omega)$$

$$x(n) y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X(\omega) \otimes Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) Y(\omega - \theta) d\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega \quad (\text{Parseval})$$

$$x(n) \text{ simmetria coniugata} \leftrightarrow X(\omega) \text{ reale}$$

$$x(n) \text{ reale} \leftrightarrow X(\omega) \text{ simmetria coniugata}$$

$$x(n) \text{ pari e reale} \leftrightarrow X(\omega) \text{ reale e pari}$$

- *risposta in ampiezza:*

E' definita dal modulo di  $H(\omega)$ .

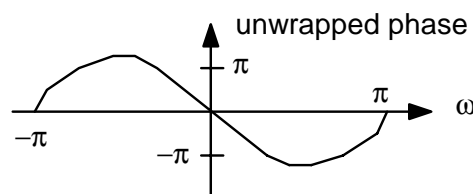
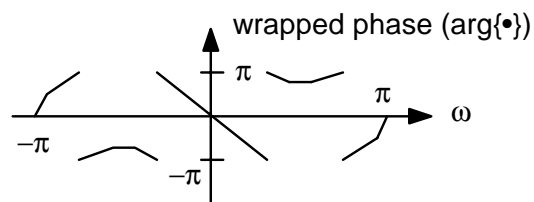
$|H(\omega)|$  e' percio' una funzione reale di variabile reale  $\omega$  in  $[-\pi, \pi]$ .

- *risposta in fase:*

E' definita dall'argomento di  $H(\omega)$ .

$\text{Arg}[H(\omega)]$  e' percio' una funzione reale di variabile reale  $\omega$  in  $[-\pi, \pi]$ .

Per comodita', e' talvolta rappresentata la risposta in fase "*srotolata*" ("*unwrapped*") definibile come la funzione *continua* data dall'integrale del ritardo di gruppo. Ad esempio:





- *ritardo di gruppo:*

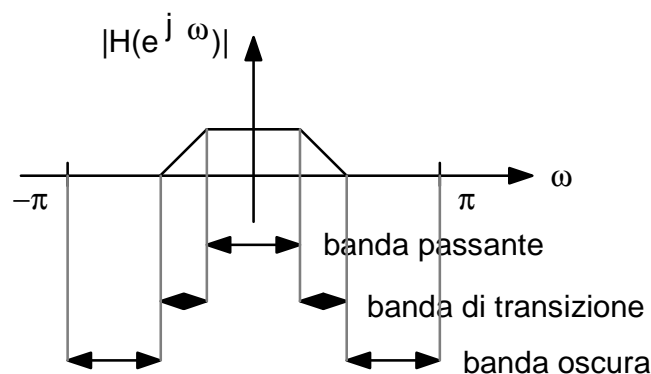
$$d(\omega) = - \frac{d \left\{ \arg [H(\omega)] \right\}}{d\omega}$$

N.B.: **fase lineare** e' equivalente a **ritardo di gruppo costante**.

**Osservazione:** i filtri con risposta impulsiva  $h(n)$  simmetrica (o antisimmetrica) hanno ritardo costante (e fase lineare) pari alla distanza temporale dall'origine del proprio centro di simmetria.

Es.:  $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$  ha ritardo di gruppo  $d=0.5$  per ogni  $\omega$ ;  
 $g(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$  ha ritardo di gruppo  $d=0.5$  per ogni  $\omega$ .

- *filtri selettivi (in ampiezza):*



**passa-basso:** banda passante include  $\omega = 0$  ed esclude  $\omega = \pm\pi$

**passa-alto:** banda passante esclude  $\omega = 0$  ed include  $\omega = \pm\pi$

**passa-banda:** banda passante esclude  $\omega = 0$  e  $\omega = \pm\pi$

- *distorsione LINEARE di fase:*

risposta di un canale ideale (guadagno costante, risposta in fase lineare, ritardo di gruppo costante):

$$h(n) = G \frac{\sin[\pi(n-d)]}{\pi(n-d)}$$

- *filtri a fase lineare*

Un filtro a fase lineare e' caratterizzato dalla relazione:

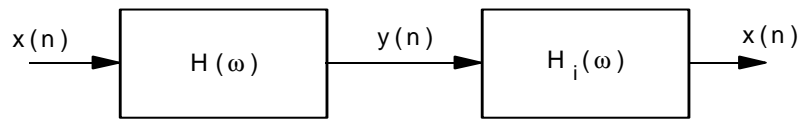
$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\omega\alpha}$$

Un filtro a fase lineare generalizzata e' caratterizzato dalla relazione:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\omega\alpha + j\beta}$$

In entrambi i casi il ritardo di gruppo e' costante e pari ad  $\alpha$ .

- *trasformazioni inverse*



per definizione:

$$H_i(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$$

pertanto:

$$h(n) \otimes h_i(n) = \delta(n)$$

*Osservazione:* l'equazione alle differenze del filtro inverso si ottiene semplicemente scambiando formalmente l'ingresso  $x(n)$  con l'uscita  $y(n)$ .

Es.: equazione che regola il transito nel filtro  $h(n)$ :

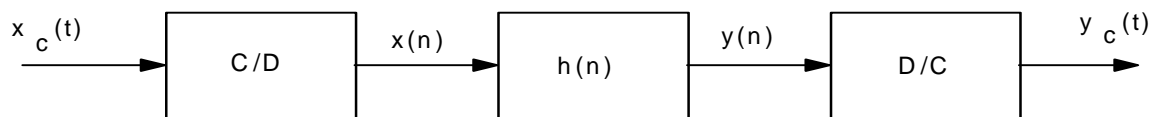
$$y(n) = x(n) - 0.5 x(n-1)$$

equazione che regola il transito nel filtro inverso di  $h(n)$ :

$$y(n) = 0.5 y(n-1) + x(n)$$

# ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI NEI SISTEMI CONTINUI

- *sistema di elaborazione a tempo discreto per emulare un sistema a tempo continuo*

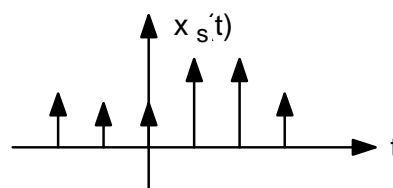
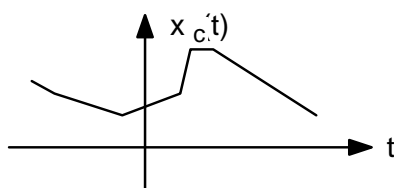


ove  $x(n) = x_c(nT)$  e  $y_c(nT) = y(n)$ , con  $T=1$ : periodo di campionamento **unitario** (per comodità di scrittura del programma di elaborazione ed al fine di rendere invariante il software di elaborazione dal clock di esecuzione).

- *A/D: campionatore ideale (matematico)*

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$$

$$x_s(t) = x_c(t) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(n) \delta(t-n)$$

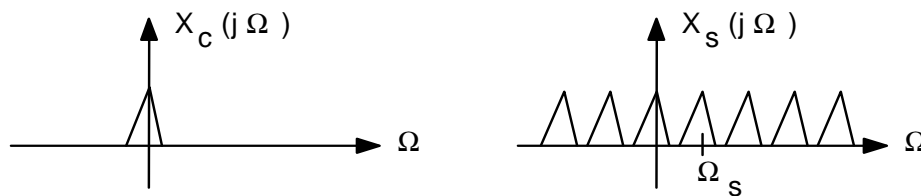


- *effetto del campionamento sullo spettro*

$$S(j\Omega) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

ove  $\Omega_s = 2\pi$  (essendo  $T=1$ )

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) \otimes S(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$



- *campionatore reale*

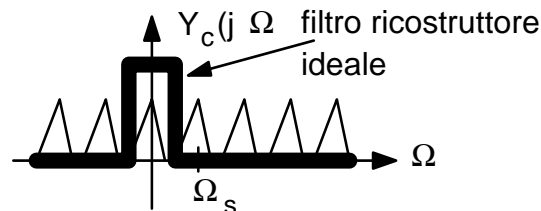
Un sistema con impulsi ideali non è realizzabile. Si usa un sistema ***sample-and-hold*** (S&H) ovvero un circuito elettronico che mantiene l'uscita al valore campionato ideale per un periodo non nullo.

