1. Lógica y demostraciones

Lógica preposicional

Las fórmulas de lógica preposicional se constituyen con los siguientes símbolos:

- Letras preposicionales: p, q, r, s … (átomos o fórmulas atómicas)
- Conectivas lógicas:
  - Binarias:

$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
y	o	Si …, entonces …	Si y solo si …, entonces …

  - Unarias:
    $\neg$ (no)

Significado de las conectivas (Tablas de la verdad):

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Asignación

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tipos de fórmulas importantes:

- Tautología: fórmula siempre cierta (La tabla de la verdad siempre da 1)
- Insatisfactible / Contradicción: fórmula siempre falsa (La tabla de la verdad siempre da 0)
- Satisfacible: fórmula que es cierta para alguna asignación (La tabla de la verdad contiene algún 1)

Equivalencia de fórmulas

La siguiente tabla muestra propiedades básicas a partir de las que podemos ir de una fórmula a otra para poder demostrar que dos fórmulas son equivalentes.

Distributiva	$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
Absorción	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$
Idempotencia	$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
Conmutativa	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

Asociativa	$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$	$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$
Neutra	$\varphi \wedge 1 \equiv \varphi$	$\varphi \vee 0 \equiv \varphi$
	$\varphi \vee 1 \equiv 1$	$\varphi \wedge 0 \equiv 0$
Complementaria	$\varphi \vee \neg\varphi \equiv 1$	$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv 0$
Doble negación	$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$	
	$\neg 1 \equiv 0$	$\neg 0 \equiv 1$
Traducción de la →	$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$
Traducucción de la ↔	$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$

Lógica de predicados

Para tener una relación hay que disponer de un “dominio de individuos” y una propiedad de estos individuos, cada individuo del dominio tiene o no una propiedad. El número de individuos se representa mediante el término aridad, es decir, una relación de aridad 1, significa que esta relación es una propiedad que depende de 1 individuo.

Una relación de aridad 2 tiene dos argumentos:

- Es una propiedad que depende de dos individuos.
- La propiedad es del conjunto o relaciona a los individuos entre ellos.
- Cada pareja de individuos tiene o no tiene la propiedad.

Ejemplos (Dominio $\mathbb{Z}$):

- Las relaciones: “ser par”, “ser un cuadrado”, “ser múltiple de 4” son relaciones de aridad 1.
- Las relaciones: “ser menor que $(x < y)$”, “ser igual que $(x = y)$”, “ser congruente módulo 5 $(x \equiv y \ (mod\ 5))$” son relaciones de aridad 2.
- Las relaciones: “x está entre y y z”, “x es congruente con y módulo z” son relaciones de aridad 3.

Para representar una relación de aridad n se usa la siguiente fórmula atómica: $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$, en casos de relaciones binarias (aridad 2) se puede escribir xRy en vez de $R(x, y)$

Cuantificadores:

- $\forall x\varphi \equiv$ Todos los individuos x del dominio cumplen φ.
- $\exists x\varphi \equiv$ Existe algún (al menos un) individuo x del dominio que cumpla φ.

Equivalencia

$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$	$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$	$\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$
$\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

La equivalencia $\forall x\exists y\varphi$ y $\exists y\forall x\varphi$ no es cierta. Por ejemplo, si el dominio son los nombres naturales $\forall x\exists y(x < y)$ es cierta, en cambio $\exists y\forall x(x < y)$ es falsa.

Tampoco son ciertas las equivalencias $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \forall x\psi$ ni $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$. Por ejemplo: $x \in \mathbb{N}$, $P(x)$ es “x es par”, $I(x)$ es “x es impar”, $\forall x\big(P(x) \vee I(x)\big)$ es cierta, en cambio $\forall xP(x) \vee \forall xI(x)$ es falsa.

Formalización

Consiste en expresar en un lenguaje "formal" un enunciado. Consistirá en encontrar una fórmula de la lógica de predicados. Al formalizar con cuantificadores se presuponen:

- Un dominio (o universo) de individuos.
- Unas relaciones entre individuos.

Hay dos patrones que aparecen de manera habitual:

1. $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$ Todos los individuos de tipo A (que tienen la propiedad A) tienen la propiedad B.
2. $\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ Hay individuos de tipo A que tienen la propiedad B.

Nota: para expresar que x cumple las propiedades A y B no se puede expresar de esta manera $A\big(B(x)\big)$, la forma correcta es $A(x) \wedge B(x)$.

Veracidad y cuantificadores

Para justificar que un enunciado es cierto dependerá de su "forma".

- Demostración de un existencial $\exists x P(x)$

  Basta con dar un elemento a del dominio que cumple la propiedad P, es decir, basta con dar un ejemplo que sea cierto

- Demostración de un universal $\forall x P(x)$

  Se hace a partir de una "demostración".

Cuantificadores mezclados

Queremos demostrar	**Que hay que hacer**
$\exists x \in A\;\; P(x)$ Cierto	Dar un ejemplo: Dar $a \in A$ tal que $P(a)$
$\forall x \in A\;\; P(x)$ Falso	Dar un contraejemplo: Dar $a \in A$ tal que $\neg P(a)$
$\exists y \in A\;\; \forall x \in A\;\; P(x,y)$ Cierto	Dar $a \in A$ tal que $\forall x \in A\;\; P(x,a)$ [1]
$\forall x \in A\;\; \exists y \in A\;\; P(x,y)$ Cierto	Por cada $x \in A$ dar $y = E(x)$ tal que $\forall x \in A\;\; P\big(x, E(x)\big)$ [2]

1. La y no puede depender de la x: es constante
2. La y acostumbra a depender de x, aunque en alguna ocasión puede ser constante

Demostraciones

En el lenguaje semiformal (fura de las fórmulas) se usan: i, o, no, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, en vez de: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$.

$A \Rightarrow B \equiv A\ implica\ B \equiv si\ A\ entonces\ B \equiv A$ es la **hipótesis** y B la **Tesis**

Ejemplo: Queremos demostrar que: "por todo entero n, si n es impar entonces $n^2 + 4n - 1$ es par".

1. Escribimos el enunciado de esta forma (que n es un entero se sobreentiende):

$$n \text{ impar} \Rightarrow n^2 + 4n - 1 \text{ par}$$

2. Lo formalizamos:

$$\forall x\big(I(x) \to P(x^2 + 4x - 1)\big)$$

   Dónde $I(x)$ formaliza "x es impar", $P(x)$ formaliza "x es par" i el dominio son los enteros

Pasos lógicos (sirven para que en cualquier momento de una demostración puedan ser usados):

Pasos lógicos			**Tautologías**
$A,\ B$	$\Rightarrow$	A	$(p \wedge q) \to p$
A	$\Rightarrow$	$A\ o\ B$	$p \to (p \vee q)$
$A\ o\ B,\ no\ A$	$\Rightarrow$	B	$\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \to q$
$A,\ A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$	B	$\big(p \wedge (p \to q)\big) \to q$
$no\ B,\ A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$	$no\ A$	$\big(\neg q \wedge (p \to q)\big) \to \neg p$
$ABSURDO$	$\Rightarrow$	A	$0 \to p$
$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C$	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow C$	$\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$

Nota: la coma se usa como si fuera ∧ (una conjunción)

Pasos básicos de la igualdad (a, b, c, … son números reales)

1. $a = a$ (reflexiva)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (simétrica)
3. $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$ (transitiva)
4. $a = b \Rightarrow E(a) = E(b)$ ($E(x)$ es una expresión dónde aparece x)
5. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
6. $a = b \Rightarrow ac = bc$
7. $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
8. $a = b,\ a' = b' \Rightarrow a + a' = b + b'$
9. $a = b,\ a' = b' \Rightarrow aa' = bb'$

Propiedades básicas de la suma y el producto (a, b, c, … son números reales)

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Asociativa de la suma)
2. $a + b = b + a$ (Conmutativa de la suma)
3. $a + 0 = a$ (0 es el neutro de la suma)
4. $a + (-a) = 0$ ($-a$ es el inverso de a de la suma)
5. $a(bc) = (ab)c$ (Asociativa del producto)
6. $ab = ba$ (Conmutativa del producto)
7. $a \times 1 = a$ (1 es el neutro del producto)
8. $a \neq 0 \Rightarrow a \times (1/a) = 1$ ($1/a$ es el inverso de a del producto)
9. $a(b + c) = ab + ac$ (distributiva)

