2.14 - Bottleneck Spanning Tree

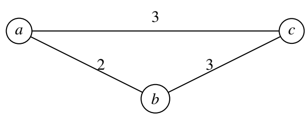
Un *bottleneck spanning tree* T d'un graf no dirigit i ponderat $G = (V,E,w)$, on $w : E \to \mathbb{R}^+$, és un arbre d'expansió de G on el pes més gran és mínim sobre tots els arbres d'expansió de G. Diem que el valor d 'un bottleneck spanning tree és el pes de la aresta de pes màxim a T.

1. Demostreu la correctesa o trobeu un contraexemple pels enunciats següents:
   - *Un bottleneck spanning tree és també un arbre d'expansió mínim.*
   - *Un arbre d'expansió mínim és també un bottleneck spanning tree.*
2. Doneu un algorisme amb cost $O(|V| + |E|)$ que donat un graf G i un enter b, determini si el valor d'un bottleneck spanning tree és $\leq b$.

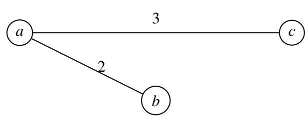
Una solució (prof. Maria J. Serna):

La diferencia fundamental entre un bottleneck spanning tree y un minimum spaning tree es que la medida que tomamos sobre un árbol de expansión (ST) es, en el primer caso, el peso máximo de las aristas en el árbol y, en el segundo la suma de los pesos de todas las aristas. Las propiedades de un MST ya las habeis estudiado recordar las reglas rojas y azul. Para los bottleneckST, por su definición, todos tienen la arista de peso máximo con el mismo valor.

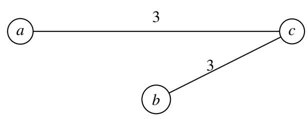
1. - No todo bottleneckSTes un MST. Un contraejemplo es el siguiente



G



MST



BottleneckST

   El BottleneckST tiene peso total 6 y no es un MST.

   - Sí, un MST es un bottleneck spanning tree. La demostración la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que un MST T no es un BottleneckST . Consideremos un BottleneckST T' y sea w el peso de la arista con peso mayor en T'. Esto quiere decir que:

     (a) T tiene una arista e con peso mayor que w, si no sería BottelneckST.

     (b) Todas las aristas en T' tienen peso menor o igual que w.

     Si eliminamos e de T dividimos los vértices de G en dos partes. Pero al ser T' un ST algunas de las aristas de T' tienen que conectar estas dos partes. e no es la arista de peso mínimo en este corte por lo que deducimos que T no puede ser un MST, aplicado la regla azul.

2. Dados G y b, el algoritmo considera solo aquellas aristas con peso $\leq b$ y con un BFS comprueba si el grafo es conexo o no. En el primer caso la respuesta es sí y en el segundo no.

   Para que exista un BottleneckST en las condiciones que se pide, tiene que existir un ST en el que todas las aristas tengan peso $\leq b$, el algoritmo comprueba esta propiedad.

   Podemos modificar la implementación del BFS para que trate solo las aristas con peso $\leq b$ sin tener que modificar el grafo con coste $O(n+m)$.