Matemàtiques I

https://github.com/AdriCri22/Matematicas-Discretas-M1-FIB

1.1 Primeres definicions

Un graf $G = (V, A)$, té un nombre de vèrtex *n* i un nombre de arestes *m*. $u, v \in V$ i $a, e \in A$

- *u* i *v* són adjacents o veïns si dos vèrtex estan units per una aresta, es denota $u{\sim}v$ o $uv \in A$, si no són incidents llavors son independents $u \nsim v$.
- *u* i *e* són incidents si *u* i qualsevol altre vèrtexs estan units per una aresta *e*.
- *e* i *a* són incidents si tenen un vèrtex en comú.

$$0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Llista d'adjacències $\rightarrow \begin{cases} v_1: & vèrtexs\ adjacents\ a\ v_1 \\ & \dots \\ v_k: & vèrtexs\ adjacents\ a\ v_1 \end{cases}$

Matriu d'adjacència $M_A = M_A(G)$, és una matriu $n \times n$:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{array} \begin{array}{c} v_1 \quad \dots \quad v_k \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i{\sim}v_j \\ 0, & altrament \end{cases}$$

Matriu d'incidència $M_I = M_I(G)$, és una matriu $n \times m$:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{array} \begin{array}{c} a_1 \quad \dots \quad a_k \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si v}_\text{i}\ i\ a_j\ són\ incidents \\ 0, & altrament \end{cases}$$

1.2 Graus

- Grau de v, $g(v)$: Nombre d'arestes incidents.
- Grau mínim de G, $\delta(G)$: grau mínim dels graus dels vèrtexs.
- Grau màxim de G, $\Delta(G)$: grau màxim dels graus dels vèrtexs.
- Seqüència de graus, són els graus de cada vèrtexs de més a menys separats per comes.

Lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$

Corol·lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar

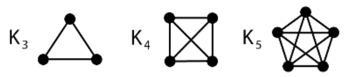
1.3 Isomorfisme

G i G' són grafs isomorfs, $G \cong G'$, si existeix una aplicació bijectiva $f: V \rightarrow V'$, tal que, per tot $u, v \in V$, $u{\sim}v \Leftrightarrow f(u){\sim}f(v)$, en G'.

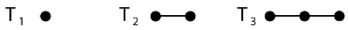
- Un vèrtex i la seva imatge per isomorfisme tenen el mateix grau
- Dos grafs isomorfs tenen la mateix mida i el mateix ordre
- Dos grafs isomorfs tenen la mateixa seqüencia de graus
- Ser isomorfs és una relació d'equivalència
- Per demostrar que no són isomorfs trobar una propietat que tingui una i no l'altre
- Per demostrar que son isomorfs s'ha de construir un isomorfisme (senyalar els vèrtexs corresponents)

1.4 Tipus de grafs

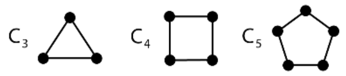
- Graf nul d'ordre n, N_n: graf d'ordre n i mida 0 → Graf en el qual no hi han vèrtexs adjacents.
  N_1 ● N_2 ● ● N_3 ● ● ●
- Graf complet d'ordre n, K_n: graf d'ordre n i mida $\frac{n(n-1)}{2}$ → Graf amb totes les arestes possibles.



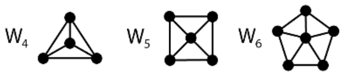
- Graf trajecte d'ordre n, T_n: graf de ordre n i mida $n-1$ → Graf amb conjunt d'arestes $A = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$



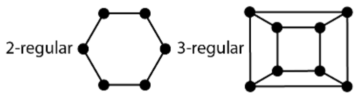
- Graf cicle d'ordre n, C_n, amb $n \geq 3$, graf d'ordre n i mida n → Graf amb conjunt d'arestes $A = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$

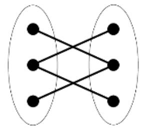


- Graf roda d'ordre n, W_n, amb $n \geq 4$: graf d'ordre n i mida $2n-2$ → Es un graf cicle amb un vèrtex al mig que s'uneix amb tots els vèrtexs.