Dato che la risposta in frequenza del S&H non è piatta (assomiglia ad una sinc), è necessario compensare (ove possibile) gli effetti filtranti del S&H mediante un filtro numerico inverso in cascata al filtro  $h(n)$  del sistema.

In pratica, si progetta un unico filtro che realizza la convoluzione tra  $h(n)$  e la risposta impulsiva del filtro inverso.

- *D/A: ricostruzione ideale dai campioni*

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$



- *ricostruttore reale*

Un sistema con funzioni sinc(•) di durata infinita non è realizzabile. Si usa un circuito ricostruttore approssimato che usa un **sample-and-hold** (S&H) di durata T seguito da un filtro con andamento passa-basso (attenua le alte frequenze).

La caratteristica complessiva in frequenza non è quella rettangolare di un filtro ricostruttore passa-basso ideale, sia dentro che al di fuori della banda del segnale analogico.

Per reiettare le componenti fuori-banda (caratterizzate dalla modulazione del segnale in banda a frequenze multiple di  $\Omega_s$ ) è opportuno progettare il filtro analogico ricostruttore con spiccate caratteristiche filtranti almeno a partire dalle frequenze occupate dalle repliche del segnale.

L'andamento non piatto della effettiva risposta in frequenza entro la banda passante può essere contrastato da filtri numerici avente una caratteristica inversa in frequenza (ove possibile).

Come nel caso del campionatore reale, il filtro inverso del ricostruttore può essere inglobato nel sistema numerico da progettare, mediante un unico filtro numerico.

- *implementazione numerica di trasformazioni lineari e permanenti*

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

$$Y_s(j\Omega) = X_s(j\Omega) H(\Omega)$$

$$Y_s(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

in assenza di aliasing:

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} X_c(j\Omega) H_c(j\Omega) & \text{per } |\Omega| < \pi \\ 0 & \text{per } |\Omega| \geq \pi \end{cases}$$

pertanto, essendo conveniente scrivere il codice di elaborazione numerica per  $T=1$ :

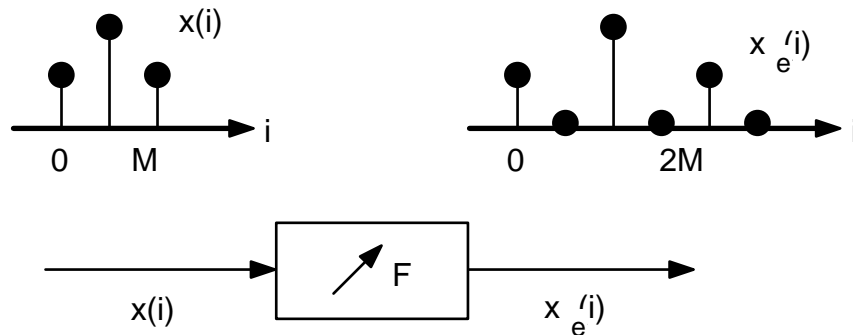
$$y_c(n) = x_c(n) \otimes h_c(n)$$

# MODIFICA DEL TASSO DI CAMPIONAMENTO

- *espansione*

$$x_e(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{F}) & \text{per } n/F \text{ intero} \\ 0 & \text{per } n/F \text{ non intero} \end{cases}$$

che corrisponde alla procedura grafica illustrata nel caso  $F=2$ :



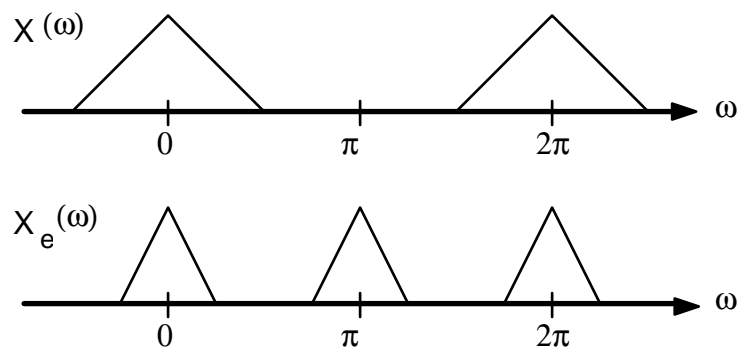


Lo spettro della sequenza espansa  $X_e(\omega)$  risulta, per definizione:

$$\begin{aligned} X_e(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{per } n/F \text{ intero}}}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) e^{-j\omega n} \underset{Fm=n}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-jF\omega m} = X(F\omega) \end{aligned}$$

ove  $X(\omega)$  e' lo spettro della sequenza originaria.

L'operazione di espansione corrisponde graficamente alla compressione di un fattore  $F$  come illustrato per  $F=2$ :



## • interpolazione

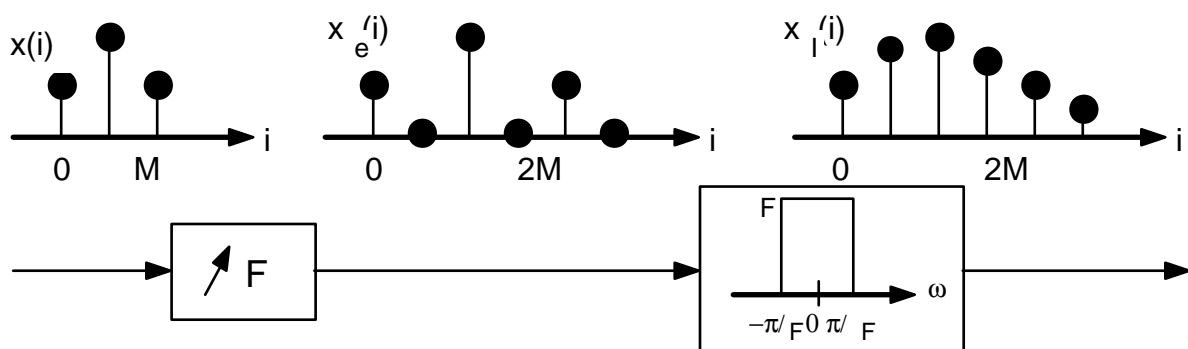
L'interpolazione analogica, corrispondente ad un sovracampionamento:

$$x(iT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - kT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - kT)} \Bigg|_{t=iT}$$

e' del tutto inadeguata per un sistema di elaborazione numerico perche', essendo implicitamente basata sull'elettronica analogica, risulta non solo troppo complessa e costosa, ma anche imprecisa (derive termiche dei componenti) e rigidamente vincolata al progetto iniziale (non e' riprogrammabile via software).

Un interpolatore **numerico**, ovvero realizzato con tecniche numeriche, e' implementabile come la cascata di un **espansore** e di un **filtro numerico passa-basso ideale**.

La figura illustra lo schema a blocchi della procedura ed un esempio di applicazione per un *fattore di interpolazione*  $F=2$ .



Il filtro **numerico** ha una risposta in frequenza  $H(\omega)$  (periodica di  $2\pi$ ):

$$H(\omega) = \begin{cases} F & \text{per } -\frac{\pi}{F} < \omega < \frac{\pi}{F} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{per } -\pi < \omega < \pi \quad (\text{periodica di } 2\pi)$$

che corrisponde ad una **sequenza** della risposta impulsiva  $h(n)$ :

$$h(n) = \frac{\sin(\frac{\pi}{F} n)}{\frac{\pi}{F} n}$$

tale che  $h(0) = 1$

ed

$h(kF) = 0$  per  $k$  intero  $\neq 0$ .

