ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
Н.М. Близняков

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2008

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 20 декабря 2007 года, протокол № 4

Рецензент: Б.Н. Садовский

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре алгебры и топологических методов анализа математического факультета Воронежского госуниверситета.

Рекомендуется для студентов 1 курса математического факультета очной формы обучения, обучающихся по специальности 010101 (010100) - Математика и по направлению 010100 (510100) - Математика

§ 1. Множества

1. Понятие множества. Понятие множества является одним из наиболее общих и важных математических понятий. Оно было введено в математику в 1872 году создателем теории множеств немецким математиком Георгом Кантором (1845ч1918).

Всякое математическое определение выражает определяемое понятие через другие более общие понятия. Понятие же множества не удается свести к другим понятиям, поскольку более общего понятия, чем множество, в математике нет. Поэтому в м е с т о о п р е д е л е н и я понятия множества дают его о п и с а н и е и иллюстрируют примерами.

Следуя Кантору, под *множеством* понимают совокупность (семейство, набор, класс и т. д.) каких-либо р а з л и ч н ы х, доступных нашему воображению объектов, объединенных в одно целое. Объекты, из которых составлено множество, называют *элементами* этого множества.

У самого Кантора сказано следующее: «Под "множеством" мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных в п о л н е р а з л и ч а е м ы х объектов m из нашего восприятия или мысли (которые называются "элементами" M)».

Можно говорить о множестве простых чисел, заключенных между 1и 100; о множестве всех вершин данного многоугольника; о множестве натуральных чисел; о множестве всех точек на прямой; о множестве всех функций, заданных на отрезке $[a, b]$; о множестве жителей данного города; о множестве листов в данной книге и т. д.

Множества обычно обозначают п р о п и с н ы м и, а их элементы є с т р о ч н ы м и буквами.

Факт принадлежности элемента множеству обозначается символом $\in$: запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, а запись $a \notin A$ (или $a\overline{\in}A$) є что a не является элементом множества A. Запись $A = \{a, b, c\}$ указывает, что множество A состоит в точности из элементов a, b, c.

Не всегда заранее известно, что рассматриваемое множество содержит хотя бы один элемент (например, множество корней данного уравнения), поэтому для правомочности рассуждений целесообразно ввести понятие множества, не содержащего ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Всякое множество, число элементов которого равно одному из чисел $0, 1, 2, \ldots$, называется *конечным*. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

Задание всякого конкретного множества заключается в указании всех составляющих его элементов. Возможны различные способы задания множества. Основной способ задания множества состоит в указании *характеристического свойства* его элементов, т. е. свойства, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Например, свойство «положительности целого числа» задает множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначая символом $P(a)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать $A = \{a : P(a)\}$. Конечное множество можно задать также указанием перечня (списка) всех его элементов: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Дя конечных множеств с большим числом элементов такой способ задания громоздок или практически неприменим.

З а м е ч а н и е 1. Согласно описанию понятия множества, все элементы множества различны. При первом знакомстве с теорией множеств читателю полезно дать себе сознательный отчет в том, что двух одинаковых элементов не бывает. Поэтому выражение «элементы a и b равны» означает, что мы имеем дело не с двумя одинаковыми объектами, а с о д н и м о б ъ е к т о м, который один раз поименован a, а другой є b. Таким образом, условие, что все элементы множества различны, означает, что в с я к и й э л е м е н т в м н о ж е с т в е м о ж е т в с т р е т и т ь с я т о л ь к о о д и н р а з.

Несмотря на то, что всякий элемент входит в множество только один раз, в символьной записи множества допускается повторение символов (имен), отвечающих одному элементу, сколько угодно раз, и, значит, всякое множество может быть записано бесконечным числом способов. Например, множество из трех чисел $0, 1, 2$ можно записать $\{0, 1, 2\}$, а также $\{2, 0, 1, 0\}$ или $\{1, 0, 2, 2, 1, 2\}$ и т. д. Использование такой непонятной на первый взгляд системы записи множества целесообразно уже потому, что избавляет от необходимости проверять единственность записи каждого элемента и возникающих при этом не всегда преодолимых трудностей. Дя конечных множеств с большим числом элементов такая проверка может быть весьма трудоемкой, а для бесконечных множеств є и вовсе не всегда возможной. Ситуация осложняется еще тем, что один и тот же элемент в символьной записи множества может выступать под разными именами, и задача выяснения того, что под разными именами скрывается один и тот же элемент, может быть совсем непростой. Рассмотрим, например, множество $\{a, b\}$, элементом a которого является пустое множество, а элементом b є множество всех положительных целочисленных решений уравнений $x^n + y^n = z^n$ для всех натуральных $n > 2$. Задача выяснения совпадения элементов a и b составляет знаменитую проблему Ферма, на решение которой математикам потребовалось более 350 лет.

Подчеркнем, наконец, что при рассмотрении вопросов, связанных с подсчетом числа элементов множества, естественно, используются только такие записи множеств, в которых каждому элементу соответствует лишь один символ.

Множества A и B, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными* и пишут: $A = B$.

На практике для доказательства равенства двух множеств показывают, что всякий элемент одного множества принадлежит другому, и наоборот.

Предупреждение. Не следует смешивать одноэлементное множество $\{a\}$ с его единственным элементом a. Отождествление множества $\{a\}$ с элементом a может приводить к недоразумениям: если элемент a сам является множеством $a = \{b_1, b_2, \dots\}$ с числом элементов, отличным от единицы, то равенство $\{a\} = a$ означает равенство разных множеств $\{a\}$ и $\{b_1, b_2, \dots\}$ (с разным числом элементов!).

Схематически множество изображают кругами (или другими связными фигурами) на плоскости, их называют *диаграммами Эйлера*, а также *диаграммами Венна* При такой иллюстрации множество мыслится как совокупность точек изображающей его фигуры.

2. Конструирование множеств. Из данных множеств можно конструировать другие множества. Приведем наиболее важные, необходимые в дальнейшем способы конструирования.

1°. П о д м н о ж е с т в о («дочерний объект»). Пусть A є произвольное множество. Рассмотрим некоторую часть B его элементов как самостоятельное множество (случаи $B = A$, $B = \varnothing$ не исключаются). Образованное таким образом множество B называется *подмножеством* множества A. Говорят, что B *вложено* (или *включено, содержится*) в A, и пишут $B \subset A$ (рис. 1).

B

A

Рис. 1

П р и м е р 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Для всякого множества A имеют место вложения $\varnothing \subset A$, $A \subset A$. Подмножества, отличные от $\varnothing$ и A, называются *собственными подмножествами* множества A.

Очевидно, что если $B \subset A$ и $C \subset B$, то $C \subset A$. Это свойство называется свойством *транзитивности вложения.*

Ясно, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

2°. Объединение множеств. *Объединением* $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, т. е.

$$A \cup B = \{a: \ a \in A \text{ или } a \in B\} \text{ (рис. 2).}$$

A ***B***

Рис. 2

П р и м е р 2. Объединение множества всех четных чисел и множества всех нечетных чисел есть множество всех целых чисел.

Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α, $\alpha \in I$ є произвольные множества, то их объединением $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_α.

3°. Пересечение множеств. *Пересечением* $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B, т. е.

$$A \cap B = \{a: \ a \in A, \ a \in B\} \text{ (рис. 3).}$$

A ***B***

Рис. 3

П р и м е р 3. Пересечением множества всех нечетных чисел и множества всех целых чисел, делящихся на 5, является множество всех целых чисел, оканчивающихся цифрой 5.

Пересечением $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α, $\alpha \in I$ называется множество элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A, B называются *непересекающимися*.

4°. Разность множеств. *Разностью* $A \setminus B$ множеств A и B называется совокупность элементов из A, не принадлежащих B, т. е.

$$A \setminus B = \{a : \ a \in A, \ a \notin B\} \text{ (рис. 4).}$$

При этом, вообще говоря, не предполагается, что $B \subset A$.

Пример 4. Разностью $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ является множество всех нечетных чисел.