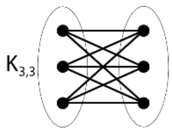


- Graf r-regular d'ordre n: és un graf regular on r és el grau de tots els vèrtexs $g(v) = r, \forall v \in V$, i compleix: $2|A| = r|V|$

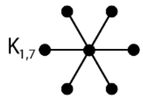




- Graf bipartit, $K_{r,s}$: és un graf que es separa en 2 conjunts (V_1 i V_2) disjunts, de tal manera que les arestes només poden connectar d'un conjunt a un altre.
$\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v) = |A|$.



- Graf bipartit complet: és un graf bipartit amb totes les combinacions possibles de arestes d'un conjunt a un altre. D'ordre $r+s$ i mida rs.
- Graf estrella, $K_{1,s}$: d'ordre $n+1$ i mida s.



1.5 Subgrafs

- Un subgraf de G, $G' = (V', A')$: és un graf amb $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$ → Es quan treus arestes o vèrtexs i les seves respectives arestes a un graf.
- Subgraf generador de $G, G' = (V', A')$: és un subgraf tal que $V' = V$ → quan tenen el mateix nombre de vèrtexs, però no el mateix nombre d'arestes.
- Subgraf induït o generat per $S \subseteq V$: és un graf $G[S] = (S, A')$ tal que $A' = \{uv \in A : u, v \in S\}$ → és un subgraf que té totes les arestes del graf original que acompanyen als vèrtexs que hem triat.

1.6 Operacions amb grafs

- $G \cup G' = |V| + |V'|\ i\ |A| + |A'|$
- $G \times G'$ → conjunt de vèrtexs $V \times V'$ i les adjacències
  $(u, u') \sim (v, v') \Leftrightarrow (uv \in A\ i\ u' = v')\ o\ (u = v\ i\ u'v' \in A')$
  Dos vèrtexs seran adjacents si i només si dos vèrtex son iguals i ja existia una aresta

2.1 Recorreguts

Un *u*-*v* recorregut de longitud k és una seqüència de vèrtexs i arestes del graf $u_0u_1u_2 \dots u_{k-1}u_k$

- Si $u = v$ → Recorregut tancat
- Si $u \neq v$ → Recorregut obert

Tipus de recorregut:

- Camí: tots els vèrtexs són diferents
- Cicle: $k \geq 3$, tots els vèrtexs són diferents excepte u_0 i u_k

- Senderó: recorregut obert que no repeteix arestes
- Circuit: es un senderó tancat

Proposició 1: Si hi ha un recorregut de longitud k hi ha un camí de longitud $\leq k$.

Proposició 2: Si un graf té 2 camins diferents llavors conté un cicle.

2.2 Grafs connexos

- Un graf connex es aquell que per tot parell de vèrtexs *u*, *v* existeix un *u*-*v* camí.
- Si un graf no és connex, llavors, existeixen unes components connexos (subgrafs connexos).

Proposició 3: un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles.

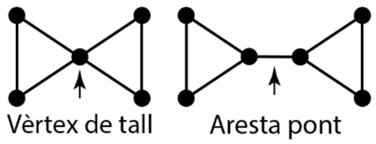
Proposició 5: Tot graf connex d'ordre n té com a mínim $n - 1$ arestes.

Algorisme DFS: Cerca en profunditat (Depth-First Search)

Algorisme que explora en ordre creixen el graf d'1 en 1 i que al trobar que no pot avançar més retorna a vèrtexs anteriors per buscar de nous. Serveix per saber si un graf és o no connex

Vèrtex	Pila	Vèrtexs	Arestes	Acció
	$v_1, \ldots$	$\{v_1, \ldots\}$ vèrtexs per ordre d'entrada	$\{v_1 v_2, \ldots\}$	Afegir/treure vèrtex

2.3 Vèrtexs de tall i arestes pont



Proposició 4: $G = (V, A)$ és un graf connex i $a \in A$ i $v \in V$.

$-$ v és un vèrtex de tall o vèrtex d'articulació si $G - v$ té com a molt $g(v)$ components connexos.

$-$ a és una aresta pont si $G - a$ té 2 components connexos.

- Es un graf 2-connex si no té vèrtexs de tall, és connex i $n \geq 3$.

