Desigualdades

$a \cdot b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} o \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$a \cdot b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} o \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$
$\frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} o \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} o \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$

Nota: hallar la intersección entre ambas condiciones y unir los modos

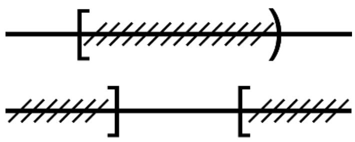
Un conjunto **A**

+ Está acotado superiormente si $\exists k \in \mathbb{R}: k \geq x, \forall x \in \boldsymbol{A}$ y poner ejemplo.
+ No está acotado superiormente $\Longrightarrow \nexists k \in \mathbb{R}: k \geq x, \forall x \in \boldsymbol{A}$.
- Está acotado inferiormente si $\exists k \in \mathbb{R}: k \leq x, \forall x \in \boldsymbol{A}$ y poner ejemplo.
- No está acotado inferiormente $\Longrightarrow \nexists k \in \mathbb{R}: k \leq x, \forall x \in \boldsymbol{A}$.
- · Está acotado $\Leftrightarrow$ está acotado superior e inferiormente.

+ Tiene supremo si:
  - · Tiene cota superior
  - · Si y es cualquier cota superior de $\boldsymbol{A} \Longrightarrow x \leq y$
    - Si hay supremo se denota: $\exists\ supremo\ de\ \boldsymbol{A} = x \in \boldsymbol{A}$
    - Si no hay supremo se denota: $\nexists\ supremo\ de\ \boldsymbol{A}$ y el porqué
- Tiene ínfimo si:
  - · Tiene cota inferior
  - · Si y es cualquier cota inferior de $\boldsymbol{A} \Longrightarrow x \in \boldsymbol{A}$
    - Si hay ínfimo se denota: $\exists\ ínfimo\ de\ \boldsymbol{A} = x \in \boldsymbol{A}$.
    - Si hay no ínfimo se denota: $\nexists\ ínfimo\ de\ \boldsymbol{A}$ y el porqué.

+ Tiene máximo si $x = máx.\boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{A}\ y\ a \leq x,\ \forall a \in \boldsymbol{A}$.
- Tiene mínimo si $x = mín.\boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{A}\ y\ a \geq x,\ \forall a \in \boldsymbol{A}$.

Representación del conjunto **A**



- $\boldsymbol{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$
- $\boldsymbol{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a, b)$
- [ ] → intervalos cerrados y que pertenecen al conjunto **A**.
- ( ) → intervalos abiertos y que no pertenecen al conjunto **A**.
- ( ] → intervalos semiabiertos o semicerrados.
- $+\infty, -\infty,\ \infty$ → intervalos no acotados.

Valor absoluto

Plan
1) Quitar | … |
2) Reescribir sin | … | teniendo en cuenta la desigualdad inicial
3) Resolver

$$|a| = \begin{cases} a, & si\ a \geq 0, \\ -a, & si\ a < 0. \end{cases}$$

Propiedades:

- Si $a > 0$, entonces: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
  $a < |x| \Leftrightarrow x < -a\ \ o\ \ x > a$
  $a \leq |x| \Leftrightarrow x \leq -a\ \ o\ \ x \geq a$
- Multiplicar o dividir por un número negativo invierte la desigualdad.
- $|a| \geq 0;\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$
- $|a + b| \leq |a| + |b|;$
- $|ab| = |a| \times |b|;$

Criterios y reglas prácticas

1) **Límites básicos:**

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n \begin{cases} +\infty, & si\ \alpha > 1 \\ 1, & si\ \alpha = 1 \\ 0, & si -1 < \alpha < 1 \\ \nexists, & si\ \alpha = -1 \\ \infty, & si\ \alpha < -1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \begin{cases} +\infty, & si\ \alpha > 0 \\ 1, & si\ \alpha = 0 \\ 0, & si\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ o\ \left(\frac{0}{0}\right) \to \lim_{n\to+\infty} \frac{P_r(n)}{Q_r(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_r n^r + \cdots + p_1 n + p_0}{q_s n^s + \cdots + q_1 n + p\_0} = \begin{cases} \pm\infty, & si\ r > s \\ \frac{p_r}{q_s}, & si\ r = s \\ 0, & si\ r < s \end{cases}$$

