

Appunti di
Misure Fisiche 2

Francesco Dulio

Indice

1	Concetti fondamentali	3
1.1	Variabile aleatoria	3
1.1.1	Variabili aleatorie indipendenti	3
1.2	Spazio campionario o dei casi	3
1.3	Evento	3
1.3.1	Eventi indipendenti	3
1.3.2	Eventi incompatibili	4
1.4	Spettro	4
1.5	Prova	4
1.6	Misura, esperimento o campionamento	4
1.7	Campione	4
1.8	Popolazione	4
1.9	σ -algebra	4
1.10	Spazio di probabilità	4
1.11	Quantile	5
1.12	Valore atteso	5
1.13	Campione casuale	5
1.14	Statistica	5
1.15	Probabilità	5
1.15.1	Probabilità soggettiva	5
1.15.2	Probabilità a priori	5
1.15.3	Probabilità frequentista	6
1.15.4	Probabilità di Kolmogorov o assiomatica	6
1.15.5	Probabilità composta	6
1.15.6	Probabilità condizionata	6
1.15.7	Legge ipergeometrica	6
1.16	Calcolo combinatorio	6
1.16.1	Permutazioni	6
1.16.2	Permutazioni con ripetizione	7
1.16.3	Disposizioni	7
1.16.4	Disposizioni con ripetizione	7
1.16.5	Combinazioni	7
1.16.6	Combinazioni con ripetizioni	7
1.17	Variabile standard	7
1.18	Ellisse di concentrazione	7
1.19	Momento	8

1.20	Intervallo di confidenza	8
1.21	Livello di confidenza	8
1.22	Quantità pivotali	9
1.23	Stimatore distorto	9
1.24	Gradi di libertà di una statistica	9
1.25	Scienza esatta	9
1.26	Grandezze fisiche costanti e variabili	9
1.27	Sensibilità o risoluzione di uno strumento	10
1.28	Errore statistico	10
1.29	Precisione	10
1.30	Errore sistematico	10
1.31	Accuratezza	10
1.32	Funzione dell'apparato	11
2	Media, varianza, deviazione standard	12
2.1	Media μ	12
2.2	Varianza σ^2	12
2.3	Deviazione standard σ	13
3	Criteri di convergenza	14
3.1	Limite in probabilità	14
3.2	Limite quasi certo	14
3.3	Convergenza in legge o distribuzione	15
4	Principali distribuzioni	16
4.1	Densità di probabilità per variabili discrete	16
4.2	Densità di probabilità per variabili continue	16
4.3	Distribuzione binomiale	16
4.3.1	Distribuzione geometrica	17
4.4	Distribuzione di Poisson	17
4.4.1	Processi poissoniani	18
4.5	Legge esponenziale negativa dei tempi di arrivo	18
4.5.1	Densità di Weibull	19
4.5.2	Densità erlangiana di ordine k o γ	19
4.6	Distribuzione gaussiana o normale	19
4.6.1	Densità gaussiana bidimensionale	20
4.7	Densità χ^2	21
4.7.1	Distribuzione di Maxwell	22
4.7.2	Distribuzione Snedecor	22
4.8	Densità t di Student	22
4.9	Densità uniforme	23
4.9.1	Distribuzione triangolare	23
4.10	Distribuzione di Boltzmann	23
4.11	Riassunto	24

5	Funzioni	25
5.1	Passaggio dallo spettro discreto a quello continuo	25
5.2	Funzione cumulativa o di ripartizione	25
5.3	Funzione degli errori	25
6	Funzioni di variabili aleatorie	26
6.1	Funzione di una variabile aleatoria	26
6.2	Funzione di più variabili aleatorie	27
6.3	Trasformazione di media e varianza	27
7	Statistica di base	30
7.1	Determinazione degli intervalli di confidenza	30
7.2	Approccio bayesiano	31
7.3	Stima della probabilità da grandi campioni	31
7.3.1	Per grandi campioni:	32
7.3.2	Per piccoli campioni:	32
7.4	Stima della probabilità da piccoli campioni	32
7.5	Intervalli di stima per eventi poissoniani	33
7.6	Stima della media da grandi campioni	34
7.7	Stima della varianza da grandi campioni	34
7.7.1	Varianza della varianza	35
7.8	Stima della media da piccoli campioni	36
7.9	Stima della varianza da piccoli campioni	36
7.10	Riassunto	37
7.11	Verifica di una ipotesi	37
7.11.1	Confronto tra livello del test e SL	38
7.12	Verifica di compatibilità tra due valori	38
7.13	Stima della densità di una popolazione	39
7.14	Verifica di compatibilità tra campione e popolazione	41
8	Statistica multidimensionale	42
8.1	Densità congiunta	42
8.2	Densità marginale	43
8.3	Indipendenza di variabili	43
8.4	Densità condizionata	43
8.5	Covarianza di due variabili	43
8.6	Correlazione tra variabili	44
8.7	Densità normali condizionate	44
9	Analisi dei dati sperimentali	45
9.1	Misure indirette e propagazione degli errori	45
9.1.1	Metodo bootstrap	47
9.2	Riassunto	47
9.3	Definizione dei tipi di misura	47
9.3.1	$M(0, 0, \Delta)$	48
9.3.2	$M(0, \sigma, 0)$	48
9.3.3	$M(0, \sigma, \Delta)$	48
9.3.4	$M(f, 0, 0)$	49

9.3.5	$M(f, \sigma, 0)$	49
9.3.6	$M(f, 0, \Delta)$	50
9.3.7	$M(f, \sigma, \Delta)$	51
10	Teoremi	53
10.1	Teorema di additività	53
10.2	Teorema del prodotto	53
10.3	Teorema di Bayes	53
10.4	Legge 3- σ	53
10.4.1	Disuguaglianza di Tchebychev	54
10.5	Teorema Limite Centrale	54
10.6	Teorema dell'indipendenza stocastica	54
10.7	Teorema di Pearson	54
10.8	Additività della variabile χ^2	54
10.9	Teorema delle variabili aleatore cumulative	55
10.10	Teorema di Cauchy-Schwarz	55
10.11	Teorema di indipendenza di variabili gaussiane	55
10.12	Teorema del cambiamento di variabile in funzioni densità	55
10.13	Indipendenza di M e S^2	55
10.14	Varianza campionaria	56

Capitolo 1

Concetti fondamentali

1.1 Variabile aleatoria

Una variabile statistica, aleatoria o casuale è il risultato dell'interazione di molti fattori, ognuno dei quali non è preponderante sugli altri. Questi fattori (e le loro leggi dinamiche) non possono essere completamente individuati, fissati e comunque tenuti sotto controllo, nemmeno in linea di principio.

Una variabile aleatoria $X(a)$ è una funzione avente come dominio lo spazio S , come codominio la retta reale e tale che l'insieme degli elementi a per i quali vale la relazione $X(a) \leq x$ è un evento per $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deve essere sempre definita su tutti gli elementi dello spazio campionario S .

Su uno stesso spazio di probabilità si possono definire più variabili aleatorie.

1.1.1 Variabili aleatorie indipendenti

Se le variabili aleatorie X_i sono definite sullo stesso spazio di probabilità e gli eventi $\{X_i \in A_i\}$ sono indipendenti secondo la definizione 1.15.4, per ogni scelta possibile degli intervalli $A_i \in \mathbb{R}_x$ da 1.3.1 si ha:

$$P\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \prod_i P\{X_i \in A_i\}.$$

1.2 Spazio campionario o dei casi

Insieme di tutti i possibili valori diversi (casi) che può assumere una variabile aleatoria.

1.3 Evento

Particolare combinazione o particolare sottoinsieme di casi. $\{a : X(a) \in \mathbb{R}_0\}$.

1.3.1 Eventi indipendenti

Se $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$

1.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi sono incompatibili o disgiunti se quando si realizza A non si realizza B e viceversa: $A \cap B = \emptyset$

1.4 Spettro

Insieme di tutti gli elementi diversi del sottoinsieme di casi che definisce l'evento. Codominio reale della variabile aleatoria 1.1.

Se il codominio è un insieme numerabile, diremo che lo spettro è discreto; quando i valori possibili sono su tutto \mathbb{R} , o su unioni di intervalli di \mathbb{R} , diremo che lo spettro è continuo.

1.5 Prova

Insieme delle operazioni che realizzano l'evento.

1.6 Misura, esperimento o campionamento

Insieme di prove.

1.7 Campione

Risultato di un esperimento.

1.8 Popolazione

Risultato del numero di prove, finito o infinito, tale da esaurire tutti gli eventi possibili.

1.9 σ -algebra

Ogni famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di S aventi le proprietà:

- a) l'insieme vuoto appartiene ad \mathcal{F} : $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- b) se una infinità di insiemi $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
- c) se $A \in \mathcal{F}$, lo stesso vale per l'insieme complementare: $\bar{A} \in \mathcal{F}$.

1.10 Spazio di probabilità

Terna $\varepsilon \equiv (S, \mathcal{F}, P)$ formata dallo spazio campionario, da una σ -algebra \mathcal{F} e da P .

1.11 Quantile

Si chiama quantile di ordine α il più piccolo valore x_α che verifica la disuguaglianza $P\{X \leq x_\alpha\} = F(x_\alpha) \geq \alpha$.

1.12 Valore atteso

Se $f(X)$ è una funzione di una variabile aleatoria X avente densità di probabilità $p(x)$ (4.1, 4.2), si definisce come: $\langle f(X) \rangle \equiv E[f(X)] = \sum_k f(x_k)p(x_k) \rightarrow \int f(x)p(x)dx$.

1.13 Campione casuale

Insieme delle N variabili X_i indipendenti ed aventi densità di probabilità $p(x)$ (4.1, 4.2).

1.14 Statistica

Dato un campione 1.13 di densità $p(x)$ (4.1, 4.2), una funzione

$$T = t(X_1, \dots, X_N) \quad (1.1)$$

che non contiene alcun parametro incognito, è una variabile aleatoria 1.1 che prende il nome di statistica.

1.15 Probabilità

Valutazione quantitativa della possibilità di ottenere un determinato evento. Viene fatta o su base dell'esperienza, utilizzando modelli matematici, o su base puramente soggettiva.
Segue in 3.

1.15.1 Probabilità soggettiva

Grado di convinzione (degree of belief) soggettivo circa il verificarsi di un evento.

1.15.2 Probabilità a priori

Se N è il numero totale di casi dello spazio campionario di una variabile aleatoria ed n il numero di casi favorevoli per i quali si realizza l'evento A , la probabilità a priori di A è data da

$$P(A) = \frac{n}{N}. \quad (1.2)$$

1.15.3 Probabilità frequentista

Se m è il numero di prove in cui si è verificato l'evento A su un totale di M prove, la probabilità di A è data da

$$P(A) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{m}{M}. \quad (1.3)$$

1.15.4 Probabilità di Kolmogorov o assiomatica

Una funzione $P(A)$ che soddisfa a $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ed alle proprietà: $P(A) \geq 0$; $P(S) = 1$

per ogni famiglia finita o numerabile A_1, A_2, \dots di insiemi di \mathcal{F} , tra loro mutualmente disgiunti:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1.4)$$

1.15.5 Probabilità composta

Si definisce $P(A \cup B)$ oppure $P(AB)$ la probabilità che si verifichino contemporaneamente gli eventi A e B .

1.15.6 Probabilità condizionata

Si definisce $P(B|A)$ la probabilità che si verifichi l'evento B essendosi verificato l'evento A . Essa è espressa come:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{se } P(A) > 0. \quad (1.5)$$

1.15.7 Legge ipergeometrica

Permette di calcolare la probabilità che da un'urna contenente a biglie di tipo A e b biglie di tipo B si estraggano k biglie di tipo A avendone estratte $n \leq a + b$ senza reintroduzione nell'urna. Assumendo che tutte le biglie abbiano la stessa probabilità di essere estratte e che le estrazioni siano indipendenti si ha:

$$P\{k; a, b, n\} = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}. \quad (1.6)$$

1.16 Calcolo combinatorio

1.16.1 Permutazioni

$$P_n = n! \quad (1.7)$$

1.16.2 Permutazioni con ripetizione

$$P_{k_1 \dots k_r}^* = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r (k_j!)} \quad (1.8)$$

1.16.3 Disposizioni

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1.9)$$

1.16.4 Disposizioni con ripetizione

$$D_{n,k}^* = n^k \quad (1.10)$$

1.16.5 Combinazioni

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (1.11)$$

1.16.6 Combinazioni con ripetizioni

$$C_{n,k}^* = \binom{n+k-1}{n-1} \quad (1.12)$$

1.17 Variabile standard

Variabile fondamentale in statistica che misura lo scarto di un valore x dalla sua media in unità di deviazione standard:

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ che assume i valori } t = \frac{x - \mu}{\sigma}. \quad (1.13)$$

Ha media nulla e varianza unitaria.

1.18 Ellisse di concentrazione

Se si immagina di tagliare la curva gaussiana bidimensionale con piani di quota costante, l'intersezione dà luogo ad una curva di equazione per variabili standard:

$$u^2 + -2\rho uv + v^2 = \text{costante} \quad (1.14)$$

e per variabili normali:

$$\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} = \text{costante}. \quad (1.15)$$

Queste curve in generale rappresentano delle ellissi con centro nel punto (μ_x, μ_y) .