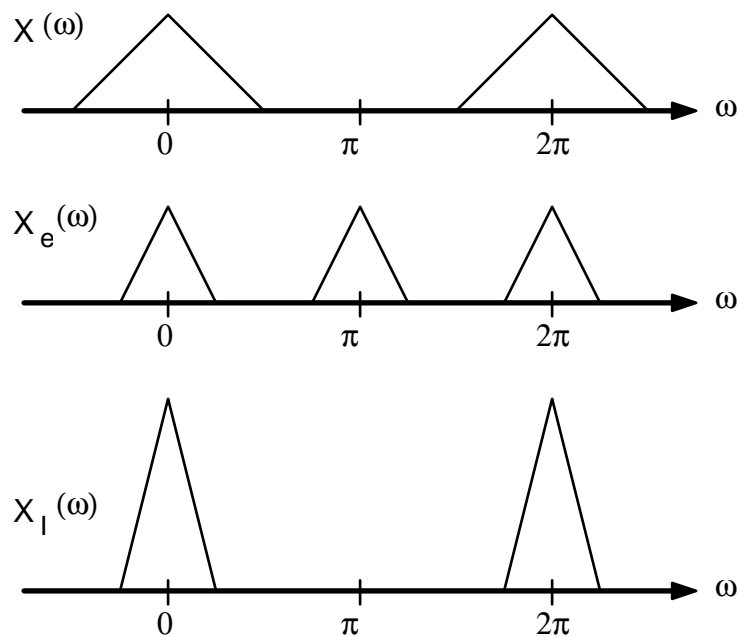
Ricordando lo spettro della sequenza espansa:

$$X_e(\omega) = X(F\omega)$$

lo spettro della sequenza interpolata risulta:

$$X_I(\omega) = \begin{cases} F \cdot X(F\omega) & \text{per } -\frac{\pi}{F} + k2\pi < \omega < \frac{\pi}{F} + k2\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

come illustra l'esempio di figura nel caso  $F=2$ .

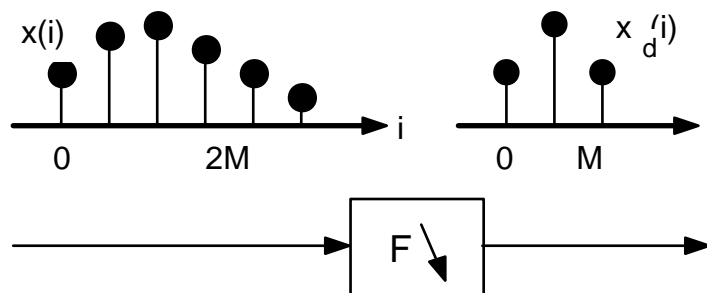


- *decimazione*

La decimazione e' definita come:

$$x_d(n) = x(Fn)$$

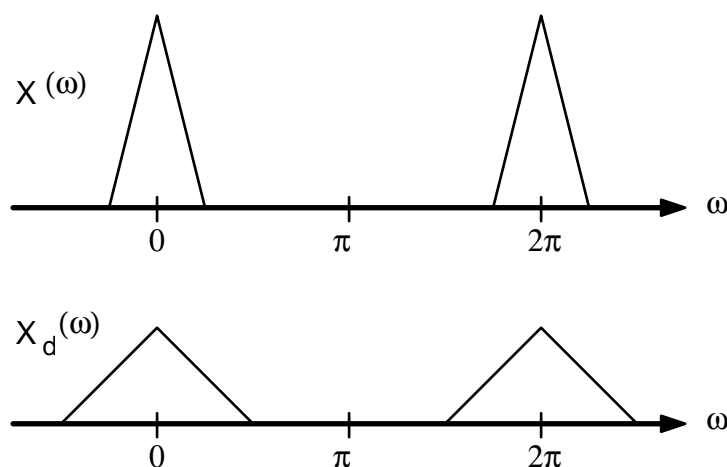
L'esempio grafico illustra l'operazione per  $F=2$ :



cui corrisponde lo spettro della sequenza decimata  $x_d(n)$ :

$$X_d(\omega) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{F-1} X\left(\frac{\omega}{F} - \frac{2\pi}{F}i\right)$$

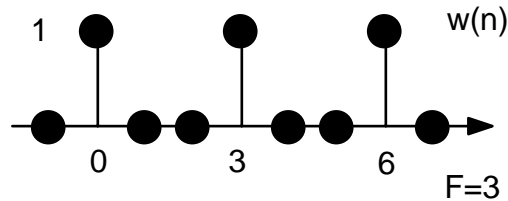
che graficamente corrisponde a quanto mostrato in figura per  $F=2$  (in assenza di aliasing):



### *DIMOSTRAZIONE ed OSSERVAZIONE sull'aliasing.*

Per valutare lo spettro della sequenza decimata  $x_d(n)$  definiamo la sequenza periodica  $w(n)$  di periodo  $F$ :

$$W(n) = \begin{cases} 1 & \text{per } n \bmod F = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

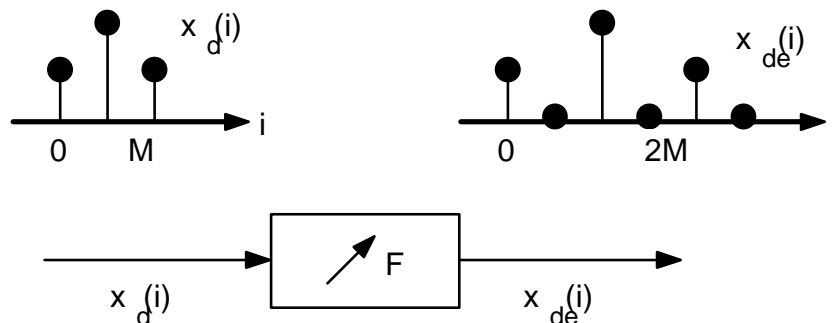


cui corrisponde lo spettro (periodico di  $2\pi$ )  $W(\omega)$ :

$$W(\omega) = \frac{2\pi}{F} \cdot \sum_{i=0}^{F-1} \delta(\omega - \frac{2\pi}{F} i)$$

Se consideriamo la sequenza  $x_w(n) = x(n) \cdot w(n)$ , questa ha la forma di una sequenza con  $F-1$  nulli, corrispondente al risultato della espansione della sequenza decimata  $x_d(n)$ :

$$x_w(n) = x_{de}(n) = \begin{cases} x_d(\frac{n}{F}) & \text{per } n/F \text{ intero} \\ 0 & \text{per } n/F \text{ non intero} \end{cases}$$



per cui:

$$X_w(\omega) = X_{de}(\omega) = X_d(F\omega) \quad \text{ovvero} \quad X_d(\omega) = X_w(\omega/F)$$

Essendo lo spettro  $X_w(\omega)$  della sequenza  $x_w(n)=x(n)\cdot w(n)$  pari a:

$$X_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) \otimes W(\omega)] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) W(\omega - \theta) d\theta = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{F-1} X(\omega - \frac{2\pi}{F} i)$$

si ottiene pertanto lo spettro della sequenza decimata  $x_d(n)$ :

$$X_d(\omega) = X_w(\frac{\omega}{F}) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{F-1} X(\frac{\omega}{F} - \frac{2\pi}{F} i)$$

Pertanto lo spettro della sequenza decimata risulta attenuato in altezza del fattore  $F$ , espanso e replicato in modo da risultare comunque periodico di periodo  $2\pi$ , cioè:

$$X_d(\omega) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{F-1} X(\frac{\omega}{F} - \frac{2\pi}{F} i)$$

*Osservazione 1.* Se si desidera rappresentare correttamente un segnale campionato, e' necessario controllare che lo spettro della sequenza decimata non comporti sovrapposizioni spettrali (aliasing). Infatti, l'operazione di decimazione, come del resto anche il sottocampionamento analogico, ***non prevede alcun pre-filtraggio anti-aliasing***.