Pasos básicos del orden (a, b, c, … son números reales)

1. $a \leq a$
2. $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$
3. $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$
4. $a \leq b\ \ o\ \ b \leq a$
5. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. $a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
7. $a \leq b,\ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
8. $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$
9. $a^2 \geq 0$
10. $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$
11. $a \leq\ b \Rightarrow a^2 \leq b^2$
12. $a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3$
13. (n natural par) $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$

Otros

1. a natural, b natural $\Rightarrow$ $a+b$ natural, ab natural
2. a entero, b entero $\Rightarrow$ $-a$ entero, $a+b$ entero, ab entero
3. a racional, b racional $\Rightarrow$ $-a$ racional, $a+b$ racional, ab racional
4. b racional, $b \neq 0$ $\Rightarrow$ $1/b$ racional
5. a racional, b racional, $b \neq 0$ $\Rightarrow$ a/b racional

Nota: Podemos definir natural de la siguiente manera: 0 es natural i si a es natural, $a+1$ es natural. No hay más naturales que los que se constituyen aplicando un nombre finito de veces estas reglas.

Prueba directa

Salimos de la hipótesis A i llegamos a la tesis B. Esto se hace mediante pequeñas implicaciones que han de ser muy claras, estas implicaciones pueden ser, por ejemplo, los pasos anteriores.

Queremos demostrar $A \Rightarrow B$
$A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

Prueba del contrarrecíproco

Se basa en: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Queremos demostrar $A \Rightarrow B$
$\neg B \Rightarrow \cdots \Rightarrow \neg A$

Reducción al absurdo

Se basa en: $p \equiv \neg p \to 0$

Queremos demostrar A
$\neg A \Rightarrow \cdots \Rightarrow Contradicción$

Reducción al absurdo II

Se basa en: $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$

Queremos demostrar $A \Rightarrow B$
$A, \neg B \Rightarrow \cdots \Rightarrow Contradicción$

Prueba de una disyunción

Se basa en: $(q \vee r) \equiv (\neg q \to r)$

Queremos demostrar $B \vee C$
$\neg B \Rightarrow \cdots \Rightarrow C$

En caso de más disyuntandos: $p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv (\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_{n-1}) \to p_n$

Queremos demostrar $B_1 \vee \ldots \vee B_n$
$\neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n$

Disyunción al consecuente

Se basa en: $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q \to r)$

Queremos demostrar $A \Rightarrow (B \vee C)$
$A, \neg B \Rightarrow \cdots \Rightarrow C$

Con más disyuntandos: $p \to (q_1 \vee \ldots \vee q_n) \equiv (p \wedge \neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_{n-1}) \to q_n$

Queremos demostrar $A \Rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$
$A, \neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n$

Prueba por casos

Se basa en la tautología: $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \to \big(p \leftrightarrow (p_1 \to p) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p)\big)$

Queremos demostrar B, distinguimos los casos $A_1, \ldots, A_n$
Caso 1: A_1 $A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$ … Caso n: A_n $A_n \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

Nota: hay que hacerlo con todos los casos

Disyunción al antecedente

Se basa en: $(q \vee r) \to p \equiv (q \to p) \wedge (r \to p)$

Es equivalente a hacer una prueba por casos (distinguimos según B o C).

Queremos demostrar $(B \vee C) \Rightarrow A$
$B \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$ $C \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$

Cuando hay más casos:

Queremos demostrar $(B_1 \vee \ldots \vee B_n) \Rightarrow A$
$B_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$ … $B_n \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$

Demostración de una equivalencia

Se basa en: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Queremos demostrar $A \Leftrightarrow B$
$A \Rightarrow B$ $B \Rightarrow A$

Cuando hay más casos:

Queremos demostrar que $A_1,\ A_2, \dots, A_n$ son equivalentes (dos a dos)
$A_1 \Rightarrow A_2$ $A_2 \Rightarrow A_3$ … $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ $A_n \Rightarrow A_1$

Nota: Se puede cambiar el orden de los enunciados $A_1, A_2, \dots, A_n$

Demostración por unicidad

Cuando decimos que “hay como mucho una x que satisface $P(x)$” o bien “si hay una x que satisface $P(x)$ este es único”, estamos expresando: $\forall x, y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

Queremos ver que hay como mucho una x tal que $P(x)$.
$P(x), P(y) \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = y$

Nota: No afirmamos que el elemento x exista, sólo que no hay dos diferentes o, mejor dicho, que hay como mucho uno (puede ser que no haya ninguno).

Nota: Cuando queramos ver que “hay una única x tal que $P(x)$” habrá que ver dos cosas: que existe el elemento x y que es único.

2. Inducción

Inducción simple

Se usa cuando la variable n depende de una infinidad de enteros (una sucesión de números).

Se basa en: $\forall n \geq n_0\ P(n) \equiv P(n_0) \wedge \forall n > n_0\big(P(n-1) \rightarrow P(n)\big)$

Queremos demostrar $\forall n \geq n_0\ P(n)$
$P(n_0)$ $\forall n > n_0\ \big(P(n-1) \rightarrow P(n)\big)$

Se presenta así:

- Paso base $P(n_0)$ | Si es necesario más de un caso inicial: $P(n_0), \dots, P(n_i)$
- Paso inductivo Sea $n > n_0$:
    - Hipótesis de inducción: $P(n-1)$

Queremos ver (tesis): $P(n)$ Procedemos:

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ para $n \geq 1$

Queremos demostrar: $\forall n \geq 1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

- Paso base: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1*(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

- Paso inductivo $n > 1$:
    - H.I. sustituimos n por $n-1$ $\frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n}$

Queremos ver: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Procedemos:

Identidad notable: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n^2-1^2+1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Inducción completa

Se usa cuando queremos demostrar un rango de valores

Se basa en: $\forall n \geq n_0\ P(n) \equiv P(n_0) \wedge \forall n > n_0\ \big(P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \rightarrow P(n)\big)$

Queremos demostrar $\forall n \geq n_0\ P(n)$
$P(n_0)$ $\forall n > n_0\ \big(P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n-1) \rightarrow P(n)\big)$

Se presenta así:

- Paso base: $P(n_0)$ | Si es necesario más de un caso inicial: $P(n_0),\ P(n_0+1),\dots,P(n_i)$
- Paso inductivo: para $n > n_0$:
  - H.I. $P(n_0),\ P(n_0+1),\dots,P(n-1)$
  - Queremos ver: $P(n)$

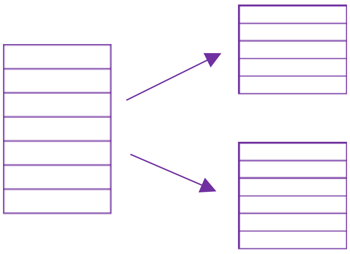
Ejemplo: El problema de las pilas. Tenemos una pila de n cajas y queremos convertir en n pilas de 1 caja. Esto lo haremos subdividiendo cada pila de k cajas en dos pilas r y s caja, dónde $r+s=k$, $r,s>0$. Le pediremos al operario que efectúe esta tarea y cada vez que divida una pila de $r+s$ cajas en dos pilas de r y s cajas le pagamos rs euros. Demuestra que al final, independientemente de la estrategia del operario, si al principio hay n cajas, le pagaremos $n(n-1)\,/\,2$ euros.

- Paso base: $n=2$ (Ha de haber mínimo 2 cajas para separarlas en 2 pilas)

Si hay 2 cajas, las separamos en 2 pilas de 1 caja ($r=s=1$), por lo tanto, el operario cobra $rs = 1*1=1$ euros, es equivalente a $2*(2-1)\,/\,2=1$.

- Paso inductivo $n>2$:

Imaginamos



$k<n$

$(n-k)<n$

Por lo tanto, el operario cobra: $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$

Con n cajas tenemos una 1ª división de $k(n-k)$ cajas que se paga a $k(n-k)$ € y después para $k<n$ y $(n-k)<n$ aplicaremos H.I.

