

Algorísmia QT 2021–2022

Examen Parcial

4 de novembre de 2021

Durada: 1h 25mn

Instruccions generals:

- Entregueu per separat les solucions de cada exercici (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
- Heu de donar i argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per fer-ho podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme suficient per tal que, amb les explicacions i aclariments oportuns, justifiqueu que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació, n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (2.5 punts). Tenim un vector $A[1, \dots, n]$ no ordenat amb claus no necessàriament numèriques, però que pertanyen a un conjunt totalment ordenat de claus. Sigui x_i el 2^i -èsim element més petit en A . Doneu un algorisme per calcular la suma dels valors x_i , per $1 \leq 2^i \leq n$, en $\Theta(n)$ passos.

Exercici 2 (2.5 punts). Et donen un immens graf $G = (V, E)$ amb pesos w a les arestes i has de calcular el MST. Quan finalitzes el càlcul te n'adones que has fet un error copiant el pes d'una aresta $e \in E$. Li has donat un pes $w'(e)$ i havia de ser $w(e)$. Dona un algorisme que trobi el MST correcte en temps lineal.

Exercici 3 (3 punts) Un grup de n amics ha de comprar un regal que val C euros, on C és un enter no negatiu. Tenim una llista amb els pressupostos B_i de cadascun dels amics, és a dir, una llista \mathbf{B} de n enters positius $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$.

Per fer la compra hem de determinar (si és possible) una *aportació*, una llista de quantitats $X = (x_1, \dots, x_n)$, essent x_i la quantitat que aporta l'amic i . L'aportació ha de cobrir el cost del regal, és a dir, $\sum_{i=1}^n x_i = C$. A més, l'aportació particular de cap amic no pot superar mai el seu pressupost, és a dir, per $1 \leq i \leq n$, $x_i \leq B_i$.

El cost d'una aportació X és $c(X) = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Diem que una aportació \mathbf{x}^* es *equitativa* si el seu cost és mínim amb relació al conjunt de totes les possibles aportacions.

Per exemple, supossem que $C = 100$, $n = 3$ i $\mathbf{B} = (3, 45, 100)$. Llavors és possible comprar el regal i una aportació equitativa és $\mathbf{x}^* = (3, 45, 52)$. Si els pressupostos foren $\mathbf{B} = (3, 100, 100)$, una aportació equitativa seria $\mathbf{x}^* = (3, 48, 49)$, però en canvi $\mathbf{x}^* = (3, 45, 52)$ no ho seria .

1. (1 punt) Sigui B_{\min} el pressupost més baix. Demostra que si el regal es pot comprar i $nB_{\min} < C$ hi ha una aportació equitativa en la qual tots els amics amb pressupost B_{\min} aporten B_{\min} .
2. (2 punts) Proporciona un algorisme golafre que determini si es pot o no comprar el regal i, en cas afirmatiu, retorni una aportació equitativa.

Exercici 4 (2 punts) Tenim un graf no dirigit $G = (V, E)$. Com és habitual, d_u denota el grau del vèrtex u . Diem que una partició dels vèrtexs en V_1 i $\bar{V}_1 = V \setminus V_1$ és *equilibrada* quan $\sum_{u \in V_1} d_u = \sum_{v \notin V_1} d_v$.

Doneu un algorisme de programació dinàmica per a determinar si un graf donat té o no té una partició equilibrada.