Exercici 1 (3 punts) Digueu si les següents afirmacions són certes o no.

(a) (0.5 punts) Donats n enters, cadascun amb un valor màxim de n^{100}, es poden ordenar en temps lineal.

Sol. CERT. Recordeu que la complexitat de RADIX és $O((n+b)d)$ on d és en nombre de digits per cada enter, b és la base per a representar els enters, i n és el nombre d'enters que ve donat pel problema. Notem que com els enters van de 0 fins a $n^{100}-1$, tenim $d = \log_b n$. Volem fer que $d = \Theta(1)$ per tant necessitem $b = n$, el que donara una complexitat de $200n = \Theta(n)$. Si tenim el cas n^{100} restem 1 del valor de cada enter , estarem al cas previ i quan els tenim ordenats, sumem 1 a cada enter.

(b) (0.5 punts) Per a $r > 0$ definim un r-camí com un camí en què totes les arestes del camí tenen pes $< r$. Si G conté un r-camí del node s al node t, llavors tot MST de G ha de contenir un r-camí de s a t.

Sol. CERT. Supongamos que es cierta. Si no hay un r-camino en el MST de G al menos una de las aristas e en el camino de s a t en el MST tiene peso mayor que r. Si la quitamos creamos dos árboles, uno contiene s y el otro t. Además sabemos que hay un r-camino de s a t, por lo tanto entre las aristas que conectan los dos árboles hay una con peso $\leq r$, añadiendola tenemos un árbol de expansión con peso menor. Lo que es una contradicción..

(c) (0.5 punts) Donat un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}^+$, l'algorisme de Dijkstra i l'algorisme de Bellman-Ford poden produir diferents arbres de camins mínims, malgrat que la mínima distancia entre dos vèrtexs qualsevol serà la mateixa.

Sol. CERT. Mirar les transparencies.

(d) (0.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}^+$ i siguin $c, a \in V$. Aleshores el camí més curt de c a a no canvia quan incrementem en 1 el pes de totes els arcs.

Sol. FALS. Considereu un graf amb la aresta (c, a) amb pes 4 i un camí de longitud 3 de c a a amb totes les arestes amb pes 1 (total 3). A l'incrementar en 1, tenim el camí d'una aresta amb pes 5 i el de tres amb pes total 6.

(e) (0.5 punts) El temps per tal de resoldre un problema de programació dinàmica sempre és $\Theta(k)$, on k és el nombre de subproblemes diferents del problema.

Sol. FALS. Hem vist molts problemes que requereixen cost no constant per subproblema.

(f) (0.5 punts) Si totes les capacitats a una xarxa de flux són múltiples de 5, aleshores el flux màxim també tindrà un valor que serà un múltiple de 5.

Sol. CERT. L'algorisme de Ford-Fulkerson incrementa el flux per la capacitat mínima del camí al graf residual. Com que totes les capacitats son múltiples de 5, aquesta també ho es i el valor del flux resultant també ho serà.