

Algorísmia QP 2018–2019

Examen final

11 de Juny de 2019

Durada: 3h

Instruccions generals:

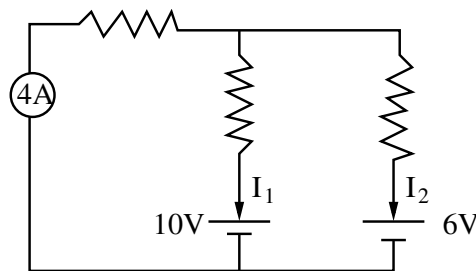
- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (4 punts)

- (a) (0.5 punts) Utilitzant l'algorisme d'ordenació RADIX, es poden ordenar en temps $O(n \lg n \lg n)$, n enters diferents amb valors entre 1 i $n^{\lg n}$?
- (b) (0.5 punts) Si ens donen un vector A no ordenat, amb n elements diferents i volem trobar $n/2$ elements d' A que tinguin la mateixa mediana que A , qualsevol algorisme que utilitzem tindrà $\omega(n)$ passos (i.e. no serà lineal).
- (c) (0.5 punts) Donat un dígraf $\vec{G} = (V, \vec{E}, w)$ amb pesos, i un vèrtex $s \in V$, és cert que l'arbre de camins mínims arrelat a s ha de ser necessàriament un MST de \vec{G} ?
- (d) (0.5 punts) Si una iteració de Ford-Fulkerson envia 1 unitat de flux a través de l'aresta (u, v) aleshores, en el flux màxim en finalitzar l'execució, el flux a través de (u, v) serà ≥ 1 ?

- (e) (0.5 punts) Considereu una xarxa de comunicació formada per n servidors que modelitzem com un graf $G = (V, E)$ no dirigit amb $|V| = n$ vèrtexs i $|E| = m$ arestes. Per a cada $(i, j) \in E$, sigui $b_{ij} = b_{ji}$ l'amplada de banda (bandwidth) entre i i j . Donat un camí P de $v \rightarrow u$ definim l'amplada de banda del camí P com el valor de l'amplada de banda de l'aresta a P amb mínima amplada de banda. Donats dos vèrtexs fixats s i t doneu un algorisme per a trobar el camí amb màxima amplada de banda entre s i t . Doneu la complexitat del vostre algorisme.

- (f) (0.5 punts) Volem carregar dues bateries de 10 i 6 volts, respectivament. Per fer això dissenyem un circuit com el de la següent figura:



Volem determinar les intensitats de corrent I_1 i I_2 que maximitzen la potència total del circuit. Cal tenir en compte que si donem més de 3 ampers d'intensitat a cada bateria, les cremarem, i que el sistema pot mantenir una intensitat total de 4 ampers com a màxim. Finalment, per tal d'assegurar que cap bateria es descarrega, necessitem assegurar que les intensitats I_1 i I_2 són sempre més grans o iguals a 0.

Enuncieu el problema com un sistema de programació lineal, on maximitzeu una funció objectiu amb unes restriccions. Dibuixeu el polítop resultant i la funció objectiu. Quina serà la una solució òptima? (Recordeu la potència $P = V \cdot I$ i que, a un circuit muntat en paral·lel, la intensitat resultant és la suma de les intensitats a cada línia).

- (g) (1 punt) Tenim 20 elements i fem un **MakeSet**. Suposem que els conjunts resultants estan enumerats de 0 fins a 19. Executem el següent codi:

```
for  $i = 0$  to 14 do  
    union(find( $i$ ), find( $i + 5$ ))  
end for  
for  $i = 15$  to 17 do  
    union(find( $i$ ), find( $i + 2$ ))  
end for
```

Dibuixeu la seqüència d'arbres fins a arribar al resultat final (dos arbres) quan la implementació utilitza unió per rang amb compressió de camins. Doneu el rang dels nusos al dos arbres resultants.

Exercici 2 (2 punts) – Traductors –

El centre de documentació de la UE gestiona el procés de traducció de documents pels membres del parlament europeu. En total han de treballar amb un conjunt de n idiomes. El centre ha de gestionar la traducció de documents escrits en un idioma a tota la resta d'idiomes.

Per fer les traduccions poden contractar traductors. Cada traductor està especialitzat en dos idiomes diferents; és a dir, cada traductor pot traduir un text en un dels dos idiomes que domina a l'altre, i viceversa. Cada traductor té un cost de contractació no negatiu (alguns poden treballar gratis).

