1.4

Per a cadascun dels algorismes, digueu quin és el temps en cas pitjor quen l'entrada és un enter positiu $n > 0$.

1. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   $j = i$
   while $j < n$ **do**
   $j = 2 * j$
   end while
   end for

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = i$
- un bucle intern que fa $argmax\{k \mid 2^k i < n\}$ iteracions.
  Quina és aquesta k?

$$2^k i = n$$
$$2^k = n/i$$
$$k = \lg(n/i)$$

Per tant, tenim un cost total de:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + \sum_{i=1}^{n} \lg(n/i) = \lg(\Pi_{i=1}^{n}(n/i)) = \lg(n^n/n!) = n\lg n - \lg n! \\
&\underset{\text{(Stirling)}}{\sim} n\lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n) = n\lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - \lg((n/e)^n) \\
&= n\lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - n\lg(n/e) \\
&= n\lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - n\lg n + n\lg e \\
&= n\lg e - \lg(\sqrt{2\pi n}) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}$$

2. **for** $i = 1$ **to** n **do**

```
for i = 1 to n do
    j = n
    while i * i < j do
        j = j - 1
    end while
end for
```

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = n$
- un bucle intern només s'executa quan $i < \sqrt{n}$ i, per a cada i concreta fa $(n - i^2)$ iteracions.

Per tant, tenim un cost total de:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} (n - i^2) \\
&= n + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} n - \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i^2 \\
&= n + n\sqrt{n} - \tfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}+1)}{6} \\
&= \Theta(n\sqrt{n})
\end{aligned}
$$

3. **for** $i = 1$ **to** n **do**
   $j = 2$
   while $j < i$ **do**
      $j = j * j$
   end while
end for

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = i$
- un bucle intern que fa $argmax\{k \mid 2^{2^k} < i\}$ iteracions.
  Quina és aquesta k?

$$2^{2^k} = i$$
$$2^k = \lg i$$
$$k = \lg \lg i$$

Per tant, tenim un cost total de:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \sum_{i=2}^{n} \lg \lg i \\ &\leq n + \sum_{i=2}^{n} \lg \lg n \\ &= \Theta(n \lg \lg n) \end{aligned}$$

4. i=2

while $(i*i<n)$ **and** $(n \mod i \neq 0)$ **do**

  $i=i+1$

end while

El pitjor cas es dona quan n és primer i, en aquest cas, es fan $\sqrt{n}$ iteracions. Cada iteració té un cost constant. Per tant, el cost total és $\Theta(\sqrt{n})$.