2.4 Distància

- Definim distància entre 2 vèrtexs com valor mínim entre les longituds de tots els camins entre els 2 vèrtexs.
- Excentricitat, $e(u)$: es la distància màxima entre un vèrtex u i qualsevol altre vèrtex.
- Diàmetre de G, $D(G)$: la màxima excentricitat del graf.
- Radi de G, $R(G)$: mínima excentricitat del graf.

Algorisme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

Algorisme que a partir d'un vèrtex abasta tots els altres vèrtexs en ordre creixent. Serveix per calcular la distància des de un vèrtex fixat a un altre.

Vèrtex	Cua	Vèrtexs	Distància	acció
	$v_1, \ldots$	$\{v_1, \ldots\}$ vèrtexs per ordre d'entrada	(D(v_1), ..., D(v_k))	Afegir/treure vèrtex

2.5 Caracterització dels grafs bipartits

Lema 10:

1- Si a G hi ha un recorregut tancat de longitud senar, a G hi ha un cicle de longitud senar.
2- L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a G no assegura la existència de cicles a G.

Teorema 11: Un graf d'ordre ≥ 2 és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar.

3.1 Grafs eulerians

Sigui G un graf connex, s'anomena:

- Senderó eulerià a un senderó que passa per totes les arestes de G sense repetir cap.
- Circuit eulerià a un circuit que passa per totes les arestes de G sense repetir arestes excepte la primera i la última que són la mateixa.
- Graf eulerià a G si té un circuit eulerià.

Teorema: Sigui G un graf connex, G és un graf eulerià $\Leftrightarrow$ tots els vèrtexs tenen grau parell.

Corol·lari: Un graf connex té senderó eulerià $\Leftrightarrow$ té exactament 2 vèrtexs de grau senar (comença amb el vèrtex de grau senar i acaba amb l'altre vèrtex de grau senar).

Observació G és un graf eulerià $\Rightarrow$ G és un graf connex

3.2 Grafs hamiltonians

Sigui G un graf connex, s'anomena:

- Camí hamiltonià a un camí no tancat que passa per tots els vèrtex de G sense repetir cap.
- Cicle hamiltonià a un cicle que passa per tots els vèrtexs de G sense repetir cap excepte el primer i l'últim que són el mateix.
- Graf hamiltonià a G si té un cicle hamiltonià.

Condicions necessàries

Sigui G un graf hamiltonià d'ordre n, aleshores

1- $g(v) \geq 2$, per tot $v \in V$, Tot vèrtex d'un graf hamiltonià ha de tenir grau major o igual a 2.
2- Si $S \subset V$, $S \neq \emptyset$ i $k = |S|$, el graf $G - S$ té com a molt k components connexos. Al treure un número de vèrtexs del graf no poden haver més components connexos que vèrtexs eliminats del graf.
Observem: G graf connex amb vèrtex de tall $\Rightarrow$ G no és hamiltonià.

Condicions suficients

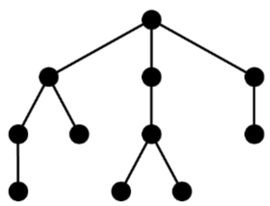
Teorema de Ore $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot $u, v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià.

Teorema de Dirac $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$, per a tot $u \in V$. Aleshores, G és hamiltonià.

Observació: G és un graf hamiltonià $\Rightarrow$ G és un graf connex i $|V| \geq 3$

4.1 Arbres i teorema de caracterització

- Si T un arbre $\Rightarrow$ T és un graf connex i acíclic.
- Si G un bosc $\Rightarrow$ G acíclic.
- Una fulla és tot vèrtex d'un arbre o d'un bosc que tingui grau 1.



Observació: Els components connexos d'un bosc són arbres

Remarques: Siguin $T = (V, A)$ un arbre, a una aresta i u un vèrtex de T. Llavors:

1. T conté almenys 1 fulla.
2. a és aresta pont, qualsevol aresta es pont.
3. $T - a$ és un bosc de 2 components connexos.

4. Si $g(u) \geq 2$, u és un vèrtex de tall.
5. $T - u$ és un bosc de $g(u)$ components connexos.
6. Si u és una fulla, aleshores $T - u$ és un arbre.

