Cognoms, Nom Data

Algorísmia QT 2019–2020

Examen final **13 de Novembre de 2019**

Durada: 3h

Instruccions generals:

- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (4 punts)

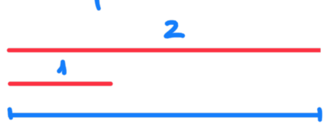
(a) **(0.5 punts)** Antoni escull un enter entre 1 i 10^6, Bartomeu ha d'endevinar quin és l'enter escollit fent el mínim nombre de preguntes que tinguin com a resposta (sí/no). Doneu una fita superior a aquest mínim nombre de preguntes.

Anem preguntant si el nombre és més gran o més petit que la mediana, en el cas de ser igual, ja estaria, en el pitjor cas $\Rightarrow O(\log_2 10^6)$

(b) **(0.5 punts)** Computar la mediana de n elements, utilitzant comparacions te un cost $\Omega(n \lg n)$?

(c) **(0.5 punts)** Hem vist a classe, que en general el problema de la planificació de tasques amb pesos, per obtenir un conjunt compatible amb màxim pes, no té sempre solució voraç. Es cert, que quan els pesos de les tasques son únicament valors en $\{1, 2\}$, es pot resoldre el problema utilitzant l'algorisme voraç explicat a classe per el problema sense pesos?

Selecció per temps de finalització en ordre creixent



L'algorisme escolliria la tasca amb pes 1, però l'òptima és l'altre.

Per tant, no resoldria el problema

(d) **(0.5 punts)** A l'algorisme de programació dinàmica per a trobar les distàncies més curtes entre dos vèrtexs qualsevol d'un graf amb pesos, però sense cicles negatius, la recurrència ve donada per

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}.$$

Es cert que en aquesta recurrència $d_{ij}^{(k)}$ representa la longitud del camí més curt del vèrtex i al vèrtex j, que conté com a màxim k arestes?

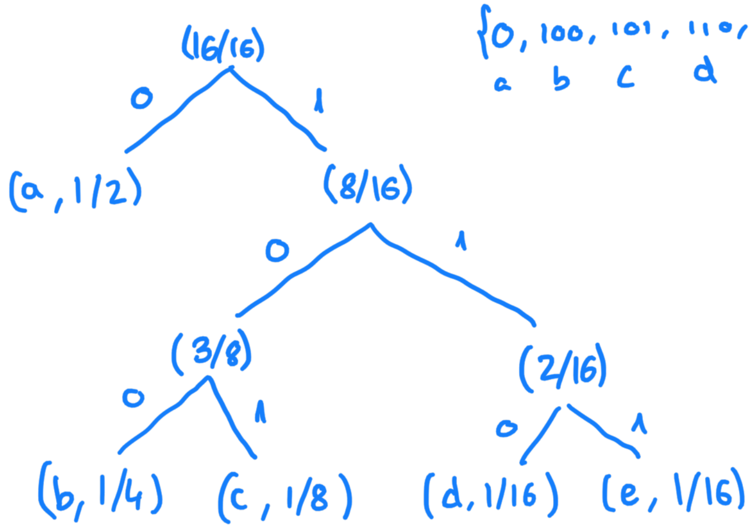
(e) **(1 punt)** Considereu l'alfabet $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, amb les freqüències $(a, 1/2), (b, 1/4), (c, 1/8), (d, 1/16), (e = 1/16)$.

i. (0.3 punts) Dibuixeu l'arbre de prefixes resultant de aplicar l'algorisme de Huffman i doneu un codi Huffman per als símbols de Σ.

ii. (0.4 punts) L'entropia de Σ es la suma, per tots els símbols a Σ, de la freqüència de cada símbol per la longitud de la seva representació amb un codi Huffman. Quina és l'entropia de Σ en aquest cas d'acord amb l'apartat (a)?

iii. (0.3 punts) L'entropia de Σ ens proporciona el nombre esperat de bits per símbol. Si tenim un text de 10^6 caràcters de Σ i el comprimim utilitzant el codi Huffman dissenyat a l'apartat (a), quin és el nombre esperat de bits que utilitzarem?

i)



{0, 100, 101, 110, 111}
a b c d e

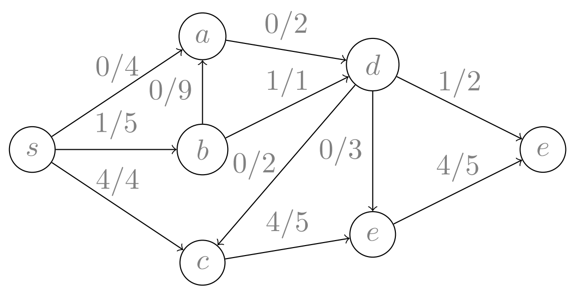
ii) $1 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

iii) $10^6 * \left(\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 3\right) = 0'5 * 10^6 + 1'5 * 10^6 = 2 * 10^6$ bits