Nota: también para $r, s \in \mathbb{R}$

2) **Criterio del cociente ($a_n \neq 0, \forall n \geq n_0$)**

$$\text{Sea } \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ \Rightarrow \begin{cases} si\ \ l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ si\ \ l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$$

Con factorial por lo general usar criterio del cociente

3) **Criterio de la raíz-cociente ($a_n \neq 0, \forall n \geq n_0$)**

$$\text{Si } \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

4) **Criterio de la raíz**

$$\text{Sea } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ \Rightarrow \begin{cases} si\ \ l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ si\ \ l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$$

5) **Criterio de Sandwich**

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq c_n \geq b_n,\ \ \forall n \geq n_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} c_n = \alpha$$

6) $(\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{acotada})$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ (c_n)\ \ acotada \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot c_n = 0$$

7) $\left(\sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty}\right) \to$ multiplicar y dividir por $\left(\sqrt{+\infty} + \sqrt{+\infty}\right)$

8) **Término dominante**

9) $(\mathbf{1}^\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} {b_n}^{c_n} = (1^\infty) = e^{\lim(b_n - 1)c_n}$$

10) $(\mathbf{0}^\mathbf{0})$ **y** $(\infty^\mathbf{0})$

$$\left.\begin{array}{r} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln {a_n}^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n \qquad \left.\begin{array}{r} a_n \to \infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln {a_n}^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

11) $(\mathbf{0}^{+\infty}) = \mathbf{0}$, $(+\infty^{+\infty}) = +\infty$

12) $(\mathbf{0} \cdot \infty) \to$ Convertir en $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ o\ \left(\frac{0}{0}\right)$

Notas: La regla de l'Hopital NO.

Teorema de convergencia monótona:

(a_n) se denomina: monótona creciente $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

monótona decreciente $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

monótona $\Leftrightarrow (a_n)$ es monótona creciente o monótona decreciente.

(a_n) se denomina: estrictamente creciente $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

estrictamente decreciente $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

estrictamente monótona $\Leftrightarrow (a_n)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema de convergencia monótona.

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ monótona creciente (decreciente)} \\ (a_n) \text{ acotada superiormente (inferiormente)}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

Continuidad

Una función f de dominio D es continua en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, equivale a cumplir:

$(i)\ \ \lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R};$ $\qquad (ii)\ \ a \in D;$ $\qquad (iii)\ \ l = f(a)$

- Si solo cumple la condición (i) $\rightarrow$ f tiene una discontinuidad evitable en a.
- Si no es continua ni discontinua evitable, entonces:
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ → Discontinuidad de salto finito o de primera especie.
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ i/o $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$ → Discontinuidad de salto infinito o asintótica.
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ i/o $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \nexists$ → Discontinuidad esencial

Teorema del signo (Teorema de conservación del signo) → Sirve para demostrar T.B.

$$\left.\begin{array}{r} a, b \in \mathbb{R} \\ a < b \\ f \in C([a,b]) \\ c \in (a,b)\ t.q.\ f(c) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r > 0\ t.q. \forall x \in (c-r, c+r), f(x)\cdot f(c) > 0$$

Teorema de Bolzano → Demuestra que existe solución

$$\left.\begin{array}{r} f \in C([a,b]) \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ f(c) = 0$$

Plan
1) Función auxiliar
2) Comprobar condiciones T.B.
3) Aplicar T.B.

Teorema del valor intermedio → para comprobar que existe un valor en un intervalo cerrado

$$\left.\begin{array}{r} a, b \in \mathbb{R} \\ a < b \\ f \in C([a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall y\ entre\ f(a)\ y\ f(b), \exists x \in [a,b]\ t.q. f(x) = y$$

Método de la bisección → para aproximar ceros de funciones

Base del método: $$\left.\begin{array}{r} f \in C([a,b]) \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ f(c) = 0$$

Error absoluto y su cota superior

$$\varepsilon_{abs} = |Valor\ exacto - Valor\ aproximado| = |c - c_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

Nota: si η es la precisión predeterminada de la aproximación, entonces el número mínimo de pasos que garantiza esta precisión se calcula resolviendo respecto a n la desigualdad siguiente:

$$\frac{b-a}{2^n} < \eta \Rightarrow 2^n > \frac{b-a}{\eta} \Rightarrow \boldsymbol{n} > \mathbf{log_2}\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\eta}}$$

n	a_n (intervalo inferior)	b_n (Intervalo superior)	$f(a_n)$	$f(b_n)$	c_n (media)	$f(c_n)$	Longitud (precisión)