Proposició 1: Tot graf acíclic d'ordre n té mida com a molt $n - 1$.

Teorema 2 Caracterització d'arbres

Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m. Aleshores, són equivalents:

(a) T és un arbre.
(b) T és acíclic i $m = n - 1$.
(c) T connex i $m = n - 1$.
(d) T és connex i tota aresta es pont.
(e) Per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic $u - v$ camí a T.
(f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle

Corol·lari 3: Un bosc G d'ordre n i k components connexos té mida $n - k$.

Corol·lari 4: Si T és un arbre d'ordre $n \geq 2$, T té almenys 2 vèrtexs de grau 1.

4.2 Arbres generadors

Són arbres generadors o d'expansió els subgrafs d'un graf que són subgrafs generadors i a més arbres.

Teorema 5: $G = (V, A)$ és un graf connex $\Leftrightarrow$ G té un arbre generador.

Algoritme DFS per obtenir arbres generadors

Vèrtex	Pila	Vèrtexs	Arestes	Acció
	$v_1, \dots$	$\{v_1, \dots\}$ vèrtexs per ordre d'entrada	$\{v_1 v_2, \dots\}$	Afegir/treure vèrtex

Teorema 6: $T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex G que conté v.

Algoritme BFS per obtenir arbres generadors

Vèrtex	Cua	Vèrtexs	Arestes	Acció
	$v_1, \dots$	$\{v_1, \dots\}$ vèrtexs per ordre d'entrada	$\{v_1 v_2, \dots\}$	Afegir/treure vèrtex

Teorema 7: $T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v.

5.1 Matrices: operaciones básicas i matrices escalonadas

Suma y resta → Deben tener la misma dimensión

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Producto de un número por una matriz

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por una matriz → El número de columnas de la matriz A ha de ser igual al número de filas de la matriz B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta → Cambia filas por columnas.

Matriz simétrica → Matriz cuadrada, donde la transpuesta es igual a la matriz.

Matriz inversa → Ha de ser una matriz cuadrada y debe tener un determinante diferente de 0.

$$B = A^{-1} \rightarrow B \cdot A = A \cdot B = I \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan para calcular la inversa

1- Empezar con la matriz $(A|I)$.
2- Aplicar transformaciones elementales a $(A|I)$ para llegar a $(I|B)$.
3- Si se consigue $\Longrightarrow A^{-1} = B$.
4- Si no, A no es invertible.

Transformaciones elementales de una matriz A

1- Intercambiar dos filas de A.
2- Multiplicar una fila de A por un escalar no nulo.
3- Sumar a una fila de A el resultado de multiplicar otra fila por un escalar no nulo.

Una matriz es elemental si se puede obtener a partir de una matriz identidad (I) mediante una única transformación elemental por filas.

Matrices equivalentes: una matriz B es equivalente a una matriz A si a partir A puedes llegar a B mediante una secuencia de transformaciones elementales.

$$B = E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1 A$$

Matriz escalonada → Toda matriz es equivalente a una matriz escalonada por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

El rango de una matriz A es el número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente a A.

Aplicación del cálculo de la inversa

Lema: Si E es una matriz elemental, entonces E es invertible y su inversa E^{-1} también es una matriz elemental.

Teorema: Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y M una matriz escalonada equivalente a A. Entonces A es invertible $\Leftrightarrow$ todos los elementos de la diagonal de M son iguales a 1.

Corolario: Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces A es invertible $\Leftrightarrow$ el rango de A es n.

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal: es aquella que involucra solamente sumas y restas de variables elevadas a la primera potencia (Se llaman lineales porque se representan como rectas en un gráfico).

La **solución general** de un sistema es el conjunto de todas sus soluciones.

Dos **sistemas** son **equivalentes** si tienen la misma solución general.

Matriz asociada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_1 n x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada: es la matriz $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Teorema de Rouché-Frobenius

- Si $r < r'$ → Sistema incompatible (SI)
- Si $r = r' = n$ → Sistema compatible determinado (SCD)
- Si $r = r' < n$ → Sistema compatible indeterminado (SCI) amb $n - r$ grado de libertad.

