Algorísmia Q1–2021–2022

Examen Final **12 de gener de 2022**

Durada: 2h 45mn

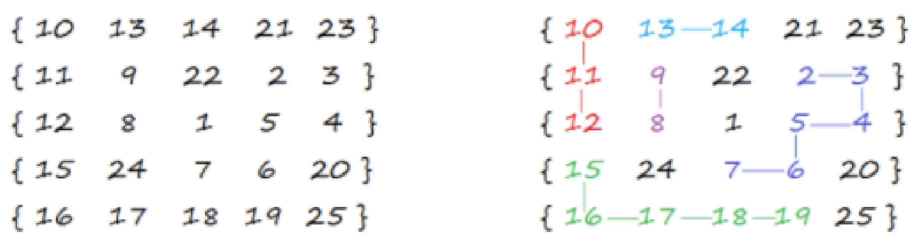
Instruccions generals:

- L'exercici 4 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, ..., Ex 4).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (2 punts) Donat un conjunt $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de punts de la recta real, doneu un algorisme, el més eficient que pogueu, per a determinar el conjunt més petit d'intervals tancats amb longitud unitat, que cobreixen tots els punts (cada punt ha d'aparèixer almenys a un interval).

Exercici 2 (3 punts) Donada una matriu $N \times N$ de nombres enters positius **diferents**, escriviu un algorisme de programació dinàmica que trobi la longitud del camí més llarg (o d'un d'ells, si n'hi ha més d'un) format per caselles adjacents (en horitzontal o vertical) de números consecutius.

Exemple:

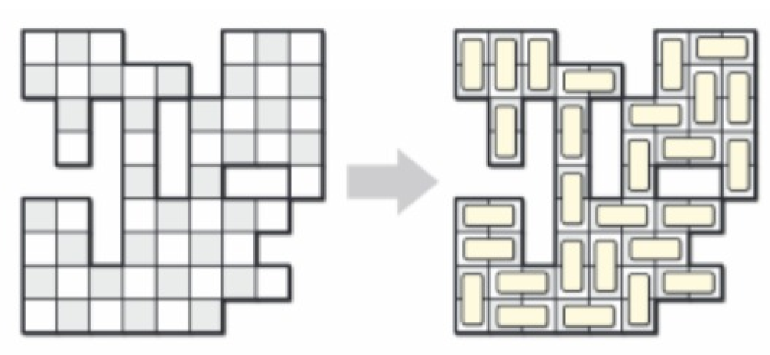


En aquest exemple la solució és 6, ja que el camí més llarg és el $[2, 3, 4, 5, 6, 7]$. Per conveni, considerarem que l'inici d'un camí de longitud k és la posició ón hi ha el número més petit del camí. Així per exemple, el camí $[2, \ldots, 7]$ s'inicia a la posició $(2, 4)$ i el camí $[8, 9]$ s'inicia a la posició $(3, 2)$.

Es demana una solució al problema mitjançant PD. Descriviu la recursió i justifiqueu que s'aplica el principi d'optimalitat. Calculeu també el cost en espai i temps de l'algorisme de PD que proposeu. Expliqueu com, i amb quin cost, podem trobar un camí amb llargada màxima, no només la seva longitud.

Exercici 3 (2.5 punts) Tenim un tauler $n \times n$, amb caselles de dos colors (blanc i negre) alternants per files i columnes. Esborrem un determinat nombre de caselles dels dos colors, de manera que al tauler resultant quedi el mateix nombre de caselles blanques i negres. Descriviu i analitzeu un algorisme per a determinar eficientment si existeix una forma d'omplir el tauler amb fitxes de dòmino (que ocupen un àrea de 2×1 caselles), de manera que totes les caselles que han quedat al tauler quedin cobertes i cap fitxa de dòmino surti del tauler.

Exemple:



A l'exemple de la figura, el tauler percolat de l'esquerra es pot omplir (completament i correctament) amb fitxes de dòmino; per tant, la resposta en aquest cas és positiva. Raoneu com, en cas de respostes afirmatives, es podria calcular la col·locació exacta de les fitxes de dòmino.

Ajut: Penseu que una fitxa de dòmino col·locada sobre el tauler sempre ocuparà una casella blanca i una casella negra que serà adjacent a la blanca. De totes les possibles caselles negres adjacents, l'algorisme haurà decidir quina.

Cognoms, Nom Data

Exercici 4 (2.5 punts) Digueu, per cadascun dels enunciats següents, si són certs o falsos. Justifiqueu-ne les respostes.

(a) (0.5 punts) Donada una taula $A[1..n]$ d'enters, la complexitat d'ordenar A utilitzant l'algorisme de compteig (*counting sort*) és polinomica en n.

(b) (0.5 punts) Donat un vector $A[1..n]$, un element x s'anomena majoritari si x apareix més de $n/2$ cops a A. Donada una taula A es pot determinar en temps $O(n)$ si existeix un element majoritari en A i quin és l'element majoritari en cas que existeixi.

(c) (0.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ amb pesos $w : E \to \mathbb{R}^+$ i sigui T un arbre d'expansió amb cost mínim (MST) a G. Aleshores el camí de pes mínim entre dos vèrtexs v_1 i v_2 ha de ser també un camí mínim a T.

(d) (0.5 punts) Teniu una xarxa de flux on les seves capacitats són enters i, a més, us donen una assignació de flux f a la xarxa amb valor màxim. En un moment donat, un node u, que no és ni s ni t, deixa de ser operatiu i cal eliminar-ho de la xarxa. Si, amb l'assignació de flux f, al vèrtex u entren (i surten) un total de k unitats de flux, en eliminar u de la xarxa el valor del flux màxim a la nova xarxa és $|f| - k$.

(e) (0.5 punts) Sigui T un arbre d'expansió amb cost mínim (MST) d'un graf connex ponderat $G = (V, E, w)$. Donat un subgraf connex H de G, si $H \cap T$ és un arbre llavors és un MST per H.

N.B.: El subgraf $H \cap T$ és el subgraf d'H ón es retenen les arestes d'H que també ho són de T, es a dir, té com a vèrtexs tots els vèrtexs d'H ($V_H \cap V_T = V_H \cap V = V_H$) i com a arestes la intersecció de les arestes d'H amb les arestes de T.