- se $\rho = 0$, l'ellisse ha gli assi principali paralleli agli assi di riferimento;
- se $\sigma_x = \sigma_y$, l'ellisse degenera in una circonferenza;
- se $\rho = \pm 1$, le variabili sono completamente correlate e l'ellisse degenera in una retta di equazione $\frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x} \pm \frac{(y-\mu_y)}{\sigma_y} = \text{costante}$.

1.19 Momento

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x_k - \mu)^n \rightarrow \int_{-}^{+} (x - \mu)^n p(x) dx. \quad (1.16)$$

1.20 Intervallo di confidenza

Se il valore vero del parametro incognito è θ ad esso corrisponde sull'asse dei valori misurati l'intervallo $[x_1, x_2]$ e, per costruzione, si ha $P\{x_1 \geq X \geq x_2\} = CL$. Dato che quando $x = x_1$ sull'asse dei parametri $\theta = \theta_2$ e quando $x = x_2$ sull'asse dei parametri $\theta = \theta_1$, per costruzione $x \in [x_1, x_2]$ se e solo se $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Vale allora la relazione fondamentale:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} = CL. \quad (1.17)$$

Date due statistiche Θ_1 e Θ_2 con Θ_1 e Θ_2 variabili continue e $\Theta_1 \leq \Theta_2$ con probabilità 1, si dice che $I = [\Theta_1, \Theta_2]$ è un intervallo di confidenza per un parametro θ , di livello di confidenza $0 < CL < 1$, se, $\forall \theta$ appartenente allo spazio dei parametri, la probabilità che I contenga θ vale CL :

$$P\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} = CL. \quad (1.18)$$

Se Θ_1 e Θ_2 sono variabili discrete, l'intervallo di confidenza è l'intervallo più piccolo che soddisfa la relazione:

$$P\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} \geq CL. \quad (1.19)$$

Nell'intervallo di confidenza 1.18 gli estremi sono variabili aleatorie, mentre il parametro θ è fissato; di conseguenza il livello di confidenza va sempre riferito all'intervallo $I = [\Theta_1, \Theta_2]$ ed indica la frazione di esperimenti che individuano correttamente il valore vero, in un insieme infinito di esperimenti ripetuti, ognuno dei quali trova un intervallo di confidenza diverso.

Ogni particolare intervallo $[\theta_1, \theta_2]$ viene ricavato con un metodo che dà il risultato corretto in una frazione CL degli esperimenti.

In statistica è lecito chiamare intervallo di confidenza sia l'intervallo aleatorio $I = [\Theta_1, \Theta_2]$ sia le sue realizzazioni numeriche $[\theta_1, \theta_2]$.

1.21 Livello di confidenza

La probabilità che un intervallo ha di contenere la vera probabilità p di osservare un evento si chiama livello di confidenza. Si indica con $CL \equiv (1 - \alpha)$, con α chiamato livello di significatività. Questo intervallo deve avere contemporaneamente un livello di confidenza elevato e un'ampiezza ridotta perché sia utile.

1.22 Quantità pivotali

Variabili aleatorie la cui distribuzione non dipende dal parametro che si vuole stimare.

Se $Q(X, \theta)$ è una quantità pivotale, la probabilità $PQ \in A$ non dipende da θ , $\forall A \in \mathbb{R}$.

1.23 Stimatore distorto

Uno stimatore si dice distorto quando la media degli stimatori T_N , calcolati da un campione di dimensione N , differisce dal limite per $N \rightarrow \infty$ dallo stimatore.

1.24 Gradi di libertà di una statistica

Il numero dei gradi di libertà ν di una statistica $T = t(X_1, \dots, X_N, \hat{\theta})$ dipendente da un insieme noto di parametri $\hat{\theta}$, è dato dal numero N di variabili del campione meno il numero k di parametri $\hat{\theta}$ stimati dai dati:

$$\nu = N - k. \quad (1.20)$$

1.25 Scienza esatta

Una scienza si dice esatta quando è sempre in grado di associare un errore alle proprie previsioni e risultati.

1.26 Grandezze fisiche costanti e variabili

- *Una grandezza è costante se durante l'esperimento si osservano fluttuazioni (risultati diversi ad ogni prova, pur mantenendo costanti le condizioni sperimentali), esse sono da attribuire alle operazioni di misura oppure al funzionamento degli strumenti impiegati. Essa è una costante fisica universale, cioè è una grandezza che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, oppure una grandezza che ragionevolmente si può considerare costante e stabile rispetto alle operazioni della misura che si sta effettuando.*
- *Una grandezza è una variabile aleatoria se le fluttuazioni osservate contengono anche quelle dell'oggetto in misura. Questa componente delle fluttuazioni contiene informazioni fisiche sulla legge statistica della grandezza che si sta misurando. Essa presenta delle fluttuazioni e variazioni misurabili che sono intrinseche al processo fisico che si sta studiando. Molto spesso le fluttuazioni sono puramente statistiche, ed allora la grandezza è una variabile aleatoria che possiede una certa distribuzione. Scopo della misura è proprio la determinazione di questa distribuzione.*

1.27 Sensibilità o risoluzione di uno strumento

Se uno strumento fornisce il valore x nella misura di una grandezza, si definisce come intervallo di sensibilità o risoluzione e si indica con Δx , la minima quantità necessaria per spostare il risultato della misura del valore x ad uno contiguo. Si dice sensibilità dello strumento il rapporto:

$$S = \frac{1}{\Delta x}. \quad (1.21)$$

Se x è il valore letto e Δx è l'intervallo di sensibilità, il valore vero sarà compreso con legge di probabilità uniforme, nell'intervallo $x \pm \frac{\Delta x}{2}$, con un $CL = 100\%$:

$$\text{valore vero} = x \pm \frac{\Delta x}{2}. \quad (1.22)$$

1.28 Errore statistico

È quel tipo di errore, dovuto alle operazioni di misura, che fa variare i risultati secondo una certa distribuzione statistica. La media di questa distribuzione (media vera) coincide col valore vero della grandezza fisica che si misura. La deviazione standard della distribuzione è l'errore di misura. Queste due grandezze sono stimate dalla media e dalla deviazione standard del campione sperimentale delle misure.

1.29 Precisione

La precisione è determinata dall'errore statistico della misura, che è dato dalla deviazione standard stimata dal campione delle misure effettuate. Una misura è tanto più precisa quanto più è piccolo l'errore statistico.

1.30 Errore sistematico

È quel tipo di errore che fa scostare la media dei valori misurati dal valore vero, indipendentemente dal numero di misure che si effettuano. In altre parole, gli errori sistematici provocano uno scostamento tra la media della distribuzione delle misure e il valore vero della grandezza. Sono dovuti ad operazioni errate oppure ad ipotesi sbagliate sul modello fisico su cui si basa la misura. Negli strumenti scientifici l'errore sistematico viene indicato con: $\delta + \Delta \simeq \Delta (\text{syst})$.

1.31 Accuratezza

Per uno strumento di sensibilità ideale, si definisce accuratezza lo scostamento tra il valore misurato dallo strumento ed il valore vero. Questo effetto non è di tipo casuale ed ha origine da una taratura imperfetta dello strumento. Viene indicato con δ . L'accuratezza è determinata dagli errori sistematici della misura. Una misura è tanto più accurata quanto più sono piccoli gli errori sistematici.

1.32 Funzione dell'apparato

Si dice funzione dell'apparato o funzione strumentale, e si indica in genere con $\delta(x, y)$, la funzione che dà la probabilità $\delta(x, y) dx dy$ di misurare un valore in $[y, y + dy]$ quando il valore della variabile è in $[x, x + dx]$. Fa conoscere la probabilità che lo strumento risponda con y quando il valore di ingresso è x .

La funzione osservata dipende da due variabili (apparato Z e fisica X) e i valori misurati Y sono legati a queste variabili secondo $y = h(z, x)$ e $z = h^{-1}(y, x)$ [la funzione h rappresenta il legame tra z e x creato dall'operatore di misura ($x + z, xz \dots$)].

Capitolo 2

Media, varianza, deviazione standard

2.1 Media μ

Se x_i sono le N realizzazioni numeriche di una variabile aleatoria 1.1, la media campionaria è definita:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.1)$$

Per una variabile aleatoria vale:

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \rightarrow \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \quad (2.2)$$

$$m = \sum_{k=1}^C f_k x_k. \quad (2.3)$$

Proprietà:

$$\langle \alpha X \rangle = \alpha \langle X \rangle \quad \langle X + \alpha \rangle = \langle X \rangle + \alpha$$

2.2 Varianza σ^2

Se x_i sono le N realizzazioni numeriche di una variabile aleatoria 1.1, la varianza campionaria è definita:

$$s_{\mu}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (2.4)$$

dove μ è il valore della media assegnata a priori.

La varianza rispetto alla media campionaria m 2.1 è invece:

$$s_m^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N - 1} = \frac{N}{N - 1} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N}. \quad (2.5)$$

Per una variabile aleatoria vale:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mu)^2 p_k \rightarrow \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx. \quad (2.6)$$

La varianza può essere anche espressa come:

$$s_{\mu}^2 = \sum_{k=1}^C (f_k x_k^2) - \mu^2, \quad (2.7)$$

$$s_m^2 = \frac{N}{N-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - m^2 \right], \quad (2.8)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^C (p_k x_k^2) - \mu^2 \rightarrow \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \mu^2. \quad (2.9)$$

Proprietà:

$$\begin{aligned} Var[X] &= \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle & Var[\alpha X] &= \alpha^2 Var[X] \\ Var[X + \alpha] &= Var[X] & Var[X] &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \end{aligned}$$

2.3 Deviazione standard σ

La deviazione standard non è altro che:

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (2.10)$$

Per una variabile aleatoria vale:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (2.11)$$

Capitolo 3

Criteri di convergenza

Ricollegandosi alla probabilità 1.15 vengono definiti tre criteri di convergenza:

3.1 Limite in probabilità

Una successione di variabili X_N converge verso una variabile X se, prefissato un numero $\varepsilon > 0$ comunque piccolo, la probabilità che X_N differisca da X per una quantità $> \varepsilon$ tende a zero per $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P [|X_N(a) - X(a)| \geq \varepsilon] = 0. \quad (3.1)$$

Dire che questa probabilità tenda a zero non assicura affatto che tutti i *valori* $|X_N(a) - X(a)|$, per ogni elemento a dello spazio campionario, si manterranno minori di ε al di sopra di un certo N , ma solo che l'insieme dei valori che superano ε ha una probabilità piccola, al limite nulla.

Essa implica la probabilità in legge 3.3.

3.2 Limite quasi certo

Se si vuole che per la maggior parte delle successioni si abbia $|X_N(a) - X(a)| \leq \varepsilon$ per ogni a , si introduce:

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} |X_N(a) - X(a)| \leq \varepsilon \right\} = 1 \quad (3.2)$$

sull'insieme degli elementi a dello spazio di probabilità (S, \mathcal{F}, P) 1.10.

In questo caso siamo sicuri che esista un insieme di elementi a , che per $N \rightarrow \infty$ tende a coincidere con lo spazio campionario S .

Essa implica sia la probabilità in legge 3.3 sia quella in probabilità 3.1.

Un teorema fondamentale di Kolmogorov assicura la convergenza quasi certa di successioni di variabili aleatorie indipendenti 1.1.1 se vale la condizione:

$$\sum_N \frac{\text{Var}[X_N]}{N^2} < +\infty \quad (3.3)$$

3.3 Convergenza in legge o distribuzione

Una successione di variabili X_N converge ad una variabile X se, essendo F_{X_N} e F_X le rispettive formule di ripartizione (o cumulative) 5.2:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{X_N}(x) = F_X(x) \quad (3.4)$$

per ogni punto x in cui $F_X(x)$ è continua.

Capitolo 4

Principali distribuzioni

4.1 Densità di probabilità per variabili discrete

Data una variabile X 1.1 discreta, la funzione

$$p(x_i) = P\{X = x_i\} = F(x_k) = \sum_{i=1}^k p(x_i) \quad (4.1)$$

(in corrispondenza dei valori dello spettro di X), è detta densità di probabilità per variabili discrete.

È normalizzata.

4.2 Densità di probabilità per variabili continue

Data una variabile $X \in \mathbb{R}$ 1.1 continua, la funzione $p(x) \geq 0$ che soddisfa $\forall x$ l'equazione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \, dt \quad (4.2)$$

è detta densità di probabilità per variabili continue.

È normalizzata.

Nello spettro continuo la probabilità di trovare uno specifico valore x è nulla.

Nei punti dove $F(x)$ è derivabile, si ottiene la relazione:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (4.3)$$

4.3 Distribuzione binomiale

Espressione della densità binomiale (teorema delle probabilità totali 10.3) :

$$P\{X = x \text{ successi}\} = b(x; n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \quad (4.4)$$

Questa distribuzione è valida *se e solo se* gli n tentativi sono *indipendenti* 1.3.1 e la probabilità di successo in un tentativo è sempre *costante* e pari a p .

La distribuzione binomiale, quando $n = 1$, è detta anche di Bernulli.