*Osservazione 2.* La decimazione e' un'operazione "***a rischio***", poiche' non comporta perdite informative se e solo se lo spettro possiede in realta' una larghezza di banda  $F$  volte piu' ristretta rispetto al dominio di Fourier originario.

# PROGETTAZIONE DI FILTRI NUMERICI A RISPOSTA IMPULSIVA FINITA (FIR)

- *metodo delle finestre*

E' una tecnica che consente di progettare un filtro con risposta  $h(n)$  con  $n$  appartenente ad un dominio FINITO, al fine di implementare l'operazione di filtraggio di un segnale discreto mediante CONVOLUZIONE di estensione limitata (operazione realizzabile in un tempo FINITO):

$$y(n) = h(n) \otimes x(n)$$

Data una risposta in frequenza desiderata  $H_d(\omega)$ , funzione continua periodica di periodo  $2\pi$  della variabile  $\omega$ , e' possibile risalire alla **sequenza** della risposta impulsiva  $h_d(n)$  del filtro numerico che gli corrisponde.

Questa e' infatti ottenibile come antitrasformata di Fourier della  $H(\omega)$ , definita nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , in base alla nota relazione:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

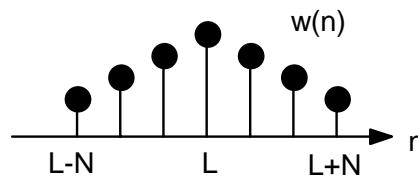


Ove possibile, si effettua l'operazione di antitrasformazione per via analitica. Altrimenti, possono essere usate procedure numeriche per calcolare l'integrale definito prima espresso.

La sequenza  $h_d(n)$  e', in generale, di lunghezza infinita. Per questo motivo essa viene normalmente troncata utilizzando opportune funzioni "*finestra*".

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

ove  $w(n)$  e' una sequenza di lunghezza finita (ovvero assume valore nullo al di fuori di un certo intervallo), simmetrica, non decrescente a sinistra e non crescente a destra del centro di simmetria. Ad es.:

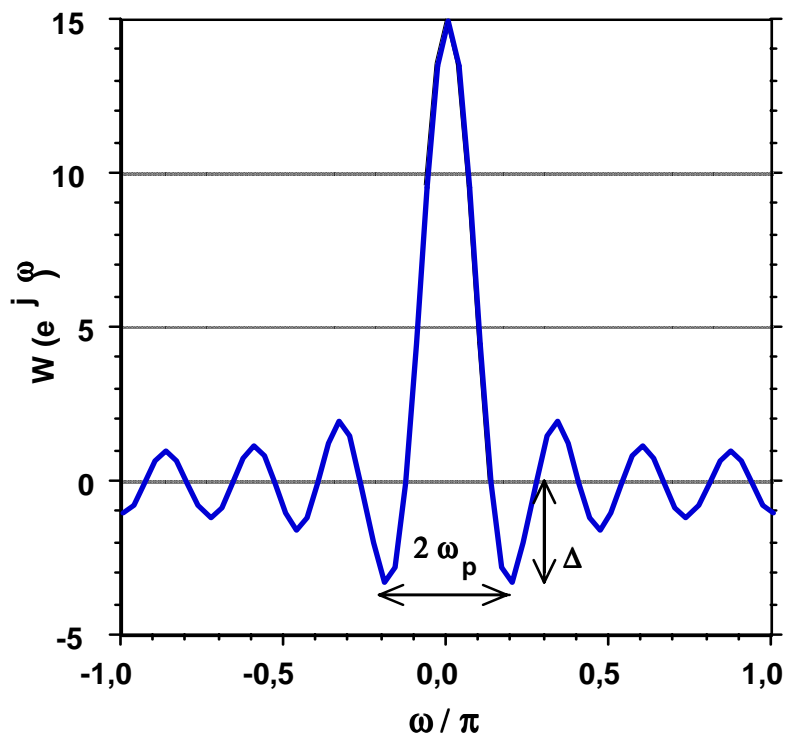


Fra le caratteristiche delle numerose *finestre* proposte in letteratura, basti qui ricordare che l'estrazione di campioni della  $h_d(n)$  deve essere tale da poter assumere *trascurabile* il contributo dei campioni non considerati.

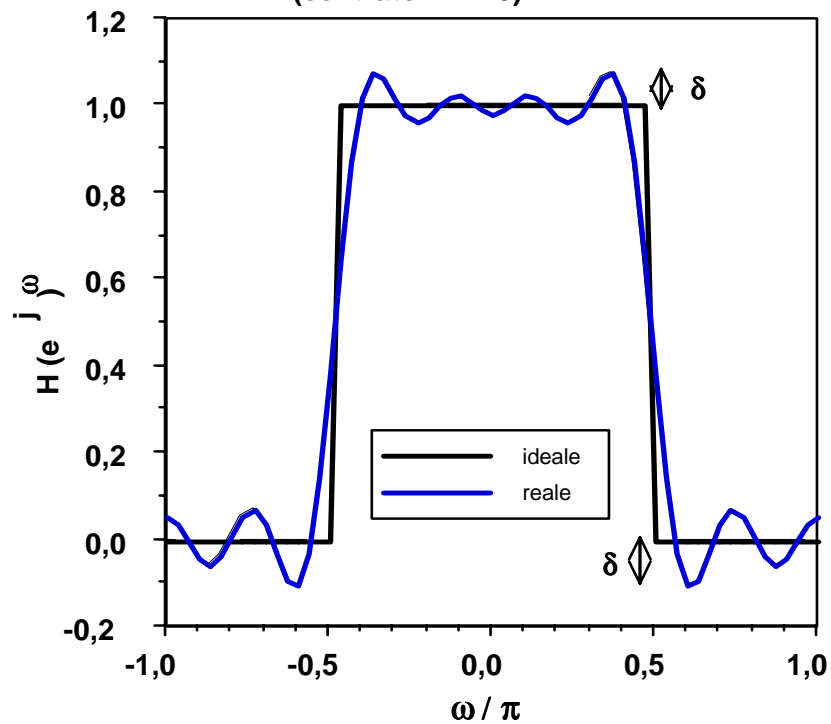
In pratica, il criterio e' quello di trascurare le code della sequenza della risposta impulsiva laddove tutti gli ulteriori campioni sono minori, in modulo, di una certa prefissata entita' (ad esempio: il 10% del massimo valore del modulo della risposta).

Pertanto, il metodo di progetto di filtri *FIR* mediante l'antitrasformata di Fourier e' spesso citato in letteratura come "*metodo delle finestre*".

**Traformata di Fourier della finestra  
rettangolare (centrata in  $L=0$ )**



**Risposta in frequenza  
di un filtro passa-basso  
(centrato in  $L=0$ )**



- *finestre di comune impiego*

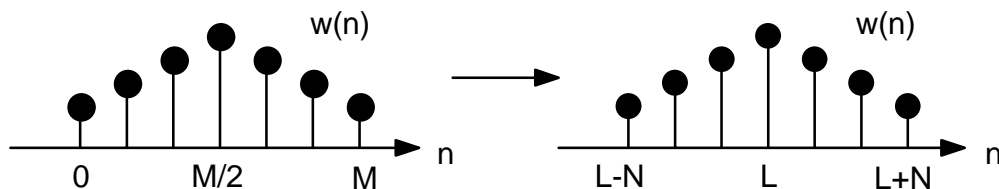
**convenzione:** per semplicità, supporremo le finestre causali con  $0 \leq n \leq M$ , centrate in  $n = M/2$ .