Разность $A \setminus B$ в случае $B \subset A$ называют также *дополнением* множества B (относительно A) и обозначают $C_A B$ или CB, а также $\overline{B}$, когда ясно, относительно какого множества рассматривается дополнение.

Иногда рассматривают так называемую *симметрическую разность* $A \triangle B$ множеств A и B, которая определяется как объединение разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 5), т. е.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

A **B**

Рис. 4

A **B**

Рис. 5

5°. Декартово произведение множеств. *Декартовым произведением* (или просто *произведением*) $A \times B$ множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар вида (a, b), у которых на первом месте стоят элементы из множества A, а на втором є элементы из B, т. е.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

П р и м е р 5. Если множества A и B состоят из вещественных чисел, то пару (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, можно рассматривать как точку плоскости с абсциссой a и ординатой b. В такой интерпретации произведение $A \times B$ отрезков $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\gamma, \delta]$ представляет собой множество всех точек прямоугольника, изображенного на рис. 6, а произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є множество всех точек плоскости.

y

δ

γ

α β x

Рис. 6

Аналогично определяется произведение $A_1 \times \cdots \times A_k$ любого конечного набора множеств $A_1, \ldots, A_k$ как множество всех упорядоченных наборов из k элементов $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k$, т. е.

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

6°. Ф а к т о р - м н о ж е с т в о. Пусть A є произвольное множество. Будем рассматривать теперь только множества, элементами которых являются подмножества множества A. Наибольшее из таких множеств, т. е. множество всевозможных подмножеств множества A, обозначают 2^A (выбор такого обозначения становится понятным, если подсчитать число всех подмножеств конечного множества). Иначе говоря, мы ограничимся рассмотрением подмножеств множества 2^A. Среди множеств такого вида важную роль играют так называемые п о к р ы т и я и р а з б и е н и я.

Всякое семейство $S = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ непустых подмножеств множества A называется *покрытием множества* A, если каждый элемент множества

A принадлежит хотя бы одному из множеств B_α семейства S, т. е. $\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha = A$. Покрытие $S = \{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ множества A называется *разбиением множества* A, если каждый элемент множества A принадлежит только одному из множеств B_α покрытия S. Иными словами, всякое семейство $S = \{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ непустых подмножеств множества A называется *разбиением множества* A, если его множества попарно не пересекаются, а объединение всех множеств семейства есть множество A, т. е.

1) $B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2} = \varnothing, \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in I, \alpha_1 \neq \alpha_2$;

2) $\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha = A$.

$\mathbf{A}$

$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha_1}}$

$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha_2}}$

Рис. 7

Подмножества B_α разбиения S называют *классами* данного разбиения, а само разбиение S, т. е. множество, элементами которого являются классы разбиения, называют также *фактор-множеством* множества A. Таким образом, задание фактор-множества сводится к заданию классов разбиения. Основным инструментом для описания классов разбиения является понятие отношения эквивалентности. Дадим краткое описание этого важного понятия.

Пусть A є некоторое множество. Всякое подмножество R произведения $A \times A$ называется *бинарным отношением* в A, т. е. бинарное отношение є это некоторое множество «отмеченных» упорядоченных пар элементов из A. Факт $(a, b) \in R$ принадлежности пары (a, b) множеству R будем записывать также $a \underset{R}{\sim} b$ и говорить, что элемент a связан с элементом b отношением R.

П р и м е р 6. В данной группе людей можно задать бинарное отношение, «отметив» пары по принципу знакомства людей из пары («отношение знакомства»).

Бинарное отношение R в множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $a \underset{R}{\sim} a \quad \forall\, a \in A$ (рефлексивность);

2) если $a \underset{R}{\sim} b$, то $b \underset{R}{\sim} a$ (симметричность);

3) если $a \underset{R}{\sim} b$ и $b \underset{R}{\sim} c$, то $a \underset{R}{\sim} c$ (транзитивность).

Для данного отношения эквивалентности R в множестве A и всякого элемента $a \in A$ обозначим $[a]$ є множество всех элементов x из A, эквивалентных элементу $a : x \underset{R}{\sim} a$, и назовем *классом эквивалентности элемента* a (по отношению эквивалентности R).

Т е о р е м а 1. Пусть A є некоторое множество и R є некоторое отношение эквивалентности в A. Тогда семейство $\{[a]\}_{a \in A}$ классов является разбиением множества A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякий элемент $a \in A$ в силу рефлексивности принадлежит классу $[a]$, поэтому $\bigcup\limits_{a \in A} [a] = A$. Для проверки второго условия покажем, что для любых элементов $a, b \in A$ классы $[a]$ и $[b]$ либо не пересекаются, либо совпадают. Пусть $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ и $c \in [a] \cap [b]$. Пусть x є какой-нибудь элемент из $[a]$, т. е. $x \underset{R}{\sim} a$ (рис. 8).

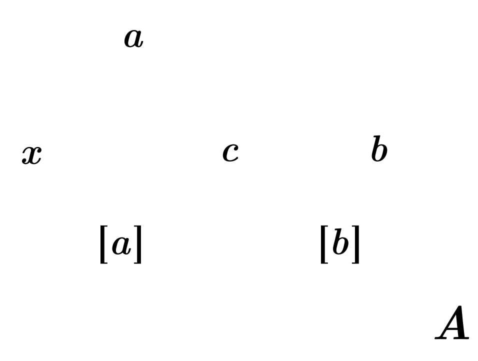

Рис. 8

По условию $c \underset{R}{\sim} a$, в силу симметричности, имеем $a \underset{R}{\sim} c$. Из отношений $x \underset{R}{\sim} a$, $a \underset{R}{\sim} c$, $c \underset{R}{\sim} b$, в силу транзитивности, получаем $x \underset{R}{\sim} b$, т. е. $x \in [b]$, поэтому $[a] \subset [b]$. Аналогично доказывается обратное включение $[b] \supset [a]$. Следовательно, $[a] = [b]$.

$\blacksquare$

Таким образом, всякое отношение эквивалентности задает разбиение. С другой стороны, всякое разбиение $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ множества A можно задать с помощью отношения эквивалентности, считая, что $a \underset{R}{\sim} b$ тогда и только тогда, когда элемент a принадлежит тому же множеству разбиения $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$, что и элемент b. В этом случае семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ совпадает с семейством классов эквивалентности $\{[a]\}_{a \in A}$. Фактор-множество множества A, заданное отношением эквивалентности R, называют *фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности R* и обозначают A/R.

П р и м е р 7. На плоскости P зафиксируем некоторую прямую l и зададим во множестве точек P следующее отношение эквивалентности $R : a \underset{R}{\sim} b$, если прямая, параллельная l, проходящая через точку b, содержит точку a. Фактор-множество P/R состоит из всех прямых плоскости P, параллельных прямой l.

П р и м е р 8. «Отношение знакомства», приведенное в примере 6, не является отношением эквивалентности, поскольку не обладает свойством транзитивности.

3. Свойства операций над множествами. Для операций $\cup, \cap, \setminus, \triangle, \times$ над множествами справедливы многие привычные свойства операций сложения и умножения над числами.

Например, операции объединения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A$$

и ассоциативны:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны, т. е. пересечение дистрибутивно относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1}$$

и объединение дистрибутивно относительно пересечения:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

Проверим, например, равенство (1). Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части равенства (1), т. е. $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что $x \in C$ и x принадлежит по крайней мере одному из множеств A или B. Тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, и, значит, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$. Значит, $x \in C$, и, кроме того, x принадлежит A или B, т. е. $x \in A \cup B$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1) доказано. Аналогично доказывается равенство (2).

Ясно, что операция симметрической разности множеств коммутативна, а операции разности и произведения множеств не коммутативны.

Операция произведения множеств ассоциативна по определению.

У п р а ж н е н и е 1. Покажите, что операция симметрической разности множеств ассоциативна, а операция разности множеств не ассоциативна.

Из свойств дистрибутивности для операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$, $\times$, кроме указанных выше, отметим еще необходимое нам в дальнейшем свойство дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности:

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C). \tag{3}$$

У п р а ж н е н и е 2. Докажите равенство (3).

