TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FAKULTÄT INFORMATIK
INSTITUT FÜR SOFTWARE- UND MULTIMEDIATECHNIK
PROFESSUR FÜR COMPUTERGRAPHIK UND VISUALISIERUNG
PROF. DR. STEFAN GUMHOLD

Großer Beleg

# Ground-Truth-Renderer für Partikelbasierte Daten

Josef Schulz
(Mat.-Nr.: 3658867)

Betreuer: Dipl-MedienInf. Joachim Staib

Dresden, 7. April 2015

# Aufgabenstellung

Die Darstellung von Partikeldaten mittels Kugelglyphen ist in der wissenschaftlichen Visualisierung inzwischen etabliert. Gerade bei dichten Datensätzen stellen kompakte Anordnungen von sehr vielen Kugeln jedoch ein Problem für die Erkennbarkeit der zu visualisierenden Vorgänge dar. Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen ist es, über Blinn-Phong-Beleuchtung hinausgehende Effekte wie globale Schatten oder den Einsatz von Methoden aus dem Volume-Rendering zu integrieren. Durch deren Komplexität muss in Echtzeitvisualisierungen jedoch auf teilweise grobe Approximationen zu- rückgegriffen werden. Die Einschätzung der Approximationsqualität fällt häufig schwer, da keine Visualisierung des exakten Verfahrens verfügbar ist. Ziel dieser Belegarbeit ist die Umsetzung eines CPU-Renderers für Partikeldaten, der eine Reihe von erweiterten Visualisierungseffekten unterstützt. Er soll die Grundlage für Ground-Truth- Visualisierungen bieten. Zunächst soll eine geeignete Softwarearchitektur konzipiert und umgesetzt werden. Die Partikel sollen als mit lichtemittierendem und ?absorbierendem Gas gefüllte Kugeln interpretiert werden. Es sollen anschließend Methoden entwickelt werden, um einen physikalisch plausiblen globalen Schattenwurf und Lichttransport für eine beliebige Anzahl an Punkt- und Richtungslichtquellen zu ermöglichen. Die dafür notwendigen Gleichungen für Kugeln mit konstanter Dichte und Emission, sowie linearer Absorption, sollen soweit wie möglich analytisch bestimmt und, sobald nicht mehr möglich, mittels möglichst exakter numerischer Integratoren ausgewertet werden.

Die Teilaufgaben umfassen:

- Umfassende Literaturrecherche zur globalen Beleuchtungsrechnung in der Volumen Visualisierung
- Schrittweise Konzeption und Umsetzung einer erweiterbaren Architektur zum Erzeugen von Ground-Truth-Bildern:
    1. Zunächst als Raytracer für opake Kugeln, der globale Schatteneffekte von frei positionierbaren Punkt- und Richtungslichtquellen unterstützt
    2. Umsetzung eines Renderers, der Kugeln als Volumen nach dem Emissions-Absorptions-Modell rendert, dabei analytische Bestimmung des Volume-Rendering-Integrals, einschließlich Integration direkter Beleuchtung unverdeckter Lichtquellen
    3. Erweiterung zu verdeckten Lichtquellen und Bestimmung der Lichtstärke- und Farbe für Lichtstrahlen durch verdeckende Kugeln
- Unterstützung für ein Standardformat wie VRML
- Evaluation in Bezug auf Korrektheit, Bildartefakte und (numerische) Grenzfälle

Optional:

- Unterstützung für Refraktionseffekte
- Unterstützung komplexerer Materialtypen

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tag dem Prüfungsausschuss der Fakultät Informatik eingereichte Arbeit zum Thema:

*Ground-Truth-Renderer für Partikelbasierte Daten*

vollkommen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Dresden, den 7. April 2015

Josef Schulz

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Ein Photon das im inneren der Sonne emittiert wird, ist dem kurzwelligen Spektrum der elektromagnetischen Wellen zugeordnet. Es handelt sich um Gammastrahlung. Auf seiner langen Reise vom Kern bis zur Korona, die rund 150.000 Jahre dauert, wird das Photon durch das enorm dichte und heiße Gas der Sonne blau verschoben. Auf den rund 690.000 km, die das Photon durch die Sonne wandert, absorbiert die Sonne einen großen Teil der Energie des Photons. Nachdem es die Sonne verlassen hat, benötigt das Photon weitere 8 Minuten um unsere Erde zu erreichen. Die Geschichte von der Langen Reise dieses einzelnen Photons ist ein extremes Beispiel für den Vorgang der im Folgenden betrachtet wird.

Licht ist im Physikalischen Sinn ein noch nicht gänzlich erfasstes Phänomen. Es zeigen sich Charakteristika von Wellen und von Teilchen, es wird vom Welle-Teilechodualismus gesprochen. Dieses wunderbare Modell ist ein Deckmantel für viele Fragen, die sich im Zusammenhang mit der Ausbreitung des Lichtes in unserer Welt ergeben und noch nicht alle beantwortet sind.

