Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació: Grau en Enginyeria Informàtica
Assignatura: Algorísmia (A)
Duració: 2h 30m

Curs: Q2 2021–2022 (Final)
Data: 8 de juny de 2022

Una solució a l'examen final

1. **Cap d'estació (2 punts)** Som els encarregats de gestionar les arribades i sortides de trens d'una nova estació que es preveu força concorreguda. Durant la nit anterior a la inauguració van arribant faxos de diferents estacions de la xarxa amb la informació referent a l'arribada dels seus trens i del temps que han de quedar-se estacionats a la nostra estació abans de continuar el viatge. Cada fax conté l'hora h d'arribada d'un tren i el nombre de minuts e que s'ha de quedar estacionat a la nostra estació. En començar el dia, recopilem tots els faxos en una llista $L = \{(h_1, e_1), \ldots, (h_n, e_n)\}$ i ens disposem a organitzar l'ús de l'estació.

   Doneu un algorisme eficient per a calcular quin és el mínim nombre d'andanes que necessitem habilitar a l'estació per tal que tot tren que arribi pugui estacionar, sense haver-se d'esperar que un altre tren marxi per ocupar el seu lloc.

Una solució:
Aquest problema és, en realitat, el clàssic conegut com *Interval Coloring* o *Interval Partitioning*.[1] En el nostre cas tenim un conjunt de n trens, i cada tren i té un instant d'arribada h_i i un instant de partida $h_i + e_i$. L'objectiu és utilitzar el nombre mínim de recursos (en el nostre cas, andanes) per programar totes les estades dels trens a les andanes de l'estació. S'ha de resoldre de manera que cap tren hagi de retardar el seu temps d'arribada perquè no hi ha cap andana lliure a l'estació (o, equivalentment, que no ens trobéssim que dos o més trens vulguin estacionar a la mateixa via al mateix temps). La Figura 1 il·lustra un exemple amb diferents planificacions.

Definim la profunditat d'un conjunt d'intervals com el nombre màxim d'intervals que coincideixen en qualsevol instant de temps. Aleshores observem que el nombre d'andanes necessàries serà almenys la profunditat del conjunt d'entrada. Per tant, qualsevol planificació dels trens que utilitzi un nombre d'andanes igual a la profunditat és, de fet, una planificació òptima perquè no podem fer-ho millor.

[1] Atenció, no l'*Interval Scheduling*!!

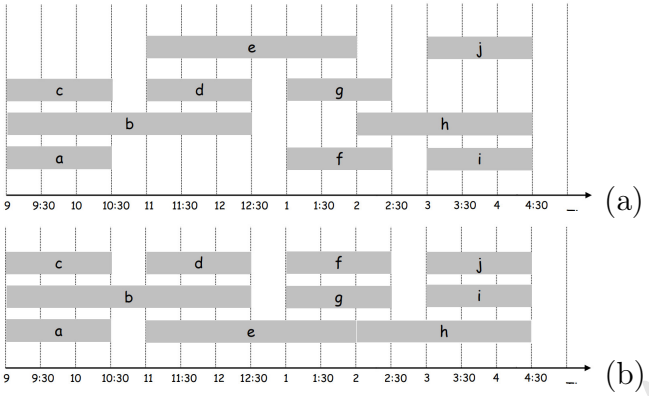


Figura 1: Diferents possibles solucions per a l'estacionament de 10 trens (etiquetats d'a a j) representats per l'interval de temps entre la seva arribada i la seva partida. La solució **(a)** necessita 4 andanes, mentre que la solució **(b)** en necessita només 3. Cada fila representa els trens que poden fer servir la mateixa andana en el seu pas per l'estació (no coincideixen).

Podem trobar sempre una planificació òptima? La resposta és sí, i per això dissenyem un senzill algorisme *greedy* que programarà els estacionaments dels trens utilitzant un nombre d'andanes igual a la profunditat. Considerem els intervals d'estacionament dels trens en ordre creixent de l'hora d'inici i assignem a cada tren qualsevol andana compatible (és a dir, que estigui lliure en el moment d'arribada del tren). Si totes les andanes es troben ocupades quan intentem assignar un nou tren, aleshores habilitarem una nova andana. Mantindrem un control del nombre d'aules obertes, que serà el que retornarem com a resposta.