Важную роль в теории множеств играет *принцип двойственности*, основанный на двух равенствах — формулах де Моргана:

1) дополнение объединения равно пересечению дополнений

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_\alpha); \tag{4}$$

2) дополнение пересечения равно объединению дополнений

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_\alpha) \tag{5}$$

(в равенствах (4), (5) все множества семейства $\{A_\alpha\}$ являются подмножествами множества X).

У п р а ж н е н и е 3. Покажите справедливость равенств (4), (5).

П р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и заключается в следующем: из всякого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества, можно получить другое равенство (называемое *двойственным* к исходному), если заменить в нём все объединяемые и пересекаемые множества их дополнениями, объединения множеств — пересечениями, а пересечения — объединениями.

П р е д у п р е ж д е н и е. При применении принципа двойственности нельзя совершать указанные замены множеств и знаков $\cup$ и $\cap$ в отдельных частях («уменьшаемом» и «вычитаемом») неразделимых символов разностей множеств, а также в симметрических разностях множеств. Например, множество $(A \cup B) \setminus (D \cap F)$ следует заменить на $\mathcal{C}_X\Big((A \cup B) \setminus \setminus (D \cap F)\Big)$, а не на $\Big((\mathcal{C}_X A) \cap (\mathcal{C}_X B)\Big) \setminus \Big((\mathcal{C}_X D) \cup (\mathcal{C}_X F)\Big)$.

П р и м е р 9. Для любых подмножеств A, B всякого множества X справедливо равенство

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(покажите!). Применяя принцип двойственности к последнему равенству, получаем равенство

$$\Big(\mathcal{C}_X(A \setminus B)\Big) \cap \Big(\mathcal{C}_X(B \setminus A)\Big) = \mathcal{C}_X\Big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\Big).$$

Упражнения

1. Каких из подмножеств у множества из 10 элементов больше: из 3 элементов или из 7?

2. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков є это один и тот же человек или (возможно) разные?

3. Покажите равносильность следующих трех соотношений: $A \subset B$, $A \cap B = B$, $A \cup B = B$.

4. Покажите, что $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

5. Докажите, что произведение дистрибутивно относительно объединения и относительно пересечения:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

6. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливы равенства

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C),$$

а равенства

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B),$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

в общем случае неверны (т. е. не выполнено одно из условий дистрибутивности разности относительно объединения и относительно пересечения).

7. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел зададим следующее бинарное отношение $R : a \underset{R}{\sim} b$, если $x - y \in \mathbb{Z}$. Докажите, что R є отношение эквивалентности, опишите элементы фактор-множества $\mathbb{R}/R$.

8. Пусть $n \geq 1$ є некоторое целое число. На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел зададим следующее бинарное отношение $R : p \underset{R}{\sim} q$, если число $p-q$ делится на n. Докажите, что R є отношение эквивалентности, опишите

элементы фактор-множества $\mathbb{Z}/R$ (фактор-множество $\mathbb{Z}/R$ обозначают $\mathbb{Z}_n$, его элементы называют *классами вычетов по модулю* n).

9. На плоскости P с фиксированной декартовой системой координат зададим следующие бинарные отношения R_1, R_2:

1) $(a_1, a_2) \underset{R_1}{\sim} (b_1, b_2)$, если $a_1 = b_1,\ a_2 - b_2 \in \mathbb{Z}$;

2) $(a_1, a_2) \underset{R_2}{\sim} (b_1, b_2)$, если $a_1 - b_1,\ a_2 - b_2 \in \mathbb{Z}$.

Докажите, что R_1, R_2 є отношения эквивалентности, опишите элементы фактор-множеств $P/R_1, P/R_2$.

10. Покажите, что на множествах из двух, трех и четырех элементов можно задать соответственно $2, 5$ и 15 различных фактор-множеств.

§ 2. Отображения

1. Отображения множеств. Естественным обобщением понятия функции, вводимого в анализе, является понятие отображения є одно из важнейших понятий математики.

Пусть X, Y є непустые множества. *Отображением* множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу из X поставлен в соответствие вполне определенный элемент из Y.

Отображения обозначают буквами. Дя отображения f, действующего из X в Y, используют символическую запись $f : X \to Y$; множество X называют *областью определения*, а множество Y є *областью значений* отображения f. Запись $a \overset{f}{\mapsto} b$ означает, что элементу $a \in X$ при отображении $f : X \to Y$ соответствует элемент $b \in Y$. Вместо записи $a \overset{f}{\mapsto} b$ используют также более краткую запись $a \mapsto b$, когда ясно, о каком отображении идёт речь.

Задание соответствия элементу $a \in X$ элемента $b \in Y$ эквивалентно заданию упорядоченной пары $(a, b) \in X \times Y$. Поэтому понятие отображения можно определить также следующим образом: подмножество f декартова произведения $X \times Y$ называется *отображением* из X в Y, если для всякого элемента $a \in X$ существует и единственен элемент $b \in Y$ такой, что $(a, b) \in f$.

Если a є элемент из X, то отвечающий ему элемент b при отображении $f : X \to Y$ называется *образом элемента* a (при отображении f) и обозначается $f(a)$. Совокупность всех элементов из X, образом которых является данный элемент $b \in Y$, называется *прообразом (полным прообразом) элемента* b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A є некоторое подмножество множества X; множество $\{f(a) : a \in A\}$ называется *образом множества* A и обозначается $f(A)$. Образ $f(X)$ области определения X отображения f называют также *образом отображения* f и обозначают Imf. Если B є некоторое подмножество множества Y, то множество $\{f^{-1}(b) : b \in B\}$ называется *прообразом (полным прообразом) множества* B и обозначается $f^{-1}(B)$. Ясно, что $f(A) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$. Отметим, что прообраз $f^{-1}(B)$ может быть пустым множеством и в том случае, когда $B \neq \varnothing$, точнее $f^{-1}(B) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $B \cap f(X) = \varnothing$ (убедитесь!).

Отображения $f : X \to Y$, $g : X' \to Y'$ называют *равными* и пишут $f = g$, если $X = X'$, $Y = Y'$ и $f(x) = g(x)$ для всякого $x \in X$.

У п р а ж н е н и е 1. Покажите, что для всякого отображения $f : X \to Y$ и любых подмножеств $A \subset X$, $B \subset Y$ справедливо равенство и включение $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Приведите пример, когда $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

П р и м е р 1. Пусть X є некоторое множество. Отображение $X \to X$, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя, называется *тождественным (или единичным)* и обозначается I_X или просто I (когда это не может привести к путанице). Таким образом, $I_X(x) = x, \forall\, x \in X$.

П р и м е р 2. Пусть X, Y є некоторые множества и y_0 є некоторый элемент из Y. Отображение $f : X \to Y$, определенное равенством $f(x) = y_0, \forall\, x \in X$, называется *постоянным.*

П р и м е р 3. Пусть X є некоторое непустое множество. Всякое отображение $f : \mathbb{N} \to X$ называется *последовательностью* элементов множества X. Элемент $f(n)$ обозначается x_n, а сама последовательность обозначается $\{x_1, x_2, \dots\}$ или $\{x_n\}$.

П р и м е р 4. Всякое отображение $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Y$, $n \geq 2$, определенное на произведении множеств, называется *отображением (функцией) n переменных.*

Рассмотрим наиболее общие классы отображений. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если для любых двух различных элементов $x_1, x_2 \in X$ их образы $f(x_1), f(x_2)$ также различны, т. е. из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$; иначе говоря, если прообраз $f^{-1}(y)$ всякого элемента $y \in Y$ состоит не более чем из одного элемента. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если для всякого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$, т. е. $f(X) = Y$; иначе говоря, если прообраз $f^{-1}(y)$ всякого элемента $y \in Y$ не пуст. Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным* (или *биекцией*), если оно инъективно и сюръективно одновременно, т. е. если прообраз $f^{-1}(y)$ всякого элемента $y \in Y$ состоит ровно из одного элемента.

Упражнение 2. Докажите, что если X є конечное множество, то инъективность отображения $f : X \to X$ равносильна его сюръективности.

Установим некоторые свойства отображений.