È la legge di una variabile aleatoria X che rappresenta il numero x di successi che si possono ottenere in n tentativi indipendenti, ognuno dei quali ha una probabilità di successo costante.

- È normalizzata;
- La media è:

$$\mu = \langle X \rangle = np \sum_{x'=0}^{n'} \frac{n'!}{x'!(n'-x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} = np; \quad (4.5)$$

- La varianza è:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = np[(n-1)p + 1] - n^2 p^2 = np(1-p); \quad (4.6)$$

4.3.1 Distribuzione geometrica

La probabilità di avere un successo alla n -esima prova è data dalla densità geometrica:

$$g(n) = p(1-p)^{n-1}. \quad (4.7)$$

Media:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{p}. \quad (4.8)$$

Varianza:

$$\sigma_n^2 = \frac{1-p}{p^2}. \quad (4.9)$$

È normalizzata.

4.4 Distribuzione di Poisson

Se $n \gg 1$ e $p \ll 1$, si avranno pochi successi ($x \ll 1$), perciò si può approssimare la distribuzione binomiale 4.3 a una nuova densità discreta:

$$p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (4.10)$$

che rappresenta la probabilità di ottenere un valore x quando la media dei valori è μ . È un'approssimazione accettabile della binomiale già a partire da $\mu > 10$ e $p < 0.1$.

- È normalizzata;
- La media è:

$$\mu = np; \quad (4.11)$$

- La varianza è:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \left[x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \right] - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu; \quad (4.12)$$

4.4.1 Processi poissoniani

In questi casi la distribuzione di Poisson va considerata come legge fondamentale della natura. Si consideri quindi un processo stocastico in cui la sorgente genera eventi:

- a) discreti;
- b) con probabilità per unità di tempo λ costante e uguale per tutti gli eventi generati;
- c) indipendenti tra loro (1.3.1).

Si devono definire le quantità:

- il numero di tentativi: $N = \frac{\Delta t}{dt}$;
- la probabilità di osservare un evento in un tentativo di durata dt : $p = \lambda dt$;
- il numero medio di eventi generati entro Δt : $\mu = \lambda \Delta t$.

Il conteggio $X(\Delta t)$ in un intervallo Δt in un processo di emissione discreto è una variabile aleatoria che segue la legge di Poisson con $\mu = \lambda \Delta t$:

$$P\{X(\Delta t) = n\} = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t}. \quad (4.13)$$

Considerando anche il tempo di arrivo T si dimostra la 4.5. I processi stocastici poissoniani seguono perciò la legge dell'indipendenza stocastica 10.6.

4.5 Legge esponenziale negativa dei tempi di arrivo

Eventi ravvicinati nel tempo sono molto più probabili di eventi separati da lunghi intervalli di attesa.

La variabile T (tempo di arrivo) ha densità di probabilità di tipo esponenziale negativo

$$e(t) dt = p_0(t) \lambda dt = \lambda e^{-\lambda t} dt; \quad (4.14)$$

è normalizzata con media $\mu = \frac{1}{\lambda}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. (L'equivalente nel discreto è la densità geometrica 4.3.1: $g(n) = p(1-p)^{n-1}$). In realtà media e varianza, non essendo con la forma a campana, sono poco rilevanti; più rilevante è la funzione cumulativa 5.2:

$$P\{0 \leq T \leq t\} \equiv F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4.15)$$

La probabilità di non essere osservato alcun evento fino a t :

$$P\{T > t\} = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} = p_0(t). \quad (4.16)$$

Percentuali che arrivi prima o dopo la media:

$$P\left\{0 \leq T \leq \frac{1}{\lambda}\right\} = 0.63 = 63\%, \quad P\left\{\frac{1}{\lambda} \leq T\right\} = 0.37 = 37\%.$$

La legge esponenziale negativa è l'unica forma funzionale che assicura l'indipendenza temporale degli eventi.

4.5.1 Densità di Weibull

Si utilizza per descrivere sistemi biologici o dispositivi dotati di memoria che tendono a invecchiare:

$$w(t) = at^{b-1}e^{-\frac{a}{b}t^b} \quad (4.17)$$

con $t \geq 0$ e $a, b > 0$.

La funzione cumulativa vale $F(t) = \int_0^t w(t) dt = 1 - e^{-\frac{a}{b}t^b}$.

La probabilità di non avere eventi fino a $t + \Delta t$ diminuisce se aumenta t .

Se $a = b = 1$ si ha la legge esponenziale negativa 4.14. Se $b > 1$ tende ad assumere la forma a campana.

4.5.2 Densità erlangiana di ordine k o gamma

Un caso particolare della legge esponenziale negativa è la densità gamma, che è l'equazione 4.14 con $p_0(t)$ sostituito da $p_{k-1}(t)$:

$$e_k(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t} \quad (4.18)$$

Media: $\mu = \frac{k}{\lambda}$; varianza: $\sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2}$. È la densità della somma di k variabili aleatorie esponenziali negative indipendenti. La funzione gamma è:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad (4.19)$$

4.6 Distribuzione gaussiana o normale

Se $n \gg 1$, $0 < p < 1$ e $x \gg 1$, si può approssimare la distribuzione binomiale 4.3 a una buona densità continua:

$$g(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}} \quad (4.20)$$

che per $\mu \gg 1$ approssima la binomiale.

La funzione di Gauss può essere sostituita alla binomiale quando sono valide le condizioni $\mu = np \geq 10$ e $n(1-p) \geq 10$ [valido in pratica...].

Se p e $1-p$ non sono molto vicine agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$, basta la condizione $\mu \geq 10$.

La primitiva della gaussiana, secondo la legge 3 - σ 10.4 è:

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^x \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t - \mu)^2}{\sigma^2} \right] dt \quad (4.21)$$

La gaussiana:

- È normalizzata;
- La media è:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] dx = \mu \quad (4.22)$$

- La varianza è:

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] dx = \sigma^2; \quad (4.23)$$

• Essendo la gaussiana simmetrica:

$$E(x) = -E(-x). \quad (4.24)$$

Viene definita la densità gaussiana standard, cioè una gaussiana con media nulla e deviazione standard unitaria:

$$g(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.25)$$

Viene definita anche la funzione cumulativa della gaussiana standard:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4.26)$$

Essa è legata alla versione integrale della gaussiana attraverso la relazione $\Phi(x) = 0.5 + E(x)$.

4.6.1 Densità gaussiana bidimensionale

La densità gaussiana di due variabili gaussiane indipendenti:

$$g(x, y) = g_X(x) g_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right]. \quad (4.27)$$

La gaussiana ridotta è:

$$g(u, v; 0, 1) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (4.28)$$

avendo sostituito $U = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$ e $V = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y}$.

Gode delle proprietà:

- non essere fattorizzabile in due termini dipendenti rispettivamente solo da u e solo da v ;
- avere distribuzioni marginali 8.2 gaussiane standard;
- soddisfare l'equazione $\sigma_{xy} = \rho$;
- soddisfare la condizione di normalizzazione.

La gaussiana ridotta può essere riscritta in termini di correlazione:

$$g(u, v; 0, 1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (u^2 - 2\rho uv + v^2) \right]. \quad (4.29)$$

La gaussiana standard è invece:

$$g(u, v; 0, 1) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\gamma(x,y)} \quad (4.30)$$

$$\text{con } \gamma(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right].$$

La conoscenza delle due distribuzioni marginali, cioè delle proiezioni della gaussiana sui due assi x e y , non basta per una conoscenza completa della densità bidimensionale, perché variabili correlate o incorrelate danno in entrambi i casi proiezioni gaussiane. La conoscenza della covarianza o del coefficiente di correlazione è quindi essenziale per la determinazione completa della distribuzione statistica delle variabili.

È sempre possibile, operando una rotazione di assi, trasformare una coppia di variabili gaussiane dipendenti in variabili gaussiane indipendenti.

4.7 Densità χ^2

Determinazione della densità di probabilità di una variabile aleatoria funzione di più variabili aleatorie. Si vuole trovare la funzione di densità della variabile

$$Q = \sum_{i=1}^N X_i^2 \quad (4.31)$$

somma dei quadrati di n variabili standard gaussiane tra loro indipendenti.

Con $F_Q(q)$ si indica la cumulativa 5.2 della funzione densità χ^2 [essa dà la probabilità che la variabile Q (4.31) sia compresa entro un'ipersfera di raggio \sqrt{q}]:

$$P\left\{\sum X_i^2 \leq q\right\} \equiv F_Q(q) = \int_{\sum x_i^2 \leq q} \dots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum \frac{x_i^2}{2}} dx_1 \dots dx_n \quad (4.32)$$

La densità χ^2 è:

$$p_n(q) dq = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}q} q^{\frac{1}{2}(n-2)} dq \quad (4.33)$$

con $\Gamma(p)$ la funzione gamma 4.19 e individua la distribuzione statistica del modulo quadro di un vettore di n componenti gaussiane indipendenti.

Se si opera la sostituzione $n \rightarrow \nu$ (con ν gradi di libertà) e si intende χ^2 sia la distribuzione di densità $p_n(q) dq$ sia i valori numerici di Q (sostituendo quindi $q \rightarrow \chi^2$) ottenuti in prove specifiche, si ha: $Q(\nu) \rightarrow \chi^2(\nu)$ che assume valori χ^2 . La densità diventa quindi:

$$p_\nu(\chi^2) d\chi^2 \equiv p(\chi^2; \nu) d\chi^2 = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} d\chi. \quad (4.34)$$

La media è:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty x(x)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \nu. \quad (4.35)$$

La varianza è:

$$\text{Var}[Q] = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^\infty (x - \nu)^2 (x)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2\nu. \quad (4.36)$$

Si usa spesso la distribuzione χ^2 ridotto:

$$Q_R(\nu) = \frac{Q(\nu)}{\nu} \quad (4.37)$$

con media $\langle Q_R(\nu) \rangle = 1$ e varianza $\text{Var}[Q_R(\nu)] = \frac{2}{\nu}$. La versione del χ^2 ridotto è:

$$P\{Q_R(\nu) \geq \chi_R^2(\nu)\} = \int_{\chi_R^2(\nu)}^\infty \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu x}{2}} dx. \quad (4.38)$$

4.7.1 Distribuzione di Maxwell

La densità di Maxwell è la generalizzazione in tre dimensioni della densità χ^2 4.7. La sua equazione è:

$$m(r) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^3} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \quad (4.39)$$

Media:

$$\langle R^2 \rangle = 3\sigma^2. \quad (4.40)$$

Varianza:

$$\text{Var}[R^2] = 6\sigma^4. \quad (4.41)$$

4.7.2 Distribuzione Snedecor

Avendo definito la variabile di Snedecor F come $F = \frac{Q_R(\mu)}{Q_R(\nu)}$, si definisce la densità di Snedecor come rapporto tra due variabili indipendenti χ^2 ridotto:

$$p_{\mu\nu}(F) = c_{\mu\nu} D^{\frac{1}{2}(\mu-2)} (\mu F + \nu)^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)} \quad (4.42)$$

con $c_{\mu\nu} = \mu^{\frac{\mu}{2}} \nu^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})}$.

4.8 Densità t di Student

Per variabili formate dal rapporto di una variabile gaussiana standard e la radice di una variabile Q_R di densità χ^2 ridotto con ν gradi di libertà viene introdotta la densità di Student.

Avendo posto $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} = \sqrt{\nu} \frac{X}{\sqrt{Y}}$ si ottiene:

$$p_Z(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{z^2}{\nu} + 1 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (4.43)$$

Viene riscritta nella variabile t , ponendo $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$:

$$s_\nu(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{t^2}{\nu} + 1 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (4.44)$$

4.9 Densità uniforme

Una variabile aleatoria X continua, che assume valori nell'intervallo finito $[a, b]$, si dice uniforme in $[a, b]$ e si denota con $X \sim U(a, b)$ quando ha una densità di probabilità costante data da:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{per } x < a, x > b \end{cases}. \quad (4.45)$$

È normalizzata, con media $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{b+a}{2}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Per una variabile aleatoria $a \leq X \leq b$, avente densità uniforme, la probabilità di localizzazione in (x_1, x_2) è proporzionale all'ampiezza dell'intervallo

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \frac{1}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a};$$

viceversa, se una variabile aleatoria continua soddisfa a $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \frac{1}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$, essa è distribuita in modo uniforme.

4.9.1 Distribuzione triangolare

Una particolare densità uniforme è quella triangolare:

$$p_Z(z) = \begin{cases} z & \text{per } 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & \text{per } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (4.46)$$

È normalizzata, compresa tra 0 e 2, di forma triangolare e con massimo in $z = 1$.

4.10 Distribuzione di Boltzmann

La densità di Boltzmann è:

$$m(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{KT} \sqrt{\frac{E}{KT}} e^{-\frac{E}{KT}} dE, \quad (4.47)$$

avendo posto $m\sigma^2 = KT$ e quindi $\sigma = \sqrt{\frac{KT}{m}}$.