Pseudocodi de l'algorisme:

```
1:  function CAP D'ESTACIÓ (L = {(h_1, e_1), ..., (h_n, e_n)})
2:      Ordenar L per temps d'arribada dels trens (h_i) en ordre creixent[2]
3:      d ← 0
4:      for j = 1 to n do
5:          if tren j és compatible amb alguna andana k ∈ [1, d] then
6:              assignar tren j a l'andana k
7:          else
8:              habilitar l'andana d + 1
9:              assignar tren j a aquesta nova andana
10:             d ← d + 1
11:         end if
12:     end for
13:     return d
14: end function
```

[2]No importa com es resolguin els empats.

L'assignació de trens a andanes (línies 6, 8 i 9) no és realment necessària per aquest problema, donat que l'enunciat només ens demana que calculem el nombre mínim d'andanes (d, línia 14). Ens hauríem de preocupar de com guardar aquestes assignacions si l'exercici ens demanés, a més, que detalléssim l'ocupació de les d andanes en el temps.

L'ordenació (línia 2) necessita temps $\mathcal{O}(n \log n)$. El temps d'execució total de l'algorisme dependrà de com implementem l'acció de trobar alguna andana compatible (línia 5). Si senzillament recorrem les d andanes ocupades en aquell moment per veure si alguna està lliure, el cost de l'algorisme pujarà a $\mathcal{O}(n \log n + n^2) = \mathcal{O}(n^2)$. En canvi, podem aconseguir un temps total de $\mathcal{O}(n \log n)$ si, per a cada andana k mantenim el temps en què marxa l'últim tren estacionat en ella (o, el que és el mateix, el temps en què queda lliure l'andana) i mantenim les andanes utilitzades fins aquell moment en una cua de prioritats (min-heap). Si el tren j és compatible amb alguna andana $k \in [1, d]$, ho serà segur amb la primera que queda lliure (i que és el mínim de la cua). Amb aquesta implementació, l'algorisme ens quedaria:

```
function Cap d'estació (L = {(h_1, e_1), ..., (h_n, e_n)})
    Ordenar L per temps d'arribada dels trens (h_i) en ordre creixent[1]
    P.insert(h_1 + e_1)        ▷ S'assigna el primer tren a la primera andana i s'encua
    for j = 2 to n do
        m ← P.pop()            ▷ Temps en què queda lliure la primera andana
        if (h.j ≥ m) then      ▷ Si el tren j arriba després que quedi lliure...
            P.push(h.j + e.j)  ▷ S'assigna el tren t a l'andana i s'actualitza
        else                   ▷ Si el tren t arriba abans que quedi lliure...
            P.push(m)          ▷ Tornem l'andana a la cua
            P.push(h.j + e.j)  ▷ S'assigna una nova andana al tren j i s'encua
        end if
    end for
    return P.size()            ▷ Total d'andanes utilitzades
end function
```

Hem de demostrar que, efectivament, es genera una planificació correcta i òptima que minimitza el nombre d'andanes. La correctesa la podem argumentar si observem que l'algoritme greedy mai programa dos trens incompatibles (dos trens que coincideixen algun temps a l'estació) a la mateixa andana, simplement per la seva definició. A més, tots els trens queden planificats.

Per demostrar l'optimitat, sigui d el nombre d'andanes que l'algoritme greedy assigna. Aleshores es va habilitat l'andana d-èsima perquè havíem d'estacionar una tren, per exemple j, que era incompatible amb tots els $d-1$ altres trens. Donat que són incompatibles, es dedueix que aquests $d-1$ trens marxen de l'estació després de h_j (temps d'arribada del tren j). Donat que hem ordenat per els temps d'arribada dels trens, aquests $d-1$ trens també havien arribat a l'estació abans (o al mateix temps) de

h_j. Per tant, tenim d estacionaments superposats en aquest moment.[3] Això implica que la profunditat és almenys d i la nostra planificació és òptima.

