# Algorísmia QP 2017–2018

**Examen final** **15 de juny de 2018**

Durada: 2h 50m

---

Instruccions generals:

- Els exercicis 1 i 2 s'han de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Cognoms, Nom Data

**Exercici 1 (3 punts)** Digueu si les següents afirmacions són certes o no.

(a) (0.5 punts) Donats $n$ enters, cadascun amb un valor màxim de $n^{100}$, es poden ordenar en temps lineal.

(b) (0.5 punts) Per a $r > 0$ definim un $r$-camí com un camí en què totes les arestes del camí tenen pes $< r$. Si $G$ conté un $r$-camí del node $s$ al node $t$, llavors tot MST de $G$ ha de contenir un $r$-camí de $s$ a $t$.

(c) (0.5 punts) Donat un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos sobre les arestes $w : E \to \mathbb{Z}^+$, l'algorisme de Dijkstra i l'algorisme de Bellman-Ford poden produir diferents arbres de camins mínims, malgrat que la mínima distancia entre dos vèrtexs qualsevol serà la mateixa.

(d) (0.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos sobre les arestes $w : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ i siguin $c, a \in V$. Aleshores el camí més curt de $c$ a $a$ no canvia quan incrementem en 1 el pes de totes els arcs.

(e) (0.5 punts) El temps per tal de resoldre un problema de programació dinàmica sempre és $\Theta(k)$, on $k$ és el nombre de subproblemes diferents del problema.

(f) (0.5 punts) Si totes les capacitats a una xarxa de flux són múltiples de 5, aleshores el flux màxim també tindrà un valor que serà un múltiple de 5.

Cognoms, Nom Data

## Exercici 2 (3 punts)

(a) (1.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos $w : V \to \mathbb{Z}^+$, donats dos vèrtexs $u_1, u_2 \in V$ definim el pes d'un camí $w(P(u_1, u_2))$ com $\sum_{v \in P(u_1, u_2)} w(v)$. Si tenim com a entrada $G, w, u_1, u_2$, doneu un algorisme per a calcular el camí amb menys pes entre $u_1$ i $u_2$. Quina és la seva complexitat? (Ajut: transformeu $G$ en $G'$ on els pesos siguin a les arestes)

(b) (1.5 punts) Resoleu el següent problema: Volem anar de Barcelona a Paris seguint l'autopista a través de Lyon, i tenim $n$ benzineres $B_1 \ldots, B_n$ al llarg d'aquesta autopista. Quan teniu el dipòsit ple, el vostre cotxe pot recórrer $K$ km. La benzinera $B_1$ és a Barcelona i la benzinera $B_n$ és a Paris. La distància entre benzineres consecutives és sempre menor que $K$, és a dir $d(B_i, B_i - 1) < K$,

Doneu un algorisme que ens proporcioni una estratègia per fer el mínim nombre d'aturades a benzineres al llarg del viatge Barcelona-Paris.

Cognoms, Nom Data

**Exercici 3 (2 punts)** Considereu el problema d'emmagatzemar $n$ llibres als prestatges de la biblioteca. L'ordre dels llibres és fixat pel sistema de catalogació i, per tant, no es pot canviar. Els llibres han d'aparèixer a les prestatgeries en l'ordre designat. Les prestatgeries d'aquesta biblioteca tenen amplada $L$ i són regulables en alçada. Un llibre $b_i$, on $1 \leq i \leq n$, té gruix $t_i$ i alçada $h_i$. Una vegada es decideix quins llibres es fiquen a un prestatge s'ajusta la seva alçada a la del llibre més alt que col·loquem al prestatge. Doneu un algorisme que ens permeti col·locar els $n$ llibres a les prestatgeries de la biblioteca de manera que es minimitzi la suma de les alçades dels prestatges utilitzats.

Cognoms, Nom Data

---

**Exercici 4 (2 punts)** Les xarxes ad-hoc, composades per dispositius sense fils de baixa potència, s'han proposat per situacions com els desastres naturals en què els coordinadors dels treballs de rescat podrien controlar les condicions en zones de difícil accés. La idea és que una gran col·lecció d'aquests dispositius sense fils es podria llançar des d'un avió en una regió per a continuació reconfigurar-se com una xarxa operativa. Estem parlant de: (a) dispositius relativament barats, el quals (b) es llancen des d'un avió a (c) un territori perillós; i per la combinació de (a), (b) i (c), es fa necessari fer front a la fallida d'un nombre raonable dels dispositius. Cada dispositiu té un abast de transmissió limitat, pot comunicar-se amb altres dispositius que es troben com a màxim a $r$ metres d'ell.

Ens agradaria poder determinar si hi han suficients camins que no comparteixen arcs entre els dispositius de dues zones diferents, $A$ i $B$, a fi de garantir que un senyal d'emergència pot arribar sense problemes des d'algun dispositiu a $A$ a algun dels dispositius a $B$. Per tal d'evitar interferències volem, a més, controlar el *nivell de participació* dels dispositius. Aquest nivell és el màxim nombre de camins en què un dispositiu hi participa.

Suposeu que després del llançament podem obtenir les coordenades $p_i = (x_i, y_i)$ dels $n$ dispositius operatius que formen la xarxa inicial. Suposeu també, que les regions $A$ i $B$ són rectangles i que us donen les coordenades de les seves cantonades. Finalment, us donen també un valor $c$ que determina el nombre de camins mínim que voldríem tenir entre $A$ i $B$.

Dissenyeu un algorisme per determinar si es possible trobar $c$ camins que no comparteixin arestes entre $A$ i $B$.