Exercici 2 (2 punts) (Joc).

Tenim un graf connex no dirigit $G = (V, E)$ on cada node $v \in V$ té associat un valor $\ell(v) \geq 0$; considerem el següent joc unipersonal:

(a) Els nodes inicialment no estan marcats i la puntuació del jugador és 0.

(b) El jugador selecciona un node $u \in V$ no marcat. Sigui $M(u)$ el conjunt de veïns de u a G que ja han sigut marcats. Aleshores, s'afegeix a la puntuació del jugador el valor $\sum_{v \in M(u)} \ell(v)$ i marquem u.

(c) El joc es repeteix fins que tots els nodes siguin marcats o el jugador decideixi finalitzar la partida, deixant possiblement alguns nodes sense marcar.

Per exemple, suposeu que el graf té tres nodes A, B, C on A està connectat a B i B amb C, amb $\ell(A) = 3$, $\ell(B) = 2$, $\ell(C) = 3$. En aquest cas, una estratègia òptima seria marcar primer A, després C i finalment B. Aquest ordre dona al jugador una puntuació total de 6.

(a) És possible obtenir una puntuació millor deixant algun dels nodes sense marcar? Justifiqueu la vostra resposta.

(b) Dissenyeu un algorisme voraç per tal d'obtenir la millor puntuació possible. Justifiqueu la seva correctesa i doneu-ne el cost.

(c) Suposeu ara que $\ell(v)$ pugui ser negatiu. Continua el vostre algorisme proporcionant la puntuació màxima possible?

(d) Considereu la següent modificació del joc per aquest cas en què els nodes poguessin tenir valors negatius: eliminem primerament de G tots els nodes $v \in V$ amb $\ell(v) < 0$, per tal de seguidament executar el vostre algorisme sobre el graf resultant d'aquesta eliminació. Doneu un exemple on aquesta variació no proporcioni la màxima puntuació possible.

Sol.

(a) No. Al marcar un nodo, como los pesos son no negativos, solo podemos incrementar o mantener la puntuación, lo que dejando nodos sin marcar no podemos mejorar la puntuación, en el caso mejor la mantendríamos.

(b) Mi algoritmo ordena los nodos en orden decreciente de valor.

El coste del algoritmo es $O(n \log n)$ si solo marcamos los vértices y $O(n \log n + m)$ si calculamos la puntuación, ya que para cada nodo tenemos que acceder a su lista de vecinos.

Para demostrar la corrección de la regla voraz, supongamos que tenemos un orden de marcado de los nodos, en el que aparecen todos, de acuerdo con (a).

Si miramos un nodo $u \in V$, consideramos $M(u)$ los vecinos de u que ya están marcados cuando se marca u y $F(u) = N(u) - M(u)$ los que se marcan después. La puntuación que debida a u es:

$$\sum_{v \in M(u)} \ell(v) + \ell(u)|F(u)|.$$

Esta cantidad se maximiza cuando los vecinos con valor mayor que u se marcan antes que u y los que tienen valor menor después. Los vecinos con el mismo valor se pueden marcar antes o después de u ya que la contribución es la misma.

El orden creciente de valor garantiza que la contribución de cada nodo es máxima posible y por lo tanto la puntuación obtenida es máxima.

(c) No. Si consideramos un grafo como el del enunciado pero con valores $\ell(A) = 5$, $\ell(B) = -2$, y $\ell(C) = -3$, mi algoritmo marca los nodos en el orden A, B, C y con puntuación total 3. Mientras que podemos obtener puntuación 5 si no marcamos C.

(d) Nos sirve el grafo del apartado anterior. Si prescindimos de B y C la puntucación es 0, mientras que marcando A y después B podemos conseguir puntuación 5.

Notas: algunas soluciones utilizan otros criterios de ordenación para marcar los nodos que no proporcionan la puntuación máxima.

- Ordenar por $\ell(v)|N(v)|$ decreciente

  En el grafo con un nodo a con peso 1 conectado a cuatro nodos b, c, d, e cada uno de ellos con peso 2.

  $\ell(a)|N(a)| = 4$ y $\ell(b)|N(b)| = 2$ (lo mismo para los otros). Marca los nodos en el orden a, b, c, d, e con puntuación total 4.

  El orden b, c, d, e, a proporciona puntuación 8.

- Orden creciente de $\sum_{v \in N(u)} \ell(v)$, suma de los pesos de los vecinos.

  En el grafo con un nodo a con peso 3 conectado a cuatro nodos b, c, d, e cada uno de ellos con peso 1.

  Suma pesos vecinos $a : 4$, $b, c, d, e : 3$. Marca los nodos en el orden b, c, d, e, a con puntuación 4.

  El orden a, b, c, d, e proporciona puntuación 12.