(f) **(1 punt)** Considereu la xarxa de flux $\mathcal{N}$ de la figura de sota (A), que té un flux inicial f. El propòsit d'aquest exercici es que implementeu una iteració de l'algorisme d'Edmonds-Karp. En particular,

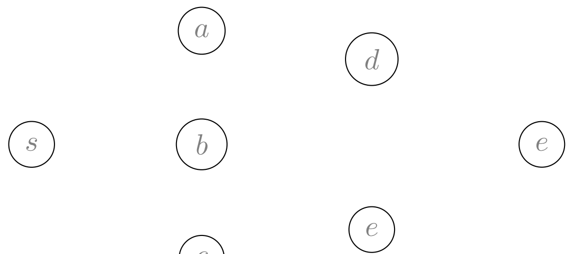
i. Dibuixeu a la figura (B) el graf residual,
ii. Dibuixeu a la figura (C) el graf de nivells.
iii. Expliqueu per que es necessita utilitzar el graf de nivells.
iv. Digueu quin seria l'increment del flux, resultant d'aquesta iteració d'Edmonds- Karp.

(A)



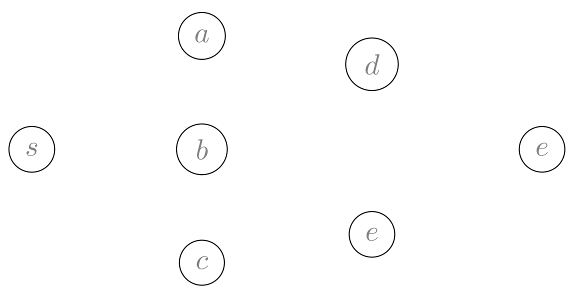
$\mathcal{N}, f$

(B)



G_f

(C)



L

Exercici 2 (2 punts) (Joc).

Tenim un graf no dirigit $G = (V, E)$ on cada node $v \in V$ te associat un valor $\ell(v) \geq 0$ i considerem el següent joc unipersonal:

(a) Els nodes inicialment no estan marcats la puntuació del jugador es 0.

(b) El jugador selecciona un node no marcat u. Sigui $M(u)$ el conjunt de veïns de u a G que ja han sigut marcats. Afegim a la seva puntuació el valor $\sum_{v \in M(u)} \ell(v)$ i marquem u.

(c) El joc es repeteix fins que tots els nodes estiguin marcats o el jugador decideixi finalitzar deixant alguns nodes sense marcar.

Per exemple, suposeu que el graf té tres nodes A, B, C on A està connectat a B i B amb C, on $\ell(A) = 3, \ell(B) = 2, \ell(C) = 3$. En aquest cas una estratègia òptima es marcar primer A, desprès C i finalment B. Aquest ordre dona una puntuació de 6.

(a) És possible obtenir una puntuació millor deixant algun dels nodes sense marcar? Justifiqueu la vostra resposta.

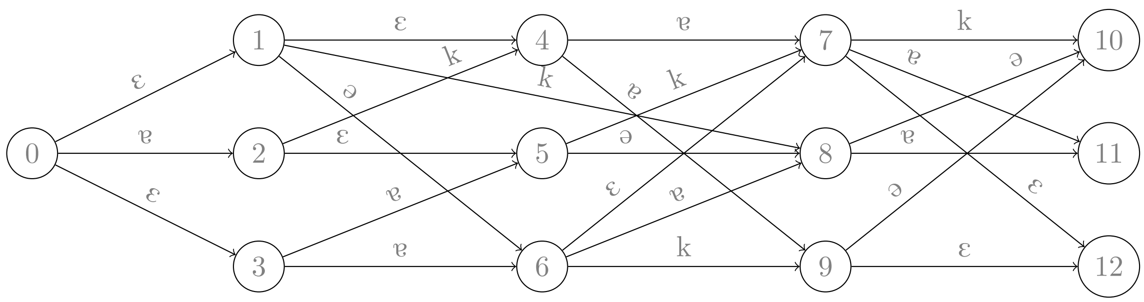
(b) Dissenyeu un algorisme voraç per tal d'obtenir la millor puntuació possible. Justifiqueu la seva correctesa i doneu el seu cost.

(c) Suposeu ara que $\ell(v)$ pot ser negatiu. El vostre algorisme continua proporcionant la puntuació màxima possible?