Tuttavia, le relazioni seguenti sono valide per finestre generiche con  $L-N \leq m \leq L+N$ , centrate in  $m = L$ , operando le sostituzioni:

$$M = 2N \quad n = m - L + N$$

Un modo pratico per valutare correttamente i campioni delle finestre consiste in:

- 1) calcolare i valori dei campioni utilizzando le espressioni seguenti, relative a finestre causali
- 2) traslare la sequenza calcolata in modo da centrarla attorno alla sequenza della risposta impulsiva.



- rettangolare

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- triangolare (Barlett)

$$w(n) = \begin{cases} 2n / M & \text{per } 0 \leq n \leq M / 2 \\ 2 - 2n / M & \text{per } M / 2 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- coseno rialzato (Hanning)

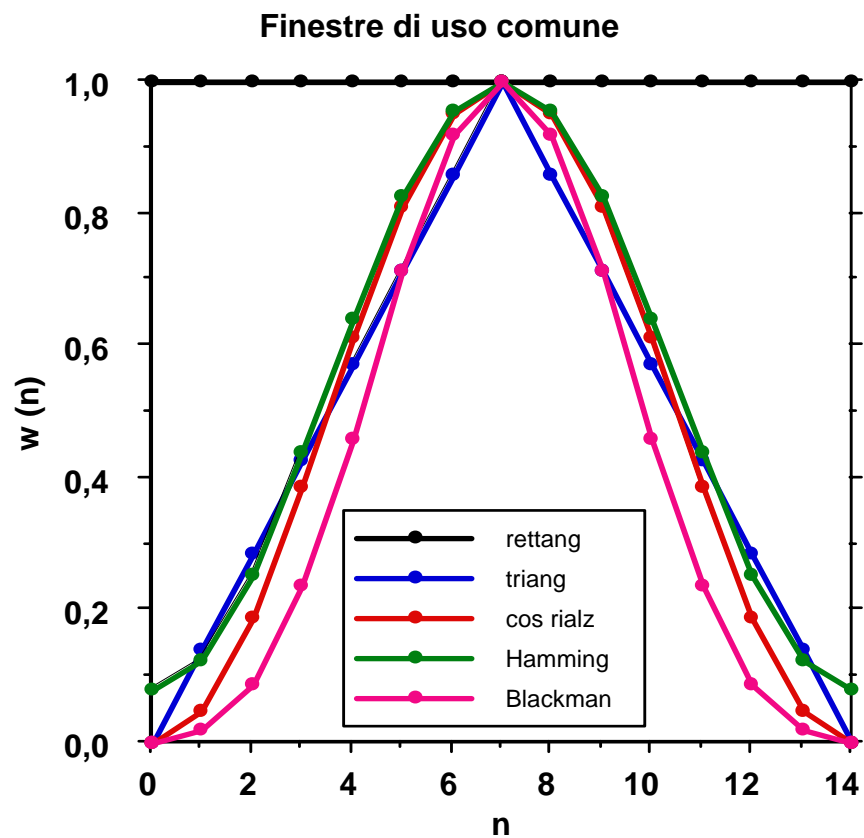
$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / M) & \text{per } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- coseno rialzato modificato (Hamming)

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / M) & \text{per } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n / M) + 0.08 \cos(4\pi n / M) & \text{per } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- *caratteristiche principali delle finestre di uso comune*

Le finestre si differenziano per:

- 1) ampiezza rel. del picco del lobo laterale in frequenza ( $\Delta$ )
- 2) larghezza del lobo principale in frequenza ( $2\omega_p$ )
- 3) errore di picco nel gradino frequenziale ( $\delta$ )

I dati per queste tre caratteristiche sono riassunti nella tabella:

	$\Delta$ (dB)	$2\omega_p$	$\delta$ (dB)
rettangolare	-13	$4\pi/(M+1)$	-21
triangolare	-25	$8\pi/(M+1)$	-25
cos rialzato	-31	$8\pi/(M+1)$	-44
Hamming	-41	$8\pi/(M+1)$	-53
Blackman	-57	$12\pi/(M+1)$	-74

Infatti:

La larghezza della banda di transizione e' uguale alla larghezza del lobo principale della trasformata della finestra (dipende da M).

Il livello delle oscillazioni e' legato all'area dei lobi laterali (non dipende da M).

- *finestre parametriche (Kaiser)*

$$w(n) = \begin{cases} I_0 \left\{ \beta \left[ 1 - \left( \frac{n-M/2}{M/2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} & \text{per } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ove  $I_0(\bullet)$  e' la funzione di Bessel modificata di primo tipo di ordine zero.

La finestra di Kaiser ottimizza le caratteristiche spettrali operando sui parametri:

$\beta$ : determina il livello di oscillazione  $\delta$  (picco dell'errore della risposta in banda passante ed in banda oscura)

$M$ : determina la larghezza della regione di transizione  $\Delta\omega$  definita come  $(\omega_s - \omega_p)$

posto:  $\gamma = -20 \log \delta$ , si ha:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\gamma - 8.7) & \text{per } \gamma > 50 \\ 0.5842(\gamma - 21)^{0.4} & \text{per } 21 \leq \gamma \leq 50 \\ 0 & \text{per } \gamma < 21 \end{cases}$$

N.B.: nel caso  $\beta=0$ , il metodo di Kaiser si riduce nella finestra rettangolare.

- *riepilogo della procedura di progetto FIR*

- 1) esprimere la risposta in frequenza del filtro desiderata;
- 2) normalizzare la scala delle frequenze e dei tempi in modo da ottenere un periodo di campionamento unitario ( $T=1$ );
- 3) (eventuale) se la banda occupata dalla risposta desiderata eccede  $[-\pi, \pi]$ , considerare soltanto la risposta in frequenza interna all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  (si suppone infatti che il segnale di ingresso sia stato campionato secondo Nyquist);
- 4) eseguire la trasformata inversa di Fourier, ottenendo una sequenza la cui lunghezza (in generale) può essere infinita;
- 5) selezionare una finestra (tipo e lunghezza) da applicare alla sequenza della risposta impulsiva;
- 6) (eventuale, solo per realizzazioni in tempo reale) ritardare il risultato di un numero di campioni (minimo) tale da assicurare la causalità;
- 7) verificare il soddisfacimento delle specifiche calcolando la risposta in frequenza del filtro FIR realizzato (cioè quanto il filtro realizzato assomiglia al filtro desiderato) ed, eventualmente, rilesionare una nuova finestra (es.:  $M$  più grande) ritornando al punto 5.



- *sequenze analitiche e filtro di Hilbert*

- si definiscono le seguenti sequenze associate ad  $s(n)$ :

-) *sequenza analitica*  $s_a(n)$  di  $s(n)$ :

$$S_a(\omega) = H(\omega) S(\omega)$$

$$s_a(n) = h(n) \otimes s(n)$$

-) *trasformata di Hilbert*  $s_h(n)$  di  $s(n)$ :

$$S_h(\omega) = Q(\omega) S(\omega)$$

$$s_h(n) = q(n) \otimes s(n)$$

ove:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < \omega \leq \pi \\ 0 & \text{per } -\pi \leq \omega \leq 0 \end{cases}$$

$$H(n) = \frac{1}{2} [\delta(n) + jq(n)]$$

ove  $q(n)$  e' (risposta impulsiva del *filtro numerico di Hilbert*):

$$Q(\omega) = -j \operatorname{sgn}[\sin(\omega)] = \begin{cases} -j & \text{per } 0 < \omega < \pi \\ 0 & \text{per } \omega = 0, \omega = \pi \\ j & \text{per } -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

$$q(n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) & \text{per } n \neq 0 \\ 0 & \text{per } n = 0 \end{cases}$$

In pratica, il filtro di Hilbert e' progettato come FIR mediante una finestra centrata in  $n=0$  di lunghezza "opportuna".