Por lo tanto, basta ver que: $k(n-k)+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2k(n-k)+k(k-1)+(n-k)(n-k-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2} \Leftrightarrow 2nk-2k^2+k^2-k+n^2-nk-n-nk+k^2+k=n^2-n \Leftrightarrow n^2-n=n^2-n.$

Ejemplo: El juego de las cerillas. Hay dos montones con el mismo número de cerillas y dos jugadores. Cada jugador escoge una pila de cerillas y retira de esta pila mínimo una cerilla. Juegan alternativamente. El juego acaba cuando no quedan cerillas i gana el último que saca alguna cerilla del montón. Demuestra que, si el segundo jugador quita cada vez el mismo número de cerillas del montón que el primer jugador, gana.

- Paso base: $n=2$

Indiferentemente de si el primer jugador coge 1 o 2 cerillas del montón, el segundo jugador al imitarlo ganará.

- Paso inductivo $n>2$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El primer jugador quita } k \text{ cerillas } k>0\\ \text{El segundo jugador quita } k \text{ cerillas } k>0\end{array}\right\}\ \text{Quedan } n-k<n \text{ cerillas}$$

Formalizar diferentes definiciones:

- n es par $n=2k$
- n es impar $n=2k+1$
- a divide b $a|b$ o $b=ac$

Definiciones y recordatorios:

- Es primo si los únicos divisores positivos son 1 y p
- $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$
- Residuo (r) = dividendo (x) – divisor (y) × cuociente (q) $\equiv$ $x \bmod y$
- Que un número acabe en cierto dígito, por ejemplo 9, se representa: $10k + 9 \quad \forall k \geq 0$
- Que por ejemplo el residuo de dividir x entre 6 sea 4 se representa: $n = 6k + 4 \quad k \in \mathbb{Z}$
- Números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- Números racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$
- Números irracionales $(\mathbb{I})$ son números decimales infinitos no periódicos
- Nombres reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

3. Conjuntos y relaciones

Los conjuntos son como un tipo de "bolsa" que contienen ciertos objetos en el interior, de manera desordenada. Sólo importa que objetos están dentro y cuáles no. También podemos pensar en una especie de lista dónde no importa el orden y no pueden haber repeticiones. No podemos "llamar" al primer elemento, sólo podemos pedir si un determinado objeto está o no (esto es un booleano, que se llama "función característica").

Cuando un objeto x está en el conjunto A diremos que $\boldsymbol{x}$ **pertenece a** $\boldsymbol{A}$ o que **x es un elemento de** $\boldsymbol{A}$. Lo **denotamos como** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

Cuando un objeto x no está en el conjunto A diremos que $\boldsymbol{x}$ **no pertenece a** $\boldsymbol{A}$ o que **x no es un elemento de** $\boldsymbol{A}$. Lo **denotamos como** $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$.

Los elementos pueden ser de cualquier tipo (números, conjuntos, fórmulas, listas, …).

Existen dos formas de representar un conjunto:

- *Por **extensión**: damos la "lista" (no importa el orden y no hay repeticiones) de sus elementos* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- Por **compresión**: Damos una propiedad $P(x)$ que caracteriza sus elementos ($P(x)$ es una propiedad que todos los elementos del conjunto cumplen y ninguno más)

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A, B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

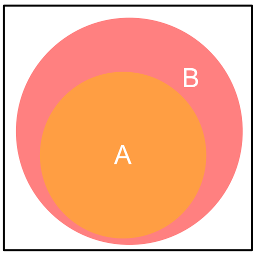
Conjunto vacío

Conjunto que no tiene elementos, se denota como: $\emptyset = \{\ \ \} = \{x \mid x \neq x\}$

Inclusión entre conjuntos (⊆)

A contiene "algunos elementos" (pueden ser todos) de B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$



Propiedades:

1- $\emptyset \subseteq A$.
2- $A \subseteq A$.
3- $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$.

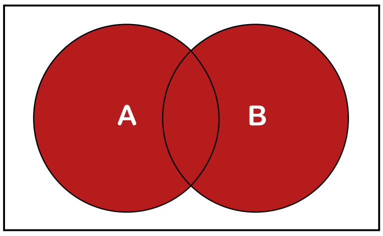
Operaciones entre conjuntos

Unión

Se puede expresar de dos formas:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

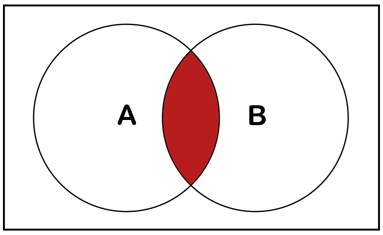


Propiedades:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5. $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$

6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
7. $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C,\ B \subseteq C$

Intersección



Se puede expresar de dos formas:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow\ x \in A \wedge x \in B$$

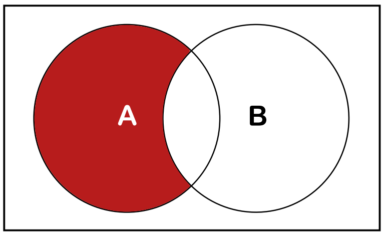
Propiedades:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. A$\cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
7. $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$

Cuando dos conjuntos A, B no tienen elementos comunes se dice que son disjuntos:

$$A\ i\ B\ son\ disjuntos \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Diferencia



Se puede expresar de dos formas:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \Leftrightarrow\ x \in A \wedge x \notin B$$

Propiedades:

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $\emptyset - A = \emptyset$
4. $A - B \subseteq A$
5. $(A - B) \cap B = \emptyset$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
7. $C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \cap B = \emptyset$

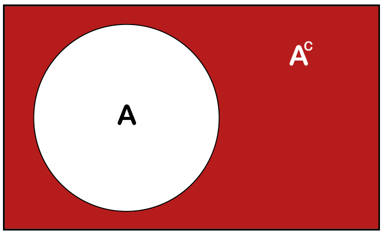
Otras propiedades:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)
2. $A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$
3. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ y la unión es disjunta (los conjuntos $(A - B),\ (B - A), (A \cap B)$ son disjuntos 2 a 2).

Complementario

Suponemos que hay un conjunto *grande* o *universo* Ω que engloba a todos los elementos.

Se puede expresar de dos formas:



$$A^C = \Omega - A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

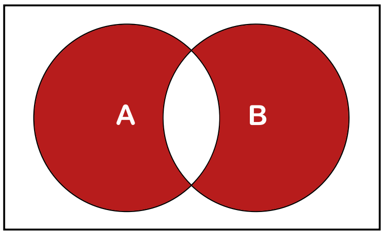
$$x \in A^C \iff x \in \Omega \wedge x \notin A$$

Propiedades:

1. $(A^C)^C = A$
2. $\emptyset^C = \Omega,\ \Omega^C = \emptyset$
3. $A \cap A^C = \emptyset,\ A \cup A^C = \Omega$
4. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (De Morgan)
5. $A - B = A \cap B^C$
6. $B = A^C \iff A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = \Omega$
7. $A \subseteq B \iff B^C \subseteq A^C \iff A \cap B^C = \emptyset \iff A^C \cup B = \Omega$
8. $A \subseteq B^C \iff B \subseteq A^C \iff A \cap B = \emptyset \iff A^C \cup B^C = \Omega$
9. $A^C \subseteq B \iff B^C \subseteq A \iff A^C \cap B^C = \emptyset \iff A \cup B = \Omega$

Diferencia simétrica

Se puede expresar de dos formas:



$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$x \in A \triangle B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Propiedades:

1. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
2. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Partes de un conjunto

Dado un conjunto A definimos el conjunto de las partes (o conjunto potencia) de A así:

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\} \qquad \Big| \qquad x \in P(A) \iff x \subseteq A$$

Ejemplos:

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
- $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Nota: el número de elementos de un conjunto A recibe el nombre de cardinal de A y se denota cómo $|A|$. Tenemos: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Propiedades:

1. $\emptyset \in P(A)$
2. $A \in P(A)$

Producto cartesiano

Pareja ordenada

Idea: la pareja ordenada es como una lista (o vector) de longitud 2 puesta entre paréntesis (a, b)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c, \qquad b = d$$

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A, B definimos el conjunto producto cartesiano de A por B así:

$$A \times B \coloneqq \{x \mid x = (a,b)\ por\ unos\ ciertos\ a \in A\ i\ b \in B\} \qquad \Big| \qquad A \times B \coloneqq \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo:

$$\{1,2,3,4\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\}$$

Demostraciones con conjuntos

Demostraciones de igualdad entre conjuntos (1ª manera)

Queremos demostrar $A = B$
Sea x cualquiera: $\quad x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$

Demostraciones de una inclusión entre conjuntos

Queremos demostrar $A \subseteq B$
Sea x cualquiera: $\quad x \in A \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x \in B$

Demostración de igualdad entre conjuntos (2ª manera)

Queremos demostrar $A = B$
Demostraremos dos cosas: $\quad A \subseteq B,\ \ B \subseteq A$

Demostración que un conjunto es vacío

Queremos demostrar $A = \emptyset$
Por reducción al absurdo: $\quad \exists x \in A \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow Absurdo$

Demostración dónde interviene que un conjunto es vacío

En este tipo de demostraciones una buena estrategia es usar contrarrecíproco o reducción al absurdo por tal de que la condición “ser vacío” aparezca negada.