Die Optik ist in der Physik die Lehre des Lichtes, sie beschreibt die Ausbreitung des Lichts und die Wechselwirkung mit Materie. In der Optik gibt es verschiedene Modelle, welche die Eigenschaften des Lichtes beschreiben.

Die Strahlenoptik betrachtet das Licht in Form von Strahlen. Diese Modell approximiert das Licht als Strahl, der von der Lichtquelle aus in die Welt geschossen wird. Diese Vereinfachung kann genutzt werde, wenn die Größenordnungen der Objekte, welche im Zusammenhang mit Licht betrachtet werden, deutlich über der Wellenlänge des Lichts liegt. Ist dies erfüllt können Typische Welleneigenschaften, wie Beugung und daraus resultierende Interferenz vernachlässigt werden. Für die Berechnung von Schatten, Reflexion und Brechung eignet sich die Strahlenoptik ausgesprochen gut und soll für diese Arbeit Grundlage der Betrachtung sein. Die Lichtstrahlen breiten sich immer nur geradlinig aus, bis sie auf einen Körper treffen und reflektiert, gestreut oder gebrochen werden. Sie können einander durchdringen ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Der Weg des Lichtes lässt sich umkehren, was zur folge hat, dass die Gesetzt auch bei umgekehrter Lichtrichtung gelten. Dieses Prinzip ist essentiell für die Implementierung welche im Folgenden betrachtet wird, da die Strahlen von der Kamera aus in die Welt geschossen werden.

Die Beleuchtung einer Computergenerierten Szene wird in vielen Implementierungen, die aus Computerspielen und anderen Visualisierungen bekannt sind stark vereinfacht. Diese Modelle lassen die Landschaften in einem schönen Licht erscheinen, vernachlässigen jedoch Physikalische Gesetzmäßigkeiten, wie die Erhaltung von Energie. Die Berechnung von Schatten welche sich durch den Weg des Lichtes ergeben sollten, werden oftmals nur sehr vereinfacht berechnet, insofern sie vorhanden sind.

Für die meisten Anwendungen sind diese Approximationen vollkommen ausreichend. In der Computergrafik hat sich die Repräsentation von Daten mithilfe von Kugelglyphen bewährt. Als Beispiel soll das Modell eines Moleküls dienen. Ein Problem welches sich aus der Projektion auf den Bildschirm ergibt, ist die Tiefenwahrnehmung des Menschen. Die durch den Computergenerierten Bilder sind in der Regel zweidimensionale Projektionen von dreidimensionalen Szenen. Der Mensch benötigt zur Erkennung von Lagenbeziehungen der Objekte in der Szene weitere Informationen. Im Laufe des Lebens lernt ein Mensch, die Merkmale des Lichtes zu Interpretieren. Auf diese Weise gelingt es einem Betrachter, die Lage der Lichtquelle nur aus einer Objekt Silhouette zu schätzen. Um diese Fähigkeit nutzen zu können wird jedoch eine komplexe Beleuchtung der Szene nötig.

# 2 Verwandte Arbeiten

## 2.1 Optical Models for Direct Volume Rendering

Die Arbeit von Nelson Max gehört zu den meist Zitierten Arbeiten im Bereich des Volumen Renderns und behandelt die Grundlagen des Emission und Absorptionsverhalten Gas gefüllten Volumen. Zur Herleitung der Gleichung nutzt Nelson Max Partikel in Form von Einheitskugeln, diese besitzen einen Radius $r$ und somit die Projizierte Oberfläche $A = \Pi \cdot r$. Die Mittlere Dichte $\rho$ entspricht der Anzahl von Partikeln innerhalb des Einheitsvolumen. Betrachtet wird ein Zylinder, der mit der Kreisfläche $E$ und einer Länge $\Delta s$ parametrisiert wird. Das Volumen des Zylinders entspricht $V_z = E \cdot \delta s$ und enthält demnach $N$ Partikel, mit $N = \rho E \delta s$. Die von dem Zylinder verdeckte Grundfläche $B$ entspricht bei einem sehr klein gewählten $\delta s$ in etwa $NA$, mit $NA = \rho A E \delta s$. Als Flussrichtung des Lichtes wird $\delta s$ gewählt. Der Anteil des Lichts, welcher mit Teilchen Wechselwirkt bis er $B$ erreicht beträgt $\rho A \delta s$. Wenn $\delta s$ gegen Null geht, sinkt die Wahrscheinlichkeit, das sich Gaspartikel entlang der Lichtrichtung überlappen.