4.11 Riassunto

Nome	Densità	Media	Deviazione standard	Commenti
binomiale	$\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$\sqrt{np(1-p)}$	successi in prove indipendenti con probabilità costante
poissoniana	$\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$	μ	$\sqrt{\mu}$	conteggi
gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	μ	σ	combinazione lineare di variabili indipendenti
esponenziale	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	tempi tra variabili poissoniane
gamma	$\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{-\lambda t}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{\sqrt{k}}{\lambda}$	somma di k variabili esponenziali negative
χ^2	$\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}e^{-\frac{\chi^2}{2}}(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}d\chi$	ν	$\sqrt{2\nu}$	modulo di un vettore gaussiano
uniforme	$\frac{1}{\Delta} \quad (0 \leq x \leq \Delta)$	$\frac{\Delta}{2}$	$\frac{\Delta}{\sqrt{12}}$	variabili cumulative
student	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}$	per variabili formate dal rapporto di una variabile gaussiana standard e la radice di una variabile Q_R di densità χ^2 ridotto

Capitolo 5

Funzioni

5.1 Passaggio dallo spettro discreto a quello continuo

$$\sum_k p(x_k) \rightarrow \int p(x) dx, \quad p(x_k) \rightarrow p(x_k) dx \quad (5.1)$$

5.2 Funzione cumulativa o di ripartizione

Se X è una variabile aleatoria 1.1, continua o discreta, la funzione cumulativa è:

$$F(x) = P\{X \leq x\} \quad (5.2)$$

e rappresenta la probabilità che X assuma un valore non superiore ad un valore assegnato x .

x non deve necessariamente far parte dello spettro di X .

Se gli eventi sono incompatibili e la probabilità, data da 1.4, è $P\{X \leq x_2\} = P\{X \leq x_1\} + P\{x_1 < X \leq x_2\}$ e quindi si ha l'importante relazione:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.3)$$

La relazione 5.3 può essere riscritta in termini di densità:

$$P\{X = x_1\} = P\{x_{k-1} < X \leq x_k\} = F(x_k) - F(x_{k-1}) = p(x_k). \quad (5.4)$$

5.3 Funzione degli errori

Avendo definito la variabile standard 1.17:

$$\text{Erf}(x) \equiv 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \equiv 2\text{E}\left(\sqrt{2}x\right) \quad (5.5)$$

Capitolo 6

Funzioni di variabili aleatorie

Considerando più variabili aleatorie X, Y, \dots , esse si possono combinare in una funzione $Z = f(X, Y, \dots)$ e questo porta ad avere una nuova variabile aleatoria Z . Nel caso di due variabili X, Y , la densità della variabile Z definita da $Z = f(X, Y)$ è $X, Y \sim p_{X,Y}(x, y) \implies Z \sim p_z(x)$. Z resta definita in funzione dei risultati a e b delle prove che realizzano X e Y : $Z = Z(a, b) = f(X(a), Y(b))$.

La probabilità che Z appartenga ad un certo insieme numerico \mathbb{R}_Z è:

$$P\{Z \in \mathbb{R}_Z\} = \sum_{[x,y;f(x,y) \in \mathbb{R}_Z]} P(AB) = \sum_{[x,y;f(x,y) \in \mathbb{R}_Z]} P\{X \in \mathbb{R}_X; Y \in \mathbb{R}_Y\}. \quad (6.1)$$

6.1 Funzione di una variabile aleatoria

Sia Z legata ad X , variabile aleatoria continua di densità $p_X(x)$, attraverso $Z = f(X)$. Per determinare la densità $p_Z(x)$ si utilizzano le relazioni 5.4 e 4.3 e si ottiene:

$$p_Z(z) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{z-b}{a}\right), \quad (6.2)$$

che riscritta in termini della variabile funzionale $Z = f(X) = aX^2$ diventa:

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{az}} \left[p_X\left(-\sqrt{\frac{z}{a}}\right) + p_X\left(\sqrt{\frac{z}{a}}\right) \right]; \quad (6.3)$$

infine se la densità di partenza $p_X(x)$ è gaussiana:

$$p_Z(z) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[z - (a\mu + b)]^2}{2a^2\sigma^2}\right] \quad (6.4)$$

(nel caso che la gaussiana abbia una media nulla si ritrova la densità gamma 4.19 di media $\mu_z = a\sigma^2$ e varianza $\sigma_z^2 = 2a^2\sigma^4$).

La media è:

$$\mu_z = a\mu + b \quad (6.5)$$

e la varianza:

$$\sigma_z^2 = a^2\sigma^2. \quad (6.6)$$

La sua funzione cumulativa è:

$$P\{Z \leq z_0\} \equiv F_Z(z) = \sum_i \int_{\Delta i} p_X(x) \, dx. \quad (6.7)$$

6.2 Funzione di più variabili aleatorie

Funzione cumulativa:

$$P\{Z \leq z_0\} \equiv F_Z(z) = \int \dots \int_{(X \in D)} p_X(x_1, \dots, x_n) \, dx_1, \dots, dx_n. \quad (6.8)$$

Può essere riscritta, utilizzando il teorema 10.12 come:

$$p_Z(z) = \int p_X(x_1, x_2) \left| \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial z} \right| \, dx_2 = \int p_X(f_1^{-1}(z, x_2), x_2) \left| \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial z} \right| \, dx_2. \quad (6.9)$$

Se le variabili X_1 e X_2 sono indipendenti allora la densità p_X si fattorizza secondo la 8.4 e utilizzando la 6.9 si ottiene:

$$p_Z(z) = \int p_{X_1}(f_1^{-1}(z, x_2), x_2) p_{X_2}(x_2) \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial z} \, dx_2. \quad (6.10)$$

Quando la variabile Z è data dalla somma $Z = X_1 + X_2$, la funzione inversa f^{-1} e la sua derivata da inserire nella 6.9 sono date da $X_1 = f_1^{-1}(Z, X_2) = Z - X_2$ e $\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial z} = 1$ e la densità è quindi:

$$p_Z(z) = \int p_X(z - x_2) \, dx_2. \quad (6.11)$$

Se le due variabili sono indipendenti la densità di probabilità di partenza si fattorizza nella 8.4 e si ottiene l'integrale chiamato di convoluzione:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(z - x_2) p_{X_2}(x_2) \, dx_2. \quad (6.12)$$

6.3 Trasformazione di media e varianza

- Variabile Z funzione di una sola variabile aleatoria X di densità nota $p_X(x)$, cioè $Z = f(X)$:

$$\langle Z \rangle = \int f(x) p_X(x) \, dx. \quad (6.13)$$

In molti casi si ricorre ad una formula approssimata, ottenuta sviluppando al secondo ordine in serie di Taylor la funzione $f(x)$ nell'intorno del varl medio μ della variabile di partenza X :

$$\langle Z \rangle \simeq f(\mu) + \frac{1}{2} f''(\mu) \sigma^2. \quad (6.14)$$

La media della funzione f è pari alla funzione della media più un termine correttivo che dipende dalla concavità della funzione nell'intorno della media e della varianza di X ;

- $Z = aX + b$:

$$\langle Z \rangle = f(\langle X \rangle); \quad (6.15)$$

$$\text{Var}[Z] = \int [f(x) - f(\langle X \rangle)]^2 p_X(x) \, dx. \quad (6.16)$$

Anche in questo caso la varianza può essere approssimata:

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} [f''(\mu)]^2 (\Delta_4 - \sigma^4) + f'(\mu) f''(\mu) \Delta_3 \quad (6.17)$$

dove Δ_i sono i momenti definiti da 1.16. Conoscendo l'ordine di grandezza dei momenti, si può fare una stima accettabile della varianza di Z :

- Densità X simmetrica intorno alla media:

$$\Delta_3 = 0; \quad (6.18)$$

- Densità gaussiana ($\Delta_3 = 0$ e $\Delta_4 = 3\sigma^4$):

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} [f''(\mu)]^2 \sigma^4; \quad (6.19)$$

- Densità simmetrica ma non gaussiana:

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} [f''(\mu)]^2 \sigma^4. \quad (6.20)$$

- Quando $\sigma^2 \gg \sigma^4$:

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2. \quad (6.21)$$

- $Z = aX^2$ con X che segue la densità gaussiana:

$$\langle Z \rangle \simeq f(\mu) + \frac{1}{2} f''(\mu) \sigma^2; \quad (6.22)$$

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} [f''(\mu)]^2 \sigma^4. \quad (6.23)$$

- Z funzione di n variabili X_i : $Z = f(X_1, \dots, X_n)$. Si utilizza l'approssimazione lineare:

$$\langle Z \rangle = f(\langle X \rangle); \quad (6.24)$$

$$\text{Var}[Z] \simeq [f'(\mu)]^2 \sigma^2. \quad (6.25)$$

- Per due variabili:

$$\langle Z \rangle = \int f(x_1, x_2) p_X(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = f(\mu_1, \mu_2); \quad (6.26)$$

$$\text{Var}[Z] = \int [f(x_1, x_2) - f(\mu_1, \mu_2)]^2 p_X(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2. \quad (6.27)$$

Il risultato contiene delle novità:

$$\sigma_z^2 \simeq \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 \sigma_1^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^2 \sigma_2^2 + 2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] \sigma_{1,2}. \quad (6.28)$$

* Variabili indipendenti $\sigma_{1,2} = 0$:

$$\sigma_z^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 \sigma_1^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^2 \sigma_2^2; \quad (6.29)$$

* $Z = X_1 + X_2$:

$$\mu_z = \mu_1 + \mu_2; \quad (6.30)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2; \quad (6.31)$$

* $Z = X_1 X_2$, $Z = \frac{X_1}{X_2}$, $Z = \frac{X_2}{X_1}$:

$$\frac{Var [Z]}{\langle Z \rangle^2} = \frac{Var [X_1]}{\langle X_1 \rangle^2} + \frac{Var [X_2]}{\langle X_2 \rangle^2}. \quad (6.32)$$

Capitolo 7

Statistica di base

Lo spazio di probabilità 1.10 cambia leggermente la notazione e diventa $\varepsilon(\theta) \equiv (S, \mathcal{F}, P_\theta)$ dove P_θ è una probabilità dipendente da un parametro θ , che fornisce una legge

$$P\{X \in A\} = \int_A p(x; \theta) \, dx \quad (7.1)$$

per il campione casuale (X_1, \dots, X_N) .

7.1 Determinazione degli intervalli di confidenza

Avendo ottenuto un valore x di una variabile X continua e conoscendo la densità $p(x; \theta)$ della probabilità $P\{X \in A\} = \int_A p(x; \theta) \, dx$, se θ è un parametro di posizione come la media, i valori $[\theta_1, \theta_2]$, relativi ad una realizzazione dell'intervallo aleatorio $[\Theta_1, \Theta_2]$ secondo il CL assegnato, possono essere trovati con le relazioni:

$$\int_x^{+\infty} p(z; \theta_1) \, dz = c_1, \quad \int_{-\infty}^x p(z; \theta_2) \, dz = c_2 \quad (7.2)$$

dove $CL = 1 - c_1 - c_2$. Nel caso X sia una variabile discreta, agli integrali vanno sostituite le somme sui componenti.

Considerando il caso in cui il parametro θ sia la media di una curva normale: $\theta \equiv \mu$. La forma di $p(x; \mu)$ è invariante per traslazioni e le funzioni $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ sono due rette parallele. Risulta quindi:

$$\int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} p(x; \mu) \, dx = \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} p(\mu; x) \, d\mu$$

che si può scrivere:

$$P\{\mu - t\sigma \leq X \leq \mu + t\sigma\} = P\{-t\sigma \leq X - \mu \leq t\sigma\} = P\{X - t\sigma \leq \mu \leq X + t\sigma\}. \quad (7.3)$$

I livelli di probabilità dell'intervallo centrato su μ coincidono con i livelli di confidenza dell'intervallo aleatorio centrato su X .

7.2 Approccio bayesiano

Nell'approccio bayesiano il parametro da stimare viene considerato come una variabile aleatoria e l'intervallo di confidenza 1.20 rappresenta la conoscenza ottenuta, dopo la misura, sul valore del parametro.

7.3 Stima della probabilità da grandi campioni

Prova di n tentativi bernoulliani, ottenendo x successi con quindi una frequenza $f = \frac{x}{n}$. Si definisce una variabile standard 1.17 $T = \frac{F-p}{\sigma[F]}$ che assume i valori

$$t = \frac{f - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}. \quad (7.4)$$

Se si esegue una prova, f è noto e p è incognito; utilizzando l'approccio statistico, si può allora determinare i valori di p per i quali il valore assunto dalla variabile standard risulta minore di un certo limite t assegnato:

$$\frac{|f - p|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq |t|. \quad (7.5)$$

Eliminando i valori assoluti elevando al quadrato ambo i membri e risolvendo rispetto all'incognita p , si ottiene, in forma compatta la formula di Wilson per piccoli campionamenti:

$$p \in \frac{f + \frac{t^2}{2n}}{\frac{t^2}{n} + 1} \pm \frac{t \sqrt{\frac{t^2}{4n^2} + \frac{f(1-f)}{n}}}{\frac{t^2}{n} + 1}. \quad (7.6)$$

Il parametro t sta ad indicare un qualunque valore della variabile standard T ; porre $t = 1$ corrisponde a considerare un'unità di errore statistico.