- Si $f(c_n)$ positivo ⇒ intervalo derecho
- Si $f(c_n)$ negativo ⇒ intervalo izquierdo

<u>Método de la secante</u> → para aproximar ceros de funciones

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

La solución c de la ecuación $f(x) = 0$ se aproxima por medio de x_n es decir $c \approx x_n$

Parada del proceso: cuando se cumplen las condiciones $|x_n - x_{n-1}| < \eta$ y $|f(x_n)| < \eta$

n	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
	a	b				

<u>Método de la tangente (Newton - Raphson)</u> → para aproximar ceros de funciones

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Parada del proceso: cuando se cumplen las condiciones $|x_n - x_{n-1}| < \eta$ y $|f(x_n)| < \eta$

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
	Punto más cercano					

<u>Funciones elementales</u> → son f continuas en su dominio y f derivables en a en su dominio.

Funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_n x + a_0$

- $D(f) \in \mathbb{R}$.

Funciones racionales $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$, $b(x) \neq 0$

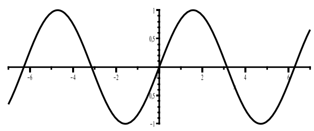
- Dominio todos los $\mathbb{R}$ excepto donde se anula el denominador.

Funciones potenciales $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ (si a es un natural es una función polinómica)

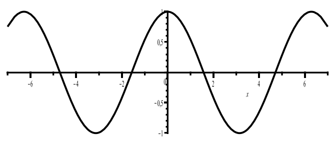
- Si $a > 0 \rightarrow D(f) \in [0, +\infty)$
- Si $a < 0 \rightarrow D(f) \in (0, +\infty)$

Funciones trigonométricas (o circulares) (sen, cos, tan)

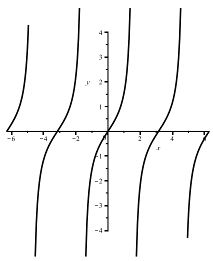
seno



coseno



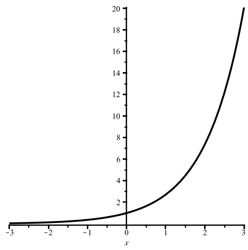
- Función del seno y coseno
  - $D(f) \in \mathbb{R}$.
  - Recorren el intervalo $[-1,1]$.
  - Son periódicas de periodo 2π.
  - La función seno es impar y la función coseno es par.
- Función tangente
  - Su dominio son todos los reales excepto cuando el cos $(x) = 0$, es decir, cuando $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces sus límites laterales tienden a infinito.
  - Es periódica a π.
  - Es impar.
  - Es estrictamente creciente en todo su dominio.



Funciones exponenciales y logarítmicas $f(x) = a^x \to y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

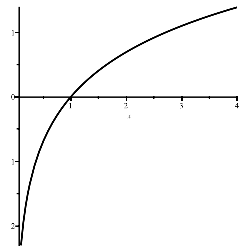
Funciones exponenciales $f(x) = a^x$

- $D(f) \in \mathbb{R}$ y su $R(f) \in (0, +\infty)$.
- Es estrictamente monótona en todo el dominio
  - SI $a > 1$, es estrictamente creciente y
    $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
  - Si $a < 1$, es estrictamente decreciente y
    $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.



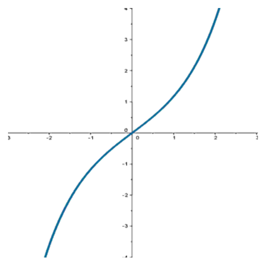
Funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$

- $D(f) \in (0, +\infty)$ y su $R(f) \in \mathbb{R}$.
- Es estrictamente monótona en todo el dominio
  - SI $a > 1$, es estrictamente creciente y
    $\lim_{x\to 0^+} a^x = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
  - Si $a < 1$, es estrictamente decreciente y
    $\lim_{x\to 0^+} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = -\infty$.
- $\left.\begin{array}{l}\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^r = r\log_a x\end{array}\right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \forall r \in \mathbb{R}.$