Es ergibt sich die Folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dI}{ds} = -\rho(s)AI(s) = -\tau(s)I(s) \tag{2.1}$$

In der Gleichung 2.1 beschreibt $s$ die Länge entlang des Lichtstrahles. $I(s)$ stellt die Lichtintensität an der Stelle des Volumens dar, an dem der Strahl genau die Länge $s$ besitzt. $\tau(s) = \rho(s)A$ wird als Abschwächungskoeffizient bezeichnet. $\tau$ beschreibt den Grad der Abschwächung des Lichtes durch ein Volumen.

$$I(s) = I_0 \cdot e^{-\int_0^s \tau(t)dt} \tag{2.2}$$

Gleichung 2.2 ist die Lösung von 2.1. Das Integral über den Abschwächungskoeffizienten, wird von Nelson Max als Transparenz $T(s)$ von 0 bis $s$ bezeichnet. Die Lichtundurchlässigkeit $\alpha$, im Englischen *opacity* berechnet sich aus $\alpha = 1 - T(s)$.

### 2.1.1 Emission

Wird die Lichtintensität an einem Bestimmten Punkt auf einem Lichtstrahl betrachtet, welcher von der Lichtquelle durch ein Medium zu der Projektionsoberfläche geschossen wird, lässt sich diese durch Reflektionen und Emission von Licht an diesem Punkt weiter anreichern. Nelson Max betrachtet in seiner Arbeit den Einfacheren Fall, bei dem nur Licht emittiert wird. Die Absorption von Licht durch die Partikel wird in der nächsten Sektion behandelt. Wie beschrieben sollen die Partikel im Folgenden als Vollkommen Transparent betrachtet werden, mit der Eigenschaft Licht zu emittieren. Das Licht, welches von den Partikeln emittiert wird strahlt Diffuse mit konstanter Intensität $C$ über der Fläche $A$. Die Menge des Lichtes, welches durch $B$ fließt entspricht $C \rho A E \delta s$. Für die Einheitsfläche $A$ entspricht dieser Fluss $C \rho A \delta s$. Aus dieser Annahme ergibt sich eine weitere Differenzialgleichung:

$$\frac{dI}{ds} = C(s)\rho(s)A = C(s)\tau(s) = g(s) \tag{2.3}$$

Mit $g(s)$ ist die Intensität des emittierten Lichtes gemeint. Die Lösung lässt sich zu folgender Formel vereinfachen, wenn die Reflektionen aus der Betrachtung heraus genommen werden:

$$I(s) = I_0 + \int_0^s g(t)dt \tag{2.4}$$

Mit dieser Lösung ergibt sich ein Problem, denn das Integral ist nicht durch eine Obere Schranke beschränkt. Das bedeutet, dass das die Lichtintensität die Aufnahmefähigkeit des Sensors schnell überschreitet und C deshalb nur sehr kleine Werte annehmen kann. $I_0$ ist wie in der Gleichung 2.2 als Hintergrundstrahlung definiert und kann für jeden Strahl unabhängig gewählt werden.

### 2.1.2 Absorption und Emission

In der Vorhergehenden Abschnitt wurden die Volumen als vollkommen Transparent betrachtet, dieses Verhalten soll sich jetzt ändern. Das Licht, welches das Volumen durchläuft wird soll mit Hilfe des Abschwächungskoeffizient abgeschwächt werden und zusätzlich durch die Emission angereichert werden:

$$\frac{dI}{ds} = g(s) - \tau(s)I(s) \tag{2.5}$$

In seiner Arbeit entwickelt Nelson Max eine Lösung für beliebige Quellfunktionen, welche $g(s)$ annehmen kann. Dabei wird das Licht als Strahl von der Lichtquelle durch das Medium geschickt. Die Variable $s$ entspricht dem Laufparameter des Strahls, welcher an der Position der Lichtquelle den Wert Null annimmt und den Wert $D$ am Sensor hat.

$$I(D) = I_0 \cdot e^{-\int\limits_0^D \tau(t)dt} + \int\limits_0^D g(s) \cdot e^{-\int\limits_s^D \tau(t)dt} ds \tag{2.6}$$

$$I(D) = I_0 T(D) + \int\limits_0^D g(s) T'(s) ds \tag{2.7}$$

Wobei die Transparenz über die einzelnen Werte von s sich als $T'(s) = e^{-\int\limits_s^D \tau(x)dx}$ definiert. Das Integral aus der Gleichung 2.6 lässt sich für einige Transferfunktionen analytisch lösen für die anderen schlägt Nelson Max die Approximation durch Riemannsummen vor. Ist der Faktor $C(s)$ eine Konstante $C$, lässt sich die Lösung stark vereinfachen. und das Licht, welches den Sensor erreicht ergibt sich durch die Gleichung:

$$I(D) = I_0 T(D) + C(1 - T(D)) \tag{2.8}$$

Die Lichtundurchlässigkeit $\alpha = (1 - T(D))$ und entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Strahl, welcher vom Sensor in Richtung der Lichtquelle geschossen wird einen Partikel trifft und die Farbe C zu sehen ist.