Malauradament, el pressupost per a traduccions és massa petit per contractar un traductor per a cada parell d'idiomes. Per tal d'optimitzar la despesa, n'hi hauria prou en establir cadenes de traductors; per exemple: un traductor anglès \leftrightarrow català i un català \leftrightarrow francès, permetria traduir un text de l'anglès al francès, i del francès a l'anglès. Així, l'objectiu és contractar un conjunt de traductors que permetessin la traducció entre tots els parells dels n idiomes de la UE, amb cost total de contractació mínim.

El matemàtic del centre els hi ha suggerit que ho poden modelitzar com un problema en un graf amb pesos $G = (V, E, w)$. G té un node $v \in V$ per a cada idioma i una aresta $(u, v) \in E$ per a cada traductor (entre els idiomes u i v de la seva especialització); el pes de cada aresta seria el cost de contractació del traductor en qüestió. En aquest model, un subconjunt de traductors $S \subseteq E$ permet portar a terme la feina si al subgraf $G_s = (V, S)$ hi ha un camí entre tot parell de vèrtexs $u, v \in V$; en aquest cas direm que S és una *selecció vàlida*. Aleshores, d'entre totes les seleccions vàlides han de triar una amb cost mínim.

- (a) Demostreu que quan S és una selecció vàlida de cost mínim, $G_s = (V, S)$ no té cicles.
- (b) Proporcioneu un algorisme eficient per a resoldre el problema. Justifiqueu la seva correccesa i el seu cost.

Exercici 3 (2 punts) – Copistes –

Abans de la invenció de la impremta, era molt difícil fer una còpia d'un llibre. Tots els continguts havien de ser redactats a mà pels anomenats copistes. A un copista se li donava un llibre i, després de diversos mesos de treball, tornava una còpia del mateix. El temps que trigava era, molt probablement, proporcional al nombre de pàgines del llibre. La feina devia ser prou avorrida i per això podríem assumir que tots els copistes d'un monestir trigaven el mateix temps a copiar una pàgina.

El monestir de Pedralbes va decidir fer una còpia dels llibres de la seva biblioteca i, donat que no tenen copistes propis, han d'enviar els llibres a un altre monestir que sí que en tingui.

Podeu assumir que hi ha un total de n llibres per copiar i que el llibre i -ésim té p_i pàgines. A més, els llibres tenen un ordre predeterminat. Una vegada triat el monestir on es faran les còpies, s'hauran de repartir els llibres entre el seus m copistes. Cada llibre només se li pot assignar a un copista, i a cada copista només se li pot assignar una seqüència contigua de llibres (d'acord amb l'ordre inicial del llibres). Amb aquesta forma d'assignar llibres a copistes es minimitza el temps de buidar i tornar a omplir la biblioteca. El temps necessari per fer la còpia total de la biblioteca queda determinat pel temps que necessita el darrer copista que finalitza la còpia dels llibres que se li han assignat.

El que no tenen molt clar els encarregats de la biblioteca és com fer l'assignació de llibres a copistes per garantir que el temps de còpia total de la biblioteca sigui el més curt possible. Ajudeu a aquests monjos i dissenyeu un algorisme eficient per a trobar l'assignació òptima dels n llibres als m copistes del monestir. Podeu assumir que coneixeu el temps t_p que necessita cadascun dels copistes per a copiar una pàgina.

Exercici 4 (2 punts) – Congrés –

Suposeu que esteu organitzant un congrés on els investigadors presentin els articles que han escrit. Els investigadors que vulguin presentar un article envien un document als organitzadors de la conferència. Els organitzadors de la conferència tenen accés a un comitè de revisors que estan disposats a llegir-ne com a molt R articles cadascun. Tots els articles enviats han de ser revisat per, com a mínim, A revisors.

El congrés té declarats un conjunt de temes. Cada enviament té assignat un tema concret i cada revisor té declarada una especialització per a un conjunt de temes. Els articles sobre un tema determinat només es revisen per part dels revisors experts en aquell tema.

Els organitzadors del congrés han de decidir (sempre que es pugui) quins avaluadors revisaran cadascun dels articles o, equivalentment, quins articles seran revisats per cada revisor. Es demana:

Proporcioneu un algorisme eficient per a resoldre aquest problema d'assignació.