

Cognoms, Nom

Data

---

## Algorísmia QP 2018–2019

**Examen parcial**

**10 d'Abril de 2019**

Durada: 1h 45m

---

Instruccions generals:

- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, Ex 2 i Ex 3).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

### Exercici 1 (4 punts)

- (a) (0.5 punts) Es poden ordenar  $n$  enters amb valor entre 0 i  $n^3 - 1$  amb temps lineal.

Utilitzarem Radix i per cada ordenació de dígits counting sort.  
Si cada dígit pren un valor entre 0 i  $n-1$  la base que estem usant és  $n$ , i per tant, la longitud és  $\log_n(n^3-1) \approx \log_n(n^3) = 3$ .  
Per tant, el cost total és  $O((n+1) \times 3) = O((n+1) \times 3) = O(6n) = O(n)$

- (b) (0.75 punts) Com sabeu, l'algorisme de Quicksort pot trigar  $O(n^2)$  en ordenar un vector  $A[1, \dots, n]$  (si els elements ja estan ordenats). Podríeu fer una petita modificació de Quicksort, de manera que el temps pitjor sigui com a màxim  $O(n \lg n)$ ?

Mediana  $\rightarrow$  Rivest-Floyd

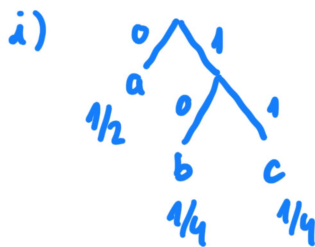
- (c) (0.5 punts) Suposem que implementem una seqüència d' $n$  operacions sobre una estructura de dades on la  $i$ -èsima operació té un cost  $c_i = i$ , si  $i$  és una potència de 2, altrament el cost és 1. Utilitzeu el mètode de l'estalviador (accounting) per calcular el cost amortitzat per operació. Per exemple, el si  $1 \leq i \leq 5$  els valors de  $c_i$ : 1, 2, 1, 4, 1.

1, 1, 1, 2, 4

- (d) (0.5 punts) Donat un dígraf fortament connex  $\vec{G} = (V, \vec{E})$ ,  $w : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , volem trobar el MST a  $\vec{G}$  (i.e. un arbre d'expansió, arrelat a un vèrtex  $v \in V$  amb camins dirigits de  $v$  a tots els altres nodes), on la suma dels pesos de les arestes de l'arbre sigui minimal respecte a qualsevol altre arbre d'expansió a  $\vec{G}$ . És cert que es pot adaptar l'algorisme de Jarník-Prim per a trobar el MST, al problema de trobar un MST arrelat a un dígraf dirigit?. Si la resposta és afirmativa, doneu un argument informal per a justificar-ne la certesa, altrament doneu un contraexemple.

- (e) (0.75 punts) Tenim un text  $S$  que utilitza un alfabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  on les freqüències amb què apareix cada símbol són respectivament  $f_a, f_b, f_c$ . Volem comprimir  $S$  codificant  $\Sigma$  amb l'algorisme de Huffman. Per a cadascun dels casos a sota, digueu quins serien els valors de  $f_a, f_b, f_c$  que ens donarien la codificació proposada, alternativament expliqueu per què el codi proposat no es pot obtenir.