### 2.1.3 Streuung und Schatten

Die bisher vorgestellten Gleichungen erzeugen bereits schöne Bilder, entsprechen allerdings noch nicht der Realität. Licht welches auf ein Partikel trifft wird gestreut, es entstehen Schatten. Nelson Max geht dabei auf die Grundlagen der Streuung ein, in dem der Quellterm $g(s)$ um einen Winkelparameter erweitert wird. Der Quellterm wird im Folgenden mit $g(X,\omega) = E(X) + S(X,\omega)$. $E(X)$ bezeichnet die Emission an einen bestimmten Punkt $X$ und $S(X,\omega)$ die Richtung in welche das Licht gestreut wird. Trifft das Licht ein Partikel an einem Punkt $X$, wird dessen Intensität mit einer *brdf* Funktion multipliziert. *Brdf* steht für *bidirectional reflection distribution function*, welche die Verteilung des Lichtes in Abhängigkeit des Einfalls und Ausfallwinkels an dem Punkt $X$ bestimmt. Die Streufunktion $S(X,\omega) = r(X,\omega,\omega') \cdot i(X,\omega)$ setzt sich zusammen aus der *brdf* welche hier durch die Funktion $r$ dargestellt wird und der Intensität des Lichtes $i$, welches aus der Winkelrichtung $\omega'$ in den Punkt $X$ einfällt. Mit Hilfe eines rekursiven *Raytracers* kann der Lichtanteil reduziert werden, was einen Schattenwurf zur Folge hat.

## 2.2 An Analytical Ray Casting of Volume Data

Diese Arbeit baut auf der Grundlage von CT, MRI, SPECT und PET Datenmengen auf. Das bedeutet, alles was vorliegt ist ein 3D-Array von skalaren Werten, welche im Folgenden als Dichte interpretiert werden. Das hier vorgestellte Verfahren baut auf einen *Raycaster* auf, das heißt es werden ausgehend vom Bildsensor Stahlen in die Szene geschossen. Das Resultat ist ein Bild, welches durch die Abschwächung der Hintergrundbeleuchtung durch das Volumen entsteht. Durch den Einsatz von Interaktionstechniken, kann der Nutzer im Folgenden Teile des Volumen durch die Veränderung der Dichtewerte ausblenden oder hervorheben. Die meisten *Raycast*-Ansätze approximieren diesen Vorgang nummerisch, da das finden, von Analytischen Lösungen, insofern möglich nicht einfach ist. In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, welches zum Teil die Aufkommenden Integrale Analytisch löst und wenn nötig auf Numerische Praktiken zurückgreift.

### 2.2.1 Levoy's raycast algorithm

Grundlage dieser Arbeit ist ein *Raycast*-Algorithmus von Levoy. Die betrachtete Welt besteht aus einem Regulären Gitter, wobei jede Zelle ein Voxel darstellt. Jeder dieser Voxel hat 8 Nachbarn. Im folgenden beschreibt $r$ einen Strahl, welcher in die Szene geschossen wird. Jeder Punkt entlang des Strahls lässt sich über die Länge $u$ vom Beginn des Strahls bis zu dem entsprechenden Punkt bestimmen. Zusätzlich wird eine Funktion $\alpha_C(u)$ definiert, welche die akkumulierten Verdeckungen vom Punkt an der Stelle $u$ bis zum Pixel liefert. Diese Funktion repräsentiert die Abschwächung des Lichtes durch das Volumen. $\Delta u$ definiert eine bestimmte Länge auf dem Strahl zwischen zwei benachbarten Stützpunkten. Ein Stützpunkt wird in dieser Arbeit mit $u_i$ bezeichnet. Die Abschwächung des Lichtes an einem gewählten Stützpunkten wird über die Formel $\alpha(u_i)\Delta u_i$ berechnet. Wie in der Arbeit von Nelson Max berechnet sich die Transparenz durch $1 - \alpha_C(u)$. $u + \Delta u$ ist ein Punkt mit der Transparenz $1 - \alpha_C(u + \Delta u)$. Die Transparenz zwischen den Punkt $u$ und $u + \Delta u$ wird mit $1 - \alpha(u)\Delta u$ angegeben. Die Transparenz zwischen dem Pixel und dem Punkt $u + \Delta u$ setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$1 - \alpha_C(u + \Delta u) = (1 - \alpha_C(u)) \cdot (1 - \alpha(u)\Delta u) \tag{2.9}$$

Daraus ergibt sich eine rekursive Beziehung für die aufakkumulierten Verdeckungen für $\alpha_C(u)$

$$\alpha_C(u + \Delta u) = \alpha_C(u) + \alpha(u)(1 - \alpha_C(u))\Delta u \tag{2.10}$$