L'intervallo è centrato nel punto $\frac{f + \frac{t^2}{2n}}{\frac{t^2}{n} + 1}$, funzione di f e del numero di tentativi effettuati. Ciò è dovuto all'asimmetria della binomiale per un numero di prove abbastanza esiguo.

Per un numero di prove $n \gg 1$ vale l'approssimazione gaussiana e la 7.6 diventa:

$$p \in f \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} s = f \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, \quad (7.7)$$

dove $\left|t_{\frac{\alpha}{2}}\right| = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sono i valori quantili della gaussiana standard che definiscono gli estremi dell'intervallo che sottende un'area pari a $CL = 1 - \alpha$. La dimensione del campione necessaria per mantenere l'errore statistico al di sotto di un valore assoluto prefissato a priori è:

$$\sigma_{max}^2 = \frac{1}{4n} \quad (7.8)$$

Ricavato dalla varianza:

$$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (7.9)$$

Il numero di tentativi necessari per mantenere l'intervallo di stima $\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{max}$ al disotto di un certo valore prefissato è quindi:

$$n = \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4 \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma_{max} \right)^2}. \quad (7.10)$$

Con l'intervallo 1σ e quindi $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$ da 7.7 si ha l'intervallo di Wald:

$$p \in f \pm s = f \pm \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}. \quad (7.11)$$

Moltiplicando per il numero di tentativi la 7.11 può essere espressa in funzione del numero di successi x :

$$\mu \in f \pm \sqrt{x \left(1 - \frac{x}{n} \right)}. \quad (7.12)$$

L'intervallo è centrato sul valore misurato, la variabile T è pivotale perché $T \sim N(0, 1)$; l'errore statistico ha la stessa espressione della deviazione standard della distribuzione binomiale (con la probabilità p sostituita dalla frequenza misurata f) e i livelli di confidenza CL sono gaussiani.

7.3.1 Per grandi campioni:

- la densità binomiale assume una forma gaussiana;
- l'intervallo di confidenza è simmetrico;
- il valore misurato f definisce due code che valgono entrambe $\frac{1-CL}{2}$ in modo da avere le due aree tra f e p_1 e tra f e p_2 uguali ognuna a $\frac{CL}{2}$;
- se è valida la condizione $nf, n(1-f) \gg 1$, i livelli di confidenza associati all'intervallo 7.11 sono quelli della legge 3σ gaussiana (10.4).

7.3.2 Per piccoli campioni:

- la variabile T non è pivotale e non è più possibile assegnare in modo generale i livelli di confidenza;
- l'intervallo di confidenza è asimmetrico;
- le due code di area $\frac{1-CL}{2}$ assumono forma diversa

7.4 Stima della probabilità da piccoli campioni

Per un numero di campioni esiguo, in cui $x = nf < 10$ si utilizza l'intervallo 7.6 ma non sono possibili da definire i livelli di confidenza universali perché la binomiale dipende fortemente sia da n che dal valore della probabilità di successo p . Un modo per definire gli estremi dell'intervallo di confidenza corrispondente al CL sono le equazioni di Clopper-Pearson:

$$\sum_{k=x}^n \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} = c_1, \quad \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} = c_2. \quad (7.13)$$

Nel caso simmetrico $c_1 = c_2 = \frac{1-CL}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

In alternativa si può applicare la 7.6 applicando la correzioni di continuità $f_{\pm} = \frac{x \pm 0.5}{n}$ alla frequenza $f = \frac{x}{n}$; con l'approssimazione alla gaussiana si ottiene:

$$p \in \frac{f_{\pm} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2n}}{\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + 1} \pm \frac{\left| t_{\frac{\alpha}{2}} \right| \sqrt{\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4n^2} \frac{f_{\pm}(1-f_{\pm})}{n}}}{\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + 1}. \quad (7.14)$$

- Nei casi $x = 0$ e $x = n$ le equazioni di Clopper-Pearson 7.13 con $c_1 = c_2 = 1-CL$ presentano due casi limite:

$$x = n \quad \Rightarrow \quad p_1^n = 1 - CL,$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - p_2)^n = 1 - CL.$$

Ciò è utile per definire il limite inferiore di una probabilità quando tutti i tentativi hanno avuto successo:

$$p_1 = \sqrt[n]{1 - CL} = e^{\frac{1}{n} \ln(1-CL)} = 10^{\frac{1}{n} \log(1-CL)} \quad (7.15)$$

e il limite superiore quando non si è registrato alcun successo:

$$p_2 = 1 - \sqrt[n]{1 - CL} = 1 - e^{\frac{1}{n} \ln(1-CL)} = 1 - 10^{\frac{1}{n} \log(1-CL)}. \quad (7.16)$$

- Quando n è grande e non si sono registrati successi, p_2 è piccola e si ottiene approssimando al secondo ordine:

$$p_2 \simeq -\frac{1}{n} \ln(1 - CL)$$

che corrisponde all'equazione:

$$e^{-np_2} = (1 - CL) = \alpha. \quad (7.17)$$

7.5 Intervalli di stima per eventi poissoniani

Il caso binomiale può essere esteso a quello poissoniano. Per stimare correttamente μ si usano equazioni analoghe a quelle 7.13:

$$\sum_{k=x}^n \frac{\mu_1^k}{k!} e^{-\mu_1} = c_1, \quad \sum_{k=0}^x \frac{\mu_2^k}{k!} e^{-\mu_2} = c_2. \quad (7.18)$$

Nel caso simmetrico si ha sempre $c_1 = c_2 = \frac{1-CL}{2}$.

Con l'approssimazione gaussiana ($\sigma^2 = \mu$) l'intervallo di confidenza per il valore atteso μ è:

$$\frac{|x - \mu|}{\sqrt{\mu}} \leq \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \right|. \quad (7.19)$$

Introducendo la correzione di continuità $x_{\pm} = x \pm 0.5$ se $x \neq 0$ si ottiene:

$$\mu \in x_{\pm} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2} \pm \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \right| \sqrt{x_{\pm} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4}}. \quad (7.20)$$

- Per $x = 0$:

$$e^{-\mu} = 1 - CL; \quad (7.21)$$

- per $x = 1$:

$$e^{-\mu} + \mu e^{-\mu} = 1 - CL; \quad (7.22)$$

- per $x = 2$:

$$e^{-\mu} + \mu e^{-\mu} + \frac{\mu^2}{2} e^{-\mu} = 1 - CL, \quad (7.23)$$

- quando $x > 100$:

$$\mu \in x \pm \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \right| \sqrt{x}. \quad (7.24)$$

7.6 Stima della media da grandi campioni

La media di un campione, o media campionaria, è una variabile aleatoria. Se si produce un campione casuale di dimensione N da una distribuzione, e se ne si fa la media $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ e si ripete il procedimento, ogni volta si ottiene un risultato diverso.

La media campionaria è uno stimatore:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (7.25)$$

La varianza alla variabile M è:

$$\text{Var}[M] = \text{Var}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}[X_i] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (7.26)$$

Poiché σ^2 non è nota solitamente, si può approssimare con la varianza s^2 calcolata dal campione e si ottiene:

$$\mu \in m \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \simeq m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}. \quad (7.27)$$

Il teorema del limite centrale 10.5 afferma che la densità della media campionaria sarà gaussiana per $N \gg 1$, cioè per $N > 10$. Nel caso gaussiano 7.3 i livelli di confidenza cercati sono dati dai livelli di probabilità rispetto alla media della corrispondente densità gaussiana.

Nella 7.27 la varianza vera σ può essere sostituita da quella osservata s se $N - 1 \simeq N$, cioè per valori di $N > 20, 30$ con livelli di confidenza gaussiani per $N > 10$.

7.7 Stima della varianza da grandi campioni

La varianza campionaria per variabili X qualsiasi tende alla densità gaussiana, ma solo per campioni $N > 10$.

Se le variabili del campione sono gaussiane allora la distribuzione campionaria della

varianza è riconducibile alla densità χ^2 la quale converge a quella gaussiana un po' più velocemente all'incirca per $N > 30$.

La variabile aleatoria varianza campionaria tende a diventare una variabile gaussiana molto più lentamente della corrispondente media campionaria che lo è già per $N > 10$.

Si possono avere due tipi di varianza:

- varianza rispetto la media vera:

$$S_\mu^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2; \quad (7.28)$$

La 7.28 è uno stimatore distorto infatti $\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 \right\rangle = \frac{N-1}{N} \sigma^2$, con $\frac{1}{N}$ come fattore di distorsione;

- varianza rispetto la media campionaria:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - M)^2. \quad (7.29)$$

La 7.29 è uno stimatore non distorto in quanto gode della proprietà $\langle S^2 \rangle = \sigma^2$.

Esse tendono alla varianza vera σ^2 per $N \rightarrow \infty$.

7.7.1 Varianza della varianza

La varianza della varianza fatta sul valore vero è:

$$\text{Var} [S_\mu^2] = \frac{1}{N^2} \sum_i \text{Var} [(X_i - \mu)^2] = \frac{1}{N^2} [N \Delta_4 - N \sigma^4] = \frac{1}{N} (\Delta_4 - \sigma^4) \quad (7.30)$$

e sostituendo ai valori veri Δ_4 e σ^4 i valori stimati $D_4 = \frac{1}{N} \sum_i (X_i - \mu)^2$ e s_μ^4 si ottiene:

$$\text{Var} [S_\mu^2] \simeq \frac{D_4 - s_\mu^4}{N}. \quad (7.31)$$

- L'intervallo di confidenza della varianza con media nota è:

$$\sigma^2 \in s_\mu^2 \pm \sigma [S_\mu^2] = s_\mu^2 \pm \sqrt{\frac{D_4 - s_\mu^4}{N}}. \quad (7.32)$$

- L'intervallo di confidenza della varianza con media ignota è:

$$\sigma^2 \in s^2 \pm \sigma [S^2] = s^2 \pm \sqrt{\frac{D_4 - s_\mu^4}{N-1}}. \quad (7.33)$$

L'intervallo di confidenza della deviazione standard è:

$$\sigma \in s \pm \sqrt{\frac{D_4 - s^4}{4(N-1)s^2}}. \quad (7.34)$$

Se le variabili che compongono il campione sono gaussiane, valendo la relazione $\Delta_4 = 3\sigma^4$ e le formule di prima diventano:

$$\sigma^2 \in s^2 \pm \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N-1}}, \quad (7.35)$$

$$\sigma \in s \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-1)}}. \quad (7.36)$$

Per $CL = 1 - \alpha$:

$$\frac{s^2}{1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2}{N-1}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2}{N-1}}}, \quad (7.37)$$

$$\frac{s}{1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{2(N-1)}}} \leq \sigma \leq \frac{s}{1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{2(N-1)}}}. \quad (7.38)$$

7.8 Stima della media da piccoli campioni

La media campionaria M , se è la somma di N variabili gaussiane, è anch'essa gaussiana per qualunque N , e quindi anche la variabile $\frac{M-\mu}{\sigma} \sqrt{N}$ è una variabile standard gaussiana per qualunque N , cioè una quantità pivotale.

L'intervallo di confidenza della media si ricava attraverso

$$T = \frac{M - \mu}{\sigma} \sqrt{N} \frac{1}{\sqrt{Q_R}} = \frac{M - \mu}{S} \sqrt{N} \quad (7.39)$$

che è distribuita come la densità di Student 4.44 con $N-1$ gradi di libertà. L'uso della variabile di Student permette di eliminare dall'intervallo di confidenza la varianza vera (incognita) σ^2 e di definire una quantità pivotale per la stima di μ .

7.9 Stima della varianza da piccoli campioni

Il teorema della varianza campionaria 10.14 fornisce la quantità pivotale $\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_R^2(N-1)$. L'intervallo di probabilità è $\chi_{R(\frac{\alpha}{2})}^2 \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{R(1-\frac{\alpha}{2})}^2$ con $\chi_{R(\frac{\alpha}{2})}^2$ e $\chi_{R(1-\frac{\alpha}{2})}^2$ presi come valori dei quantili della variabile Q_R corrispondenti al livello di confidenza CL prefissato; perciò l'intervallo di stima della varianza in corrispondenza di un valore misurato s^2 è:

$$\frac{s^2}{\chi_{R(1-\frac{\alpha}{2})}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{\chi_{R(\frac{\alpha}{2})}^2}. \quad (7.40)$$

L'intervallo di confidenza per la deviazione standard è invece:

$$\frac{s}{\sqrt{\chi_{R(1-\frac{\alpha}{2})}^2}} \leq \sigma \leq \frac{s}{\sqrt{\chi_{R(\frac{\alpha}{2})}^2}}. \quad (7.41)$$

7.10 Riassunto

Variabili gaussiane			Variabili qualunque	
	Intervallo	CL	Intervallo	CL
● Probabilità				
$nf < 10$	-	-	eq. 7.13	Binomiale
$N(1 - f) > 10$	-	-	eq. 7.14	Gauss
● Frequenza				
$x < 10$	-	-	eq. 7.18	Poisson
$x > 10$	-	-	eq. 7.19	Gauss
● Media				
$N < 30$	$m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$	Student	$\simeq m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$?
$N > 30$	$m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$	Gauss	$m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$	Gauss
● Varianza				
$N < 100$	$\frac{s^2}{\chi_{R1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{\chi_{R2}^2}$	χ_R^2	$\simeq s^2 \pm \sqrt{\frac{D_4-s^4}{N-1}}$?
$N > 100$	eq. 7.37	Gauss	$s^2 \pm \sqrt{\frac{D_4-s^4}{N-1}}$	Gauss
● Dev. standard				
$N < 100$	$\sqrt{\frac{s^2}{\chi_{R1}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{s^2}{\chi_{R2}^2}}$	Maxwell	$\simeq s \pm \sqrt{\frac{D_4-s^4}{4s^2(N-1)}}$?
$N > 100$	eq. 7.38	Gauss	$s \pm \sqrt{\frac{D_4-s^4}{4s^2(N-1)}}$	Gauss

7.11 Verifica di una ipotesi

Considerando la densità di probabilità $p(x; \theta)$ della variabile X definita come 7.1 dipendente dal parametro θ e si supponga venga assunta l'ipotesi $\theta = \theta_0$. Se l'esperimento fornisce un evento $\{X = x\}$, occorre decidere se accettare o meno il modello corrispondente all'ipotesi.