Notamos que:

- $A \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x\ \ x \in A$
- $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge x \notin B)$
- $A \neq B \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x\ (x \notin A \wedge x \in B)$

Relaciones de equivalencia

Idea: una relación binaria en un conjunto A “relaciona” parejas de elementos de A. Cada pareja de elementos de A pueden estar o no estar relacionados. Determinar la relación consiste en indicar que parejas están relacionadas y cuáles no.

Sea $x, y \in A$. Si están relacionados por una relación R lo escribiremos así:

$$xRy$$

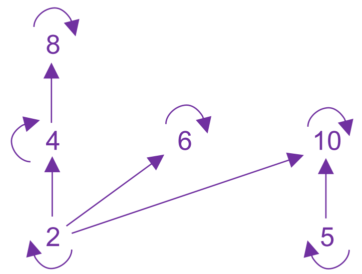
Cuando no están relacionados lo denotaremos por:

$$x\not{R}y$$

Ejemplo: $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,10), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (8,8), (10,10)\}$

Esto quiere decir, por ejemplo, que $2R4$ (2 está relacionado con 4, ya que la pareja $(2,4) \in R$) en cambio 2 no está relacionado con 3 porque la pareja $(2,3) \notin R$. También se pueden representar las relaciones mediante diagramas de Venn con flechas: cada flecha representa una pareja relacionada



En todo conjunto A siempre hay las relaciones siguientes:

- La identidad en A (o igualdad), definida por: $xI_Ay \Leftrightarrow x = y : I_A = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\} = \{(x,x) \mid x \in A\}$
- La relación vacía (ninguno está relacionado con ninguno): $R = \emptyset$
- La relación total (todos están relacionados con todos): $R = A \times A$

Propiedades importantes que pueden tener las relaciones

Reflexiva	$\forall x \in A \quad xRx$
Simétrica	$\forall x, y \in A \quad (xRy \to yRx)$
Transitiva	$\forall x, y, z \in A \quad (xRy \land yRz \to xRz)$
Antisimétrica	$\forall x, y \in A \quad (xRy \land yRx \to x = y)$

Una **relación de equivalencia** es una relación binaria que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: Tenemos un conjunto A de pelotas de colores

- Reflexiva: una pelota $x \in A$ tiene el mismo color que sí misma.
- Simétrica: siendo $x, y \in A$ y x tiene el mismo color que y entonces, y tiene el mismo color que x.
- Transitiva: siendo $x, y, z \in A$, si x tiene el mismo color que y e y tiene el mismo color que z entonces, x tiene el mismo color que z.

Ejemplo: Consideramos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relación siguiente: $(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x| + |y| = |z| + |t|$

- Reflexiva: $(x,y)R(x,y) \qquad |x| + |y| = |x| + |y|$
- Simétrica: $(x,y)R(z,t) \Longrightarrow (z,t)R(x,y)$
  $(x,y)R(z,t) \Longrightarrow |x| + |y| = |z| + |t| \Leftrightarrow |z| + |t| = |x| + |y| \Longrightarrow (z,t)R(x,y)$
- Transitiva: $\left.\begin{matrix}(x,y)R(z,t)\\(z,t)R(u,v)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow |x| + |y| = |z| + |t| = |u| + |v| \Leftrightarrow (x,y)R(u,v)$

Clases de equivalencia y conjunto cociente

Si R es una relación de equivalencia en A i $a \in A$ la clase de a se define así:

$$\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$$

Por lo tanto, dados $a, b \in A$ tenemos:

$$b \in \bar{a} \Leftrightarrow bRa$$

El **conjunto cociente**, que denotamos por A/R, es el conjunto de todas las clases:

$$A/R = \{x \mid x = \bar{a} \; por \; un \; cierto \; a \in A\} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$$

Notamos que:

1. Cada clase de equivalencia es un subconjunto del dominio A.
2. El conjunto cociente A/R es un subconjunto de $P(A)$.

Propiedades:

1. $x \in \bar{x}$
2. Si $x \in \bar{y}$ entonces $\bar{x} = \bar{y}$
3. Si $x \notin \bar{y}$ entonces $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$
4. Las clases forman una "partición" de A, es decir:
    a. Cada clase es no vacía (ya que $x \in \bar{x}$).
    b. Dos clases diferentes son disjuntas: $\forall x, y \in A \; (\bar{x} \neq \bar{y} \rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset)$
    c. La reunión de todas las clases es A.

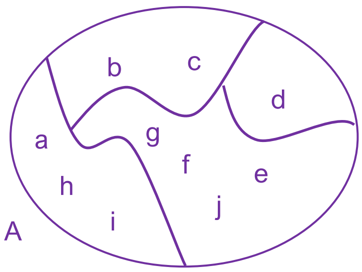
Particiones

Idea: tenemos un conjunto A y lo rompemos (o repartimos) en trozos.

Definición: una partición P de A es un conjunto de subconjuntos no vacíos de A, disjuntos 2 a 2 y tal que su reunión es total. Más precisamente: P es una partición de A si:

- $\forall B \in P \;\; B \subseteq A$ (de manera equivalente: $P \subseteq P(A)$)
- $\forall B \in P \;\; B \neq \emptyset$
- $\forall B \in P \; \forall C \in P \; (B \neq C \rightarrow B \cap C = \emptyset)$
- Si $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ entonces $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
  ($\forall x \in A \; \exists B \in P \; x \in B$ si la partición no es finita)

Ejemplos:



En el dibujo hemos roto el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ en 4 trozos: $\{b, c\}, \{d\}, \{e, f, g, j\}, \{a, h, i\}$. El conjunto formado por estas 4 partes es una partición de A: $\{\{b, c\}, \{d\}, \{e, f, g, j\}, \{a, h, i\}\}$

- $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}\}$ es una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}\}$ **no** es una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{6, 7\}\}$ **no** es una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Hemos visto que si R es una relación de equivalencia a A, entonces A/R es una partición de A.

Si P es una partición de A, cada elemento x de A pertenece a una única "parte" (elemento de P). Es decir, por cada $x \in A$ hay un único $B \in P$ tal que $x \in B$. Entonces definimos la relación R así:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ y } y \text{ pertenecen al mismo } B \in P$$

Es fácil ver que es una relación de equivalencia. Entonces, si $x \in B \in P$ resulta qie $\bar{x} = B$. Por lo tanto, el conjunto cociente $A/R = P$.