Bezeichnet $C_C(u)$ die akkumulierte Farbe, lässt diese sich mit einer ähnlichen rekursiven Formel berechnen. $C(u)$ stellt die Farbe dar, welche von einem Punkt, mit dem Längenparameter $u$ durch ein vollkommen transparentes Volumen auf den Pixel Reflektiert wird. Zur Berechnung der Farbintensität wird das Phong Beleuchtungsmodell benutzt. In der Realität ist das Medium zwischen dem Punk an der Stelle $u$ und dem Pixel selten vollkommen Transparent, deshalb muss die Farbe durch das Volumen abgeschwächt werden. $C(u)\alpha(u)\Delta u$ beschreibt diese Abschwächung.

$$C_C(u + \Delta u) = C_C(u) + (1 - \alpha_C(u)) \cdot C(u)\alpha(u)\Delta u \tag{2.11}$$

### 2.2.2 Eine kontinuierliche Formulierung

# 3 Grundlagen

In diesem Kapitel soll die verwendete Rendertechnik Begrifflich genauer abgegrenzt werden. Im Folgenden werden alle benötigten Mathematischen Formeln hergeleitet und erklärt. Am ende dieses Kapitels wird der Aufbau der Perspektivischen Kamera, welche hier zum Einsatz kommt genau erläutert.

## 3.1 Verwendete Formelzeichen

| **Formelzeichen** | **Erläuterung** |
|---|---|
| $\mathbb{R}_+$ | Bezeichnet die Menge der Reellen Zahlen im Intervall $[0, \infty)$ |
| $\mathbb{N}_+$ | Bezeichnet die Menge der Natürlichen Zahlen im Intervall $[0, \infty)$ |
| $\underline{p}$ | Punkt im Raum |
| $\vec{v}$ | Vektor im Raum |
| $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ | Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ |

Tabelle 3.1: Verwendete Formelzeichen

## 3.2 Rendertechniken

### 3.2.1 Raytracing

Raytracing ist ein verfahren, bei dem Ausgehend von der Lichtquelle, oder der Bildebene Strahlen in die Szene geschickt werden. Strahlen, die auf ein ein Objekt treffen werden reflektiert, gestreut oder gebrochen. Die Möglichkeiten hängen vom Verwendeten Modell der Oberfläche und des Lichtes ab. Nach der Wechselwirkung mit der Oberfläche können weitere Strahlen durch die Szene verfolgt werden. Dieser Vorgang wir meist Rekursiv aufgebaut und nach dem erreichen einer entsprechenden Rekursionstiefe wird dieser abgebrochen. Das Bild selbst entsteht durch die Aufakkumulierung der Lichtintensitäten, welche die Bildebene erreichen. Modell dieser Technik ist die Strahlenoptik, welche das Licht auf Strahlen reduziert die durch die Szene geschossen werden. Beugungsphänomene werden bei dieser Technik vernachlässigt.

### 3.2.2 Path und Lighttracer

#### 3.2.2.1 Lighttracer

Der Lighttracer ist eine Spezialisierung des Raytracers, bei dem die Wege des Lichtes grundlegend, ausgehend von der Lichtquelle berechnet werden. Hierbei werden die Strahlen bis zum erreichen eines Abbruchkriteriums durch die Szene verfolgt und anschließend mit der Bildebene verbunden.

#### 3.2.2.2 Pathtracer

Auch der Pathtracer stellt eine Spezialisierung des Raytracers da, bei dem die Lichtwege zum einem ausgehend von der Bildebene und gleichzeitig ausgehend von der Lichtquelle betrachtet werden. Nach erreichen des Abbruchkriteriums werden die Lichtwege ausgehend von der Lichtquelle und der Bildebene mit einander Kombiniert. Durch dieses Vorgehen ergeben sich wesentlich schnell mehr mögliche Lichtwege, als beim normalen Rayztracingalgorithmus. Der Pathtracer ist ein State-Of-the-Art Algorithmus zur Berrechnung der Globalen Beleuchtung.

### 3.2.3 Raycasting

Raycasting stellt eine Vereinfachte Form des Raytracing da, bei dieser Technik wird die Berrechnung der Beleuchtung bereits nach der ersten Kollision zwischen Strahl und Objekt abgebrochen. Raycasting ist die Grundlage des in dieser Arbeit verwendeten Renderalgorithmus.

## 3.3 Grundobjekte

### 3.3.1 Strahl

Der Strahl ist das Zentrale Element jedes Raytracing Algorithmus. Seine Mathematische Beschreibung ist denkbar einfach:

$$\underline{r}(t) = \underline{p} + t \cdot \vec{r}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

Jeder Punkt auf dem Strahl, hier durch $\underline{r}$ bezeichnet, ergibt sich aus der Addition eines Stützpunktes $\underline{p}$ mit dem Produkt eines Richtungsvektor $\vec{r}$ und einem skalaren Wert $t$. Durch das Produkt $t \cdot \vec{r}$ wird der Richtungsvektor $\vec{r}$ beliebig gestaucht oder gestreckt.