Теорема 1. Для всякого отображения $f : X \to Y$ и любых множеств A и B из X образ объединения равен объединению образов этих множеств, а образ пересечения содержится в пересечении образов, т. е.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \tag{1}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \tag{2}$$

Доказательство. Докажем равенство (1). Пусть $y \in f(A \cup B)$. Тогда $y = f(x)$ для некоторого $x \in A \cup B$. Так как элемент x принадлежит по крайней мере одному из множеств A или B, то элемент $y = f(x)$ принадлежит по крайней мере одному из множеств $f(A)$ или $f(B)$, и, значит, $y \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то элемент y принадлежит по крайней мере одному из множеств $f(A)$ или $f(B)$, следовательно, по крайней мере в одном из множеств A или B найдется элемент x такой, что $y = f(x)$. Тогда $x \in A \cup B$, поэтому $y = f(x) \in$ $\in f(A \cup B)$.

Докажем включение (2). Пусть $y \in f(A \cap B)$. Тогда $y = f(x)$ для некоторого $x \in A \cap B$. Таким образом, $x \in A$ и $x \in B$, следовательно, $f(x) \in f(A)$ и $f(x) \in f(B)$, значит $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

■

З а м е ч а н и е 1. Образ пересечения множеств, вообще говоря, не равен пересечению образов. Рассмотрим, например постоянное отображение $f : X \to Y$, $f(x) = y_0$, $x \in X$. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Положим $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$. Тогда $A \cap B = \varnothing$ и, значит, $f(A \cap B) = \varnothing$, но $f(A) \cap f(B) = \{y_0\}$.

Т е о р е м а 2. Для всякого отображения $f : X \to Y$ и любых множеств A и B из Y прообраз объединения (пересечения) равен объединению (пересечению) прообразов этих множеств, т. е.

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \tag{3}$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (3). Пусть $x \in$ $\in f^{-1}(A \cup B)$. Это означает, что $f(x) \in A \cup B$, поэтому элемент $f(x)$ принадлежит по крайней мере одному из множеств A или B. Тогда элемент x принадлежит хотя бы одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$, значит $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то элемент x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$. Поэтому элемент $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из множеств A или B, следовательно, $f(x) \in A \cup B$, значит $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Докажем равенство (4). Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, т. е. $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, значит $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, то $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, следовательно, $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, поэтому $f(x) \in A \cap B$, значит $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

■

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Справедливо ли аналогичное утверждение для образа дополнения?

З а м е ч а н и е 2. Язык отображений удобен для задания разбиений множества. Всякое отображение задает разбиение и, обратно, всякое разбиение можно задать при помощи некоторого отображения. Действительно, если $f: X \to Y$ є отображение, то семейство $\{f^{-1}(y): y \in f(X)\}$, очевидно, является разбиением множества X. Обратно, пусть X є некоторое множество и $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ є некоторое его разбиение. Обозначим через Y множество подмножеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Зададим отображение $\pi: X \to Y$, ставя в соответствие каждому элементу $x \in X$ тот класс (т. е. элемент из Y), которому x принадлежит. Тогда семейство $\{\pi^{-1}(y) : y \in Y\}$ совпадает с семейством $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

2. Конструирование отображений. Из данных отображений можно конструировать другие отображения. Приведем некоторые способы конструирования, необходимые в дальнейшем.

1°. Сужение отображения («дочерний объект»). Пусть $f: X \to Y$ є отображение и A є подмножество множества X. Отображение $f|_A : A \to Y$, определенное равенством $f|_A(x) = f(x),\ x \in A$, называется *сужением* (или *ограничением*) отображения f на множество A.

Пример 5. Пусть $\mathbb{R}_+$ є множество всех положительных действительных чисел, а $\mathbb{R}_-$ є множество всех отрицательных действительных чисел. Тогда для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ имеем: $f|_{\mathbb{R}_+}(x) = x$, $f|_{\mathbb{R}_-}(x) = -x$.

2°. Суперпозиция отображений. Пусть X, Y, Z є множества и $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ є отображения. *Суперпозицией* (или *композицией*) отображений f и g называется отображение $g \circ f : X \to Z$, определенное равенством

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall\, x \in X.$$

Пример 6. Рассмотрим функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$. Суперпозицией $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является функция $(g \circ f)(x) = 2^{x^2}$, а суперпозицией $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є функция $(f \circ g)(x) = 2^{2x}$. (Здесь $g \circ f \neq f \circ g$!)

3°. Обратное отображение. Пусть f є отображение множества X в множество Y. Отображение $g : Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если

$$g \circ f = I_X, \; f \circ g = I_Y. \tag{5}$$

Отображение, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым.*

Упражнение 4. Приведите пример отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ таких, что $g \circ f = I_X$, но $f \circ g \neq I_Y$.

Теорема 3. Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ є отображения. Тогда:

1) если $g \circ f$ инъективно, то и f инъективно;

2) если $g \circ f$ сюръективно, то и g сюръективно.

Доказательство. 1) Если $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$. Так как отображение $g \circ f$ инъективно, то из последних равенств получаем $x_1 = x_2$, т. е. отображение f инъективно.

2) Пусть x є какой-нибудь элемент из X. В силу сюръективности отображения $g \circ f$ существует элемент $x' \in X$ такой, что $(g \circ f)(x') = x$, т. е. $g(y) = x$, где $y = f(x')$, следовательно, g сюръективно.

■

Следствие. Если отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ удовлетворяют условию

$$g \circ f = I_X, \tag{6}$$

то f инъективно, а g сюръективно.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть отображение $f : X \to Y$ обратимо и $g : Y \to X$ є обратное отображение к f. Согласно следствию леммы, из равенства $g \circ f = I_X$ следует инъективность f, а из равенства $f \circ g = I_Y$ є сюръективность f, т. е. f биективно.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если отображение $f : X \to Y$ биективно, то для всякого элемента $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента множества X. Зададим отображение $g : Y \to X$ равенством $g(y) = f^{-1}(y)$ для всякого $y \in Y$. Тогда $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$, т. е. $f \circ g = I_Y$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, т. е. $g \circ f = I_X$. Следовательно, g – обратное отображение к f.

■

З а м е ч а н и е 3. Отображение не может иметь более одного обратного отображения. Действительно, если $g : Y \to X$ – отображение, обратное к отображению $f : X \to Y$, то, в силу биективности f, для всякого элемента $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента, который, в силу условия $f(g(y)) = y$, равен $g(y)$. Таким образом, обратное отображение к f определено однозначно, его обозначают в традициях алгебры f^{-1}.

П р и м е р 7. Обратным к отображению $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, является отображение $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2k-1}}$. Для отображения $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}$, обратное отображение не определено, поскольку g не биективно.

П р и м е р 8. Для всякого множества X имеем $I_X^{-1} = I_X$. Всякое постоянное отображение $f : X \to Y$ множества X, состоящего более чем из одного элемента, не биективно, и, значит, отображение f^{-1} не определено.

Ясно, что для всякого биективного отображения f обратное к нему отображение f^{-1} также биективно и $(f^{-1})^{-1} = f$.

З а м е ч а н и е 4. Для всякого отображения $f : X \to Y$ полный прообраз элемента $y \in Y$ обозначается $f^{-1}(y)$. Если же отображение f биективно, то определено обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, и запись $f^{-1}(y)$ можно понимать также как образ элемента y при отображении f^{-1}. Однако такое совпадение обозначений к путанице не приводит, поскольку для биективного отображения полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента є образа элемента y при отображении f^{-1}.

3. Свойства операций над отображениями. Укажем некоторые свойства, необходимые в дальнейшем.

Т е о р е м а 4. Операция суперпозиции отображений ассоциативна, т. е. если $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to H$ є три отображения, то

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (7) следует из равенств

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

■

Т е о р е м а 5. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ є отображения и $h = g \circ f$. Тогда:

1) если f и g инъективны, то и h инъективно;

2) если f и g сюръективны, то и h сюръективно;

3) если f и g биективны, то и h биективно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $h(x_1) = h(x_2)$. Тогда

$$\begin{array}{ll} h(x_1) & = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \\ \quad || & \\ h(x_2) & = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)), \end{array}$$

откуда $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Из последнего равенства, в силу инъективности g, получаем $f(x_1) = f(x_2)$, откуда, в силу инъективности f, следует $x_1 = x_2$.