4. Funciones

Una función (o aplicación) f consta de un conjunto "origen" A, un conjunto de "destino" B y una "regla" que asocia a cada elemento $x \in A$ a un **único** elemento $y \in B$. Formalmente la "regla" es una relación $R \subseteq A \times B$ que satisface:

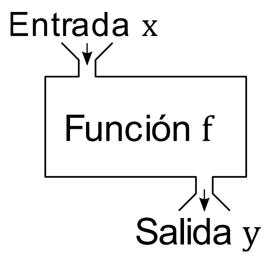
- $\forall x \in A \ \exists y \in B \ (x,\ y) \in R$
- $\forall x \in A \ \forall y, y' \in B \left((x,\ y) \in R \wedge (x,\ y') \in R \rightarrow y = y'\right)$

A la única $y \in B$ tal que $(x,\ y) \in R$ la llamamos **imagen** del elemento x y lo denotamos (a la imagen) cómo $\boldsymbol{f(x)}$. De esta manera podemos expresar las dos propiedades anteriores como:

- $\forall x \in A \ f(x) \in B$ — Para toda entrada A hay una salida B
- $\forall x, x' \in A \ \left(x = x' \rightarrow f(x) = f(x')\right)$ — Para la misma entrada siempre se ha de dar la misma salida

Cuando estas dos condiciones se cumplen decimos que f **está bien definida**.

Idea: la "regla" es como una especie de programa, A es un conjunto de entradas posibles y B es un conjunto que contiene todas las salidas posibles (el conjunto de entradas puede ser más grande que el conjunto de todas las salidas). A corresponde a una especificación de la entrada del programa: A es el conjunto de objetos que satisfacen la precondición del programa. B correspondería a una "especificación" de la salida: B es el conjunto de objetos que satisfacen la postcondición del programa.



Notación:

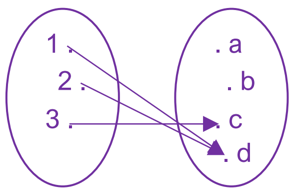
$$f\colon \quad A \rightarrow B, \qquad x \rightarrow f(x)$$

Terminología:

- El conjunto A recibe el nombre de **dominio** o más formalmente conjunto de origen, mientras que B recibe el nombre de **codominio** (informalmente hablamos de conjunto de destino o llegada). Intentaremos evitar la palabra "salida" porque se puede referir tanto al dominio como al codominio.
- $f(x)$ es la imagen de x.
- Si $f(x) = y$, x es una **antiimagen** de y, y es la **imagen** de x.
- Cuando decimos que $f\colon A \rightarrow B$ **está bien definida** queremos decir que se cumplen las dos condiciones de la definición: Cada $x \in A$ tiene una única imagen $f(x)$ y esta pertenece a B.

Ejemplos:

- $f\colon \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = |x|$
- $f\colon \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \frac{3x-5}{4}$
- $f\colon \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c,d\}$ definida por $f(1) = d,\ f(2) = d,\ f(3) = c$.



Igualdad entre aplicaciones

Dos aplicaciones son iguales cuando:

- Tienen el mismo dominio y el mismo codominio
- La misma "regla", es decir, con las mismas entradas corresponden las mismas salidas.

$$\text{Dadas} \quad f,\ g : A \rightarrow B$$

$$f = g \qquad \text{sí y sólo si} \qquad \forall x \in A \ f(x) = g(x)$$

Ejemplos:

- Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 + 1$ son las tres diferentes.
- Las funciones $f,\ g : \{1, 2\} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 2$ son iguales (son la misma función).

Propiedades importantes que pueden tener las aplicaciones $f : A \to B$

- Inyectiva $\forall x, x' \in A \ \ (f(x) = f(x') \to x = x')$ Cada vez que cogen dos elementos del dominio que tienen la misma imagen los dos elementos son equivalentes
- Exhaustiva $\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ \ f(x) = y$ Por cada elemento del codominio hay como mínimo un elemento del dominio
- Biyectiva inyectiva y exhaustiva

Notamos que:

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ todo $y \in B$ tienen como mucho una antiimagen.
- f es exhaustiva $\Leftrightarrow$ todo $y \in B$ tiene como mínimo una antiimagen.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ todo $y \in B$ tiene una única antiimagen.

Función inversa

Para que una función sea "inversa" de una aplicación, esta ha de ser biyectiva.

Si $f : A \to B$ es biyectiva, sabemos que todo elemento $y \in B$ tiene una única antiimagen. Entonces **la función inversa** de f, que denotamos por f^{-1}, es la aplicación que va de B a A y que todo $y \in B$ le hacen corresponder su única antiimagen.

$$f : A \to B \text{ biyectiva}$$

$$f^{-1} : B \to A$$

$$f^{-1}(y) := \text{la única antiimagen de } y = \text{la única } x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

Notamos que:

- f ha de ser biyectiva, si no la inversa no existe
- $f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$

Propiedad:

Si f es biyectiva entonces f^{-1} también es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.

Imagen y antiimagen de un conjunto

Dados $f : A \to B,\ \ X \subseteq A \ \ Y \subseteq B$ definimos:

- El conjunto imagen de X:

$$f(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X \ \ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

$$y \in f(X) \Leftrightarrow \exists x \in X \ \ f(x) = y$$

- El conjunto antiimagen de Y:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) = Y\}$$

$$\text{Si } x \in A\text{:} \ \ x \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(x) = Y$$

Notamos que:

- $f(X)$ es un subconjunto de B (el conjunto de todas las imágenes de los elementos de X).
- $f^{-1}(Y)$ es un subconjunto de A (el conjunto de todas las antiimágenes de los elementos de Y).

Composición de aplicaciones

Dadas $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definimos la composición de f con g, que llamaremos f compuesta con g y denotemos por $g \circ f$, así:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Notaremos que:

- No siempre se puede componer, sólo cuando el codominio de la primera aplicación es la misma que (o este contenido en) el dominio de la segunda.
- Decimos f compuesta con g, pero lo denotamos $g \circ f$.

Propiedades:

- $f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Asociatova)
- Si $f : A \to B,$ entonces $I_B \circ f = f \circ I_A = f$

Propiedades de la composición, inyectividad y exhaustividad:

- La composición de aplicaciones inyectivas es inyectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
- La composición de aplicaciones exhaustivas es exhaustiva.
- Si $g \circ f$ es exhaustiva entonces g es exhaustiva.
- La composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva.
- Si $g \circ f$ es biyectiva entonces f es inyectiva y g es exhaustiva.

Propiedades de la composición y la inversa:

- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$
- Si $f : A \to B \quad g : B \to A$ satisfacen $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$, entonces las dos son biyectivas y cada una es la inversa de la otra: $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$

Demostraciones con funciones

Demostración que $f : A \to B$ es inyectiva

Sean $x, x' \in A$ cualquiera: $f(x) = f(x') \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = x'$

Demostración que $f : A \to B$ NO es inyectiva

Dado $x, x' \in A$ satisfaciendo: $x \neq x', \quad f(x) = f(x')$ (un contraejemplo)

Demostración que $f : A \to B$ es exhaustiva

Sea $y \in B$ cualquiera. Tenemos que dar alguna $x \in A$ tal que $f(x) = y$

Demostración que $f : A \to B$ NO es exhaustiva

Tenemos que dar $y \in B$ que no tenga ninguna antiimagen (por la que la "ecuación" $f(x) = y$ no tiene ninguna solución $x \in A$).

Demostración que $f : A \to B$ es biyectiva

1ª manera: f es inyectiva y exhaustiva

2ª manera: Sea $y \in B$ cualquiera. Tenemos que ver que hay un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Demostración que las aplicaciones $f, g : A \to B$ son iguales ($f = g$)

Dada $x \in A$, tenemos que ver $f(x) = g(x)$

5. Divisibilidad

Dados dos enteros a, b definimos: $a \mid b \Leftrightarrow$ existe un entero q tal que $b = aq$

$a \mid b$ se lee a divide b. También decimos que a es un divisor de b o que b es un múltiplo de a.

Ejemplos: $2 \mid 6,\ \ 6 \mid 6,\ \ 6 \mid -12,\ \ -4 \mid 12.$

Notamos que:

- No es exactamente lo mismo $a \mid b$ que $b/a \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \neq 0$ si que es equivalente: $a \mid b \Leftrightarrow b/a \in \mathbb{Z}$.
- $a \mid b \Leftrightarrow (a = b = 0) \vee (a \neq 0 \wedge b/a \in \mathbb{Z})$.