### 3.3.2 Kugel

Eine Kugelfläche wird im $\mathbb{R}^3$ mit dem Mittelpunkt $\underline{m} = (x_0, y_0, z_0)$ und dem Radius $r$ durch folgende Formel parametrisiert.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{3.2}$$

Jeder Punkt $\underline{p} = (x, y, z)$ der die Formel 3.2 erfüllt liegt auf der Oberfläche der Kugel. Die Formel 3.2 lässt sich auf beliebige $\mathbb{R}^n$, mit $n \in \mathbb{N}_+$ erweitern.

$$\langle \underline{p} - \underline{m}, \underline{p} - \underline{m} \rangle = r^2 \tag{3.3}$$

Durch diese Verallgemeinerung der Formel 3.2 zur Formel 3.3 ist die Beschreibung der Kugel jetzt unabhängig von der Dimension.

## 3.4 Schnittpunktberechnung

Eine Kugel ist definiert durch ihren Mittelpunkt $\underline{m}$ und ihren Radius $r$. Wird der Mittelpunkt der Kugel auf den Koordinaten Ursprung verschoben, liegen alle Punkte $p$ auf der Oberfläche $O$, wenn sie denn

Abstand $r$ zum Koordinatenursprung haben. Die zu erfüllende Bedingung hat demnach folgende Form:

$$||\underline{p}|| = r \tag{3.4}$$

Die Bedingung aus Formel 3.4 lässt sich Quartieren wodurch sich die folgende Kugelgleichung ergibt:

$$\langle \underline{p}, \underline{p} \rangle = r^2 \tag{3.5}$$

Um den Schnittpunkt der Kugel mit dem Strahl aus der Formel 3.1 zu Berechnen, wird der Strahl in die Gleichung 3.5 eingesetzt und erhält die folgende Gleichung:

$$r^2 = \langle \underline{p}, \underline{p} \rangle = \langle r(t), r(t) \rangle \tag{3.6}$$

diese Gleichung gilt es umzustellen und nach $t$ aufzulösen:

$$r^2 = \langle r(t), r(t) \rangle = \langle \underline{p} + t \cdot \vec{r}, \underline{p} + t \cdot \vec{r} \rangle \tag{3.7}$$

$$r^2 = \langle \underline{p}, \underline{p} \rangle + 2 \cdot \langle \underline{p}, \vec{r} \rangle \cdot t + \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle \cdot t^2 \tag{3.8}$$

Die Formel 3.8 entspricht einer allgemeinen Quadratischen Gleichung:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \text{ mit } a \neq 0 \tag{3.9}$$

Für die allgemeine Quadratische Gleichung lassen sich die Nullstellen folgendermaßen bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \tag{3.10}$$

Wird die Gleichung 3.8 mithilfe der Allgemeinen Lösungsformel 3.10 für Quadratische Gleichungen nach $t$ aufgelöst, ergeben sich für $t$ zwei Lösungen $t_1$ und $t_2$:

$$t_{1,2} = \frac{-2 \cdot \langle \underline{p}, \vec{r} \rangle \pm \sqrt{4 \cdot \langle \underline{p}, \vec{r} \rangle^2 - 4 \cdot \langle \underline{p}, \underline{p} \rangle \cdot \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}}{2 \cdot \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle} \tag{3.11}$$

Die Diskriminante $D$ wird der Teil der Formel bezeichnet der im Zähler der Gleichung 3.11 unter der Wurzel steht.

$$D = 4 \cdot \langle \underline{p}, \vec{r} \rangle^2 - 4 \cdot \langle \underline{p}, \underline{p} \rangle \cdot \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle \tag{3.12}$$

Mit Hilfe der Diskriminante $D$ lässt sich eine Aussage über die Schnittpunkte zwischen Strahl und Kugel formulieren. Wenn gilt, dass $D < 0$, dann gibt es keine Lösung im Zahlenbereich $\mathbb{R}$, das heißt der Strahl schneidet die Kugel nicht. Gilt, dass $D = 0$ ist, dann trifft der Strahl die Kugel an genau einer Stelle und die beiden Lösungen $t_1$ und $t_2$ haben identische Werte. Wenn aber gilt, dass $D > 0$, dann ergeben sich genau zwei Schnittpunkte an den Stellen $t_1$ und $t_2$. Um die Punkte zu bestimmen, an dem der Strahl die Kugel trifft setzt man $t_1$ und $t_2$ einfach in die Gleichung 3.1 ein.