Si stabilisce a priori un livello di significatività α , chiamato anche livello del test o dimensione dell'errore del I tipo, che determina i valori dei quantili $x_{\frac{\alpha}{2}}$ e $x_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

- Si rifiuta l'ipotesi se il livello di significatività osservato $\alpha_0 < \alpha$.
- Si accetta l'ipotesi se il livello di significatività osservato $\alpha_0 > \alpha$.

Osservato l'evento occorre calcolare la probabilità, chiamato livello di significatività o p-value:

- $P\{X < x\} = \alpha_0$: test a una coda a sinistra;
- $P\{X > x\} = \alpha_0$: test a una coda a destra;
- $P\{|X - \mu| > |x - \mu|\} = \alpha_0$: test a due code.

Se si scarta l'ipotesi, la probabilità di sbagliare non supera mai α : errore del I tipo.

La verifica d'ipotesi può essere anche fatta con statistiche $T = t(X_1, \dots, X_N)$ che stimano il valore di θ , cioè con degli stimatori. In questo caso alla densità $p(x; \theta_0)$ attribuita al campione va sostituita la densità della distribuzione campionaria dello stimatore e tutto procede come prima. Se lo stimatore non è distorto: $\langle T_N(X) \rangle = \theta_0$. Il livello di significatività è ora:

- $P\{T < t_0\} = SL < \alpha_0$: test a una coda a sinistra;
- $P\{T > t_0\} = SL < \alpha_0$: test a una coda a destra;
- $P\{|T - \theta_0| > |t_0 - \theta_0|\} = SL < \alpha_0$: test a due code.

7.11.1 Confronto tra livello del test e SL

- Per una variabile aleatoria discreta, i livelli SL di due valori contigui possono stare a cavallo del valore deciso per il test.
- Nel caso del test a due code, ad un livello α possono corrispondere limiti fiduciari diversi, cioè intervalli di estremi diversi ma con lo stesso livello di confidenza $CL = 1 - \alpha$. Generalmente in questo caso si scelgono i due estremi, a destra e sinistra, che sottendono code aventi la stessa area $\frac{\alpha}{2}$.

7.12 Verifica di compatibilità tra due valori

Se, fatti due campionamenti differenti, si volesse verificare che i risultati x_1 e x_2 siano in accordo tra loro, bisogna procedere in ambito statistico.

Si definisce una nuova variabile aleatoria differenza:

$$D = X_1 - X_2, \quad (7.42)$$

la quale ha valore atteso nullo nell'ipotesi che i due valori provengano dalla stessa popolazione 1.8. Si può scrivere la varianza di tale variabile:

$$Var[D] \simeq s_1^2 + s_2^2. \quad (7.43)$$

Si può infine definire il valore standard da cui calcolare il livello di significatività:

$$|t_D| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}. \quad (7.44)$$

In questo caso si approssima a grandi campioni e perciò ad una gaussiana.

Generalmente la 7.44 viene utilizzata per confrontare due frequenze o due medie campionarie:

- Due frequenze f_1 e f_2 , in termini di probabilità:

$$t_f = \frac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{N_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{N_2}}}; \quad (7.45)$$

- se $N_1 = N_2 = N$ il confronto può essere fatto in termini di numero di successi x_1 e x_2 :

$$t_x = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N}\right) + x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N}\right)}}; \quad (7.46)$$

- se $N_1 \neq N_2$ è più utile il confronto con la frequenza.

- Due medie m_1 e m_2 :

$$t_m = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}; \quad (7.47)$$

- se i due campioni sono piccoli e la distribuzione campionaria è gaussiana si utilizza la densità di Student:

$$t_D = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}} = \frac{m_1 - m_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}. \quad (7.48)$$

Per utilizzarla con valori campionati e non veri bisogna apporre la correzione di continuità $s_{1,2} = \sqrt{\frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}}$ e il risultato è:

$$t_D = \frac{m_1 - m_2}{s_{1,2} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \quad (7.49)$$

7.13 Stima della densità di una popolazione

Se $p(x)$ è la densità della popolazione del campione, definendo le variabili aleatorie I e F associate agli eventi $\{I_i = n_i\}$ e $\{F_i = \frac{n_i}{N}\}$, dalla 4.2 segue:

$$\langle I_i \rangle = \mu_i = N p_i \simeq N p(x_0) \Delta x, \quad (7.50)$$

$$\langle F_i \rangle = p_i \simeq p(x_0) \Delta x \quad (7.51)$$

dove Δx è la larghezza del canale dell'istogramma e x_0 un punto interno ad esso.

Il numero di eventi I_i caduti in un generico canale segue la distribuzione binomiale 4.3:

- se il fenomeno stocastico è stazionario nel tempo, la probabilità p_i di cadere nel canale resta costante;
- la probabilità di cadere nel canale non dipende dagli eventi che sono caduti o che cadranno negli altri canali.

La probabilità è perciò:

$$P\{I_i = n_i\} = b(n_i; N, p_i) = \frac{N!}{n_i! (N - n_i)!} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N - n_i}. \quad (7.52)$$

La deviazione standard:

$$\sigma_i = \sqrt{N p_i (1 - p_i)}. \quad (7.53)$$

Questa quantità può essere stimata attraverso l'incertezza $s_i \equiv s(n_i)$:

- Se il canale ha più di 5, 10 elementi:

$$s_i = \sqrt{n_i \left(1 - \frac{n_i}{N}\right)} \quad (7.54)$$

- Se l'istogramma è normalizzato:

$$s\left(\frac{n_i}{N}\right) = \sqrt{\frac{f_i(1-f_i)}{N}} \quad (7.55)$$

- Se l'istogramma non è ottenuto con numero totale N di eventi costante ma è raccolto controllando altri parametri: il numero N si trasforma da costante a variabile statistica N poissoniana e le fluttuazioni del contenuto dei canali vanno calcolate in modo diverso.

In base alla legge delle probabilità composte 10.3 la probabilità di osservare N eventi sarà data dal prodotto della probabilità poissoniana 4.4 di ottenere un totale $\{N = N\}$ di eventi quando la media è λ e dalla probabilità binomiale 4.3 di avere n_i eventi nel canale in esame, su un totale di N , quando la probabilità vera è p_i :

$$P\{I_i = n_i, N = N\} = \frac{N!}{n_i!(N-n_i)!} p_i^{n_i} (1-p_i)^{N-n_i} \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!}.$$

Definendo $m_i = N - n_i$:

$$p\{n_i, m_i\} = \frac{e^{-\lambda p_i} (\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!} \frac{e^{-\lambda(1-p_i)} [\lambda(1-p_i)]^{m_i}}{m_i!},$$

prodotto di due poissoniane di media λp_i e $\lambda(1-p_i)$ rispettivamente. Si ha quindi la varianza:

$$s\left(\frac{n_i}{N}\right) = \sqrt{\frac{f_i}{N}}. \quad (7.56)$$

La stima del numero di eventi veri μ_i (valori attesi) nel canale i -esimo è dato dalla 7.50 e l'intervallo di confidenza è:

- Per istogrammi raccolti con numero di eventi N determinato:

$$\mu_i \in n_i \pm \sqrt{n_i \left(1 - \frac{n_i}{N}\right)}. \quad (7.57)$$

Per istogrammi normalizzati:

$$p_i \in f_i \pm \sqrt{\frac{f_i(1-f_i)}{N}}, \quad f_i \equiv \frac{n_i}{N}. \quad (7.58)$$

- Per istogrammi in cui il numero totale di eventi N è una variabile poissoniana

$$\mu_i \in n_i \pm \sqrt{n_i}. \quad (7.59)$$

Per istogrammi normalizzati:

$$p_i \in f_i \pm \sqrt{\frac{f_i}{N}}. \quad (7.60)$$

7.14 Verifica di compatibilità tra campione e popolazione

Oltre a poter valutare ad occhio si può utilizzare il test χ^2 . Bisogna conoscere (o assumere come ipotesi nulla) le probabilità vere p_i di ogni canale ed eseguire su tutti i K canali:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - \mu_i)^2}{\mu_i} = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}. \quad (7.61)$$

- Se il numero totale N di eventi è variabile e si somma sui canali con più di 5, 10 eventi: la 7.61 risulta essere approssimativamente la somma del quadrato di K variabili gaussiane standard indipendenti e pertanto in base al teorema di Pearson 10.7, essa si distribuisce approssimativamente come la densità χ^2 4.7 con K gradi di libertà.
- Se il numero totale N di eventi è costante: le variabili della 7.61 sono correlate ma hanno una densità χ^2 4.7 con $(K - 1)$ gradi di libertà.

Occorre sempre sommare il quadrato delle differenze tra le frequenze osservate e quelle vere e dividere per le frequenze vere, avendo cura di ricordarsi che i gradi di libertà sono pari al numero di canali se N è una variabile poissoniana, mentre vanno diminuiti di un'unità se N è costante.

La densità χ^2 è asimmetrica.

- Test a una coda (coda destra): livello di significatività:

$$SL = P \{Q_R(\nu) \geq \chi_R^2(\nu)\} \quad (7.62)$$

- Test a due code: livelli di significatività

$$SL = 2P \{Q_R(\nu) > \chi_R^2(\nu)\} \quad \text{se} \quad P \{Q_R(\nu) > \chi_R^2(\nu)\} < 0.5 \quad (7.63)$$

$$SL = 2P \{Q_R(\nu) < \chi_R^2(\nu)\} \quad \text{se} \quad P \{Q_R(\nu) > \chi_R^2(\nu)\} > 0.5 \quad (7.64)$$

- Quando $P \{Q_R(\nu) > \chi_R^2(\nu)\} < 0.01$ il valore di χ^2 ridotto trovato si situa nella coda a destra e risulta troppo alto: è altamente probabile che la densità della popolazione assunta come modello non sia quella vera.
- Quando $P \{Q_R(\nu) > \chi_R^2(\nu)\} > 0.99$ il valore di χ^2 ridotto trovato è troppo alto.

Spesso il χ^2 di un istogramma viene calcolato dividendo le frequenze misurate invece che per quelle vere:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - Np_i)^2}{n_i}. \quad (7.65)$$

Capitolo 8

Statistica multidimensionale

8.1 Densità congiunta

Definendo la probabilità composta $P(AB) \equiv P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}$, se esiste una funzione $p(x, y) \geq 0$ tale che:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy$$

si dice che essa è la densità congiunta di probabilità per due variabili.

Se $p(x, y)$ soddisfa quest'equazione, la probabilità che $(X, Y) \in A$ è data da:

$$P\{(X, Y) \in A\} = \int_A p(x, y) dx dy \quad (8.1)$$

analogo del livello di probabilità $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b p(x) dx$. È normalizzata; ha media:

$$\langle X \rangle = \mu_x \quad \langle Y \rangle = \mu_y \quad (8.2)$$

e varianza:

$$\text{Var}[X] = \sigma_x^2 \quad \text{Var}[Y] = \sigma_y^2. \quad (8.3)$$

Se X e Y sono stocasticamente indipendenti, si definisce la densità congiunta come:

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y). \quad (8.4)$$

Media e varianza di combinazioni di variabili:

$$\langle XY \rangle = \mu_{xy} \quad \text{Var}[XY] = \int (xy - \mu_{xy})^2 p(x, y) dx dy \quad (8.5)$$

$$\langle X + Y \rangle = \mu_{x+y} \quad \text{Var}[X + Y] = \int (x + y - \mu_{x+y})^2 p(x, y) dx dy \quad (8.6)$$

8.2 Densità marginale

Se X e Y sono due variabili aleatorie con densità $p(x, y)$ ed A è un intervallo dell'asse reale, la densità marginale $p_X(x)$ è definita dalla relazione:

$$P\{X \in A\} = \int_A p_X(x) dx = \int_A dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad (8.7)$$

da cui:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy. \quad (8.8)$$

La densità marginale $p_Y(y)$ si ottiene dall'equazione 8.8, scambiando x con y . Sono normalizzate.