(d) Considereu la següent modificació pel cas on els nodes poden tenir valors negatius: eliminem de G els nodes v amb $\ell(v) < 0$ i executem el vostre algorisme al graf resultant. Doneu un exemple on aquesta variació no proporcioni la màxima puntuació possible.

Exercici 3 (2 punts) En aquest problema heu de dissenyar un algorisme pel reconeixement de la parla. Aquest algorisme s'anomena l'algorisme Viterbi.

Tenim un llenguatge que consisteix en un conjunt finit de sons (fonemes) Σ on $|\Sigma| = m$, per tant des de el punt de vista lingüístic, el llenguatge parlat és força restringit. Considerem el següent model per definir la parla d'una persona en aquest llenguatge. El model de parla està format per un digraf $G = (V, E), |V| = n$, amb un vèrtex distingit $v_0 \in V$. Cada aresta $\overrightarrow{(u, v)} \in E$ està etiquetada amb un so $\sigma(u, v) \in \Sigma$. En aquest model cada camí a G que comença a v_0, correspon a una possible seqüencia de sons a Σ. L'etiqueta associada a un camí és la concatenació (seguint el camí) de les etiquetes de les arestes del camí. Un exemple de model de parla el teniu a la següent figura per l'lafabet $\Sigma = \{$ɛ, ɐ, k, ə$\}$ i $v_0 = 0$.



Una seqüència de fonemes de Σ, $s = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, és vàlida al model (G, σ, v_0) si existeix un camí a G que comença a v_0 amb etiqueta $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \cdots \cdot \sigma_k$. Per exemple, $s =$ (ɛ, ɐ, k, ə) és vàlida al nostre model ja que es correspon amb l'etiqueta del camí $0 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10$. La seqüència $s' =$ (ə, ɛ, ɐ) no és valida.

> **(a)** Dissenyeu un algorisme eficient, basat en PD, tal que donats un model (G, σ, v_0) i una seqüència de fonemes s, determini si s és una seqüència valida al model. Quina és la complexitat del vostre algorisme?

Suposem ara, que modifiquem el model de manera que a cada aresta $\overrightarrow{(u, v)} \in E$ li assignem un pes $p(u, v)$, $0 \leq p(u, v) \leq 1$. Aquest pes representa la probabilitat de que en agafar l'aresta (u, v) es produeixi el so $\sigma(u, v)$. Definim la probabilitat d'un camí com el producte de les probabilitats de les arestes del camí. Així, una seqüència vàlida, pot correspondre a etiquetes de camins al graf cadacu d'ells amb una probabilitat associada. Por exemple la seqüència a $s =$ (ɛ, ɐ, k, ə) es l'etiqueta del camí $0 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10$ i del camí $0 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$. Si, $p(0, 3) = 0.1, p(3, 5) = 0.5, p(3, 6) = 0.2, p(5, 7) = 0.02, p(6, 9) = 0.1, p(7, 10) = 0.4$ i $p(9, 10) = 0.2$. El primer camí es dona probabilitat 0.1 0.3 0.02 0.4 = 0.000024 de pronunciar s i el segon 0.1 0.2 0.1 0.2 = 0.0024.

> **(b)** Modifique l'algorisme del apartat **(a)** de manera que, donat un model (G, σ, p, v_0) i una seqüència de fonemes s, determini si s és vàlida i en cas de que ho sigui torni un camí etiquetat amb s que tingui la probabilitat més gran de produir s.

Exercici 4 (2 punts) (Discurs). Davant el gran nombre de intervencions sobre la utilitat de l'ensenyament universitari, el rector de la UPCha decidit encarregar a UPCnet un mecanisme per redactar aquest discursos.

Per això han preparat un graf dirigit en el que cada aresta està etiquetada una paraula. Així un camí al graf representa una frase amb sentit escribint la seqüència de mots que apareixien al camí seguint l'ordre establert pel camí. Abans de preparar un discurs el rector decideix els punts d'inici del seu discurs, indicant una seqüència de nodes del graf, aquells on començaran les frases del seu discurs.

Per eliminar redundàncies en el discurs l'equip rectoral aconsella que el discurs mai faci servir mes d'una vegada una aresta del graf.

(a) Dissenyeu un algorisme per escriure un discurs, seguint les especificacions del rector i les indicacions de l'equip rectoral . En cas de que no sigui possible, s'ha de presentar una versió reduïda de discurs indicant els nodes d'inici de les frases que no s'han pogut completar.

(b) Indiqueu com modificarieu l'algorisme proposat al apartat previ si l'equip rectoral relaxa la condició prèvia de redundància i permet un nombre màxim c d'aparicions d'una aresta al discurs.