Algorísmia QT 2020–2021

Examen final **12 de Gener de 2021**

Duració: 2h 30min

Instruccions generals:

- Cal que argumenteu la correctesa i l'eficiència de tots els algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat. La puntuació dependrà fortament d'aquesta argumentació.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu **per separat** les vostres solucions de cada exercici (Ex 1, Ex 2 i Ex 3).
- Cal que resoleu l'exercici 1 fent servir un únic full.
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (4 punts) Cal que justifiqueu les vostres respostes. No podeu fer servir més d'un full per resoldre aquest exercici.

(a) **(0.75 punts)** Fent servir Radix Sort, podem ordenar n enters amb valor més petit o igual que $2^{\log_2(n^2)}$ en temps $O(n)$?

(b) **(0.75 punts)** Tenim una taula A no ordenada que conté n elements diferents. Podem obtenir en $O(n)$ passos una taula B amb $n/4$ elements d'A tals que A i B tinguin la mateixa mediana?

(c) **(0.75 punts)** Donat un graf no dirigit ponderat i connex $G = (V, E, w)$, proporcioneu un algorisme (el més eficient que pugueu) per a trobar un subgraf connex $G' = (V, E')$ tal que la suma dels pesos de les arestes a E' sigui mínima.

(d) **(1 punt)** Un graf *unicíclic* és un graf no dirigit que conté només un cicle. Sigui donat un graf ponderat unicíclic $G = (V, E, w)$, on $w : E \to \mathbb{R}$, i un vèrtex $u \in V$. Proporcioneu un algorisme (el més eficient que pugueu) per a trobar les distàncies d'u a tots els altres vèrtexs de G en cas que sigui possible definir-les.

(e) **(0.75 punts)** Si la capacitat de les arestes d'una xarxa $\mathcal{N}$ és $\leq c$, per una certa constant c, quin algorisme és més eficient en cas pitjor per trobar un flux de valor màxim a $\mathcal{N}$: Ford-Fulkerson o Edmonds-Karp?

Exercici 2 (3 punts) (Rèpliques)

Tenim un sistema S format per la concatenació de n subsistemes $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Per a cada subsistema S_i es coneix la seva probabilitat de fallida ϕ_i. La probabilitat p_{corr} que el sistema funcioni correctament és la probabilitat que **tots** els subsistemes funcionin correctament, és a dir:

$$p_{\text{corr}} = \Pi_{1 \leq i \leq n}(1 - \phi_i)$$

Ara bé, per tal d'augmentar la probabilitat que el sistema funcioni correctament podem replicar els subsistemes; així, si posem $x_i > 0$ rèpliques del subsistema S_i la probabilitat que falli passa a ser

$$\phi_i' = \phi_i^{x_i},$$

donat que només fallarà si les x_i rèpliques fallen. Desgraciadament tenim un pressupost limitat de $B \in N$ euros en total, el cost del subsistema S_i és $v_i \in N$ i només hi ha y_i unitats del subsistema S_i.

Es demana que plantegeu la resolució d'aquest problema mitjançant un algorisme de programació dinàmica (PD) que calculi el nombre de rèpliques $x_1, \ldots, x_n$, amb $x_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, tal que la probabilitat que S funcioni correctament sigui màxima. Les dades del problema són:

- les probabilitats de fallida ϕ_i, $1 \leq i \leq n$,
- el pressupost $B \geq v_1 + \ldots + v_n$ (es podrà comprar una unitat de cada subsistema, com a mínim),
- l'*stock* $y_i \geq 1$ de cada subsistema (s'ha de complir $x_i \leq y_i$), i
- el valor v_i de cada unitat del subsistema S_i (s'ha de complir $\sum_i v_i x_i \leq B$).

En particular, es demana que:

(a) Proporcioneu la recurrència que ens permeti calcular la màxima probabilitat de funcionament correcte, donades les restriccions d'stock i pressupost.

(b) Desenvolupeu un algorisme de PD a partir de la recurrència.

(c) Calculeu el cost en temps i espai del vostre algorisme i demostreu que és polinòmic en n i B.

(d) Descriviu com ampliar/modificar l'algorisme per tal d'obtenir els valors $x_1, \ldots,$ x_n que donen la solució òptima.

Exercici 3 (3 punts) (Vacunació).

La Generalitat ha de planificar els trasllats de les vacunes Covid des de l'aeroport del Prat als diferents centres de distribució de la vacuna a Catalunya. Per dur-ho a terme, ha creat un graf de distribució format per les localitats catalanes a on es poden emmagatzemar vacunes amb les condicions de conservació adients (incloent-hi el propi aeroport). Les connexions entre localitats garanteixen que el transport es pot portar a terme des d'una localitat fins a qualsevol altra, seguint una o més connexions, en temps suficientment curt per tal de no trencar la cadena del fred.

Per a cada localitat, fora del Prat, es coneixen la quantitat màxima de caixes de vacunes que es poden emmagatzemar de forma segura.

Per raons de seguretat, el nombre total de caixes de vacunes que poden circular per una localitat no pot superar la capacitat d'emmagatzematge de la localitat.

(a) Dissenyeu un algoritme que, donats el graf de distribució, la quantitat de caixes que es pot emmagatzemar a cada localitat, les localitats que són centres de distribució i, per a cada centre de distribució, el nombre de caixes de vacunes que es volen traslladar des del magatzem de l'aeroport a ell, determini si és possible fer el trasllat respectant les restriccions descrites abans.

    Podeu suposar que al magatzem del Prat hi ha més caixes de vacunes de les que es volen distribuir.

(b) En cas que el trasllat no es pugui portar a terme, esteneu l'algorisme precedent per tal d'identificar un conjunt de localitats on un increment de seva capacitat d'emmagatzematge garantiria poder portar a terme el trasllat.