## 3.5 Die Perspektivische Kamera

Die für den einfachen Raycaster nötigen Gleichungen sind in den Obigen Teil bereits hergeleitet. Was jetzt noch benötigt wird ist eine Beschreibung für die Bildebene. Ausgehend von der Bildebene werden die Licht stahlen in die Szene geschossen. Anders als bei einem Rasterizer wird keine Kamera und keine Projektionsmatrix benötigt. Die Kamera konstruiert sich gerade heraus. Zu Beginn wird eine sehr einfache Kamera betrachtet, welche nicht rotiert und nicht verschoben wird.

Das bedeutet, das es sich bei der Kamera um eine Ebene $E$ handelt welche mit der Folgenden Gleichung beschrieben wird:

$$E(u,v) = \underline{p_k} + u \cdot \vec{p_0} + v \cdot \vec{p_1}, \text{ mit } u \in [-1,1] \text{ und } v \in [-1,1] \tag{3.13}$$

Da unsere Kamera am Koordinaten Ursprung Positioniert werden soll, kann der Punkt $\underline{p}$ vorerst vernachlässigt werden. Die Spannvektoren $\vec{p_0}$ und $\vec{p_1}$ sind folgender maßen definiert:

$$\vec{p_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Die Auf diese Weise beschriebe Ebene wird in Pixel unterteilt. Dadurch definiert sich jeder Pixel, als Teilfläche der Kameraebene. Die Eckpunkte jedes Pixels lässt sich durch zwei Wertepaare genau beschreiben. Zum Schluss fehlt noch die Position der Kamera, welche durch den Positionsvektor $\underline{o}$ bezeichnet wird. Jeder Kamerastrahl bestimmt sich durch $\underline{o}$ und durch einen Richtungsvektor $\vec{d} = E(u,v) - \underline{o}$. Mit dieser Definition wird das Bild zu den Rändern hin gestreckt.

## 3.6 Die Orthogonale Kamera

Eine weitere Möglichkeit eine Kamera zu definieren, besteht darin den Kameraursprung $\underline{o}$ in Abhängigkeit von $u$ und $v$ zu definieren, so dass alle Strahlen Parallel verlaufen. Die Bildebene wird wie in der Gleichung 3.13 definiert mit den Spannvektoren aus 3.14. Die Definition der Ursprünge der Strahlen funktioniert analog zur Bildebene:

$$O(u,v) = \underline{p_o} + u \cdot \vec{p_0} + v \cdot \vec{p_1}, \text{ mit } u \in [-1,1] \text{ und } v \in [-1,1] \tag{3.15}$$

Beide Gleichungen unterscheiden sich durch ihren Stützvektor. Der Stützvektor der Bildebene wird mit $\underline{p_k}$ bezeichnet und der, der Ursprünge $\underline{p_o}$. Im Einfachsten Fall definiert sich $\underline{p_k}$ als Nullvektor und $\underline{p_o}$ als der Vektor $(0,0,-1)^T$.

# 4 Ein analytischer Ansatz

## 4.1 Paradigma

In diesem Kapitel wird der Algorithmus hergeleitet welcher zum Zeichnen der Kugeln dient. Um die Gleichung herzuleiten wurde eine Grundannahme getroffen, dass die Dichte einer Kugel im inneren konstant ist. Das Ziel der Arbeit bestand darin herauszufinden, ob sich eine Analytische Funktion zur Berechnung der Lichtdurchlässigkeit erstellen lässt. Diese Frage wird im Folgenden beantwortet.

## 4.2 Emission und Absorption

Als Grundlage dient das Emission und Absorptionsmodell von [Max95], welches im Kapitel über Verwandte Arbeiten bereits genauer erläutert wurde. Zunächst werden ein paar Grundlegende Symbole definiert und auf diese Aufbauend werden die Formeln hergeleitet. $I_{p_{(x,y)}}$ bezeichnet die Intensität auf dem Sensor, an der Stelle $x, y$. Das bedeutet die Energie, welche am Sensor ankommt. Da die genauen Werte für den Algorithmus nicht von Interesse sind werden diese im folgenden nicht betrachtet, daher genügt die Vereinfachung $I_{p_{(x,y)}} = I_p$.

$$I_p = I_E + I_A \tag{4.1}$$

Die Energie, welche in Form von Licht am Sensor ankommt, setzt sich zusammen aus $I_E$ und $I_A$. $I_E$ bezeichnet die Energie, welche vom Material selbst an die Umgebung abgegeben wird. Diese Emittierte Energie schwächt sich auf dem Weg durch das Volumen ab, bis sie den Sensor erreicht. Mit dem Symbol $I_A$ wird die Energie bezeichnet, welche von den Lichtquellen Abgegeben wird. Dieses Licht verliert beim durchwandern des Mediums an Energie.