- i.  $\{0, 10, 11\}$
- ii.  $\{0, 1, 11\}$
- iii.  $\{10, 01, 00\}$



$$1/2 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$



Si rebem 11 no sabem si està tracta de dues b's o de una c

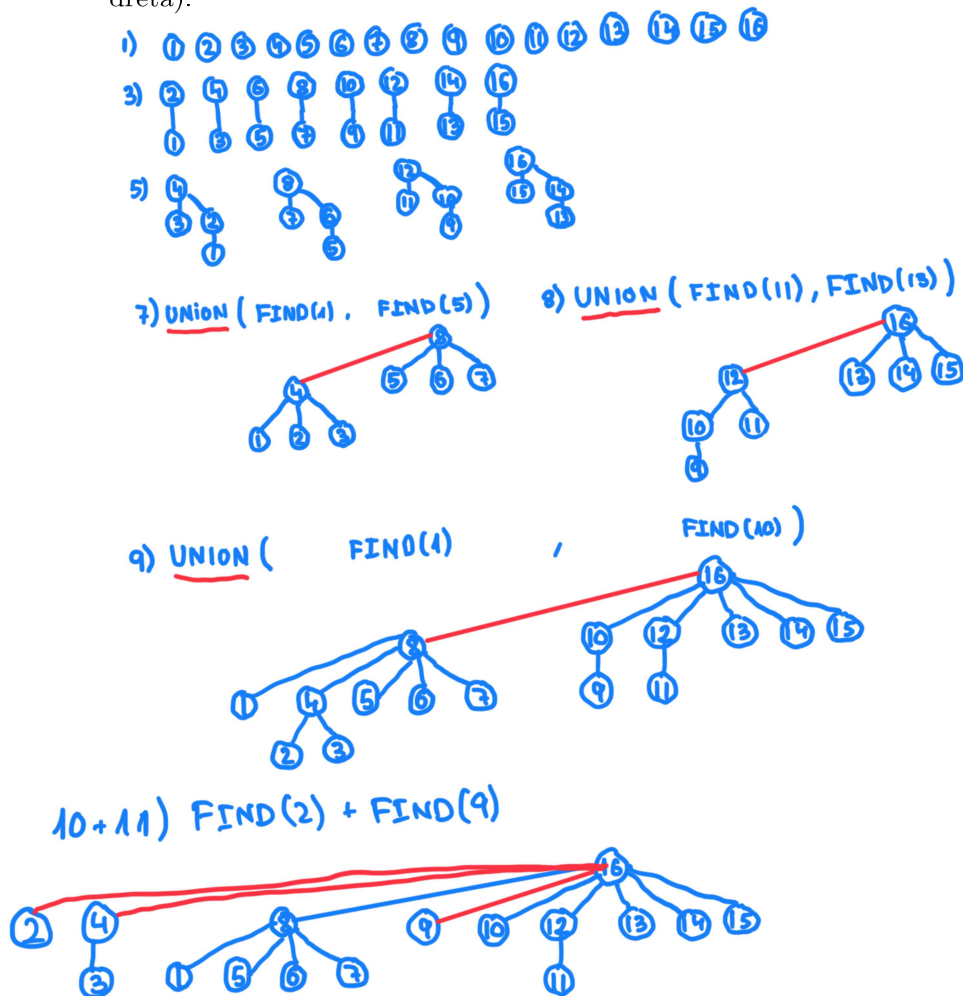


Si rebem un sol 1 no fem referència a cap símbol de l'alfabet

(f) (1 punt) Sigui donat un conjunt  $S = \{1, 2, \dots, 16\}$ . Doneu l'estructura de dades després dels passos 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10 i l'arbre final resultant del pas 11, quan apliquem union-find al conjunt  $S$  implementat amb les heurístiques d'unió per rang i compressió de camí:

- (1) de  $i = 1$  fins 16  
    **MAKESET** ( $x_i$ )
- (3) de  $i = 1$  fins 15 by 2  
    **UNION** ( $x_i, x_{i+1}$ )
- (5) de  $i = 1$  fins 13 by 4  
    **UNION** ( $x_i, x_{i+2}$ )
- (7) **UNION** ( $x_1, x_5$ )
- (8) **UNION** ( $x_{11}, x_{13}$ )
- (9) **UNION** ( $x_1, x_{10}$ )
- (10) **FIND** ( $x_2$ )
- (11) **FIND** ( $x_9$ )

Digueu quin es el rang de l'arrel i de cada vèrtex, a l'arbre final. (Quan feu UNION de dos arbres que tenen l'arrel amb el mateix rang, pengeu l'arbre esquerra de l'arbre de la dreta).



### Exercici 2 (3 punts) (Agenda)

A la vostra agenda teniu una llista  $L$  de totes les tasques que heu de completar en el dia de avui. Per a cada tasca  $i \in L$  s'especifica la durada  $d_i \in \mathbb{N}$  que indica el temps necessari per a completar-la i un factor de penalització  $p_i \in \mathbb{Z}^+$  que n'agreuja el retard. Heu de determinar en quin ordre realitzar totes les tasques per obtenir el resultat que menys penalització total acumuli.

Tingueu en compte que:

- en un instant de temps només podeu realitzar una única tasca,
- una vegada comenceu a fer una tasca, heu de continuar-la fins a finalitzar-la, i
- s'han de completar totes les tasques.

El criteri d'optimització és la penalització total que s'acumula. La penalització real associada a una tasca  $i \in L$  és el temps de finalització  $t_i$  de la seva realització, multiplicat per la seva penalització  $p_i$ . El temps de finalització  $t_i$  es correspon al temps transcorregut des de l'inici de la jornada laboral (és a dir, des de l'instant de temps 0) fins al moment en que s'ha finalitzat la tasca.<sup>1</sup>

Considereu l'algorisme voraç que programa les tasques en ordre decreixent de factor de penalització  $p_i$ . Determineu si aquest algoritme resol el problema. En cas que no ho faci, proporcioneu un algorisme (tant eficient com pogueu) per resoldre'l.

### Exercici 3 (3 punts) (Estiu als jardins de la UPC).

Per tal de incrementar els ingressos, el Gerent de la UPC ha decidit llogar els jardins de Torre Girona (i part del Campus Nord) per realitzar diferents activitats d'esbarjo durant la temporada d'estiu. Després d'una crida a propostes d'activitats, la UPC ha rebut una gran quantitat de sol·licituds. Cada sol·licitud indica la data i l'hora, d'inici i de fi de l'activitat, i el tipus de recursos que es necessiten per fer-la. Per a cadascuna de les sol·licituds, el servei d'Economia de la UPC ha calculat el benefici que s'obtindria si es fés l'activitat. Per tal d'evitar problemes, en aquesta primera temporada, la UPC ha decidit llogar els espais en exclusiva a les activitats. Això implica que no es poden dur a terme més d'una activitat al mateix temps. UPCNet necessita un programa que permeti obtenir una selecció d'activitats que es puguin planificar en exclusiva i que proporcionin el màxim benefici possible. Proporcioneu un algorisme, tant eficient com us sigui possible, per a resoldre el problema de UPCNet.

---

<sup>1</sup>Observeu que, segons les restriccions del problema, la realització d'una tasca  $i \in L$  amb temps de finalització  $t_i$  haurà començat a l'instant  $t_i - d_i$ .