# TRASFORMATTA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

- *definizione*

La *trasformata discreta di Fourier* (Discrete Fourier Transform - **DFT**) di una sequenza  $x(n)$  di lunghezza  $N$ , e' una sequenza  $X(k)$ , di lunghezza  $N$ , definita dalla:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

mentre la *trasformata discreta inversa di Fourier* (Inversa Discrete Fourier Transform - **IDFT**) di una sequenza  $X(k)$  di lunghezza  $N$ , e' una sequenza  $x(n)$ , di lunghezza  $N$ , data da:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

La *trasformata discreta di Fourier* e' utilizzata in molte applicazioni di base dell'elaborazione numerica dei segnali, quali calcolo di *correlazioni* e *convoluzioni circolari*, *filtraggi* e *stime spettrali*. La popolarita' risiede nel fatto che tali operazioni sono immediate nel dominio trasformato discreto di *Fourier* e nel fatto che esistono algoritmi di calcolo rapido della *DFT* (la trasformata discreta veloce di Fourier - *Fast Fourier Transform* - **FFT**), facilmente implementabili su un processore numerico, talvolta addirittura integrati su componenti elettronici appositi.

- *DFT ed IDFT come sviluppo della sequenza su base ortogonale*

Definiti i vettori:

$$\underline{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

$$\underline{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

e le matrici simmetriche A e B di dimensione  $N \times N$ , i cui elementi  $\{a_{nk}\}$  e  $\{b_{nk}\}$ , con  $0 \leq n \leq N-1$  (indice di riga) e  $0 \leq k \leq N-1$  (indice di colonna), sono:

$$\{a_{nk}\} = \{a_{kn}\} = \{e^{-j2\pi nk/N}\}; \quad \{b_{nk}\} = \{b_{kn}\} = \{e^{j2\pi nk/N}\}/N$$

le trasformazioni DFT ed IDFT possono pertanto essere espresse mediante gli operatori lineari A e  $B=A^{-1}$  come:

$$\underline{X} = A \underline{x} \quad \underline{x} = A^{-1} \underline{X} = B \underline{X}$$

Poiche' i vettori componenti la matrici  $A/\sqrt{N}$  e  $B \cdot \sqrt{N}$  sono ortogonali e di modulo unitario, gli operatori corrispondenti sono delle semplici rotazioni di coordinate.

Per tali trasformazioni valgono percio' le proprieta' geometriche delle trasformazioni ortonormali (ad esempio, conservazione delle distanze).

**Osservazione:** la base naturale (un uno e tutti zeri) e quella DFT non sono le sole base ortogonali, ma se ne possono definire moltissime altre (tutte le rotazioni rigide di coordinate).

La validita' della rappresentazione scelta consiste nella capacita' di rappresentare in forma compatta (con pochi bit) i coefficienti dello sviluppo nella base scelta. In altre parole, occorrerebbe ricercare la rappresentazione che riduce l'entropia dei coefficienti dello sviluppo.

- *convoluzione circolare*

In molti casi, e' conveniente effettuare l'operazione di convoluzione (filtraggio) tra due sequenze di lunghezza  $N$  passando attraverso il dominio della frequenza, ove questa si riduce ad un semplice prodotto termine a termine.

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \mathbf{F}^{-1} \{X(\omega) H(\omega)\}$$

Sfortunatamente, il risultato dell'operazione:

$$v(n) = x(n) \otimes_N h(n) = \text{IDFT} \{X(k) H(k)\} \text{ ovvero}$$

$$v[n]_N = x[n]_N \otimes_N h[n]_N = \sum_n x[n]_N \cdot h[k-n]_N$$

non coincide con il risultato di una convoluzione lineare

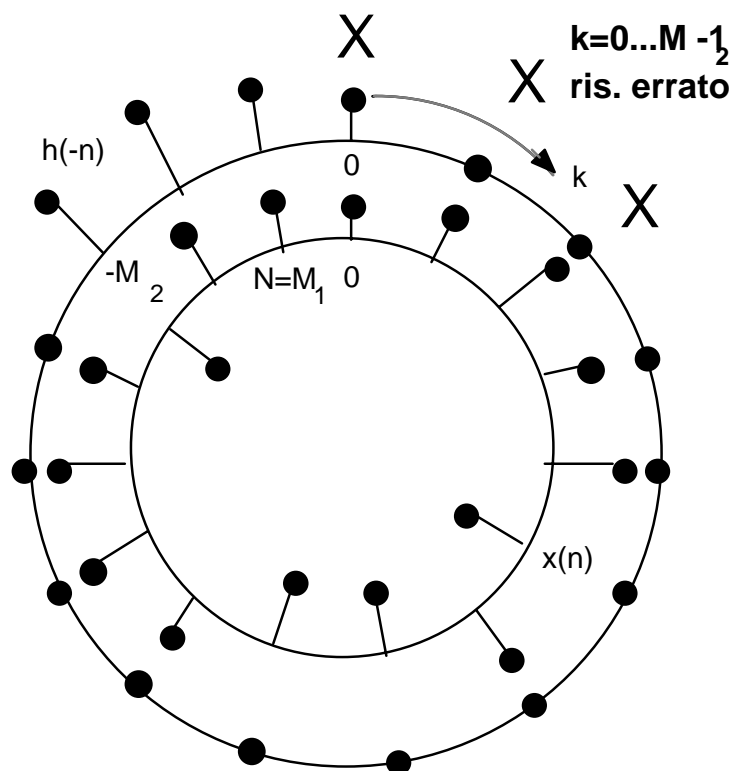
$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_n x(n) \cdot h(k-n)$$

a causa, appunto, della periodicit  o circolarit  delle sequenze in gioco.

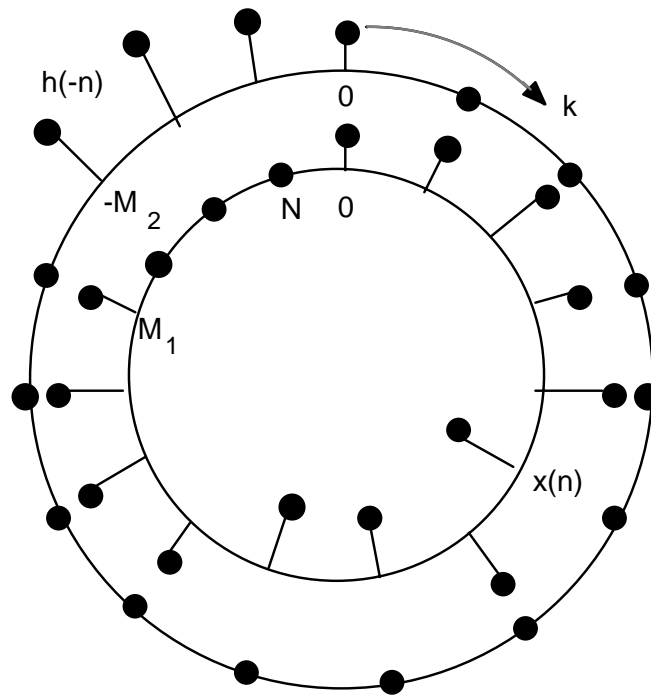
Dato che la correlazione circolare opera su sequenze di uguale lunghezza (es.  $0 \leq n \leq N$ ), e' necessario allungare la sequenza piu' corta (es.  $0 \leq n \leq M_2$ ) con un numero sufficiente di zeri per renderla estesa quanto la sequenza piu' lunga (es.  $0 \leq n \leq M_1$ ), assumendo cosi'  $N=M_1$ .

Per calcolare correttamente il risultato della convoluzione lineare tra le due sequenze (costituite da elementi non nulli per  $0 \leq n \leq M_1$  e  $0 \leq n \leq M_2$ ), e' indispensabile conoscere per quali valori di  $k$  questo risulta errato a causa dell'errore di circolarita'.