Propiedades: Para todo a, b, c, u, v enteros:

1. $1 \mid a$
2. $a \mid 0$
3. $a \mid a$ (Reflexiva)
4. $a \mid b,\ \ b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (Transitiva)
5. $a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$
6. Si $c \neq 0$, $ac \mid bc \Rightarrow a \mid b$ (Simplificación)
7. $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$
8. $a \mid b \Leftrightarrow a \mid -b \Leftrightarrow -a \mid b \Leftrightarrow -a \mid -b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$ (No depende del signo)
9. Si $b \neq 0$, $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$
10. $a \mid b$, $b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$
11. $a \mid b$, $a \mid c \Rightarrow a \mid ub + vc$ (**Linealidad**)

Ejemplo: Queremos encontrar a todos los enteros divisores de 6 y 15 a la vez. Si $a \mid 6$ y $a \mid 15$, por linealidad, $a \mid 15 - 2 * 6 = 3$. Recíprocamente, $a \mid 3$ por la propiedad 7, $a \mid 3 * 5 = 15$ y $a \mid 3 * 2 = 6$. Así, los divisores comunes de 6 y 15 son los enteros a tales que $a \mid 3$, es decir, $\pm 1, \pm 3$.

Números primos

Dado un número entero p : p es primo $\Leftrightarrow$ $p \geq 2$ y los únicos divisores positivos de p son 1 y p

Notamos que:

- Los números primos son positivos y el 1 no es primo.
- Si $n \geq 2$, y no es primo (recibe el nombre de compuesto) entonces $n = rs$ para ciertos enteros r, s con $2 \leq r < n$, $2 \leq s < n$.
- Los números $1, -1$ no tienen divisores primos.

Resultados:

- Todo número entero $n \geq 2$ es primo o es producto de números primos.
- Todo número entero $n \geq 2$ tiene algún divisor primo p. Si además n no es primo, podemos escoger algún divisor primo $p \leq \sqrt{n}$.
- Hay infinitos números primos

Test de primalidad: Para verificar que un número n es primo, basta con verificar que no tiene ningún divisor primo $\leq \sqrt{n}$.

Máximo común divisor (mcd)

El máximo común divisor de los enteros $a_1, a_2, \dots, a_n$ es el más grande de todos los divisores comunes de $a_1, a_2, \dots, a_n$ si alguno de estos valores no es 0. Los divisores comunes de $0, 0, \dots, 0$ son todos los enteros y por lo tanto no hay un máximo. En este caso se toma el 0 como mcd por definición. El máximo común divisor de $a_1, a_2, \dots, a_n$ lo denotamos como $mcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Esto lo podemos expresar así:

$$mcd(0, 0, \dots, 0) = 0$$

- Si algún $a_i \neq 0$, $mcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es el único entero d que verifica las dos propiedades siguientes:
  - $d \mid a_i$ por cada i
  - Si $d' \mid a_i$ por cada i entonces $d' \leq d$.

Propiedades: Por cualquier entero a, b, u tenemos que:

- **Si $\boldsymbol{a \mid b}$ entonces $\boldsymbol{mcd(a, b) = |a|}$**
- $mcd(a, 0) = |a|$
- Si p es primo y no divide b, entonces $mcd(p, b) = 1$
- El mcd no depende del signo: $mcd(a, b) = mcd(a, -b) = mcd(-a, b) = mcd(-a, -b)$
- $mcd(a, b) = mcd(a + ub, b)$ **(Teorema de Euclides)**

a i b son **primos entre si** $\Leftrightarrow mcd(a, b) = 1$ El máximo común divisor es 1 o -1

Primos entre sí o **relativamente primos**

Observación: a i b son primos entre si $\Leftrightarrow$ no tienen ningún divisor primo común

División euclidiana

Dados a, b enteros siendo $b \neq 0$, existen unos únicos enteros q, r tales que:

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < |b|$$

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

q es el cociente y r el residuo de la división de a por b

Algoritmo de Euclides

Queremos calcular $mcd(a, b)$. Como que el mcd no depende del signo podemos empezar suponiendo que $a \geq b > 0$. Para calcular el mcd usamos esta tabla de referencia:

$\boldsymbol{q}$		q_1	q_2		q_{n-1}		
$\boldsymbol{r}$	$r_0 = a$	$r_1 = b$	r_2	…	r_{n-1}	r_n	0

Ejemplo: $mcd(14001, 279) = mcd(279, 51) = mcd(51, 24) = mcd(24, 3) = 3$

q		50	5	2		
r	14001	279	51	24	3	0

Identidad de Bézout

Dados a, b enteros cualesquiera, existen x, y enterps tales que $mcd(a,\ b) = ax + by$. Es básicamente otra de plasmar el apartado anterior.

Una forma sistemática de calcular esta identidad:

x	1	0	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n	
y	0	1	y_2	y_3	…	y_{n-1}	y_n	
q		q_1	q_2	q_3	…	q_{n-1}		
r	$r_0 = a$	$r_1 = b$	r_2	r_3	…	r_{n-1}	r_n	0

Aplicando el ejemplo anterior:

x	1	0	1	-5	11	
y	0	1	-50	251	-552	
q		50	5	2		
r	14001	279	51	24	3	0

$$3 = 14001(11) + 279(-552)$$

Notamos que: Las identidades de Bézout no son nunca únicas. Siempre podemos y restar múltiples de $\frac{ab}{mcd(a,b)}$: $ax + by = a\left(x + t\frac{b}{mcd(a,b)}\right) + b\left(y - t\frac{a}{mcd(a,b)}\right)$

Consecuencias de Bézout

Lema de Gauss Si $a \mid bc$ y $mcd(a,b) = 1$ entonces $a \mid c$

Lema de Euclides Si p es primo y $p \mid bc$ entonces $p \mid b$ o $p \mid c$

Descomposición en factores primos

Unicidad de la descomposición en factores primos

Todo entero $n \geq 2$ tiene una descomposición única de la siguiente forma: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$, dónde cada p_i es primo y cada $e_i > 0$.

Esto quiere decir que el k, los $p_1, \dots, p_k$ y los $e_1, \dots, e_k$ son los únicos (sin considerar la permutación).

Ejemplo: $84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$ $90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

Descomposición en factores primos con signo y exponentes posiblemente nulos

Todo entero $n \neq 0$ tiene una descomposición de la siguiente forma: $n = \varepsilon p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$, dónde $\varepsilon = \pm 1$, cada p_i es primo y cada $e_i \geq 0$.

Notamos que: en esta última factorización tanto ε como los exponentes son únicos. Pero ni la k ni los $p_1, \dots, p_k$ son únicos, ya que siempre podemos añadir un nuevo primo con exponente 0.

Por ejemplo: $-28 = (-1) \times 2^2 \times 7^1 = (-1) \times 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^0$

Gracias a eso siempre podemos suponer que aparecen los mismos números primos en la misma factorización de distintos números.

Por ejemplo: $84 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^0$, $-90 = (-1) \times 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 \times 11^0$, $-264 = (-1) \times 2^3 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times 11^1$

Cálculo del mcd a partir de la factorización y consecuencias

Divisibilidad y cálculo del mcd a partir de la factorización

Si expresamos $a = \varepsilon_1 p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ y $b = \varepsilon_2 p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}$ con $e_i,\ f_i \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ y cada p_i primo entonces tenemos:

1. $a \mid b \Leftrightarrow e_i \leq f_i$ por cada i
2. $mcd(a,b) = p_1^{\min(e_1,f_1)} p_2^{\min(e_2,f_2)} \dots p_k^{\min(e_k,f_k)}$
3. La fórmula del mcd también vale con 2 o más números cogiendo el mínimo de los distintos exponentes.
4. Los divisores positivos de a son todos los números de la forma $p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_k^{g_k}$ con $0 \leq g_i \leq e_i$
5. El número de divisores positivos de a es $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_k + 1)$

Ejemplo: $mcd(84, -90, -264) = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times 11^0$

Consecuencias de la factorización

1. **Todo divisor común de $a,\ b$ divide $mcd(a,\ b)$. De hecho:** $\boldsymbol{d \mid a}$ **i** $\boldsymbol{d \mid b \Leftrightarrow d \mid mcd(a,\ b)}$
2. $mcd(mcd(a,\ b),\ c) = mcd\big(a,\ mcd(b,\ c)\big) = mcd(a,\ b,\ c)$ (Asociatividad mcd)
3. $mcd(ca,\ cb) = |c| mcd(a,\ b)$
4. $mcd(a/mcd(a,\ b)\ ,\ b/mcd(a,\ b)) = 1$ (Si $mcd(a\ \ b)$ no es nulo)
5. Todas las propiedades anteriores valen también con 3 o más enteros.