2) Пусть z є некоторый элемент из Z. В силу сюръективности g, существует элемент $y \in Y$ такой, что $g(y) = z$, а в силу сюръективности f, существует элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Поэтому $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, т. е. $h(x) = z$.

Утверждение 3) является следствием утверждений 1), 2).

■

Упражнение 5. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ є биективные отображения. Покажите, что $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Упражнения

1. Приведите примеры отображений инъективных, но не сюръективных; сюръективных, но не инъективных; биективных.

2. Приведите пример отображений f и g таких, что f не сюръективно, g не инъективно, но $g \circ f$ биективно.

3. Покажите, что для всякого инъективного отображения $f\colon X \to Y$ и любого подмножества $A \subset X$ справедливо равенство $f^{-1}(f(A)) = A$.

4. Покажите, что для всякого сюръективного отображения $f\colon X \to Y$ и любого подмножества $B \subset Y$ справедливо равенство $f(f^{-1}(B)) = B$.

5. Покажите, что для всякого отображения $f : X \to X$ справедливы включения

$$f(X) \supset f(f(X)) \supset f(f(f(X))) \supset \dots$$

6. Дкажите, что если X и Y є конечные множества и $|X| = n$, $|Y| = k$, то число различных отображений $X \to Y$ равно k^n.

7. Покажите, что для всякого отображения $f\colon X \to Y$ и любых подмножеств $A \subset X, B \subset Y$ справедливо равенство $f|_A^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A$.

§ 3.Сравнение множеств

1. Задача классификации. Сравнение множеств. Понятие о мощности множества. Одной из важных задач всякой науки является задача к л а с с и ф и к а ц и и, которая на языке теории множеств заключается в разбиении множества всех объектов, исследуемых в рамках какой-то проблемы, на непересекающиеся классы, в каждом из которых сосредоточены похожие, т. е. эквивалентные в некотором смысле объекты, точнее ϵ объекты, имеющие одинаковые свойства в пределах данной проблемы. Например, классификация множества $\mathbb{Z}$ целых чисел, в связи с задачей нахождения остатка при делении целого числа на 10, состоит из 10 классов, в каждом из которых содержатся все целые числа, оканчивающиеся на одну и ту же цифру. Классификация позволяет упорядочить полученные знания об объектах и избавляет от необходимости изучать отдельно каждый из объектов множества: в каждом из классов разбиения выделяют по одному какому-нибудь представителю (множество всех таких представителей часто также называют классификацией) и для выяснения свойств любого интересующего объекта исследуют свойства представителя из того же класса, что и рассматриваемый объект.

Рассмотрим теперь задачу классификации всех объектов теории множеств, т. е. разбиение множества всех возможных множеств. Но уже в постановке задачи мы сталкиваемся с неожиданной трудностью. Множество всех возможных множеств, несмотря на простоту описания, обладает свойством, не присущим типичным множествам: будучи множеством, содержащим в качестве элементов все возможные множества, оно с о д е р ж и т и с е б я в к а ч е с т в е э л е м е н т а. В п. 5 мы покажем, что в качестве множества такой объект некорректен, допущение его в качестве множества позволяет делать выводы, противоречащие друг другу (там же мы обсудим причины этого парадокса). Таким образом, мы не располагаем описанием множества всех объектов теории множеств. По этой причине при рассмотрении задачи классификации мы ограничимся любой совокупностью множеств, заданной без противоречий, состав которой не вызывает сомнений.

В теории множеств изучают свойства множеств, не зависящие от свойств элементов, из которых они состоят. Исследуя множества, отвлекаются от свойств (элиминируют свойства) элементов, составляющих рассматриваемые множества. Рассмотрим задачу классификации множеств при таком подходе обезличивания элементов. Какие множества в такой ситуации следует считать эквивалентными? При элиминации всех свойств элементов возможность различения элементов обеспечивают их имена («этикетки»), которые, разумеется, могут быть выбраны разными способами. Поэтому естественно не различать множества A и B, если возможно «переклеить этикетки» с элементов множества B на элементы множества A, т. е. если можно переименовать элементы множества A именами элементов множества B так, что имя каждого из элементов множества B будет использовано и притом только один раз. На языке отображений процедура переименования элементов множества A означает задание отображения из A в B, а тот факт, что имя каждого из элементов множества B будет использовано и притом только один раз, означает биективность этого отображения. Описанный способ сравнения множеств по принципу биективности был внедрён в математику Кантором. Для конечных множеств он эквивалентен сравнению множеств по числу их элементов; именно так до Кантора сравнивали множества, в том числе и бесконечные. Однако сравнение множеств по числу элементов не позволяет различать бесконечные множества: все бесконечные множества имеют одно и то же є бесконечное число элементов и, значит, попадают в один класс. В отличие от способа сравнения множеств по числу элементов, способ сравнения по принципу биективности позволяет получить тонкую классификацию бесконечных множеств, имеющую бесконечное число классов.

Множество A называется *эквивалентным* или *равномощным* множеству B, если существует биективное отображение $f : A \to B$. Ясно, что если множество A равномощно множеству B, то и множество B равномощно множеству A, поэтому употребляют также выражение «множества A и B *равномощны*». Если A и B равномощны, то говорят, что они имеют одну и ту же *мощность*, и пишут $|A| = |B|$.

У п р а ж н е н и е 1. Покажите, что для всякой совокупности множеств отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности на данной совокупности.

Два конечных множества имеют одну и ту же мощность, если они состоят из одного и того же числа элементов. Поэтому понятие мощности множества можно рассматривать как обобщение понятия числа элементов конечного множества. Мощность — это то общее, что есть у любых двух равномощных множеств. Следует отметить, что для бесконечных множеств некоторые свойства мощности отличаются от свойств числа элементов конечных множеств. Например, если B — подмножество конечного множества A и $B \neq A$, то $|B| \neq |A|$. Для бесконечных множеств это свойство не имеет места: $\mathbb{N} \neq 2\mathbb{N}$, но $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ (см. ниже *пример 1*).

Рассмотрим важные классы множеств.

2. Счетные множества. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Мощность счетного множества обозначают $\aleph_0$ ($\aleph$ — первая буква древнееврейского алфавита, называемая «алеф»).

Всякое биективное отображение $f : A \to \mathbb{N}$ задает естественную нумерацию элементов множества A: элемент a получает номер $n = f(a)$ (пишут a_n). Обратно, всякая нумерация множества A числами множества $\mathbb{N}$ задает биекцию $A \to \mathbb{N}$. Поэтому множество счетно, если его элементы можно занумеровать числами натурального ряда.

П р и м е р 1. Множество $2\mathbb{N}$ всех четных положительных чисел счетно. Биекцией $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ может служить отображение, определенное равенством $f(n) = 2n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

У п р а ж н е н и е 2. Докажите счетность множеств $\mathbb{Z}$ всех целых чисел и $2\mathbb{N}+1$ всех нечетных положительных чисел.

Т е о р е м а 1. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби p/q, $q > 0$. Назовем сумму $|p|+q$ *высотой* рационального числа p/q. Ясно, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число дробей, имеющих высоту n, конечно. Занумеруем все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сначала выпишем единственное число $0/1$ высоты 1, затем все числа $-1/1$, $1/1$, $0/2$ высоты 2 и т. д. При этом каждое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет задано биективное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

■

Приведем некоторые свойства счетных множеств.

Т е о р е м а 2. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A є счетное множество и B є его подмножество. Если $B = \varnothing$, то утверждение справедливо. Пусть $B \neq \varnothing$. Занумеруем элементы множества A : $a_1, a_2, \dots$. Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ є те из них, которые принадлежат B. Если среди чисел $n_1, n_2, \dots$ есть наибольшее, то B конечно, если наибольшего нет, то B счетно, так как его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ занумерованы числами $1, 2, \dots$.

