45. CinemaVis ha de programar l'aparició d'un seguit d'anuncis a una pantalla gegant a la Plaça del Mig la diada de Sant Jordi. La tirada d'anuncis es pot iniciar a temps 0 (l'inici programat) però mai abans. A més, CinemaVis disposa d'un conjunt de n anuncis per fer la selecció. L'anunci i té una durada de 1 minut i té associat dos valors reals no negatius t_i i b_i. L'anunciat pagarà b_i euros a CinemaVis si l'anunci i s'emet a l'interval $[0, t_i]$ i 0 euros si s'emet després. Cap dels n anuncis es pot mostrar més d'una vegada. CinemaVis vol projectar la selecció d'anuncis que li proporcioni màxim benefici. Dissenyeu un algorisme, el més eficient que podeu, per a resoldre aquest problema.

Una solució:
Teniendo en cuenta que cada anuncio dura 1 minuto y que hay n anuncios podemos programar un anuncio para inciarse en el minuto 0, otro para iniciarse en el minuto 1, y asi hasta programar el anuncio a emitir entre los instantes $n-1$ y n. Sin pérdida de generalidad, supongamos que indexamos los anuncios de mayor a menor beneficio, esto es, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$. Para cada uno de ellos tenemos que asignarle un slot $[e_i - 1, e_i]$, el minuto en que se emitirá. Entonce nuestro objetivo es hallar una permutación $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de los números del 1 al n que maximiza el valor

$$\mathrm{val}(e) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot [\![e_i \leq t_i]\!],$$

donde $[\![P]\!] = 1$ si P es cierta y $[\![P]\!] = 0$ en otro caso.

Nuestra estrategia voraz asigna a cada anuncio, sucesivamente del 1 al n, el slot más tardío no asignado todavía en el periodo $[0, t_i]$, y si no hay ninguno entoces el slot más tardío no asignado en $[t_i, n]$. Esta estrategia puede implementarse trivialmente con coste $O(n^2)$ (y con un esfuerzo considerable y estructuras de datos apropiadas con coste asintóticamente menor).

En lo que resta vamos a demostrar que este algoritmo voraz devuelve una solución óptima. Sea $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ una solución óptima. Sea i el menor índice para el cual e y e^* difieren; si no existe entonces no hay nada que demostrar. En caso contrario supongamos primero que $e_i < e_i^*$. Entonces el valor b_i contribuye a $\mathrm{val}(e)$ pero no $\mathrm{val}(e^*)$, pues por definición no hay ningún slot libre en $[e_i - 1, t_i]$ una vez asignados e_1, $\ldots$, e_{i-1}; por lo tanto tendremos $e_i^* > t_i$ y $[\![e_i^* \leq t_i]\!] = 0$. Entonces podemos construir una nueva asignación como sigue. Habrá algún anuncio, digamos el j-ésimo, con $j > i$ que tiene asignado el slot $[e_i - 1, e_i]$, esto es, $e_j^* = e_i$. En la nueva asignación de slots $\hat{e}$ todos los anuncios reciben la misma asignación que en e^*, excepto que intercambiamos las asignaciones de los anuncios i y j, es decir, $\hat{e}_i = e_j^* = e_i$, $\hat{e}_j = e_i^*$ y $\hat{e}_\ell = e_\ell^*$. En primer lugar $[\![\hat{e}_i \leq t_i]\!] = [\![e_i \leq t_i]\!] \geq [\![e_i^* \leq t_i]\!] = 0$. Por otro lado $[\![\hat{e}_j \leq t_j]\!] = [\![e_i^* \leq t_j]\!]$