Observacions:

- Ordenar L' per temps de sortida del trens $(h_i + e_i)$ en ordre creixent no funciona. Contraexemple: $L = \{(1,2),(2,3),(6,1),(4,4)\}$.
- Mirar només la compatiblitat del tren j en tractament amb el tren anterior no és correcte.

Una solució alternativa:

Una altra idea per resoldre el problema és considerar les arribades i les sortides ordenades per separat. Un cop ordenades, es pot calcular el nombre de trens a l'estació en qualsevol moment fent un seguiment dels trens que han arribat, però que encara no han sortit. El cost assimptòtic d'aquesta solució és igual que l'anterior, $\mathcal{O}(n \log n)$.

function CAP D'ESTACIÓ ($L = \{(h_1, e_1), \ldots, (h_n, e_n)\}$)
  $A \leftarrow \{h_1, \ldots, h_n\}$ ▷ *Arribades*
  $S \leftarrow \{h_1 + e_1, \ldots, h_n + e_n\}$ ▷ *Sortides*
  Ordenar A en ordre creixent
  Ordenar S en ordre creixent
  $i, j \leftarrow 1$
  $d, andanes \leftarrow 0$
  while $i \leq n \wedge j \leq n$ **do**
    if $A[i] \leq S[j]$ **then** ▷ *El tren arriba abans de la darrera sortida*
      $andanes \leftarrow andanes + 1$
      $i \leftarrow i + 1$
    else ▷ *El tren arriba després que hagi sortit l'últim tren*
      $andanes \leftarrow andanes - 1$
      $j \leftarrow j + 1$
    end if
    $d \leftarrow \max(d, andanes)$
  end while
  return d ▷ *Total d'andanes utilitzades*
end function

[3] O, tècnicament, a temps $h_j + \epsilon$ per a una petita constant ϵ.

2. **Resistència de closques (3 punts)** La duresa de la closca dels ous es pot determinar per la quantitat de carbonat de calci, $CaCO_3$, que conté. Volem verificar la duresa de la closca dels ous de les nostres gallines però, donat que som informàtics i no químics, volem idear un mètode més algorísmic per fer-ho usant un edifici d'N plantes i p ous de mostra. Hem observat el següent:

   - Si tinguéssim només un ou, aniríem al primer pis, llançaríem l'ou per la finestra i miraríem si es trenca. Si no ho fa, llavors repetiríem el procés des del segon pis, des del tercer, etc. fins que es trenqués o declarem que són indestructibles ;-)

     Aquesta estratègia és òptima donat que només tenim un ou i llavors el màxim de llançaments que cal fer és N; amb menys llançaments no podríem garantir que trobarem sempre l'altura exacta a partir de la qual es trenquen els ous.
   - En cas que disposem de dos ous (ou_1 i ou_2) podem fer molts menys llançaments. Per exemple, amb $N = 100$ només cal fer 14 llançaments en el pitjor dels casos. Veiem per què:

     El primer, ou_1, es llança des del pis $x = 9$. Poden passar dues coses: (a) si es trenca, llavors fem cerca seqüencial amb l'ou_2 entre els pisos 1 i 8 (en total 9 llançaments com a màxim); **(b)** si no es trenca, llavors es torna a llançar l'ou_1 des del pis 22, i poden tornar a passar dues coses: **(b.1)** si es trenca, fem cerca seqüencial amb l'ou_2 entre els pisos 10 i 21 (en total de $14 = 12 + 2$ llançaments com a màxim), però **(b.2)** si no es trenca l'ou_1 al pis 22, llavors llançarem novament l'ou_1 des dels pisos 34, 45, 55, 64, 72, 79, ... fins que es trenqui i llavors completarem la cerca de manera seqüencial amb l'ou_2 en l'interval apropiat.
   - Amb un número prou alt d'ous de prova, la millor estratègia és una "cerca binària"; però si p no és prou gran la "cerca binària" **no** funciona.

