

# Transició de fase en propietats de grafs

GRAU A Q1 CURS 2021-2022

Departament de Ciències de la Computació  
Universitat Politècnica de Catalunya

## Resum

Aquest projecte té com a objectiu un estudi experimental de la transició de fase de propietats de grafs en processos de percolació.

El projecte es farà en grups de 3 persones, formats (en la mesura del possible) per estudiants matriculats al mateix subgrup de problemes. Per formalitzar els grups us heu d'apuntar-vos al fitxer compartit *Grups de projecte 11* o *Grups de projecte 12* al directori compartit de cada grup de problemes. Si us plau, feu-lo abans del 26 de febrer.

El lliurament dels materials demanats a aquest projecte farà en línia via **Racó FIB**, teniu temps fins les 23:59 hores del dia **20 de març de 2022**.

En qualsevol moment durant el procés de correcció podríeu ser contactats per part d'algun professor de l'assignatura per tal de resoldre dubtes o fer aclariments sobre el vostre treball.

Totes les comunicacions referents al projecte es duran a terme mitjançant el canal de Slack #projecte.

## 1 Introducció

L'objectiu d'aquesta pràctica és per una part portar a terme un estudi experimental de la transició de fase per diferents propietats de grafs quan les arestes i/o els nodes poden fallar. Per un altra part obtenir un coneixement de diferents models de grafs aleatoris d'ús habitual en els estudis experimentals d'algorismes per a problemes sobre grafs.

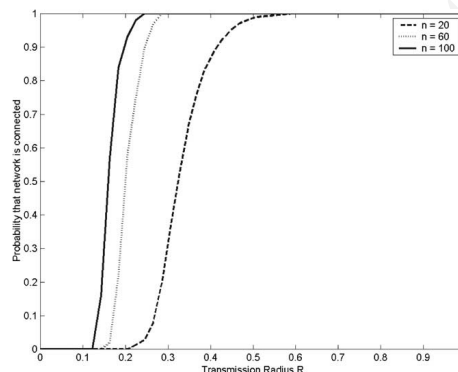
Les fallides permanents a un graf es poden modelitzar de diferents maneres. En aquest projecte podeu assumir que es corresponen a un senzill procés aleatori de percolació per nodes (*site percolation*) o per arestes (*bond percolation*). El model de percolació a un graf està definit per un paràmetre  $q \in [0, 1]$  que representa la probabilitat de no fallida. En un procés de percolació per nodes a un graf  $G$  el paràmetre  $q$  representa la probabilitat que un node no falli. Així, a l'aplicar el procés aleatori de percolació obtenim un graf  $G_q$ . En aquest procés decidim, per a cada node  $u \in V(G)$ , de forma independent, si el node  $u$  continua al graf (amb probabilitat  $q$ ) o si esborrem  $u$  (amb probabilitat  $1 - q$ ). En un procés de percolació per arestes el paràmetre representa la probabilitat de fallida d'una aresta. En aquest cas, per a cada aresta  $e \in E$ , mantindrem  $e$  amb probabilitat  $q$  i la traurem amb probabilitat  $1 - q$ . Observeu que en el cas de percolació per arestes  $V(G_q) = V(G)$ .

Una vegada tenim fixat un procés de percolació volem estudiar, per a un graf o per a una família de grafs, els valors de  $q$  pels que podem esperar que certa propietat  $\Pi$  es doni (o no) amb alta probabilitat després que els grafs hagin estat percolats. En aquest sentit, els grafs  $G_q$  que podem obtenir són el resultat de l'experiment i formen l'espai de probabilitat. Per moltes propietats  $\Pi$  es pot trobar un valor  $q_\Pi$  de manera que, amb alta probabilitat, els grafs  $G_q$  amb  $q > q_\Pi$  verifiquen la propietat  $\Pi$ , metre que, amb alta probabilitat, els grafs  $G_q$  amb  $q < q_\Pi$  no verifiquen  $\Pi$ . Quan es dona aquest tipus de comportament es diu que la propietat  $\Pi$  presenta una transició de fase al voltant de  $q_\Pi$ .