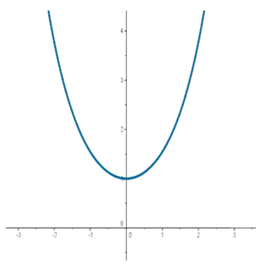


Funciones hiperbólicas

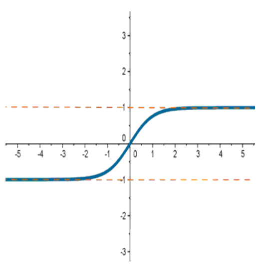
- $f(x) = senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
  - $D(f),\ R(f) \in \mathbb{R}$.
  - Es una función impar.
  - Es estrictamente creciente en todo el dominio.
  - $\lim_{x\to-\infty} senh\, x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} senh\, x = +\infty.$



- $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
  - $D(f) \in \mathbb{R},\ R(f) \in [1, +\infty)$.
  - Es una función par.
  - Es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$, estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, y tiene un mínimo en $(0,1)$.
  - $\lim_{x\to-\infty} cosh\, x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} cosh\, x = +\infty.$



- $f(x) = \tanh x = \frac{senh\, x}{\cosh x}$
  - $D(f) \in \mathbb{R},\ R(f) \in (-1,1)$.
  - Es una función impar.
  - $\lim_{x\to-\infty} tanh\, x = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} tanh\, x = +1.$



Una función f es derivable en un punto a de su dominio si existe límite y es un número real. El número $f'(a)$ se denomina derivada de f en a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es derivable en a entonces f es contínua en a.

Tabla de derivadas u es una función.

f	f'	f	f'
k	0	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
u^k	$ku^{k-1}u'$	$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$\sinh u$	$u' \cosh u$
a^u	$u' a^u \ln a$	$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\sin u$	$u' \cos u$	$\tanh u$	$\frac{u'}{\cosh^2 u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$\arg\sinh u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\arg\cosh u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arg\tanh u$	$\frac{u'}{1-u^2}$

Operaciones son derivadas u i v son funciones

$f \pm g$ es derivable en a	$(f'(x) \pm g'(x)) = f'(x) \pm g'(x)$	en $x = a$
$f \cdot g$ es derivable en a	$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	en $x = a$
$\frac{f}{g}$ es derivable en a si $g(a) \neq 0$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$	en $x = a$

Regla de la cadena

$$\begin{gathered} a \in Dom\, f \\ f(a) \in Dom\, g \\ f \text{ es derivable en } a \\ g \text{ es derivable en } f(a) \end{gathered}$$

$g \circ f$ es derivable en a y en $x = a$:

$$\left((g \circ f)(x)\right)' = \left(g\left(f(x)\right)\right)' = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

Derivada de una función potencial-exponencial

$$y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = \left(f(x)\right)^{g(x)} \cdot \ln\left(f(x)\right) \cdot g'(x) + g(x) \cdot \left(f(x)\right)^{g(x)-1}$$

Teorema del valor medio

$$\left.\begin{gathered} a, b \in \mathbb{R}\ con\ a < b \\ f \in C([a,b]) \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \end{gathered}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Monotonía

- $f'(x) \geq 0$ en $[a,b] \rightarrow f$ es creciente en $[a,b]$
- $f'(x) > 0$ en $[a,b] \rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$
- $f'(x) \leq 0$ en $[a,b] \rightarrow f$ es decreciente en $[a,b]$
- $f'(x) < 0$ en $[a,b] \rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$

Extremo relativo

Si f tiene extremo relativo en a y existe $f'(a) \rightarrow f'(a) = 0$.

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y $\exists r > 0$ tal que $\forall x$ con $a - r < x < a$ se cumple $f'(x) < 0$ y $\forall x$ con $a < x < a + r$ se cumple $f'(x) > 0 \rightarrow f$ tiene mínimo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y $\exists r > 0$ tal que $\forall x$ con $a - r < x < a$ se cumple $f'(x) > 0$ y $\forall x$ con $a < x < a + r$ se cumple $f'(x) < 0 \rightarrow f$ tiene mínimo relativo en a.