■

Т е о р е м а 3. Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A є бесконечное множество. Выберем в A какой-либо элемент a_1. В бесконечном множестве $A \setminus \{a_1\}$ выберем элемент a_2, затем в бесконечном множестве $A \setminus \{a_1, a_2\}$ выберем элемент a_3 и т. д. Таким образом мы построим множество $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, которое является счетным подмножеством множества A.

■

Последнее утверждение показывает, что счетные множества являются «самыми маленькими» среди бесконечных множеств.

Т е о р е м а 4. Объединение конечного или счетного семейства счетных множеств есть счетное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$A_1, A_2, \dots \tag{1}$$

є счетные множества. Не ограничивая общности, можно считать, что множества (1) попарно не пересекаются, иначе вместо них мы рассмотрели бы множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ (каждое из которых конечно или счетно, по теореме 2), объединение которых совпадает с объединением множеств (1). Все элементы множеств (1) запишем в виде таблицы, поместив в i-й строке элементы множества A_i. Поскольку множества (1) попарно не пересекаются, то среди элементов таблицы нет одинаковых, поэтому элементы таблицы є это в точности все элементы объединения множеств (1). Занумеруем элементы таблицы «по диагоналям», т. е. двигаясь в порядке, указанном на таблице стрелками, начиная с элемента a_{11}:

$$\begin{array}{cccccccc}
A_1: & a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \to & a_{14}\dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
A_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24}\dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
A_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34}\dots \\
 & & \swarrow & & & & & \\
A_4: & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44}\dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots
\end{array}$$

Ясно, что каждый элемент таблицы получит определенный номер, т. е. будет установлена биекция между объединением множеств (1) и множеством $\mathbb{N}$.

■

Упражнение 3. Покажите, что декартово произведение двух счетных множеств счетно.

Приведем еще один полезный факт.

Теорема 5. Всякое бесконечное множество равномощно его объединению со счетным множеством.

Доказательство. Пусть A — некоторое бесконечное множество, а B — какое-нибудь счетное множество. Тогда в силу теоремы 3 множество A имеет некоторое счетное подмножество C. Согласно теореме 4, множества C и $C \cup B$ равномощны. Пусть $g: C \to C \cup B$ — некоторая биекция. Если $A = C$, то утверждение справедливо, если $A \neq C$, то зададим отображение $f : A \to A \cup B$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \in A \setminus C, \\ g(x), \text{если } x \in C. \end{cases}$$

Ясно, что отображение f биективно.

■

3. Множества мощности континуума. Следующее утверждение показывает, что не всякое бесконечное множество является счетным.

Теорема 6 (Кантор). Множество действительных чисел интервала $(0, 1)$ несчетно.

Доказательство. Каждое число из интервала $(0, 1)$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, причем не более чем двумя способами. Точнее, числа вида $\frac{p}{10^k}$, где $p, k \in \mathbb{N}$, $p < 10^k$, и только они, допускают два представления: одно — с нулем в периоде, а другое — с девяткой в периоде (например, $0,200 \dots = 0,199 \dots$). Для чисел, имеющих две различные записи, выберем одну, не содержащую цифру 9 в периоде. Предположим теперь, что множество чисел интервала $(0, 1)$ счетно. Занумеруем их:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ &\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ &\alpha_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим число $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in (0,1)$, где b_1 є любая цифра от 1 до 8, отличная от a_{11}, b_2 є любая цифра от 1 до 8, отличная от a_{22} и т. д. Так как $b_n \neq a_{nn}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, то число β отлично от каждого из чисел (2), т. е. $\beta \notin (0,1)$. Противоречие.

■

Множество называется *континуальным* или множеством *мощности континуума*, если оно равномощно множеству всех действительных чисел интервала $(0,1)$. Мощность континуального множества обозначают $\mathfrak{c}$ (це готическое).

П р и м е р 2. Всякий интервал (a,b), множество $\mathbb{R}$ действительных чисел и множество $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел имеют мощность континуума. Биекциями могут служить отображения: $f : (0,1) \to (a,b)$, $f(x) = a + x(b-a)$; $g : \mathbb{R}_+ \to (0,1)$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $h : \mathbb{R} \to (0,1)$, $h(x) = \frac{1}{2^x+1}$.

У п р а ж н е н и е 4. Покажите, что всякий отрезок $[a,b]$ имеет мощность континуума.

4. О равенстве и неравенстве мощностей. Говорят, что *мощность множества A не больше мощности множества B*, и пишут $|A| \leq |B|$, если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B. Если, кроме того, $|A| \neq |B|$, то говорят, что *мощность множества A меньше мощности множества B*, и пишут $|A| < |B|$.

Следующее утверждение является одним из основных в теории множеств.

Т е о р е м а 7 (Кантор ч Бернштейн). Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f : A \to B_1$, $g : B \to A_1$ є некоторые биективные отображения множеств A, B на некоторые подмножества B_1, A_1 множеств B, A соответственно. Построим биективное отображение $h : A \to B$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$A \cap B = = \varnothing$. Пусть x є какой-нибудь элемент из множества A. Определим для него последовательность $\{x_n\}$ элементов из множества $A \cup B$ следующим образом. Положим $x_0 = x$. Если x_n уже определен, то при n четном положим $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ (если элемент $g^{-1}(x_n) \in B$ существует), а при n нечетном положим $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$ (если элемент $f^{-1}(x_n) \in A$ существует). Логически возможны два случая.

1°. При некотором n элемент x_n существует, а элемент x_{n+1} не существует, т. е. последовательность $\{x_n\}$ конечна. Это n назовем *порядком элемента* x.

2°. Элемент x_{n+1} существует для всякого $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ бесконечна. В этом случае назовем x *элементом бесконечного порядка.*

Разобьем множество A на три подмножества: $A_{\text{чет}}$ є всех элементов четного порядка, $A_{\text{неч}}$ є всех элементов нечетного порядка, A_∞ є всех элементов бесконечного порядка. Аналогичным образом разобьем множество B на три подмножества $B_{\text{чет}}$, $B_{\text{неч}}$, B_∞. Тогда $f(A_{\text{чет}}) = B_{\text{неч}}$, $f(A_\infty) = B_\infty$, $g^{-1}(A_{\text{неч}}) = B_{\text{чет}}$. Действительно, если $\{x_n\}$ є последовательность, соответствующая элементу $x \in A$, то элементу $y = f(x) \in B$ соответствует последовательность $\{y_n\}$,

$$y_n = \begin{cases} y, \text{если } n = 0, \\ x_{n-1}, \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

поэтому

$$f(x) \in \begin{cases} B_{\text{неч}}, \text{если } x \in A_{\text{чет}}, \\ B_\infty, \text{если } x \in A_\infty, \end{cases}$$

значит $f(A_{\text{чет}}) \subset B_{\text{неч}}$, $f(A_\infty) \subset B_\infty$. С другой стороны, если $\{y_n\}$ є последовательность, соответствующая элементу $y \in B$, то $y_1 = f^{-1}(y)$, и элементу $x = y_1 \in A$ соответствует последовательность $\{x_n\}$, $x_n = y_{n+1}$, поэтому

$$f^{-1}(y) \in \begin{cases} A_{\text{чет}}, \text{если } y \in B_{\text{неч}}, \\ A_\infty, \text{если } y \in B_\infty, \end{cases}$$

следовательно, $f^{-1}(B_{\text{неч}}) \subset A_{\text{чет}}$, $f^{-1}(B_\infty) \subset A_\infty$, т. е. $f(A_{\text{чет}}) \supset$ $\supset B_{\text{неч}}$, $f(A_\infty) \supset B_\infty$. Таким образом, $f(A_{\text{чет}}) = B_{\text{неч}}$, $f(A_\infty) = B_\infty$. Аналогичным образом для отображения $g : B \to A_1$ имеет место равенство $g(B_{\text{чет}}) = A_{\text{неч}}$, т. е. $g^{-1}(A_{\text{неч}}) = B_{\text{чет}}$. Зададим теперь биективное отображение $h : A \to B$ по правилу

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{если } x \in A_{\text{чет}} \cup A_\infty; \\ g^{-1}(x), \text{если } x \in A_{\text{неч}}. \end{cases}$$

■

Теорема Кантора – Бернштейна позволяет значительно упрощать доказательства равномощности множеств. Например, для доказательства равномощности круга и кольца достаточно выбрать в кольце какой-нибудь круг, а в круге – какое-нибудь кольцо и, учитывая, что любые два круга и любые два кольца биективны, воспользоваться теоремой Кантора – Бернштейна.