Matriz asociada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Matriz ampliada $(A|b)$ $r \rightarrow rango\ d'A$ $r' \rightarrow rango\ (A|b)$ n =número de incógnitas

Sistema homogéneo

Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si todos los términos independientes son iguales a 0. (Un sistema homogéneo siempre es compatible).

<u>Corolario:</u> Sea A la matriz asociada a un sistema homogéneo en n variables; sea r rango de A, entonces:

- Si $r = n$, el sistema es compatible determinado y la única solución es trivial.
- Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado y tiene alguna solución diferente de la trivial.

Resolución de sistemas: eliminación gaussiana → Encontrar la solución general de un sistema de ecuaciones lineales:

1- Encontrar matriz ampliada $(A|b)$.
2- Encontrar la matriz escalonada M equivalente a $(A|b)$.
3- Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius para determinar si es SC.
4- Si es SC, encontrar la solución general a partir del sistema equivalente con la matriz ampliada M.

5.3 Determinantes

$$2x2 \rightarrow M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$3x3 \rightarrow M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

- Sumar o restar filas no cambia el valor del determinante.
- Multiplicar o dividir por un número escalar una o más filas sí que cambia en valor del determinante, como resultado del determinante queda éste por el escalar.

Corolario: Si M se obtiene a partir de A haciendo transformaciones elementales, $\det(M) = K\det(A)$, donde $K \neq 0$. Por lo tanto, si A i M son matrices equivalentes, entonces $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$.

Teorema: una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Corolario: una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ tiene rango $n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Teorema: sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El rango de A es $r \Leftrightarrow$ el más grande menor de A con determinante no nulo es $r \times r$.

Operaciones con determinantes → Sea $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, entonces:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- Si A es invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- En general, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

6.1 Espacios vectoriales: Operaciones

Propiedades de la suma:

- Asociativa $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Conmutativa $x + y = y + x$
- Elemento neutro $x + 0 = x$
- Elementos opuestos, por todo x existe x' tal que $x + x' = 0$

Propiedades de la multiplicación:

- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + x\mu$
- $1x = x$

6.2 Espacios vectoriales:

Para comprobar que un conjunto es un espacio vectorial, hay que ver:

1- Que no es un conjunto vacío
2- Están encerrados en sumas y productos escalares

Propiedades, v pertenece al espacio vectorial E i λ es un escalar, que cumple:

- $0_v = 0_E$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- Si $\lambda v = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0 \; o \; v = 0_E$
- El elemento opuesto de v es $(-1)v$; normalmente se escribe $-v$.

6.3 Subespacios vectoriales y combinaciones lineales: un subconjunto $S \subseteq E$ es un subespacio vectorial (SEV) si cumple:

1. $s \neq 0$
2. $\forall u, v \in S, \;\; u + v \in S$
3. $\forall u \in S \; i \; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \;\; \lambda u \in S$

El vector 0_E pertenece a todos los subespacios vectoriales

Lema: Si S i S' son subespacios vectoriales de E, entonces $S \cap S'$ también lo es.
La unión de subespacios vectoriales normalmente no es un subespacio vectorial

Combinación lineal

Para escribir una combinación lineal hay que hacer la matriz ampliada del conjunto de vectores y el vector que queremos escribir como combinación lineal y hay que ir haciendo matrices equivalentes hasta ver la condición que ha de cumplir para que el sistema sea SCD.

Subespacio generado → hacer combinación lineal.

Subespacio dando los vectores en función de parámetros: Dar cada vector del conjunto junto a la solución de la combinación lineal de la matriz ampliada $(sol_1 \cdot vec_1 + sol_2 \cdot vec_2 + \cdots)$.

6.4 Independencia lineal

Para determinar si un conjunto de vectores son linealmente independientes seguir estos pasos:

1- Formar matriz con los vectores dados poniéndolos por columnas.
2- Calcular rango
3- Si $r = k$, entonces los k vectores son linealmente independientes (LI).
   Si $r < k$, entonces son linealmente dependientes (LD).

Para determinar si un conjunto de vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son linealmente independientes seguir estos pasos:

1- A partir de la ecuación vectorial $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$ obtener un sistema homogéneo con incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.
2- Discutir si el sistema es:
   - SCD $\Longrightarrow$ el conjunto de vectores es linealmente independientes.
   - SCI $\Longrightarrow$ el conjunto de vectores es linealmente dependientes.