Extremos absolutos

- x_m →valor mínimo absoluto de $f\ en\ [a,b]$
- x_M → valor máximo absoluto de $f\ en\ [a,b]$

Teorema de Weierstass

$$\left.\begin{array}{r} a,b \in \mathbb{R} \\ a < b \\ f \in C([a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_m, x_M \in [a,b]\ t.q. \forall x \in [a,b], f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Si f es derivable en (a,b): candidatos a ser x_m i x_M $\begin{cases} a \\ b \\ x \in (a,b)\ t.q.\ f'(x) = 0 \end{cases}$

Teorema del extremo interior

$$\left.\begin{array}{r} a \in Dom\ f \\ f\ derivable\ en\ a \end{array}\right\} \Rightarrow f\ tiene\ un\ extremo\ relativo \Rightarrow f'(a) = 0$$

Teorema de Rolle → Demuestra que sólo existen n soluciones $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{c} f \in C([a,b]) \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists c \in (a,b)\ \ t.q.\ f'(c) = 0$$

Regla de l'Hopital

$$\left.\begin{array}{c} f\ i\ g\ derivables\ en\ (a,b), x_0 \in (a,b) \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0\ (\pm\infty) \\ \exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup (\pm\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Nota: $\lim_{x \to \pm\infty}$

- $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ → Regla de l'Hopital
- $(0\cdot\infty) \rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)\rightarrow 0 \\ g(x)\rightarrow +\infty,-\infty,\infty \end{matrix}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$
- $(0^0) \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L \Rightarrow \ln L = \lim\limits_{x\to x_0} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x) \rightarrow (0\cdot\infty)$
- $(\infty^0) \rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)\rightarrow +\infty \\ g(x)\rightarrow 0 \end{matrix}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x) \rightarrow (0\cdot\infty)$

<u>Unicidad de la solución</u>

Demostración por reducción al absurdo

1) Suponeos que $\exists a,b \in [1,+\infty)\ \ t.q.\ f(a)=f(b)=0$

2) $\left.\begin{matrix} f \in C[a.b] \\ f \in derivable\ en\ (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 3) $(Teorema\ de\ Rolle)$

Suponiendo que ∃ un número de ceros: $a, b, \ldots\ a<b$ los cuales cumplen la condición $f(a)=f(b)=0$

4) Se hace $f'(c)$ (con lo cual hay in cero menos que en $f(x)$) y acabamos llegando a una contradicción (un resultado absurdo).

Plan

Bolzano	**Red. Abs. (Rolle)**
1) Función auxiliar	1) Suponemos $\exists n$ (que existen n puntos, 1 más de los que hay)
2) Comprobar condiciones T.B.	2) Condiciones T.R.
3) Aplicar T.B.	3) Aplicar T.R.
	4) Calcular $f'(c)$

Polinomio de Taylor

Sea f una función n veces derivable en el punto x_0. El polinomio de Taylor de grado n para f en x_0 es el polinomio:

$$P_n(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Propiedades

$$\left.\begin{array}{r} P_n(x_0)=f(x_0) \\ \forall k=1,\ldots,n\ \ P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(a) \end{array}\right\} \text{"}P_n(x)\ y\ f(x)\ son\ iguales\ hasta\ el\ orden\ n\ en\ x_0\text{"}$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto x_0, entonces el **resto/residuo/término complementario** de $P_n(x)$ es: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

Teorema de Taylor y Resto de Lagrange

$$\left.\begin{array}{r} f,f',f'',\ldots,f^{(n)}\ continuas\ en\ [a,b] \\ \exists f^{(n+1)} en\ ]a,b[\\ x_0\in]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall x\in Dom\ f\ \exists c\ entre\ x\ y\ x_0\ tal\ que: \\ f(x)=P_n(x)+\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{array}$$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, para cierto c entre x y x_0

Cuanto mayor es n y más cerca está x de x_0 mejor es la aproximación $f(x)\cong P_{n,f,x_0}(x)$

Aproximación de valores de funciones y acotación del error

$$\left.\begin{array}{r} f,f',f'',\ldots,f^{(n)}\ continuas\ en\ [a,b] \\ \exists f^{(n+1)} en\ [a,b] \\ x_0\in]a,b[\\ f^{(n+1)} continua\ en\ [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists M_{n+1}=\max_{\substack{t\in[x,x_0] \\ o\ t\in[x_0,x]}}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

Para determinar el grado de polinomio (n), se puede ir probando

La aproximación de valores de funciones → $f(x)\cong P_n(x)$

El error de la aproximación $f(x)\cong P_n(x)$ es:

$$\epsilon=|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c se sustituye por el mayor valor que se pueda obtener entre x y x_0

Monotonía y extremos

- Si n par y $f^{(n)}(a)>0\Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a
- Si n par y $f^{(n)}(a)<0\Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a
- Si n impar y $f^{(n)}(a)>0\Rightarrow f$ es creciente en a
- Si n impar y $f^{(n)}(a)<0\Rightarrow f$ es decreciente en a