Nota: El cálculo eficiente de $mcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ se puede hacer aplicando la asociatividad del mcd y en cada paso, calcular el mcd de dos números mediante el algoritmo de Euclides.

Ecuaciones diofánticas

Las ecuaciones diofánticas son ecuaciones a coeficientes enteros de los cuales buscamos soluciones enteras.

Ejemplo: $6x - 10y = 4$

$$mcd(6x, -10) = 2 \qquad \frac{c}{mcd(a,b)} = \frac{4}{mcd(6,-10)} = 2$$

x	1	0	1	-1	2	
y	0	1	0	1	-1	
q		0	1	1	2	
r	6	-10	-6	4	2	0

Resolución de ecuaciones diofánticas

- La ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución $\Leftrightarrow mcd(a,\ b) \mid c$
- Las soluciones particulares se obtienen multiplicando una identidad de Bézout de $(a,\ b)$ por $\frac{c}{mcd(a,\ b)}$ en ambos lados.
- Si $x_0,\ y_0$ es una solución particular de la ecuación anterior, todas las soluciones son de la forma: $x = x_0 + \frac{b}{mcd(a,\ b)} t,\quad y = y_0 - \frac{a}{mcd(a,\ b)} t$ para un cierto entero t.

Mínimo común múltiple

El mínimo común múltiple de los enteros $a_1, a_2, \dots, a_n$ es el más pequeño de todos los múltiples comunes positivos (> 0) de $a_1, a_2, \dots, a_n$, si hay. Esto pasa cuando todos los a_i son $\neq 0$. Si alguno de los $a_i = 0$ el único múltiple común es 0. El mínimo común múltiple de los números enteros $a_1, a_2, \dots, a_n$ lo denotamos como $mcm(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definición:

- Si algún $a_i = 0$, $mcm(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$
- Si todo $a_i \neq 0$, el $mcm(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es el único entero m que verifica las dos propiedades siguientes:
  - $m > 0$ y $a_i \mid m$ por cada i
  - Si $m' > 0$ y $a_i \mid m'$ por cada i entonces $m \leq m'$

Propiedades:

1. Si $a \mid b$ entonces $mcm(a,\ b) = |b|$
2. El mcm no depende del signo: $mcm(a,\ b) = mcm(a, -b) = mcm(-a,\ b) = mcm(-a, -b)$

Cálculo del mcm a partir de la factorización y consecuencias

Cálculo del mcm a partir de la factorización

Si expresamos $a = \varepsilon_1 p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ y $b = \varepsilon_2 p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}$ con $e_i,\ f_i \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ y cada p_i primo entonces tenemos:

$$mcm(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_k^{\max(e_k, f_k)}$$

Esta fórmula también vale con 3 o más números cogiendo el máximo de los distintos exponentes.

Ejemplo: $84 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^0$, $\quad -90 = (-1) \times 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 \times 11^0$,
$-264 = (-1) \times 2^3 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times 11^1$

$$mcm(84, -90, -264) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1$$

Consecuencias:

1. **Calculo eficiente del mcm:** $\boldsymbol{mcd(a,\ b) \times mcm(a,\ b) = |ab| \Rightarrow mcm(a,\ b) = \frac{|ab|}{mcd(a,b)}}$ **(sólo con 2 números)**
2. **Todo múltiple común de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ es múltiple de $\boldsymbol{mcm(a,\ b)}$. De hecho: $\boldsymbol{a \mid m}$ i $\boldsymbol{b \mid m \Leftrightarrow mcm(a,\ b) \mid m}$**
3. $\boldsymbol{mcm(mcm(a,\ b),\ c) = mcm\big(a,\ mcm(b,\ c)\big) = mcm(a,\ b,\ c)}$ **(Asociatividad mcm)**
4. Todas las propiedades anteriores valen también con 3 o más enteros excepto la propiedad 1.

6. Congruencias

La relación binaria siguiente a $\mathbb{Z}$ recibe el nombre de congruencia. Hay una por cada $m \geq 1$. El nombre m recibe el nombre de módulo de la congruencia.

Definición:

Dada $m \geq 1$

$$a \equiv b(mod\ m) \quad \Leftrightarrow \quad m \mid b - a$$
$$\Leftrightarrow \quad b = a + km \text{ para una cierta } k$$
$$\Leftrightarrow \quad a \text{ i } b \text{ tienen el mismo residuo al dividir por } m$$

Cuando $a \equiv b(mod\ m)$ se dice que a es congruente con b módulo m

Ejemplos:

1. $7 \equiv 15(mod\ 4)$ — $15 - 7$ es múltiple de 4
2. $7 \not\equiv 12(mod\ 4)$ — $12 - 7$ no es múltiple de 4
3. $a \equiv b(mod\ 1)$ — $a - b$ cualquier número es múltiplo de 1
4. $a \equiv b(mod\ 2) \Leftrightarrow a\ es\ par$
5. $a \equiv 1(mod\ 2) \Leftrightarrow a\ es\ impar$
6. $a \equiv b(mod\ 2) \Leftrightarrow a$ i b tiene la misma paridad

Propiedad 1 La congruencia módulo m es una relación de equivalencia

Clases modulares

La clase de a por la relación de congruencia módulo m se denota por $\bar{a}$ y el conjunto cociente se denota como $\mathbb{Z}_m$.

Ejemplo: $m = 5$. Como que hay 5 residuos posibles al dividir por 5, habrá cinco clases de módulo 5:

- $\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0(mod\ 5)\} = \{5k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1(mod\ 5)\} = \{1 + 5k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2(mod\ 5)\} = \{2 + 5k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3(mod\ 5)\} = \{3 + 5k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\bar{4} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4(mod\ 5)\} = \{4 + 5k : k \in \mathbb{Z}\}$

El conjunto cociente es entonces: $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

Hechos:

- A $\mathbb{Z}_m$: $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a(mod\ m)\} = \{a + mk : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\bar{a} = \bar{b}$ a $\mathbb{Z}_m \Leftrightarrow a \equiv b(mod\ m)$ Tienen la misma clase si y sólo si son congruentes
- $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

Propiedad 2 $\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{a \equiv a'(mod\ m)} \\ \boldsymbol{b \equiv b'(mod\ m)} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{a + b \equiv a' + b'(mod\ m)} \\ \boldsymbol{ab \equiv a'b'(mod\ m)} \end{array} \right.$

Ejemplo 1: Calcular el residuo de dividir 58×79 módulo 11

$$\left| \begin{array}{l} 58 \equiv 3(mod\ 11) \\ 79 \equiv 2(mod\ 11) \end{array} \right. \Rightarrow \quad 58 \times 79 \equiv 3 \times 2(mod\ 11) \quad \Rightarrow \quad 58 \times 79 \equiv 3 \times 2 = 6$$

Ejemplo 2: Calcular las últimas cifras de $2^{1\,000\,000}$ a mano

Trabajaremos con módulo 100. Empezamos calculando los residuos de las primeras potencias de 2:

$2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64,$

$2^7 = 128 \equiv 28(mod\ 100),$ $\quad 2^8 = 2 \times 2^7 \equiv 2 \times 28 \equiv 56(mod\ 100),$
$2^9 = 2 \times 2^8 \equiv 2 \times 56 \equiv 112 \equiv 12(mod\ 100),$ $\quad 2^{10} = 2 \times 2^9 \equiv 2 \times 12 \equiv 24(mod\ 100),$
$2^{11} = 2 \times 2^{10} \equiv 2 \times 24 \equiv 48 \equiv 48(mod\ 100),$ $\quad 2^{12} = 2 \times 2^{11} \equiv 2 \times 48 \equiv 96 \equiv -4(mod\ 100),$
$2^{13} = 2 \times 2^{12} \equiv 2 \times (-4) \equiv -8(mod\ 100),$

…

$2^{20} \equiv -24(mod\ 100),$ $\quad 2^{21} \equiv -48(mod\ 100),$
$2^{22} \equiv 4(mod\ 100) \equiv 2^2(mod\ 100)$. Aquí observamos el primer valor que se repite

Por lo tanto, también tenemos que: $2^2 \equiv 2^2 2^{20} \equiv 2^2 2^{20} 2^{20} \equiv 2^2 2^{20} 2^{20} 2^{20} \equiv \cdots \equiv 2^{2+20k}(mod\ 100)$

Así que: $1\,000\,000 = 18 + 2 + 20 \times 49\,999 \quad \Rightarrow \quad 2^{1\,000\,000} \equiv 2^{2+20\times 49\,999} 2^{18} \equiv 2^2 2^{18} \equiv 2^{20} \equiv -24 \equiv 76$

Por lo tanto, las últimas dos cifras de $2^{1\,000\,000}$ son 76.