Упражнение 5. Покажите, что любые интервал (a, b), полуинтервал $[c, d)$ и отрезок $[g, h]$ равномощны.

Мы рассмотрели два класса бесконечных множеств: счетные множества и множества мощности континуума. Оказалось, что среди бесконечных множеств счетные являются «самыми маленькими». Следующая теорема показывает, что множества мощности континуума не «самые большие».

Теорема 8 (Кантор). Мощность всякого множества A меньше мощности множества 2^A всех его подмножеств.

Доказательство. Если $A = \varnothing$, то утверждение справедливо. Пусть $A \neq \varnothing$ и $C = \Big\{\{a\} : a \in A\Big\}$ – множество всех одноэлементных подмножеств множества A. Отображение $f : A \to C$, определенное равенством $f(a) = \{a\}$, $a \in A$, очевидно, является биекцией множества A на подмножество C множества 2^A. Покажем теперь, что $|A| \neq |2^A|$. Предположим противное. Пусть $g : A \to 2^A$ – биективное отображение.

Рассмотрим два подмножества множества A:

$$A_1 = \{a \in A : a \in g(a)\}, A_2 = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Множества A_1, A_2 не пусты: множество A_1 содержит элемент $a_* : g(a_*) = A$, а множество A_2 содержит элемент $a^* : g(a^*) = \varnothing$. Ясно, что $A_1 \cup A_2 = A$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Поскольку g є биекция, то существует элемент $a' \in A$ такой, что $g(a') = A_2$. Если $a' \in A_1$, то $a' \in g(a') = A_2$. Противоречие. Если же $a' \in A_2$, то $a \notin g(a') = A_2$. Противоречие.

■

Из теоремы 8 следует, что для любой мощности можно построить множество большей мощности, затем на его основе еще большей и т. д., получая таким образом неограниченную шкалу мощностей.

Рассмотрим задачу о зависимости мощности множества 2^M от мощности множества M, когда M конечно или счетно. В случае конечного множества задача сводится к упражнению из комбинаторики.

У п р а ж н е н и е 6. Покажите, что семейство 2^M всех подмножеств множества M, состоящего из n элементов, имеет 2^n элементов, т. е. $|2^M| = 2^{|M|}$.

Для случая счетного множества справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 9. Если M є счетное множество, то множество 2^M всех его подмножеств континуально.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что множество 2^M всех подмножеств множества $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ равномощно множеству Σ всех последовательностей из нулей и единиц. Зададим отображение $f : 2^M \to \Sigma$ по правилу: для каждого подмножества $A \in \in 2^M$ положим $f(A) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$, где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, \text{если } a_k \in A, \\ 0, \text{если } a_k \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что отображение f биективно, следовательно, множества 2^M и Σ равномощны.

Обозначим через Σ' множество всех последовательностей из множества Σ, которые имеют лишь конечное число нулей, т. е. все члены которых, начиная с некоторого номера, равны единице. Для всякого числа $k \in \mathbb{N}$ множество Σ'_k всех тех последовательностей из множества Σ', которые имеют ровно k нулей, счетно (покажите!). Поскольку $\Sigma' = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma'_k$, то согласно теореме 4 множество Σ' счетно и в силу теоремы 5 множество $\Sigma = (\Sigma \setminus \Sigma') \cup \Sigma'$ равномощно множеству $\Sigma \setminus \Sigma'$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что множество $\Sigma \setminus \Sigma'$ континуально. Покажем, что оно равномощно полуинтервалу $[0, 1)$.

Каждое число из полуинтервала $[0, 1)$ можно записать в виде бесконечной двоичной дроби $0,a_1a_2\dots a_n\dots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots$, где каждое a_i равно 0 или 1, причем не более чем двумя способами. Точнее, числа вида $\frac{p}{2^k}$, где $p, k \in \mathbb{N}$, $p < 2^k$, и только они допускают два представления: одно є с бесконечным числом нулей, а другое є с конечным числом нулей, т. е. с единицей в периоде. Таким образом, одно из двух представлений чисел вида $\frac{p}{2^k}$ имеет единицу в периоде. С другой стороны, всякое число из полуинтервала $[0, 1)$, двоичная запись которого имеет единицу в периоде, имеет вид $\frac{p}{2^k}$: $0,a_1a_2\dots a_n 11\dots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_n + 1}{2^n}$. Исключим из рассмотрения двоичные представления чисел, имеющие единицу в периоде, тогда каждое число из полуинтервала $[0, 1)$ будет иметь единственное двоичное представление.

Зададим теперь отображение $g : (\Sigma \setminus \Sigma') \to [0, 1)$ по правилу:

$$g((a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)) = 0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

Очевидно, что отображение g биективно, значит множества $\Sigma \setminus \Sigma'$ и $[0, 1)$ равномощны.

$\blacksquare$

5. Парадоксы теории множеств и аксиоматическая теория множеств. Кантор, располагая вместо определения понятия множества лишь описанием этого фундаментального понятия создаваемой им теории множеств, полагал, что непосредственная очевидность понятия множества не оставит свободы в его понимании. Однако развитие теории множеств довольно быстро опровергло его предположение. Уже в середине 1890-х годов в теории множеств были обнаружены противоречия (называемые парадоксами или антиномиями), основа которых была в различном толковании понятия множества. Первым в 1897 году был открыт парадокс Бурали ч Форти (Кантору он был известен еще в 1895 году), затем парадокс Кантора (1899 г.), парадокс Рассела (1902 г.) и еще целая серия парадоксов. Рассмотрим лишь два из этих парадоксов, наиболее простых для описания.

Парадокс Кантора. Рассмотрим множество M всех возможных множеств. Согласно теореме Кантора, мощность множества 2^M всех подмножеств множества M больше мощности множества M. С другой стороны, поскольку элементами множества 2^M являются множества, то $2^M \subset M$, значит мощность множества 2^M не превосходит мощности множества M. Противоречие.

Отметим, что множество M из парадокса Кантора, несмотря на простоту описания, обладает свойством, которым типичные множества не обладают: M, будучи множеством, является элементом множества M всех множеств, т. е. M содержит себя в качестве элемента. Множества с таким свойством служат основой для следующего парадокса.

Парадокс Рассела. Рассмотрим множество S, состоящее из всех тех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента. Обладает ли само множество S указанным свойством своих элементов? Предположим, что $S \in S$, тогда, согласно определению множества S, множество S не является элементом из S, т. е. $S \notin S$. Противоречие. Предположим теперь, что $S \notin S$, тогда, согласно определению множества S, множество S является своим элементом, т. е. $S \in S$. Противоречие. Таким образом, не может быть ни $S \in S$, ни $S \notin S$.

В 1919 году Рассел предложил также следующий популярный вариант этого парадокса.

Парадокс брадобрея. Парикмахер, живущий в некоторой деревне, бреет всех тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Бреет ли он самого себя? Если он себя бреет, то относится к тем жителям деревни, которые бреются сами, и, значит, брить себя не должен. Если же он себя не бреет, то относится к тем жителям деревни, которые не бреются сами, и, значит, должен себя брить.

Парадоксы теории множеств основаны на использовании «слишком больших множеств», они демонстрируют трудности, неизбежно связанные с попыткой построить теорию множеств на интуитивной основе, исходя из канторовской концепции множества, и обозначают проблему: как видоизменить теорию множеств, чтобы в ней не возникали парадоксы? Создатели теории множеств решали эту задачу разными способами.

Способ Кантора. Основатель теории множеств предложил запретить в теории множеств все действия и операции ведущие к парадоксам: разрешается работать с множествами, которые «встречаются в природе», и с множествами, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями.