Una descripció exacta d'un procés de *site percolation* a una graella quadrada  $n \times n$  el podeu trobar a partir de la transparència 45 del material de suport del llibre *Algorithms* [1] (<https://www.cs.cmu.edu/~sregehr/teaching/2019/04-2020/45.pdf>).

([//algs4.cs.princeton.edu/lectures/keynote/15UnionFind.pdf](http://algs4.cs.princeton.edu/lectures/keynote/15UnionFind.pdf)). En concret s'estudia la transició de fase a la graella, sota percolació de nodes, de la propietat d'existència d'una connexió entre els nodes de la part de dalt de la graella amb els nodes de la part de sota de la graella. En aquest cas se sap que la transició de fase per a graelles grans apareix al voltant de 0.593.

En el cas de models parametritzats de grafs aleatoris la transició de fase estudia la variabilitat d'una propietat amb relació al valor (o valors) dels paràmetres que defineixen el graf. Com a exemple, considereu la propietat de la connectivitat de grafs (és a dir, que un graf sigui o no connex) aplicada a grafs aleatoris. Considereu que disposem d'una funció  $\text{Graf}(n, p)$  que permet generar un graf aleatori de  $n$  vèrtexs segons un determinat model parametritzat per la probabilitat  $p$ . Per a cada valor d'aquest paràmetre del model, i fent un nombre raonable de crides, podem estimar la probabilitat que un graf amb  $n$  vèrtexs del model sigui connex. La transició de fase, si n'hi ha, ens mostraria un valor del paràmetre  $p$  on la probabilitat de ser connex, per valors  $p' < p$ , és radicalment diferent de la de valors  $p' > p$ . Com podeu pensar, la transició de fase no sempre es dona per valors de  $n$  petits i per això cal fer experiments que facin créixer el valor de  $n$  fins a tenir una certa evidència de l'existència de la transició de fase o la constatació que no apareix. A la figura de sota teniu una imatge que mostraria una transició de fase.



## 2 Objectius

L'objectiu del projecte és analitzar experimentalment l'existència o no de transició de fase en processos de percolació en grafs. En concret analitzar la transició de fase respecte de dues propietats. La primera que el graf percolat sigui connex i la segona que al graf percolat totes les components connexes siguin complexes. Entenent que una component connexa no és complexa si és un arbre o un graf unicíclic. D'altra banda volem que coneixeu diferents models de grafs aleatoris i que sigueu capaços de fer-los servir en un estudi experimental.

### 2.1 Codis a desenvolupar

El desenvolupament del projecte requereix que desenvolueu codi per resoldre els següents problemes:

- Donat un graf  $G$ , obtenir les seves components connexes. Aquest programa l'haureu d'adaptar o modificar per tal de detectar altres propietats de les components connexes.
- Generar grafs aleatoris en els models Binomial random graphs ( $G(n, p)$ ) i Random geometric graphs per punts en un espai amb dues dimensions ( $G(n, r)$ ) que, fixada la mida del graf, només depenen d'un paràmetre.

- (c) Simular el procés de percolació amb paràmetre  $q$  tant per percolació de nodes com d'arestes, per un graf donat.

## 2.2 Experimentació

Heu de fer l'estudi de les dues propietats sobre tres famílies de grafs: graelles  $n \times n$  i en els models  $G(n, p)$  i  $G(n, r)$ , per valors de  $p$  i  $r$  que garanteixin que el graf generat és connex.

**Graelles:** Aquests grafs estan parametritzats per  $n$ . Per a un valor fixat de  $n$ , heu de fer un estudi de la probabilitat que es doni o no la propietat sota estudi, en funció del valor de  $q$ . Podeu començar amb valors petits de  $n$  i incrementar-los fins que es vegi clarament la transició de fase o fins que  $n$  sigui prou gran com per a poder garantir que no es dona.