   Donats N i la quantitat p d'ous de prova, calculeu quin és el menor nombre de llançaments $L_{N,p}$ que garanteix trobar el pis més alt des del qual l'ou no es trencarà en llançar-lo. Determineu també com s'han de dur a terme els llançaments.

   (a) Dona (i justifica) una recurrència per al cas de dos ous, és a dir per obtenir $L_{N,2}$.

   (b) Dona (i justifica) una recurrència per a qualsevol N i p, és a dir per obtenir $L_{N,p}$.

   (c) Dona un algorisme per determinar l'estratègia de llançaments amb el nombre mínim de llançaments. Justifica el seu cost en temps i espai.

Una solució:

(a) Denotemos $D_n := L_{n,2}$ el número mínimo necesario de lanzamientos cuando tenemos n plantas, $n \leq N$, y 2 huevos. Para simplificar la recurrencia añadiremos

el caso $n = 0$, tomando como valor por defecto $D_0 = 0$. Cuando $n = 1$, un lanzamiento es suficiente, así $D_1 = 1$. Cuando $n > 1$, sea $x \leq n$ el piso desde el que lanzamos el huevo ou_1 por primera vez. Si se rompe necesitaremos hacer, como máximo x lanzamientos (incluido el que ya hemos hecho del primer huevo). Si no se rompe haremos el número óptimo de lanzamientos para buscar el punto de ruptura en los $n - x$ pisos restantes, como mucho esto será $1 + D_{n-x}$. O sea que nunca necesitaremos más de $\max\{x, 1 + D_{n-x}\}$ lanzamientos. La solución óptima hace el lanzamiento desde el piso x que minimiza esta cantidad, así tenemos la recurrencia

$$D_n = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 1, \\ \min_{1 \leq x \leq n} \max\{x, 1 + D_{n-x}\} & \text{si } 1 < n \leq N. \end{cases}$$

(b) Denotemos como $L_{n,p}$ el número mínimo necesario de lanzamientos cuando tenemos n plantas, $0 \leq n \leq N$, y q huevos, $1 \leq q \leq p$. Siguiendo el mismo razonamiento del apartado anterior,lanzamos el huevo ou_1 en el piso x-ésimo del intervalo de pisos donde estamos haciendo la búsqueda, $1 \leq x \leq n$. O bien se romperá y necesitaremos un lanzamiento más $L_{x-1,q-1}$ para encontrar el punto de ruptura en los pisos $x - 1$ pisos por debajo pero solo tenemos $q - 1$ huevos, o bien no se romperá y necesitaremos $L_{n-x,q}$ lanzamientos para buscar el punto de ruptura en los $n - x$ pisos por encima del x-ésimo, disponiéndose de los q huevos, el huevo ou_1 puede volver a ser usado. Si $n > 1$ y $q > 1$ entonces

$$\begin{aligned} L_{n,q} &= \min_{1 \leq x \leq n} \max\{L_{x-1,q-1} + 1, L_{n-x,q} + 1\} \\ &= 1 + \min_{1 \leq x \leq n} \max\{L_{x-1,q-1}, L_{n-x,q}\}. \end{aligned}$$

Para $n = 0$, tomaremos de nuevo que $L_{0,p} = 0$, independientemente del número de huevos. Si $n = 1$, un lanzamiento es suficiente, entonces $L_{1,q} = 1$, para todo $q \geq 1$. Si $q = 1$, solo tenemos un huevo, así $L_{n,q} = n$, para $n \geq 0$. Poniendo todo junto tenemos la recurrencia:

$$L_{n,q} = \begin{cases} n & \text{si } q = 1 \vee n \leq 1, \\ 1 + \min_{1 \leq x \leq n} \max\{L_{x-1,q-1}, L_{n-x,q}\} & \text{si } 1 < n \leq N \wedge 1 < q \leq p. \end{cases}$$