Otras propiedades de las congruencias

1. Si $a \equiv b(mod\ m)$ y $d \mid m$ entonces $a \equiv b(mod\ d)$ (Se puede reducir el módulo)
2. **Si $\boldsymbol{k > 0}$ entonces $\boldsymbol{ka \equiv kb(mod\ km)} \Leftrightarrow \boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ (Simplificación)**
3. Si $mcd(k,\ m) = 1$ entonces: $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow ka \equiv kb(mod\ m)$

Aritmética modular

Podemos definir una aritmética (operaciones de suma y producto) al conjunto $\mathbb{Z}_m$ de la siguiente manera:

- $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$
- $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

Esto está bien definido gracias a la propiedad 2 de las congruencias. Esta propiedad nos dice que: "el resultado no depende del representante". Expresada en términos de clase:

$$\left|\begin{array}{l}\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}' \\ \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}}'\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}\overline{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} \equiv \overline{\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'} \\ \overline{\boldsymbol{ab}} \equiv \overline{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'}\end{array}\right.$$

Con estas operaciones es fácil ver que $\mathbb{Z}_m$ **es un anillo**. El neutro de la suma es $\bar{0}$, el neutro del producto es $\bar{1}$ y el inverso por la suma de $\bar{a}$ es $\overline{-a}$.

La propiedad 2 que acabamos de mencionar dice que el resultado nos permite "escoger el representante" que más nos convenga. Siempre es mejor "reducir" antes de operar

Por ejemplo: $\mathbb{Z}_{3000}$: $\overline{2990}\ \overline{2995} = \overline{(-10)}\ \overline{(-5)} = \overline{50}$

Ejemplo: Tabla de la suma de $\mathbb{Z}_5$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Ejemplo: Tabla del producto de $\mathbb{Z}_5$:

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Observamos que tanto $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ como $\bar{4}$ tienen el inverso respecto al producto. Es decir, todo elemento no nulo tiene inverso. Cuando esto pasa decimos que el anillo es un **cuerpo**. Así que $\mathbb{Z}_5$ es cuerpo.

Ejemplo: Tabla del producto de $\mathbb{Z}_6$:

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ahora observamos que las únicas clases que tienen inversa son $\bar{1}$ y $\bar{5}$.

Inversa modular

Buscar una inversa de $\bar{a}$ a $\mathbb{Z}_m$ es buscar un entero x tal que $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{1}$. O de manera equivalente, un entero x tal que $ax \equiv 1 (mod\ m)$. Esto último quiere decir que $1 = ax + my$ para un cierto y entero. Todo junto nos dice que $\bar{a}$ tiene inverso a $\mathbb{Z}_m \Leftrightarrow$ la ecuación diofántica $ax + my = 1$ tiene solución. Pero esto pasa si y sólo si $mcd(a,\ m) = 1$. Observamos que el inverso se encuentra a partir de una identidad de Bézout por m, a

Acabamos de demostrar que:

Existencia de inversos modulares $\bar{a}$ tiene inverso a $\mathbb{Z}_m$ $\Leftrightarrow$ $mcd(a,\ m) = 1$

Ejemplo: Encontrar el inverso modular de $\overline{227}$ a $\mathbb{Z}_{2292}$

y	0	1	-10	101	-313
q		10	10	3	
r	2292	227	22	7	1

Nota: (Observamos que el valor de x no importa)

Por lo tanto, el inverso de $\overline{227}$ a $\mathbb{Z}_{2292}$ es $\overline{-313} = \overline{1979}$, esto se puede escribir así: $\overline{227}^{-1} = \overline{1979}$

Un cuerpo es anillo cuando, a excepción del 0 (el neutro de la suma), todo elemento es invertible respecto la multiplicación.

Cuando $\mathbb{Z}_m$ es cuerpo $\mathbb{Z}_m$ es un cuerpo $\Leftrightarrow$ m es primo

Sistemas de congruencias

Si tenemos un sistema de dos congruencias: $x \equiv a_1 (mod\ m_1)$, $x \equiv a_2 (mod\ m_2)$, y x es una solución entonces $x = a_1 + m_1 y = a_2 + m_2 z$ para unos ciertos y, z enteros. Por lo tanto, $m_1 y - m_2 z = a_2 - a_1$ tiene solución mediante un sistema chino de dos congruencias si y sólo si $mcd(m_1,\ m_2) \mid a_2 - a_1$.

En caso de tener todas las soluciones son de la forma: $x = a_1 + m_1 y = a_1 + m_1 \left(y_0 + \frac{m_2}{mcd(m_1,\ m_2)} t \right) = a_1 + m_1 y_0 + \frac{m_1 m_2}{mcd(m_1,\ m_2)} t = x_0 + mcm(m_1,\ m_2) t$ dónde x_0 es una solución particular del sistema. Es decir, si el sistema tiene solución, todas las soluciones son de la forma:

$$x \equiv x_0 \big(mod\ mcm(m_1, m_2)\big)$$

Última propiedad de las congruencias

$a \equiv b(mod\ m_1), \dots, a \equiv b(mod\ m_n)$ $\Leftrightarrow$ $a \equiv b\big(mod\ mcm(m_1, \dots, m_n)\big)$

Ejemplo: Consideramos el sistema: $x \equiv 0(mod\ 3)$, $x \equiv 1(mod\ 4)$, $x \equiv 2(mod\ 5)$

Como que: $-3 \equiv 0(mod\ 3)$, $-3 \equiv 1(mod\ 4)$, $-3 \equiv 2(mod\ 5)$

Por transitividad el sistema se puede reescribir: $x \equiv -3(mod\ 3)$, $x \equiv -3(mod\ 4)$, $x \equiv -3(mod\ 5)$

Aplicando la propiedad anterior resulta que esto es equivalente a: $x \equiv -3\big(mod\ mcm(3,\ 4,\ 5)\big)$

Por lo tanto, todas las soluciones al sistema son: $x = -3 + 60t$, t entero

El teorema pequeño de Fermat

Si p es primo y no divide a entonces $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$

Esto se puede expresar en clases a $\mathbb{Z}_p$ de la siguiente manera:

Si p es primo y a es invertible entonces $\overline{a^{p-1}} = \overline{1}$

Ejemplo: Calculamos el residuo de 43^{3221} módulo 13.

Primero reducimos la base: $43^{3221} \equiv 4^{3221}(mod\ 13)$

Como que 4 es primo con 13, por Fermat tenemos que $4^{12} \equiv 1(mod\ 13)$. Como que cada 12 factores "desaparecen", agruparemos los factores en paquetes de 12: haremos la división Euclidiana de 3221 por 12 y obtenemos que $3221 = 268 \times 12 + 5$. Por lo tanto:

$$4^{3221} \equiv 4^{268 \times 12 + 5} \equiv (4^{12})^{268} 4^5 \equiv 1^{268} 4^5 \equiv 4^5 \equiv 10(mod\ 13)$$

Observación Si $n, m \geq 1$ i $n \equiv m\big(mod(p-1)\big)$ $\Rightarrow$ $a^n \equiv a^m (mod\ p)$

Ejemplo: Calculamos el residuo de 4^{3141} módulo 137 reduciendo a Fermat

Como que $3141 \equiv 13(mod\ 136)$ tenemos que: $4^{3141} \equiv 4^{13} \equiv 67108864 \equiv 99(mod\ 137)$