Propiedades: Sea $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E

- Si 0_E está en $S \Longrightarrow \; u_1, \ldots, u_k$ es LD
- Si $u_1, \ldots, u_k$ son LI $\Longrightarrow 0_E$ no está en S
- Si $u_1, \ldots, u_k$ son LI $\Longrightarrow$ todo subconjunto de S es LI
- Si $u_1, \ldots, u_k$ son LD, todo el subconjunto que contiene S es LD

Teorema: Si $u_1, \ldots, u_k$ es LD i u_1 es una combinación lineal de otros vectores de S, entonces $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle = \langle u_2, \ldots, u_k \rangle$

Teorema: Un conjunto de vectores S es LD $\Leftrightarrow$ hay un vector v a S que es combinación lineal del resto de vectores de S

Corolario: Sea $v \in E$. Si $u_1, \ldots, u_k$ son LI $\Longrightarrow v, u_1, \ldots, u_k$ son LI $\Leftrightarrow v \notin \langle u_2, \ldots, u_k \rangle$

6.5 Bases y dimensión

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es base de E si:

- B es linealmente independiente
- $E = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, es decir, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ generan E

Proposición: Todo vector de E se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de B. Sea $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, decimos que $v_B = (\alpha_1, \ldots., \alpha_n)$ es el vector de coordenadas de v en base B.

Proposición: Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunto de vectores de E que son linealmente independientes. Entonces $k \leq n$.

Corolario: Toda base de E tiene n elementos

<u>Dimensión</u>: Es el cardinal de las bases de un espacio vectorial E (o SEV), se denota $\dim(E)$

- La dimensión de 0_E es 0
- La dimensión de un subespacio dado por generadores es el número máximo de vectores linealmente independientes (que es el rango de la matriz).
- La dimensión de un subespacio dado como sistema de ecuaciones homogéneo es el número de grados de libertad del sistema.

Sea n la dimensión de E y W un subconjunto de E

- Si W es un conjunto linealmente independiente $\Longrightarrow W$ es una base de E.
- Si W genera $E \Longrightarrow W$ es una base de E

Si S es un subespacio de E, entonces:

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- Si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

<u>Cambio de base</u>

Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i $B' = \{b_1', \ldots, b_n'\}$ dos bases de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E. Sea u un vector de E. Vemos como se relacionan los vectores de coordenadas u_B i $u_{B'}$

Se llama matriz de cambio de la base B a la base B' a la matriz que tiene por columnas los vectores de coordenadas $(b_1)_{B'}, \ldots, (b_n)_{B'}$. Se denota $P_{B'}^{B}$

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_1)_{B'} & (b_2)_{B'} & \cdots & (b_n)_{B'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Entonces:

- $u_{B'} = P_{B'}^{B}\, u_B$, expresando los vectores de coordenadas en columna
- $P_{B}^{B'} = \left(P_{B'}^{B}\right)^{-1}$

7.1 Aplicaciones lineales

Una aplicación es lineal si $\forall u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$

$\forall u \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(u\lambda) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, decimos que f es un endomorfismo

Propiedades:

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u), \forall u \in E$
- Si S es un subespacio de E, $f(S)$ es un subespacio de F
- Si S' es un subespacio de F, $f^{-1}(S')$ es un subespacio de E

Proposición: Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de $E \Longrightarrow f$ está determinado por $f(b_1), \dots, f(b_n)$. Es decir, a partir de la imagen de una base se puede obtener la imagen de cualquier vector de E: si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \Longrightarrow f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$.

Col·lorario: Si $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ es un subespacio de $E \Longrightarrow f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$

Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de E, W una base de F i m la dimensión de F, la matriz asociada a f en las bases B i W:

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \cdots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Vector de coordenadas $f(u)_W = M_W^B(f) u_B$

7.2 Núcleo e imagen

El núcleo de f es $Ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0_F\}$

La imagen de f es $Im(f) = \{v \in F : v = f(u) \quad \exists u \in E\} = \{f(u) : u \in E\}$

Proposición: $Ker(f)$ y $Im(f)$ son subespacios vectoriales de E y F, respectivamente.

Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de E, $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de Fy sea $M = M_W^B(f)$

Núcleo: Trabajando con coordenadas, los vectores del núcleo son las soluciones del sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas.

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$ la dimensión del núcleo es $n - rang0(M)$

Imagen: $Im(f) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$, la dimensión de la imagen es el rango de M

Teorema: $\dim(E) = \dim\big(Ker(f)\big) + \dim\,(Im(f))$

- f es inyectiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow rango(M) = \dim\,(E)$
- f es exhaustiva $\Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = \dim(F) \Leftrightarrow rango(M) = \dim\,(F)$
- f es biyectiva o es un isomorfismo $\Leftrightarrow rango(M) = \dim(E) = \dim\,(F)$
- Si E i F tienen la misma dimensión $\Longrightarrow f$ es un isomorfismo$\Leftrightarrow f$ es inyectiva $\Leftrightarrow f$ es exhaustiva

7.3 Composición de aplicaciones lineales

Proposición: Si $f: E \to F$ i $g: F \to G$ son aplicaciones lineales, la composición $f \circ g: E \to G$ también es lineal

Proposición: Si $f: E \to F$ es isomorfismo, $f^{-1}: F \to E$ también lo es

7.4 Cambio de base

Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal, B y B' bases de E, y W y W' bases de F

$$f = I_F \circ f \circ I_E \qquad M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} \cdot M_W^B(f) \cdot P_B^{B'}$$

8.1 Diagonalización

Definición: Un endomorfismo $f: E \to E$ es diagonalizable si existe alguna base B de E tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

Observación: Suponemos que $M_B(f)$ no es diagonal, pero sabemos que el endomorfismo f diagonaliza en otra base B', entonces la matriz $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$ es diagonal.

8.2 Valores y vectores propios

Definición: Un escalar λ es un valor propio del endomorfismo f si existe algún vector $v \neq 0_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Teorema: El endomorfismo $f: E \to E$ diagonaliza $\Leftrightarrow$ hay alguna base de E formada por vectores propios.

8.3 Cálculo de vectores propios

Definición: El polinomio característico del endomorfismo f es $p_f(x) = \det(M - xI_n)$

Teorema: Los valores propios de f son las raíces del polinomio característico.

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ es una multiplicidad de λ como a raíz de $p_f(x)$ y se denota m_λ.

La ecuación $p_f(x) = 0$ se la llama ecuación característica.

Teorema: El polinomio característico no depende de la base en la que calculamos la matriz asociada M.

8.4 Espacios vectoriales propios

Sea λ un valor propio del endomorfismo $f: E \to E$ el espacio propio del valor propio λ es el conjunto $E_\lambda = \{u \in E: f(u) - \lambda u = 0_E\}$

Propiedades

- E_λ es un subespacio vectorial de E
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

La dimensión de E_λ se llama multiplicidad geométrica de λ.

8.5 Caracterización de los endomorfismos diagonalizables

Sea $f: E \to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n.

Teorema: El endomorfismo f es diagonalizable $\Leftrightarrow$ tiene n valores propios (contando multiplicidades) y para cada valor propio las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.

Corolario: Si f tiene n valores propios diferentes $\Longrightarrow$ es diagonalizable.

8.6 Algoritmo de diagonalización

Para decidir si un endomorfismo $f: E \to E$ es diagonalizable, podemos seguir los pasos siguientes:

1- Encontrar la matriz asociada a f es una base cualquiera y calcular el polinomio característico $p_f(x)$.
2- Encontrar los valores propios y sus multiplicidades resolviendo $p_f(x) = 0$.
3- Si las multiplicidades de los valores propios suman menos de $\dim(E)$, el endomorfismo no diagonaliza, si no paso 4.
4- Para cada valor propio λ, encontrar el espacio propio E_λ y su dimensión $\dim(E_\lambda)$.
5- Si por todo λ se cumple $m_\lambda = \dim\,(E_\lambda)$, el endomorfismo diagonaliza, si no, no lo hace.

Si el endomorfismo diagonaliza, para encontrar una base que diagonalize solo hay que tomar el valor de la unión de las bases de los espacios E_λ.