Канторовскую теорию множеств в том виде, как она исторически возникла, называют «наивной» теорией множеств. Изложенная в этой главе теория множеств и есть канторовская «наивная» теория множеств; при решении вопроса, какие объекты являются множествами, мы, как и Кантор, руководствовались собственной интуицией. Мы старались держаться подальше от опасной черты, лишь один раз приблизившись к ней достаточно близко: рассматривая задачу классификации множеств, мы исключили из рассмотрения в качестве объекта теории множеств множество всех возможных множеств.

Аксиоматический способ. Этот способ позволяет построить строгую теорию множеств без определения понятия множества и преодолеть трудности, возникающие в «наивной» теории множеств из-за отсутствия определения этого понятия. Суть метода в следующем. Принципы «наивной» теории множеств выражаются в виде системы аксиом. Аксиомы не объясняют, что такое множество, а формулируют ключевые моменты «наивной» теории множеств, достаточные для построения теории. Теперь множество є это нечто, удовлетворяющее аксиомам. Система аксиом выбирается таким образом, чтобы ограничить понятие множества, сделав невозможным образование «слишком больших множеств», являющихся основой известных парадоксов, но, в то же время, чтобы на основе этой системы можно было построить теорию (аксиоматическую теорию множеств), результаты которой содержали бы результаты «наивной» теории множеств.

Впервые такая система аксиом была построена Э. Цермело в 1908 году, ее обозначают первой буквой фамилии создателя Z. В дальнейшем она была развита, усовершенствована и видоизменена рядом ученых. В системе Z оказалось невозможным формализовать некоторые разделы математики, и в 1922 году А. Френкель предложил пополнить систему Z еще одной аксиомой, названной им *аксиомой подстановки*. Пополненная система называется системой Цермело ч Френкеля и обозначается ZF. Теория ZF значительно сильнее теории Z, все обычные математические теоремы формализуются в ZF. Другую аксиоматику теории множеств указал Дж. Нейман. Он предложил ввести в теорию множеств новое первичное понятие «класса» и рассматривать два вида совокупностей: совокупности первого вида, называемые «множествами», могут не только содержать элементы, но и сами быть элементами других совокупностей, совокупности второго вида, называемые «классами», не могут служить элементами других совокупностей. В системе Неймана парадокс Кантора невозможен, поскольку совокупность всех «множеств» является «классом», но не является «множеством». Система Неймана была тщательно переработана П. Бернайсом и К. Гёделем и получила наименование NBG. Есть и другие, менее популярные аксиоматические теории множеств.

Чтобы читатель мог составить себе представление о системах аксиом теории множеств, приведем одну из форм системы ZF.

1. Аксиома объемности. Два множества A и B равны, если (и только если) они состоят из одних и тех же элементов.

2. Аксиома выделения. Для любого множества A и предиката $P(x)$, имеющего смысл для всех элементов множества A (т. е. такого, что для любого $x \in A$, $P(x)$ либо истинно, либо ложно), существует множество, состоящее в точности из тех элементов A, для которых $P(x)$ истинно.

3. Аксиома пары. Если a и b — различные объекты, то существует множество $\{a, b\}$, состоящее в точности из a и b.

4. Аксиома объединения. Для любого множества множеств A существует множество $\cup A$, состоящее в точности из всех элементов, принадлежащих элементам множества A.

5. Аксиома бесконечности. Существует по крайней мере одно бесконечное множество — множество $\{1, 2, 3, \dots\}$ натуральных чисел.

6. Аксиома множества-степени. Для любого множества A существует множество 2^A всех подмножеств A.

7. Аксиома выбора. Для любого непустого множества S попарно непересекающихся множеств существует некоторое множество C, содержащее в качестве своих элементов ровно по одному элементу из каждого элемента множества S.

8. Аксиома подстановки. Для каждого множества A и однозначной функции f, определенной на A, существует множество, содержащее в точности объекты $f(x)$, для $x \in A$.

6. Континуум-гипотеза. Одна из проблем теории множеств, называемая *континуум-гипотезой*, заслуживает отдельного внимания. Она сыграла важную роль не только в развитии теории множеств, но и математики в целом.

Из утверждения упражнения 5 для конечных множеств следует, что от множества M к множеству 2^M мощность претерпевает скачок $2^{|M|} - |M|$; таким образом, при $|M| > 1$ между мощностями $|M|$ и $2^{|M|}$ имеются промежуточные мощности $|M|+1, |M|+2, \ldots, 2^{|M|}-1$. Естественно предположить, что аналогичная ситуация будет иметь место и в том случае, когда M счетно. Поскольку в данном случае множество 2^M континуально (теорема 9), то предположение можно сформулировать следующим образом: существует множество, мощность которого является промежуточной между мощностями счетного и континуального множеств. Однако попытки построить множество промежуточной мощности оказались безуспешными, и в 1878 году Кантор сформулировал знаменитую *континуум-гипотезу*: между мощностями счетного и континуального множеств нет промежуточных мощностей. Решение этой проблемы не удавалось найти многие годы. В начале 20 века многие математики пришли к убеждению, что проблема не может быть решена традиционными средствами теории множеств. Эта точка зрения была подтверждена развитием математики. Решение (и метод, и результат) проблемы оказалось нестандартным и стало возможным лишь после того, как была создана аксиоматическая теория множеств и формализованы логические средства вывода. Континуум-гипотеза была рассмотрена в аксиоматической теории множеств; там стало возможным точно поставить, а затем и решить вопрос о ее неразрешимости. В 1939 году К. Гёдель показал, что если система аксиом ZF непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после добавления к ней континуум-гипотезы и, значит, континуум-гипотезу нельзя опровергнуть в ZF теории. В 1963 году П. Коэн показал, что если система аксиом ZF непротиворечива, то она остается непротиворечива и после добавления к ней отрицания континуум-гипотезы, значит континуум-гипотезу нельзя вывести из аксиом системы ZF. Континуум-гипотезу или ее отрицание можно присоединять к аксиомам теории множеств є при этом получаются разные теории множеств, и с точки зрения математики ни одна из них не лучше другой. Вопрос же о том, какая из этих теорий больше отвечает реальному физическому миру, скорее вопрос физики, чем математики.

Упражнения

1. Пусть A и B є конечные множества. Покажите, что $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. Докажите, что множество всех интервалов с рациональными концами действительной прямой $\mathbb{R}$ счетно.

3. Докажите, что всякое семейство попарно непересекающихся интервалов конечно или счетно.

4. Докажите, что множество всех точек плоскости, имеющих рациональные координаты, счетно.

5. Докажите, что множество всех *конечных* подмножеств счетного множества счетно.

6. Докажите, что если множества $A \setminus B$, $B \setminus A$ равномощны, то и множества A, B равномощны.

7. Укажите конкретные биекции для любой пары из следующих множеств $(0,1), (0,1], [0,1], (0,+\infty), [0,+\infty), (-\infty,+\infty)$.

8. Покажите, что если $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и A имеет мощность континуума, то по крайней мере одно из множеств A_n имеет мощность континуума.

Литература

[1] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. ч М. : Наука, 1977. ч 368 с.

[2] Брудно А.Л. Теория функций действительного переменного / А.Л. Брудно. ч М. : Наука : Глав. ред. физ.-мат. лит., 1971. ч 120 с.

[3] Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Начала теории множеств / Н.К. Верещагин, А. Шень. ч 2-е изд., испр. ч М. : МЦНМО, 2002. ч 128 с.

[4] Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин. ч 2-е изд., испр. и доп. ч М. : Наука, 1969. ч 160 с.

[5] Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру / Л.А. Калужнин. ч М. : Наука, 1973. ч 448 с.

[6] Клини С.К. Математическая логика / С.К. Клини ; под ред. Г.Е. Минца ; пер. с англ. Ю.А. Гастева. ч М. : Мир, 1973. ч 480 с.

[7] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. ч 5-е изд. ч М. : Наука, 1981. ч 544 с.

[8] Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу : общая теория множеств и функций : учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.С. Очан. ч М. : Просвещение, 1981. ч 271 с.

Содержание

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Элементы теории множеств

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители: **Близняков** Николай Михайлович

Редактор Бунина Т.Д