$$I_E = \int\limits_{t_n}^{t_f} \tau(t_n, t) \cdot c(v_r(t))dt \tag{4.2}$$

Die Gleichung 4.2 beschreibt die Emission im Volumen entlang eines Strahls $\underline{r}(t)$. Wobei der Strahl ausgehend von der Kamera in die Szene geschossen wurde. Der Eintrittspunkt in das Volumen wird über den Längenparameter mit $t_n$ bezeichnet und der Austrittspunkt analog als $t_f$. Die Funktion $v_r(t)$ liefert die Dichte an einem Bestimmten Punkt im Volumen. In dieser Arbeit wird diese Funktion als Konstant definiert: $v_r(t) = \kappa$. Die Transferfunktion $c(v_r(t)) = \lambda \cdot v_r(t)$ ist eine lineare Funktion, welche die Dichte mit dem Parameter $\lambda$ skaliert. Werden die Funktionen Ineinander eingesetzt, kommt eine konstante Dichte heraus mit $c(v_r(t)) = \lambda \cdot \kappa$.

$$\tau(t_0, t_1) = e^{-\int\limits_{t_0}^{t_1} \sigma(v_r(t))dt} \tag{4.3}$$

Die Absorptionsfunktion 4.3 beschreibt die Abschwächung des Lichtes durch das Volumen entlang eines Strahls.

## 4.3 Verdeckung

Die endgültige Lichtintensität, die das Auge erreicht setzt sich zusammen aus:

$I = I_E + I_B + I_L$

dem emittierten Licht:

$I_E = \int\limits_{t_n}^{t_f} \tau(t_n, t) \cdot c(v_r(t))dt$

dem ambienten Licht:

$I_B = \tau(t_n, t_f) \cdot I_b$

$\tau(t_0, t_1) = e^{-\int\limits_{t_0}^{t_1} \sigma(v_r(t))dt}$

und dem Licht der Einzelnen Lichtquellen. Hier reduziert auf einen einzelnen Strahl der den Sichtstrahl $\underline{r}(t) = \underline{e} + t \cdot \vec{v}$ im Volumen schneidet. (An der Stelle t)

$I_L(t) = \tau(t_n, t) \cdot I_p(t)$

$I_p(t) = e^{-\int\limits_0^{l(t)} \cdot\sigma(v_r(s))ds} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\int\limits_0^{l(t)} \cdot\lambda\cdot v_r(s)ds} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\int\limits_0^{l(t)} \cdot\lambda\cdot\kappa ds} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\int\limits_0^{l(t)} \cdot\lambda\cdot\kappa ds} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot\int\limits_0^{l(t)} ds} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot s} \cdot I_p$

$I_p(t) = e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot\frac{-<p(t),d(t)>}{<d(t),d(t)>} + \frac{\sqrt{<p(t),d(t)>^2 - <p(t),p(t)>\cdot<d(t),d(t)>}}{<d(t),d(t)>}} \cdot I_p$

mit $d(t) = d$ da es sich um eine Richtungslichtquelle handelt

$I_p(t) = e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot\frac{-<p(t),d>}{<d,d>} + \frac{\sqrt{<p(t),d>^2 - <p(t),p(t)>\cdot<d,d>}}{<d,d>}} \cdot I_p$

$I_{L(t)} = \tau(t_n, t) \cdot e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot\frac{-<p(t),d>}{<d,d>} + \frac{\sqrt{<p(t),d>^2 - <p(t),p(t)>\cdot<d,d>}}{<d,d>}} \cdot I_p$

Daraus ergibt sich $I_L$ für eine Richtungslichtquelle

$I_L = \int\limits_{t_n}^{t_f} I_{L(t)}dt$

$I_L = \int\limits_{t_n}^{t_f} \tau(t_n, t) \cdot I_{p(t)}dt$

$I_L = \int\limits_{t_n}^{t_f} \tau(t_n, t) \cdot e^{-\lambda\cdot\kappa\cdot\frac{-<p(t),d>}{<d,d>} + \frac{\sqrt{<p(t),d>^2 - <p(t),p(t)>\cdot<d,d>}}{<d,d>}} \cdot I_p dt$

[Max95]

[JPP98]

# 5 Fazit

# Literaturverzeichnis

[JPP98] JUNG, Moon-Ryul ; PARK, Hyunwoo ; PAIK, Doowon: An Analytical Ray Casting of Volume Data. In: *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, IEEE Computer Society, 1998. – ISBN 0–8186–8620–0, S. 79–86

[Max95] MAX, Nelson: Optical Models for Direct Volume Rendering. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 1 (1995), Juni, Nr. 2, S. 99–108. – ISSN 1077–2626

# Danksagung

Die Danksagung...

# Erklärungen zum Urheberrecht

Hier soll jeder Autor die von ihm eingeholten Zustimmungen der Copyright-Besitzer angeben bzw. die in Web Press Rooms angegebenen generellen Konditionen seiner Text- und Bildübernahmen zitieren.