$G(n, p)$ : Aquest model aleatori de grafs està definit per dos paràmetres. Heu de seleccionar valors adients de  $p$  per tal de garantir que, amb alta probabilitat, el graf generat és connex. Per cadascú dels valors de  $p$  que trieu, heu de fer un estudi, semblant al del cas de les graelles, de la transició de fase per valors grans de  $n$ .

$G(n, r)$ : Aquest model aleatori de grafs també està definit per dos paràmetres. De nou heu de seleccionar valors adients de  $p$  per tal de garantir que, amb alta probabilitat, el graf generat és connex. Per cadascun dels valors de  $p$  que trieu, heu de fer un estudi, semblant al del cas previ, de la transició de fase per valors grans de  $n$ .

## 3 Detalls de l'entrega

El nivell de sofisticació i esforç dedicat a la pràctica és opcional i es tindrà en compte a l'hora d'avaluar-la. Tingueu en compte que la documentació entregada ens ha de permetre valorar el nivell d'assoliment de la competència transversal que hem d'avaluar: **Capacitat d'autoaprenentatge**. En el context del projecte hi ha molts aspectes rellevants relacionats amb aquesta competència: des de l'estudi de noves tècniques i models algorísmics, de models de grafs aleatoris, fins al disseny i anàlisi d'experiments, i la documentació d'aquests tipus de treballs de recerca. La qualificació final del projecte reflectirà la qualitat del vostre aprenentatge, de l'experimentació feta i de la documentació. La qualitat del codi entregat (programes) es pressuposa i representarà una part molt petita de la qualificació final.

La documentació ha de recollir i presentar la feina feta, les fonts que s'han consultat, el que heu après i els resultats de l'experimentació. En particular és molt important que reflecteixi de forma succinta el que heu après. Si no es compleix aquesta condició, la qualificació final del projecte reflectirà la qualitat de la presentació i no es tindrà en consideració la resta de material lliurat.

Podeu fer els vostres programes en el llenguatge de programació que més us agradi, sempre que mantingueu l'estructura de fitxers demanada a l'entrega i siguin prou eficients com per portar a terme execucions amb grafs amb un gran nombre de nodes.

### Què cal lliurar

Cal lliurar una carpeta comprimida (.zip) que contingui:

- Una carpeta amb totes les fonts necessàries per compilar i executar el vostre projecte. S'han d'incloure les instruccions per a la compilació i execució, així com els conjunts de dades utilitzats i/o els programes per generar-los.

- Un informe, en format PDF, sobre la feina realitzada. Aquest informe ha de documentar acuradament els algorismes desenvolupats, els criteris fets servir per dissenyar i portar a terme els experiments duts a terme, i les conclusions extretes. La qualitat d'aquest informe és un factor molt important per a la qualificació final del projecte. També és interessant que indiqueu altres idees que hàgheu provat, encara que no hagin donat bons resultats, o d'altres que no heu explorat. El document ha d'incloure les referències adients.

## 4 Alguns punters

Aquest document és intencionadament vague i s'espera que investigueu pel vostre compte totes les tècniques algorísmiques i models que es mencionen aquí i que, per manca de temps, no veiem aquest quadrimestre a l'assignatura de GRAU-A. Per tant, a més d'analitzar i experimentar amb diferents famílies de grafs, processos de percolació, grafs aleatoris i propietats, haureu de documentar les fonts d'informació, les decisions preses i, especialment, el disseny d'experiments que els hi donen suport. Per qualsevol font que feu servir cal que proporcioneu una referència adient, l'adreça web (si cal), les modificacions i/o simplificacions fetes en les vostres implementacions i/o la selecció dels paràmetres per a l'estudi en els models de grafs aleatoris. A mode d'ajuda inicial (i a part dels llibres [?, ?] de la bibliografia bàsica de l'assignatura), i les entrades a la Wikipedia corresponents als model aleatoris de grafs, us mencionem aquí un parell de referències que us poden ser d'utilitat per començar la vostra recerca:

## Referències

- [1] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms*. Addison-Wesley, 4th edition, 2011. <https://algs4.cs.princeton.edu/>
- [2] M.E.J. Newman. *Networks. An Introduction*. Oxford University Press, 2010.