(c) En el algoritmo usaremos una matriz L, con N filas y p columnas, tal que $L[n, q] = L_{n,q}$. Las filas 0 y 1 y la columna 1 se rellenan trivialmente, son casos base. Para rellenar $L[n, q]$ necesitamos la columna anterior $L[\cdot, q - 1]$ completa y los valores de la columna q desde la fila 1 a la fila $n - 1$. La matriz se rellena por lo tanto de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Obtener el valor de cada entrada $L[n, q]$ se hace en tiempo $\Theta(n) = \mathcal{O}(N)$ y por lo tanto como hay $N \cdot p$ subproblemas el coste del algoritmo en tiempo es $\mathcal{O}(N^2 p)$ y el coste en espacio es $\Theta(N \cdot p)$.

Finalmente tenemos que obtener, sin incremento del coste asintótico ni de espacio ni de tiempo, el primer piso $X_{n,q}$ n el cual debemos lanzar un huevo en la estrategia óptima que resuelve el problema para n pisos y q huevos. Si $n = 1$ o $q = 1$ tendremos $X_{n,q} = 1$ (línea 13 en el código más abajo), ya que en dichos casos siempre habremos de comenzar en el primer piso, y en general anotaremos el valor x que minimiza el caso general de la recurrencia para $L_{n,q}$ (línea 18 del código). Para reconstruir la solución usamos una función recursiva `reconstruye_plan(n,q,X,a)` que recibe n, q, la matriz X y el número del piso a en el cual empieza el rango de pisos a considerar, e imprime el árbol de decisiones que guía los lanzamientos. Hay otras muchas opciones, p.e., podría construirse el árbol como estructura de datos explícitamente.

La llamada inicial será `reconstruye_plan(N,p,X,1)`. El coste de dicha función es proporcional al total de nodos en el árbol de decisiones implícito, que es $\Theta(N)$. También se podría hacer una versión "interactiva" en la que nos dijera un número de piso desde donde lanzar, informaríamos del resultado (el huevo se rompe o no), entonces nos daría un nuevo número de piso desde el cual efectuar el siguiente lanzamiento (con el mismo huevo si no se ha roto en el paso anterior, con un nuevo huevo si se ha roto en el último lanzamiento), etc. Esto correspondería a seguir nada más una rama del árbol de decisiones y el coste sería proporcional a $\Theta(L_{N,p})$.

```
1  // Pre:
2  //        vector< vector<int> > L(N+1, p+1); // la columna 0 no se usa
3  //        vector< vector<int> > X(N+1, p+1); // fila y columna 0 no usadas
4  // Post: L[N][p] = número mínimo de lanzamientos requerido
5  //        X[i][j] = ver explicaciones en el texto
6  // Coste: O(N^2 p)
7  void calcular_plan_lanzamiento_huevos(int N, int p,
8      vector<vector<int>>& L, vector<vector<int>>& X) {
9    for (int q = 1; j <= p; ++q) { L[0][q]=0; L[1][q]=1; X[1][q]=1; }
10   for (int n = 0; n <= N; ++n) { L[n,1] = i; X[n,1] = 1; }
11   for (int q = 1; q <= p; ++q) {
12      for (int n = 2; n <= N; ++n) {
13         L[n][q] = 1+L[n-1][q]; X[n][q] = 1;
14         for (int x = 2; x <= n; ++x) {
15           int Lx = max(L[x-1][q-1],L[n-x][q]);
16           if (L[n][q] > 1 + Lx) {
17             L[n][q] = 1 + Lx;
18             X[n][q] = x;
19           }
20         } // end for x
21      } // end for n
22   } // end for q
23 }
24
25 // Pre: Si n > 0 y q > 0 entonces 1 ≤ X[n][q] ≤ n
26 // Post: Escribe el árbol que codifica al plan para hallar
27 // el piso buscado entre los pisos a y a + n - 1
28 void reconstruye_plan(int n, int q,
29         const vector<vector<int>>& X, int a) {
30     if (n > 0 and q > 1) {
31       cout << "Lanza␣huevo␣#" << q \
32            << "␣desde␣piso␣" << a - 1 + X[n][q] << endl;
33      cout << "Si␣se␣rompe␣al␣lanzar␣desde␣" << a-1+X[n][q] << endl;
34      reconstruye_plan(X[n][q]-1, q-1, X, a);
```

```
35
36        cout << "Si␣no␣se␣rompe␣al␣lanzar␣desde␣" << a-1+X[n][q] << endl;
37        reconstruye_plan(n-X[n][q], q, X, a+X[n][q]);
38      } else if (q == 1) {
39        cout << "Busca␣secuencialmente␣entre␣" << a \
40             << "␣y␣" << a+n-1 << endl;
41      }
42  }
```