8.3 Indipendenza di variabili

Due variabili aleatorie (X, Y) di densità congiunta $p(x, y)$, sono stocasticamente indipendenti se e solo se esistono due funzioni $g(x)$ e $h(y)$ tali che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si abbia:

$$p(x, y) = g(x) h(y). \quad (8.9)$$

8.4 Densità condizionata

Se X e Y sono due variabili aleatorie con densità $p(x, y)$, la densità condizionata $p(y|x_0)$ di y per ogni $x = x_0$ fissato e tale che $p_X(x_0) > 0$, è data da:

$$p(y|x_0) = \frac{p(x_0, y)}{p_X(x_0)} = \frac{p(x_0, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_0, y) dy}. \quad (8.10)$$

È normalizzata.

8.5 Covarianza di due variabili

La covarianza di due variabili X e Y è definita come:

$$\text{Cov}[X, Y] = \int \int (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy \equiv \sigma_{xy}. \quad (8.11)$$

Quando la covarianza è calcolata attraverso la funzione di densità, la sommatoria è doppia e va fatto sulle probabilità delle coppie dei valori possibili delle due variabili; quando la covarianza è calcolata da un insieme sperimentale di dati, la somma è singola e va fatta su tutte le coppie ottenute nel campionamento.

Esiste un'interessante relazione:

$$\text{Cov}[X, Y] = \langle (X - \mu_x)(Y - \mu_y) \rangle = \langle XY \rangle - \mu_x \mu_y.$$

La covarianza di due variabili gode della proprietà di annullarsi quando le variabili sono indipendenti 1.3.1.

8.6 Correlazione tra variabili

Viene definito come coefficiente di correlazione il rapporto tra la covarianza e le varianze delle variabili aleatorie a cui si riferisce la covarianza:

$$\rho_{xy} \equiv \rho[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma[X] \sigma[Y]} \quad (8.12)$$

Gode della proprietà: $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$.

Due variabili aleatorie si dicono incorrelate quando il loro coefficiente di correlazione è nullo, si dicono correlate in caso contrario. Se due variabili sono statisticamente indipendenti, allora sono anche incorrelate.

- Condizione sufficiente perché vi sia dipendenza statistica è la presenza di correlazione;
- condizione necessaria per l'indipendenza statistica è la mancanza di correlazione ($\rho_{xy} = 0$).

8.7 Densità normali condizionate

Rielaborando la 4.30, notando che è del tipo della 4.20 si ottiene:

$$g(y|x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp \left[-\frac{\left(y - \mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x) \right)^2}{2\sigma_y^2 (1-\rho^2)} \right]. \quad (8.13)$$

Ha media:

$$(Y|x) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

e varianza:

$$\text{Var}[Y|x] = \sigma_x^2 (1 - \rho^2).$$

La media di Y condizionata ad x si dispone, nel piano (x, y) ed al variare di x , lungo una retta, detta di regressione. Tra le medie condizionate della gaussiana bivariata esiste un legame di regressione lineare. La varianza di Y si mantiene costante e dipende da x solo attraverso il coefficiente di correlazione.

La varianza condizionata misura la dispersione dei dati intorno alla retta di regressione ed è sempre \leq di quella proiettata σ_y^2 .

Capitolo 9

Analisi dei dati sperimentali

9.1 Misure indirette e propagazione degli errori

Una grandezza si dice misurata in modo indiretto quando è una funzione $z = f(x, y, w, \dots)$ di una o più grandezze misurate direttamente e affette da incertezza. La determinazione dell'incertezza su z a partire da quella delle grandezze misurate si chiama propagazione degli errori.

- Errori statistici e misure indipendenti: la propagazione degli errori segue la 6.28 o la generalizzazione a n variabili $\sigma_z^2 \simeq TVT^\dagger$ con V la matrice simmetrica delle covarianze e T la matrice delle derivate (\dagger indica la trasposta), sostituendo alle deviazioni standard, gli errori di misura s_x e s_y :

$$s_f^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 s_y^2; \quad (9.1)$$

con n misure si ha la legge di propagazione degli errori di misura, valida solo in approssimazione lineare:

$$s_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 s^2(x_i). \quad (9.2)$$

La stima della deviazione standard risultante definisce un intervallo di confidenza gaussiano solo se tutte le variabili sono gaussiane.

- La propagazione lineare viene utilizzata anche per prodotti o rapporti dando luogo alla propagazione lineare degli errori percentuali. Si sommano le varianze percentuali o relative:

$$Z = X_1 X_2, \quad Z = \frac{X_1}{X_2}, \quad Z = \frac{X_2}{X_1} \implies \frac{s_z^2}{z^2} = \frac{s_1^2}{x_1^2} + \frac{s_2^2}{x_2^2}. \quad (9.3)$$

- Incertezze strumentali (errore sistematico) e misure correlate: si attribuisce spesso la densità uniforme 4.9. La legge di propagazione degli errori di misura è:

$$\Delta_f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_y, \quad (9.4)$$

che per n misure vale:

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_i. \quad (9.5)$$

Queste formule rappresentano la larghezza totale della deviazione standard quando la composizione delle misure è lineare. Viene usato per una stima del limite superiore dell'errore.

- Misure non correlate: bisogna applicare la propagazione dell'errore statistico 9.1 al caso della densità uniforme 9.4 la cui varianza vale $\frac{\Delta^2}{12}$. Per due variabili vale:

$$s_f^2 = \frac{1}{12} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Delta_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Delta_y^2 \right] \quad (9.6)$$

e per n variabili:

$$s_f^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta_i^2. \quad (9.7)$$

Queste varianze non vanno mai associate alla densità gaussiana.

- Somma di due errori sistematici uguali: seguono la densità triangolare in $[0, \Delta]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4}{\Delta^2} x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\Delta}{2} \\ \frac{4}{\Delta^2} (\Delta - x) & \text{per } \frac{\Delta}{2} < x < \Delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (9.8)$$

di parametri $\mu = \frac{\Delta}{2}$, $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{24}$ e $\sigma = \frac{\Delta}{2\sqrt{6}}$.

Si considerano intervalli di confidenza gaussiani già a partire da errori ottenuti dalla combinazione lineare di due soli errori sistematici.

Se si utilizza la densità triangolare, nella 9.6 al posto di $\frac{1}{12}$, bisogna porre $\frac{1}{24}$.

- La propagazione lineare viene utilizzata anche per prodotti o rapporti dando luogo alla propagazione lineare degli errori massimi:

$$Z = X_1 X_2, \quad Z = \frac{X_1}{X_2}, \quad Z = \frac{X_2}{X_1} \implies \frac{\Delta_z}{z} = \frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2}. \quad (9.9)$$

- Errori statistici e sistematici:

- Sovrapposizione lineare di due misure (errore gaussiano + errore sistematico uniforme) $[X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim U(a, b)]$:

$$p_z(z) = \frac{1}{b-a} \left[\Phi \left(\frac{b - (z - \mu)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a - (z - \mu)}{\sigma} \right) \right]. \quad (9.10)$$

utilizzando la funzione cumulativa della gaussiana standard 4.26, Φ .

Se si immagina l'errore sistematico come un intervallo ($a = -\frac{\Delta}{2}$, $b = \frac{\Delta}{2}$) e si introduce la variabile standard $t = \frac{z - \mu}{\sigma}$ (σ è l'errore statistico vero).

Riscrivendo e ricordando che $E(x) = -E(-x)$ e che $\Phi(x) = 0.5 + E(x)$ si ha:

$$p(t) = \frac{\Delta}{\sigma} \left[E\left(t + \frac{\Delta}{2\sigma}\right) - E\left(t - \frac{\Delta}{2\sigma}\right) \right]. \quad (9.11)$$

Essa ha una deviazione standard:

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\Delta^2}{12}}. \quad (9.12)$$

9.1.1 Metodo bootstrap

Si assumono come valori centrali e deviazioni standard i valori misurati ed i loro errori.

Si estraggono a caso delle variabili aleatorie, che vengono combinate come prescritto dalla misura per ottenere l'istogramma simulato delle grandezze finali (o istogrammi, nel caso di misure complesse)

La forma dell'istogramma fornisce un'idea della densità di probabilità della grandezza misurata.

Gli errori di misura vengono ricavati direttamente come limite delle aree corrispondenti, sull'istogramma, ai livelli di confidenza assegnati.

I valori centrali in genere coincidono o sono molto vicini, entro l'errore statistico, ai valori misurati e quindi non forniscono nuove informazioni.

Per i valori centrali (le medie) risultanti dalla simulazione, va notato che se gli istogrammi provengono da densità asimmetriche, il valor medio simulato differisce dal valore misurato. Bisogna ugualmente riferirsi al valore misurato e calcolare l'errore di misura centrandosi sempre su di esso.

9.2 Riassunto

- Errori statistici: stimare le deviazioni standard dei campioni sperimentali ed applicare la 9.1. Se tutti gli errori di partenza sono gaussiani, il risultato fornisce la deviazione standard della densità gaussiana risultante e vale la legge 3σ .
- Errori sistematici: la deviazione standard risultante quasi sempre definisce livelli di confidenza approssimativamente gaussiani. Si applica la 9.6. La 9.4 definisce un errore massimo che non va combinato con altre grandezze che rappresentano stime di deviazioni standard.
- Combinazione lineare di errori statistici e sistematici: si fa sempre in quadratura attraverso la 9.1, dove la varianza degli effetti strumentali va calcolata con la 9.6. Non segue la legge 3σ . Spesso però in pratica si assumono livelli gaussiani.
- Errori grandi correlati o da combinarsi non linearmente: si ricorre al metodo bootstrap 9.1.1.

9.3 Definizione dei tipi di misura

La notazione per il tipo di misura è: M (grandezza, errori statistici, errori sistematici).

- $M(0, \sigma, 0)$: misura di una grandezza costante con errori statistici.
- $M(0, 0, \Delta)$: misura di una grandezza costante con errori sistematici.
- $M(f, \sigma, \Delta)$: misura di una grandezza variabile con errori statistici e sistematici.

9.3.1 $M(0, 0, \Delta)$

Grandezza costante, errori sistematici. La misura non presenta fluttuazioni, misure ripetute forniscono tutte lo stesso valore.

Il risultato della misura va presentato nella forma $x \pm \frac{\Delta(x)}{2}$ con un $CL = 100\%$: errore massimo.

Agli errori sistematici si attribuisce una densità uniforme.

Varianza:

$$s^2(x) = \frac{\Delta^2(x)}{12}, \quad (9.13)$$

deviazione standard:

$$s(x) = \frac{\Delta(x)}{2\sqrt{3}}. \quad (9.14)$$

9.3.2 $M(0, \sigma, 0)$

Grandezza costante, errori statistici. Misure ripetute danno valori diversi (generalmente si distribuiscono come una gaussiana).

Il risultato della misura va presentato nella forma $x = m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$ con un $CL = 68\%$ se $N > 10$: viene presentato così quando $\frac{s}{\sqrt{N}} \gg \Delta$. $\frac{s}{\sqrt{N}}$ rappresenta la precisione della misura globale.

Se due misure hanno errori diversi si può avere la stessa precisione finale se $\frac{N_1}{N_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$.

- Se le x_i misure provengono da esperimenti diversi, esse avranno precisioni s_i differenti e perciò bisogna usare la media pesata

$$\mu \in \frac{\sum_{i=1}^k x_i p_i}{\sum_{i=1}^k p_i} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^k p_i}} \quad (9.15)$$

con $p_i = \frac{n_i}{\sigma_i^2}$ e $n_i = 1$. Si considera quindi una funzione di verosimiglianza prodotto di N misure gaussiane.

Con l'approssimazione $s_i \sim \sigma_i$ si ha la probabilità di ottenere il risultato osservato secondo la verosimiglianza $L(\theta, x) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_i(\theta)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i(\theta))^2}{2\sigma_i^2(\theta)}\right) \right]$:

$$L(\mu, x) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{s_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2s_i^2}\right) \right]. \quad (9.16)$$

9.3.3 $M(0, \sigma, \Delta)$

Grandezza costante, errori statistici, errori sistematici. Misure ripetute forniscono valori diversi, campione dei dati presentato in forma di istogramma. Non ha senso scegliere il passo dell'istogramma inferiore all'errore sistematico Δ . In questa classe rientrano le misure 9.3.2 quando i dati sono riportati in un istogramma di passo Δ . Dopo aver calcolato m ed s di un campione di N misure, si calcola la varianza del campione osservato, dovuta agli errori statistici e agli errori sistematici:

$$s^2 = s^2(\text{stat}) + \frac{\Delta^2(\text{syst})}{12}. \quad (9.17)$$

Da questo si ricava la correzione di Sheppard:

$$s^2(\text{stat}) = s^2 - \frac{\Delta^2(\text{syst})}{12}. \quad (9.18)$$

Dà buoni risultati nel caso di misure 9.3.2 istogrammate con passo Δ .

Il risultato della misura va presentato nella forma $x = m \pm \frac{s}{\sqrt{N}}(\text{stat}) \pm \frac{\Delta}{2}(\text{syst})$.

Per l'intervallo di confidenza si utilizza:

- Errore massimo globale:

$$x = m \pm \left(3 \frac{s}{\sqrt{N}} + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (9.19)$$

- Densità uniforme:

$$x = m \pm \sqrt{\frac{s^2}{N} + \frac{\Delta^2}{12}}. \quad (9.20)$$

9.3.4 $M(f, 0, 0)$

Grandezza variabile. Scopo della misura è quello di determinare la distribuzione che determina il fenomeno. A questa classe appartengono tutti i fenomeni stocastici, gli esperimenti di conteggio e i metodi per determinare medie, varianze e forme funzionali.

