3.3 - Patrons legals

Considerem una graella de 4 files per n columnes, i un conjunt de $2n$ fitxes. Una fitxa es pot col·locar exactament a una casella de la graella. Definim un *patró legal columna* a una columna de la graella com la situació resultant de col·locar fitxes a la columna de manera que no dues fitxes estiguin en caselles adjacents. De la mateixa manera podem definir un *patró legal fila*. Una *configuració legal* és la situació resultant de situar fitxes a la graella, de manera que totes les columnes i files tinguin patrons legals. A cada casella de la graella hi ha escrit un enter. El *valor* de la configuració és la suma dels enters de les caselles ocupades.

Dos patrons a columnes adjacents són *compatibles* si formen una configuració legal a la matriu formada per les dos columnes.

1. Determineu el nombre total de patrons legals que pot haver en una columna.
2. Dissenyeu un algorisme $O(n)$ per calcular una configuració de valor màxim.

   Ajut: Considereu subproblemes amb les primeres k columnes ($k \leq n$) i un patró prefixat a la columna k.

Una solución (prof. Maria Serna)

1. En una columna podemos colocar como máximo dos fichas y como mínimo ninguna. Esto nos da 8 patrones (a los que identificaremos por un número de 0 a 8):

	x				x	x	
		x					x
			x		x		
				x		x	x

   Una vez tengamos un tablero G podemos calcular $P[i,j]$, $0 \leq i < 8$, $0 \leq j < n$, la puntuación obtenida al colocar las fichas con el patrón i en la columna j, en tiempo $O(n)$.

2. Si miramos una solución óptima, en la columna 0 tenemos un patrón y en la columna 1 un patrón compatible con el de la columna anterior. Además la puntuación obtenida en las columnas 1 a n tiene que ser máxima con la única condición de que el patrón en la columna 1 sea el que tenemos fijado. Si no fuese así podríamos reemplazar la segunda parte de la solución y obtener mejor puntuación.

   Esta estructura de suboptimalidad indica como subproblemas los que se indica en el enunciado, determinados por las columnas k a $n-1$ y un patrón colocado en la columna k.

   Introduzcamos notación, $T(i,k)$ será la puntuación máxima posible a las columnas k a $n-1$ colocando patrón i en la columna k ($0 \leq i < 8$ y $0 \leq k < n$). Teniendo en cuenta el análisis de suboptimalidad tenemos la siguiente recurrencia para calcular la puntuación máxima en cada subproblema:

$$T(i,k) = \begin{cases} P[i,n-1] & \text{si } k = n-1 \\ P[i,k] + \max_{\ell \text{ comp } i} T(\ell, k+1) & \text{si } k < n \end{cases}$$

   Con esto la puntuación máxima que podemos obtener es $\max_{i \in [0..8]} T(i,0)$.

   Si además queremos obtener la solución necesitamos calcular $S(i,k)$ ($0 \leq i < 8$ y $0 \leq k < n-1$) el patrón que nos da el máximo en la fila siguiente.

$$S(i,k) = \arg \max_{\ell \text{ comp } i} T(\ell, k+1).$$

   Utilizo aquí la notación arg para identificar el valor ℓ que proporciona el máximo.

   A partir de esta recurrencia tenemos que

1. Calcular los valores $P[i,k]$
2. Calcular los valores $T(i,k)$ y $S(i,k)$.
3. Calcular la puntuación máxima $\max_{i\in[0..8]} T(i,0)$ y el patrón en la columna 0, $i_0 = \arg\max_{i\in[0..8]} T(i,0)$.
4. Calcular i_k, patrón en la columna k, $k > 1$ utilizando $i_k = S(i_{k-1}, k-1)$.

El paso más costoso es el 2 que se puede implementar con coste $O(1)$ por subproblema (cálculo en tabla o llamada recursiva con memoización) ya que solo hay 8 patrones posibles y n columnas.

El coste total es $O(n)$, ya que el número total de subproblemas es $8n$, el espacio adicional también es $O(n)$.