Convexidad, concavidad y puntos de inflexión

- Si n par y $f^{(n)}(a)>0\Rightarrow f$ es convexa en a
- Si n par y $f^{(n)}(a)<0\Rightarrow f$ es cóncava en a
- Si n impar $\Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en

Norma o módulo de un vector

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propiedades

$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\|x + y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Distancia entre dos puntos

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

Propiedades

$d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d(x, y) = d(y, x)$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), z \in \mathbb{R}^n$

$d(x, 0) = \|x\|$

Sea a un punto y $r > 0$ un número real, se define la bola de centro a y radio r $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : d(a, x) < r\}$, como el conjunto de puntos cuya distancia a a es menor que r.

Complemento de A

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Llamaremos complemento de A el conjunto $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \mathbb{R}^n\}$.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

- El punto a es **interior** de $A \Leftrightarrow \exists B_r(a) \subset A$.
- El punto a es **exterior** de $A \Leftrightarrow \exists B_r(a) : B_r(a) \cap A = \emptyset$.
- El punto a es **punto frontera** de $A \Leftrightarrow \forall\ B_r(a)$ que contiene puntos de A y puntos de A^c.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

- A se llama **abierto** $\Leftrightarrow \forall a \in A$ es interior (Cuando $\mathring{A} = A$).
- A se llama **cerrado** $\Leftrightarrow$ A contiene todos los puntos frontera (Cuando $Fr(A) = A$).
- A se llama **acotado** $\Leftrightarrow \exists B_r(a) \supset A$ (Cuando el conjunto se puede meter dentro de una bola).
- A se llama **compacto** $\Leftrightarrow$ A es cerrado y acotado.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

- La **frontera** de A es el conjunto de todos los puntos frontera de A y se designa ∂A o F rA.
- El **interior** de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A y se designa $\mathring{A}$.
- La **adherencia** de A es el conjunto menor cerrado que contiene A y se designa $Adh\ A\ o\ \bar{A}$.

$$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \setminus \partial A\} \qquad\qquad Adh\ A = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cup \partial A\}$$

Funciones de varias variables

Dominio:

1- Despejar y y despejar x.
2- Mirar por que valores de y y x no cumplen la ecuación.

Curvas a nivel → es la curva que conecta los puntos en que la función tiene el mismo valor constante, es decir, es una curva que conecta los puntos en que la función tiene un mismo valor constante.

Dibujar curva a nivel C:

1- Ecuación implícita $z(x, y) = C$.
2- Aislar x e y.
3- Analizar el comportamiento por encima.
4- Hacer tabla de valores.
5- Dibujar el grafico.

Derivadas parciales de una función de varias variables: Para calcular la derivada parcial de una función respecto a una variable se deriva la función como si fuera una función de una sola variable.

Vector gradiente de una función de varias variables en un punto

1- Hacer las derivadas parciales respecto las variables.
2- Comprobar que es una función continua.
3- Evaluar en el punto indicado sustituyendo las variables por el valor.
4- $\nabla f(los\ puntos\ indicados) = (Resultado\ de\ las\ evaluaciones\ de\ los\ puntos)$.

Derivada direccional de una función en un punto P dependiendo de la dirección del vector $\vec{v}$:

1- Calcular Vector gradiente
2- Comprobar que se cumple $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = 1$
3- $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v$

Plano tangente y recta normal a una superficie de R^3 e un punto de la misma

Ecuación explícita de una función de una superficie de R^3 es del tipo $z = f(x, y)$ siendo una función de 2 variables.

Ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $\big(a, b, f(a, b)\big)$ es:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

Ecuación continua de la recta normal a la superficie $z = (x, y)$ en el punto $\big(a, b, f(a, b)\big)$ es:

$$\frac{x - a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)} = \frac{y - b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}$$

Ecuación implícita de una función de una superficie de R^3 es del tipo $F(x, y, z) = 0$ siendo una función de tres variables.

La ecuación del plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto (a, b, c) es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) \cdot (x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) \cdot (y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \cdot (z - c) = 0$$

La ecuación continua de la recta normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto (a, b, c) es:

$$\frac{x - a}{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)} = \frac{y - b}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)} = \frac{z - c}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}$$

Dirección óptima

$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = |\nabla f(a)| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\nabla f(a)$ y el vector unitario v.