Nel conteggio di N_{s+b} (s : sorgente, b : fondo) eventi da una sorgente entro un tempo t_s si deve prima trovare l'errore poissoniano dei conteggi originali e poi si deve moltiplicare per la costante $\frac{t_s}{t_b}$. Il rapporto segnale/fondo è:

$$n_\sigma = \frac{N_{s+b} - N_b \frac{t_s}{t_b}}{\sqrt{N_{s+b} + N_b \frac{t_s^2}{t_b^2}}}. \quad (9.21)$$

Con $n_\sigma \simeq 3$ si parla di forte evidenza; con $n_\sigma > 5$ si ritiene avvenuta la scoperta.

9.3.5 $M(f, \sigma, 0)$

Grandezza variabile, errori statistici, errori sistematici. Le fluttuazioni dei valori assunti dall'oggetto fisico si combinano con le fluttuazioni dovute alla misura. Bisogna prima di tutto misurare la risposta dell'apparato, cioè la funzione dell'apparato 1.32.

- Se $p_Z(z) \equiv f(x)$ e $p_X(x) \equiv f(x)$, Z e X sono indipendenti e quindi vale:

$$g(y) = \int p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} dx \quad (9.22)$$

e quindi la funzione dell'apparato è:

$$p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} \equiv \delta(y, x). \quad (9.23)$$

In base alle leggi della probabilità composte e totali, le tre funzioni $f(x)$ (fisica), $g(y)$ (osservazione) e $\delta(y, x)$ (apparato) sono legate dalla relazione chiamata integrale di folding:

$$g(y) = \int f(x) \delta(x) dx \equiv f + \delta. \quad (9.24)$$

La probabilità di osservare un valore y è data dalla probabilità che la variabile fisica assuma un valore x , per la probabilità che lo strumento, in presenza di un valore x , fornisca un valore y . Queste probabilità vanno integrate su tutti i valori veri x dello spettro che possono avere y come valore osservato.

- Se la risposta dell'apparato è lineare $y = z + x$, $z = y - x$, $\frac{\partial h^{-1}}{\partial y} = 1$
:

$$g(y) = \int f(x) \delta(y - x) dx \quad (9.25)$$

Si ha:

$$s^2(x) = s^2(y) - s^2(d); \quad (9.26)$$

$$m(x) = m(y) - m(d); \quad (9.27)$$

$$\mu = m(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{N}}; \quad (9.28)$$

$$\sigma \simeq s(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{2N}}. \quad (9.29)$$

9.3.6 $M(f, 0, \Delta)$

Grandezza variabile, errori statistici, errori sistematici. Le fluttuazioni dei valori assunti dall'oggetto fisico si combinano con le incertezze dovute alla misura. Bisogna prima di tutto misurare la risposta dell'apparato, cioè la funzione dell'apparato 1.32.

- Se $p_Z(z) \equiv f(x)$ e $p_X(x) \equiv f(x)$, Z e X sono indipendenti e quindi vale:

$$g(y) = \int p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} dx$$

e quindi la funzione dell'apparato è:

$$p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} \equiv \delta(y, x).$$

In base alle leggi della probabilità composte e totali, le tre funzioni $f(x)$ (fisica), $g(y)$ (osservazione) e $\delta(y, x)$ (apparato) sono legate dalla relazione chiamata integrale di folding:

$$g(y) = \int f(x) \delta(x) dx \equiv f + \delta.$$

La probabilità di osservare un valore y è data dalla probabilità che la variabile fisica assuma un valore x , per la probabilità che lo strumento, in presenza di un valore x , fornisca un valore y . Queste probabilità vanno integrate su tutti i valori veri x dello spettro che possono avere y come valore osservato.

- Se la risposta dell'apparato è lineare $y = z + x$, $z = y - x$, $\frac{\partial h^{-1}}{\partial y} = 1$
:

$$g(y) = \int f(x) \delta(y - x) dx$$

Si ha:

$$s^2(x) = s^2(y) - \frac{\Delta^2}{12}; \quad (9.30)$$

$$m(x) = m(y) - m(d); \quad (9.31)$$

$$\mu = m(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \pm \frac{\Delta}{2}; \quad (9.32)$$

$$\sigma \simeq s(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{2N}}. \quad (9.33)$$

9.3.7 $M(f, \sigma, \Delta)$

Grandezza variabile, errori statistici, errori sistematici. Le fluttuazioni dei valori assunti dall'oggetto fisico si combinano con le fluttuazioni e le incertezze dovute alla misura.

Bisogna prima di tutto misurare la risposta dell'apparato, cioè la funzione dell'apparato 1.32.

- Se $p_Z(z) \equiv f(x)$ e $p_X(x) \equiv f(x)$, Z e X sono indipendenti e quindi vale:

$$g(y) = \int p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} dx$$

e quindi la funzione dell'apparato è:

$$p_Z(h^{-1}(y, x)) f(x) \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} \equiv \delta(y, x).$$

In base alle leggi della probabilità composte e totali, le tre funzioni $f(x)$ (fisica), $g(y)$ (osservazione) e $\delta(y, x)$ (apparato) sono legate dalla relazione chiamata integrale di folding:

$$g(y) = \int f(x) \delta(x) dx \equiv f + \delta.$$

La probabilità di osservare un valore y è data dalla probabilità che la variabile fisica assuma un valore x , per la probabilità che lo strumento, in presenza di un valore x , fornisca un valore y . Queste probabilità vanno integrate su tutti i valori veri x dello spettro che possono avere y come valore osservato.

- Se la risposta dell'apparato è lineare $y = z + x$, $z = y - x$, $\frac{\partial h^{-1}}{\partial y} = 1$
:

$$g(y) = \int f(x) \delta(y - x) \, dx$$

Si ha:

$$s^2(x) = s^2(y) - s^2(d) - \frac{\Delta^2}{12}; \quad (9.34)$$

$$m(x) = m(y) - m(d); \quad (9.35)$$

$$\mu = m(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \pm \frac{\Delta}{2}; \quad (9.36)$$

$$\sigma \simeq s(x) \pm \frac{s(x)}{\sqrt{2N}}. \quad (9.37)$$

Capitolo 10

Teoremi

10.1 Teorema di additività

La probabilità dell'evento dato dal verificarsi degli eventi elementari A oppure B, nel caso generale in cui $A \cap B \neq \emptyset$ è data da:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (10.1)$$

10.2 Teorema del prodotto

Per le probabilità classica e frequentista, la probabilità che si verifichi l'evento costituito dalla realizzazione degli eventi elementari A e B è data da:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \quad (10.2)$$

10.3 Teorema di Bayes

Se gli elementi soddisfano a $\bigcup_{i=1}^n B_i = S$, $B_i \cap B_k = \emptyset$ per $\forall i, k$, la probabilità condizionata $P(B_k|A)$ si può scrivere come:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad P(A) > 0. \quad (10.3)$$

Formula delle probabilità totali

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i). \quad (10.4)$$

10.4 Legge 3- σ

Se X è una variabile gaussiana di media $\langle X \rangle = \mu$ e di deviazione standard $\sigma[X] = \sigma$, la probabilità di ottenere un valore x compreso in un intervallo centrato

sulla media μ e di ampiezza $\pm\sigma$ è di circa il 68%, con $\pm 2\sigma$ è di circa il 95%, con $\pm 3\sigma$ è di circa il 99%:

$$P\{|X - \mu| \leq +k\sigma\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \begin{cases} 0.682, & \text{per } k=1 \\ 0.954, & \text{per } k=2 \\ 0.997, & \text{per } k=3 \end{cases} \quad (10.5)$$

10.4.1 Disuguaglianza di Tchebychev

Negli intervalli centrati sulla media e ampi 2σ e 3σ sono compresi rispettivamente almeno il 75% e il 90% della probabilità totale:

$$P\{|X - \mu| \leq +K\sigma\} \equiv \int_{\mu-K\sigma}^{\mu+K\sigma} p(x)dx \geq 1 - \frac{1}{K^2} = \begin{cases} 0, & \text{per } K=1 \\ 0.75, & \text{per } K=2 \\ 0.89, & \text{per } K=3 \end{cases} \quad (10.6)$$

Questa legge è una legge 3- σ generalizzata.

10.5 Teorema Limite Centrale

Sia Y una variabile aleatoria lineare di N variabili aleatorie X_i : $Y_N = \sum_{i=1}^N a_i X_i$ dove gli a_i sono coefficienti costanti. Se:

- a) le variabili X_i sono tra loro indipendenti (1.1.1);
 - b) le variabili X_i hanno varianza finita;
 - c) le varianze (o deviazioni standard) sono tutte dello stesso ordine di grandezza;
- allora, per $N \rightarrow \infty$, la variabile aleatoria Y_N converge in legge, secondo la 3.3, verso la distribuzione gaussiana.

10.6 Teorema dell'indipendenza stocastica

Condizione necessaria e sufficiente perché un processo sia stazionario di Poisson è che gli intertempi siano indipendenti (tempi tra gli arrivi: variabili aleatorie indipendenti 1.3.1) ed abbiano legge esponenziale negativa 4.5, con equazione 4.14.

10.7 Teorema di Pearson

La somma dei quadrati di ν variabili gaussiane indipendenti 1.3.1 è una variabile aleatoria che ha densità χ^2 4.34 con ν gradi di libertà, detta $\chi^2(\nu)$.

10.8 Additività della variabile χ^2

Siano Q_1 e Q_2 due variabili aleatorie indipendenti 1.3.1. Se esse hanno densità χ^2 con ν_1 e ν_2 gradi di libertà rispettivamente, la variabile $Q = Q_1 + Q_2$ ha una densità $\chi^2(\nu)$ con $\nu = \nu_1 + \nu_2$ gradi di libertà: $Q \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$. Inoltre, se $Q \sim \chi^2(\nu)$ e $Q_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, allora $Q_2 \sim \chi^2(\nu - \nu_1)$.

10.9 Teorema delle variabili aleatorie cumulative

Se X è una variabile aleatoria 1.1 avente densità $p(x)$ continua, la variabile aleatoria cumulativa C :

$$C(X) = \int_{-\infty}^X p(x) dx \quad (10.7)$$

è uniforme in $[0, 1]$, cioè $C \sim U(0, 1)$.

10.10 Teorema di Cauchy-Schwarz

Se le variabili X e Y hanno varianze finite, vale la disuguaglianza:

$$|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sigma[X] \sigma[Y]. \quad (10.8)$$

10.11 Teorema di indipendenza di variabili gaussiane

Condizione necessaria e sufficiente affinché due variabili aleatorie congiuntamente gaussiane (normali) siano indipendenti, è che il loro coefficiente di correlazione 8.12 lineare sia nullo.

L'esistenza di una covarianza nulla (che implica $\rho = 0$) tra variabili gaussiane assicura la indipendenza statistica e quindi l'assenza di un legame causa-effetto tra di esse.

10.12 Teorema del cambiamento di variabile in funzioni densità

Siano $X \equiv (X_1, \dots, X_n)$ n variabili casuali con densità congiunta $p_X\{x\}$ e siano $Z \equiv (Z_1, \dots, Z_n)$ n variabili legate alle X dalle n relazioni fondamentali $Z_1 = f_1(X) \dots Z_n = f_n(X)$, le quali siano tutte invertibili e derivabili con derivata continua rispetto a tutti gli argomenti (vi sia cioè una corrispondenza biunivoca tra i due domini delle X e delle Z , per cui $X_1 = f_1^{-1}(Z) \dots$). La densità di probabilità p_Z è allora data da

$$p_Z(z_1, \dots, z_n) = p_X(f_1^{-1}(z), \dots, f_n^{-1}(z)) |J| \quad (10.9)$$

dove $|J|$ è lo jacobiano definito come il valore assoluto del determinante della matrice dei $\frac{\partial f_i^{-1}}{\partial z_i}$.

Ovviamente la trasformazione è possibile se tutte le derivate sono continue e $|J| \neq 0$. Nel caso non vi sia un'unica trasformazione $f_i = (i = 1, \dots, n)$ che sia invertibile, occorre suddividere i domini delle X e delle Z in m sottoinsiemi tra loro disgiunti tra i quali esista una corrispondenza biunivoca e sommare la 10.9 su tali domini.

10.13 Indipendenza di M e S^2

Se (X_1, \dots, X_N) è un campione casuale di dimensione N estratto da una popolazione avente densità normale $g(x; \mu, \sigma)$, M ed S^2 sono variabili aleatorie indipendenti.

10.14 Varianza campionaria

Se (X_1, \dots, X_N) è un campione casuale estratto da una popolazione avente densità normale $g(x; \mu, \sigma)$, la variabile

$$Q_R = \frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{N-1} \sum_i \frac{(X_i - M)^2}{\sigma^2} \quad (10.10)$$

ha densità χ^2 ridotto 4.38 con $N - 1$ gradi di libertà 1.24. Essa è pertanto una quantità pivotale rispetto a σ^2 .