3. **Flow Bicing (2.5 punts)** La ciutat de Barcelona necessita actualitzar el seu servei de bicicletes compartides de cara a l'estiu. Les bicicletes en funcionament s'estacionen en una xarxa d'n punts d'aparcament distribuida per la ciutat.

   Per a cada punt d'aparcament de bicicletes v l'ajuntament té una estimació del nombre d'usuaris α_v que necessitaran una bicicleta a primera hora del matí. A més, la nit anterior s'ha fet una ronda de reconeixement a cada punt v per saber el nombre de bicicletes β_v que hi haurà disponibles l'endemà. Cada dia, per posar en marxa el servei, cal que tots els punt d'aparcament tinguin disponibles tantes bicicletes com s'hagi previst que demanaran els seus usuaris.

   L'ajuntament també té una estimació de la quantitat máxima de bicicletes que, en cas que fos necessari, es podrien transportar entre dos punts d'aparcament diferents. Entre tot parell $e = (u, v)$ de punts d'aparcament de la xarxa, es poden transportar fins a $c(e) \geq 0$ bicicletes de u cap a v.

   Dissenyeu un algorisme per a poder decidir si, amb l'estimació de necessitat de bicicletes que té l'ajuntament, podem tenir el servei preparat per funcionar a l'endemà. En cas afirmatiu, el vostre algorisme també ha d'explicitar el nombre de bicicletes que s'han de traslladar d'una estació a una altra per deixar-ho tot preparat. En cas negatiu, digueu quins són els punts d'aparcament que no reben totes les bicicletes necessàries a primera hora del matí. Justifiqueu-ne la correctesa i el cost temporal.

Una solució:

Donat un punt d'aparcament v sigui $d(v) = \alpha_v - \beta_v$. Si $d(v) > 0$ el punt d'aparcament té demanda de bicicletes, que hauràn d'arribar des d'altres punts; si $d(v) < 0$ llavors el punt d'aparcament té un excedent de bicicletes que pot redirigir als altres punts d'aparcament. Sigui V^+ el conjunt de punts d'aparcament tals que $d(v) > 0$ i $D^+ = \sum_{v:d(v)>0} d(v)$; i sigui V^- el conjunt de punts d'aparcament tals que $d(v) < 0$ i $D^- = \sum_{v:d(v)<0} d(v)$. Clarament una condició necessària (pero no suficient) per a poder satisfer totes les demandes és que $|D^-| \geq D^+$.

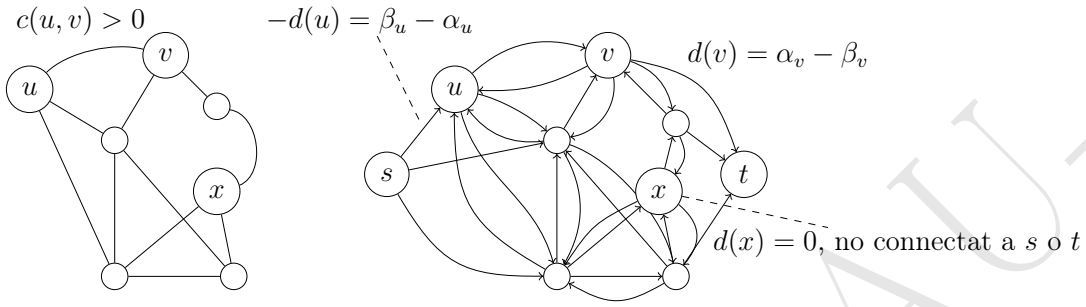
Definim una xarxa $\mathcal{N}$ on:

- Vèrtexos: $V = \{s, t\} \cup$ punts d'aparcament,
- Arestes:

$$E = \{(s, x) \,|\, d(x) < 0\} \;\cup\; \{(y, t) \,|\, d(y) > 0\} \;\cup\; \{(u, v) \,|\, c(u, v) > 0\}$$
$$\cup\, \{(v, u) \,|\, c(u, v) > 0\}$$

  (el subconjunt {(v,u) | c(u,v)>0} s'afegiria només si es considera que la informació sobre el transport entre estacions $c(u, v)$ no està assumint un sentit concret).
- Capacitat $c(s, x) = -d(x), \forall x \in V^-$

- Capacitat $c(y,t) = d(y), \forall y \in V^+$
- Capacitat $c(u,v)$ a la resta d'arestes



Si f és un flux màxim sobre $\mathcal{N}$ amb valor $v(f) = D^+$ això vol dir que existeix la manera de transferir bicicletes des dels punts amb excés de tal manera que totes les demandes D^+ són satisfetes. EL valor del flux en $\mathcal{N}$ mai pot ser $> D^+$ ja que D^+ és la capacitat del tall $\langle V - \{t\}, \{t\}\rangle$. Si el valor del flux màxim és $< D^+$ llavors algún punt d'aparcament v amb $d(v) > 0$ no pot rebre totes les bicicletes que es necessiten.

Totes les capacitats són enters. Si utilitzem l'algorisme de Ford-Fulkerson el cost serà $\mathcal{O}(n^2 D^+)$, doncs $|E| = \mathcal{O}(n^2)$.[4] Si D^+ fos potencialment exponencial respecte a n podem utilitzar l'algorisme d'Edmonds-Karp amb cost polinòmic $\mathcal{O}(m^2 n)$.

Si el valor del flux màxim f és $v(f) = D^+$ llavors $f(u,v)$ és el nombre de bicicletes que haurem de traslladar des del punt u al punt v, per a tot parell (u,v); si $f(u,v) = 0$ llavors és perquè no hem de traslladar cap bici d'u a v. Si el valor del flux màxim és $v(f) < D^+$ els punts d'aparcament y que no reben totes les bicis necessàries són aquells tals que la corresponent aresta (y,t) no està saturada per f, és a dir, tals que $f(y,t) < d(y)$.

Una solució alternativa:

Sigui V' el conjunt de punts d'aparcament. També podem definir la xarxa $\mathcal{N}$ on:

- Vèrtexos: $V = \{s,t\} \cup V'$,
- Arestes: $E = \{(s,v) \,|\, v \in V'\} \cup \{(v,t) \,|\, v \in V'\} \cup \{(u,v) \,|\, u,v \in V', c(u,v) > 0\}$ $\cup \{(v,u) \,|\, u,v \in V', c(u,v) > 0\}$
- Capacitat $c(s,v) = \beta_v, \quad \forall v \in V'$
- Capacitat $c(v,t) = \alpha_v \quad \forall v \in V'$
- Capacitat $c(u,v)$ a la resta d'arestes

I demanar el requeriment que el valor del flux màxim $f^\star = \sum_{v \in V'} \alpha_v$.

[4] El cost pot ser molt millor si el número d'arestes (u,v) amb capacitat $c(u,v) > 0$ fos $\ll n(n-1)/2$.

4. **Qüestions curtes (0.5 punts × 5 = 2.5 punts)**

(a) Donats n enters positius on cadascun d'ells és com a molt V, RadixSort els pot ordenar en temps $\mathcal{O}(n)$ de la següent forma: considera cada enter en base 10 i després els ordena per dígits (començant pels de menys pes) utilitzant CountingSort. Cert o fals?