In tale caso, infatti, vi sono  $M_2$  valori errati ed e' sufficiente ignorare il risultato di una convoluzione circolare per  $0 \leq k \leq M_2-1$ .



Per ovviare a questo inconveniente, che introduce un **ERRORE** sul risultato per alcuni valori di  $k$ , e' possibile allungare per  $0 \leq n \leq N$  le sequenze in gioco (costituite da elementi non nulli per  $0 \leq n \leq M_1$  e  $0 \leq n \leq M_2$ ) con un numero sufficiente di zeri tale che  $N \geq M_1 + M_2$  (zero-padding).



Talvolta e' necessario filtrare sequenze indefinitamente lunghe (es. alcuni milioni di campioni) mediante filtri con risposta impulsiva abbastanza corta (es. 64 o 128 campioni).

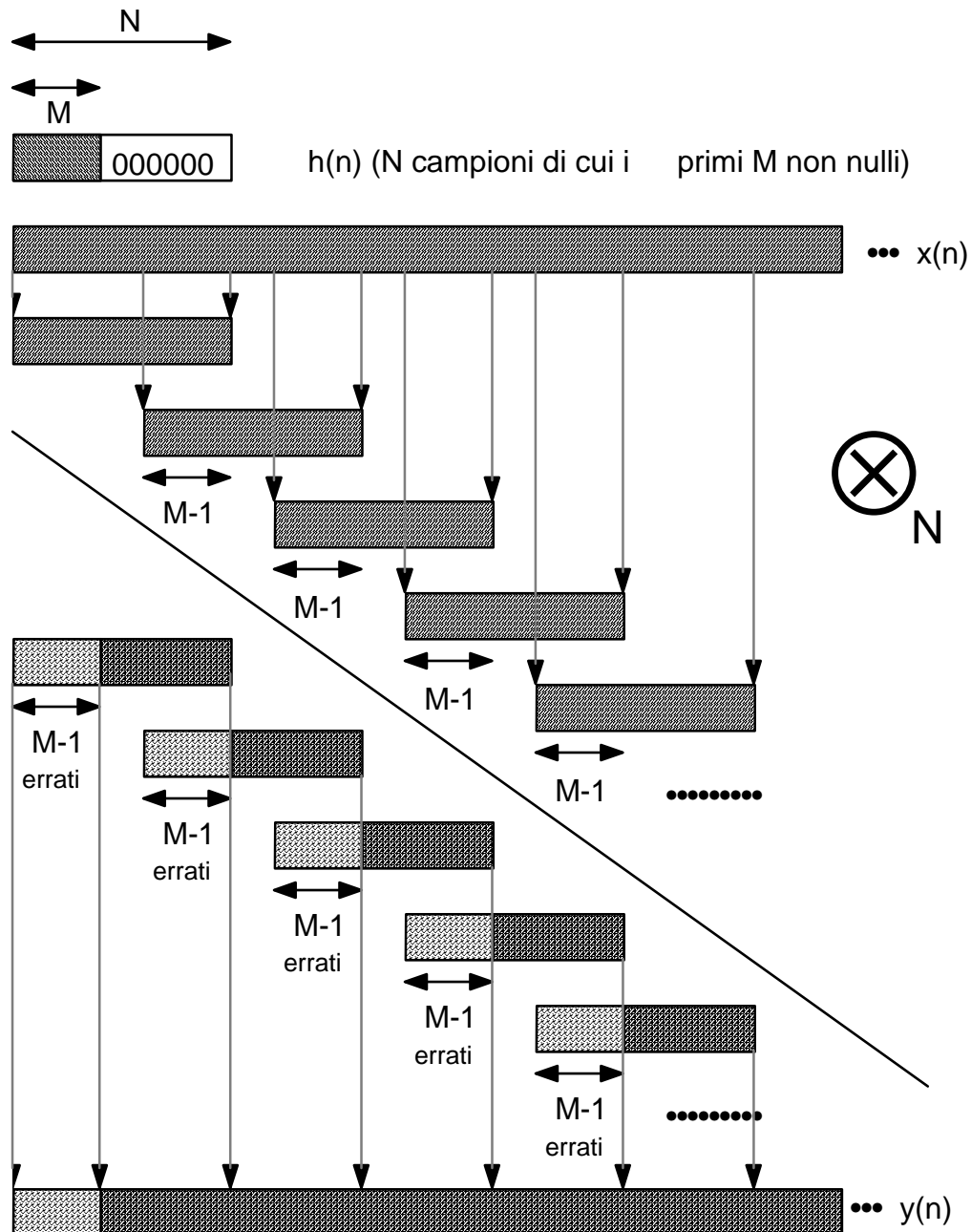
In tale caso conviene operare con procedure a dati segmentati (a blocchi) per realizzare l'intero filtraggio.

In base alle due possibilita' prima illustrate (cioe': ignorare alcuni risultati oppure allungare con zeri le sequenze), esistono due procedure che hanno il nome di:

- 1) sovrapposizione ed estrazione (overlap and save);**
- 2) sovrapposizione e somma (overlap and add).**

- *procedura di overlap and save*

Mediante un algoritmo per il calcolo della convoluzione circolare su  $N$  campioni (operazioni modulo  $N$ ), si ottiene:

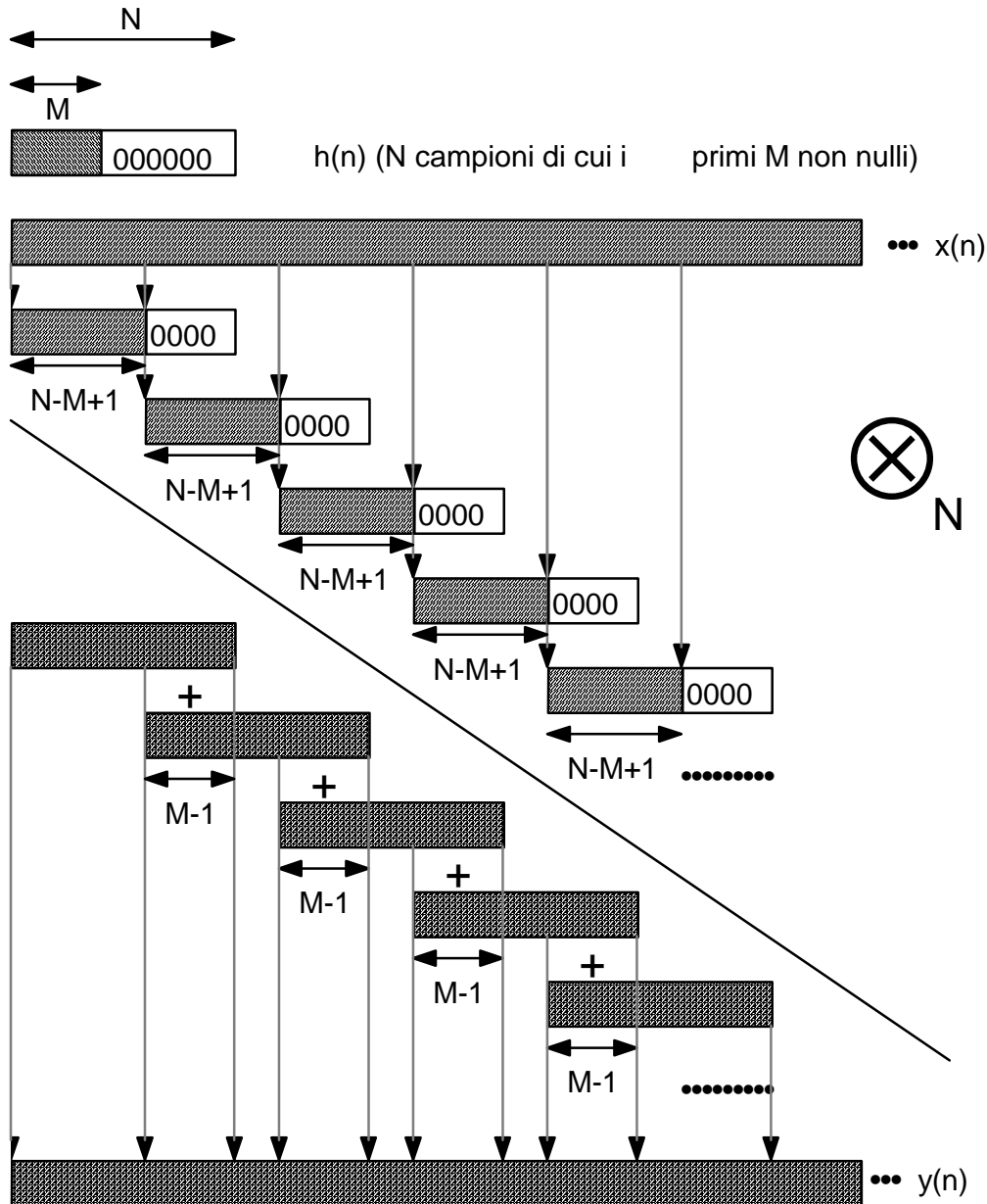


N.B.: i primi  $M-1$  risultati sono sbagliati. E' consigliabile aggiungere  $M-1$  zeri in cima ad  $x(n)$  per ovviare a cio'.



- *procedura di overlap and add*

Mediante un algoritmo per il calcolo della convoluzione circolare su  $N$  campioni (operazioni modulo  $N$ ), si ottiene:



## CALCOLO DELLA DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

ove e' stato definito:

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

- *algoritmo di Goertzel*

$$X(k) = W_N^{-Nk} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-rk} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} = x(n) \otimes W_N^{-kn} \Big|_{n=N}$$

In altre parole, ogni k<sup>mo</sup> coefficiente DFT puo' essere ricavato come il campione N<sup>mo</sup> dell'uscita di un filtro con risposta armonica (esponenziale complesso rotante con velocita' dipendente da k).

## • *Fast Fourier Transform (FFT)*

La FFT calcola da DFT in modo "veloce".

Assumiamo  $N=2^V$ . E' possibile decimare "nel tempo" il calcolo della DFT su  $N$  punti. Infatti:

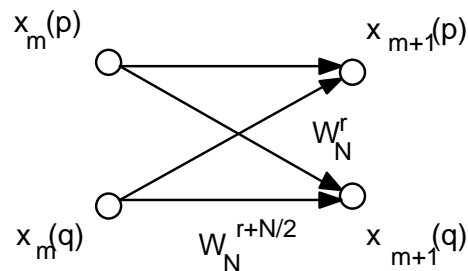
$$\begin{aligned}
 X(k) &= \text{DFT}_N \{x(n)\} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pari}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ dispari}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} = \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rk} = \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk} = \\
 &= \text{DFT}_{N/2} \{x(2n)\} + W_N^k \text{DFT}_{N/2} \{x(2n+1)\}
 \end{aligned}$$

Il costo computazionale (numero di prodotti complessi) si riduce poiche' diviene:

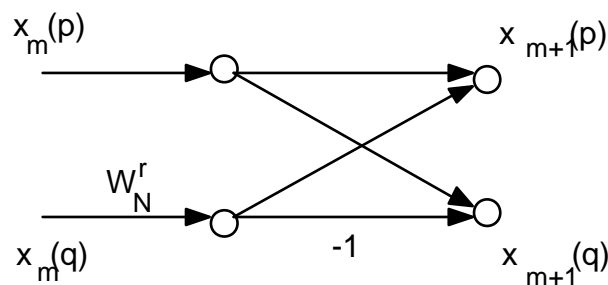
$$N + 2 (N/2)^2 < N^2$$

Il procedimento di *decimazione nel tempo* si puo' iterare, dividendo sempre in indici pari e dispari le DFT da calcolare su meta' punti, sino ad ottenere una combinazione lineare di  $VN/2$  DFT di base su 2 punti (butterfly).

Ogni struttura di base (DFT su 2 punti - butterfly) puo' essere ulteriormente semplificata. Al generico stadio m-esimo si ha:



osservando che  $(W_N)^{N/2} = -1$ , si ha:

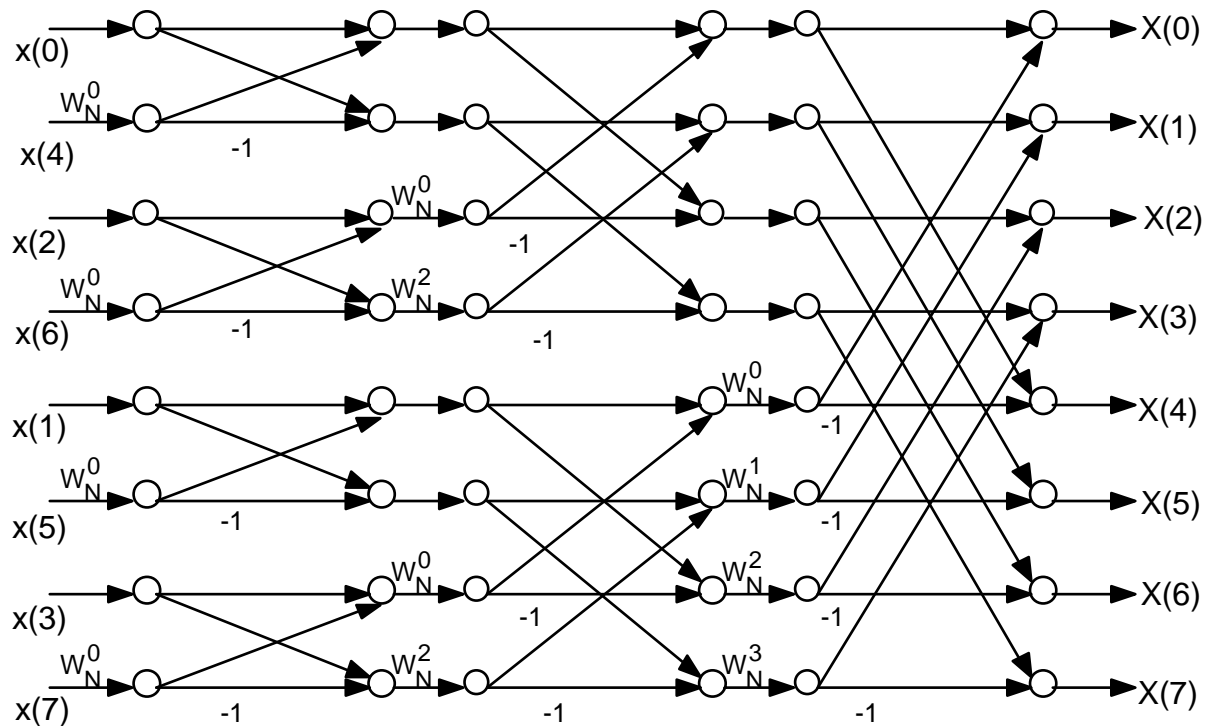


N.B.: i calcoli delle "farfalle" ("butterfly") possono essere implementati *sul posto* ("in place") senza banchi di memoria.

**Osservazione:** in un algoritmo a decimazione nel tempo, l'ordinamento della sequenza di ingresso e' sempre di tipo "bit reversal". Ovvero, gli indici della sequenza per  $0 \leq n \leq N-1$  vanno "scritti" su base binaria e "letti" in ordine rovesciato. Ad esempio:

0	000	0
1	001	4
2	010	2
3	011	6
4	100	1
5	101	5
6	110	3
7	111	7

Lo schema semplificato (per  $N=8$ ) risulta:



Come risulta dallo schema (per  $N=8$ ), in tale caso i prodotti complessi divengono pari a:

$$N \log_2 N$$