- La derivada direccional máxima en el punto a tiene lugar cuando $\alpha = 0$, es decir, en la dirección y el sentido del $\nabla f(a)$, y su valor es $|\nabla f(a)|$, el módulo del vector gradiente.
- La derivada direccional mínima en el punto a tiene lugar cuando $\alpha = \pi$, es decir, en la dirección del $\nabla f(a)$ pero en sentido contrario (cambiar de signo el punto a), y su valor es $-|\nabla f(a)|$.
- La derivada direccional es nula si $\alpha = \pi/2$, es decir, en cualquier dirección ortogonal (ángulo de 90 grados) al gradiente (cambiar uno de los signos del punto a).

Derivadas parciales de orden superior: Es hacer las derivadas parciales el número de veces que se marquen por cada variable.

Matriz Hessiana

$$con\ 2\ variables \rightarrow H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Polinomio de Taylor de una función de n variables y fórmula de Lagrange del resto

Polinomio de Taylor de grado 2 de f en a, b

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2\right)$$

Fórmula de Lagrange del resto del polinomio de Taylor de grado 2 de f en a, b

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} f'''_{xxx}(c,d)\cdot(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(c,d)\cdot(x-a)^2(y-b) + \\ +3f'''_{xyy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(c,d)\cdot(y-b)^3 \end{pmatrix}$$

Nota: hay que encontrar el valor de $grado \leq c \leq a$ o $grado \geq c \geq a$ y $grado \leq d \leq b$ o $grado \geq d \geq b$ para que la ecuación tenga el valor máximo.

Puntos críticos

f tiene un punto crítico en a cuando $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_n}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = (0,0,\dots,0)$

Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo

f tiene un extremo relativo en el punto a $\Rightarrow f$ tiene un punto crítico en el punto a.

f tiene un punto silla en el punto a cuando f tiene un punto crítico, pero no tiene extremo relativo.

Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo funciones de dos variables

Sea $Hf(a)$ la matriz Hessiana de f en el punto (a,b), entonces:

1. Si $\det(Hf(a)) < 0$, f tiene un punto silla en el punto (a,b).
2. Si $\det(Hf(a)) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, f tiene un mínimo relativo en el punto (a,b).
3. Si $\det(Hf(a)) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, f tiene un máximo relativo en el punto (a,b).
4. Si $\det(Hf(a)) = 0$, para clasificar el punto crítico se ha de hacer un estudio local de f entorno al punto (a,b).

Extremos condicionados

Método de Lagrange

$$\left.\begin{matrix} f(x_1,\dots,x_n)\ función\ a\ optimizar \\ \left.\begin{matrix} g_1(x_1,..,x_n)=0 \\ \cdots \\ g_m(x_1,..,x_n)=0 \end{matrix}\right\}\ condiciones \end{matrix}\right\} f, g_1,\dots,g_m\ de\ clase\ C^1$$

Función de Lagrange:

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+\lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n)+\cdots+\lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n)$$

Construir un sistema de ecuaciones de las derivadas parciales de: $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$

Existencia de extremos absolutos

$$\left.\begin{matrix} f\ contínua \\ conjunto\ compacto\ (cerrado\ y\ acotado) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} f\ tiene\ máximo\ y\ mínimo\ absolutos \\ (Teorema\ de\ Weierstrass) \end{matrix}$$

Cálculo de extremos absolutos

1. Se calculan los puntos críticos de f en el interior compacto de D:

Puntos tales que: $\begin{cases} f'_{x_1}=0 \\ \cdots \\ f'_{x_n}=0 \end{cases}$ y que estén dentro de D

2. Se calculan los puntos críticos de f condicionados por estar en la frontera de D:

OPCIÓN 1: Método de Lagrange $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$

OPCIÓN 2: Si se puede aislar $y=\phi(x)$ de $g(x,y)=0$ y substituirlo en $h(x)=f\big(x,\phi(x)\big)$ y resolver $h'_x(x)=0$.

FUNCIÓN A TROZOS: Para cada trozo realizar la opción 1 o 2 si se puede y mirar vértices (los puntos donde cambia el "trozo").

3. Evaluar los puntos encontrados

$$\left.\begin{matrix} f(puntos\ críticos\ interiores) \\ f(puntos\ críticos\ en\ la\ frontera) \\ f(vértices)(si\ los\ hay) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} Mirar\ cual\ es\ el\ menor\ y\ el\ mayor\ de\ los \\ resultados, esos\ serán\ el\ mínimo\ y\ máximo \\ absolutos, respectivamente \end{matrix}$$