Una solució: Fals. Cada enter expressat en base 10 tindrà $\mathcal{O}(\log_{10} V)$ dígits. L'algorisme proposat de RadixSort usant CountingSort tindrà cost total $\mathcal{O}(n \log_{10} V)$. Excepte si $V = \Theta(1)$ aquest cost és més que lineal; per exemple, si $V = \Theta(\log n)$ llavors el cost de l'algorisme proposat és $\Theta(n \log \log n)$, si $V = \Theta(n^c)$ per alguna constant $c > 0$ llavors el cost del RadixSort serà $\Theta(n \log n)$, etc.

(b) Considereu un algorisme que te com a entrada un vector *no ordenat* de $3n$ enters diferents $A[1, \ldots, 3n]$ i torna dos enters x i y tals que n elements d'A són $\leq x$, n elements d'A tenen valor entre x i y, i n elements d'A són $\geq y$. És cert que aquest algorisme ha de tenir complexitat $\Omega(n \lg n)$?

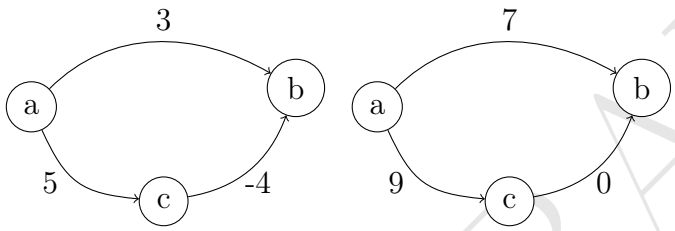
Una solució: Fals. Es pot fer amb temps $\Theta(n)$ seleccionant l'element $(n+1)$-èsim (x) i l'element $(2n+1)$-èsim (y), utilitzant l'algorisme de selecció amb cost lineal en cas pitjor.

(c) Sigui $G = (V, E, w)$ un graf connex, no dirigit, sense multiarestes i ponderat $(w : E \to \mathbb{Z}^+)$, on no es repeteixen pesos. Les dues arestes de menys pes d'E són sempre a tots els MST que s'hi puguin construir. Cert o fals?

Una solució: Cert. Primer, donat que tots els pesos són diferents, el MST és únic. Siguin e_1 i e_2 les arestes de menys pes i la segona aresta de menys pes, respectivament. A l'algorisme de Kruskal, e_1 és sempre la primera aresta que s'afegeix en la construcció del MST. Donat que e_2 no pot crear un cicle amb e_1, serà necessàriament la següent aresta que afegirà l'algorisme de Kruskal. Aleshores, per la correcció de l'algorisme de Kruskal, les dues arestes de menys pes, e_1 i e_2 sempre són al MST.

(d) Si un digraf $G = (V, E, w)$ té arestes de pes negatiu, sigui $w_{\min} < 0$ el menor dels pesos negatius. Definim $G' = (V, E, w')$, on $\forall e \in E : w'(e) = w(e) + |w_{\min}| \geq 0$. Podem trobar els camins mínims de G aplicant Dijkstra sobre G'?

Una solució: Fals. Per exemple, pel digraf $G = (V, E)$ el camí més curt d'a a b passa per c i té pes 1; al digraf G' (a la dreta) el camí més curt entre a i b és l'arc (a, b) i té pes 7, no el camí $a \rightsquigarrow c \rightsquigarrow b$ que té pes 9.



(e) Tenim una xarxa de flux $\mathcal{N} = (E, V, c, s, t)$ i ens donen un conjunt d'arestes F que és un (s, t)-tall amb capacitat mínima. Dieu com seleccionar una aresta d'F per tal que, en treure-la de G, la quantitat en què decreix el flux màxim sigui la més petita possible.

Una solució: El valor f del flux màxim és igual a la capacitat d'F. Si treiem una aresta qualsevol e d'F el conjunt $F' = F \setminus \{e\}$ és necessàriament un (s, t)-tall amb capacitat mínima de la nova xarxa $\mathcal{N}'$. Si l'aresta escollida e és la que té capacitat $c(e)$ mínima dintre d'F llavors el valor de flux màxim disminueix en la quantitat més petita possible ($f' = f - c(e)$).